

# ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA EN LA ASTRONOMÍA: UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA MEDIR EL “PERÍMETRO” DE LA TIERRA

Valeria Villarraga Amaya

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, 2024



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

---

# ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA Y GEO- METRÍA EN LA ASTRONOMÍA: UNA SECUEN- CIA DE TAREAS PARA MEDIR EL “PERÍMETRO” DE LA TIERRA

---

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciada en Matemáticas

PRESENTA:

Valeria Villarraga Amaya

ASESOR:

Óscar Javier Molina Jaime

2024

Bogotá D.C., Colombia

## *DEDICATORIA*

A Dios, quien me ha dado la fuerza, la sabiduría y la perseverancia para alcanzar este logro. Su guía ha sido mi luz en los momentos de dificultad, todo sea la honra y la gloria para él.

A mi familia, pilar fundamental en este camino, su amor incondicional y constante apoyo han sido mi mayor motivación. Cada sacrificio y palabra de aliento ha sido un impulso para seguir adelante. A mis padres y mi hermano, quienes me han inspirado y apoyado constantemente en todos mis sueños y esfuerzos, hoy puedo decir con orgullo que la persona que soy es gracias a ellos.

Valeria Villarraga Amaya

## *AGRADECIMIENTOS*

En este momento de logro y gratitud, no puedo dejar de reconocer a las personas que han sido pilares fundamentales en mi vida y en la realización de este trabajo.

En primer lugar, agradezco a Dios por guiarme y darme fuerzas en cada paso de este camino académico. Su amor y misericordia han sido mi fuente de inspiración constante.

A mis amados padres, *Oscar y Adriana*, les debo todo mi éxito. Gracias por su apoyo incondicional, por creer en mí más allá de mis dudas y por sacrificarse para que yo pudiera perseguir mis sueños. Su dedicación y amor han sido el motor que me impulsó a alcanzar este logro.

A mi querido hermano, *Alejandro*, por ser mi cómplice en las risas y en las dificultades. Sus palabras de aliento y su presencia han sido un regalo invaluable en este viaje.

A toda mi familia, por su constante ánimo, comprensión y apoyo. Sus palabras alentadoras y su presencia en cada etapa de mi vida académica han sido un faro de esperanza y fortaleza. Quiero hacer un agradecimiento especial a mi abuela “mami”, *Blanca*, quien, aunque ya no está físicamente con nosotros, su amor y sabiduría siguen guiándome desde el cielo. Siempre recordaré sus palabras de aliento y el ejemplo de fortaleza que me inspiran a seguir adelante.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi asesor *Oscar Molina*, por su guía experta, paciencia infinita y por compartir su sabiduría conmigo. Gracias por ayudarme a alcanzar nuevas alturas académicas.

Cada uno de ustedes ha dejado una huella indeleble en mi corazón y ha hecho posible este logro que hoy celebro con orgullo.

# TABLA DE CONTENIDO

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>7</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>9</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>10</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>12</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>13</b>
<b>CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>16</b>
1.1 INQUIETUD PEDAGÓGICA	16
1.2 OBJETIVOS	21
1.2.1 OBJETIVO GENERAL	21
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	21
<b>CAPITULO II. MARCO CONCEPTUAL</b>	<b>22</b>
2.1 MARCO MATEMÁTICO	22
2.1.1 SITUACIONES PROTAGONISTAS DEL ESTUDIO	24
2.1.2 LENGUAJE	36
2.2 MARCO DIDÁCTICO	37
2.2.1 CONCEPTUALIZACIÓN SOBRE TAREA Y SECUENCIA DE TAREAS	37
2.2.2 LA IMPORTANCIA DE LA TECNOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA Y LA TRIGONOMETRÍA	39
2.2.3 LA IMPORTANCIA DEL USO DEL MATERIAL CONCRETO PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA Y LA GEOMETRÍA	41
<b>CAPITULO III. METODOLOGÍA</b>	<b>43</b>
<b>CAPITULO IV. SECUENCIAS DE TAREAS</b>	<b>48</b>
4.1 DESCRIPCIÓN DE LAS SECUENCIAS DE TAREAS	48
4.1.1 DESCRIPCIÓN DE ELEMENTOS COMUNES DE LAS SECUENCIAS	48
4.2 PRIMERA SECUENCIA: MODELACIÓN CON MATERIAL CONCRETO EN EL MICROESPACIO DEL MÉTODO DE ERATÓSTENES	53
4.3 SEGUNDA SECUENCIA: MODELACIÓN DEL MÉTODO DE ERATÓSTENES EN GEOGEBRA	68

<b>4.4 TERCERA SECUENCIA: MODELACIÓN DEL MÉTODO DE ERATÓSTENES CON SIMULADORES EN TIEMPO REAL</b>	<b>87</b>
<b>CAPITULO V. CONCLUSIONES</b>	<b>95</b>
<hr/>	
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>98</b>
<hr/>	
<b>ANEXOS</b>	<b>100</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Construcción geométrica del ME.....	30
Figura 2. Construcción geométrica de rayos solares del ME .....	31
Figura 3. Construcción geométrica del gnomon del ME.....	32
Figura 4. Construcción geométrica de ángulos alternos internos del ME .....	33
Figura 5. Materiales concretos.....	54
Figura 6. Representación de apoyo para hallar el perímetro de una circunferencia.....	55
Figura 7. Método de Eratóstenes .....	56
Figura 8. Ubicación de la bola de icopor.....	57
Figura 9. Marcación de palillos .....	58
Figura 10. Ubicación del palillo a .....	58
Figura 11. Medida de para ubicar palillo s .....	59
Figura 12. Ubicación del palillo s.....	60
Figura 13. Ubicación de la linterna .....	60
Figura 14. La sombra proyectada por S.....	61
Figura 15. Medición del ángulo clave .....	62
Figura 16. Perforación hacia el centro del icopor.....	63
Figura 17. Medición del ángulo al centro del icopor.....	64
Figura 18. Medir la bola de icopor con el metro .....	66
Figura 19. Aplicación GeoGebra .....	74
Figura 20. Construcción de la esfera de la Tierra .....	75
Figura 21. Representación de una circunferencia máxima de la Tierra.....	76
Figura 22. Ubicación de Siena y Alejandría .....	77

Figura 23. Representación del rayo solar en el solsticio de verano.....	78
Figura 24. Representación de la sombra del gnomon.....	80
Figura 25. Determinación del triángulo.....	83
Figura 26. Ubicación en coordenadas en Google Earth .....	88
Figura 27. Herramienta para visualizar la línea ecuatorial .....	89
Figura 28. Representación del trópico de cáncer en el globo terráqueo .....	89
Figura 29. Ubicación del punto B.....	90
Figura 30. Herramienta para hallar distancias en Google Earth.....	90
Figura 31. Distancia entre A y B.....	91
Figura 32. Estudiantes realizando el método de Eratóstenes.....	93

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Los descubrimientos astronómicos griegos .....	25
Tabla 2. Pasos del método de Eratóstenes .....	30
Tabla 3. Objetos matemáticos del método de Eratóstenes.....	36
Tabla 4. Contenido de las secuencias .....	45
Tabla 5. Primera secuencia de tareas .....	55
Tabla 6. Tabla de Cumplimiento de Objetivos Específicos .....	95
Tabla 7. Sistema axiomático para el método de Eratóstenes .....	100

## RESUMEN

Este trabajo se enfoca en la integración de la geometría y la trigonometría en la enseñanza de la astronomía, utilizando el método de Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra. El estudio destaca la importancia de la articulación de objetos de tales áreas de las matemáticas, proponiendo una secuencia de tareas que apunta a promover la modelación y argumentación del método a través de material concreto y herramientas digitales.

Con la secuencia diseñada se pretende abordar una problemática que se presenta en el ámbito educativo la cual se enmarca en un estudio de la trigonometría desarticulado de la geometría y de fenómenos o situaciones que han interesado a la humanidad (para este caso, relativo a un asunto de la astronomía como el cálculo de grandes longitudes). Presentamos un marco conceptual basado en el enfoque Onto-Semiótico del conocimiento matemático, describiendo los principales objetos matemáticos involucrados en el método de Eratóstenes, entre los cuales se destacan las razones trigonométricas, las leyes de seno y coseno, el teorema de Pitágoras y la relación de paralelismo.

