Estudio de algunas estructuras algebraicas construidas a partir de ultra-productos

presentado por

Roger Alexander Mayorga Quevedo – Código 2009240031 – 1022943601

Camilo Andres Rodríguez Jimenez – Código 2009240047 – 1070964372

trabajo de grado asociado al estudio de un tema específico

presentado al departamento de licenciatura en Matemáticas como parte de los requisitos para el grado de Matemáticas

Asesor: Yeison Alexander Sanchez Rubio

Universidad Pedagogica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Enero, 2015

A nuestras familias por su apoyo incondicional

Agradecimientos

Queremos agradecer a nuestros padres por brindarnos la posibilidad de estudiar aquello que nos apasiona, y darnos así la oportunidad de conocer y experimentar satisfacciones que se escapan de la inmediatez. Gracias por todo.
Agradecemos a nuestros asesores Leonado Ángel y Yeison Sánchez por sus grandes aportes. Al profesor Ángel, que con su capacidad de incentivarnos a estimar cada vez más las matemáticas, nos ha motivado a realizar este trabajo y a continuar con nuestros estudios, acercándonos así a nuevos campos de la matemática. Al profesor Yeison, por su paciencia y detenimiento a realizar una revisión minuciosa, lo cual ha enriquecido en gran medida el contenido del presente trabajo. Siempre estaremos agradecidos con ustedes, por ser parte de nuestra formación académica.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 3

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Estudio de algunas estructura algebraicas construidas a partir de ultra-productos
Autor(es)	Mayorga Quevedo, Roger Alexander; Rodríguez Jimenez, Camilo Andres
Director	Sanchez Rubio, Yeison Alexander
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 114 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Filtros, productos reducidos, estructuras algebraicas, números no estándar.

2. Descripción

Trabajo de grado que se propone con el fin de estudiar estructuras algebraicas en productos reducidos. Con este fin se ha expuesto minuciosamente su mecanismo de construcción, la cual consiste en debilitar la noción de igual en los productos cartesianos arbitrarios, estableciendo así la relación que existe entre las familias de estructuras que definen el producto cartesiano con el producto reducido. Luego de esto, se caracterizan a los elementos del producto reducido entre números estándar y no estándar, basándonos en las ideas encontradas principalmente en Robinson y Takeuchi. Por último, se hace un estudio de los números cuadrados y la relación de divisibilidad, llegando al estudio de ecuaciones de primer y segundo orden.

3. Fuentes

Abraham, R. (1966). *Non-standard analysis.* (Princeton Landmarks in Mathematics, Ed.) (2nd ed.). Los Angeles: Princeton University Press.
Carlos, I. (n.d.). *Análisis no estándar.*
Elemér, R. (n.d.). *Short introduction to nonstandard analysis.* (Department of Mathematics, Ed.). South Africa: University of Pretoria.
Gutiérrez, víctor diego. (2012). *z-ultrafiltros y compactificación de Stone-Cech.* Universidad de Cantabria, santander.
Takeuchi, Y. (1988). *Metodos analiticos del analisis no standar.*

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 3

4. Contenidos

El capítulo 1 el cual se titula "Filtros y productos reducidos " surgió en la etapa de indagación la cual se propone exponer los conceptos previos para el estudio de los productos reducidos. El segundo capítulo surge en la etapa de contextualización, el cual se titula "estructuras algebraicas en productos reducidos y en ultraproductos" , proponiéndose así como objetivo, dotar tal construcción de una estructura algebraica y estudiar la relación que tienen cada estructura de la familia que definen al producto cartesiano con la estructura del producto reducido. En el tercer capítulo se titula "La familia de los $\mathbb{Z}_n$ y sus productos reducidos" el cual pretende copiar en esta estructura algunos conceptos como el de números no estándar y otros encontrados en las anteriores etapas; esta etapa se caracteriza por clasificar los números del producto reducido. Por último, se realiza un estudio aritmético en la estructura obtenida en el capítulo cuarto se considera como una aplicación de lo obtenido en los anteriores capítulos.

5. Metodología

No aplica.

6. Conclusiones

Sobre el desarrollo del trabajo

- Al indagar y estudiar acerca de la construcción y análisis de los números reales no estándar, encontramos que las fuentes bibliográficas consultadas en general, hacen un fuerte énfasis desde el campo de la teoría de modelos, y no desde una construcción de productos reducidos.

Sobre filtros

- Los filtros sobre un conjunto dado, pueden ser clasificados al considerar la intersección de todos los elementos que pertenece al filtro; si esta intersección pertenece al filtro, llegamos a lo que se denomina filtro principal, si esta intersección es vacía, se obtienen filtros libres, de lo contrario se obtiene un filtro no libre y no principal.

	FORMATO
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 3

- Es posible identificar el tipo de filtro por medio de la cardinalidad del conjunto del cual se genera el filtro y por medio de la cardinalidad de sus elementos, así, si el conjunto base es finito o alguno de sus elementos es finito, el filtro necesariamente es principal. En consecuencia, si se quiere obtener filtros no principales, se debe partir de un conjunto infinito y además se debe tener que todo elemento del filtro contenga a otro propiamente.
- Por medio del filtro maximal de una cadena ordenada de filtros, se llega al concepto de ultrafiltro. Este orden se define por medio de la contenencia entre filtros.

Sobre productos reducidos

- La relación que guarda las propiedades algebraicas de la familia de estructuras base con el producto reducido se puede enunciar de la siguiente manera: Si una propiedad algebraica que cumple ser formulada con un enunciado simple que se puede expresar sin variables libres, que tiene solo cuantificadores, símbolos de operación válidos en las estructuras y la igualdad para casi todas las estructuras de la familia base entonces esta propiedad es transferida al producto reducido. En este sentido, la expresión ”para casi todo” lo determina el filtro que genera al producto reducido.
- las propiedades que cumplen casi todas las estructuras de la familia base, tienen una excepción y esta excepción se quiere transferir o por otra parte se quiere obtener una relación de orden total en el producto reducido, este debe ser generado a partir de un ultrafiltro, en otras palabras un ultraproducto.

Elaborado por	Roger Alexander Mayorga, Camilo Andrés Rodríguez		
Revisado por	Yeison Alexander Sánchez Rubio		
Fecha de elaboración del resumen	26	01	2015

Índice general

INTRODUCCIÓN

Nuestra formación como licenciados en matemáticas se ha visto influenciada por dos componentes principales, uno de carácter pedagógico y el otro disciplinar, siendo este ultimo el que nos motiva a la realización de este trabajo. El objetivo principal es realizar un estudio algebraico de los productos reducidos, los cuales se pueden definir como particiones sobre un producto de conjuntos arbitrarios, en otras palabras, por medio de la noción de filtro se debilita la relación de igualdad en los producto cartesianos arbitrarios. Esto con el fin de buscar una estructura que cumpla algunas de las propiedades de los número estudiados en la licenciatura como lo son los naturales, enteros etc, como también encaminándonos en la búsqueda de nuevas propiedades.

En el primer capitulo se expone el mecanismo de construcción para obtener tal partición. Este consiste en construir mediante el concepto de filtro una relación de equivalencia, la cual define en ultimas nuestra partición. Por tal motivo este capitulo se ha destinado en primera instancia, al estudio de filtros obteniendo una clasificación que nos permitirán caracterizar a los productos reducidos. Luego, basados en lo anterior, se definen los productos reducidos obteniendo algunos resultados sobre equipoténcia.

Como el interés es de tipo algebraico, en el segundo capitulo se define la operación canónica de los productos arbitrarios a los productos reducidos, estudiando así, en qué condiciones las propiedades algebraicas son transferidas. Ademas se brinda un resumen de algunos productos reducidos clásicos que han sido estudiados por otros autores, tales como los naturales y reales no estándar. Por ultimo, se hacen algunas observaciones sobre la relación de orden inducida en estos productos.
Con los insumos del primer y segundo capitulo se toma el producto reducido generado a partir de la familia de estructuras de los $\mathbb{Z}_p$. Aprovechando la clasificación de números estándar y no estándar, los cuales ha sido definidos en los ejemplos clásicos estudiados en el capitulo dos, se han obtenido algunos resultados tales como en qué condiciones los números estándar de estos producto reducido resultan ser cerrados bajo la operación inducida. Luego, se obtienen en este contexto una representación de lo que habitualmente conocemos como números naturales, números negativos, números enteros y a partir de esto se termina de clasificar a todo el producto reducido por medio de lo que se denominará como Ramas", la cual nos generará una nueva partición. Por ultimo se harán algunas observaciones sobre la relación de orden inducida.

En el cuarto y ultimo capitulo se hará un estudio aritmético de la estructura que se estudio en el tercer capitulo, copiandonos de lo realizado en los cursos de aritmética. Este estudio empieza por caracterizar en este contexto a los números cuadrados y realizar un estudio de la divisibilidad, como los conceptos de divisores de cero, unidades, asociados numero irreductibles y números primos. Todo lo anterior nos servirá de base para estudiar la solución de ecuaciones.

Se ha dejado claro desde el principio que no es de nuestro interés reflexionar sobre la parte pedagógica, sin embargo se debe tener presente que estamos totalmente convencidos que el profundizar en el estudio de las matemáticas aporta en gran medida, a la forma en que enseñaremos matemáticas a nuestros estudiantes. Por ejemplo, el concepto de numero primo ha sido ampliado por medio de este trabajo, el cual es primordial cuando se enseña el conjunto de los números naturales.

Capítulo 1

FILTROS Y PRODUCTOS REDUCIDOS

Desde el punto de vista topológico es de interés el estudio de estructuras formadas por colecciones de conjuntos que son cerradas bajo algunas operaciones como la unión, la intersección entre otras, y que cumplen condiciones de existencia; por ejemplo, un espacio topológico se define como una colección de conjuntos cerrada bajo la intersección finitas y las uniones arbitrarias, una sigma-álgebra como una familia no vacía de subconjuntos, cerrada bajo complementos, uniones e intersecciones contables. De manera análoga a estas estructuras, aparece la noción de filtro que se describe como una colección de conjuntos, la cual cumple ser cerrada bajo las intersecciones finitas y tiene a los súperconjuntos de cada uno de sus elementos. Este concepto, es utilizado en diferentes ramas de la matemática como la teoría de modelos, topología, álgebra combinatoria, teoría de conjuntos, lógica entre otras. Por ejemplo, ”en topología los filtros aparecieron por el interés de algunos matemáticos, como Henri Cartan de ampliar y formalizar ideas como la de convergencia” dado que las sucesiones solo son de utilidad para la convergencia de algunos espacios. Además, han sido ampliamente utilizados como un mecanismo para establecer nuevas relaciones de equivalencia como sucede en este documento.
Por otro lado, los filtros han sido utilizados desde la lógica para la construcción de modelos no estándar de estructuras conocidas, en las cuales se pueden observar nuevas propiedades o dejar de tener algunas de las usuales. El primero en crear un universo no estándar que sirviera de base para la aritmética fue Skolem, basando su estudio de la aritmética a partir de la operación multiplicación. Los infinitesimales de Leibniz fueron inspiración para el matemático estadounidense Abraham Robbinson (1966) el cual a partir de los ultraproductos generados por ultrafiltros obtiene un universo no estándar, y de esta forma da una fundamentación lógica rigurosa a este nuevo universo.
Ahora bien, ya que los autores no están familiarizados con el conocimiento necesario para hacer un estudio formal desde la teoría de modelos, se ha decidido realizar una descripción más intuitiva del asunto,mostrando el fundamento de las herramientas empleadas y tratando de ejemplificar los resultados encontrados esta alternativa se ha encontrado en la Teoría de sucesiones [12].

1.1 Generalidades y ejemplos de filtros

Definición 1.1.1. Se dice que $F \subseteq P(X)$ es un filtro sobre un conjunto X si cumple las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset \notin F$ y $F \neq \emptyset$

(ii) Si $A, B \in F$ entonces $A \cap B \in F$

(iii) Si $A \in F$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in F$

Debe observase que por la condición i de la definición de filtros si $X = \emptyset$ entonces no hay filtros , si se permite que $\emptyset \in F$ el filtro resulta ser $P(X)$, denominado el filtro impropio [10]. Sin embargo, para los objetivos del presente trabajo no se toma como posible filtro. Además, nótese la gran similitud que esta definición tiene con la dada para una topología, y aún más, si un filtro dado es unido con el conjunto vacío, obtenemos una topología llamada filtrosa. En cuanto a la condición ii y iii se tienen, respectivamente, las siguientes propiedades para todo filtro:

Teorema 1.1.1. *Si F es un filtro sobre X, entonces*

(i) Dado $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$.

(ii) $X \in F$.

Demostración.

(i) Por la propiedad ii de filtros se tiene $A_1 \cap A_2 \in F$ luego es cierto para $k = 2$, se supone cierto para $k = n$ y se demostrara para $k = n + 1$, como:

$$A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} \in F \text{ y } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$$

por la propiedad ii de filtro se tiene que

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1} \in F \text{ es decir } \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \in F$$

(ii) Por la condición i de la definición de filtros se tiene que existe $A \in F$, esto implica que $A \in P(x)$ luego $A \subseteq X$ por la propiedad iii de la definición de filtro $X \in F$.

□

A continuación se muestran ejemplos de filtros sobre un conjunto X finito:

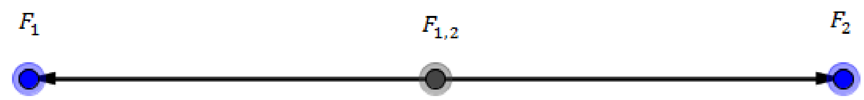
Ejemplo 1.1.1. Si $X = \{1, 2\}$ los únicos filtros sobre X son los siguientes:

$$F_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \quad F_2 = \{\{2\}, \{1, 2\}\}, \quad F_{1,2} = \{\{1, 2\}\}$$

La notación utilizada para nombrar los filtros, consiste en escribir un subíndice en el que deben aparecer los elementos que pertenecen a la intersección de todos los elementos del filtro, por ejemplo, como se puede observar los elementos de la intersección de todos los elementos del filtro $F_{1,2}$ es $1, 2$. Ademas, se aprovecha y se miran los cardinales de estos filtros:

$$|F_1| = |F_2| = 2 \text{ y } \quad |F_{1,2}| = 1$$

Puede observarse que $F_{1,2} \subset F_1$ y $F_{1,2} \subset F_2$, la siguiente gráfica representa estas contenencias donde la flechas indican la relación de contenencia entre dos filtros .



Grafica 1

Ejemplo 1.1.2. Si $X = \{1, 2, 3\}$ los únicos filtros sobre X son los siguientes:

$F_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\quad F_2 = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,

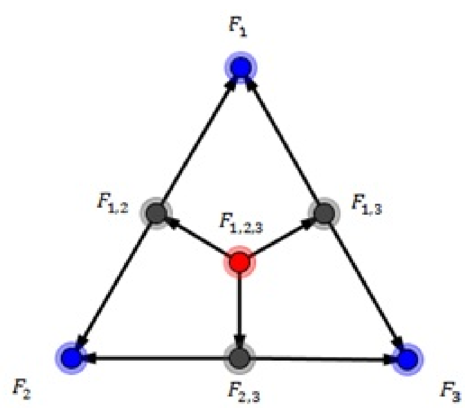
$F_3 = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\quad F_{1,2} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$,

$F_{1,3} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\quad F_{2,3} = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ y $F_{1,2,3} = \{\{1, 2, 3\}\}$

Con

$|F_1| = |F_2| = |F_3| = 4$, $\quad |F_{1,2}| = |F_{1,3}| = |F_{2,3}| = 2$ y $\quad |F_{1,2,3}| = 1$

Representación geométrica



Grafica 2

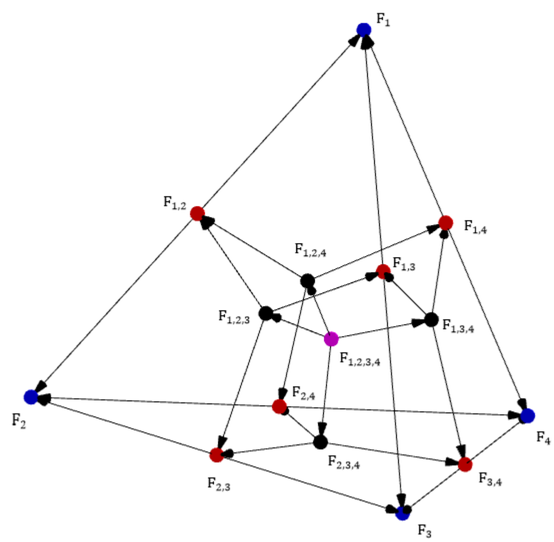
Ejemplo 1.1.3. Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ los únicos filtros sobre X son los siguientes:

$F_1 = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_2 = \{\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_3 = \{\{3\},\{3,2\},\{1,3\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{3,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_4 = \{\{4\},\{4,2\},\{4,3\},\{1,4\},\{4,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,2} = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,3} = \{\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,4} = \{\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{2,3} = \{\{2,3\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{2,4} = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{3,4} = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,2,3} = \{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,2,4} = \{\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,3,4} = \{\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{2,3,4} = \{\{2,4,3\},\{1,2,3,4\}\}$
$F_{1,2,3,4} = \{\{1,2,3,4\}\}$

Con

$|F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4| = 8$
$|F_{1,2}| = |F_{1,3}| = |F_1,4| = |F_{2,3}| = |F_{2,4}| = |F_{3,4}| = 4$
$|F_{1,2,3}| = |F_{1,2,4}| = |F_{2,3,4}| = |F_{1,3,4}| = 2$
$|F_{1,2,3,4}| = 1$

Representación geométrica



Grafica 3

De manera natural puede continuarse el proceso, construyendo los posibles filtros sobre conjuntos finitos, por ejemplo si el conjunto X tiene 5 elementos tendrá 31 filtros asociados, con 6 tendrá 63,

¿ podrá determinarse una fórmula para la cantidad de filtros ?

Ejemplo 1.1.4. si X es un conjunto infinito, se denomina filtro de Fréchet al filtro determinado por:

$$Fr = \{A\emptyset \mid A^c \text{ es finito}\}$$

Se puede crear una topología a partir de este filtro y se denomina topología de complementos finitos. se Probará que es un filtro:

(i) $\emptyset \notin Fr$ y $Fr \neq \emptyset$

Se Supondrá que $\emptyset \in Fr$ entonces su complemento es finito pero su complemento es X y por hipótesis no es finito por lo tanto $\emptyset \notin Fr$, $Fr \neq \emptyset$ dado que $X \in Fr$.

(ii) Si $A, B \in Fr$ entonces $A \cap B \in Fr$

Si $A, B \in Fr$ entonces A^c y B^c son finitos por lo tanto $A^c \cup B^c$ es finito por definición de filtro $(A^c \cup B^c)^c \in Fr$ que es lo mismo que $A \cap B \in Fr$

(iii) Si $A \in Fr$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in Fr$

Si $A \in Fr$ entonces A^c es finito, como $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$ luego B^c es finito, es decir $B \in Fr$
Por i, ii y iii se concluye que Fr es un filtro sobre X

lo permite hacer algunas consideraciones acerca de los filtros en general, los cuales serán base para continuar el estudio de filtros:

- En los ejemplos de filtros sobre conjunto finitos, se ha observado que existe un elemento del filtro que esta contenido en los demás elementos de este. ??¿ Sera que esto siempre sucede en filtros sobre conjuntos finitos y de ser así se cumplirá para conjuntos infinitos ?
- Del teorema 1.1.1 se concluye que las intersecciones finitas de elementos de un filtro siempre pertenecen a este. Pero esta se tendrá en intersecciones arbitrarias?.
- Dado que los filtros son conjuntos, ¿ serán las operaciones conjuntistas cerradas?.
- Ademas al parecer los filtros se pueden ordenar mediante la contenencia.

1.2 Filtros principales

Observando los filtros construidos en los ejemplos 1.1.1 al 1.1.3 se puede notar que una forma para generar un filtro consiste en tomar un conjunto no vacío y todos los conjuntos que lo contienen.

Definición 1.2.1. Dado X y $A \subseteq X$ donde $A \neq \emptyset$ se llama filtro principal (denotando por F_A) generado por A al conjunto que contiene a todos los subconjuntos de X que contienen a A, es decir:

$$F_A = \{B \subseteq X \mid \; A \subseteq B\}$$

Teorema 1.2.1. *F_A es un filtro sobre X.*

Demostración. se probara que F_A cumple las tres condiciones para ser filtro.

(i) $\emptyset \notin F_A$ y $F_A \neq \emptyset$

Como $A \neq \emptyset$ y $A \in F_A$, por construcción A es subconjunto de todos los elementos de F_A entonces $\emptyset \notin F$ y $F \neq \emptyset$.

(ii) Si $C, B \in F_A$ entonces $C \cap B \in F_A$

Si $C, B \in F_A$ entonces $A \subseteq C$ y $A \subseteq B$ luego $A \subseteq C \cap B$, es decir $C \cap B \in F_A$.

(iii) Si $C \in F_A$ y $C \subseteq B$ entonces $B \in F_A$

Si $C \in F_A$ y $C \subseteq B$ por definición de filtro principal $A \subseteq C$ entonces se tiene que $A \subseteq B$ por definición del filtro se tiene que $B \in F_A$.

Por i, ii y iii F_A es filtro sobre X.

□

Dada la definición de filtro principal se obtiene que la intersección de todos los elemento de F_A sobre X es A, es decir que

$$\text{Si } A \subseteq X \text{ y } A \neq \emptyset \text{ entonces } \bigcap_{B \in F_A} B = A.$$

Las siguientes propiedades se tienen como consecuencia de la definición:

Teorema 1.2.2. *Sea A y B subconjuntos de X no vacíos entonces:*

(i) $A \subseteq B$ si y solo si $F_B \subseteq F_A$

(ii) Si X es finito entonces $|F_A| = \dfrac{|p(X)|}{2^{|A|}}$

Demostración.

(i) $\Rightarrow$) Sea $C \in F_B$, entonces $B \subseteq C$, dado que $A \subseteq B$, se tiene que $A \subseteq C$, por definición de F_A, $C \in F_A$ y por consiguiente $F_B \subseteq F_A$.

$\Leftarrow$) Como $B \in F_B$ y dado $F_B \subseteq F_A$ entonces $B \in F_A$, por definición de F_A, $A \subseteq B$

(ii) Para todo $B \in F_A$, se denota $D = B - A$, donde $D \in P(X - A)$, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de F_A y $P(X - A)$, para todo $B \in F_A$ se tiene que $B - A$ esta en $P(X - A)$ y para todo $C \in P(X - A)$ se tiene que $C \cup A$ esta en F_A; Por lo tanto $|F_A| = |P(X - A)|$. Ahora, se tiene que:

$$|P(X - A)| = 2^{|X-A|} = 2^{|X|-|A|} = \frac{2^{|X|}}{2^{|A|}} = \frac{|p(X)|}{2^{|A|}}$$

por lo tanto

$$|F_A| = \frac{|p(X)|}{2^{|A|}}$$

□

El siguiente teorema garantiza que sobre todo conjunto finito solo existen filtros principales.

Teorema 1.2.3. *Sea X finito y F un filtro sobre X entonces existe un $A \subseteq X$ tal que $F = F_A$*

Demostración. Como X es finito entonces $P(X)$ es finito y por lo tanto todo filtro F es finito, por el teorema 1.2.1 se puede deducir que la intersección de todos los elementos de un filtro finito pertenece a este, sea $A = \bigcap_{B \in F} B$.

Como $A \in F$ por la tercera propiedad de los filtros todo conjunto que contenga a A debe estar en F entonces $F_A \subseteq F$. Dado que $A = \bigcap_{B \in F} B$ como $B \in F$ se cumple que $A \subseteq B$ y por definición de F_A se concluye que $B \in F_A$, por lo tanto $F \subseteq F_A$.

Como $F_A \subseteq F$ y $F \subseteq F_A$ entonces $F = F_A$, es decir que todo filtro sobre un conjunto finito es principal

□

Ahora se estudiara el comportamiento de los filtros con respecto a las operaciones conjuntistas:

Ejemplo 1.2.1. Si F_1 y F_2 son los filtros de ejemplo 1.1.3 entonces se puede observar que:

$$F_1 \cup F_2 = \begin{Bmatrix} \{1\}, & \{2\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{2,3\}, \\ \{2,4\}, & \{1,2,3\}, & \{1,2,4\}, & \{1,3,4\}, & \{2,3,4\}, & \{1,2,3,4\} \end{Bmatrix}$$

No es un filtro pues $\{1\} \in F_1 \cup F_2$ y $\{2\} \in F_1 \cup F_2$, no cumpliéndose la segunda condición de los filtros, pues $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$ y $\emptyset \notin F_1 \cup F_2$. Sin embargo, se puede obtener una nueva forma de construcción con la unión de la siguiente manera:

Dado un filtro F_1 sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$, se toma un subconjunto $B = \{2, 3\}$ y se genera el conjunto $F' = \{C \cup B \mid C \in F_1\}$, obsérvese que:

$F' = \{\{1\} \cup \{2, 3\}, \{1, 2\} \cup \{2, 3\}, \{1, 3\} \cup \{2, 3\}, \{1, 4\} \cup \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3\}, \{1, 2, 4\} \cup \{2, 3\}, \{1, 3, 4\} \cup \{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3\}\}$, Simplificando $F' = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\} = F_{1,2,3}$, resultando de nuevo un filtro.

Teorema 1.2.4. *Sea Y y D subconjuntos no vacíos de X si F es filtro sobre Y y $F' = \{C \cup D \mid C \in F\}$ entonces:*

(i) Si $Y = X$ entonces F' es un filtro sobre X.

(ii) Si $Y = X$ y $F = F_E$ entonces $F' = F_{E\cup D}$.

(iii) Si $D = Y^c$ entonces F' es un filtro sobre X.

Demostración.

(i) Si $Y = X$ entonces F' es un filtro sobre X

(a) $\emptyset \notin F'$ y $F' \neq \emptyset$

Si $C \in F$ se cumple $\emptyset \neq C \cup D \in F'$ y por lo tanto $\emptyset \notin F'$ y $F' \neq \emptyset$

(b) Si $A, B \in F'$ entonces $A \cap B \in F'$

Si $A, B \in F'$ entonces existe $C_1, C_2 \in F$ tal que $A = D \cup C_1$ y $B = D \cup C_2$ luego $A \cap B = (D \cup C_1) \cap (D \cup C_2) = D \cup (C_1 \cap C_2)$ por la propiedad *iii* de filtros $(C_1 \cap C_2) \in F$ y por lo tanto $A \cap B \in F'$.

(c) Si $A \in F'$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in F'$

Como $A \in F'$ entonces existe $C \in F$ tal que $A = D \cup C$, como $A \subseteq B$ entonces $D \cup C \subseteq B$ por lo tanto $C \subseteq B$ por la propiedad *iii* de filtros $B \in F$, luego $D \cup B = B \in F'$

Por *i*, *ii* y *iii* se concluye que F' es un filtro sobre X.

(ii) Si $Y = X$ y $F = F_E$ entonces $F' = F_{E\cup D}$.

Si $A \in F'$ entonces existe $C \in F_E$ tal que $A = C \cup D$, luego $C \subseteq A$ es decir $A \in F_E$ lo que implica $E \subseteq A$ y por lo tanto $E \cup D \subseteq A$ por la propiedad *iii* $A \in F_{E\cup D}$ es decir $F' \subseteq F_{E\cup D}$, Si $A \in F_{E\cup D}$ entonces $E \cup D \subseteq A$, como $E \in F$ entonces $E \cup D \in F'$ por la propiedad tres de filtros se tiene que $A \in F'$ es decir $F_{E\cup D} \subseteq F'$.

Como $F' \subseteq F_{E\cup D}$ y $F_{E\cup D} \subseteq F'$ entonces $F' = F_{D\cup B}$

(iii) Si $D = Y^c$ entonces F' es un filtro sobre X.

La propiedad *i* y *ii* son análogas al primer item de este teorema. Probemos la tercera propiedad. Sea $A \in F'$ y $A \subseteq B$; como $A \in F'$ entonces existe $C \in F$ tal que $A = Y^c \cup C$, como $A \subseteq B$ entonces

$Y^c \cup C \subseteq B$ por lo tanto $C \subseteq B$ por la propiedad *iii* de los filtros $B \cap Y \in F$ dado que $Y^c \subseteq B$ se tiene que $Y^c \cup (B \cap Y) = B \in F'$

Por *i*, *ii* y *iii* se concluye que F' es un filtro sobre X.

□

A diferencia de la unión, se puede ver que la intersección de dos filtros sobre X es un filtro sobre X puesto que si tienen un elemento en común contendrán a sus superconjuntos y además nunca es vacío puesto que contienen a X, por ejemplo:

Ejemplo 1.2.2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$, obsérvese que

$$F_1 \cap F_{2,3} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

es de nuevo un filtro, el cual es $F_{1,2,3}$. De forma general se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 1.2.5. *Sea F y F' un filtro sobre X y $\emptyset \neq Y \subseteq X$ entonces*

(i) $F \cap F'$ es un filtro sobre el conjunto X.

(ii) Si $F = F_C$ $F' = F_D$ entonces $F_C \cap F_D = F_{C \cup D}$

(iii) La colección $F'' = \{A \cap Y \mid A \in F \text{ y } A \cap Y \neq \emptyset\}$ es un filtro sobre Y.

Demostración.

(i) Se probará que $F \cap F'$ es un filtro sobre el conjunto X.

(a) $\emptyset \notin F \cap F'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$

Como F y F' son filtros sobre X entonces $\emptyset \notin F$, $\emptyset \notin F'$, $X \in F$ y $X \in F'$ por lo tanto $\emptyset \notin F \cap F'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$.

(b) Si $A, B \in F \cap F'$ entonces $A \cap B \in F \cap F'$

Dado $A, B \in F \cap F'$ entonces $A, B \in F$ y $A, B \in F'$ por la propiedad *ii* de los filtros $A \cap B \in F$ y $A \cap B \in F'$, es decir que $A \cap B \in F \cap F'$

(c) Si $A \in F \cap F'$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in F \cap F'$

Por la definición de intersección $A \in F$ y $A \in F'$, además como $A \subseteq B$, por la propiedad *iii* de los filtros se tiene que $B \in F$ y $B \in F'$, por lo tanto $B \in F \cap F'$.

Por *i*, *ii* y *iii* se concluye que $F \cap F'$ es un filtro sobre X.

(ii) Se probara que si $F = F_C$ y $F' = F_D$ entonces $F_C \cap F_D = F_{C\cup D}$.