Para llevar a cabo el diseño, hemos utilizado la propuesta de Gómez et al. (2018), ya que esta metodología ofrece un marco teórico robusto y detallado que fundamenta de manera sólida la estructuración de secuencias didácticas en matemáticas. La propuesta se destaca por su capacidad para describir minuciosamente los elementos necesarios de una tarea, como las expectativas de aprendizaje, los requisitos, el agrupamiento, los recursos, la interacción y la formulación de enunciados, lo que garantiza que las tareas sean claras y bien definidas. Además, el enfoque de Gómez et al. (2018) es adaptable a diferentes contextos educativos, lo que permite personalizar las secuencias didácticas según las características del microespacio del estudiante y los recursos disponibles. La propuesta también integra un enfoque multimodal, utilizando material concreto, GeoGebra y aplicativos digitales, enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje con múltiples herramientas y perspectivas. Finalmente, su metodología permite evaluar la eficacia del procedimiento mediante experimentaciones con materiales y datos reales, proporcionando tanto un sustento teórico como práctico que favorece una comprensión profunda y aplicada de los conceptos matemáticos. Por estas razones, la propuesta de Gómez et al. (2018) es una elección adecuada

para el diseño de las tres secuencias, cada una con propósitos específicos como verificar la eficacia del procedimiento, modelar en GeoGebra y desarrollar procedimientos con herramientas digitales y datos reales.

## ABSTRACT

This work focuses on integrating geometry and trigonometry into the teaching of astronomy, using the method of Eratosthenes to measure the circumference of the Earth. The study emphasizes the importance of connecting concepts from these areas of mathematics, proposing a sequence of tasks aimed at promoting modeling and argumentation of the procedure through concrete materials and digital tools.

The designed sequence aims to address an educational issue where trigonometry is often taught disjointedly from geometry and from phenomena or situations that have interested humanity (in this case, related to an astronomical matter such as calculating large distances). A conceptual framework based on the Onto-Semiotic approach to mathematical knowledge is presented, describing the principal mathematical objects involved in Eratosthenes' method, including trigonometric ratios, the laws of sine and cosine, the Pythagorean theorem, and the concept of parallelism.

To carry out the design, Gómez et al.'s (2018) proposal is used, as this methodology offers a robust and detailed theoretical framework that solidly underpins the structuring of didactic sequences in mathematics. The proposal is distinguished by its ability to thoroughly describe the necessary elements of a task, such as learning expectations, requirements, grouping, resources, interaction, and problem formulation, ensuring that tasks are clear and well-defined. Furthermore, Gómez et al.'s (2018) approach is adaptable to different educational contexts, allowing for the customization of didactic sequences according to the specific characteristics of the student's microspace and available resources. The proposal also integrates a multimodal approach, using concrete materials, GeoGebra, and digital applications, enriching the teaching and learning process with multiple tools and perspectives. Finally, its methodology allows for evaluating the effectiveness of the procedure through experiments with real materials and data, providing both theoretical and practical support that fosters a deep and applied understanding of mathematical concepts. For these reasons, Gómez et al.'s (2018) proposal is an appropriate choice for designing the three sequences, each with specific purposes such as verifying the effectiveness of the procedure, modeling in GeoGebra, and developing procedures with digital tools and real data.

# INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se fundamenta en el potencial de la articulación de algunos aspectos de la geometría y la trigonometría en el ámbito escolar. Cada vez más aspectos relativos a la trigonometría se ven excluidos del currículo implementado o se abordan de una manera tradicional que no contempla el estudio de situaciones de la astronomía y su relación con aspectos básicos de la geometría y trigonometría. Entre los aspectos trigonométricos que suelen estar excluidos o abordados de manera superficial en el currículo escolar se encuentran: el estudio de las funciones trigonométricas en contextos no lineales, como las aplicaciones astronómicas; la integración de la trigonometría esférica para comprender fenómenos astronómicos como el cálculo de distancias y ángulos en el cielo; la relación entre las coordenadas esféricas y la trigonometría aplicada a la observación de cuerpos celestes; y la utilización de modelos trigonométricos avanzados para analizar la forma y el movimiento de los planetas y estrellas. Además, se observa una tendencia a reducir el enfoque en problemas de trigonometría relacionados con la medición de grandes distancias y dimensiones en el espacio, lo que limita la aplicación práctica de la trigonometría en el estudio de fenómenos astronómicos y su relevancia en el aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados.

Destacamos la necesidad de enseñar trigonometría desde una perspectiva astronómica para resaltar su importancia en la exploración y comprensión de nuestro universo. Este enfoque no solo subraya la relevancia de nuestro trabajo de grado, sino que también se alinea con uno de los propósitos fundamentales de la educación en Colombia: ofrecer una educación equitativa y de calidad que fomente el desarrollo cultural, científico y tecnológico de todos los colombianos. En este contexto, los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) establecen que la enseñanza de las matemáticas debe considerar el conocimiento matemático informal de los estudiantes, integrando factores afectivos, sociales y científicos, y adaptándose a los contextos de aprendizaje específicos.

Procurar una enseñanza con las características citadas implica retos mayúsculos desde los procesos de diseño y gestión por parte de los profesores de matemáticas al momento de diseñar tareas. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática en los niveles de educación primaria y secundaria se ha enfocado en la repetición y la memorización de reglas y algoritmos durante el desarrollo de las clases, dejando de lado procesos y herramientas que induzcan al razonamiento de los estudiantes. Tal metodología algorítmica, en la que se usan gráficas, modelos, fórmulas y representaciones

sin mayor sentido, no es ajena al caso de la trigonometría. Este hecho genera una significación limitada de los objetos matemáticos, por cuanto estos se “ven” solo como un juego procedimental para establecer resultados determinados, pero no como objetos que permiten modelar situaciones o fenómenos cuyo estudio ha interesado a la humanidad para procurar interpretar al mundo.

Este trabajo de grado asume el reto mencionado y expone la descripción de tres secuencias de tareas que apunta a promover el estudio del procedimiento de Eratóstenes para calcular la circunferencia de la Tierra (problema de la astronomía que interesó a la humanidad en la antigüedad y la Edad Media). Para llevar a cabo el diseño de las secuencias hemos utilizado la propuesta de Gómez et al. (2018); en consecuencia, para cada secuencia hacemos una descripción de los elementos que componen una tarea (e.g., expectativas de aprendizaje o metas, requisitos, agrupamiento, recursos, interacción, formulación de enunciados). Para dar cuenta y razón de las expectativas de aprendizaje y requisitos hemos procurado exaltar los principales objetos de la geometría y trigonometría siguiendo la clasificación de tipos de objetos primarios propuesta por el Enfoque Onto-Semiótico.

El documento está compuesto de cinco capítulos: el primero expone la inquietud pedagógica que motivó su realización (desarrollando las ideas dichas al inicio de esta sección) y los objetivos generales y específicos. El segundo, presenta el marco conceptual que fundamentó el estudio, entre los cuales destacamos la propuesta de Gómez et al. (2018) para diseñar tareas, la propuesta del Enfoque Onto-Semiótico para los tipos de objetos matemáticos de las prácticas matemáticas y el potencial del uso de diversos recursos (concretos y digitales) para aprender geometría. El tercero incluye el marco metodológico del estudio, dividido en tres fases; en él describimos la manera mediante la cual se diseñaron las secuencias tomando en cuenta las ideas de Gómez y sus colegas; además, precisamos cómo se presenta la descripción de cada una de las secuencias en el capítulo 4. El capítulo cuatro es la esencia del trabajo de grado, en él se presenta cada una de las secuencias con su respectiva descripción. La primera secuencia tiene el propósito de verificar la eficacia del procedimiento usando material concreto del microespacio del estudiante; la segunda, de modelar el procedimiento en GeoGebra y promover un sustento teórico del mismo; y la tercera, de desarrollar el procedimiento haciendo uso de aplicativos digitales y con experimentaciones en tiempo y datos “reales”. El objetivo de la tercera fase es aplicar y evaluar el procedimiento en condiciones más cercanas a las reales, utilizando aplicativos digitales avanzados y experimentaciones con datos en tiempo real para observar cómo el procedimiento se comporta en situaciones prácticas. Esta fase

busca no solo validar el modelo teórico desarrollado en las fases anteriores, sino también identificar posibles ajustes y mejoras basadas en la implementación práctica y la interacción con datos actuales. Finalmente, el capítulo cinco sintetiza las conclusiones del estudio en tres apartados: cumplimiento de los objetivos, aprendizajes que dejó su desarrollo, y horizonte y limitaciones de las secuencias diseñadas.

# CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo se dedica a profundizar en las deficiencias observadas en la enseñanza de la trigonometría dentro del currículo escolar, particularmente en cómo se han excluido o tratado de manera convencional algunos conceptos clave. En lugar de abordar estos temas de manera innovadora y contextualizada, el currículo vigente frecuentemente omite el estudio de la trigonometría aplicada a la astronomía, limitando así la integración de conocimientos geométricos y trigonométricos en situaciones reales. En este contexto, se examina cómo estas lagunas educativas impulsaron el desarrollo del presente trabajo de grado. Se expone detalladamente la motivación pedagógica detrás de la investigación y se definen los objetivos que orientan la creación de secuencias didácticas diseñadas para superar estas limitaciones y mejorar la comprensión de la trigonometría en el ámbito escolar.

En ese marco, destacamos la necesidad de enseñar trigonometría desde una perspectiva astronómica, subrayando su importancia en la exploración y comprensión de nuestro universo. De este modo, procuramos resaltar la relevancia de este trabajo de grado.

## 1.1 Inquietud pedagógica

En el contexto de avanzar hacia una formación integral y equitativa, los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) establecen que la enseñanza de las matemáticas debe reconocer y construir sobre el conocimiento previo de los estudiantes, que está moldeado por sus experiencias personales y su entorno. Este enfoque demanda la integración de aspectos emocionales, sociales y científicos en el proceso educativo, adaptando los contenidos a contextos específicos de aprendizaje. Además, se resalta la necesidad de considerar la evolución histórica de los conceptos matemáticos, ya que ofrece una perspectiva que facilita la comprensión y el desarrollo conceptual en el ámbito de las matemáticas.

Como apreciación personal, considero que buscar una enseñanza con las características mencionadas representa un desafío significativo para los profesores de matemáticas en términos de diseño y gestión. Muchas veces, las experiencias de formadores y profesores de matemáticas revelan que este desafío no se aborda de manera explícita en la enseñanza de la trigonometría en la

escuela secundaria. Esto puede llevar a que el contenido no se trate adecuadamente o, cuando se trata, se haga utilizando métodos tradicionales que limitan la conceptualización de los objetos matemáticos y se enfocan en la aplicación de algoritmos a problemas rutinarios. Un claro ejemplo está en lo que indica Montiel (2013) aunque la razón trigonométrica puede resolver problemas específicos como calcular la altura de un edificio como usualmente se enseña en esta área (logrando así el objetivo educativo de seleccionar la razón trigonométrica adecuada, como la tangente, y calcular el valor necesario), esto no garantiza un verdadero entendimiento del pensamiento trigonométrico en relación con el manejo de triángulos, sus elementos y las interrelaciones entre ellos. Pero si se enseña en la práctica.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en los niveles de educación primaria y secundaria, tiende a la repetición y la memorización de reglas y algoritmos durante el desarrollo de las clases, dejando de lado procesos y herramientas que induzcan al razonamiento de los estudiantes. Tal metodología algorítmica, en la que se usan gráficas, modelos, fórmulas y representaciones sin mayor sentido, no es ajena al caso de la trigonometría. Este hecho genera una significación limitada de los objetos matemáticos, ya que estos se “ven” solo como un juego procedimental para establecer resultados determinados, pero no como objetos que permiten modelar situaciones o fenómenos cuyo estudio ha interesado a la humanidad para interpretar el mundo. En contraste con esta visión tradicional sobre el aprendizaje de la razón y la función, Montiel (2011) propone una construcción basada en prácticas y no solo en conceptos, poniendo énfasis en la construcción de la relación y funcionalidad trigonométricas que implica modelar una realidad no manipulable (realidad macro) y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional y analítico-funcional. Esta perspectiva sugiere que sea de interés reconstruir o reinterpretar estos modelos, no solo para examinar los objetos matemáticos en sí mismos, sino también para explorar su dimensión conceptual. Este enfoque permite comprender mejor cómo estos objetos sirven como herramientas legítimas, y como se detallará más adelante, fomenta el desarrollo de actividades matemáticas.

Tal idea sigue los planteamientos de Freudenthal (1983), quien advierte que los objetos matemáticos son medios de organización de objetos del mundo, de sus propiedades, de las acciones que se realizan sobre ellos o de las propiedades de esas acciones. Estos elementos se edifican a través de la aplicación práctica de la matemática. Los conceptos e ideas matemáticas contribuyen a organizar tanto los fenómenos del mundo real como aquellos inherentes a las matemáticas.

Para solventar ese panorama, en este trabajo de grado se toma en cuenta lo que menciona Montiel (2013) en que los principios para la construcción de las relaciones trigonométricas serían muy apropiados el uso de la astronomía para introducir el estudio de aspectos de la geometría, la trigonometría y el cálculo, usando situaciones del contexto propio de dicha disciplina. En suma, se considera que los fenómenos o contextos astronómicos pueden favorecer el diseño de una variedad de situaciones para la introducción de tales áreas del conocimiento matemático en clase. Esto porque, por un lado, desata el estudio de asuntos que han sido de interés para la humanidad a lo largo de la historia; por otro, favorece la introducción de modelos o simulaciones (con diferentes tipos de artefactos) en procesos de enseñanza con el sentido de suscitar procesos de exploración, conjuración y matematización. También la construcción de “modelos a escala” de una entidad real no manipulable, como la inmensidad celeste, representa una transición de lo macro a lo micro. En este proceso, la proporción entre la realidad representada y la realidad presente influye en la precisión del modelo.

El abordaje de la astronomía para estudiar asuntos de la trigonometría no solo favorece procesos de enseñanza, también promueve el desarrollo del pensamiento científico de los estudiantes por cuanto produce la observación y exploración de fenómenos, la adaptación de un lenguaje a uno científico riguroso y la modelación de situaciones con objetos que implican el uso y conceptualización de objetos trigonométricos.

Por otro lado, la trigonometría es una rama esencial de las matemáticas que desempeña un papel crucial en el estudio de la astronomía. Esta disciplina, que se centra en el análisis de los cuerpos celestes y los fenómenos que ocurren fuera de la atmósfera terrestre, requiere una comprensión sólida de conceptos matemáticos, incluyendo la trigonometría (Ballesteros, 2019). La geometría y la trigonometría son herramientas fundamentales para los astrónomos al calcular distancias, tamaños y formas en el universo, lo cual es crucial para la comprensión y exploración del cosmos. La trigonometría permite a los astrónomos medir ángulos y distancias a partir de observaciones telescópicas, lo que facilita la determinación de la ubicación de los objetos celestes y el cálculo de sus dimensiones. Por ejemplo, el método de paralaje utiliza principios trigonométricos para estimar la distancia a las estrellas cercanas, y la geometría es esencial para interpretar la estructura de los sistemas planetarios y las galaxias (Chaisson & McMillan, 2019). Además, la teoría de la relatividad general de Einstein, que tiene profundas implicaciones en la cosmología moderna, se basa en

conceptos geométricos avanzados para describir la curvatura del espacio-tiempo y su impacto en la trayectoria de los objetos astronómicos (Weinberg, 2008). Estas aplicaciones ilustran cómo los conceptos matemáticos no solo son esenciales para la investigación astronómica, sino que también forman la base de numerosos avances en la comprensión del universo.

La falta de recursos didácticos adecuados, evidenciada en la realización de este estudio, puede tener consecuencias significativas al desmotivar a los estudiantes a seguir carreras en ciencias físicas y limitar su capacidad para contribuir a este campo en el futuro. Además, esta carencia puede restringir nuestra capacidad colectiva para explorar y comprender el universo. Por lo tanto, es crucial desarrollar más materiales didácticos que muestren la aplicación de la trigonometría en la astronomía y su conexión con aspectos de la geometría. Estos materiales deben ser accesibles y comprensibles para estudiantes de todos los niveles e incluir ejemplos prácticos y ejercicios que demuestren claramente estas aplicaciones.