Si $A \in F_C \cap F_D$ por definición de filtro principal $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$, por consiguiente $C \cup D \subseteq A$, por lo tanto $A \in F_{C\cup D}$ luego $F_C \cap F_D \subseteq F_{C\cup D}$. Si $A \in F_{C\cup D}$ entonces $C \cup D \subseteq A$ luego $D \subseteq A$ y $C \subseteq A$ por lo tanto $A \in F_C$ y $A \in F_D$ lo que implica que $A \in F_C \cap F_D$ es decir que $F_{C\cup D} \subseteq F_C \cap F_D$.

Como $F_{C\cup D} \subseteq F_C \cap F_D$ y $F_C \cap F_D \subseteq F_{C\cup D}$ entonces $F_C \cap F_D = F_{C\cup D}$

(iii) Se probara que la colección $F'' = \{A \cap Y \mid A \in F \ y \ A \cap Y \neq \emptyset\}$ es un filtro sobre Y.

(a) $\emptyset \notin F''$ y $F'' \neq \emptyset$

Por construcción $A \cap Y \neq \emptyset$ entonces $\emptyset \notin F''$. Por lo otro lado como $X \in F$ entonces $Y \in F''$ es decir $F'' \neq \emptyset$.

(b) Si $A, B \in F''$ entonces $A \cap B \in F''$.

Dado $A, B \in F''$ entonces por la definición del conjunto existe $C, D \in F$ tal que $A = C \cap Y$ y $B = D \cap Y$. Ahora, $A \cap B = (C \cap Y) \cap (D \cap Y)$ por propiedades de la intersección entre conjuntos se tiene que $A \cap B = (C \cap D) \cap Y$, por la propiedad ii de los filtros se tiene que $(C \cap D) \in F$ y por lo tanto $A \cap B \in F''$.

(c) Si $A \in F''$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in F''$.

Si $A \in F''$ entonces existe un $C \in F$ tal que $A = C \cap Y$. como $A\emptyset B \cup C$, Por la propiedad iii de los filtros se tiene que $C \cup B \in F$, como $A \subseteq B$ se tiene que $B = (C \cup B) \cap$ Y y por lo tanto $B \in F''$. □

Se puede observar que la unión y la intersección de filtros brindan mecanismos para obtener nuevo filtros a partir de los ya obtenidos, por lo tanto es natural preguntarse si ademas los productos cartesianos usuales permiten crear nuevos filtros. Si se tiene un conjunto X, F_A y F_B filtros sobre X se puede notar que $C = \{A_i \times B_j \mid A_i \in F_A$ y $B_j \in F_B\}$ es un filtro sobre $X \times X$ y además $C = F_{A\times B}$.

Teorema 1.2.6. *Dado un conjunto X, F_A y F_B filtros sobre X entonces $F = \{A_i \times B_i \mid A_i \in F_A$ y $B_i \in F_B\}$ es un filtro sobre $X \times X$.*

Demostración. se probara las tres condiciones para que F sea filtro

(i) $\emptyset \notin F$ y $F \neq \emptyset$

Como $F = \{A_i \times B_i \mid A_i \in F_A$ y $B_i \in F_B\}$ y dado que $A_i \neq \emptyset$ y $B_i \neq \emptyset$ entonces $\emptyset \notin F$, como F_A y F_B tienen elementos entonces $F \neq \emptyset$.

(ii) Si $C_i, C_j \in F$ entonces $C_i \cap C_j \in F$

Dado $C_i, C_j \in F$ entonces existe $A_i, A_j \in F_A$ y $B_i, B_j \in F_B$ tales que $C_i = A_i \times B_i$, $C_j = A_j \times B_j$ como $A_i \cap A_j \in F_A$ y $B_i \cap B_j \in F_B$ entonces $((A_i \cap A_j) \times (B_i \cap B_j)) \in F$ como $((A_i \cap A_j) \times (B_i \cap B_j)) = ((A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j))$ entonces $C_i \cap C_j \in F$

(iii) Si $C_i \in F$ y $C_i \subseteq C_j$ entonces $C_j \in F$

Dado que $C_j \in X \times X$ entonces existe $D, E \in X$ talque $C_j = D \times E$ y además como $C_i \in F$ entonces existe $A_i \in F_A$ y $B_i \in F_B$ talque $C_i = A_i \times B_i$ como $C_i \subseteq C_j$ entonces $B_i \subseteq E$ y $A_i \subseteq D$ es decir que $D \in F_A$ y $E \in F_B$ Por lo tanto $C_j \in F$.

□

Nótese que $F = F_{(A \times B)}$ este teorema se puede ampliar y hablar de filtro sobre X^n para $n \in \mathbb{N}$ y su demostración es análoga.

Para caracterizar mejor los filtros principales se mostrara filtros principales sobre conjuntos infinitos:

Ejemplo 1.2.3. Si $X = \mathbb{N}$ por el teorema 1.1.1 el único filtro con un elemento será $F_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}\}$. Por el teorema 1.2.1, para cada subconjunto A no vacío de $\mathbb{N}$ se puede construir un filtro, a continuación se analizan filtros principales cuando A es finito ó infinito.

(i) Si A es finito , F_A tendrá que ser infinito, por ejemplo:

Si $A = \{1\}$ el filtro generado por A es $F_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, ..., \{1,2,3\}, ..., \mathbb{N}\} = \{\{1\} \subseteq A \subseteq \mathbb{N}\}$, se puede ver que si A es finito tendrá infinitos conjuntos que lo contengan, por lo tanto el filtro será infinito.

(ii) Si A es infinito, el cardinal de F_A puede ser finito o infinito.

Se puede notar que para $F_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}\}$, A es infinito y filtro es finito. Un ejemplo en donde A y F_A son infinitos, sucede cuando $A = 2\mathbb{N}$, pues se observa que el filtro es[2]:

$$F_{2\mathbb{N}} = \{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} \cup \{1\}, 2\mathbb{N} \cup \{1,3\}, ...\} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 2\mathbb{N} \subseteq A\}$$

En la siguiente tabla se muestran colecciones de filtros principales sobre $\mathbb{N}$ teniendo en cuenta que $a_i \in \mathbb{N}$

Forma del filtros	Cardinalidad del filtro	Cardinalidad de los elementos del filtro
$F_{\mathbb{N}}$	1	$\aleph_0$
$F_{\mathbb{N}-\{a_1\}}$	2	$\aleph_0$
$F_{\mathbb{N}-\{a_1,a_2\}}$	4	$\aleph_0$
$F_{\mathbb{N}-\{a_1,a_2,a_3,...a_n\}}$	2^n	$\aleph_0$
$F_{a_1\mathbb{N}}$	1, ó $\aleph_1$	$\aleph_0$ ó $1, 2, ..., \aleph_0$
$F_{a_1,a_2,...a_n}$	$\aleph_1$	$n, n+1, ..., \aleph_0$
F_{a_1,a_2}	$\aleph_1$	$2, 3, ..., \aleph_0$
F_{a_1}	$\aleph_1$	$1, 2, ..., \aleph_0$

[2] $2\mathbb{N}$ simboliza los números pares. En general se denota $n\mathbb{N}$, al conjunto de los múltiplos de n.

Tabla 1

el siguiente teorema garantiza cuando un filtro es principal:

Teorema 1.2.7. *Sea F un filtro sobre X y $D = \bigcap_{A_i \in F} A_i$ se tiene que*

$$D \in F \textit{ si y solo si } F = F_D$$

Demostración. $\Rightarrow$) Se probara que $F \subseteq F_D$, sea $A \in F$ por definición de intersección se puede concluir que $D \subseteq A$ por definición de filtro principal $A \in F_D$ luego $F \subseteq F_D$. sea $A \in F_D$ por definición de filtro principal se tiene que $D \subseteq A$, como $D \in F$, por propiedad *iii* de filtros $A \in F$. Como $F \subseteq F_D$ y $F_D \subseteq F$ entonces $F = F_D$.
$\Leftarrow$) Dado que $F = F_D$ por definición de filtro principal $D \in F$.

□

Una pregunta natural que surge es si todos los filtros cumplen las condiciones del anterior teorema, y de ser asi todos los filtros serian principales, sin embargo el ejemplo 1.1.4 (el filtro de Fréchet) no cumple esta propiedad, es decir es el primer ejemplo que se tiene de un filtro no principal. Para probar que Fr no es principal basta comprobar que existe una colección $C = \{A_i \in Fr\}$ de tal forma que $\bigcap_{A_i \in C} A_i = \emptyset$. Obsérvese que para $X - \{i\} = A_i \in F$ para $i \in X$, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X - \{i\} = \emptyset$ por lo tanto no existe un $A \subseteq X$ tal que $F_A = Fr$.

Observece que los elementos del filtro de Fréchet son infinitos, una pregunta que surge es si un filtro no principal tienen elementos finitos la respuesta es no, el siguiente teorema garantiza que todo filtro que tenga un elemento finito sera principal

Teorema 1.2.8. *Dado F un filtro sobre X y A un subconjunto finito de X, si $A \in F$ entonces F es principal.*

Demostración. Sea $C = \{B \mid B = A \cap D$ donde $D \in F\}$, La colección C es finita, dado que A es finito. Nótese que por la propiedad dos de los filtros todos los elementos de la colección C pertenecen al filtro. Además por el teorema 1.1.1 se tiene que $\bigcap_{B \in C} B \in F$ es decir que $\bigcap_{D \in F} D \in F$, por el Teorema 1.2.7 F es principal.

□

1.3 Filtros libres

En la anterior sección se ha comprobado que el filtro de Fréchet es no principal, puesto que la intelección de todos sus elementos no pertenece al filtro, esto se debe a que su intersección es vacía.

Definición 1.3.1. Se denomina filtro libre a aquellos en donde la intersección de todos sus elementos es vacía.

es decir que el filtro de Fréchet es libre, y claramente todo principal es no libre, la pregunta que surge es si todo no principal es libre, el siguiente ejemplo muestra que esto no es cierto.

Ejemplo 1.3.1. En este ejemplo se intersecará un filtro principal y el filtro de Fréchet. Dado un conjunto X y A un subconjunto entonces:

$$F_A \cap Fr = \{B \subseteq X \mid B^c \text{ es finito y } A \subseteq B\} \text{ es un filtro.}$$

Analizando este ejemplo se concluye que si:

(i) A es finito, sea $C = \{X - \{i\} \mid i \in A^c\}$ observece que todo elelemnto de C esta en $F_A \cap Fr =$ por lo tanto $\bigcap_{A_i \in (F_A \cap Fr)} A_i = A$. Sin embargo $A \notin F_A \cap Fr$, por lo tanto este filtro no es principal ni libre.

(ii) A es infinito ya se sabe que $\bigcap_{A_i \in (F_A \cap Fr)} A_i = A$. Ahora si A^c es infinito, pasaría lo mismo que en el anterior caso. Pero si A^c es finito entonces $F_A \cap Fr = F_A$, pues $A \in F_A \cap Fr$.

A continuación, se muestra una colección C en la cual a partir de esta se puede obtener diferentes tipos de filtros, utilizando únicamente filtros principal.

Teorema 1.3.1. *Dada una colección $C = \{A_i \subseteq X \mid i \in L\}$ no vacía, donde L es un conjunto de indices. Si la colección cumple:*

$$Si\ A_i, A_j \in C \ entonces\ A_i \cap A_j \neq \emptyset \ y\ A_i \cap A_j \in C$$

Entonces $\bigcup_{A_i \in C} F_{A_i}$ es un filtro sobre X.

Demostración. Sea $F = \bigcup_{A_i \in C} F_{A_i}$ se demostrará que F es un filtro

(i) $\emptyset \notin F$ y $F \neq \emptyset$

Como $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ entonces $A_i \neq \emptyset$ de lo cual se concluye que $\emptyset \notin F$, ahora como C es no vacía entonces $F \neq \emptyset$

(ii) Si $A, B \in F$ entonces $A \cap B \in F$

Sea $E, D \in F$ existe $A_i, A_j \in C$ tal que $E \in F_{A_i}$ y $D \in F_{A_j}$ por definición de los filtros se tiene que $A_i \subseteq E$ y $A_j \subseteq D$ es decir que $A_i \cap A_j \subseteq E \cap D$, como $A_i, A_j \in C$ entonces $A_i \cap A_j \in C$ luego $A_i \cap A_j \in F$ por la propiedad iii de filtros $E \cap D \in F$

(iii) Si $A \in F$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in F$

dado $A \in F$ entonces existe A_i tal que $A \in F_{A_i}$, por la definición del filtro, $A_i \subseteq A \subseteq B$ por la propiedad iii $B \in F$.

□

El siguiente ejemplo muestra un filtro no principal construido a partir del anterior teorema, con la condición adicional de ser un filtro libre:

Ejemplo 1.3.2. Dada $C = \{2i\mathbb{N}\}$ donde $2i\mathbb{N}$ son los múltiplos de $2i$ sin el 0. Entonces por el teorema anterior se tiene que $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} F_{2i\mathbb{N}}$ es un filtro. Es inmediato comprobar que es un filtro libre, puesto que la intersección de todos sus elementos es vació.

El siguiente ejemplo muestra un filtro no principal construido a partir del anterior teorema, con la condición adicional de ser un filtro no libre:

Ejemplo 1.3.3. Dada $C = \{2i\mathbb{N}\}$ donde $2i\mathbb{N}$ son los múltiplos de $2i$ con el 0. Entonces por el teorema anterior se tiene que $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} F_{2i\mathbb{N}}$ es un filtro. Obsérvese que la intersección de todo los elementos del filtro es $\{0\}$ y este no pertenece a ningún filtro de la unión. por lo tanto es no principal y no libre.

Un teorema que se deduce de los ejemplos anteriores teniendo en cuenta las características de los filtro es el siguiente:

Teorema 1.3.2. *Sea $F = \bigcup_{A_i\in C} F_{A_i}$ un filtro sobre X, donde C es la colección del teorema 1.3.1 Se tiene que:*

(i) $\bigcap_{A_i\in C} A_i \in F$ si y solo si F es principal.

(ii) Si $\bigcap_{A_i\in C} A_i = \emptyset$ si y solo si F es libre.

(iii) Si $\bigcap_{A_i\in C} A_i \neq \emptyset$ y $\bigcap_{A_i\in C} A_i \notin F$ si y solo si F no es libre ni principal.

Teniendo en cuenta las definiciones de los diferentes tipos de filtros. Este teorema, permite aplicar la noción de filtro principal, filtro libre y filtro no libre y no principal a una colección C la cual no necesariamente es filtro, y a partir de ella obtener los respectivos filtros.

Existe otra característica de los filtros no principales, la cual se correspondería con el teorema 1.2.8 pues a partir de los elementos del filtro se puede caracterizar si este es o no principal.

Teorema 1.3.3. *Dado un filtro F sobre X. Todo elemento del filtro, contiene propiamente un nuevo elemento de este, si y solo si F es no principal.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que F es principal por definición de filtros principales, existe un A tal que todo elemento del filtro contiene a A. Como A pertenece al filtro, y además no existe un elemento del filtro que este contenido propiamente en A, se genera una contradicción dado que por hipótesis todo elemento del filtro esta contenida propiamente en otro, por lo tanto F es no principal.
$\Leftarrow$) Supongamos que existe un elemento A del filtro tal que no contiene un nuevo elemento del filtro. Tómese un elemento B del filtro, dado que $A \cap B$ debe pertenecer al filtro, y además $A \cap B \subseteq A$, entonces $\bigcap_{B\in F} B = A$. Por el teorema 1.2.7 F es principal, lo cual es una contradicción. Por lo tanto todo elemento del filtro, contiene propiamente un nuevo elemento de este.

□

El siguiente teorema se deduce del teorema anterior y del teorema 1.1.1

Teorema 1.3.4. *Si F es un filtro libre sobre X entonces $F_r \subseteq F$*

Demostración. dado $A \in Fr$ como A^c es finito y $\bigcap_{B \in F} B = \emptyset$ entonces existe $C \in F$ tal que $C \cap A^c = \emptyset$ es decir que $C \subseteq A$, por la propiedad tres de filtros $A \in F$ luego $F_r \subseteq F$

□

Como se ha observado anteriormente los filtros se puede relacionar entre si, por medio de la contenencia, estableciendo así una relación de orden parcial. Como lo muestran los ejemplos 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3 se puede observar que existe un filtro mínimo a todos los filtros sobre un conjunto X, sin importar si es finito o infinito, este es F_X. Esto no sucede con el máximo, pero si existe un maximal, pues en los filtros generados a partir de un conjunto finito, toda cadena ordenada tiene un maximal, el cual es de la forma F_a, donde a es un elemento del conjunto X. A continuación se demuestra que para los filtros generados a partir de un conjunto infinito, también existen filtros máximos, claro está, para toda cadena ordenada. A estos filtros máximos se les denomina ultrafiltros.

1.4 Ultrafiltros

Se ha dicho que un ultrafiltro sobre un conjunto X es un filtro maximal, otra forma de caracterizarlos es si dado subconjunto de X este o su complemento pertenecen al filtro pero esta ultima se enunciara como un teorema.

Definición 1.4.1. Si F es un filtro sobre un conjunto X y no existe un filtro F' tal que $F' \supseteq F$, se dice que F es un ultrafiltro.

Ejemplo 1.4.1. Los filtros principales generados por A tal que contiene un solo elemento sobre un conjunto X son ultrafiltros. Esto es consecuencia del teorema 1.1.1. y la definición de filtro principal. Además, cuando X es finito se tiene que $|F_A| = \dfrac{|p(X)|}{2}$, estos ultra filtros son llamados en la topología discreta la colección de las vencidas de un elemento [9]

Teorema 1.4.1. *Dada una cadena de filtros sobre un conjunto X siempre existe un ultrafiltro que contiene los filtros de la cadena.*

Demostración. Sea una cadena de filtros ordenados y B la colección de estos filtros.Sea $C = \{A \mid A \in F\}$ donde $F \in B$ por el teorema 1.3.1 $\bigcup_{A \in C} F_A$ es un filtro y ademas por construcción es una cota superior de B. Utilizando el lema de Zorn [15] existe un elemento máximo en B, por lo tanto existe un ultrafiltro que contiene a los filtros de la cadena.

□

Una definición equivalente de ultrafiltro, la cual es de gran importancia y se encuentra en la mayoría de la bibliografía es:

Teorema 1.4.2. *Dado un ultrafiltro F sobre un conjunto X y A un subconjunto de X si y solo si $A \in F$ ó $A^c \in F$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Se supondrá que $A, A^c \notin F$ entonces para todo $B \in F$ se cumple que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A^c \cap B \neq \emptyset$. Sea $F' = \{C \mid A \cap B \subseteq C \text{ donde } B \in F\}$ luego $F' \supset F$, como F' es un filtro se tiene que F no es un ultrafiltro lo que contradice la hipótesis por lo tanto $A \in F$ o bien $A^c \in F$.
$\Leftarrow$) se supondrá que F no es ultra filtro por lo tanto existe F' un filtro tal que $F \subset F'$ es decir existe un $B \subset X$ tal que $B \in F'$ y $B \notin F$ y por lo tanto por la hipótesis se debe tener que $B^c \in F$ esto implica que $B^c \in F'$ y por lo tanto $B \cap B^c \in F'$ lo cual contradice la condición i de filtro y por lo tanto F es un ultrafiltro. □

Teniendo en cuenta el teorema anterior y el teorema 1.2.8 se puede concluir que todo ultrafiltro no principal contiene al filtro de Frechet. A partir de este resultado, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 1.4.3. *Todo ultrafiltro no principal es libre*

Demostración. Dado F un ultrafiltro no principal sea $A = \bigcap_{A_i \in F} A_i$, por el teorema 1.4.2 se tiene que $A \in F$ ó $A^c \in F$, si $A \in F$ por el teorema 1.2.7 F será principal por lo cual contradice nuestra hipótesis por lo tanto $A^c \in F$, esto implica $(\bigcap_{A_i \in F} A_i) \cap A^c = \emptyset$, es decir F es libre.

□

Para dar por terminado esta sección, se enuncia el siguiente teorema el cual permite obtener ultrafiltros sobre subconjuntos de un conjunto a partir de ultrafiltros sobre el conjunto dado.

Teorema 1.4.4. *Si F es un ultrafiltro sobre X, entonces el filtro F'' obtenido en el teorema 1.2.5 es un ultrafiltro sobre Y.*

Demostración. Por el teorema teorema 1.2.5 se sabe que F'' es un filtro, ahora solo basta con probar que F'' es un ultrafiltro, para esto se utilizará el teorema 1.4.2.
Tómese un conjunto $A \subseteq Y$ de tal forma que $A \notin F''$ entonces demostremos que necesariamente A^c en Y pertenece a F''. Como $A \notin F''$ entonces para ningún $C \in F$ se tiene que $A = C \cap Y$, como $Y \subset X$ en particular se tiene que $A \notin F$ pues de lo contrario se tendría que $A \in F''$. Como F es ultrafiltro entonces A^c en X pertenece a F y utilizando la definición F'' se tiene que $A^c \cap Y \in F''$ y como $A^c \cap Y = A^c$ en Y entonces A^c en Y pertenece a F''.

□

1.5 Productos reducidos

Con el objetivo de construir algunas estructuras algebraicas, y además utilizar el concepto de filtro como herramienta de construcción, se retoma los productos cartesianos en los cuales la noción de igualad entre elementos del producto es debilitada por medio de los filtros. Esta discusión se ha observado en el libro ”Métodos analíticos del análisis no estándar” del profesor Yutakeuchi, en los cuales de una manera lógica intuitiva, define lo que entiende por ”para casi todo”. Aunque este ”para casi todo” no se va profundizar explícitamente, se explicara lo que se entiende cuando se habla de dos elementos de un producto son ”iguales”. A partir de ello, se pueden obtener productos arbitrarios reducidos.

Definición 1.5.1. Sea $\{A_i\}_{i\in L}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano arbitrario de esta familia se denota como $\prod_{i\in L} A_i$ y es el conjunto de todas las funciones

$$f : L \longrightarrow \bigcup_{i\in L} A_i$$

Tal que $f(i) \in A_i$ para cada $i \in L$

Si todos los A_i son iguales este producto cartesiano se llama potencia. A continuación se muestran algunos ejemplos de productos cartesianos:

Ejemplo 1.5.1. Si $A_i = \emptyset$ entonces la potencia $\prod_{i\in L} A_i = \emptyset$.

Ejemplo 1.5.2. Sea $A_i = \mathbb{N}$ para $L = \{1, 2\}$ entonces $\prod_{i\in L} A_i = \{f \mid f(1),\ f(2) \in \mathbb{N}\}$
Por ejemplo, una de estas funciones es cuando

$$f(1) = 2 \text{ y } f(2) = 3$$

Otra forma para denotar la anterior función es por medio de n-duplas resultando $(f(1), f(2)) = (2, 3)$. Sin embargo esta notación solo es posible cuando L es numerable.

Solamente se han dado ejemplos de potencia, pero como se ha dicho en la definición, se pueden dar ejemplos de productos que no son potencias, por ejemplo.

Ejemplo 1.5.3. A partir de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_4$, se puede obtener el producto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 = \prod_{i\in L} \mathbb{Z}_i$ donde $L = \{2, 3, 4\}$. Obsérvese que un elemento de este producto es $(0, 2, 3)$. En cambio $(1, \sqrt{2}, 3)$ no lo es pues $f(2) \notin \mathbb{Z}_2$ téngase en cuenta que $f(2) = \sqrt{2}$.

Habitualmente se dice que dos elementos de un producto son iguales si son iguales componente a componente. Es evidente que si se define de esta manera esta resulta ser una relación de equivalencia, pues la partición resulta ser el producto original. Sin embargo esta equivalencia puede ser ”debilitada”, pues se puede decir que dos elementos de un producto son iguales si y solamente si tienen algunos componentes iguales. Es aquí donde el concepto de filtro se introduce.

Ejemplo 1.5.4. Sea $A = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$, se construye la potencia, es decir $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ obsérvese que la definición de igualdad esta definida como:

$$f = g \textit{ si y solo si } f(1) = g(1), f(2) = g(2) \textit{ y } f(3) = g(3)$$

Como la idea es debilitar esta noción entonces se define la igualdad como:

$$f \sim g \textit{ si y solo si } f(1) = g(1), f(2) \neq g(2) \textit{ y } f(3) \neq (3)$$

Utilizando representación cartesiana las funciones que son iguales en el producto cartesiano a partir de la nueva definición son:

$$(1, 0, 0) \sim (1, 1, 0) \sim (1, 0, 1) \sim (1, 1, 1) \sim (1, 0, 2) \sim (1, 1, 2)$$

$$(0,0,0) \sim (0,1,0) \sim (0,0,1) \sim (0,1,1) \sim (0,0,2) \sim (0,1,2)$$

obsérvese que esta no es una relación de equivalencia puesto que no se cumple la propiedad reflexiva. Esta relación se puede re-definir por medio de los filtros sobre $\{1,2,3\}$ para que resulte una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$$R_1 \text{ esta definida como } f \sim g \text{ si y solo si } \{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \in F_1$$

Esta es una relación de equivalencia, por lo tanto generando la partición respectiva se obtiene las siguientes clases de equivalencias.

$$\langle(1,1,1)\rangle = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(1,0,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$$

$$\langle(0,0,0)\rangle = \{(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0),(0,0,2),(0,1,1),(0,1,2)\}$$

Nótese que R_2 y R_3 son casos análogos a R_1. $R_{1,2}$ esta definida como:

$$f \sim g \text{ si y solo si } \{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \in F_{1,2}$$

Sus clases son:

$$\langle(1,1,1)\rangle = \{(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),\}$$

$$\langle(0,0,0)\rangle = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,0,2),(0,1,1),(0,1,2)\}$$

$$\langle(0,1,0)\rangle = \{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2)\}$$

$$\langle(1,0,0)\rangle = \{(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2)\}$$

Nótese que $R_{1,3}$ y $R_{2,3}$, son casos análogos a $R_{1,2}$. $R_{1,2,3}$ esta definida como:

$$f \sim g \text{ si y solo si } \{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \in F_{1,2,3}$$

Esta es la relación de equivalencia usual.

El anterior ejemplo muestra que el filtro adecuado, que define una relación de equivalencia debe ser sobre el conjunto de índices que determina la familia que genera el producto cartesiano, pues si esto no se llega a tener en cuenta el filtro no genera una relación.

Teorema 1.5.1. *Sea $\prod_{i \in L} A_i$ y F un filtro sobre L, para $f,g \in \prod_{i \in L} A_i$ se tiene:*

$$f \sim g \text{ si y solo si } \{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \in F$$

Es una relación de equivalencia

Demostración. Para demostrar que es una relación de equivalencia se debe probar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

(i) Reflexiva: se debe probar que $f \sim f$

Como F es un filtro sobre L entonces Por el teorema 1.1.1 $L \in F$. Esto implica que $f \sim f$.

(ii) Simétrica: se debe probar que si $f \sim g$ entonces $g \sim f$

Como $f \sim g$ entonces $\{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \in F$ por la propiedad simétrica de la igualdad entonces $\{i \in L \mid g(i) = f(i)\} \in F$ por lo tanto $g \sim f$.

(iii) Transitiva: se debe probar que si $f \sim g$ y $g \sim h$ entonces $f \sim h$.

Como $f \sim g$ y $g \sim h$ por la propiedad *ii* y *iii* de los filtros $f \sim h$

Como la relación es reflexiva, simétrica y transitiva entonces es una relación de equivalencia.

□

El teorema anterior muestra las condiciones para obtener una relación de equivalencia por medio de un filtro sobre un conjunto adecuado (conjunto de índices). Ahora, a partir de esta relación equivalencia, se obtiene la correspondiente partición.

Definición 1.5.2. Dado el producto $\prod_{i \in L} A_i$ y F un filtro sobre L la partición generada por la relación de equivalencia dada en el Teorema 1.16. se llama un producto reducido y se denota como $\prod_{i \in L} A_i/F$.

Las clases generadas por la relación se denotaran como $\langle f \rangle_F$ donde f pertenece al producto cartesiano y F es el filtro que genera la relación, si no se entra en confusiones al hablar de las clases generadas por la relación de equivalencia simplemente se denotara a la clase como $\langle f \rangle$.

1.6 Productos reducidos sobre filtros principales

En el siguiente ejemplo se toma una potencia finita, y por ende el conjunto índices será también finito. Utilizando el teorema 1.2.3 se deduce que si se parte de una potencia finita el filtro debe ser principal.

Ejemplo 1.6.1. Sea X un conjunto, se tomara el producto X^4 en donde se obtiene los productos reducidos a partir de los filtro generados sobre $L = \{1, 2, 3, 4\}$ dado que la potencia es 4 observese que no se puede generar las clase pero se puede comprobar que:

X^4/F_1 es equipotente a X
$X^4/F_{1,2}$ es equipotente a X^2
$X^4/F_{1,2,3}$ es equipotente a X^3
$X^4/F_{1,2,3,4}$ es equipotente a X^4

Se concluye que si se hace la partición sobre una potencia finita, se obtiene un conjunto equipotente a una potencia de igual o menor grado, sin embargo este resultado se puede generalizar, por medio del siguiente teorema, pues no necesariamente la potencia debe ser finita, además, se pueden tomar productos cartesianos arbitrarios.No obstante, el filtro si debe ser principal.

Teorema 1.6.1. *Sea $\prod_{i\in L} A_i$ y F_B un filtro sobre L entonces $\prod_{i\in L} A_i/F_B$ es equipotente a $\prod_{i\in B} A_i$*

Demostración. La demostración se reduce a construir una función biyectiva entre estos dos conjuntos, Sea la función

$$H : \prod_{i\in B} A_i \longrightarrow \prod_{i\in L} A_i/F_B$$

$$f \longmapsto \langle f' \rangle$$

Donde $f'(i) = f(i)$ para toda $i \in B$

para probar que es biyectiva se probara que es inyectiva y sobreyectiva

- Se probara que H es inyectiva.

Sea $f, g \in \prod_{i\in B} A_i$ tal que $H(f) = H(g)$ es decir que $\langle f' \rangle = \langle g' \rangle$ por lo tanto $f' \sim g'$ entonces $\{i \in L \mid f'(i) = g'(i)\} \in F_B$, Como F_B es un filtro principal $B \subseteq \{i \in L \mid f'(i) = g'(i)\}$ por lo tanto para todo $i \in B$ sucede que $f'(i) = g'(i)$ y como $f'(i) = f(i)$ y $g'(i) = g(i)$ para los $i \in B$ por propiedad transitiva $f(i) = g(i)$ para toda $i \in B$ por lo tanto $f = g$ concluyéndose que H es inyectiva.

- Ahora se probará que H es sobreyectiva.

Sea $\langle g \rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F_B$, se define $f \in \prod_{i\in B} A_i$ tal que $f(i) = g(i)$ dado que $B \subseteq L$ por definición de H se tiene que $H(f) = \langle g \rangle$ es decir H es sobreyectiva.

como H es biyectiva entonces $\prod_{i\in L} A_i/F_B$ es equipotente a $\prod_{i\in B} A_i$

$\square$

Por el anterior teorema se sabe la cardinalidad del producto reducido, puesto que es equipotente a un producto cartesiano. El siguiente corolario muestra que la cardinalidad del producto reducido será igual a un A_i, cuando se hace a partir de un ultrafiltro.