Por esta razón, el presente trabajo de grado propone el diseño de una secuencia de tareas como material didáctico dirigido a profesores interesados en enseñar trigonometría de manera innovadora. Esta secuencia se basa en el método de Eratóstenes para calcular la circunferencia máxima de la Tierra, también conocida como la longitud o perímetro de la Tierra, término que a veces se encuentra en la literatura. El objetivo es utilizar este enfoque histórico para ilustrar cómo la trigonometría se aplica en estudios astronómicos, reflejando el interés humano en explorar las dimensiones del universo. La integración de estos métodos proporciona un contexto histórico que facilita la organización de contenidos geométricos y trigonométricos con un enfoque específico. Siguiendo las recomendaciones de Gómez et al. (2018) sobre la descripción de tareas, se pretende desarrollar una secuencia que aborde estos temas en detalle, como se explora en el Capítulo 2.

Para desarrollar esa descripción de la secuencia de tareas utilizamos, además, herramientas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) sobre el conocimiento e instrucción matemáticos (Font et al., 2010; Breda et al., 2017). En el marco del EOS, el diseño de procesos de estudio de los contenidos parte de la selección de situaciones –problemas cuya resolución permita dar significado o razón de ser a dichos contenidos y promover el aprendizaje de estos–. Si bien, varios de los aspectos que el EOS contempla, también los sugiere Gómez et al. (2018), lo que más nos interesa de la propuesta del EOS es la clasificación de objetos matemáticos primarios, claves para hacer operativos los otros elementos propuestos por Gómez y sus colegas.

En este contexto, el estudio de la historia constituye una fuente valiosa para construir y desarrollar el conocimiento del profesor. En este contexto, una de las estrategias para diseñar las tareas es realizar una indagación histórica que permita aprovechar aspectos relevantes de la astronomía y explorar diversos aspectos de la trigonometría, como el método de Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra. Además, consideraremos el uso de recursos mediacionales como softwares especializados, aplicaciones específicas y material manipulable. Reconocemos que la integración de estos recursos facilita un enfoque que simula las experiencias de los autores históricos al proponer sus soluciones, al tiempo que proporciona datos más precisos gracias a herramientas contemporáneas.

Dicho lo anterior, presentamos los objetivos generales y específicos de este trabajo de grado.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo general

Diseñar una secuencia de tareas que involucra el uso de la trigonometría y algunos objetos de la geometría escolar, a partir del procedimiento de Eratóstenes para calcular el perímetro de la Tierra.

### 1.2.2 Objetivos específicos

OE1. Describir el método de Eratóstenes para hallar el perímetro de la Tierra, decantando los objetos de la geometría y trigonometría presentes en él.

OE2. Diseñar secuencias de tareas que promueva el estudio del método de Eratóstenes y, en ese marco, el estudio del uso de algunos objetos de la geometría y la trigonometría (e.g., razones trigonométricas, ley de senos y de cosenos).

OE3. Hacer una descripción de las secuencias de tareas diseñadas, de forma tal que se logre identificar su potencial para precisar maneras de articulación entre la trigonometría, la geometría y la astronomía.

## CAPITULO II. MARCO CONCEPTUAL

Este capítulo se organiza en dos secciones principales. La primera sección aborda el marco matemático y destaca dos aspectos fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Primero, las situaciones, marco en el cual se describen el método de Eratóstenes en relación con la medida de la longitud de la de Tierra, allí mismo se presentan los sustentos de orden geométrico y trigonométrico de cada uno de los pasos de los procedimientos del estudio. Segundo, el lenguaje, marco en el cual describimos el tipo de representaciones utilizado para desarrollar este trabajo. En suma, para la organización de este capítulo, se adoptó la clasificación propuesta por el enfoque Onto-Semiótico de los tipos de objetos primarios, con el fin de estructurar el contenido matemático empleado en las secuencias de tareas.

La segunda sección se centra en una conceptualización de índole didáctica, la cual se divide en dos partes: la primera, explora la noción de tarea y secuencia de tareas según Gómez et al., (2018); la segunda, subraya la importancia del uso de diferentes tipos de recursos (material concreto y artefactos digitales) como herramientas para promover aprendizaje de asuntos de la geometría y la trigonometría.

### 2.1 Marco matemático

El Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado por Godino et al. (2007), establece una ontología de objetos matemáticos que considera las matemáticas desde tres dimensiones esenciales: como una actividad social de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual organizado lógicamente. A partir de la noción primitiva de la situación problema, se definen tres conceptos teóricos fundamentales: la práctica, el objeto y el significado (tanto personal como institucional). Estos conceptos buscan resaltar los tres aspectos mencionados de las matemáticas y establecer los fundamentos del conocimiento matemático.

Para Godino et al. (2007), los objetos matemáticos primarios surgen de un sistema de prácticas que incluye elementos como el lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos. En primer lugar, estos autores consideran una práctica matemática como la acción que una persona realiza al resolver problemas matemáticos y comunicar sus soluciones a otros. En el

estudio de las matemáticas, se destacan los sistemas de prácticas más que una práctica específica para resolver un problema en particular. Estos sistemas engloban prácticas operativas y discursivas realizadas dentro de una institución por varias personas que comparten prácticas sociales comunes, así como el uso de instrumentos y herramientas específicas.

Así, los objetos matemáticos o entidades primarias se definen como todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia durante la actividad matemática. Esto incluye la creación, comunicación y aprendizaje de conceptos matemáticos y se entienden como emergentes de un sistema de prácticas.

Basándose en los diversos roles y funciones que desempeñan las entidades primarias en un sistema de prácticas, se identifican los tipos de objetos que se incluyen en cada categoría y se describen sus funciones específicas en el trabajo matemático (Godino et al., 2007):

*Situaciones:* Se refieren a las tareas que inducen la actividad matemática, como problemas más o menos abiertos, aplicaciones inter o intramatemáticas, ejercicios, etc.

*Procedimientos:* Son las acciones que el individuo realiza al enfrentar tareas matemáticas, como operaciones, algoritmos, técnicas, etc.

*Conceptos (reglas):* Se expresan mediante definiciones o descripciones e incluyen términos como número, puntos, recta, media, función, etc.

*Propiedades o atributos:* Se enuncian como proposiciones o enunciados y se refieren a características de los objetos mencionados.

*Argumentos:* Pueden ser deductivos u otros tipos y se emplean para validar y explicar procedimientos y proposiciones.

*Lenguaje:* Engloba términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que pueden manifestarse de forma escrita, gráfica, oral o gestual durante el trabajo matemático.

Esta clasificación de objetos es útil para describir los requisitos y las metas en el diseño de tareas en cada secuencia. Debido a que permite considerar aspectos fundamentales (objetos primarios) presentes en un sistema de prácticas y anticipar lo que podría surgir durante la implementación de una tarea. A continuación, se presenta el marco matemático organizado a partir de los tipos de

objetos primarios mencionados anteriormente con énfasis en dos procedimientos para medir la longitud de la Tierra: el propuesto por Eratóstenes.

## 2.1.1 Situaciones protagonistas del estudio

Para los fines de este estudio, nos centraremos en un problema histórico que ha sido de interés en diversas épocas: el cálculo de medidas de longitud en el macro espacio, como el perímetro o los radios de los astros del Sistema Solar y las distancias entre ellos. En particular, este trabajo de grado se enfocará en el método propuesto por Eratóstenes (276-194 a.C.) para calcular la circunferencia máxima de la Tierra. Eratóstenes, quien realizó significativas contribuciones al campo de la astronomía, utilizó principios básicos de geometría y trigonometría para abordar este problema. En la siguiente sección, se presentará un breve contexto histórico que sitúa el problema en cuestión.

### 2.1.1.1 Breve relato de la relación astronómica – trigonométrica

Linton (2004) explora la evolución de la trigonometría desde sus inicios en la antigua Babilonia hasta su desarrollo en India y China. El autor detalla cómo los babilonios iniciaron la medición de ángulos utilizando un sistema de división del círculo en 360 grados. Esta práctica primitiva sentó las bases para avances posteriores en trigonometría. Los griegos, particularmente Hiparco y Ptolomeo, perfeccionaron estas técnicas mediante la creación de tablas de cuerdas que resultaron fundamentales para la astronomía. Posteriormente, los astrónomos hindúes desarrollaron tablas de senos, ampliando y refinando aún más el uso de la trigonometría en cálculos astronómicos.