Corolario 1.6.1. *Sea $B = \{b\}$ donde $b \in L$, entones $\prod_{i\in L} A_i/F_B$ es equipotente A_b. En otras palabras si F_B es un ultrafiltro principal la partición será equipotente a uno de los A_i.*

En los ejemplos anteriores se trabajó con productos cartesianos finitos, a continuación se muestra ejemplos con productos cartesianos infinitos

Ejemplo 1.6.2. Sea $X = \mathbb{N}$ y la potencia $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ utilizando el teorema 1,16 entonces si B es finito la $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/F_B$ es equipotente a $\prod_{i\in B} \mathbb{N}$ y este a su vez es equipotente a $\mathbb{N}$.
Por ejemplo si $B = \{3, 4\}$ entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/F_B$ es equipotente $\mathbb{N}^2$ que a su ves es equipotente a $\mathbb{N}$.
Si B es infinito por ejemplo $B = 2\mathbb{N}$ se sabe que éste es equipotente a $\mathbb{N}$ entonces $\prod_{i\in N} \mathbb{N}/F_{2\mathbb{N}}$ es equipolente a $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/F_{\mathbb{N}}$ que a su vez es equipotente a $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$

Corolario 1.6.2. *Dado A un conjunto, se tiene que $\prod_{i\in L} A/F_B$ es equipotente a $\prod_{i\in L} A/F_C$ donde $|B| = |C|$.*

En consecuencia al anterior corolario si se tiene un filtro F_B donde $|B| = |L|$ entonces $\prod_{i\in L} A/F_B$ es equipotente a $\prod_{i\in L} A$. En conclusión, los productos reducidos generados a partir de los filtros principales son equipotente a un producto cartesiano de algunos conjuntos de la colección.

1.7 Productos reducidos sobre filtros no principales

De partida, por el teorema 1.2.3 se debe trabajar con productos infinitos, pues de lo contrario, si partimos de un conjunto finito de índices L, todo filtro generado a partir de L es principal. Como anteriormente se ha mencionado.

Ejemplo 1.7.1 (no libres)**.** Recuérdese el filtro del ejemplo 1.3.3 el cual es $F = \cup_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} F_{2i\mathbb{N}}$, que es no principal y además no libre. Analizando el producto reducido

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/F$$

Se observa que todos los elementos del filtro contienen al elemento cero. Por esta razón, si dos elementos del producto tienen diferente esta componente, de entrada ya resultan ser clases de equivalencia diferentes. Como existen $\aleph_0$ combinaciones para esta componente, entonces se concluye que por lo menos existen $\aleph_0$ clases de equivalencia. Sin embargo este ejemplo no permite identificar la cardinalidad con exactitud.

Se construye un producto reducido, en el cual se observa que su cardinalidad es $\aleph_1$. Este se hace a partir del filtro $F_{2\mathbb{N}} \cap Fr$:

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/F_{2\mathbb{N}} \cap Fr$$

Obsérvese que todos los elementos del filtro contienen al conjunto de los números pares. Por esta razón, si dos elementos del producto son diferentes en este conjunto, de entrada ya resultan ser clases de equivalencia diferentes. Dado que la cardinalidad del conjunto de los números pares es $\aleph_0$, y se pueden realizar $\aleph_0$ combinaciones en cada competente, por lo tanto hay $\aleph_1$ combinaciones en total. Además de entrada se sabe que esta cardinalidad no puede ser mayor a $\aleph_1$, dado que la cardinalidad del producto es esta. Por consecuencia la cardinalidad de $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/F_{2\mathbb{N}} \cap Fr$ es $\aleph_1$.

Ejemplo 1.7.2 (libres)**.** Sea el filtro del ejemplo 1.3.4, es decir el filtro llamado de frechet (Fr) y la potencia infinita del conjunto de los números $\mathbb{N}$, se genera la siguiente partición:

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/Fr$$

Para esclarecer mejor el resultado de esta partición se miran algunas clases de equivalencia:

Por ejemplo, se analiza la clase de equivalencia del $\langle f\rangle$ si $g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ y está en la clase del $\langle f\rangle$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq n$ se tiene que $f(i) = g(i)$. En otras palabras, para todo elemento que pertenece $\langle f\rangle$, sus términos se corresponderán en una cola a derecha. No se debe entender que se puede sustituir el filtro de frechet por la colección a colas a derecha, pues esta colección no cumple ser filtro por la propiedad *iii* de los filtros. Además, si para dos elementos de la misma clase, sus términos se corresponden a partir de una cola a derecha, no quiere decir que antes no se hayan correspondido.

Se hará algunas observaciones respecto a la cardinalidad: Se sabe que $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ tiene cardinalidad $\aleph_1$.Se obtiene que la cardinalidad de cada clase de equivalencia de $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/Fr$ es menor o igual $\aleph_1$, y además se sabe que cada elemento del filtro de Fr define $\aleph_1$ clases.

El siguiente teorema hace referencia a la cardinalidad de un producto reducido generado a partir de un filtro no principal. Este teorema es deducido a partir del teorema 1.6.1, pues este permite determinar la cardinalidad de productos reducidos a partir de filtros principales.

Teorema 1.7.1. *Sea $\prod_{i\in L} X_i/F$, F un filtro no principal y C el conjunto de los cardinales de las clases de equivalencia generadas por cada elemento del filtro*[3] *, entonces el cardinal $\prod_{i\in L} X_i/F$ será menor o igual al mínimo del conjunto C.*

Demostración. Primero hay que demostrar que C tiene un elemento mínimo. Pero como C es un conjunto de cardinales, se sabe que este conjunto es acotado inferiormente por cero, por lo tanto el conjunto C tiene un mínimo. Ahora se toma un elemento $A \in F$ de tal forma que la cardinalidad del conjunto B de las clases de equivalencia generadas por F_A sea el elemento mínimo del conjunto C.
La cardinalidad $\prod_{i\in L} X_i/F$ no es mayor que la cardinalidad de B puesto que implica que dos elementos que están relacionados por F_A no están relacionado en el $\prod_{i\in L} X_i/F$ pero dado que $A \in F$ esto es imposible y por lo tanto la cardinalidad del producto reducido es igual o menor al mínimo del conjunto C. □

La anterior caracterización solamente permite acotar superiormente el cardinal de los productos reducido, sin embargo cuando se trata de ultraproductos se tiene el siguiente resultado:

[3]Obsérvese que cuando se habla, que cada elemento B del filtro F define clases de equivalencia, están resultan de hacer el producto reducido a parir del filtro F_B.

Ejemplo 1.7.3 (cardinalidad de ultraproductos)**.** si se toma $X = \{a, b\}$ y $\langle f \rangle \in \prod_{i \in L} X/F$ donde F un ultrafiltro se estudiara cual es la cardinalidad del producto reducido si se toma ha $A = \{i \in L \mid f(i) = a$ donde $a_i \in X\}$ Por el teorema 1.4.2 $A \in F$ o $A^c \in F$. Si $A \in F$ entonces $f \sim f'$ donde $f'(i) = a$ para toda $i \in L$, Por el contrario si $A^c \in F$ entonces $f \sim f''$ donde $f''(i) = b$ para toda $i \in L$, por lo tanto $\prod_{i \in L} X/F = \{f', f''\}$.

Teorema 1.7.2. *Si X es un conjunto finito y F un ultrafiltro entonces $\prod_{i \in L} X/F$ es equipotente a X.*

Demostración. Sea $f \in \prod_{i \in L} X/F$, se define ha A_a como:

$$A_a = \{i \in L \mid f(i) = a \text{ y } a \in X\}$$

Por el teorema 1.4.2 $A_a \in F$ o $A_a^c \in F$, si $A_a \in F$ para un $a \in X$ entonces $f \sim f'$ donde $f'(i) = a$ para toda $i \in L$, por el contrario si $A_a \notin F$ para toda $a \in X$ entonces $A_a^c \in F$ para toda $a \in X$, como X es finito entonces $\bigcap_{a \in X} A_a^c \in F$ sin embargo, nótese que $\bigcup_{a \in X} A_a = L$ por lo tanto $(\bigcup_{a \in X} A_a)^c = \bigcap_{a \in X} A_a^c = \emptyset$ lo que es una contradicción, de lo cual se concluye que para todo $f \in \prod_{i \in L} X/F$ existe $a \in X$ tal que $f \sim f'$ por ende $\prod_{i \in L} X/F$ es equipotente a X.

□

Capítulo 2

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN PRODUCTOS REDUCIDOS Y EN ULTRAPRODUCTOS

En el capítulo anterior se utilizaron filtros como herramientas para definir relaciones de equivalencia y por ende particiones sobre productos cartesianos arbitrarios, obteniendo así los llamados productos reducidos, y cambiando el filtro por un ultrafiltro se obtiene un ultraproducto. En este capítulo nos interesa dotar a tales productos reducidos (o ultraproductos) de una estructura algebraica o de orden, entre otras cosas, para identificar las relaciones que se dan entre la estructura que tiene cada elemento de la familia y la estructura que tiene el producto reducido. Para ello trabajaremos familias de estructuras algebraicas con una operación.

2.1 Propiedades algebraicas en los productos reducidos

Para comenzar este estudio, se empieza por definir las operaciones en el producto cartesiano para luego extenderlas a los productos reducidos.

Definición 2.1.1. Dada la familia $\{(A_i, +_i)\}_{i\in L}$ de grupoides, se define en $\prod_{i\in F} A_i$ la operación $+$ como:

$$\prod_{i\in L} A_i \times \prod_{i\in L} A_i \longrightarrow \prod_{i\in L} A_i$$
$$(f,g) \longmapsto f+g$$

donde

$$f+g : L \longrightarrow \bigcup_{i\in L} A_i$$
$$(f+g)(i) = f(i) +_i g(i), \forall i \in L$$

Teorema 2.1.1. *La operaciòn dada en la definición 2.1.1 está bien definida.*

Demostración. Veamos que $f+g \in \prod_{i\in L} A_i$. Como $f \in \prod_{i\in L} A_i$ entonces $f(i) \in A_i$ de igual manera $g(i) \in A_i$ y como $(A_i, +_i)$ es un grupoide entonces para todo i se tienen que $f(i) +_i g(i) \in A_i$ es decir que

$$f + g \in \prod_{i\in L} A_i$$

□

Definición 2.1.2. Sea F un filtro sobre L y $\prod_{i\in L} A_i/F$ el producto reducido. Si $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle$ son elementos de $\prod_{i\in L} A_i/F$ entonces:

$$\langle f\rangle + \langle g\rangle = \langle f+g\rangle$$

Teorema 2.1.2. *La operaciòn dada en la definición 2.1.2 está bien definida.*

Demostración. Si $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$ entonces f y $g \in \prod_{i\in L} A_i$ luego $f+g \in \prod_{i\in L} A_i$, por tanto $\langle f+g\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$ es decir $\langle f\rangle + \langle g\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$

Ahora, como la operación se definió sobre una partición, se debe comprobar que si $\langle f\rangle \sim \langle g\rangle\ y\ \langle h\rangle \sim \langle e\rangle$ entonces $\langle f+g\rangle \sim \langle g+e\rangle$
Por definición

$$A = \{i \in L/f(i) = g(i)\} \in F$$

$$B = \{i \in L/h(i) = e(i)\} \in F$$

Sea

$$C = \{i \in L/f(i) +_i h(i) = g(i) +_i e(i)\} \in F$$

Por la propiedad ii de los filtros se tiene que $A\cup B \in F$.Además $A\cup B \subseteq C$, por la propiedad iii de los filtros $C \in F$. Por lo tanto:

$$\langle f+g\rangle \sim \langle g+e\rangle$$

□

Ejemplo 2.1.1. Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, se define las siguientes operaciones como:

$+_1$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$*_1$	0	1	2
0	2	1	0
1	1	0	2
2	0	2	1

Sea la estructura $(\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i/F,+)$, definida como: si i es par entonces $f(i)\in(A,+_1)$ de lo contrario $f(i)\in(A,*_1)$. Observese como se operan dos elementos de este producto reducido:

$$(0,\mathbf{1},2,\mathbf{0},1,\mathbf{2},0,\mathbf{1},2...)*(0,\mathbf{2},0,\mathbf{0},2,\mathbf{0},0,\mathbf{0},2...)=(1,\mathbf{2},0,\mathbf{2},0,\mathbf{0},1...)$$

Nótese que los números que están en negrilla pertenecen a $(A,*_1)$, por lo tanto:

$$2*_1 0=0$$

Aprovechando el ejemplo, se puede ver que los elementos de la familia son homomorfos dos a dos, pues una estructura es homomorfa consigo misma, y además existe un homomorfismo de $(A,*_1)$ a $(A,+_1)$ definido por la siguiente función:

$$G:(A,*_1)\longrightarrow(A,+_1)$$
$$a\longmapsto 2$$

Se comprueba que es un homomorfismo, puesto que $G(a)+_1G(b)=2$ y $G(a*_1b)=2$ y por lo tanto $G(a*_1b)=G(a)+_1G(b)$.

Ahora, obervese que existe un homorfimo de $(A_k,*_1)$ en $(\prod_{i\in N} A_i,+)$: Sea A_k donde k no es par. Se define la función $H:A_k\longrightarrow\prod_{i\in L} A_i$, donde

$$H(a)_{(i)}=\begin{cases} 2 & si \quad i\ no\ es\ par\\ a & si \quad i\ es\ par\end{cases}$$

Por ejemplo $1\longrightarrow(2,1,2,1,2,1...)$.

Falta comprobar que $H(a*_1b)=H(a)+H(b)$ para mostrar que es un homomorfismo.

- Si i es par, entonces $H(a*_1b)_{(i)}=2=H(a)_{(i)}+_1H(b)_{(i)}$
- Si i no es par, entonces $H(a)_{(i)}*_1H(b)_{(i)}=a*_1b=H(a*_1b)_{(i)}$

Por lo tanto se tiene que $H(a+_Kb)=H(a)+H(b)$ comprobando así el homomorfismo de $(A_k,*_1)$ en $(\prod_{i\in N} A_i,+)$.

Además, por medio del homomorfismo canónico se obtiene el homomorfismo de $(\prod_{i\in N} A_i,+)$ en $(\prod_{i\in N} A_i/F,+)$ y por medio de la composición de funciones se obtiene finalmente que existe un homomorfismo de $(A_k,*_1)$ en $(\prod_{i\in N} A_i/F,+)$.

El anterior ejemplo da pie al siguiente teorema:

Teorema 2.1.3. *Si $\{(A_i,+_i)\}_{(i\in L)}$ es una familia de estructuras algebraicas homomorfas dos a dos entonces cada elemento de la familia es homomorfa a $(\prod_{i\in L} A_i/F,+)$.*

Demostración. Se probará que existe un homomorfismo entre cada elemento de la familia con el producto cartesiano. Luego, por medio del homomorfismo canónico, se relaciona la estructura del producto cartesiano con la del producto reducido. Por composición de funciones se finaliza la demostración.

- Cada elemento $\{(A_i, +_i)\}_{(i\in L)}$ es homomorfo al producto:

  Sea $(A_k, +_k)$ un elemento de la familia y $\{(f_i)_{i\in L}\}$ la familia de funciones de homomorfismo entre $(A_k, +_k)$ y $(A_i, +_i)$. Definamos la función:

  $$H : A_k \longrightarrow \prod_{i\in L} A_i \; donde H(a)_{(i)} = f_i(a)$$

  Debemos comprobar que $H(a +_K b) = H(a) + H(b)$. Se tiene que $H(a +_K b)_{(i)} = f_i(a +_K b) = f_i(a) +_i f_i(b) = H(a)_{(i)} +_i H(b)_{(i)} = (H(a) + H(b))_{(i)}$ y por lo tanto

  $$H(a +_K b) = H(a) + H(b)$$

  Por lo tanto cada elemento de la familia es homomorfa a $(\prod_{i\in L} A_i, +)$

- Se tiene que existe un homomorfismo canónico de $\prod_{i\in L} A_i$ en $\prod_{i\in L} A_i/F$ definido como:

  $$H' : \prod_{i\in L} A_i \longrightarrow \prod_{i\in L} A_i/F \; tal \; que \; H'(f) = \langle f\rangle$$

  Por la definición de H'

  $$H'(f + g) = \langle f + g\rangle$$

  Por la definición 2.1.2

  $$\langle f + g\rangle = \langle f\rangle + \langle g\rangle$$

  como $f, g \in \prod_{i\in L} A_i$. Por definición de H se tiene que:

  $$H'(f) = \langle f\rangle$$

  $$H'(g) = \langle g\rangle$$

  Por lo tanto

  $$H'(f + g) = H'(f) + H'(g)$$

- Por último, por medio de la composición de funciones se tiene que cada elemento de la familia es homomorfo a $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$.

El siguiente gráfico muestra el camino que se uso para la demostración.

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "H' \circ H"'] & \prod_{i \in L} A_i \arrow[d, "H'"] \\
& \prod_{i \in L} A_i / F
\end{tikzcd}$$

□

Observemos que en la demostración anterior se probó que el producto y el producto reducido siempre son homomorfos, gracias al homomorfismo canónico. Sin embargo, debe tenerse presente que dos estructuras algebraicas con propiedades en común, no necesariamente son homomorfas, y aun así estas propiedades pueden ser trasferidas al producto reducido:

Ejemplo 2.1.2. Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, se define las siguientes operaciones como:

$+_1$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

$*_1$	0	1	2
0	2	1	0
1	1	0	2
2	0	2	1

Se puede comprobar que $(A, +)$ y $(A, *)$ son conmutativas. Primero se probará que no existe un homomorfismo de $(A, +)$ en $(A, *)$. Supongamos que existe un homomorfismo dado por f, entonces se tiene que si $a = 0$ o $b = 0$ entonces

$$f(0) = f(a) * f(b)$$

En particular

$$f(0) = f(1) * f(0),\ f(0) = f(1) * f(1)\ y\ f(0) = f(1) * f(2)$$

Luego

$$f(1) * f(0) = f(1) * f(1) = f(1) * f(2)$$

Como $(A, *)$ es cancelativo entonces

$$f(0) = f(1) = f(2)$$

Luego f es una función constante, supongamos que $f(x) = k$

$$f(0 + 0) = f(0) * f(0)$$

$$k = k * k$$

Por lo tanto k es un elemento idempotente de $(A, *)$ pero en esta estructura no hay elementos idempotentes, lo cual es una contradicción y por la tanto f no es una función de homomorfismo.

Ahora se probará que no existe un homomorfismo de $(A, *)$ en $(A, +)$. Supongamos que existe un homomorfismo dado por f, entonces se tiene que si $f(a) \neq 0$ o $f(b) \neq 0$ entonces

$$f(a) + f(b) = f(a * b) = 0$$

En particular

$$f(1) + f(1) = f(1 * 1) = f(0) = 0$$

$$f(2) + f(2) = f(2 * 2) = f(1) = 0$$

$$f(3) + f(3) = f(3 * 3) = f(2) = 0$$

Luego

$$f(0) = f(1) = f(2)$$

Como

$$f(0 * 0) = f(0) + f(0)$$

$$f(1) = f(0) + f(0)$$

Pero como $f(1) = f(0)$ entonces

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

Lo cual es una contradicción y por la tanto f no es una función de homomorfismo. Sin embargo si se mira el producto reducido con su estructura, éste resulta conmutativo sin importar el filtro. Es decir, que la transferencia de la propiedad conmutativa no depende la función de homomorfismo, lo que da lugar al siguiente teorema:

Ejemplo 2.1.3. Si los elementos de $\{(A_i, +_i)\}_{i\in L}$ cumplen la propiedad conmutativa, entonces $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$ también es conmutativo sin importar el filtro.
Sean $\langle f\rangle$, $\langle g\rangle$ elementos del producto reducido. Primero que todo se comprobará que $f + g = g + f$, es decir que el producto es conmutativo, para ello basta probar que sus imágenes son las mismas:

$$(f + g)(i) = f(i) +_i g(i) = g(i) +_i f(i) = (g + f)(i)$$

Y por lo tanto $f + g = g + f$ ahora:

$$\langle f\rangle + \langle g\rangle = \langle f + g\rangle = \langle g + f\rangle = \langle g\rangle + \langle f\rangle$$

Es decir $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$ es conmutativo sin importar el filtro.

Ahora si $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$ es conmutativo para un filtro ¿cada elemento de la familia lo es? La respuesta es no (ver ejemplo 2.1.4). Sin embargo, si el producto es conmutativo para todo filtro entonces, se puede probar que los $\{(A_i, +_i)\}_{i\in L}$ también son conmutativos. La prueba de tal hecho seria así:
Para $k \in L$ se supondrá $(A_k, +_k)$ no es conmutativo por lo tanto existen $a, b \in A_k$ tal que

$$a + b \neq b + a$$

Sea F_k un ultrafiltro principal. Por lo anterior existen:

$$\langle f\rangle \; y \; \langle g\rangle \in (\prod_{i\in L} A_i/F_k,+)$$

Tal que $f(k)=a$ y $g(k)=b$ obteniéndose que:

$$\langle f\rangle + \langle g\rangle \neq \langle g\rangle + \langle f\rangle$$

Puesto que son diferentes en la componente k, lo que es una contradicción puesto que $(\prod_{i\in L} A_i/F_k,+)$ por hipótesis es conmutativo para todo filtro. Por lo tanto $\{(A_i,+_i)\}_{i\in L}$ son conmutativos.

En el ejemplo anterior se trabajó con una propiedad, la conmutatividad, que se describe formalmente de una forma especial en la que solo se utiliza el cuantificador para todo pues ella se escribe como:
Se dice que una operación + cumple la propiedad conmutativa en A si

$$(\forall x,y,z\in A)(x+y=y+x)$$

Una rápida mirada a la forma lógica de tal enunciado nos lleva a preguntarnos si la trasferencia de propiedades de los elementos de la familia al producto reducido o viceversa depende de la forma lógica de enunciarla. Veamos otro ejemplo en el que se aborda una propiedad que se describe también con cuantificadores universales.

Ejemplo 2.1.4. (Identidad de Tarski) Se dice que una operación + cumple la propiedad de Tarski en A si

$$(\forall x,y,z\in A)(x+(y+(z+x))=z+y)$$

Si los elementos de $\{(A_i,+_i)\}_{i\in L}$ cumplen la identidad de Tarski se puede observar que $(\prod_{i\in L} A_i/F,+)$ también cumple la identidad de Tarski sin importar el filtro. Sea

$$\langle f\rangle \; \langle g\rangle \; y \; \langle h\rangle \; \in \{(A_i,+_i)\}_{i\in L}$$

Como todo $(A_i,+_i)$ cumple la identidad de Tarski entonces para $i\in L$ se tiene que

$$f(i)+(g(i)+(h(i)+f(i)))=h(i)+g(i)$$

Y por lo tanto

$$f+(g+(h+f))=h+g$$

Luego

$$(\langle f\rangle + (\langle g\rangle + (\langle h\rangle + \langle f\rangle))) = (\langle f+(g+(h+f))\rangle = \langle h+g\rangle = \langle h\rangle + \langle g\rangle$$

De los anteriores ejemplos se puede conjeturar que si $(A_i,+_i)$ cumple una propiedad algebraica que cumple ser formulada con un enunciado simple que se puede expresar sin variables libres, que tiene solo cuantificadores, símbolos de operación válidos en las estructuras y la igualdad para cada $i\in L$, entonces $(\prod_{i\in L} A_i/F,+)$ cumple la propiedad.

Teorema 2.1.4. *Si los elementos de* $\{(A_i, +_i)\}_{i \in L}$ *cumple una de las siguientes propiedades algebraicas entonces el producto reducido generado por estas y cualquier filtro sobre el conjunto de índices también la cumple:*

Conmutativa: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i y = y +_i x)$
Asociativa: $(\forall x, y, z \in A_i)(x +_i (y +_i z) = (x +_i y) +_i z)$
Elemento neutro : $(\exists e \in A_i)(\forall x \in A_i)(x +_i e = x +_i e = e)$
Inverso $(\forall x \in A_i)(\exists y \in A_i)(x +_i y = y +_i x = e)$ *con* e *elemento neutro*
Cancelativa : $(\forall x, y, z \in A_i)(x +_i y = x +_i z$ *entonces* $y = z)$
Idempotencia:$(\forall x \in A_i)(x +_i x = x)$
Unipotencia:$(\forall x, y \in A_i)(x +_i x = y +_i y)$
Absorbente a izquierda:$(\forall x, y \in A_i)(x +_i (x +_i y) = x)$
Absorbente a derecha: $(\forall x, y \in A_i)((x +_i y) +_i y = y)$
Seudoabsorbente a izquierda: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i (x +_i y) = y)$
Seudoabsorbente a derecha: $(\forall x, y \in A_i)((x +_i y) +_i y = x)$
Semisimetrica a izquierda I: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i (y +_i x) = x)$
Semisimetrica a izquierda II: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i (y +_i x) = y)$
Semisimetrica a derecha: $(\forall x, y \in A_i)((x +_i y) +_i x = y)$
Identidad de Pierce: $(\forall x, y \in A_i)((x +_i y) +_i x = x)$
Identidad I de Stein:$(\forall x, y \in A_i)(x +_i (y +_i x) = x +_i y)$
Identidad II de Stein: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i (y +_i x) = (y +_i x) +_i y)$
Identidad III de Stein: $(\forall x, y \in A_i)((x +_i y) +_i (y +_i x) = y)$
Identidad de Tarski: $(\forall x, y, z \in A_i)(x +_i (y +_i (z +_i x)) = z +_i y)$
Elasticidad: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i (y +_i x) = (x +_i y) +_i x)$
Asociativa Cíclica I: $(\forall x, y, z \in A_i)(x +_i (y +_i z) = z +_i (x +_i y))$
Asociativa Cíclica I: $(\forall x, y \in A_i)(x +_i (y +_i z) = (z +_i x) +_i y)$

Demostración. La demostración de que el producto reducido cumple cada una de las propiedades enunciadas, cuando los elementos de la familia la cumplen, es análoga a la elaborada en los ejemplos 2.1.3 y 2.1.4 a excepción de la propiedad de elemento neutro y propiedad del inverso. A continuación se muestra la demostración para la propiedad del elemento neutro. Primero que todo se denotara al elemento neutro de $(A_i, +_i)$ como e_i, ahora probaremos que existe elemento neutro en el producto reducido. Sea:

$$e : L \longrightarrow \bigcup_{i \in L} A_i$$
$$i \longmapsto e_i$$

Como $e_i \in A_i$ entonces

$$\langle e \rangle \in \prod_{i \in L} A_i / F$$

Dado que $e_i \in A_i$ es elemento neutro entonces para $i \in L$ se tiene que

$$e(i) +_i g(i) = g(i) +_i e(i) = g(i)$$

Por lo tanto

$$e + g = g + e = g$$

Luego

$$\langle e\rangle + \langle g\rangle = \langle e + g\rangle = \langle g\rangle \text{ y } \langle g\rangle + \langle e\rangle = \langle g + e\rangle = \langle g\rangle$$

Por lo tanto $\langle e\rangle$ es el elemento neutro de $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$. Además este es único, pues toda estructura que cumple la propiedad del elemento neutro, cumple además esta propiedad. La demostración de la propiedad de inversos es análoga a la propiedad del elemento neutro. $\square$

Teniendo en cuenta los ejemplos revisados y otros revisados pero no expuestos en el presente documento, se puede observar que existe una propiedad débil de transferencia de propiedades, en el sentido de que si todos los elementos de la familia cumplen una propiedad, también la cumple el producto reducido.
Se han estudiado familias de estructuras algebraicas en la cuales sus elementos cumplen cierta propiedad, ahora, si no todos los elementos de la familia cumplen la propiedad ¿el producto reducido la cumple? A continuación se muestra que para que el producto reducido la cumpla, se debe escoger un filtro adecuado.

Ejemplo 2.1.5. (Propiedad de idempotencia) Esta propiedad dice: sea A un conjunto con una operación $*$ tal que $(\forall x \in A)$ se tiene que $(x * x) = x$. Dada $\{(A_i, +_i)\}_{(i\in K)}$, cuyos elementos cumplen la propiedad de idempotencia donde $K \subset L$, para F un filtro sobre L tal que $K \in F$ o algún subconjunto de K, entonces $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$ es idempotente. Su prueba se puede realizar de la siguiente manera:

Sea

$$\langle f\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$$

Por hipótesis se tiene que

$$f(i) +_i f(i) = f(i) \ \ \forall i \in K$$

Es decir que

$$K \subseteq \{i \in L \mid f(i) +_i f(i) = f(i)\}$$

Por la propiedad 3 de filtros se tiene

$$\{i \in L \mid f(i) +_i f(i) = f(i)\} \in F$$

Y por lo tanto

$$f \backsim f + f$$

luego

$$\langle f\rangle + \langle f\rangle = \langle f + f\rangle = \langle f\rangle$$

Y así el producto reducido resulta idempotente. En el ejemplo anterior los elementos de un subconjunto de la familia cumple una propiedad algebraica, de las ya descritas, entonces para un filtro que contiene al conjunto cuyos elementos son los subíndices del subconjunto de la familia que cumplen con la propiedad entonces el producto reducido generado por este filtro cumple con la propiedad.

Teorema 2.1.5. *Sea $\{(A_i, +_i)\}_{i\in L}$ para la cual se tiene un $K \subseteq L$ tal que los elementos $\{(A_i, +_i)\}_{i\in K}$ cumplen con una propiedad de las enunciadas en el teorema 2.1.4. Si $K \in F$ entonces el producto reducido generado por F cumple la propiedad.*

Cabe anotar que si K no está en F y ademas se tiene que para todo $G \nsubseteq K$ tal que $G \subseteq L$ y cuyos elementos $\{(A_i, +_i)\}_{i\in K}$ no cumplen con una propiedad enunciadas en el teorema 2.1.4 entonces el producto reducido no cumple la propiedad. El siguiente teorema garantiza este hecho, puesto que es su contra reciproco.

Teorema 2.1.6. *Si $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$ cumple una de las propiedades enunciadas en el teorema 2.1.4 entonces existe $K \in F$ tal que los elementos de $\{(A_i, +_i)\}_{i\in K}$ cumplen la propiedad.*

Demostración. Se demostrará para la Identidad de Pierce. Sea

$$K = \{i \in L \mid (A_i, +_i) \textit{ cumplen la propiedad de pierce}\}$$

Por lo tanto

$$K^c = \{i \in L \mid (A_i, +_i) \textit{ no cumplen la propiedad de pierce}\}$$

Es decir que para todo $i \in K^c, \exists a_i, b_i \in A_i$ tal que

$$(a_i +_i b_i) +_i a_i \neq a_i$$

Sean $f, g \in \prod_{i\in L} A_i$ tales que

$$f(i) = a_i \ \ \forall i \in K^c \ \ y \ \ g(i) = b_i \ \ \forall i \in K^c$$

Luego

$$((f(i) +_i g(i)) +_i f(i)) \neq f(i) \ \ \forall i \in K^c$$

Ahora, como $f, g \in \prod_{i\in L} A_i$ entonces

$$\langle f\rangle, \langle g\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$$

Por hipótesis se tiene que

$$((\langle f\rangle + \langle g\rangle) + \langle f\rangle) = \langle f\rangle$$

Entonces

$$A = \{i \in L/((f(i) + g(i)) + f(i)) = f(i)\} \in F$$

Como $((f(i) +_i g(i)) +_i f(i)) \neq f(i) \ \ \forall i \in K^c$, entonces $K^c \cup A = \emptyset$ luego $A \subseteq K$ por tanto por la propiedad tres de los filtros se tiene $K \in F$. Las demostraciones de las otras propiedades son análogas a la anterior.

□

Ahora, si ningún elemento de la familia cumple alguna propiedad enunciada en el teorema 2.1.4, entonces sin importar el filtro escogido el producto reducido no cumple la propiedad. Esto se tiene por consecuencia del teorema anterior.

Se ha estudiado familias de estructuras con propiedades que tienen características particulares, estas propiedades terminan transfiriéndose a los productos reducidos. Ahora, cuando se habla del producto reducido no es más que debilitar la noción de igualdad de un producto cartesiano. El siguiente teorema garantiza que si un producto reducido es generado a partir de un filtro principal este resulta ser isomorfo a un producto cartesiano.

Teorema 2.1.7. *Dado F_B sobre L, $(\prod_{i\in L} A_i/F_B, +^*)$ es isomorfo a $(\prod_{i\in B} A_i, +)$*

Demostración. Sea la función

$$H : \prod_{i\in B} A_i \longrightarrow \prod_{i\in L} A_i/F_B$$
$$f \longmapsto \langle f^{'} \rangle$$

Donde $f^{'} \in \prod_{i\in L} A_i$ y $f'(i) = f(i) \;\; \forall i \in B$.
Se probara que H cumple la condiciones de una función de isomorfismo

(i) Los conjuntos son equipotentes.
Esto se garantiza gracias al teorema 1.6.1

(ii) La propiedad de homomorfismo:
Sean f y g dos elementos de $\prod_{i\in B} A_i$, entonces se debe probar que

$$H(f+g) = H(f) +^* H(g)$$

Por definición de H se tiene que

$$H(f+g) = \langle (f+g)' \rangle$$

Donde

$$(f+g)^{'} \in \prod_{i\in L} A_i \; y \; (f+g)^{'}(i) = (f+g)(i) \;\; \forall i \in B$$

Por definición 2.1.1 se tiene que

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i) \;\; \forall i \in B$$

Es decir que

$$(f+g)^{'}(i) = f(i) + g(i) \;\; \forall i \in B$$

Por lo tanto

$$\langle (f+g)' \rangle = \langle f' \rangle + \langle g' \rangle$$

Lo que implica que

$$H(f+g) = H(f) +^* H(g)$$

Por I y II se concluye que $(\prod_{i\in L} A_i/F_B, +^*)$ es isomorfo a $(\prod_{i\in B} A_i, +)$

□

Las estructuras algebraicas que se conocen habitualmente tienen excepciones con sus propiedades, por ejemplo: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y otros cumplen la propiedad cancelativa a excepción del elemento neutro de la suma en la operación producto. En el siguiente ejemplo se estudia que productos reducidos tienen las mimas excepciones que la familias.

Ejemplo 2.1.6. Se observa la estructura (A,+), en la cual se puede notar que el elemento neutro es a y todos tienen inverso a excepción de c.

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Si se analiza la potencia de A entonces se tiene que para $\prod^2 A$ este tiene más de un elemento sin inverso.

$+$	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(b,b)	(b,a)	(c,c)	(c,a)	(b,c)	(c,b)
(a,a)	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(b,a)	(b,b)	(b,c)	(c,a)	(c,b)	(c,c)
(a,b)	(a,b)	(a,a)	(a,c)	(b,a)	(b,b)	(c,c)	(c,b)	(b,c)	(c,a)
(a,c)	(a,c)	(a,b)	(a,c)	(b,b)	(b,c)	(c,c)	(c,c)	(b,c)	(c,b)
(b,b)	(b,b)	(b,a)	(b,c)	(a,a)	(a,b)	(c,c)	(c,b)	(a,c)	(c,a)
(b,a)	(b,a)	(b,b)	(b,c)	(a,b)	(a,a)	(c,c)	(c,a)	(a,c)	(c,b)
(c,c)	(c,c)	(c,b)	(c,c)	(b,b)	(b,c)	(c,c)	(c,c)	(b,c)	(c,b)
(c,a)	(c,a)	(c,b)	(c,a)	(b,b)	(b,a)	(c,c)	(c,a)	(b,c)	(c,b)
(b,c)	(b,c)	(b,b)	(b,c)	(a,b)	(a,c)	(c,c)	(c,a)	(a,c)	(c,b)
(c,b)	(c,b)	(c,a)	(c,c)	(b,a)	(b,b)	(c,c)	(c,b)	(b,c)	(c,a)

En la tabla anterior se muestra que (a,a) es el elemento neutro y en total hay 5 elementos del producto que no tienen inverso. Obsérvese que con los filtros sobre el conjunto de índices (que en este caso es $L = \{1,2\}$) se tienen los filtros F_1, F_2 y $F_{1,2}$, si utilizamos a F_1 o F_2 para generar la partición esta resulta ser isomorfa a A y si se utiliza a $F_{1,2}$ no se está haciendo ninguna partición pues todo elemento de $\prod^2 A$ termina siendo una clase. Esto se debe a que el conjunto de índices es finito y por lo tanto todo filtro generado es principal. Ahora, ¿se puede encontrar un producto reducido en el cual las mismas excepciones sean transferidas?

Para empezar a dar respuesta, se formula el siguiente teorema:

Teorema 2.1.8. *Si los $\{(A_i, +_i)\}_{i\in L}$ cumplen cierta propiedad a excepción de un elemento para cada $\{(A_i, +_i)\}$, entonces existe más de un elemento en $(\prod_{i\in L} A_i, +)$ que no cumple con la propiedad.*

Demostración. Sea $a_i \in (A_i, +_i)$ tal que a_i no cumple alguna propiedad del teorema 2.1.4 y $f \in (\prod_{i\in L} A_i, +)$ tal que el conjunto E cumple:

$$\emptyset \subset E = \{i \mid f(i) = a_i\} \subseteq L$$

Entonces f no cumple con la propiedad puesto que existe una componente que no la cumple. Ahora, nótese que por cada subconjunto de L se puede obtener un función que cumpla con la condición dada, como es un producto cartesiano entonces $\mid L \mid > 1$ y por lo tanto existe más de un f que no cumple la propiedad. □

Por el teorema 2.1.7, se sabe que todo producto reducido obtenido a partir de un filtro principal es isomorfo a un producto cartesiano. Debe tenerse presente que por el teorema 1.2.3 todos los filtros construidos a partir de un conjunto finito son principales, es por ello que surge la necesidad de utilizar productos infinitos para construir un producto reducido, pues la idea principal es construir un producto reducido que no resulte isomorfo a alguno de los elementos de la familia, y en el caso de una potencia que esta no sea isomorfa a la estructura de partida, para lo cual, según lo visto se necesita de un filtro no principal.

Ejemplo 2.1.7. Sea $\{(A_i, +, \times)\}_{i\in L}$ con $A_i = \mathbb{N} = L$ y $+, \times$ las operaciones usuales definidas en los $\mathbb{N}$. La potencia se denota como $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in L} A_i$.
Las propiedades como la conmutatividad de la suma y el producto, la existencia de elemento neutro con respecto a estas operaciones, así como la cancelativa con respecto a la suma se transfieren de la estructura base a la potencia. Sin embargo eso no sucede con la propiedad cancelativa con respecto al producto, puesto que para $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$E = \{i \mid a_i = 0 \; con \; x = (a_1, a_2, a_3, ...)\} \subset \mathbb{N}$$

Se obtiene un $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\{i \mid b_i = 0 \; con \; y = (b_1, b_2, b_3, ...)\} = E^c$$

Se tiene que $x \times y = 0$. Como la idea es que la estructura no tenga divisores de cero, entonces se debe cumplir que $y = 0$ o $x = 0$. No puede suceder que $y = 0$ y $x = 0$, ya que esto implicaría que E y E^c pertenezcan al filtro, lo cual es imposible por la propiedad *ii* de los filtros. Por lo tanto $y = 0$ ó $x = 0$, es decir que $E \in F$ ó $E^c \in F$, por el teorema 1.4.3 F es un ultrafiltro.

Teorema 2.1.9. *Si los elementos $\{(A_i, +_i)\}_{i\in L}$ cumplen cierta propiedad a excepción de un elemento para cada $\{(A_i, +_i)\}$ entonces si F es un ultrafiltro se tiene que existe un único elemento de $(\prod_{i\in L} A_i/F, +)$ que no cumple con la propiedad.*

Demostración. Sea $f_E \in \prod_{i\in L} A_i$ la cual no cumple la propiedad, donde

$$E = \{i \mid f_E(i) \; no \; cumplen \; la \; propiedad\}$$

Como F es un ultrafiltro entonces se tiene que $E \in F$ ó $E^c \in F$, Si $E \in F$ entonces $f_E \backsim f_L$ por lo tanto $\langle f_L \rangle$ es el único elemento que no cumple la propiedad. Puesto que si $E^c \in F$ entonces $\langle f_E \rangle$ cumple la propiedad. □

Terminando la sección de propiedades algebraicas se enunciará un teorema que ayuda al estudio de las estructuras algebraicas en productos reducidos.

Teorema 2.1.10. *Dado $\emptyset \neq K \subseteq L$, para F' sobre K existe F sobre L tal que $(\prod_{i\in K} A_i/F^{'}, +)$ es isomorfo a $(\prod_{i\in L} A_i/F, +^{*})$*

Demostración. Sea $F = \bigcup_{B\in F'} F_B$ es un filtro sobre L por el teorema 1.3.1, se define la función H como:

$$H : \prod_{i\in K} A_i/F' \longrightarrow \prod_{i\in L} A_i/F$$
$$\langle f'\rangle_{F'} \longmapsto \langle f\rangle_F$$

Donde $f'(i) = f(i)$ para todo $i \in K$ Se probara que H es una función de isomorfismos

(i) H es biyectiva

Se prueba que H es uno a uno:

Sea $\langle f'\rangle, \langle g'\rangle \in \prod_{i\in K} A_i/F'$, si $H(\langle f'\rangle) = H(\langle g'\rangle)$, entonces $\langle f\rangle = \langle g\rangle$ es decir,

$$\{i \mid f(i) = g(i)\} \in F$$

Además por definición de H se tiene que

$$\{i \mid f'(i) = f(i)\} \in F' \text{ y } \{i \mid g'(i) = g(i)\} \in F'$$

Como $F' \subseteq F$ entonces

$$\{i \mid f'i) = f(i)\} \in F \text{ y } \{i \mid g'(i) = g(i)\} \in F$$

Por la propiedad *ii* y *iii* de filtros se tiene que

$$\{i \mid g'(i) = g(i), f'(i) = f(i) \text{ y } f(i) = g(i)\} \in F$$

Es decir que

$$\{i \mid g'(i) = f'(i)\} \in F$$

Como $g'(i)$ y $f'(i)$ están definido sobre K y $F = \bigcup_{B\in F'} F_B$ entonces

$$\{i \mid g'(i) = f'(i)\} \in F'$$

Es decir que

$$\langle f'\rangle = \langle g'\rangle$$

Y por lo tanto H es uno a uno.

Ahora se prueba que H es sobreyectiva:

dado $\langle f\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$ entonces $\forall_{i\in K}(f(i) = f'(i))$ como f' esta definida en K entonces $f' \in \prod_{i\in K} A_i$ luego se tienen que

$$H(\langle f'\rangle) = \langle f\rangle$$

Por lo tanto H es sobreyectiva.

Como H es uno a uno y sobre entonces H es biyectiva.

(ii) propiedad de homomorfismo:

Sea $\langle f'\rangle, \langle g'\rangle \in \prod_{i\in K} A_i/F'$ se debe probar que

$$H(\langle f'\rangle + \langle g'\rangle) = H(\langle f'\rangle) +^* H(\langle g'\rangle)$$

Por definición 2.1.2 se tiene que

$$H(\langle f'\rangle + \langle g'\rangle) = H(\langle f' + g'\rangle)$$

Por definición de H

$$H(\langle f' + g'\rangle) = f +^* g$$

Por otro lado se tiene que

$$H(\langle f'\rangle) +^* H(\langle g'\rangle) = f +^* g$$

Es decir que

$$H(\langle f'\rangle + \langle g'\rangle) = H(\langle f'\rangle) +^* H(\langle g'\rangle)$$

Por i y ii se concluye que $(\prod_{i\in K} A_i/F', +)$ es isomorfo a $(\prod_{i\in L} A_i/F, +^*)$

□

2.2 Propiedades de orden en los productos reducidos

Hasta el momento se ha trabajado la relación de equivalencia que se define por medio de los filtros, obteniendo la respectiva partición que se denomina producto reducido. Esta construcción recoge la idea de igualdad entre dos elementos del producto. Ahora se define similarmente una relación de orden, sobre el producto reducido.

Definición 2.2.1. Dado $\langle f\rangle$, $\langle g\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$, para $(A_i, \leq)$ se dice que:

$$\langle f\rangle \leq \langle g\rangle \textit{ si y solo si } \{i \in L \mid f(i) \leq g(i)\} \in F$$

Teorema 2.2.1. *La definición 2.1.1 es una relación de orden.*

Demostración. Se comprueba las tres propiedades para ser relación de orden.

- **Reflexiva** :Se debe probar que $\langle f\rangle \leq \langle f\rangle$.

Dado que $\{i \in L \mid f(i) \leq f(i)\} = L$ y $L \in F$ entonces $\langle f\rangle \leq \langle f\rangle$

- **Anti simétrica** : Se debe probar que si $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$ entonces $\langle f\rangle \nleq \langle g\rangle$ o $\langle g\rangle \nleq \langle f\rangle$

Si $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$ entonces $A = \{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \notin F$. Supongamos que $\langle f\rangle \leq \langle g\rangle$ entonces $B = \{i \in L \mid f(i) \leq g(i)\} \in F$. Si $\langle g\rangle \leq \langle f\rangle$ entonces $C = \{i \in L \mid g(i) \leq f(i)\} \in F$, por la propiedad dos de los filtros se tiene que $B \cap C = \{i \in L \mid f(i) \leq g(i) \text{ y } g(i) \leq f(i)\} \in F$, y por la propiedad antisimentrica de cada A_i se tiene que $\{i \in L \mid f(i) = g(i)\} \in F$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto es decir $\langle f\rangle \nleq \langle g\rangle$ da manera análoga se muestra que .

- **Transitiva** : Se debe probar que $\langle f\rangle \leq \langle g\rangle$ y $\langle g\rangle \leq \langle h\rangle$ entonces $\langle f\rangle \leq \langle h\rangle$

Si $\langle f\rangle \leq \langle g\rangle$ y $\langle g\rangle \leq \langle h\rangle$ entonces $\{i \in L \mid f(i) \leq g(i)\} \in F$ y $\{i \in L \mid g(i) \leq h(i)\} \in F$ por la propiedad ii de los filtros se tiene que $\{i \in L \mid g(i) \leq h(i)\ y\ f(i) \leq g(i)\} \in F$ y por la propiedad transitiva en cada A_i se tiene que $\{i \in L \mid f(i) \leq h(i)\} \in F$ entonces $\langle f\rangle \leq \langle h\rangle$. Por lo tanto la definición 2.1.1 define una relación de orden sobre el producto reducido.

□

Al demostrar la propiedad antisimentrica se trabajó con la contra reciproca de la propiedad habitual, esto con el objetivo de mostrar el conflicto que resulta de trabajar con la negación de la definición de la clase de equivalencia para los productos reducidos. Además nótese que no siempre esta relación define un orden total.

Ejemplo 2.2.1. Sea $B = \{0, 1\}$, $L = \mathbb{N}$ y $0 < 1$. Obsérvese que $B^N/F_{1,2}$ define una relación de orden parcial:
Si $f = (0, 1, 0, 1, 0...)$ y $g = (1, 0, 1, 0, 1...)$ entonces se tiene que $A = \{i \in \mathbb{N}/f(i) < g(i)\} \in F_{1,2}$ y además $A^c = \{i \in N/g(i) < f(i)\} \in F_{1,2}$, por lo tanto f no está relacionado g. Para poder establecer una relación de orden total, se debe agregar a A ò A^c. Si se agrega a A se obtiene un producto reducido generado por F_2, por el contrario si se agrega a A^c se obtiene un producto reducido generado por F_1.

Con el anterior ejemplo se puede observar que se debe escoger entre A ò A^c , y por el teorema 1.4.3 se obtiene un ultrafiltro.

Teorema 2.2.2. *Sea $\prod_{i\in L} A_i/F$ donde cada A_i tiene una relación de orden total y F un ultrafiltro entonces $(\prod_{i\in L} A_i/F, \leq)$ es una relación de orden total.*

Demostración. Por el teorema 2.2.1 se tiene que es una relación de orden. Ahora, solo basta probar que para cualquier $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle$ que pertenezcan al producto reducido estos deben estar relacionados. Sea $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle \in \prod_{i\in L} A_i/F$ donde F es un ultrafiltro. Sea $A = \{i \in L \mid f(i) \leq g(i)\}$, si suponemos que $A \notin F$ entonces por el teorema 1.4.3 y teniendo en cuenta que todos los A_i tienen un orden total se tiene que $A^c = \{i \in L/g(i) \leq f(i)\} \in F$, por lo tanto $\langle g\rangle \leq \langle f\rangle$. □

Nótese que la demostración del teorema 2.2.1, la cual muestra que el producto reducido con la relación dada por la definición 2.2.1 es una relación de orden, si partimos en que F es un ultrafiltro, se obtiene una demostración directa, pues se pude utilizar el siguiente hecho:

$$\text{Si } \langle f\rangle \nleq \langle g\rangle \text{ entonces } A = \{i \in L \mid f(i) \nleq g(i)\} \in F.$$

Téngase en cuenta que esto no se podía decir cuando F no era un ultrafiltro pues el hecho de que $\langle f\rangle \nleq \langle g\rangle$ solamente se podía concluir que $\{i \in L \mid f(i) \leq g(i)\} \notin F$ y respecto a $\{i \in L \mid f(i) \leq g(i)\}$ pude o no pertenecer a F. Esta elección lo permite hacer el ultrafiltro. El siguiente ejemplo ilustra la forma de razonamiento, cuando se puede utilizar el anterior hecho, es decir cuando se parte un ultraproducto.

Ejemplo 2.2.2. Sea $\prod_{i\in L} A_i/F$ donde F es un ultrafiltro, se debe probar que si $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$ entonces $\langle f\rangle \nleq \langle g\rangle$ o $\langle g\rangle \nleq \langle f\rangle$. Si $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$ entonces $A = \{i \in L \mid f(i) \neq g(i)\} \notin F$. Supongamos que $\langle f\rangle \nleq \langle q\rangle$ entonces $B = \{i \in L/f(i) \nleq g(i)\} \notin F$. Por la propiedad dos de los filtros se tiene que $A \cap B = \{i \in L/f(i) \neq g(i) \ y \ f(i) \nleq g(i)\} \in F$, y por la propiedad antisimentrica de cada A_i se tiene que $C = \{i \in L \mid g(i) \nleq f(i)\} \in F$, por lo tanto $\langle g\rangle \nleq \langle f\rangle$.

Se ha visto que las propiedades que cumplen 'casi todos' los elementos de una familia de estructuras algebraicas, se trasfieren a los productos reducidos, por medio de un filtro no principal (téngase presente que los filtros principales también copian la estructura a los productos reducidos, sin embargo por razones expuestas anteriormente, de aquí en adelante no se tomaran en cuenta), que en última dará sentido a la expresión 'casi todos'. Existen algunas propiedades algebraicas y de orden que no se enuncian a continuación se enuncian algunas de ellas:

Ejemplo 2.2.3. Se toma la familia $\{Z_{i+2}, +, \leq\}_{i\in\mathbb{N}}$ y se estudia los productos reducidos que se generan con filtros no principales sobre $\mathbb{N}$. Cada elemento de la familia es cíclico de orden finito, la pregunta que surge es ¿ Cuando $\prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$ es cíclico de orden finito?

Tómese $f_n \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}$ tal que $f(i) = n$ para toda $i > n \in \mathbb{N}$. Como F es no principal entonces para cualquier $K \in F$ éste resulta ser infinito y por ende $f_l \nsim f_k$ para $l \neq k$. Por lo tanto por cada $n \in \mathbb{N}$ existe por lo menos una clase diferente determinada por f_n. De lo cual se puede concluir que $\prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$ no es cíclico de orden finito. Sin embargo si se toma una familia de estructuras con orden finito tales que el conjunto de todos los órdenes de cada elemento de la familia, es acotado, entonces el producto reducido a partir de un ultrafiltro (es decir un ultraproducto) tiene un orden finito.

Aquí daremos por terminado el estudio de las propiedades de orden de los productos reducidos. Ahora para dar por terminado este capitulo, se muestran algunos ejemplos clásicos.

2.3 Algunos Productos reducidos clásicos

A continuación se presentan dos ejemplos clásicos de productos reducidos,sin la demostración de varias de las afirmaciones que se realizaran, estas pueden ser consultadas en la bibliografía.

Ejemplo 2.3.1. (**Naturales no estándar**)
En el ejempló 2.1.6 se ha hablado sobre las propiedades de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y se concluye que no todas las propiedades de $\mathbb{N}$ se cumplen en el producto cartesiano, como la idea es buscar un producto reducido, en particular que sea un dominio de integridad, por el teorema 2.1.9 se obtiene que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ debe ser una ultrapotencia. Una de las propiedades que se quiere obtener con esta nueva estructura, es poder encontrar un subconjunto propio isomorfo a los naturales, es decir, una extensión de los naturales. Además, por el teorema 2.1.8 la ultrapotencia a debe ser generada a partir un ultrafiltro libre. Dicho lo anterior, la primera clasificación de esta estructura, se hace a partir de los números estándar y no estándar, donde:

Se denomina a $\langle f\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ estandar si y solo si $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = n\} \in F$ para algún $n \in \mathbb{N}$; a $\langle f\rangle$ se denota como $\langle n\rangle$; de lo contrario se dice que es no estandar.
Nótese que los números estándar, terminan siendo clases de equivalencia de sucesiones casi constantes de números naturales. Además, los números no estándar, existen únicamente en ultrapotencias generadas a partir de ultrafiltros no principales.
A continuación se analiza algunas propiedades de los naturales no estándar:

- Las sucesiones consecutivas son números no estándar

Obsérvese que la expresión casi constante depende del filtro, por lo tanto una sucesión consecutiva como $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ puede ser tanto estándar como no estándar. Sin embargo como se ha dicho anteriormente se debe trabajar con ultrafiltros no principales, es decir que en este sentido, todas las sucesiones consecutivas terminan siendo números no estándar

- Todo número estándar es menor a un número no estándar.

Se supondrá que existe al menos un número no estándar que es menor a un número estándar es decir que para $\langle a\rangle$ no estándar existe un $\langle n\rangle$ estándar tal que $\langle a\rangle \neq \langle n\rangle$, sean los conjuntos $E_j = \{i \mid a_i = j\}$. para $j \nleq n$ donde $j, a_i \in \mathbb{N}$.

Como $\{a\} \leq (n)$ entonces $\bigcup_{j\neq n} E_j \in F$, como F es un ultrafiltro por el teorema 1.4.2 $E_j \in F$ ó ${E_j}^c \in F$. Si $E_j \in F$ entonces $\{a\}$ es estándar lo que contradice la hipótesis por lo tanto ${E_j}^c \in F$, por el teorema 1.1.1 $\bigcap_{j\neq n} {E_j}^c \in F$, en otras palabras, $(\bigcup_{j\neq n} E_j)^c \in F$ por la propiedad ii de los filtros esto contradice la primera propiedad de filtros, por lo tanto todo número no estándar es mayor a todo número estándar. En este sentido los números no estándar, se podrían denominar como números infinitos. Otros teoremas que se cumplen en los naturales no estándar y que también se cumplen en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ son:

- La suma de dos elementos $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ es estándar si y sólo si los dos sumandos son estándar.

- El producto de dos elementos $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ / Fes estándar si y sólo si los dos factores son estándar.

Obsérvese que el conjunto de los números naturales es cíclico de orden infinito, y como se puede notar por lo desarrollado anteriormente, los naturales no estándar no son cíclicos.

Ejemplo 2.3.2. (**Reales no estándar**)
Este ejemplo resume algunas propiedades de los reales no estándar. La idea es que siga siendo un cuerpo y esto implica que no haya divisores de cero, entonces se sigue trabajando con las ultrapotencias. Se denota como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/F$.

Primero que todo se definen tres conjuntos que caracterizan a los demás:

- Se denomina a $\langle f\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/F$ estándar si y solo si $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = a\} \in F$ para algún $a \in \mathbb{R}$.
- Si $\langle f\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/F$ es menor a todo número estándar diferente a $\langle 0\rangle$ si y solo si $\langle a\rangle$ es un número infinitesimal.
- Si $\langle a\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/F$ es mayor a todo número estándar si y solo si $\langle a\rangle$ es un número infinito.

Dos números están infinitamente cerca si $\langle a-b\rangle$ es un infinitesimal y se representan como $\langle a\rangle \approx \langle b\rangle$. Las siguientes propiedades pueden verificarse:

- Si $\langle r\rangle \approx \langle s\rangle$ y $\langle r_0\rangle \approx \langle s_0\rangle$ entonces $\langle r + r_0\rangle \approx \langle s + s_0\rangle$
- Si $\langle r\rangle \approx \langle s\rangle$ y $\langle r_0\rangle \approx \langle s_0\rangle$ todos no infinitos entonces $\langle r * r_0\rangle \approx \langle s * s_0\rangle$
- Si $\langle r\rangle \approx \langle r_0\rangle$ no son infinitesimales, entonces $\langle 1/r\rangle \approx \langle 1/r_0\rangle$.
- Si $\langle r\rangle \approx \langle s\rangle$, $\langle r_0\rangle \approx \langle s_0\rangle, \langle r\rangle < \langle r_0\rangle$ y $\langle r\rangle \approx \langle r_0\rangle$, entonces $\langle s\rangle < \langle s_0\rangle$.

Se denomina halo de $\langle x\rangle$ al conjunto $E = \{\langle r\rangle \mid \langle x\rangle \approx \langle r\rangle\}$

- Todo número real finito esta infinitamente próximo a un número real estándar, el cual se denomina la parte estándar.
- Todo subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/F$ no vacío y acotado superiormente (inferiormente) tiene supremo (ínfimo).

Además nótese que el conjunto de los números reales cumple la propiedad arquimediana, sin embargo en el paso al ultraproducto esta propiedad se pierde, dado que existen números no estándar mayores a todo número estándar, y este último al ser multiplicado por un número natural estándar nunca será mayor al número real no estándar. No obstante, si se modifica la propiedad arquimediana para números naturales no estándar, se tiene obtiene una propiedad 'aquimediana no estándar' en los reales no estándar.

Capítulo 3

LA FAMILIA DE LOS $\mathbb{Z}_n$ Y SUS PRODUCTOS REDUCIDOS

En este capítulo se estudian algunos productos reducidos generados a partir de familias de los $\mathbb{Z}_n$. El producto reducido será denotado de la siguiente forma:

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$$

Sabemos que si p es primo entonces $\mathbb{Z}_p$ es un campo bajo la suma y multiplicación. Por el contrario, si q no es primo, los $\mathbb{Z}_q$ no resultan ser un campo, puesto que hay elementos que no tienen inversos bajo la multiplicación, estos son aquellos que no son primos relativos con q. Utilizando el teorema 2.1.11 no es necesario tomar dos productos cartesianos diferentes, pues por medio del filtro se pueden analizar estas estructuras. Para no incluir a $\mathbb{Z}_0$ y $\mathbb{Z}_1$, en el producto reducido indexaremos a los $\mathbb{Z}_n$ con $\mathbb{Z}_{i+2}$ así si $i = 0$ el primer elemento de la familia será $\mathbb{Z}_2$. Sea la familia de estructuras $\{(\mathbb{Z}_{i+2}, +_i, *_i)\}_{i\in A}$ donde las operaciones $+_i$ y $*_i$, son la suma y multiplicación usuales en cada $\mathbb{Z}_{i+2}$. Tómese la estructura $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +, *)$ obtenida por la definición 2.1.2. Por el teorema 2.1.5, se tiene que esta estructura cumple las siguientes propiedades, sin importar el filtro escogido:

Con una operación

- $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +)$ es un grupo abeliano
- $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, *)$ tiene elemento idéntico
- $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, *)$ es asociativa
- $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, *)$ es conmutativa

Con dos operaciones

- $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +, *)$ es un anillo en donde la multiplicación cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma

Ahora bien, el objetivo consiste en estudiar el anillo generado para tratar de identificar si se transfieren algunas u otras propiedades de los elementos de la familia o si por el contrario aparecen nuevas propiedades además, se quiere caracterizar los elementos de los producto reducido.

3.1 Números estándar

Al copiarse de los naturales y reales no estándar, se puede identificar que en este nuevo mundo también existen dos tipos básicos de números, los estándar y los no estándar, a saber:

Definición 3.1.1 (Números estándar)**.** Se dice que $\langle f \rangle$ es un número estándar en $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +, *)$ si y solo si $A = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = n \text{ y } i+2 > n\} \in F$ para algún $n \in \mathbb{N}$, en este caso se denota por $\langle n \rangle$.

El conjunto de todas $\langle n \rangle$ se denotara como ST. El siguiente teorema demuestra que este conjunto está bien definido:

Teorema 3.1.1. *Dado* $f \in \langle n \rangle$

(i) si $g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ *y* $g(i) = n$ *para todo* $i+2 > n$ *entonces* $f \sim g$.

(ii) si $g \sim f$ *entonces* $\{i \in \mathbb{N} \mid g(i) = n\} \in F$

Demostración. Como $f \in \langle n \rangle$ entonces

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = n \text{ y } i+2 > n\} \in F$$

(i) Como $A \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = g(i)\}$, por la propiedad *iii* de filtro, se tiene que $f \sim g$.