Como lo menciona Díaz (2021), la astronomía surgió de la necesidad de comprender las dinámicas cíclicas del cosmos y su impacto en la vida humana. Desde aproximadamente el 1200 a.C. hasta el 400 a.C., observaciones detalladas revelaron fenómenos astronómicos como los ciclos de las fases de la Luna, los eclipses solares y lunares, y los períodos de los movimientos planetarios. Estos fenómenos periódicos y prolongados impulsaron a la humanidad a buscar un entendimiento más profundo del universo. Las matemáticas se convirtieron en un recurso esencial, introduciendo conceptos como espacio y cantidad en el pensamiento astronómico, lo que permitió establecer conexiones y discernir patrones en las secuencias celestiales.

La trigonometría se convirtió en una herramienta invaluable en astronomía, inicialmente utilizada para lo que, usualmente, se conoce como resolución de triángulos (calcular la medida de longitud de lados o de amplitud angular a partir de otras medidas dadas del triángulo) y, con ello, el cálculo de distancias inaccesibles, como las distancias entre puntos geográficos o astros. Los egipcios, alrededor del 2750 A.C., dependían de la agricultura y entendían que fenómenos celestiales como la lluvia y la luz solar influían en sus cosechas, lo que los llevó a interpretar las señales celestes y a utilizar obeliscos como relojes solares.

Los babilonios, a partir del 1800 A.C., se destacaron por su habilidad numérica y su precisión en la observación astronómica. Desarrollaron un calendario detallado basado en sus observaciones nocturnas de las estrellas, lo que los llevó a establecer un sistema para medir ángulos, subdividiendo el círculo en 360 grados, lo que conocemos hoy como el sistema sexagesimal en trigonometría.

La astronomía griega, a partir del 330 A.C., incorporó elementos matemáticos de las civilizaciones babilónica y egipcia, concibiendo el cosmos como una esfera en la que el sol y la luna giraban alrededor de la Tierra, lo que requería un estudio matemático riguroso de los movimientos celestiales. Algunos conocimientos postulados por aquella época se exponen en la Tabla 1:

*Tabla 1. Los descubrimientos astronómicos griegos*

<b>Tales de Mileto (639 a.C.)</b>	<b>Anaximandro (610 a.C.)</b>	<b>Anaxágoras (500 a.C.)</b>	<b>Pitágoras (569-470 a.C.)</b>	<b>Filolao (450 a.C.)</b>
Imaginaba un universo con la Tierra plana y descansando sobre agua.	Propuso una astronomía geocéntrica (centro del cosmos es La Tierra).	Explicó las fases de la luna como un reflejo de la luz solar.	Afirmó que la Tierra era esférica e inmóvil, con los astros orbitando en trayectorias circulares alrededor de ella.	Sostuvo que la Tierra giraba mientras la bóveda estelar permanecía fija.
<b>Platón (429 a.C.)</b>	<b>Eudoxo (409 a.C.)</b>	<b>Aristóteles (384 a.C.)</b>	<b>Dicearco (350 a.C.)</b>	<b>Euclides (325 a.C.)</b>
Afirmó que la Tierra era esférica y estaba en el centro del universo.	Introdujo las matemáticas en la astronomía, explicando los movimientos planetarios mediante un sistema de esferas.	Amplió el sistema planetario a 56 esferas, sosteniendo que la Tierra era esférica y estacionaria.	Introdujo las coordenadas esféricas	Formuló las leyes del movimiento diurno y definió el círculo.

Contrarrestando las teorías aristotélicas que sostenían que la Tierra era una esfera estacionaria, surgieron las revolucionarias ideas de Aristarco de Samos (310-230 a.C.). Aristarco propuso por

primera vez una hipótesis heliocéntrica del sistema planetario, admitiendo la esfericidad de la Tierra y argumentando que esta orbitaba alrededor del Sol en una órbita circular. Debido a esta audaz proposición, fue llevado a juicio alrededor del año 270 a.C.

Eratóstenes (276 a.C.), matemático destacado, se propuso determinar el tamaño de la Tierra para refutar objeciones previas sobre su esfericidad. Hiparco (190 a.C.), astrónomo eminente, aplicó métodos aritméticos a modelos geométricos en los cuales los ángulos eran un elemento recurrente, inventando la trigonometría en su esfuerzo por vincular estos ángulos con sus observaciones astronómicas. Construyó una tabla de cuerdas, marcando un hito en la trigonometría. Las tablas de cuerdas son un antiguo sistema que relaciona los ángulos con las longitudes de cuerdas correspondientes dentro de un círculo. Funcionaban como una versión temprana de las tablas trigonométricas, es decir, una tabla de senos y cosenos permitiendo calcular los lados y ángulos de triángulos usando la longitud de la cuerda que subtendía un arco dado.

En su obra "Almagesto" del siglo II d.C., Claudio Ptolomeo estableció las bases de la trigonometría y utilizó métodos matemáticos para resolver problemas astronómicos, proponiendo un modelo geocéntrico que dominó el entendimiento del cosmos durante casi mil quinientos años. Paralelamente, en la antigua India, destacados matemáticos como Aryabhata I, en el año 476 d.C., avanzaron en el desarrollo de la trigonometría, especialmente en lo que respecta a la función seno, aplicándola de manera innovadora en el cálculo de la posición de los planetas para la astronomía.

Al-Biruni, un erudito persa del siglo XI, también jugó un papel fundamental en la evolución de la trigonometría. Su meticuloso trabajo en la medición de ángulos y la aplicación de tablas de cuerdas permitió mejoras significativas en la precisión de los cálculos astronómicos, fortaleciendo el puente entre las matemáticas y la observación del cielo.

En la Edad Media, matemáticos árabes continuaron desarrollando la trigonometría, introduciendo nuevas funciones como la tangente y la cotangente, así como perfeccionando el teorema del seno. Al combinar conocimientos de Grecia, India y Arabia, la trigonometría se enriqueció y se utilizó en la astronomía. Durante el Renacimiento, se crearon tablas trigonométricas más precisas y se realizaron predicciones astronómicas basadas en cálculos trigonométricos.

Nicolás Copérnico introdujo el modelo heliocéntrico, desafiando la visión geocéntrica y retomando ideas similares a las propuestas por Aristarco de Samos (310-230 a.C.). Johannes Kepler

desarrolló sus leyes del movimiento planetario basándose en observaciones empíricas y cálculos matemáticos. Galileo Galilei, utilizando su telescopio, hizo descubrimientos astronómicos fundamentales que incluyeron la observación de las lunas de Júpiter, las fases de Venus y las manchas solares. Estos hallazgos desafiaron las creencias tradicionales y marcaron el inicio de una revolución científica centrada en la observación y la evidencia empírica.

Hecho este breve recuento, nos concentramos en un asunto específico: procedimientos para dar cuenta y razón del tamaño de la tierra. En el marco de estos procedimientos, resaltamos los principales objetos y sus relaciones usadas en estos, y los argumentos que sustentan resultados parciales y el producto final.

En relación con la ley de senos y cosenos en la antigua Grecia, la ley de senos y la ley de cosenos tienen sus raíces en la trigonometría desarrollada por los matemáticos y astrónomos griegos. Aunque las formulaciones exactas de estas leyes no estaban completamente establecidas, las ideas fundamentales sobre las relaciones en triángulos y la trigonometría se discutían en el trabajo de Hiparco (190–120 a.C.) y Claudio Ptolomeo (c. 100–170 d.C.). Hiparco fue pionero en el uso de tablas trigonométricas para resolver problemas astronómicos, mientras que Ptolomeo sistematizó el conocimiento trigonométrico en su obra *Almagesto*, estableciendo principios clave que influirían en la trigonometría futura.

Sin embargo, en la India el desarrollo de la trigonometría en la India se destaca con el matemático Brahmagupta (628 d.C.), quien elaboró reglas para resolver triángulos en su obra *Brahmasphutasiddhanta*. Estas reglas incluían aspectos tempranos de lo que hoy conocemos como la ley de senos. Más tarde, Bhaskara II (1114–1185) avanzó significativamente en la trigonometría con su obra *Siddhanta Shiromani*, donde abordó problemas relacionados con la resolución de triángulos y proporcionó una comprensión más profunda de las relaciones trigonométricas. Y en el mundo Árabe los matemáticos árabes también hicieron importantes contribuciones a la trigonometría. Al-Khwarizmi (c. 780–850) y Al-Battani (c. 858–929) jugaron roles cruciales en el desarrollo de esta disciplina. Al-Khwarizmi escribió sobre la resolución de ecuaciones y problemas trigonométricos, mientras que Al-Battani produjo tablas trigonométricas precisas y sistematizó el conocimiento en su obra *Kitab al-Zij*. La tabla de senos de Al-Battani fue particularmente influyente, proporcionando una base sistemática para la trigonometría que sería utilizada y ampliada en siglos posteriores.