(ii) Si $g \sim f$ por definición de la relación se tiene que

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid g(i) = f(i)\} \in F$$

Por la propiedad *ii* de los filtros se tiene que

$$A \cap B \in F, \text{ además } A \cap B \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid g(i) = n \text{ y } i+2 > n\}$$

Por la propiedad *iii* de filtro, se tiene que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid g(i) = n \text{ y } i+2 > n\} \in F$$

□

En el teorema anterior se puede tomar a g como una sucesión convergente puesto que una sucesión convergente en los enteros es aquella que a partir de un numero n sus términos son iguales, esto nos sugiere un nuevo camino para poder caracterizar los elementos del producto reducidos generados por filtros que se generan sobre un conjunto de índices numerable, este camino se hace por medio de las sucesiones de números naturales. Los elementos del producto reducido $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ se relacionaran con las sucesiones de números naturales por medio de una correspondencia dada de la siguiente forma:

Dada una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y un $f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$ se dice que $f = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si $a_i \in f(i)$ para todo i. Por lo tanto para el $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ se tiene que $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \langle f\rangle$.

Obsérvese que si $f = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y para $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $a_i \sim b_i$ en Z_{i+2}, por el mecanismo anteriormente descrito se tiene que $a_i \in f(i)$ para todo i, como se tiene que $a_i \sim b_i$ entonces $b_i \in f(i)$, se concluye que $b_i \in f(i)$ para todo i, es decir que $f = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Esto quiere decir que $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$.
Ahora, cabe preguntarse qué relación tienen las sucesiones con respecto a la clase de equivalencia definida a partir de los filtros. Una consecuencia de tomar filtros libres y en particular tomar el filtro de Fréchet es que toda sucesión que converge al mismo número pertenece a la misma clase de equivalencia del producto reducido.

Teorema 3.1.2. *Dado $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$, donde F es libre si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergen a r entonces $\langle\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle = \langle\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$*

Demostración. Dado $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que convergen a r, se tiene que a partir de un n y un m, $a_i = r$ y $b_i = r$ respectivamente, y por lo tanto $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \sim \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Es decir $\langle\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle = \langle\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ □

No solo sucesiones que convergen a un mismo número definirán clase de equivalencias iguales si no que esto depende del filtro, puesto que para algunas sucesiones oscilantes estas determinan las mimas clases, por ejemplo

$$a_n = 1 \text{ y } b_n = \begin{cases} 1 & si \quad n\ no\ es\ par \\ 0 & si \quad n\ es\ par \end{cases}$$

Se tiene que $\langle\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle = \langle\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ si los números pares pertenecen al filtro que define el producto reducido. Se tiende a pensar que las sucesiones estrictamente crecientes deberían generar clase distintas a aquellas que generan las sucesiones convergentes, sin embargo esto no siempre sucede. Se puede ver que el siguiente ejemplo.

Definición 3.1.2. una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde $a_i \in \mathbb{Z}$ es consecutiva si dado $a_0 = m$ entonces $a_j = m + j$.

Como se pretende estudiar cuando una sucesión consecutiva genera la mimas clase de equivalencia que una sucesión convergente en $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$, se tomara el siguiente ejemplo, en cual se analizara si depende o no del filtro escogido.

Ejemplo 3.1.1. Dada la sucesión convergente $a_n = 5$ se buscará encontrar una sucesión consecutiva que genere la misma clase de equivalencia en el producto reducido, es decir se construye una sucesión consecutiva $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \sim \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ por lo tanto se debe tener que para $i > 3$

$$b_i \cong 5\ mod(i+2)$$

Es decir que

$$b_i = n(i+2) + 5$$

De manera que

$$b_0 + i = n(i+2) + 5$$

Como $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión consecutiva entonces

$$b_0 + i + 1 = n(i+3) + 5$$

Es decir que

$$n(i+2) + 5 = n(i+3) + 4$$

Luego

$$n = 1$$

Por lo tanto

$$b_0 = 7$$

De esta forma

$$b_i = 7 + i$$

Además, puede notarse que la anterior construcción no depende del filtro en términos generales se puede enunciar de la siguiente manera

Teorema 3.1.3. *Si $a_n = c$ y $b_n = n + c + 2$ entonces $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$*

Demostración. Si $f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$ tal que $a_i \in f(i)$ entonces

$$f(i) \cong c \; mod(i+2)$$

En otras palabras

$$f(i) \cong c + i + 2 \; mod(i+2)$$

Es decir

$$b_i \in f(i)$$

Y por lo tanto

$$f = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$

Lo que implica que

$$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$

□

Hecho estas observaciones sobre sucesiones, retomamos el estudio algebraico dotando con sentido preguntas como ¿Toda sucesión de números enteros convergente pertenecen o representan a un número estándar?, si es así ¿Toda sucesión de números enteros que converge a un mismo número, pertenece o representa al mismo número estándar? De aquí en adelante cuando se hable de sucesión, se sobrentiende que se está hablando de sucesiones de números enteros, las cuales se han hecho corresponder por medio del mecanismo anteriormente descrito. A continuación se estudia el conjunto de los ST, haciendo algunas observaciones acerca de las sucesiones convergentes.

Ejemplo 3.1.2 (ST a partir de filtros principales)**.** En este ejemplo se tomará dos productos reducidos para analizar qué sucede con los ST:

- Si se toma F_0 el filtro principal generado por el conjunto $\{0\}$ para establecer la relación de equivalencia

El producto reducido resultante es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ es decir:

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_0 = \mathbb{Z}_2$$

Para caracterizar los ST solo es necesario analizar a $f(0)$, puesto que dados f y g dos funciones del producto cartesiano en donde $f(0) = g(0)$ entonces $f \sim g$. Nótese que dos sucesiones que convergen al mismo número pueden tener diferentes imágenes en 0 y por lo tanto pueden pertenecer a diferentes clases. A continuación se prueba que

$$ST = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_0$$

Si $\langle f\rangle \in ST$, por la definición 3.1.1 se tiene que:

$$\{i \mid f(i) = 0\} \in F_0 \text{ ó } \{i \mid f(i) = 1\} \in F_0$$

Así mismo, por la definición del producto reducido se tiene respectivamente:

$$\langle f\rangle = \langle 0\rangle \text{ ó } \langle f\rangle = \langle 1\rangle$$

A continuación se prueba que ST es cerrado bajo la suma. Sea $\langle f\rangle$, $\langle g\rangle \in ST$ tal que:

$$\{i \mid f(i) = 0\} \in F_0 \text{ y } \{i \mid g(i) = 1\} \in F_0$$

En particular se tiene que:

$$f(0) = 0 \text{ y } g(0) = 1$$

Por la definición 2.1.1 se obtiene:

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto

$$\{0\} \subseteq \{i \mid (f + g)(i) = 1\}$$

Como $\{0\} \in F_0$ por definición, y por la propiedad *iii* de los filtros se tiene que:

$$\{i \mid (f+g)(i) = 1\} \in F_0$$

Finalmente

$$\{f\} + \{g\} \in ST.$$

Para los otros casos es análogo obteniéndose

+	0	1
0	0	1
1	1	0

De igual modo se obtiene la siguiente tabla para la operación *:

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

Efectivamente se tiene que $ST = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_0$.

- Si se toma $F_{2,3}$ para establecer la relación de equivalencia el producto reducido resulta ser

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_{2,3}$$

Por el teorema 2.1.8 el producto reducido es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5, +_{2,3}, *_{2,3})$, es decir que tiene 20 elementos de los cuales solo 4 pertenecen a ST. Se puede comprobar que

$$ST = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle\}$$

Nótese que $(ST, +, *)$ no es cerrado. Puesto que si $f \in \langle 1\rangle$ y $g \in \langle 3\rangle$, entonces en particular se tiene que:

$$(f+g)(2) = f(2) +_2 g(2) = 1 + 3 = 0$$

Y

$$(f+g)(3) = f(3) +_3 g(3) = 1 + 3 = 4$$

Es decir que

$$(f+g)(2) \neq (f+g)(3)$$

Por la definición de $F_{2,3}$ se tiene que:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid (f+g)(i) = n \text{ y } i+2 > n\} \notin F_{2,3}$$

Por lo tanto se concluye que $\langle 1\rangle + \langle 3\rangle \notin ST$. Análogamente se comprueba que ST no es cerrado bajo la multiplicación. Finalmente se puede observar que ST en un producto reducido a partir de un filtro principal resulta ser finito y su cardinalidad será el mínimo del conjunto que genera al filtro más dos unidades.

Teorema 3.1.4. *Si F es un ultrafiltro no libre entonces* $ST = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$

Demostración. Por el teorema 1.4.3 todo ultrafiltro no principal es libre, por lo tanto todo ultrafiltro no libre es principal, es decir existe algún $\{a\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $F = F_a$. Con esta aclaración se debe probar que

$$ST = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a$$

- Como $ST \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a$

Solo basta probar que

- $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a \subseteq ST$

Si $\langle f\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a$ como $f(a) \in \mathbb{Z}_{a+2}$ existe un $m \in \mathbb{Z}_{a+2}$ tal que $f(a) = m$. Luego

$$\{a\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = m \text{ y } a+2 > m\}$$

Por lo tanto

$$\{i \in N \mid f(i) = m \text{ y } a+2 > m\} \in F_a$$

Es decir

$$\langle f\rangle \in ST$$

Ahora, como

$$ST \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a \text{ y } \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a \subseteq ST$$

Entonces

$$ST = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_a$$

□

Dando por terminado el estudio de $(ST, +, *)$, a partir de filtros principales, se concluye que si el filtro es un ultrafiltro esta estructura es cerrada y además, es igual al producto reducido. A continuación se realiza el mismo estudio anterior, pero ahora con filtros no principales y no libres.

Ejemplo 3.1.3 (ST a partir de filtros no principales y no libres)**.** En este ejemplo se toma el filtro del ejemplo 1.3.3 que es

$$F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} F_{2i\mathbb{N}}$$

Se ha comprobado que

$$\bigcap_{A\in F} A = \{0\}$$

Por lo tanto

$$ST = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\}$$

De forma análoga al caso del producto reducido generado a partir de $F_{2,3}$ se tiene que ST no es cerrado. Se puede observar que ST no es igual al producto reducido puesto que para $f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ tal que $f(i) = 2$ para todo $i > 0$ se tiene que $f \notin \langle 0\rangle, f \notin \langle 1\rangle$ puesto que si fuera igual a una de las dos clases entonces $\{0\} \in F$ lo que implica que F sea un filtro principal. El siguiente teorema es una conclusión obtenida a partir del análisis hecho para los filtros no libres.

Teorema 3.1.5. *Dado $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$, si F es no libre entonces*

(i) $ST = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, ..., \langle (min \bigcap_{A\in F} A) + 1\rangle\}$

(ii) Si $(ST, +, *)$ es cerrado para las operaciones entonces F es un ultrafiltro principal

Demostración.

(i) $ST = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, ..., \langle (min \bigcap_{A\in F} A) + 1\rangle\}$
Por la definición 3.1.1 para un número estándar $\langle n\rangle$, existe algún f tal que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = n \text{ y } i + 2 > n\} \in F.$$

Dado que F no es libre, entonces

$$\bigcap_{A\in F} A \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = n \text{ y } i + 2 > n\}$$

Sea $m, l \in \bigcap_{A\in F} A$ tal que $m < l$ entonces $n < m + 2$ y $n < l + 2$ para que se cumplan las dos condiciones a la vez es necesario que

$$n < m + 2$$

Si $m = min \bigcap_{A\in F} A$ entonces $n < min \bigcap_{A\in F} A + 2$. Con lo cual se demuestra que

$$ST = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, ..., \langle min \bigcap_{A\in F} A + 1\rangle\}$$

(ii) Si $(ST, +, *)$ es cerrado para las operaciones entonces F es un ultrafiltro principal
Por la parte i de este teorema se tiene que $ST = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, ..., \langle n\rangle\}$ para $n = min \bigcap_{A\in F} A + 1$ Sea

$$f, g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$$

Tal que

$$f \in \langle 1\rangle \text{ y } g \in \langle n\rangle$$

Por hipótesis se tiene que $\langle f + g\rangle \in ST$ por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ donde $0 \leq m \leq n$ y $\{i \mid f(i) + g(i) = m \text{ y } i + 2 > n\} \in F$ como

$$\{n - 1\} \subseteq A \text{ para } A \in F \text{ y } f(n - 1) + g(n - 1) = 0$$

Es decir $m = 0$ Pero para todo $i > n - 1$ $f(i) + g(i) = n + 1$ Luego necesariamente

$$\{n-1\} \in F$$

y por lo tanto F es un ultrafiltro. Ya se garantizó que si $(ST, +)$ es cerrado entonces F es un ultrafiltro, de forma análoga se concluye que $(ST, *)$ es cerrado si F es un ultrafiltro, por lo tanto se puede enunciar finalmente que si $(ST, +, *)$ es cerrado entonces F es un ultrafiltro.

□

Obsérvese que no se ha demostrado que el $min \bigcap_{A \in F} A$ exista, sin embargo como los números naturales son totalmente ordenados y son inferiormente acotados, por el lema de Zorn se garantiza su existencia. El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento de los ST en productos reducidos a partir de filtros libres.

Ejemplo 3.1.4 (ST a partir de filtros libres)**.** Se analiza el conjunto ST cuando el producto reducido a partir de filtros no libres es cerrado bajo las dos operaciones, además se estudia si las sucesiones convergentes representan un tipo particular de número estándar, para esto se toma el producto reducido generado por el filtro de Fréchet, el producto resultante se denota de la siguiente manera:

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_r$$

Obsérvese que la definición 1.5.2 en la cual se establece la relación de equivalencia, se puede enunciar en este contexto como:

$$f \sim g \text{ si y solo si } f(i) = g(i) \text{ para todo } i > n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

Esta definición es válida puesto que el conjunto de $i < n$ es finito, se puede observar que si dos sucesiones convergen al mismo número entonces estas dos sucesiones pertenecen a la mimas clase de equivalencia y además se tendrá que toda sucesión convergente representa a un elemento ST.
Sea f y g que convergen a un número a entonces existe $n, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(i) = a \text{ para todo } i > m \text{ y } g(i) = a \text{ para todo } i > n$$

Por la propiedad de la tricotomía de la relación de orden en $\mathbb{N}$ se supondrá que $m > n$. Por lo tanto

$$f(i) = g(i) = a \text{ para todo } i > m$$

Es decir

$$f \sim g$$

nótese que:

$$\{i \mid f(i) = a \text{ para todo } i > m\} \subseteq \{i \mid f(i) = a \text{ y } i + 2 > a\}$$

Por la propiedad iii de los filtros se tiene que

$$\{i \mid f(i) = a \text{ y } i + 2 > a\} \in F_r$$

Por lo tanto

$$f, g \in \langle a \rangle$$

Se aprobado que en el filtro de Fréchet toda sucesión convergente representa un número estándar de manera más general se puede enunciar como

Teorema 3.1.6. *Dado* $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$*, si* F *es libre*

- *(i) Toda sucesión convergente representa a un elemento de* ST
- *(ii) Toda sucesión que converge al mismo número representa a la misma clase de equivalencia.*

La demostración de este teorema es análoga a la demostrada en el ejemplo anterior debido a que todo filtro libre contiene al filtro de Fréchet, Una de las implicaciones de que toda sucesión convergente representa a un elemento de ST es que este sea cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación, puesto que la suma de dos sucesiones convergentes es convergente

Teorema 3.1.7. *Si* F *es un filtro libre entonces* $(ST, +, *)$ *es cerrado bajo las operaciones definidas.*

Demostración. Dado que la suma y multiplicación de sucesiones convergentes es cerrada, y toda sucesión convergente representa a un número estándar, basta con probar que todo número estándar contiene un sucesión convergente. Dado $\langle a \rangle \in ST$, por la definición 3.1.1 se tiene que existe un f tal que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = a \text{ y } i + 2 > a\} \in F$$

Sea $g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$ tal que para todo $i + 2 > a$, $g(i) = a$ se tiene que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = g(i)\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = a \text{ y } i + 2 > a\}$$

Entonces se concluye que $g \in \langle a \rangle$. Como g es una sucesión convergente se obtiene que $(ST, +, *)$ es cerrado para los operaciones. □

Recuérdese que el conjunto ST a partir de filtros no libres, es isomorfo a un subconjunto de los números naturales, de tal forma que están contenidos todos los números menores a un número natural dado. Cabe esperarse que al pasar a los filtros no libres ST resulta ser isomorfo al conjunto de los números naturales.

Teorema 3.1.8. $(ST, +, *)$ *de un producto reducido generado a partir de un filtro libre es isomorfo a* $(\mathbb{N}, +, *)$

Demostración. Se define H como

$$H : ST \to \mathbb{N}$$

$$\langle a \rangle \mapsto a$$

(i) H es biyectiva

se probara que H es uno a uno:

Sea $\langle a\rangle, \langle b\rangle \in ST$, si $H(\langle a\rangle) = H(\langle b\rangle)$ entonces $a = b$ y por lo tanto se tiene que $\langle a\rangle = \langle b\rangle$. Obteniéndose que H es uno a uno.
Ahora veamos que H que es sobreyectiva:

Sea $a \in \mathbb{N}$ y $g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$ tal que $g(i) = a$ para $i + 2 > a$ entonces g es una sucesión convergente, por el teorema 3.1.6 se tiene que $\langle a\rangle \in ST$ es decir que $H(\langle a\rangle) = a$ y por lo tanto H es sobreyectiva. Como H es uno a uno y sobreyectiva entonces H es biyectiva.

(ii) $H(\langle a\rangle + \langle b\rangle) = H(\langle a\rangle) + H(\langle b\rangle)$

Por definición de la operación en el producto reducido

$$H(\langle a\rangle + \langle b\rangle) = H(\langle a + b\rangle)$$

Por definición de H se tiene que

$$H(\langle a + b\rangle) = a + b$$

Como $H(\langle a\rangle = a$ y $H(\langle b\rangle) = b$ entonces

$$H(\langle a\rangle + \langle b\rangle) = H(\langle a\rangle) + H(\langle b\rangle)$$

Por i y ii se comprueba el isomorfismo.

□

Con el anterior teorema se termina el estudio de los números estándar.

3.2 Números no estándar

En los ejemplos anteriores no todos los números del producto reducido resultaban ser estándar es oportuno para su estudio darles un nombre.

Definición 3.2.1 (números no estándar)**.** Los números no estándar son aquellos que no cumplen la definición 3.1.1 Al conjunto de números no estándar se denota como ST^c.

Obsérvese que $ST^c = \emptyset$ si el F es un ultrafiltro principal por lo tanto de aquí en adelante cuando se hable de números no estándar, se tiene que el producto reducido no es generado a partir de un ultrafiltro principal.
Los números no estándar se han definido como la negación de los números estándar, por lo tanto un número $\langle a\rangle$ no es estándar, si se tiene que:

$$(\forall A \in F)(\exists a, b \in A)(f(a) \neq f(b))$$

Sin embargo, no es necesario garantizar que toda $A \in F$ cumpla lo anterior, como se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Sea* $\langle f \rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$. *Si existe un* $A \in F$ *tal que para todo* $i, j \in A$, $i \neq j$ *y* $f(i) \neq f(j)$ *entonces* $\langle f \rangle \in ST^c$

Demostración. Supongamos que $\langle f \rangle \in ST$. Por lo tanto

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = a \text{ y } i + 2 > a\} \in F$$

Por hipótesis se tiene que $A \in F$, por lo tanto $A \cap B \in F$. Lo que es una contradicción, puesto que $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap B = \{a\}$. Es decir que $\langle f \rangle \in ST^c$. □

El anterior teorema brinda un método para construir números no estándar, sin embargo ¿todo número no estándar es de la forma del teorema 3.2.1? Para esto se hacen algunas observaciones de los números no estándar con respectó a los tipos de filtros que se utilizan para generar el producto reducido teniendo en cuenta los ejemplos anteriores.
El siguiente ejemplo ilustra como los números no estándar en un producto reducido generado a partir de un filtro principal no son cerrados bajo la multiplicación y suma.

Ejemplo 3.2.1 (ST^c a partir de filtros principales)**.** Dado el producto reducido del ejemplo 3.1.2, el cual contiene 20 elementos de los cuales hay 16 elementos no estándar. Se analiza si la suma o multiplicación de dos elementos no estándar es cerrada. Sea:

$$\langle f \rangle, \langle g \rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F_{2,3}$$

Como se ha tomado $F_{2,3}$ solo es impórtate los $f(i)$ y $g(i)$ para $i \in \{2, 3\}$ entonces si $f(2) = 0$ y $f(3) = 1$ se busca $g(2)$ y $g(3)$ tal que $\langle g \rangle$ sea no estándar

$$f(2) + g(2) = 0 \text{ y } f(3) + g(3) = 0$$

Esto garantiza que la suma sea estándar y no cerrada en ST^c, por lo tanto tenemos que

$$0 + g(2) = 0 \text{ y } 1 + g(3) = 0$$

Es decir que $g(2) = 0$ y $g(3) = 2$ y por lo tanto se tiene que

$$\langle f \rangle + \langle g \rangle = \langle 0 \rangle$$

Luego la suma de dos números no estándar no es cerrada bajo la suma. Obsérvese que si se toma a $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $g(2) = 1$ y $g(3) = 3$ entonces se tiene que

$$\langle f \rangle * \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$$

Por lo tanto ST^c tampoco es cerrado bajo la multiplicación. De igual manera se hubiese podido conseguir que la suma o multiplicación en ST^c sea nuevamente un elemento de este. La pregunta que surge es: ¿Existe un producto reducido para el cual ST^c es cerrado bajo la suma y multiplicación? Observe que si el producto reducido es generado a partir de un ultrafiltro principal, $ST^c = \emptyset$ y por ende es cerrado bajo las operaciones definidas. Por el contrario, para los demás filtros principales, ST^c no es cerrado para las operaciones.

Ejemplo 3.2.2 (ST^c a partir de filtros no principales)**.** En este ejemplo se toma el producto reducido que se estudió en el ejemplo 3.1.3, es decir, el producto reducido obtenido a partir del filtro $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} F_{2i\mathbb{N}}$. En tal ejemplo se ha enunciado una manera de encontrar números no estándar, la cual de manera general se puede expresar como: dado $f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ tal que $f(i) = n$ para todo $i > n-2$ y $n > 1$ entonces $\langle f\rangle$ es no estándar. Su prueba es análoga a la que se desarrolló en el ejemplo 3.1.3.
Otra forma de encontrar números no estándar es garantizar que para $i \neq j$ se tenga que $f(i) \neq f(j)$, en particular: Si $i < j$ implica $f(i) < f(j)$ entonces f pertenece a un número no estándar. La suma y producto de números no estándar puede ser estándar, por ejemplo si

$$f(i) = \begin{cases} \dfrac{i+2}{2} & si \quad i \; no \; es \; par \\ \\ \dfrac{i+1}{2} & si \quad i \; es \; par \end{cases}$$

$$g(i) = \begin{cases} \dfrac{i+2}{2} & si \quad i \; no \; es \; par \\ \\ \dfrac{i+1}{2}+1 & si \quad i \; es \; par \end{cases}$$

Es decir que

$$\langle f\rangle = \langle(1,1,2,2,3,3,...)\rangle \text{ y } \langle g\rangle = \langle(1,2,2,3,3,4,...)\rangle$$

Entonces

$$\langle f\rangle + \langle g\rangle = \langle 0\rangle$$

Resultando un número estándar, lo que implica que la suma en ST^c no es cerrada. Para mostrar que la multiplicación en ST^c no es cerrada, se toma el número no estándar:

$$\langle(1,2,3,4,5,6,)\rangle$$

Obsérvese que

$$(\forall i \in \mathbb{N})(f(i) = i+1)$$

Por lo tanto basta probar que

$$(i+1)^2 \cong 1 \; mod \; (i+2)$$

Se tiene que

$$(i+2) \cong 0 \; mod \; (i+2)$$

Por lo tanto

$$i^2 + 2i + 1 \cong 1 \ mod \ (i+2)$$

Es decir

$$(i+1)^2 \cong 1 \ mod \ (i+2)$$

Luego ha quedado probado que $\langle f\rangle * \langle f\rangle = \langle 1\rangle$ es decir que la multiplicación de dos números no estándar no siempre es no estándar.

Lo que se ha dicho en el anterior ejemplo se puede generalizar para todos los filtros no principales, por lo tanto no es necesario hacer un ejemplo de filtro libre como se hizo en el estudio de los ST. Una de las conclusiones generales es que para cualquier producto reducido generado por un filtro -no ultrafiltro principal- los números no estándar no son cerrados bajo la suma y multiplicación. **Se desea que ST sea cerrado bajo la suma y multiplicación es por ello que de aquí en adelante cuando se hable de un filtro se debe entender que este es libre a no ser que se diga lo contrario.**

3.3 Números negativos

Por el teorema 2.4 se garantiza que existen inversos aditivos, esto es debido a que todo elemento $\mathbb{Z}_n$ tiene inversos. La siguiente definición caracteriza un conjunto de elementos del producto reducido el cual se llamará números negativos.

Definición 3.3.1. (Números negativos)
$\langle f\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ es un número negativo si existe$\langle a\rangle \in ST$ tal que:

$$\langle f\rangle + \langle a\rangle = \langle 0\rangle$$

A $\langle f\rangle$ se denota como $-\langle a\rangle$ y al conjunto de estos como ST^-. Cabe recalcar que $\langle 0\rangle$ es el elemento idéntico aditivo del producto reducido. De la misma manera, $\langle 1\rangle$ es el elemento idéntico multiplicativo. En otras palabras, se tiene que el inverso aditivo de un número estándar es un número negativo. El siguiente teorema caracterizara a esta conjunto.

Teorema 3.3.1. *Todo número negativo es no estándar.*

Demostración. Por la definición, un número negativo depende de la existencia de un número estándar. Por lo tanto se toma un número $\langle a\rangle$ estándar, y se analiza las características que debe cumplir cualquier $\langle f\rangle$ para que:

$$\langle a\rangle + \langle f\rangle = \langle 0\rangle$$

Es decir

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid a +_i f(i) = 0\} \in F$$

Si $i \in A$ entonces

$$a +_{i+2} f(i) \cong i + 2 \; mod(i+2)$$

Entonces para $j \in A$, $j \neq i$ se debe tener que

$$a +_{j+2} f(j) \cong j + 2 \; mod \; (j+2)$$

Es decir que $f(i) \neq f(j)$ y por el teorema 3.2.1 se tiene que $\langle f \rangle$ no es estándar.

□

El teorema anterior garantiza que el inverso aditivo de todo número estándar es no estándar. Además, la demostración permite ver una representación de los números negativos, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3.1. Se puede observar que $-\langle 5 \rangle$ se puede representar como:

$$\langle (0,0,0,0,1,2,3,4,5,6,7,8...) \rangle$$

En general, existe $f \in -\langle n \rangle$ tal que:

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i+2 \leq i+2-n \\ i+2-n & si \qquad i+2 > n \end{cases}$$

Obsérvese que la forma general enunciada en el ejemplo anterior termina probando que $-\langle n \rangle = \langle -n \rangle$. Obsérvese que la unión de los números negativos y estándar con la suma y multiplicación es cerrada es decir

Teorema 3.3.2. $(ST \cup ST^{-}, +, *)$ *es cerrado*

Demostración. Su demostración se divide en tres casos:

- Dado $\langle n \rangle$ y $\langle m \rangle$

Como son dos números estándar son cerrados bajo la suma y multiplicación por el teorema 3.1.7

- Dado $-\langle n \rangle$ y $\langle m \rangle$

Dado $-\langle n \rangle$ Se sabe que $-\langle n \rangle = \langle -n \rangle$ luego

$$\langle -n \rangle + \langle m \rangle = \langle m - n \rangle$$
$$\langle -n \rangle * \langle m \rangle = -\langle m * n \rangle$$

- Dado $-\langle n \rangle$ y $-\langle m \rangle$

Se sabe que $-\langle n \rangle = \langle -n \rangle$ y $-\langle m \rangle = \langle -m \rangle$ luego

$$\langle -n \rangle + \langle -m \rangle = -\langle m + n \rangle$$
$$\langle -n \rangle * \langle -m \rangle = \langle m * n \rangle$$

□

Cabe preguntarse si ¿el inverso aditivo de un número no estándar es estándar? el siguiente ejemplo muestra un número no estándar cuyo inverso aditivo dependiendo del filtro podría ser él mismo.

Ejemplo 3.3.2. Tómese a $\langle f\rangle$ un número no estándar tal que

$$f(i) = \begin{cases} \dfrac{i+2}{2} & si \quad i\ es\ par \\ \\ \dfrac{i+3}{2} & si \quad i\ es\ impar \end{cases}$$

Es decir que

$$\langle f\rangle = \langle (1, 2, 2, 3, 3, 4, ...)\rangle$$

Se tiene que

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i\ es\ par \\ 1 & si \quad i\ es\ impar \end{cases}$$

Si el conjunto de los números pares pertenece al filtro que genera al producto reducido, entonces el inverso de $\langle f\rangle$ es $\langle f\rangle$. Es decir que el inverso de un número no estándar no necesariamente es estándar. Nótese que esto depende del filtro escogido. En términos de sucesiones, se obtiene el siguiente teorema, el cual relaciona a $ST \cup ST^{-}$ con las sucesiones consecutivas.

Teorema 3.3.3. *Toda sucesión consecutiva representa a un elemento de $ST \cup ST^{-}$, además todo elemento de $ST \cup ST^{-}$ contiene una sucesión consecutiva.*

Demostración. Sea la sucesión consecutiva $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $a_0 = m$

(i) Toda sucesión consecutiva representa a un elemento de $ST \cup ST^{-}$

Por la definición de sucesión consecutiva se tiene que $a_{m-1} = 2m - 1$ Nótese que $2m - 1 = (m + 1) + (m - 2)$ por lo tanto

$$a_{m-1} \cong m - 2\ mod(m + 1)$$

Luego

$$a_{m+j} \cong m - 2\ mod(m + j + 2)$$

Ya que

$$a_{m+j} = 2m + j$$

Se obtiene que

$$2m + j = (m + j + 2) + (m - 2)$$

Y por lo tanto

$$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \langle m - 2\rangle$$

(ii) Todo elemento de $ST \cup ST^-$ contiene una sucesión consecutiva.

Sea $f \in \langle a\rangle$ entonces existe un n tal que $f(i) = a$ donde $i \geq n$, dado que

$$2 + i + a \cong a\ mod(i + 2)$$

Entonces se construye $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ consecutiva, donde $a_i = 2 + i + a$ Y por lo tanto

$$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \langle a\rangle$$

□

Obsérvese que en la anterior demostración $\langle a\rangle$ denota a un elemento de $ST \cup ST^-$. Cuando sea el necesario diferenciar si es estándar o no, se utilizara la anterior notación ($\langle n\rangle$ y $\langle -n\rangle$). Se ha encontrado que la estructura $(ST, +, *)$ en los productos reducidos generados por filtros libres es isomorfo a los números naturales, la pregunta que surge es ¿si $(ST \cup ST^-, +, *)$ es isomorfo algún conjunto conocido?

Teorema 3.3.4. *El subanillo $(ST \cup ST^-, +, *)$ de un producto reducido generado a partir de un filtro libre es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +, *)$*

Demostración. Sea $H : ST \cup ST^- \to \mathbb{Z}$ definida como $H(\langle a\rangle) = a$

- H es biyectiva

Se prueba que H es uno a uno: Sea $\langle a\rangle, \langle b\rangle \in ST \cup ST^-$, si $H(\langle a\rangle) = H(\langle b\rangle)$ es decir $a = b$ y por lo tanto se tiene que $\langle a\rangle = \langle b\rangle$ Obteniéndose que H es uno a uno.
Ahora se prueba que H es sobreyectiva: dado $a \in \mathbb{Z}$, sea $g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}$ tal que $g(i) = 2 + i + a$ Como g es una sucesión consecutiva, por el teorema 3.3.3 se tiene que$\langle a\rangle \in ST \cup ST^-$es decir que $H(\langle a\rangle) = a$. Por lo tanto H es sobreyectiva.
Como H es uno a uno y sobre entonces H es biyectiva.

- $H(\langle a\rangle + \langle b\rangle) = H(\langle a\rangle) + H(\langle b\rangle)$

Por definición de la operación en el producto reducido se tiene que

$$H(\langle a\rangle + \langle b\rangle) = H(\langle a + b\rangle)$$

Por definición de H

$$H(\langle a + b\rangle) = a + b$$

Como $H(\langle a\rangle) = a$ y $H(\langle b\rangle) = b$ entonces

$$H(\langle a+b\rangle) = a+b = H(\langle a\rangle) + H(\langle b\rangle)$$

Por i y ii se comprueba el isomorfismo.

□

Una definición que caracteriza algunos conjuntos del producto reducido a partir de $ST \cup ST^-$ son las que (Svejdar, 2011) denomina ramas, estos conjuntos se caracterizan por que todos sus elementos se pueden escribir como la suma de uno de ellos y de un número estándar o un negativo.

3.4 Ramas

Definición 3.4.1 (Ramas)**.** Una rama R es un subconjunto del producto reducido que cumple

(i) Si $\langle f\rangle \in R$ para todo $\langle g\rangle \in R$ existe $\langle a\rangle \in ST \cup ST^-$ tal que $\langle g\rangle = \langle f\rangle + \langle a\rangle$

(ii) Si $\langle f\rangle \in R$ y $\langle a\rangle \in ST \cup ST^-$ entonces $\langle f\rangle + \langle a\rangle \in R$

Nótese que de forma similar a como se definen los filtros principales se puede generar una rama, mediante la propiedad dos.

Teorema 3.4.1. *Sea* $\langle f\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ *entonces* $R = \{\langle g\rangle \mid \langle g\rangle = \langle f\rangle + \langle a\rangle\}$ *para* $\langle a\rangle \in ST \cup ST^-$ *es una rama.*

Demostración. (i) Si $\langle f\rangle \in R$ para todo $\langle g\rangle \in R$ existe $\langle a\rangle \in ST \cup ST^-$ tal que $\langle g\rangle = \langle f\rangle + \langle a\rangle$ Sea $\langle g\rangle, \langle h\rangle \in R$ entonces existe $\langle b\rangle, \langle a\rangle \in ST \cup ST^-$ tal que $\langle g\rangle = \langle f\rangle + \langle a\rangle$ y $\langle h\rangle = \langle f\rangle + \langle b\rangle$ es decir que $\langle h\rangle$ se puede expresar en términos de $\langle g\rangle$ de la siguiente manera

$$\langle h\rangle = \langle f\rangle + \langle b\rangle = \langle f\rangle + \langle a\rangle + \langle -a\rangle + \langle b\rangle$$

Si $\langle c\rangle = \langle -a\rangle + \langle b\rangle$ entonces

$$\langle h\rangle = \langle g\rangle + \langle c\rangle$$

Y por lo tanto R cumple la propiedad 1

(ii) Si $\langle f\rangle \in R$ y $\langle a\rangle \in ST \cup ST^-$ entonces $\langle f\rangle + \langle a\rangle \in R$

La propiedad 2 se tiene por construcción. Por lo tanto R es una Rama.

□

Ejemplo 3.4.1. Un ejemplo de rama es $ST \cup ST^-$, la cual se denomina rama principal. Una rama diferente es la generada por $(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,...)$, obsérvese que los términos se repiten dos veces. Todo elemento del producto reducido cuyos elementos consecutivos se repiten n veces y es creciente genera una rama nueva por cada n, y así se puede concluir que existen infinitas ramas. Sin embargo, no son las únicas ramas que existen, por ejemplo sea $\langle f\rangle$ tal que:

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 2^n \\ i & si \quad i = 2^n \end{cases}$$

y $\{i \mid i = 2^n\} \in F$ entonces $\langle f \rangle$ genera una nueva rama.

Una de las características de las Ramas que se obtiene como consecuencia de la definición, es que dadas dos Ramas diferentes estas resultan ser disyuntas, pues de lo contrario son iguales. Es decir que generan una partición y por tanto una relación de equivalencia.

Teorema 3.4.2. *Si R y R' son Ramas diferentes entonces $R \cap R' = \emptyset$*

Demostración. Supongamos que $R \cap R' \neq \emptyset$ entonces existe $\langle f \rangle \in R \cap R'$, sea $\langle h \rangle \in R$, $\langle g \rangle \in R'$ tal que $\langle h \rangle \notin R'$, $\langle g \rangle \notin R$. Como $\langle f \rangle \in R \cap R$ existe $\langle a \rangle$ y $\langle b \rangle$ tal que

$$\langle g \rangle = \langle f \rangle + \langle a \rangle \text{ y } \langle h \rangle = \langle f \rangle + \langle b \rangle$$

Es decir que

$$\langle h \rangle \in R', \langle g \rangle \in R$$

Los cual es una contradicción dado que se había supuesto que $\langle h \rangle \notin R'$, $\langle g \rangle \notin R$ y por lo tanto Si R y R' son diferentes entonces $R \cap R' = \emptyset$

□

Una consecuencia el teorema 3.4.2 es que toda rama es construible a partir del teorema 3.4.1. A continuación se estudia si cada rama es cerrada bajo la suma y multiplicación.

Ejemplo 3.4.2. Sea $\langle g \rangle, \langle g' \rangle \in R$, por el teorema 3.4.1, existe $\langle f \rangle \in R$ tal que $\langle g \rangle = \langle f \rangle + \langle a \rangle$ y $\langle g' \rangle = \langle f \rangle + \langle b \rangle$ donde $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle \in ST \cup ST^-$. Obteniéndose que:

$$\langle g \rangle + \langle g' \rangle = \langle f \rangle + \langle a \rangle + \langle f \rangle + \langle b \rangle = 2\langle f \rangle + \langle a \rangle + \langle b \rangle$$

Si $2\langle f \rangle = \langle f \rangle + \langle c \rangle$ para algún $\langle c \rangle \in ST \cup ST^-$ se obtiene que R es cerrado. Como Se tiene que el producto reducido es un grupo con la suma entonces $\langle f \rangle = \langle b \rangle$. Por lo tanto la única Rama cerrada bajo la suma es la principal. Siguiendo el mismo razonamiento pero ahora con el producto, se obtiene que:

$$\langle g \rangle + \langle g' \rangle = (\langle f \rangle + \langle a \rangle)(\langle f \rangle + \langle b \rangle) = \langle f \rangle^2 + \langle f \rangle \langle b + a \rangle + \langle ab \rangle$$

Luego para que sea cerrado se tiene que cumplir que:

$$\langle f \rangle^2 + \langle f \rangle \langle b + a \rangle = \langle f \rangle + \langle c \rangle$$

Obsérvese que esto nos lleva al estudio de ecuaciones cuadráticas, sin embargo no se cuenta con bases aritméticas para tal estudio, por lo tanto se hace necesario introducirnos al estudio de los números cuadrados y de la divisibilidad. Sin embargo antes de esto, para dar continuidad a lo estudiado en el capítulo dos, y como esto se refleja en este producto reducido en particular, se estudia la relación de orden inducida en los productos reducidos.

3.5 Relación de orden en ultrafiltros libres

Se estudiaran los productos reducidos generados por los ultrafiltros libres puesto que por teorema 2.2.1 se garantiza que el producto reducido sea de orden total, primero que todo se probara que todo número estándar es menor a un número no estándar.

Teorema 3.5.1. *Todo número no estándar es mayor que un número estándar*

No se hará la demostración, puesto que es análoga a la realizada en el ejemplo 2.3.1 para el conjunto de los naturales no estándar.
Una consecuencia del teorema anterior y el ejemplo 3.2.2 es que el orden del producto reducido no respeta las operaciones, esta es una propiedad que se trasfieren de los z_p pues el orden en estos tampoco respeta las operaciones. Aunque esto no significa que no exista un subconjunto que si las respeta.

Teorema 3.5.2. *Si a,b,c y d son números estándar y $a < b$ y $c < d$ entonces*

(i) $a + c < b + d$

(ii) $a * c < b * d$

Se ha garantizado que los enteros son un subconjunto de los productos reducido, observe que el orden en el subconjunto no estándar que resulto ser isomorfo a los enteros no es el mismo.

Capítulo 4

ARITMÉTICA EN LOS PRODUCTOS REDUCIDOS GENERADOS POR LA FAMILIA DE LOS $\mathbb{Z}_n$ Y FILTROS LIBRES

Continuando con nuestra linea de estudio se obtiene en el presente capitulo algunos resultados que se han obtenido en los cursos usuales de aritmética, tales como el estudio de los números cuadrados y la relación de orden; ésta ultima abarca conceptos como el de unidades, divisores de cero, asociados, elemento irreductibles y números primos. Todo lo anterior nos servirá de base para llegar a algunos resultados sobre la solución de ecuaciones.

4.1 Números cuadrados

Por el teorema 3.3.4 se tiene los cuadrado de $(ST \cup ST^{-}, +, *)$ es decir

$$\langle n \rangle^2 = \langle n^2 \rangle$$

y

$$\langle n \rangle + \langle n \rangle = \langle n + n \rangle = \langle 2n \rangle$$

Téngase en cuenta que $\langle 2n \rangle = \langle 2 \rangle \langle n \rangle$ hace parte del estudio de la divisibilidad, por lo tanto a partir de ahora se entenderá como número cuadrado a los números que dan solución a:

$$\langle x \rangle = \langle f \rangle^2$$

Algunas preguntas que surgen son ¿todo número tiene raíz cuadrada? Si no lo es entonces ¿Qué números son cuadrados? Y si son cuadrados ¿de cuántos números son cuadrado? para responder a estas preguntas se estudiará algunos ejemplos buscando generalizar.

Ejemplo 4.1.1. Se buscará encontrar los números $\langle x\rangle$ tales que $\langle x\rangle^2 = \langle 1\rangle$. Tal ecuación tiene solución puesto que para $\langle x\rangle = \langle 1\rangle$ y $\langle x\rangle = -\langle 1\rangle$ se cumple la ecuación, la pregunta que surge es si existen más soluciones, de ser así es porque existe un $\langle f\rangle$ tal que $\langle x\rangle = \langle f\rangle$ de manera que:

$$\langle f\rangle^2 = \langle 1\rangle$$

Es decir que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i)^2 = 1\} \in F$$

En otras palabras se debe tener que

$$f(i)^2 \cong 1 \; mod(i+2)$$

Por lo tanto

$$(f(i)-1)*(f(i)+1) \cong 0 \; mod(i+2)$$

Luego existe $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$(f(i)-1)*(f(i)+1) = a*(i+2)$$

Si $a = 0$ entonces $f(i) = 1$ o $f(i) = -1 = i+1$. Por lo tanto para este caso si F no es un ultrafiltro se puede conseguir al menos un $\langle f\rangle$ distinto de $\langle 1\rangle$ y $\langle -1\rangle$ tal que $\langle f\rangle^2 = \langle 1\rangle$, de lo contrario solo se tiene a $\langle 1\rangle$ y $\langle -1\rangle$. Si $a \neq 0$, sea $b = f(i) - 1$ teniéndose así que:

$$b(b+2) = (i+2)a$$

$$b^2 + 2b - (i+2)a = 0$$

Obsérvese que si $a = b$ y a tiene inverso entonces $\langle f\rangle = -\langle 1\rangle$, dado que $f(i) = i+1$. Ahora, si $a \neq b$

$$b = -1 \pm \sqrt{1+(i+2)a}$$

Para que esto tenga solución en los naturales entonces $1+(i+2)a = n^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, como $a \neq 0$ entonces $b = -1 \pm n$ es decir $f(i) = \pm n$ y por lo tanto $\langle f\rangle$ cumple ser número cuadrado de $\langle 1\rangle$ si:

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq \dfrac{n^2-1}{a} - 2 \\ \\ \pm n & si \quad i = \dfrac{n^2-1}{a} - 2 \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $\{i \in \mathbb{N} \mid i = \dfrac{n^2-1}{a} - 2\} \in F$
En particular si se toma a $a = 1$ se obtiene que:

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq n^2 - 3 \\ \\ \pm n & si \quad i = n^2 - 3 \end{cases}$$

Es decir

$$f = \langle (0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, ...) \rangle$$

o

$$f = \langle (0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 11...) \rangle$$

además, se puede tener una combinación entre los $f(i)$, es decir que no necesariamente todos $f(i)$ deben ser positivo o negativos, si no pueden tener ambos a la vez.
De lo anterior se puede concluir que dependiendo del filtro existe por lo menos otro número diferente a $\langle 1 \rangle$ y $\langle -1 \rangle$ tal que su cuadrado es $\langle 1 \rangle$.

Teorema 4.1.1. *Un número $\langle a \rangle$ es cuadrado de $\langle f \rangle$ si:*

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j^2 - a - 2 \\ \\ \pm j & si \quad i = j^2 - a - 2 \end{cases}$$

para $j \in \mathbb{N}$ y $\{i \in \mathbb{N} \mid i = j^2 - a - 2\} \in F$

Demostración. Se debe probar que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i)^2 = a\} \in F$$

Pero esto se tiene puesto que

$$j^2 \cong a \; mod(j^2 - a)$$

□

Lo que se ha demostrado en el anterior teorema es que dependiendo del filtro un número estándar o negativo tiene raíz cuadrada.

Definición 4.1.1. Los $\langle f \rangle$ que cumplen la condiciones del teorema anterior se llamaran raíces cuadradas de un número n y se denotaran por $\sqrt{\langle n \rangle}$.

Un teorema que se deduce del anterior teorema es que si dos números tienen raíces entonces el producto también tendrá raíces.

Teorema 4.1.2. *Si en un producto reducido se tiene $\sqrt{\langle n \rangle}$ entonces $\langle m \rangle * \sqrt{\langle n \rangle} = \sqrt{\langle n \rangle \langle m \rangle^2}$*

Siguiendo con el estudio de números cuadrados dada una sucesión donde sus términos se repiten dos veces y es creciente a partir de un número, su cuadrado es igual un número estándar dependiendo del filtro, por ejemplo:

Ejemplo 4.1.2. Se tomará una sucesión como la que se indicó anteriormente y se mirará que existe un filtro tal que el cuadrado de este es un número estándar, sea:

$$\langle f \rangle = \langle (0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,5,...) \rangle$$

Entonces

$$\langle f \rangle * \langle f \rangle = \langle (0,0,1,1,4,4,1,0,6,5,1,...) \rangle$$

Si

$$\{i \mid i = 4j - 2 \text{ y } j \in \mathbb{N} - \{0\}\} \in F$$

Entonces

$$\langle f \rangle * \langle f \rangle = \langle 1 \rangle$$

Es decir que si en una sucesión sus términos se repiten a veces y además es creciente a partir de un número, se puede encontrar que su cuadrado es igual un número estándar dependiendo del filtro.

Teorema 4.1.3. *Dado* $\langle f \rangle$ *tal que*

$$f(i) = n + 1 + j$$

Donde $i = k + aj$, $0 \leq k < a$ *y* a *es el número de repeticiones, además se debe cumplir que*

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i = a^2(n+l) - 2(an+1) \text{ y } i > n^2\} \in F$$

Entonces

$$\langle f \rangle^2 = \langle n^2 \rangle$$

Demostración. Se probara que $f(i) * f(i) = n^2$ para

$$i = a^2(n+l) - 2(an+1) \text{ y } i > n^2$$

Como $f(i) = n + 1 + j$ entonces

$$i = k + aj$$

Es decir que

$$a^2(n+l) - 2(an+1) = k + aj$$

Luego

$$a^2(n+l) - 2an = k + aj + 2$$

Como $k + aj + 2$ tiene que ser múltiplo de a entonces

$$k = a - 2$$

Es decir

$$a^2(n + l) - 2an = a + aj$$

Ahora para probar que $f(i) * f(i) = n^2$ se probara que $(n + 1 + j)^2 \cong n^2 \ mod(a^2(n + l) - 2an)$ A continuación se hará su prueba

$$a(n + 1) \cong 0 \ mod(a)$$

Sumando cero se tiene que

$$a(n + l) + 1 - 1 + 2n - 2n \cong 0 \ mod(a)$$

Es decir

$$j + 1 + 2n \cong 0 \ mod(a)$$

Por propiedades de la congruencia

$$(j + 1 + 2n)(1 + j) \cong 0 \ mod((1 + j)a)$$

Luego

$$(j + 1 + 2n)(1 + j) + n^2 \cong n^2 \ mod((1 + j)a)$$

Que es igual a

$$(n + 1 + j)^2 \cong n^2 \ mod((1 + j)a)$$

Y como $(1 + j)a = a^2(n + l) - 2an$ entonces

$$(n + 1 + j)^2 \cong n^2 \ mod(a^2(n + l) - 2an)$$

Y por lo tanto se concluye que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) * f(i) = n^2 \text{ y } i > n^2\} \in F$$

$\square$

Se acaba de observar que dado un elemento del producto reducido este puede tener o no raíz cuadrada dependiendo del filtro. Otra forma que surge para estudiar la existencia de raíces cuadradas en el producto reducido se da a partir de la conocida ley de reciprocidad cuadrática[5] un ejemplo seria el siguiente:

Ejemplo 4.1.3. Se quiere construir un producto reducido en el cual $\langle 3\rangle$ tenga raíz cuadrada, que es lo mismo que preguntarse para cuales p se tiene que

$$x^2 \cong 3\ mod(p)$$

Se busca encontrar los i para los cuales la congruencia tenga solución o no tenga solución, por el teorema de reciprocidad cuadrática:

$$\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\dfrac{(3-1)(p-1)}{4}}$$

Luego

$$(-1)^{\dfrac{p-1}{2}} = 1$$

Es decir que para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{p-1}{2} = 2n$$

Luego

$$p = 4n + 1$$

Es decir que si existe r tal que

$$r^2 \cong p\ mod(3)$$

Entonces

[5]La conocida ley de reciprocidad cuadrática relaciona la solubilidad de dos congruencias de segundo grado relacionadas de la siguiente forma:

$$x^2 \cong p\ mod(q)$$

$$y^2 \cong q\ mod(p)$$

donde p y q son números primos impares, utilizando el símbolo de Legendre:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ es un cuadrado } mod\ q, \\ -1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces el enunciado del teorema puede resumirse de la siguiente forma:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

$$x^2 \cong 3mod\ (p) \text{ tiene solución}$$

Luego si se tiene que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i+2 \text{ es primo y } i = 12n-1\} \in F$$

Entonces existe $\langle f \rangle$ que pertenece al producto reducido generado por F tal que

$$\langle f \rangle^2 = \langle 3 \rangle$$

De forma general se tiene el siguiente teorema

Teorema 4.1.4. *Si* $\{i \in \mathbb{N} \mid i+2$ *y* p *son primos y* $i = 4pk-1\} \in F$ *entonces* $\exists \langle f \rangle \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ *tal que* $\langle f \rangle^2 = \langle p \rangle$

Demostración. Por hipótesis se tiene que

$$\{i \mid i+2 \ y \ \ p \ son \ primos \ y \ i = 4pk-1 \ para \ k \in \mathbb{N}\} \in F$$

Es decir que

$$i+2 \cong 1 \ mod(p) \ para \ i = 4pk-1$$

Como $i+2$ y p son primos y se tiene que

$$\left(\frac{p}{i+2}\right)\left(\frac{i+2}{p}\right) = 1$$

Por el teorema de la reciprocidad cuadrática existe y tal que

$$y^2 \cong p \ mod(i+2) \ para \ i = 4p-1$$

Luego si $f(i) = y$ entonces

$$\{i \mid f(i)^2 \cong p \ mod(i+2)\} \in F$$

Por lo tanto $\langle f \rangle^2 = \langle p \rangle$ □

Se puede ver que una condición del teorema anterior es que $1 \cong i+2 \ mod(p)$, el siguiente teorema tiene como condición que $r^2 \cong a \ mod(p)$ tenga solución, por el lema de Hensel para entero-adic[4] Se

[4]sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros (o p entero-adic), y m, k números enteros positivos tales que $m \leq k$. Si r es un número entero tal que

$$f(r) \cong 0 \ mod(p^k) \text{ y } f'(r) \ncong 0 \ mod(p)$$

Entonces existe un número entero s tal que

$$f(s) \cong 0 \ mod(p^{k+m}) \text{ y } r \cong s \ mod(p^k).$$

El s se puede calcular explícitamente como

$$s = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

donde $f'(r)$ es la derivada de la función $f(r)$

.

puede garantizar que $r^2 \cong a\ modp^k$ tiene solución, por ejemplo en el caso en que $p = 11$ se tiene que:

Ejemplo 4.1.4. Se quiere saber cuando $r^2 \cong a\ mod(11)$ tiene solución. Es decir que a debe ser 0, 2, 3, 4, 5 ó 9, los casos triviales son cuando a es 0, 1, 4, 9 puesto que son cuadrado de números enteros entonces se estudia cuando $a = 3$, es decir cuando $r_1^2 \cong 3\ mod(11)$ luego $r_1 = 6$. Se tiene que $f(r_1) = r_1^2 - 3$ aplicando el lema de Hensel se tiene que

$$r_2 \cong r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)}\ mod(11^2)$$

Es decir que

$$r_2 \cong 6 - \frac{33}{12}\ mod(11^2)$$

Luego

$$r_2 \cong \frac{13}{4}\ mod(11^2)$$

Que es lo mismo que

$$r_2 \cong 94\ mod(11^2)$$

Es decir que

$$94^2 \cong 3\ mod(11^2)$$

En general se tiene que ${r_k}^2 \cong 3\ mod(11^k)$ para $r_k = r_k - s$ donde

$$s \cong \frac{-f(r_k)}{f'(r_k)} mod(11^k)$$

Por lo tanto si

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i = 11^k - 2\} \in F$$

Y además se tiene que $\exists r_1$ tal que $r_1^2 \cong 3\ mod(11)$.
En conclusión: si $\langle f \rangle$ un elemento del producto reducido generado por F tal que

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 11^k - 2 \\ r_{k+1} & si \quad i = 11^k - 2 \end{cases}$$

Entonces

$$\langle f \rangle^2 = \langle 3 \rangle$$

Utilizando el lema de Hensel de manera general se tiene que si $r^2 \cong a\ mod(p)$entonces existe x talque $x^2 \cong a\ mod(p^k)$ en consecuencia con esta proposición surge el siguiente teorema

Teorema 4.1.5. *Si se tiene que* $r^2 \cong a\ mod(p)$*,* $2r \ncong 0\ mod(p)$ *y además se tiene que* $\{i \in \mathbb{N} \mid i = p^k - 2\} \in F$ *entonces* $\exists \langle f \rangle \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ *tal que* $\langle f \rangle^2 = \langle a \rangle$

A continuación se enunciará una generalización de los teoremas 4.1.1 y 4.1.5, estos se pueden generalizar de la siguiente manera

Teorema 4.1.6. *Un número* $\langle n \rangle$ *es la* k_-*esima potencia de* $\langle f \rangle$ *si:*

$$f(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j^k - n - 2 \\ \pm j & si \quad i = j^k - n - 2 \end{cases}$$

Para $j \in \mathbb{N}$ *y* $\{i \in \mathbb{N} \mid i = j^k - (n+2)\} \in F$*.*

Su demostración es análoga a la del teorema 4.1.1

Teorema 4.1.7. *Si se tiene que* $r^k \cong a\ mod(p)$*,* $kr^{k-1} \ncong 0\ mod(p)$*, y además se tiene que* $\{i \mid i + 2 = p^n\ para\ n \in \mathbb{N}\} \in F$ *entonces* $\exists \langle f \rangle \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ *tal que* $\langle f \rangle^k = \langle a \rangle$

Demostración. Por hipótesis se tiene que $r^k \cong a\ mod(p)$ y $kr^{k-1} \ncong 0\ mod(p)$ utilizando el teorema de Helsel existe un entero s_m tal que

$$(s_m)^k \cong a\ mod(p^{k+m})$$

Es decir que si $f(i) = s_m$ y como $\{i \mid i + 2 = p^n\ para\ n \in \mathbb{N}\} \in F$ entonces

$$\{i \mid \langle f(i) \rangle^k = \langle a \rangle\} \in F$$

Por lo tanto

$$\langle f \rangle^k = \langle a \rangle$$

□

4.2 Relación de divisibilidad

Ahora nuestro interés consiste en tratar de estudiar algunas nociones de teoría de números de forma análoga a como se hace en los enteros, es decir definiendo una relación de divisibilidad y tratando de responder preguntas como por ejemplo qué números dividen a los otros. En tal sentido primero se define la relación de divisibilidad:

Definición 4.2.1. $\langle f \rangle$ divide a $\langle g \rangle$ si existe un $\langle h \rangle$ tal que $\langle f \rangle * \langle h \rangle = \langle g \rangle$, en este sentido se diara que $\langle f \rangle$ es un divisor de $\langle g \rangle$ y $\langle g \rangle$ es un múltiplo de $\langle f \rangle$ y se denota como $\langle f \rangle / \langle g \rangle$

Obsérvese que si $\langle f \rangle * \langle h \rangle = \langle g \rangle$ se debe tiene que:

$$\{i \in L \mid f(i)_i * h(i) = g(i)\} \in F$$

Lo que implica el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1. *Si* $\{i \in L \mid f(i)/g(i)\} \in F$ *entonces* $\langle f \rangle$ *divide a* $\langle g \rangle$

su demostración es un implicacion de la definicion 4.2.1. El siguiente ejemplo muestra algunos números que son divisores de otros:

Ejemplo 4.2.1. Para $\langle f \rangle$ que pertenece al producto reducido, $\langle 2 \rangle$ es divisor de $\langle 2 * f \rangle$. En general para $\langle g \rangle$ y $\langle f \rangle$ que pertenecen al producto reducido se tiene que $\langle g \rangle$ divide a $\langle g * f \rangle$.

una pregunta que surge es si tal relación es de orden o no, sin embargo dado que hay un subconjunto del producto reducido isomorfo a los enteros y en estos la relación de divisibilidad usual no cumple ser relación de orden, se concluye que la relación de divisibilidad definida en los productos no cumplen ser una relación de orden. Por ejemplo, $\langle 1 \rangle$ divide a $\langle -1 \rangle$ y $\langle -1 \rangle$ divide a $\langle 1 \rangle$, pero para ningún filtro se tiene que $\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$. No obstante, esto ocurre cuando el filtro es libre, pues en los principales específicamente cuando $\{0\} \in F$, se puede comprobar que $\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$, pero de igual manera no se cumple la relación de orden, pues ninguno es divisor del otro. En general se puede observar que $\langle 1 \rangle$ divide a cualquier número, sin importar el filtro. Estos números en los enteros, así como en los anillos de polinomios, se denominan unidades. Dadas las propiedades de los $\mathbb{Z}_{i+2}$, puede brindarse una definición equivalente a la usual (la cual se ha acabado de mencionar), para esto considérese inicialmente lo siguiente: Si $m.c.d.(a, i+2) = 1$ para algún $a \in \mathbb{Z}_{i+2}$ entonces a es una unidad en $\mathbb{Z}_{i+2}$ de lo contrario es un divisor de cero. Partiendo de lo anterior se introducen las definiciones de unidades y de divisores de cero.

Unidades y divisores de cero

Definición 4.2.2. Un elemento $\langle f \rangle \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ es una unidad si

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(f(i), i+2) = 1\} \in F$$

La definición usual nos garantiza que exista un $\langle g \rangle$ tal que $\langle f \rangle * \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$ esta afirmación es válida puesto que son definiciones equivalentes. Además, $\langle g \rangle$ también resulta ser unidad. La definición alternativa que se dará de divisor de cero será la siguiente:

Definición 4.2.3. Un elemento $\langle f \rangle \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ es un divisor de cero si

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(f(i), i+2) \neq 1\} \in F$$

La definición equivalente a ésta implica que exista un $\langle g \rangle$ tal que $\langle f \rangle * \langle g \rangle = \langle 0 \rangle$ y $\langle g \rangle \neq \langle 0 \rangle$ y al igual que la definición de unidad $\langle g \rangle$ también termina siendo un divisor de cero. Como primer resultado se tiene que $\langle 1 \rangle$ siempre es unidad de $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ sin importar el filtro. Caso contrario a lo que sucede con $\langle 0 \rangle$, pues este nunca será unidad, ni divisor de cero. Por las definiciones se tiene que si $\langle f \rangle$ es una unidad entonces no es divisor de cero. Sin embargo debe tenerse cuidado con el reciproco, el cual se analizara más adelante.

Teorema 4.2.2.

(i) Si $\langle f\rangle * \langle g\rangle = \langle 1\rangle$ *entonces* $\langle f\rangle$ *y* $\langle g\rangle$ *son unidades.*

(ii) Si $\langle f\rangle * \langle g\rangle = \langle 0\rangle$ *entonces* $\langle f\rangle$ *y* $\langle g\rangle$ *son divisores de cero.*

Demostración.

(i) Si $\langle f\rangle * \langle g\rangle = \langle 1\rangle$ por definición se tiene que

$$\{i \in N \mid f(i) * g(i) = 1\} \in F$$

Como se tiene que $f(i)$ es unidad en $\mathbb{Z}_{i+2}$ cuando $(f(i), i+2) = 1$, entonces

$$\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) * g(i) = 1\} \subset \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(f(i), i+2) = 1\}$$

Por la propiedad iii de los filtros se tiene que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(f(i), i+2) = 1\} \in F$$

Por lo tanto $\langle f\rangle$ es unidad. Análogamente se llega a que $\langle g\rangle$ es unidad.

(ii) Análogamente al item i se llega a que $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle$ son divisores de cero. □

Obsérvese que $\langle -1\rangle\langle -1\rangle = \langle 1\rangle$ sin importar el filtro, por lo tanto $\langle -1\rangle$ es unidad en cualquier producto reducido. Para caracterizar las demás unidades se estudiará para que filtros $\langle 2\rangle$ es una unidad o un divisor de $\langle 0\rangle$.