### 2.1.1.2 El procedimiento protagonista: método de Eratóstenes

Eratóstenes (276 - 194 a. C.) es una figura histórica que hizo importantes contribuciones a la medición del tamaño de la Tierra en la antigüedad (más precisamente, la medida del perímetro de la circunferencia máxima de la tierra). Abordó el problema de medir la esfera terrestre, pero eficiente en relación con los recursos de su época y eficaz con respecto a lo que conocemos actualmente.

Eratóstenes abordó el desafío observando las diferencias en las sombras proyectadas en dos puntos geográficos distintos. A pesar de las restricciones tecnológicas de su tiempo, consiguió aproximaciones sorprendentemente precisas. A continuación, presentamos en la Tabla 2 los conceptos matemáticos derivados por su método, siguiendo una descripción detallada.

Este método es elegido por su significativa importancia histórica y su ingeniosa aplicación de principios matemáticos y astronómicos que han sido fundamentales en el campo de la geografía. Estos métodos no solo demostraron la esfericidad de la Tierra, sino que también establecieron un precedente para la utilización de la geometría y la trigonometría en la solución de problemas reales. Estos procedimientos, será el horizonte de las secuencias de tareas que se diseñan en este trabajo. El marco de la presentación de estos procedimientos está principalmente basado en los textos de Ballesteros (2019), Guevara y Puig (2017) y Estrabón (1991). Los objetos matemáticos subyacentes se resaltan en cursiva; estos pretenden ser también los estudiados en el marco de las secuencias. Para efectos de este documento, los anexos muestran un sistema axiomático con las definiciones y enunciados de teoremas, propiedades o de objetos que comienzan a emerger en la presentación de estos procedimientos.

Eratóstenes de Cirene, destacado como administrador del Museo de Alejandría y la célebre Biblioteca de Alejandría, fue nombrado en estas funciones por Ptolomeo II. Esta institución había sido fundada alrededor del año 300 a. C. por Ptolomeo I, el primer faraón del período helenístico de Egipto, y su legado fue continuado por su nieto, quien reconoció en Eratóstenes un líder capaz para estas eminentes instituciones del saber.

Durante su gestión, Eratóstenes emprendió la ambiciosa tarea de medir la circunferencia máxima de la Tierra, apoyándose en la cosmología geocéntrica, una teoría bien arraigada desde la antigüedad y formalmente propuesta por Aristóteles (384-322 a. C.). Según Aristóteles, el universo

estaba centrado en la Tierra, un concepto que apoyaba con observaciones empíricas y razonamientos deductivos. Uno de los pilares de su argumentación, tal como lo menciona Ballesteros (2019), era la forma esférica de la Tierra, evidenciada por fenómenos naturales como la curvatura del horizonte y la forma circular de la sombra terrestre durante los eclipses lunares.

Basado en estas observaciones y utilizando métodos geométricos y herramientas de la trigonometría simples pero ingeniosos, Eratóstenes no solo confirmó la redondez de la Tierra, sino que también realizó una de las primeras estimaciones precisas de su tamaño, un logro que marcó un hito en la historia de la ciencia y demostró el poder de la observación y el razonamiento matemático en el entendimiento del mundo natural.

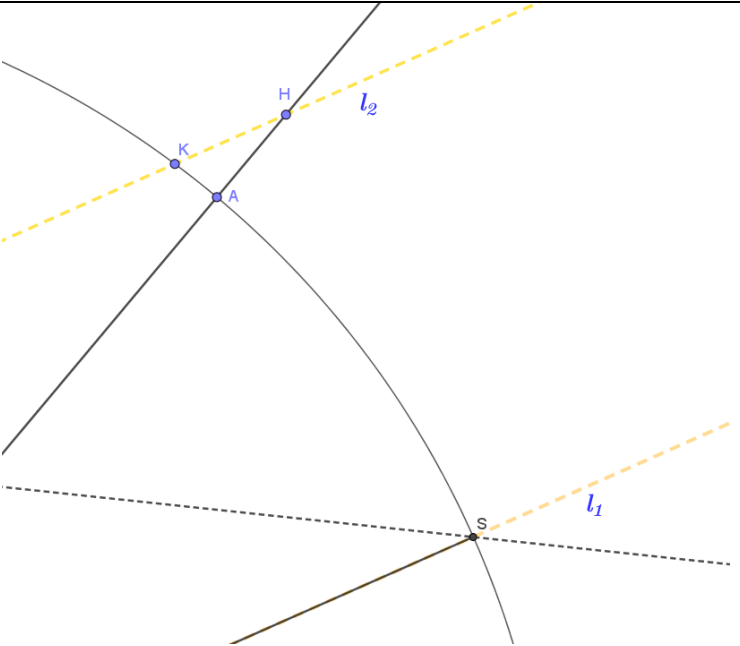
Guevara y Puig (2017) afirman que como Eratóstenes era responsable de la Biblioteca de Alejandría, pudo acceder a muchos documentos de papiros, y con ellos, a información clave para proponer su método. A continuación, presentamos la idea general de este método de Eratóstenes para medir la Tierra. Específicamente, en la Tabla 2 mostramos los pasos del método en la columna izquierda, muestras que en la segunda se exponen los objetos que matematizan el procedimiento, así como y los hechos geométricos y trigonométricos que sustentan tal procedimiento. En ese sentido, en la Tabla 2 exponemos varios tipos de objetos primarios: un *procedimiento* (método de Eratóstenes), *reglas o conceptos* que lo matematizan y *argumentos* que incluyen sustento de cada paso del procedimiento.

Tabla 2. Pasos del método de Eratóstenes

PASOS DEL MÉTODO		MATEMATIZACIÓN
<i>Observación inicial</i>		
Paso 1	<p>Eratóstenes, no fue el primero en suponer que la Tierra era esférica, pero sí utilizó este supuesto para realizar una de las primeras mediciones conocidas de la circunferencia de la Tierra con notable precisión. Toma la idea de Pitágoras que fue uno de los primeros en argumentar a favor de una Tierra esférica (aproximadamente 570-495 a.C.)</p>	<p>Considere <math>\odot T_r</math> como una esfera que representa la Tierra.</p>
Paso 2	<p>Determinó dos ciudades que estuvieran en el mismo meridiano. Escogió, entonces a Siena y Alejandría (ahora sabemos que, en realidad, Siena está a <math>3^\circ</math> al Este del dicho meridiano). Estableció la distancia entre Siena y Alejandría siendo así de 5.000 estadios (en aquella época, era usual usar el estadio como unidad de medida para distancias grandes; un estadio equivale a 184,8 m, aproximadamente, si el estadio es tipo ático-italiano; o un estadio equivale a 157,5 m, aproximadamente, si se usa el estadio egipcio)</p> <p>En realidad, no hay certeza de cómo se estableció esta medida; algunos indican que ese dato ya repobaba en la Biblioteca de Alejandría; otros, que se valió de un soldado (o grupo de soldados) que diera pasos de tamaño uniforme entre ambas ciudades y los contara para luego hacer su conversión a Estadios.</p>	<p>Sean <math>A</math> y <math>S</math> los puntos que representan Alejandría y Siena respectivamente sobre la esfera <math>\odot T_r</math>. Se asume que las ciudades están en el mismo meridiano, esto es en una de las circunferencias máximas de La Tierra (geoméricamente se puede establecer como la intersección del plano que contiene a eje de la tierra y alguno de los puntos <math>A</math> o <math>S</math>). Se establece la distancia entre estos dos puntos de tal manera que estos pertenezcan a la circunferencia que representa la Tierra (<math>A, S \in \odot T_{TS}</math>) (medida del <math>\widehat{AS}</math>). Eratóstenes estableció la distancia entre <math>S</math> y <math>A</math> como 5,000 estadios (Figura 1).</p> <p style="text-align: center;">Figura 1. Construcción geométrica del ME<sup>1</sup></p>