Ejemplo 4.2.2. Respectivamente $\langle 2\rangle$ es una unidad o un divisor de $\langle 0\rangle$, cuando $A \in F$, donde

$$A \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(2, i+2) = 1\}$$

o

$$A \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(2, i+2) \neq 1\}$$

De otra forma A debe estar contenido en el conjunto de los números impares para que $\langle 2\rangle$ sea unidad y si se quiere que $\langle 2\rangle$ sea divisor de cero A deber estar contenido en el conjunto de los números impares. Nótese que un filtro que contenga a A no necesariamente debe contener al conjunto de los números primos. Esto se tendrá en cuenta más adelante. Como se mencionó anteriormente, si $\langle 2\rangle$ es una unidad entonces existe $\langle g\rangle$ tal que $\langle 2\rangle * \langle g\rangle = \langle 1\rangle$, donde $\langle g\rangle$ también termina siendo unidad, donde:

$$g(i) = \begin{cases} n+2 & si \quad i = 2n \\ \\ n+2 & si \quad i = 2n+1 \end{cases}$$

Nótese que $\langle g\rangle = (2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7.....)$ es no estándar. Es decir que por cada unidad estándar que se tenga, por la definición usual se tienen otra unidad no estándar.

Análogamente si $\langle 2\rangle$ es divisor de cero entonces existe $\langle g\rangle$ tal que $\langle 2\rangle * \langle g\rangle = \langle 0\rangle$, donde $\langle g\rangle$ también termina siendo divisor de cero, donde:

$$g(i) = \begin{cases} n+1 & si \quad\quad i = 2n \\ \\ n+1 & si \quad i = 2n+1 \end{cases}$$

Nótese que $\langle g\rangle = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, ...)$ es no estándar. Análogamente a como sucede con las unidades, cada divisor de cero estándar que se tenga, por la definición usual se tiene un divisor de cero no estándar.

Teorema 4.2.3.

(i) Si $\langle n\rangle \neq \langle 1\rangle$ es una unidad entonces existe una unidad $\langle f\rangle$ no estándar tal que $\langle n\rangle * \langle f\rangle = \langle 1\rangle$

(ii) Si $\langle n\rangle$ es un divisor de cero entonces existe un divisor de cero $\langle f\rangle$ no estándar tal que $\langle n\rangle * \langle f\rangle = \langle 0\rangle$

Demostración.

(i) Si $\langle n\rangle$ es una unidad entonces por la definición usual existe $\langle f\rangle$ tal que $\langle n\rangle * \langle f\rangle = \langle 1\rangle$. Lo único que falta demostrar es que $\langle f\rangle$ es no estándar. Supongamos que $\langle f\rangle$ es estándar. Si esto sucede es por que $\langle f\rangle = \langle m\rangle$. Ahora, realicemos la multiplicación $\langle n\rangle * \langle m\rangle$, por la definición 2. 1.2 se tiene que $\langle n\rangle * \langle m\rangle = \langle n * m\rangle$ y por lo tanto $\langle n\rangle * \langle m\rangle \neq \langle 1\rangle$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\langle f\rangle$ es no estándar.

(ii) Análogamente que i.

□

El anterior teorema implica que el conjunto de las unidades (o divisores de cero) no estándar tenga por lo menos igual cardinal que el conjunto de las unidades (o divisores de cero) estándar. Sin embargo, este conjunto puede tener mayor cardinal.

Ejemplo 4.2.3. Tomese el producto reducido generado a partir del filtro de Fréchet. la única unidad estándar es $\langle 1\rangle$ y no hay divisores de cero estándares. Para comprobar que $\langle 1\rangle$ es la única unidad estándar supongamos que hay otra unidad estándar $\langle m\rangle \neq \langle 1\rangle$. Por definición se tiene que:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(m, i+2) = 1\} \in Fr$$

Por ser al filtro de Fréchet existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{i \in \mathbb{N} \mid i > k\} \in Fr$ y $\{i \in \mathbb{N} \mid i > k\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(m, i+2) = 1\}$ Es decir que para todo $i > k$ se tiene que i no es múltiplo de m lo que es una contradicción y por lo tanto no existe una unidad estándar diferente de $\langle 1\rangle$. Obsérvese que $\langle (1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)\rangle$ es una unidad y además no estándar, puesto que 2 es primo relativo con los impares y 1 siempre es primo relativo. Además véase que $\langle (1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)\rangle$ no es una representación de $\langle 1\rangle$ ni de $\langle 2\rangle$ puesto que esto implicaría que los pares o los impares pertenezcan al filtro y esto significa que el filtro no es el de Fréchet. Ahora para comprobar que no hay divisores de cero supongamos que existe un $\langle m\}$ tal que

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(m, i+2) \neq 1\} \in Fr$$

Por ser al filtro de Fréchet existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{i \in \mathbb{N} \mid i > k\} \in Fr$ y

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i > k\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(m, i+2) \neq 1\}$$

Es decir que para todo $i > k$ no existen números primos, pero esto es una contradicción y por lo tanto no existen divisores de cero estándares Esto no implica que no existan divisores de cero, ya que por ejemplo $\langle(0, 2, 0, 2, 0, 2, ...)\rangle$ es un divisor de cero pero es no estándar, es decir que todos los divisores de cero son no estándar para el producto reducido generado por el filtro de Fréchet.

El anterior ejemplo muestra que existen productos reducidos en los cuales el cardinal del conjunto de las unidades (o divisores de cero) estándar es menor al cardinal de la unidades (o divisores de cero) no estándar. Con el objetivo de la notación, al conjunto de todas las unidades de un producto reducido se denotará como:

$$U_{(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F)}$$

De aquí en adelante si no hay confusión respecto al conjunto de unidades del producto reducido entonces se denota como U. Si se desea hacer énfasis en el filtro utilizado se denotara como U_F. Al conjunto de los divisores de cero, se denota como D_F e igualmente si no hay necesidad de especificar el filtro se denota como D. Si $\langle f\rangle \in U$ consecuentemente por la definición se tiene que:

$$m.c.d.(f(i) - (i+2), i+2) = 1 \; para\ los\ i\ tales\ que \; m.c.d.(f(i), i+2) = 1$$

Y por lo tanto

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(f(i) - (i+2), i+2) = 1\} \in F$$

Es decir que $\langle -f\rangle \in U$. Por este resultado, se llega a que $\langle -1\rangle$ siempre es unidad de $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ sin importar el filtro, sin necesidad de utilizar la definición usual, como anteriormente se hizo. Análogamente se obtiene que si $\langle f\rangle \in D$ entonces $\langle -f\rangle \in D$.

Teorema 4.2.4.

(i) Si $\langle f\rangle \in U$ entonces $\langle -f\rangle \in U$.

(ii) Si $\langle f\rangle \in D$ entonces $\langle -f\rangle \in D$.

Como las unidades (o divisores de cero) dependen del filtro generador, para buscar generalizar cuando $\langle n\rangle$ es unidad (o divisor de cero) se estudia un ejemplo en el cual n es compuesto, puesto que en el ejemplo 4.2.1 se estudió cuando era primo.

Ejemplo 4.2.4. Se construye un filtro adecuado de tal forma que $\langle 12\rangle$ sea una unidad este tiene que cumplir:

$$\{i \in \mathbb{N}/m.c.d.(12, i+2) = 1\} \in F$$

Los i para los cuales $m.c.d.(12, i+2) = 1$ son aquellos para los cuales $i+2$ no es múltiplo de algún divisor (diferente de 1) de 12. Tómese el conjunto

$$A = \{k \mid k = pq\} \; donde\ p\ y\ q\ son\ primos\ diferentes\ de\ 2\ y\ 3$$

Nótese que k no es múltiplo de algún divisor de 12, por lo tanto

$$A \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(12, i+2) = 1\}$$

Es decir que si $A \in F$ entonces $\langle 12 \rangle$ es una unidad. Además, en particular se tiene que k no es múltiplo de ningún divisor de 4. Por lo tanto $\langle 4 \rangle$ es una unidad. Ahora construyamos un filtro adecuado de tal forma que $\langle 12 \rangle$ sea un divisor de $\langle 0 \rangle$. Si esto ocurre es porque:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(12, i+2) \neq 1\} \in F$$

Los i para los cuales $m.c.d.(12, i+2) \neq 1$ son aquellos para los cuales $i+2$ es múltiplo de algún divisor (diferente de 1) de 12. Tómese el conjunto

$$A = \{k \mid k = pq\} \; donde \; 2/p \; y \; q \in \mathbb{N}$$

$$A' = \{k \mid k = pq\} \; donde \; 3/p \; y \; q \in \mathbb{N}$$

Nótese que k es múltiplo de algún divisor de 12, por lo tanto

$$A \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(12, i+2) \neq 1\}$$

$$A' \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(12, i+2) \neq 1\}$$

Es decir que si $A \in F$ o $A^{'} \in F$ entonces $\langle 12 \rangle$ es un divisor de cero. Nótese que A y $A^{'}$ pueden pertencer al mismo tiempo a un filtro. Además, en particular se tiene que $k \in A$ o $k \in A^{'}$ es múltiplo de algún divisor de $\langle 6 \rangle$ y $\langle 18 \rangle$. Por lo tanto $\langle 6 \rangle$ y $\langle 18 \rangle$ son divisores de $\langle 0 \rangle$. Sin embargo, debe tenerse presente que $\langle 4 \rangle$ no necesariamente es divisor de $\langle 0 \rangle$, este es el caso cuando $A^{'} \in F$ y $A^{'} \notin F$.

A partir del anterior ejemplo se puede concluir que:

(i) Si $\langle n \rangle$ es unidad, entonces esto implicaría que un número $\langle n' \rangle$ es unidad, siempre y cuando la descomposición factorial $\langle n^{'} \rangle$ tenga únicamente (no necesariamente todos, ni con las mismas potencias) los primos de la descomposición factorial de n.

(ii) Si $\langle n \rangle$ es un divisor de $\langle 0 \rangle$, entonces esto implicaría que un número $\langle n' \rangle$ es un divisor de $\langle 0 \rangle$, siempre y cuando la descomposición factorial $\langle n^{'} \rangle$ tenga a todos (no únicamente y no necesariamente con las mismas potencias) los primos de la descomposición factorial de n.

Teorema 4.2.5.

(i) Sea $\langle n \rangle \in U$ *y* $P = \{p \mid p/n \; y \; p \; es \; primo\}$ *entonces* $\langle \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \rangle \in U$ *para* $\alpha_i, k \in \mathbb{N}$ *y* $p_i \in P$.

(ii) Sea $\langle n \rangle \in D$ *y* $P = \{p \mid p/n \; y \; p \; es \; primo\}$ *entonces* $\langle \prod_{p_i \in P} p_i^{\alpha_i} \rangle \in D$ *para* $\alpha_i, k \in \mathbb{N}$ *y* $p_i \in P$

Demostración.

(i) Si $\langle n\rangle \in U$ por definición se tiene que:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d(n, i+2) = 1\} \in F$$

Supóngase que $\langle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\rangle \notin U$, por lo tanto en particular debe existir $a \in A$ tal que $m.c.d(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, a+2) \neq 1$, y por lo tanto existe un $i \in P$ tal que $p_i/(a+2)$. Por hipótesis se tiene que p_i/n, obteniéndose que $m.c.d(n, a+2) \neq 1$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\langle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\rangle \in U$.

(ii) Si $\langle n\rangle \in D$ por definición se tiene que:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d(n, i+2) \neq 1\} \in F$$

Supóngase que $\langle\prod_{p_i\in P} p_i^{\alpha_i}\rangle \notin D$, por lo tanto en particular debe existir $a \in A$ tal que $m.c.d(\prod_{p_i\in P} p_i^{\alpha_i}, a+2) = 1$, y por lo tanto para toda $p_i \in P$ se tiene que $m.c.d(p_i, a+2) = 1$. Como $p_i \in P$, entonces $m.c.d(n, a+2) = 1$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\langle\prod_{p_i\in P} p_i^{\alpha_i}\rangle \in D$.

□

Una consecuencia del anterior teorema es que si existen más unidades que $\langle -1\rangle$ y $\langle 1\rangle$ el cardinal de la U es infinito. Obsérvese que el cardinal de D es cero o infinito.

Corolario 4.2.1.

(i) Si $\langle n\rangle \in U$ y m/n para $m \in \mathbb{N}$ entonces $\langle m\rangle \in U$

(ii) Si $\langle n\rangle \in D$ y n/m para $m \in \mathbb{N}$ entonces $\langle m\rangle \in D$

Por último, se sabe que si p es primo entonces para todo $a \in \mathbb{Z}_p$ se tiene que a es una unidad en $\mathbb{Z}_p$. Entonces, si el conjunto de los números primos pertenece al filtro se tiene que no hay divisores de cero, por lo tanto se obtiene un dominio entero. Además, todo elemento del producto recudido (a excepción del cero) es unidad, por lo tanto el dominio entero termina siendo un campo.

Teorema 4.2.6. $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +, *)$ *es un campo si y si* $\{i \mid i+2$ *es primo*$\} \in F$ *y* F *es un ultrafiltro*

Demostración. $\Rightarrow$ por ser campo todos los elementos $\langle f\rangle$ del producto reducido a excepción del elemento neutro aditivo tienen inversos multiplicativos, para que esto suceda se debe cumplir que $\{i \mid m.c.d(i+2, f(i)) = 1\} \in F$ y esto solo sucede si $\{i \mid iesprimo\} \in F$ y ademas por el teorema 2.1.8 y 2.1.9 F debe ser ultrafiltro
$\Leftarrow$ la única propiedad que no se tiene para todo $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +, *)$ se campo es el inverso multiplicativo para que esta se cumpla por teorema 2.1.8 y 2.1.9 F debe ser un ultrafiltro y ademas la familia debe terne una única excepción como estas condiciones se tiene por hipótesis entonces $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F, +, *)$ es un campo □

Nótese que el anterior teorema es consecuencia del teorema 2.1.8, 2.1.9 y 2.1.9.

Ahora por medio del estudio que se hizo sobre números cuadrados, se puede observar algunas formas directas de obtener unidades no estándar.

Ejemplo 4.2.5. Por el teorema 4.1.1 se sabe que los siguientes números son unidades:

$$f = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, ...)$$

$$f' = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 11, ...)$$

Con la condición de que $A = \{i \in \mathbb{N} \mid i = j^2 - 3 \; para \; j \in \mathbb{N}\} \in F$. Puesto que $\langle f\rangle * \langle f\rangle = \langle 1\rangle$ y $\langle f'\rangle * \langle f'\rangle = \langle 1\rangle$. Además, se obtiene que las combinaciones entre las imágenes de f y f' también son unidades. Además, lo anterior sugiere un método para construir unidades (o divisores de cero)no estándar combinando las imágenes de dos unidades (o divisores de cero) estándar.
Ahora, retómese el ejemplo 4.2.3: Sea $\prod_{i|\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ donde F no es principal tal que

$$A = \{k \mid k = pq\} \in F \; donde \; p \; y \; q \; son \; primos \; diferentes \; de \; 2 \; y \; 3$$

Se sabe que si $A \in F$, entonces $\{12\}$ es una unidad. Además, por el teorema 4.2.4 se pude obtener un conjunto infinito de unidades positivas del producto reducido dado:

$$\{\langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle, \langle 6\rangle, \langle 8\rangle, \langle 9\rangle, \langle 12\rangle, \langle 16\rangle, \langle 18\rangle ...\}$$

Ahora, se indexa en el conjunto de los números naturales al anterior conjunto:

$$\{\langle n\rangle_m\}_{m\in\mathbb{N}}$$

Constrúyase una función f en la cual

$$f(i) = \begin{cases} 0 \quad si \quad i \notin A \\ \\ n \quad si \quad i = m \end{cases}$$

$\langle f\rangle$ no es estándar, pues de lo contrario F sería principal. Además, obsérvese la forma en que se indexa este conjunto no es única, por lo tanto se han obtenido infinitos números no estándar que son unidades en el producto reducido.

Ahora ¿toda unidad no estándar de un producto reducido, es obtenida a partir de la combinación de unidades estándar, siguiendo el método del anterior ejemplo? De forma similar se puede construir un método para encontrar divisores de cero. Nótese, que $m.c.d(a, b) = 1$ ó $m.c.d(a, b) \neq 1$, por lo tanto esto nos sugiere que al utilizar un ultrafiltro adecuado, el cual por el teorema 4.2.5, de partida no debe contener al conjunto de los números primos, se puede obtener:

Teorema 4.2.7. *Sea $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ donde F es un ultrafiltro entonces $U^c = D$.*

Nótese que este teorema es constructivo, de tal manera que se puede escoger a conveniencia, que un número $\langle f\rangle$ sea unidad ó divisor de cero. Ya obtenido algunos resultados sobre las unidades se da paso al estudio del conjunto de asociados de un número $\langle f\rangle$ del producto reducido.

Definición 4.2.4. Dos elementos $\langle f\rangle, \langle g\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ son asociados si $\langle f\rangle = \langle g\rangle\langle u\rangle$ donde $\langle u\rangle$ es una unidad.

Este conjunto se denota como As. Si se desea especificar el elemento del cual son asociados se denota como $As_{\langle f\rangle}$.

El primer resultado que se examinará son los asociados de las unidades, el cual queda condensado en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.8. *El conjunto de asociados de las unidades es U*

Demostración. Sea $\langle f\rangle$ una unidad del producto reducido, como las unidades son divisores de todos los elementos del producto reducido, entonces para cualquier unidad $\langle g\rangle$ existe otra unidad $\langle u\rangle$ tal que $\langle f\rangle = \langle u\rangle * \langle g\rangle$, por lo tanto toda unidad es asociado de $\langle f\rangle$. Ahora basta probar que todo elemento $\langle h\rangle$ que no sea unidad no es asociado de $\langle f\rangle$, suponemos que $\langle h\rangle$ es asociado, por definición se tendría que existe una unidad $\langle u\rangle$ tal que $\langle f\rangle = \langle u\rangle * \langle g\rangle$ pero por definición de unidad se tiene que $\langle g\rangle$ resulta ser unidad. Por lo tanto el conjunto de los asociados de la unidades es U. □

Teniendo este resultado, solo basta caracterizar los asociados de un elemento que no sea unidad

Ejemplo 4.2.6. Tómese las unidades estándar obtenidas en el ejemplo tal

$$\{...\langle -2\rangle, \langle -1\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle, \langle 6\rangle, \langle 8\rangle, \langle 9\rangle, \langle 12\rangle, \langle 16\rangle, \langle 18\rangle...\}$$

Se puede obtener infinitos asociados de un elemento del producto reducido si las unidades son infinitas, a saber:

$$As_{\langle 5\rangle} = \{.., \langle -10\rangle, \langle -5\rangle, \langle 5\rangle, \langle 10\rangle, \langle 15\rangle, \langle 20\rangle, \langle 30\rangle, \langle 40\rangle, ...\}$$

En esencia los asociados de un número se obtienen al multiplicar este número con cada una de las unidades. Obsérvese que la relación asociado es una relación de equivalencia.

Teorema 4.2.9. *La relación asociado es una relación de equivalencia*

Demostración.

(i) $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle f\rangle$.

Como $\langle f\rangle = \langle f\rangle * \langle 1\rangle$ entonces $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle f\rangle$.

(ii) Si $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle g\rangle$ entonces $\langle g\rangle$ es asociado de $\langle f\rangle$.

Si $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle g\rangle$ entonces existe un $\langle u\rangle$ unidad tal que

$$\langle f\rangle = \langle g\rangle * \langle u\rangle$$

Como $\langle u\rangle$ es unidad entonces existe $\langle \frac{1}{u}\rangle$ unidad tal que $\langle u\rangle * \langle \frac{1}{u}\rangle = \langle 1\rangle$, por lo tanto

$$\langle f\rangle * \langle \frac{1}{u}\rangle = \langle g\rangle * \langle u\rangle\langle \frac{1}{u}\rangle$$

$$\langle f\rangle * \langle\frac{1}{u}\rangle = \langle g\rangle$$

Y por lo tanto $\langle g\rangle$ es asociado de $\langle f\rangle$.

(iii) Si $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle g\rangle$ y $\langle g\rangle$ es asociado de $\langle h\rangle$ entonces $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle h\rangle$

Si $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle g\rangle$ y $\langle g\rangle$ es asociado de $\langle h\rangle$ entonces existe las unidades $\langle u\rangle$ y $\langle u'\rangle$ tal que

$$\langle f\rangle = \langle g\rangle * \langle u\rangle$$

y

$$\langle g\rangle = \langle h\rangle * \langle u'\rangle$$

Reemplazando se tiene que

$$\langle f\rangle = \langle h\rangle * \langle u'\rangle * \langle u\rangle$$

Como la multiplicación de unidades es nuevamente una unidad entonces $\langle f\rangle$ es asociado de $\langle h\rangle$.

Por i,ii y iii se tiene que la relación asociado es una relación de equivalencia □

Siguiendo con la idea inicial, la cual es copiar lo hecho en el estudio de la relación de divisibilidad, se debe ahora analizar para este contexto quienes resultan ser los elementos irreductibles y en paralelo que números de estos resultan ser primos, para así, dar respuesta a preguntas como ¿Todo irreductible es un primo?pues sabemos que esto no se cumple en general

Números irreductibles y primos

Para empezar este estudio se dará la definición usual de elemento irreductible y elemento primo, sin embargo hay que aclararse que la definición usual parte de los dominios enteros (anillos sin divisores de cero) pero en este contexto, el único producto reducido que cumple ser dominio entero es aquel del teorema 4.2.5, que además cumple ser campo, por lo tanto se opta por alterar esta definición.

Definición 4.2.5. Sea $\langle g\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ no unidad es un irreductible, si en cualquier factorización $\langle g\rangle = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $\langle a\rangle$ o $\langle b\rangle$ es unidad.

En esencia los elementos irreductibles terminan siendo aquellos cuyos únicos divisores son las unidades y sus asociados ademas .

Definición 4.2.6. Un elemento $\langle f\rangle$ se dice primo si no es unidad ni cero y si $\langle f\rangle \mid \langle h\rangle * \langle g\rangle$ entonces $\langle f\rangle|\langle h\rangle$ o $\langle f\rangle|\langle g\rangle$.

Una característica de los números primos en general en cualquier estructura, es que necesariamente son elementos irreductibles. Sin embargo, hay que tenerse cuidado pues el reciproco no se tiene siempre. En los producto reducidos, si se tiene en ambas direcciones.

Teorema 4.2.10. *Un elemento de un producto reducido es irreductible si y solo si es primo.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $\langle f\rangle$ un elemento irreductible, observese que si $\langle f\rangle \mid \langle g\rangle * \langle h\rangle$ entonces para toda factorizacíon $\langle f\rangle = \langle j\rangle * \langle k\rangle$, se tiene que $\langle j\rangle \mid \langle g\rangle$ y $\langle k\rangle \mid \langle g\rangle$ o $\langle j\rangle \mid \langle h\rangle$ y $\langle k\rangle \mid \langle h\rangle$, como $\langle f\rangle$ es irreductible entonces $\langle j\rangle$ o $\langle k\rangle$ es unidad.Supongamos $\langle j\rangle \mid \langle g\rangle$ y $\langle k\rangle \mid \langle g\rangle$ y ademas que $\langle j\rangle$ es unidad, como $\langle k\rangle \mid \langle g\rangle$ por definición existe $\langle a\rangle$ tal que $\langle a\rangle * \langle k\rangle = \langle g\rangle$ se tiene que como $\langle j\rangle$ es unidad entonces $\langle j\rangle * \langle \frac{1}{j}\rangle * \langle a\rangle * \langle k\rangle = \langle g\rangle$ es decir que $\langle f\rangle * \langle \frac{1}{j}\rangle * \langle a\rangle = \langle g\rangle$ es decir que $\langle f\rangle \mid \langle g\rangle$ y por lo tanto $\langle f\rangle$ es primo .
$\Leftarrow$ esta implicación siempre se tiene en toda estructura

□

De aquí en adelante habláremos de primos si un elemento del producto reducido es irreductible, se empezará por estudiar el producto reducido el cual resulta ser campo, recuérdese que esto solo sucede si $\{i \mid i+2 \textit{ es primo}\} \in F$. En este producto reducido (y en general en cualquier campo) no existen elementos primos, pues como se puede notar en la definición los elementos irreductibles son no unidades, lo cual es imposible para esta estructura. Por lo tanto de aquí en adelante se trabajará con filtros que además de ser libres no deben contener al conjunto de los números primos.

Dado que ya se tiene una caracterización de las unidades y divisores de cero del producto reducido generado por el filtro de Fréchet, se empezará por este ejemplo:

Ejemplo 4.2.7. Sea $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/Fr$ el producto reducido generado por el filtro de Fréchet. Recuérdese que no hay unidades estándar diferentes a $\langle 1\rangle$ y $\langle -1\rangle$ ni divisores de cero estándar. Por lo tanto cabe preguntarse qué números estándar resultan ser primos. Por el teorema 3.3.4 sabemos que el conjunto $ST \cup ST^{-}$ es isomorfo a los enteros, por lo tanto para cualquier $\langle n\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ donde n no es primo, puede descomponerse en factores primos donde cada factor es nuevamente un número que pertenece al conjunto $ST \cup ST^{c}$. Por lo tanto se puede sospechar que los únicos que pueden ser irreductibles estándar son de la forma $\langle p\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/Fr$ tales que p es primo, pueden ser irreductible, pero si esto sucede es porque para cualquier

$$\langle f\rangle * \langle g\rangle = \langle p\rangle$$

Entonces $\langle f\rangle$ o $\langle g\rangle$ es unidad y además $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle$ no pertenecen a $ST \cup ST^{-}$.

Supongamos que $\langle p\rangle = \langle 7\rangle$, resultando así $\langle f\rangle * \langle g\rangle = \langle 7\rangle$. Se sabe que $\langle 7\rangle * \langle 1\rangle = \langle 7\rangle$ por lo tanto se puede construir $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle$ de la siguiente manera:

$$f(i) = \begin{cases} 1 \quad si \quad i \textit{ es par} \\ \\ 7 \quad si \quad i \textit{ es impar} \end{cases}$$

$$g(i) = \begin{cases} 7 & si \quad i\ es\ par \\ \\ 1 & si \quad i\ es\ impar \end{cases}$$

Por construcción se puede observar que

$$\langle f\rangle * \langle g\rangle = \langle 7\rangle$$

Se puede comprobar que tanto $\langle f\rangle$ como $\langle g\rangle$ no son unidades. Pues si por ejemplo $\langle f\rangle$ fuese unidad, por definición se debe tener que:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(f(i), i+2) = 1\} \in Fr$$

Obsérvese que para algunos $i = 7n - 2$ donde n es un numero impar que pertenece a los números naturales, se tiene que $m.c.d.(f(i), i+2) = 7$. Como el conjunto de los n con estas características es infinito , se puede concluir que A^c no es finito y por lo tanto $A \notin Fr$. Igualmente se comprueba que $\langle g\rangle$ no es unidad, concluyendo así que $\langle 7\rangle$ no es primo.

Por lo tanto se concluye que si $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/Fr$ tiene primos entonces deben ser no estándar.
Ahora se mira si se puede obtener un elemento irreductible no estándar en el producto reducido generado por el filtro de Fréchet.

Ejemplo 4.2.8. Se busca construir un número $\langle g\rangle$ de tal forma que este resulte ser irreductible. Por la definición y el resultado anterior se debe tener que:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(g(i), i+2) = 1\} \notin Fr$$

Por lo tanto se debe tener que A^c es infinito. De esta forma construyase los siguientes elementos del producto reducido generado por el filtro de Fréchet. En primera instancia, se indexará al conjunto A^c que se ha acabado de definir, tomando como conjunto de indices a los números naturales, es decir:

$$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

donde $a_k \in A^c$.
Esto con el fin de definir a $\langle h\rangle$ y $\langle j\rangle$ generado por las funciones:

$$h(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i = a_k\ donde\ k\ es\ par \\ \\ g(i) & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$j(i) = \begin{cases} g(i) & si \quad i = a_k\ donde\ k\ es\ par \\ \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$\langle h\rangle * \langle j\rangle = \langle g\rangle$$

Por construcción se comprueba que tanto $\langle h\rangle$ como$\langle j\rangle$ no son unidades, puesto que cada función que genera a las clases de equivalencia, se corresponden con la función g en un conjunto infinito del conjunto A^c y por lo tanto

$$\{i \in \mathbb{N} \mid m.c.d.(h(i), i+2) = 1 \; o \; m.c.d.(j(i), i+2) = 1\} \notin Fr$$

Concluyéndose que $\langle g\rangle$ no es primo .

Generalizando y en base a los anteriores ejemplos se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 4.2.11. *Si F es un filtro libre no ultrafiltro entonces todo divisor de cero no es primo en $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$.*

Demostración. dado $\langle f\rangle$ divisor de cero como F no es un ultrafiltro existe A tal que ni este ni su complemento pertenecen al filtro , así si:

$$g(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i \in A \\ \\ f(i) & si \quad i \notin A \end{cases}$$

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & si \quad i \in A \\ \\ 1 & si \quad i \notin A \end{cases}$$

Se probará que $\langle g\rangle$ no es unidad, como $\langle f\rangle$ es divisor de cero entonces $B = \{i \mid m.c.d.(f(i), i+2) \neq 1\} \in F$, si se supone que $\langle g\rangle$ es unidad entonces $C = \{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = 1\} \in F$ es decir que $B \cap C \in F$, y por la propiedad tres de filtros se tiene que $A \in F$ lo cual contradice nuestra hipótesis y por lo tanto se concluye que $\langle g\rangle$ no es unidad. De forma análoga se comprueba que $\langle h\rangle$ no es unidad. Como se tiene que $\langle g\rangle * \langle h\rangle = \langle f\rangle$ entonces $\langle f\rangle$ no es primo

□

Ahora, si $\langle f\rangle$ no es divisor de cero ni es unidad entonces dependiendo del filtro se puede encontrar que este es primo o no por ejemplo:

Ejemplo 4.2.9. Sea $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{i+2}/F$ de tal forma que ni los pares ni los impares pertenecen a F, entonces se construye $\langle f\rangle$ generada por:

$$f(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i \; es \; impar \\ \\ 2 & si \quad i \; es \; par \end{cases}$$

De esta forma $\langle f\rangle$ no es ni divisor de cero ni unidad. Construyase $\langle g\rangle$ como:

$$g(i)=\begin{cases} 1 & si \quad i=2n-1 \; o \; i=0 \\ \\ n+1 & si \quad i=2n-2 \; o \; i\neq 0 \end{cases}$$

Obteniéndose así que

$$\langle g\rangle * \langle f\rangle = \langle f\rangle$$

Como de antemano se sabe que $\langle f\rangle$ no es unidad, entonces $\langle g\rangle$ no debe ser unidad, para esto se estudiará cuando $n+1$ es divisor de cero en $\mathbb{Z}_{i+2}$ para $i=2n-2$, esto sucede si existe un $c<i+2$ tal que

$$(n+1)*c \cong 0 \; mod(i+2)$$

es decir, existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$(n+1)*c=(2n)m$$

como $n+1$ y n son primos relativos entonces $c=a*n$ para algún $a\in\mathbb{N}$ como $c<i+2$ entonces $a*n<2n$ es decir que $a=1$ y por lo tanto $c=n$ y reemplazando c se tiene que

$$(n+1)*n=(2n)m$$

luego

$$m=\frac{n+1}{2}$$

concluyente que $n+1$ tiene que ser par y por lo tanto $n=2k+1$ para algún $k\in\mathbb{N}$ de aquí se tiene que si

$$\{i \mid i+2=4k+2 \; o \; i=2k+1\}\in F$$

entonces se tiene que $\langle g\rangle$ no es unidad ni divisor de cero, concluyéndose así que $\langle f\rangle$ no es primo. Ahora, como se quiere que $\langle f\rangle$ sea primo entonces

$$\{i \mid i+2=4k \; o \; i=2k+1\}\in F$$

.

Sin embargo esto no garantiza que $\langle f\rangle$ sea primo, puesto que se pueden encontrar infinitas factorizaciones $\langle f\rangle=\langle g\rangle*\langle h\rangle$, para $A\subseteq\{i \mid i=4k \; donde \; k\in\mathbb{N}\}$ y ademas A infinito, de la siguiente forma:

$$g(i)=\begin{cases} 1 & si \quad i\in A \\ \\ f(i) & si \quad i\notin A \end{cases}$$

$$h(i)=\begin{cases} f(i) & si \quad i\in A \\ \\ 1 & si \quad i\notin A \end{cases}$$

Por la definición de elemento irreductible, se debe tener que $\langle g\rangle$ o $\langle h\rangle$ es unidad. Escójase un filtro adecuado para que $\langle g\rangle$ sea unidad, es decir, que $A \in F$. Obsérvese que si se continua el procedimiento en ultimas se debe escoger entre entre B y $A-B$ para todo $B \subset A$, obteniéndose así, que en toda factorizacion definida de la anterior forma $\langle g\rangle$ es unidad, por lo tanto de esta forma se construye un elemento primo en este producto reducido.
Ahora, se pude observar que si se toma el filtro F que genera el producto reducido del anterior ejemplo y se define el conjunto:

$$F' = \{B \cap A \mid B \in F\}$$

Se obtiene un ultrafiltro sobre A.

Generalizando el ejemplo anterior se tiene que

Lema 4.2.1. *Dado $\langle f\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$ tal que no es unidad, sea $A = \{i \mid m.c.d.(f(i), i+2) = 1\}$, $A^c = \{i \mid m.c.d.(f(i), i+2) = a\}$ donde $f(i) = a * c$, $C = \{i \mid m.c.d(i+2, c) = 1 \text{ y } a \text{ es primo}\}$, si $C \cup A \notin F$ entonces $\langle f\rangle$ no es primo*

Demostración. sea $\langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$ tal que

$$g(i) = \begin{cases} 1 & si \qquad i \in C \cup A \\ \\ c & si \qquad (i+2, c) = d \\ \\ a_1 * c & si \quad (i+2, c) = 1 \text{ } y \text{ } a = a_1 * a_2 \end{cases}$$

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & si \qquad i \in C \cup A \\ \\ a & si \qquad (i+2, c) = d \\ \\ a_2 & si \quad (i+2, c) = 1 \text{ } y \text{ } a = a_1 * a_2 \end{cases}$$

téngase en cuenta que se construyeron $d \neq 1$, $a_1 \neq 1$ y $a_2 \neq 1$, luego

$$\{i \mid (g(i), i+2) = 1\} = C \cup A$$

y

$$\{i \mid (h(i), i+2) = 1\} \subseteq C \cup A$$

como $C \cup A \notin F$ entonces $\langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$ no son unidades y como

$$\langle f\rangle = \langle g\rangle * \langle h\rangle$$

entonces $\langle f\rangle$ no es irreductible y por lo tanto no es primo □

El siguiente teorema se enunciará para saber en que productos reducidos se tiene que $\langle f\rangle$ es primo:

Teorema 4.2.12. *Dado $\langle f\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$ tal que no es unidad y $F' = \{C \cap D \mid D \in F\}$, $\langle f\rangle$ es primo si y solo si F' es un ultrafiltro libre sobre C donde A y C son los conjuntos del lema anterior.*

Demostración. $\Rightarrow$ Si $\langle f\rangle$ es primo por el lema 4.2.1 $C \cup A \in F$ y por el teorema 1.2.5 F' es un filtro sobre C, supongamos que F' no es ultrafiltro entonces existe $E \subseteq C$ tal que $E \notin F'$ y $E^C \cap C \notin F'$ sea $\langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$ tal que

$$g(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i \in E \\ \\ f(i) & si \quad i \notin E \end{cases}$$

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & si \quad i \in E \\ \\ 1 & si \quad i \notin E \end{cases}$$

como

$$\langle f\rangle = \langle g\rangle * \langle h\rangle$$

por ser $\langle f\rangle$ primo $\langle g\rangle$ o $\langle h\rangle$ es unidad,supongamos que $\langle g\rangle$ es unidad entonces

$$\{i \mid (g(i), i+2) = 1\} \in F$$

es decir que

$$\{i \mid (g(i), i+2) = 1\} \cap C \in F'$$

como $(f(i), i+2) = a$ para $i \in C$ entonces

$$\{i \mid (g(i), i+2) = 1\} \cap C = E$$

y por lo tanto

$$E \in F'$$

lo cual es una contradicción por lo tanto $\langle g\rangle$ no es unidad de forma análoga se demuestra que $\langle h\rangle$ no es unidad y por lo tanto $\langle f\rangle$ no es primo lo que contradice nuestra hipótesis y por lo tanto F' es un ultrafiltro sobre C

Ahora probemos que F' es un ultrafiltro libre, supongamos que es un ultra filtro principal por lo tanto existe a tal que $F' = F'_a$. Por definición de filtro principal se tiene que: $\{a\} \subseteq C \cap D$ para $D \in F$ es decir que $\{a\} \subseteq D$ para todo $D \in F$ y por lo tanto F no es libre lo que es una contradicción puesto que se ha partido de que F es libre, y por lo tanto F' es un ultrafiltro libre sobre C.

$\Leftarrow$Supongamos que $\langle f\rangle$ no es primo por lo tanto existe $\langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$ no unidades tal que

$$\langle f\rangle = \langle g\rangle * \langle h\rangle$$

Si esto sucede es por que

$$\{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = d\} \cup A \in F$$

$$\{i \mid m.c.d.(h(i), i+2) = e\} \cup A \in F$$

Donde $d \neq 1$ y $e \neq 1$ Ahora, por la propiedad ii de los filtro se tiene que

$$\{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = a \ y \ m.c.d.(h(i), i+2) = a\} \cup A \in F$$

Como F' es un ultrafiltro entonces

$$\{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = d \ y \ m.c.d.(h(i), i+2) = a\} \in F'$$

dado que $\{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = d \ y \ m.c.d.(h(i), i+2) = a\} \cap C = \emptyset$ entonces

$$\emptyset \in F$$

lo que es una contradicción y por lo tanto $\langle f \rangle$ es primo $\square$

Con el anterior teorema se ha garantizado que en productos reducidos existen infinitos primos los cuales no son unidades ni divisores de cero peros si F es un ultrafiltro entonces los números primos son divisores de cero dado que por el teorema 4.2.6 se tiene que $U^c = D$.

Corolario 4.2.2. *Dado F un ultrafiltro y $\langle f \rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$ un divisor de cero, $\langle f \rangle$ es primo si y solo si $C \in F$ donde C es el conjunto definido en el lema 4.2.1*

De los anteriores teorema se deduce que todo asociado de un numero primo es primo, y por lo tanto todo numero compuesto que en su factorización tenga un numero primo también se podrá facto rizar de tal forma que su factorizacion tenga asociado del numero primo. Terminado esta sección se estudia si en el producto reducido de los elementos que no son unidades tiene factorizacion única, es decir se pueden expresar como producto de primos de manera única salvo orden y asociados. si el elemento no es unidad ni primo entonces se denomina compuesto.

Teorema 4.2.13. *Dado $\langle f \rangle, \langle g \rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$ y $\langle f \rangle$ primo, si $\langle g \rangle$ no es unidad entonces $\langle g \rangle$ tiene factorización única*

Demostración. Si $\langle g \rangle$ es primo entonces su factorizacion es única.
Si $\langle g \rangle$ es compuesto, sea $A_g = \{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = 1\}$, $A_g^c = \{i \mid m.c.d.(g(i), i+2) = a\}$ donde $g(i) = a * c$ sean $B_1 = \{p_j \ primos \mid g(i) = \prod_{j\in\mathbb{N}} P_j^{\alpha_j}\}$ y $B_2 = \{p_j \in B_1 \mid m.c.d(p_j, i+2) = 1\}$

$$h_0(i) = \begin{cases} \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^{\alpha_j} & si \quad i \in A^c \ y \ p_j \in B_2 \\ \\ 1 & en \ otro \ caso \end{cases}$$

$$h_1(i) = \begin{cases} \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^{\alpha_j} & si \quad i \in A^c \ y \ p_j \notin B_2 \\ \\ g(i) & en \ otro \ caso \end{cases}$$

Obsérvese que $\langle g\rangle = \langle h_0\rangle * \langle h_1\rangle$ donde $\langle h_0\rangle$ es unidad y se tiene que

$$m.c.d(h_1(i), i+2) = 1 \ o \ m.c.d(h_1(i), i+2) = h_1(i)$$

Ahora los $h_1(i)$ tales que $(h_1(i), i+2) = h_1(i)$ se puede descomponer como

$$h_1(i) = \prod_{j\in\mathbb{N}} P_j^{\alpha_j}$$

Sean las $h_{p_j}(i)$ tal que p_j es un factor de $h_1(i)$

$$h_{p_j}(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i \in A_g \\ \\ p_j & si \quad i \in A_g^c \end{cases}$$

Sea

$$h_2(i) = \begin{cases} g(i) & si \quad i \in A_g \\ \\ 1 & si \quad i \in A_g^c \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\langle h_1\rangle = \prod_{j\in\mathbb{N}} \langle h_{p_j}\rangle^{\alpha_j} * \langle h_2\rangle$$

como $\langle h_2\rangle$ es unidad entonces solo queda estudiar los $\langle h_{p_j}\rangle$.
Se estudiará cuando $\langle h_{p_j}\rangle$ no es unidad de lo contrario ya seria de la forma de factor de $\langle g\rangle$ buscado.
Se puede re-definir $A_g = \{i \mid h_{p_j}(i) = 1\}$ y $A_g^c = \{i \mid m.c.d(i+2, p_j) = p_j\}$. Como $\langle f\rangle$ es primo entonces $A = \{i \mid m.c.d.(f(i), i+2) = 1\}, A^c = \{i \mid m.c.d.(f(i), i+2) = a$
$rbrace$, donde $f(i) = a * c, C = \{i \mid m.c.d(i+2, c) = 1 \ y \ a \ es \ primo\}$ por el lema 4.2.1 $C \cup A \in F$ y F' es un ultrafiltro sobre C.
Dado $C_{h_{p_j}} = A^c$ entonces $C_{h_{p_j}} \cup A \in F$ y F' es un ultrafiltro sobre C, por la propiedad dos y tres de filtros se puede concluir que $F'_{h_{p_j}}$ es ultafiltro sobre $C_{h_{p_j}}$ y por lo tanto por el teorema 4.2.12 $\langle h_{p_j}\rangle$ es primo.
Sea probado que $\langle g\rangle$ tiene una descomposición, esta es única dado que si no es unica se niega el teorema fundamental del aritmética en los números naturales. □

con este teorema sea finalizado esta sección, la ultima sección hará un estudio sobre las ecuación de primer y segundo orden en los productos reducidos.

4.3 Ecuaciones en los productos reducidos

Por el teorema 4.2.5 se toman dos caminos que guiaran el estudio de ecuaciones de primero y segundo orden. Estos caminos dependen del filtro escogido: si este contiene al conjunto de lo números primos entonces el producto reducido resulta ser campo por el contrario tendrá divisores de cero, ademas si este no es generado a partir de un ultrafiltro, tendrá números que no son divisores ni unidades.

Ecuaciones de primer orden

Las ecuaciones de primer orden son de la forma

$$\langle f\rangle\langle x\rangle + \langle g\rangle = \langle h\rangle$$

Donde $\langle f\rangle, \langle g\rangle, \langle h\rangle$ y $\langle x\rangle$ pertenecen al producto reducido; $\langle f\rangle, \langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$ son contantes y $\langle x\rangle$ es la incógnita. La pregunta que surge es si la ecuación tienen solución y de ser así cuantas soluciones tiene.
Si $\langle f\rangle = \langle 0\rangle$ entonces necesariamente para que tenga solución $\langle g\rangle = \langle h\rangle$ y sus soluciones son todos los elementos del producto reducido. Si $\langle f\rangle = \langle 1\rangle$ como el producto reducido es un cuerpo respeto a la suma entonces

$$\langle x\rangle = \langle h\rangle + \langle -g\rangle$$

Donde $\langle -g\rangle$ es el inverso aditivo de $\langle g\rangle$, obteniéndose que la ecuación tiene una solución única. Esto nos lleva a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. *Dada la solución $\langle x\rangle = \langle h\rangle + \langle -g\rangle$ donde $\langle h\rangle$ y $\langle g\rangle$ son estándar*

I Si $\langle h\rangle < \langle g\rangle$ entonces $\langle x\rangle$ es no estándar.

II Si $\langle h\rangle \geq \langle g\rangle$ entonces $\langle x\rangle$ es estándar.

Obsérvese que si $\langle h\rangle < \langle g\rangle$ entonces $\langle h\rangle - \langle g\rangle$ es un número negativo y por lo tanto $\langle x\rangle$ es no estándar, y si $\langle h\rangle \geq \langle g\rangle$ entonces $\langle h\rangle - \langle g\rangle$ es un número estándar y por lo tanto $\langle x\rangle$ es estándar. El siguiente ejemplo muestra ecuaciones que no cumplen las condiciones de los teoremas.

Ejemplo 4.3.1.

1 $\langle g\rangle$ es no estándar y $\langle h\rangle$ es estándar

$$\langle x\rangle + \langle(1, 2, 3, 4, ...)\rangle = \langle 0\rangle$$

Se puede observar que $\langle x\rangle = \langle 1\rangle$ es decir $\langle x\rangle$ es estándar en cambio con la siguiente ecuación x resulta ser no estándar

$$c + \langle(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...)\rangle = \langle 0\rangle$$

Se puede observar que $\langle x\rangle = \langle 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...\rangle$ que es no estándar

2 $\langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$ son no son estándar

$$\langle x\rangle + \langle(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...)\rangle = \langle(1, 2, 3, 4, ...)\rangle$$

Se puede comprobar que $x = \langle(0,0,1,1,2,2,3,3,...)\rangle$ que es no estándar

$$\langle x\rangle + \langle(1,2,3,4,...)\rangle = \langle(2,3,4,5,6,7,8,...)\rangle$$

Entonces $\langle x\rangle = \langle 1\rangle$ que es estándar.

Ahora si se toma $\langle f\rangle > \langle 1\rangle$ de la ecuación $\langle f\rangle\langle x\rangle + \langle g'\rangle = \langle h\rangle$ se estudiara cuando esta ecuación tiene solución, que es lo mismo que estudiar cuando $\langle f\rangle\langle x\rangle = \langle g\rangle$ tiene solución para $\langle g\rangle = \langle h\rangle + \langle -g'\rangle$. Aquí se abren los dos caminos mencionados anteriormente:

- Si los primos pertenecen al filtro entonces $\langle f\rangle\langle x\rangle = \langle g\rangle$ Siempre tiene solución única, puesto que $\langle f\rangle$ tendría inverso multiplicativos, Por ejemplo si $\langle f\rangle = \langle 2\rangle$ entonces $\langle x\rangle = \langle h\rangle\langle g\rangle$ donde

$$h(i) = \begin{cases} n+2 & si \quad i = 2n+1 \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

De forma más general podemos obtener el siguiente algoritmo:
Nótese que $\langle x\rangle = \langle h\rangle\langle g\rangle$ es una solución de $\langle b\rangle x = \langle g\rangle$, donde:

$$h(i) = \begin{cases} n+nk+m & si \quad i+2 = bn+a,\ i+2 \text{ es primo y es mayor } b \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para $a+1+ak = bm$, $0 \leq a < b$ y $0 \leq k < b$.
Obsérvese que el algoritmo no solo sirve para hallar los números estándar si no cualquier número del producto reducido aunque en la práctica es imposible, además esta ecuación tiene solución única, puesto que los inversos son únicos.

- Ahora si no es un campo entonces $\langle f\rangle x = \langle g\rangle$.

Esta ecuación no siempre tiene solución, si $\langle f\rangle$ es unidad tiene solución, por ejemplo, si $\langle f\rangle = \langle 2\rangle$ entonces para que sea unidad es necesario que los números impares pertenezcan al producto reducido, particular se tiene que $\langle f\rangle = \langle n\rangle$ es unidad si $\{i \mid i = an+1\} \in F$. Si $\langle f\rangle$ no es unidad no significa $\langle f\rangle x = \langle g\rangle$ no tenga solución puesto que si $\langle f\rangle / \langle g\rangle$ la ecuación tiene solución por ejemplo si $\langle f\rangle = \langle 3\rangle$ entonces si $\langle g\rangle = \langle 3n\rangle$ se tiene que la ecuación siempre tendrá solución en general se tiene que

Teorema 4.3.2. *Dado $\langle f\rangle, \langle g\rangle \in \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_{i+2}/F$, si $\{i \mid g(i) = b_i * f(i)\} \in F$ entonces $\langle f\rangle x = \langle g\rangle$ tiene solución*

Obsérvese que si se tiene que $\langle f\rangle$ no es unidad y $\langle g\rangle$ es unidad entonces la ecuación no tiene solución,

Teorema 4.3.3. *Si $\langle f\rangle$ no es unidad y $\langle g\rangle$ es unidad entonces $\langle f\rangle x = \langle g\rangle$ no tiene solución. por esto mismo si $\langle f\rangle$ y $\langle g\rangle$ son asociados entonces la solución es unidad.*

$\langle f\rangle$ no divide a $\langle g\rangle$ por definición de divisibilidad se tendrá que la ecuación no tiene solución, con esto se acaba el estudio de ecuaciones lineales y se da paso al estudio de ecuaciones cuadráticas.

Ecuaciones cuadráticas en productos reducidos

Continuando con los dos caminos se estudiará las ecuaciones de la forma

$$\langle f\rangle x^2 + \langle g\rangle x + \langle e\rangle = \langle h'\rangle$$

Si $\langle h\rangle = \langle h'\rangle - \langle e\rangle$ entonces solo hay que estudiar

$$\langle f\rangle x^2 + \langle g\rangle x = \langle h\rangle$$

Se podrán condiciones a las constantes es decir a $\langle f\rangle, \langle g\rangle$ y $\langle h\rangle$, una condición que plantean (Luque, Mora, Torres, 2006) en su libro (ver pág. 62) es que $\langle f\rangle$ sea divisor de cero, en este caso existe $\langle f'\rangle$ tal que $\langle f'\rangle * \langle f\rangle = \langle 0\rangle$, si se multiplica ambos lados por cero se tendrá que:

$$\langle f'\rangle * \langle g\rangle x = \langle f'\rangle\langle h\rangle$$

Si la anterior ecuación tiene solución entonces, sus soluciones son una posible solución a la ecuación cuadrática por ejemplo:

Ejemplo 4.3.2. Dada la ecuación $\langle 2\rangle x^2 + \langle g\rangle x = \langle h\rangle$ como se pretende que $\langle 2\rangle$ sea un divisor de cero entonces los numero pares deben pertenecer al filtró, se puede verificar que $\langle f'\rangle$ será igual a

$$f'(i) = \begin{cases} n+1 & si \qquad i = 2n+a \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde $0 \leq a < 2$
Multiplicando la ecuación cuadrática por $\langle f'\rangle$ se obtiene

$$\langle f' * g\rangle x = \langle f' * h\rangle$$

Obsérvese que si $\langle g\rangle = \langle h\rangle$ entonces $x = \langle 1\rangle$ entonces

$$\langle 2\rangle(1)^2 + \langle g\rangle(1) = \langle h\rangle$$

Es decir

$$\langle g\rangle = \langle h - 2\rangle$$

Lo que es una contradicción es decir que $x = \langle 1\rangle$ no es una solución de la ecuación cuadrática.

En general se tiene que para $\langle f' * g\rangle \neq 0$ y $\langle f' * h\rangle \neq 0$ la ecuación lineal tiene solución si $\langle f' * g\rangle$ es invertible o $\langle f' * g\rangle$ divide a $\langle f' * h\rangle$, pero $\langle f' * g\rangle$ no es invertible por cómo se construye f' y por lo tanto solo tiene solución si $\langle f' * g\rangle$ divide a $\langle f' * h\rangle$ es decir existe $\langle g'\rangle$

$$\langle f'g\rangle\langle g'\rangle = \langle f' * h\rangle$$

Donde

$$x = \langle g'\rangle$$

Sería una posible solución. Si $\langle g\rangle = \langle 3\rangle$ y $\langle h\rangle = \langle 14\rangle$ entonces se tiene que $\langle f'\rangle * \langle 14\rangle = 0$ luego $\langle f' * 3\rangle\langle g'\rangle = \langle 0\rangle$ Se tiene que

$$\langle g'\rangle = \langle 2e\rangle$$

Si $\langle e\rangle = \langle 1\rangle$ reemplazado en la ecuación cuadrática se tiene que

$$\langle 2\rangle(\langle 2\rangle)^2 + \langle 3\rangle(\langle 2\rangle) = \langle 14\rangle$$

Es decir

$$\langle 8\rangle + \langle 6\rangle = \langle 14\rangle$$

En general si $\langle e\rangle$ es estándar solo es solución si $\langle h\rangle = \langle 8\rangle\ (\langle e\rangle)^2 + \langle 6\rangle(\langle e\rangle)^2$ y si no una de las cosas que se pueden decir con seguridad es que si $\langle f'\rangle$ es un divisor de cero y $\langle f'\rangle * \langle g\rangle x = \langle f'\rangle\langle h\rangle$ no tiene solución entonces $\langle f\rangle x^2 + \langle g\rangle x = \langle h\rangle$ no tiene solución

Teorema 4.3.4. *Dada la ecuación $\langle f\rangle x^2 + \langle g\rangle x = \langle h\rangle$, $\langle f'\rangle\langle f\rangle = 0$ entonces si $\langle f'\rangle * \langle g\rangle x = \langle f'\rangle\langle h\rangle$ no tiene solución entonces $\langle f\rangle x^2 + \langle g\rangle x = \langle h\rangle$ no tiene solución.*

Una consecuencia del teorema anterior es que si $\langle f\rangle$ es divisor de cero y $\langle f\rangle/\langle g\rangle$ entonces para que la ecuación cuadrática tenga solución $\langle f'\rangle\langle h\rangle = \langle 0\rangle$

Hasta el momento se ha trabajado con unidades y divisores de cero pero existen otros que no son ni unidades ni divisores de cero. Con la intención de quitar estos últimos se trabajara con ultrafiltros y por lo tanto solo existen divisores de cero y unidades. Ahora miremos como seria la soluciones de las ecuación cuadráticas en los ultraproductos.

Se empezará por el lado opuesto en que se inició el estudio en los productos reducidos, es decir que para $\langle f\rangle x^2 + \langle g\rangle x = \langle h\rangle$ se supondrá que $\langle 2\rangle$ *y* $\langle f\rangle$ son unidades, de esta forma se utiliza la formula cuadrática es decir:

$$x = \frac{-\langle g\rangle \pm \sqrt{\langle g\rangle^2 + \langle 4\rangle\langle f\rangle\langle h\rangle}}{\langle f\rangle\langle 2\rangle}$$

Estudiemos un caso particular

Ejemplo 4.3.3. Dada la ecuación cuadrática $\langle 2\rangle x^2 + \langle 4\rangle x = \langle 3\rangle$, Como las contantes no son invertibles entonces $\{i \mid i = 2n\} \notin F$, ahora reemplacemos las constantes en la formula cuadrática.

$$x = \frac{-\langle 4\rangle \pm \sqrt{\langle 4\rangle^2 + \langle 4\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}}{\langle 2\rangle\langle 2\rangle}$$

Es decir que

$$x = \frac{-\langle 2\rangle \pm \sqrt{\langle 10\rangle}}{\langle 2\rangle}$$

La $sqrt\langle 10\rangle$ existe y es igual a $\langle f\rangle$ si

$$f'(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j^2 - 12 \\ \\ \pm j & si \quad i = j^2 - 12 \end{cases}$$

Donde $\{i \in \mathbb{N}/i = j^2 - (a+2)\} \in F$.
Entonces se debe tener que $2n = j^2 - 12$ es decir que

$$\{i \in \mathbb{N}/i = j^2 - (a+2) y i = 2n\} \in F$$

Y luego de estas consideraciones entonces

$$x = \frac{-\langle 2\rangle \pm \sqrt{\langle 10\rangle}}{\langle 2\rangle}$$

Seria solución de la ecuación.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Sobre el desarrollo del trabajo

- Al indagar y estudiar acerca de la construcción y análisis de los números reales no estándar, encontramos que las fuentes bibliográficas consultadas en general, hacen un fuerte énfasis desde el campo de la teoría de modelos, y no desde una construcción de productos reducidos.

Sobre filtros

- Los filtros sobre un conjunto dado, pueden ser clasificados al considerar la intersección de todos los elementos que pertenece al filtro; si esta intersección pertenece al filtro, llegamos a lo que se denomina filtro principal, si esta intersección es vacía, se obtienen filtros libres, de lo contrario se obtiene un filtro no libre y no principal.
- Un filtro principal puede caracterizarse por medio de uno de sus elementos, específicamente, la intersección de todos los elementos del filtro.
- Es posible identificar el tipo de filtro por medio de la cardinalidad del conjunto del cual se genera el filtro y por medio de la cardinalidad de sus elementos, así, si el conjunto base es finito o alguno de sus elementos es finito, el filtro necesariamente es principal. En consecuencia, si se quiere obtener filtros no principales, se debe partir de un conjunto infinito y además se debe tener que todo el elemento del filtro contenga a otro propiamente.
- El filtro de Fréchet está contenido en todo filtro libre.
- Por medio del filtro maximal de una cadena ordenada de filtros, se llega al concepto de ultra-filtro. Este orden se define por medio de la contenencia entre filtro.

Sobre productos reducidos

- La relación que guarda las propiedades algebraicas de la familia de estructuras base con el producto reducido se puede enunciar de la siguiente manera: Si una propiedad algebraica que cumple ser formulada con un enunciado simple que se puede expresar sin variables libres, que tiene solo cuantificadores, símbolos de operación válidos en las estructuras y la igualdad para casi todas las estructuras de la familia base entonces esta propiedad es transferida al producto reducido. En este sentido, la expresión para casi todo lo determina el filtro que genera al producto reducido.
- Si las propiedades que cumplen casi todas las estructuras de la familia base, tienen una excepción y esta excepción se quiere transferir o por otra parte se quiere obtener una relación de orden total en el producto reducido, este debe ser generado a partir de un ultrafiltro, en otras palabras un ultraproducto.

Sobre productos reducidos en la familia de los $\mathbb{Z}_n$ generado por filtros libre

- El conjunto de los números estándar son isomorfos a los números naturales.
- Existe un subconjunto del producto reducido isomorfo a los números enteros.
- Los únicos números cuadrados que no dependen del filtro son los cuadrados de los números estándar.
- En los productos reducidos, cualquier elemento puede ser unidad, divisor de cero o ninguno de los dos a conveniencia, esto resulta de escoger un filtro adecuado.
- La definición de elemento irreductible y numero primo en los productos reducidos debe alterarse a estructuras que no sean dominio de integridad necesariamente sin divisores de cero.
- Si el producto reducido no contiene divisores de cero, no existen números primos.

Recomendaciones

- En general, se puede decir que no se ha obtenido un documento final, pues no se ha tratado a profundidad la trasferencia de propiedades, pues en últimas se logró obtener una caracterización de la forma que deben tener las propiedades para poder ser transferidas al producto reducido, sin embargo, no se obtuvo un resultado general. Se intuye que el problema de la trasferencia y la necesidad de utilizar ultrafiltros, se debe a cuestiones de orden y el concepto de conjunto numerable en las propiedades. Se sugiere realizar un estudio a la trasferencia de propiedades desde la teoría de modelos.

Bibliografía

[1] Abraham, R. (1966). *Non-standard analysis.* (Princeton Landmarks in Mathematics, Ed.) (2nd ed.). Los Angeles: Princeton University Press.

[2] Carlos, I. (n.d.). *Análisis no estándar.*

[3] Castillo, C. I. (n.d.). *TEORÍA DE NÚMEROS* (p. 363). Retrieved from http://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf

[4] Elemér, R. (n.d.). *Short introduction to nonstandard analysis.* (Department of Mathematics, Ed.). South Africa: University of Pretoria.

[5] Erland, G. (2002). *Foundations of nonstandard analysis without urelements.* (Department of Mathematics, Ed.). Luleå University of Technology.

[6] Gutiérrez, víctor diego. (2012). *z-ultrafiltros y compactificación de Stone-Cech.* Universidad de Cantabria, santander.

[7] Ibarlucía, T. (2012). *Tesis de licenciatura ultraproductos de estructuras finitas.* Universidad de Buenos Aires.

[8] Luque, C., Mora, L., y Torres, J.. (2006). *Estructuras análogas a los números reales.* (Universidad Pedagogica Nacional, Ed.) Bogota , colombia.

[9] Neira, C. (2012). *Topologia General.* (1st ed., p. 192). Bogotá, Colombia.

[10] Rubiano, G. (2010). *Topología General*(Universidad Nacional, Ed.) Bogotá , colombia.

[11] Salvador, G. F. (2010). *Ultrafiltros sobre N y Sistemas Dinámicos discretos.*

[12] Takeuchi, Y. (1988). *Metodos analiticos del analisis no standar.*

[13] Tirao, P. (2004). *La Ley de Reciprocidad Cuadrática.*

[14] Hensel's lemma. (n.d.). *Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Hensel's_lemma*

[15] Lema de Zorn. (2014). *Retrieved from http://es.wikipedia.org/wiki/Lema_de_Zorn*