<sup>1</sup> ME: Método de Eratóstenes



	<p>Al momento de realizar la medición, Eratóstenes no solo conocía la teoría de Aristóteles que la Tierra es esférica, sabía que la distancia de la Tierra al Sol era lo suficientemente grande como para considerar que sus rayos son paralelos entre sí.</p>	 <p><i>Figura 3. Construcción geométrica del gnomon del ME</i></p>
<p>Paso 5</p>	<p>Establece una recta determinada entre el centro y Alejandría que intersecan a las rectas paralelas para determinar el ángulo con vértice el centro de la tierra y Alejandría y Siena.</p>	<p>Construye la <math>\overline{AH}</math> para determinar que se intersecan en el punto <math>T</math>. Hecho que se garantiza, como se ilustra antes, por cuanto tales objetos son perpendiculares a la superficie de la tierra (son rectas normales a la circunferencia-meridiano base). Así, los <math>\angle AHK</math> y <math>\angle ATS</math> son congruentes, debido a que son ángulos alternos internos entre rectas paralelas <math>l_1</math> y <math>l_2</math> (T. PAI)<sup>2</sup> (Figuras 4). Así las cosas, si se conoce la medida del ángulo <math>\angle AHK</math>, se conoce entonces la medida del <math>\angle ATS</math> (ángulo central en cuestión).</p>

<sup>2</sup> Todas las definiciones, postulados y teoremas del método de Eratóstenes se encuentran en anexos de este documento



$$m\angle AHK = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AK}{KH}\right)$$

Otra manera puede basarse en el uso la razón trigonométrica del coseno:

$$\cos(m\angle AHK) = \frac{AH}{KH}$$

$$m\angle AHK = \cos^{-1}\left(\frac{AH}{KH}\right)$$

Ahora bien, si no se usa el Teorema de Pitágoras para hallar  $HK$ , la medida del ángulo en cuestión se podría establecer con la razón trigonométrica de tangente:

$$\tan(m\angle AHK) = \frac{AK}{AH}$$

$$m\angle AHK = \tan^{-1}\left(\frac{AK}{AH}\right)$$

2) Mediante la ley de senos, conocidos  $AK$  y  $KH$ :

$$\frac{\text{sen}(m\angle AHK)}{AK} = \frac{\text{sen}(m\angle A)}{KH}$$

Dado que el  $\triangle AHK$  es rectángulo en  $A$ , entonces

$$\frac{\text{sen}(m\angle AHK)}{AK} = \frac{\text{sen}(90^\circ)}{KH}$$

$$\text{sen}(m\angle AHK) = \frac{AK}{KH}$$

$$m\angle AHK = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AK}{KH}\right)$$

Mediante la ley de coseno, conocidas las medidas de los lados del  $\triangle AHK$ :

$$KA^2 = AH^2 + HK^2 - 2(AH)(KH)\cos(m\angle AHK)$$

$$\cos(m\angle AHK) = \frac{KA^2 - (AH^2 + HK^2)}{-2(AH)(KH)}$$

		<p>Lo cual es equivalente a <math>\cos(m\angle AHK) = \frac{AH}{KH}</math> dado que el <math>\triangle AHK</math> es rectángulo en A. Así,</p> $m\angle AHK = \cos^{-1}\left(\frac{AH}{KH}\right)$ <p>3) Mediante el uso de una herramienta que pudiera medir el ángulo <math>\angle AHK</math> directamente, por ejemplo, un astrolabio.</p> <p>Para efectos de este trabajo de grado, nos centramos en herramientas intelectuales (primera y segunda manera) más que la basada en una herramienta concreta (tercera manera). Nótese que las maneras 1 y 2 son equivalentes al final de cuentas, dado que el triángulo protagonista es rectángulo.</p>
<i>Determinación de la longitud terrestre</i>		
Paso 7	<p>Conociendo la distancia aproximada entre Alejandría y Siena (aproximadamente 800 km) y entendiendo que este ángulo de <math>7^{\circ}12''</math> representaba <math>\frac{1}{50}</math> de la circunferencia total de la Tierra, multiplicó esta distancia por 50.</p> <p>La circunferencia de la Tierra calculada por Eratóstenes fue sorprendentemente precisa para su tiempo. Aunque las cifras exactas varían según las fuentes, se cree que estimó la circunferencia de la Tierra en torno a los 40.000 km, muy cerca del valor actual aceptado de aproximadamente 40.075 km para la circunferencia ecuatorial.</p>	<p>Eratóstenes utilizó la relación proporcional que existe en un círculo entre el ángulo central y la longitud de su arco correspondiente para determinar la circunferencia total de la Tierra. Esta relación se expresa con la fórmula:</p> $P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$ <p>Sustituyendo los valores medidos y estimados anteriormente, se concluye que:</p> $P_{\odot T} = 5000 \text{ estadios} \cdot \frac{360^{\circ}}{7^{\circ}12''}$ $P_{\odot T} = 5000 \text{ estadios} \cdot 50$ $P_{\odot T} = 250.000 \text{ estadios}$ <p>Un estadio egipcio equivale a, aproximadamente, 157,5 m. Con lo cual,</p> $P_{\odot T} = 250.000 \text{ estadios} \cdot 157,5 \text{ m}$ $P_{\odot C} = 39.375 \text{ km}$

La Tabla 3 proporciona un resumen organizado y detallado de conceptos o reglas geométricos y trigonométricos del método utilizado por Eratóstenes para medir la longitud de la Tierra. Eratóstenes, a través de su método, se enfoca en elementos de geometría plana y del espacio, destacando conceptos como la relación de paralelismo, el perímetro y el ángulo central en la circunferencia, y el arco subtendido por un ángulo central. Esto culmina en la aplicación de trigonometría para determinar la circunferencia máxima de una esfera.

Tabla 3. Objetos matemáticos del método de Eratóstenes

<b>Principales contenidos matemáticos asociados Método de Eratóstenes</b>	
<b>PASO 1 - 4</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Circunferencias máximas de una esfera (meridianos de La Tierra)</li> <li>- Rectas normales a la superficie de la tierra</li> </ul>
<b>PASO 5</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Relación de paralelismo (T. PAI)</li> <li>- Ángulo central en circunferencia</li> </ul>
<b>PASO 6</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema de Pitágoras</li> <li>- Para establecer la medida de un ángulo:               <ul style="list-style-type: none"> <li>o Relaciones trigonométricas en triángulo rectángulo</li> <li>o Ley de seno y ley de coseno</li> </ul> </li> <li>- Arco subtendido por un ángulo central</li> </ul>
<b>PASO 7</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Relación perímetro de circunferencia con arco subtendido por un ángulo central</li> </ul>

## 2.1.2 Lenguaje

Este trabajo tiene la intención de utilizar diversas formas de representación para facilitar la comprensión de cada procedimiento y el uso de objetos geométricos y trigonométricos en ellos. En las Tablas de la sección anterior, explicitamos representaciones gráficas y simbólicas de los objetos. Por supuesto, el impacto de estas representaciones se podría dar principalmente al comunicar las ideas matemáticas que subyacen a los enunciados de las tareas que se diseñan en este trabajo de grado.

Aunado a lo anterior, en el marco de este estudio, usamos otros tipos de representaciones basados en el uso de material concreto, software de geometría dinámica y aplicativos de internet. Estas herramientas se seleccionan cuidadosamente para enriquecer las tareas que diseñamos en el presente trabajo.

Siguiendo las observaciones de Peralta y Rodríguez (2008), este trabajo también incorpora el lenguaje natural como un medio esencial para el aprendizaje profundo de las matemáticas. A través de este enfoque, se resalta la importancia de comprender tanto los términos matemáticos como los no matemáticos dentro de un problema, subrayando cómo esta comprensión es crucial para que los estudiantes diseñen estrategias de solución y planteen nuevas situaciones problemáticas. Este proceso no solo fomenta el aprendizaje, sino que también promueve el desarrollo del razonamiento y la comunicación matemática. Los estudiantes, al utilizar signos, manipulables, gráficos y escritos, se expresan en un lenguaje matemático que evidencia la relevancia de la trigonometría en la solución de problemas del mundo real, demostrando así la aplicabilidad y la importancia de estas representaciones en el ámbito educativo. Más adelante, precisamos los tipos de representaciones protagonistas en nuestra secuencia. Por supuesto, la segunda columna de la Tabla 2, alude a los principales desde un punto de vista geométrico (diagramático y simbólico).

Más adelante, en las secciones 2.2.2 y 2.2.3 aludimos a representaciones dinámicas y basadas en materiales manipulables que extienden esta descripción.

## 2.2 Marco didáctico

El marco didáctico del presente trabajo se sustenta en dos asuntos. En primer lugar, se consideran las aportaciones de Gómez et al. (2018), quienes ofrecen una conceptualización de tarea y secuencia de tareas. Este enfoque proporciona una estructura fundamental para el diseño de actividades que fomenten la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos. En segundo lugar, se menciona la importancia de la tecnología y de uso de software para la enseñanza de la trigonometría en relación con algunos asuntos de la astronomía.

### 2.2.1 Conceptualización sobre tarea y secuencia de tareas

En el marco de este trabajo, se persigue la propuesta y diseño de secuencias de tareas educativas. Para lograrlo, es esencial establecer una conceptualización de los objetos tarea y secuencia de tareas, así como identificar los elementos cruciales para diseñar una tarea. En este contexto, nos apoyamos en la propuesta de Gómez et al. (2018). Siguiendo la orientación de estos autores, consideramos que los estudiantes realmente internalizan conceptos matemáticos cuando se enfrentan

a tareas complejas que involucran problemas desafiantes. Durante este proceso, aplican sus conocimientos y habilidades existentes, interactúan y colaboran con otros compañeros y el docente, negocian significados, llegan a acuerdos en la resolución de la tarea y, finalmente, comunican y justifican sus soluciones.

Esta concepción del aprendizaje implica una postura clara respecto a la enseñanza. El profesor debe facilitar oportunidades de aprendizaje que permitan a los estudiantes alcanzar las expectativas y superar las limitaciones. Desde esta perspectiva, entendemos *tarea* de aprendizaje como medio por el cual el profesor brinda a los estudiantes las oportunidades para cumplir con las expectativas de aprendizaje establecidas y superar las limitaciones anticipadas.

En este contexto, una secuencia de tareas se define como una estructura organizada de tareas, que puede comprender una o varias tareas interconectadas. Siguiendo la propuesta de Gómez y sus colegas, describimos siete elementos para diseñar una tarea: requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad. A continuación, detallamos cada uno de estos elementos:

*Requisitos:* Los requisitos se adecuan al nivel educativo y comprenden los conocimientos y habilidades previos necesarios para abordar la tarea de manera efectiva y productiva. Estos conocimientos son esenciales, ya que proporcionan la base para la comprensión y el afrontamiento exitoso de la tarea en cuestión.

*Metas:* Las metas reflejan los conocimientos y habilidades que se aspira desarrollar al abordar la tarea. Durante la ejecución de la tarea, es fundamental tener presentes estos objetivos, los cuales deben contribuir al logro de expectativas de aprendizaje y al fortalecimiento de aspectos afectivos, permitiendo superar desafíos y errores que puedan surgir.

*Formulación de la tarea:* La formulación de la tarea corresponde a la instrucción que el profesor brinda a los estudiantes, ya sea de forma oral o escrita, y debe estar contextualizada en un entorno, ya sea matemático u otro. Esta instrucción proporciona a los estudiantes la información inicial necesaria para que puedan generar y presentar una solución final a la tarea planteada.

*Materiales y recursos:* Estos elementos engloban todas las herramientas a disposición de los estudiantes para abordar la tarea. Al diseñar tareas, se requiere un análisis minucioso para determinar la pertinencia y eficiencia de los materiales y recursos, teniendo en cuenta tanto su disponibilidad como su efectividad en contribuir al logro de los objetivos de la tarea.

*Agrupamiento:* Se refiere a la manera en que se organizan los estudiantes para abordar la tarea, ya sea de forma individual, en parejas o en pequeños grupos. Esta organización impacta en la interacción y colaboración entre los estudiantes durante la resolución de la tarea.

*Interacción:* La interacción contempla las formas en que se espera que los estudiantes y el profesor se comuniquen y colaboren al abordar la tarea. La tarea debe fomentar la interacción entre los estudiantes, permitiéndoles exhibir sus habilidades para proponer soluciones, comunicarlas, defenderlas, evaluar las propuestas de sus compañeros y alcanzar una solución consensuada. También implica el rol del profesor, ya sea como guía instructiva o facilitador, adaptándose a las necesidades de los estudiantes.

*Temporalidad:* Hace referencia a la organización temporal de la tarea, incluyendo sus fases, etapas y la asignación de tiempos específicos para su desarrollo. Es esencial describir el orden de cada etapa, especificar los materiales y recursos a utilizar, definir el tipo de agrupamiento e interacción, y asignar el tiempo dedicado a cada parte de la tarea, garantizando una ejecución efectiva y eficiente.

Esta descripción detallada de los elementos del diseño de una tarea contribuye a una comprensión más precisa y completa de cómo abordar de manera efectiva la planificación y ejecución de actividades educativas.

## 2.2.2 La importancia de la tecnología para la enseñanza de la geometría y la trigonometría

Las secuencias de tareas diseñadas para este estudio, destaca la integración de diversas tecnologías digitales como herramientas esenciales para el aprendizaje y la enseñanza. Relevante es el uso de software especializado en el ámbito de la enseñanza de la trigonometría aplicada a la astronomía. La adopción de metodologías que hagan uso de tales recursos se justifica por la capacidad de dichas herramientas para simplificar tareas complejas que son fundamentales para el trabajo presentado.

Según Sánchez y Borja (2022), el software de geometría dinámica constituye una plataforma innovadora que brinda múltiples funcionalidades y un potencial significativo para el desarrollo de habilidades matemáticas en la resolución de problemas geométricos. Este tipo de software fomenta procesos cognitivos y pedagógicos cruciales como la argumentación, la visualización, la exploración, la sistematización y la conjetura, aspectos ampliamente reconocidos y valorados por el MEN (2004).

En este trabajo usamos GeoGebra, un software que incluye herramientas avanzadas esenciales para un aprendizaje efectivo, facilitando el desarrollo del pensamiento geométrico y superando obstáculos comunes en la enseñanza de la matemática, tales como la comprensión abstracta de conceptos geométricos, la visualización de propiedades y relaciones espaciales, y la dificultad para conectar conceptos teóricos con aplicaciones prácticas. Herramientas como el arrastre, que permite modificar la posición de un punto y, por ende, la forma de una figura geométrica, promueven la exploración y el descubrimiento de nuevas propiedades y relaciones geométricas. Además, funciones como el lugar geométrico y el rastro, así como la animación y la ventana de comandos, ofrecen oportunidades sin precedentes para la visualización, la exploración y la conceptualización matemática. En suma, posibilita representaciones “dinámicas” de objetos matemáticos que se son tangibles virtualmente para manipularlos deliberadamente con propósitos específicos.

Las secuencias didácticas propuestas se centran en problemas de construcción, donde el uso del software de geometría dinámica juega un papel crucial en el fomento de prácticas matemáticas significativas. La posibilidad de interactuar directamente con las construcciones geométricas (representaciones de objetos) y de aplicar conocimientos previos en conjunto con las capacidades del software contribuye a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, resultando en aprendizajes robustos y duraderos. En este sentido, el trabajo se alinea con las perspectivas de Molina y Samper (2019), quienes enfatizan la importancia de integrar tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática para enriquecer los procesos de aprendizaje mediante la conjeturación y verificación de hechos.

En la elaboración de nuestras secuencias didácticas, además de incorporar un software de geometría dinámica como GeoGebra, hemos incorporado herramientas digitales como el Global Monitoring Laboratory y Earth System Research Laboratories. Estos aplicativos de internet ofrecen

funcionalidades robustas para simular modelos virtuales del planeta Tierra. A través de estas plataformas, es posible establecer con precisión las distancias y las posiciones exactas de la Tierra respecto al Sol en fechas específicas, así como acceder a modelados avanzados de mapas satelitales. Como lo menciona Paupitz (2022) estos simuladores proporcionan un entorno virtual interactivo que permite la manipulación de objetos del macroespacio como si fueran del micro o mesoespacio. Esta integración tecnológica facilita una comprensión más profunda y dinámica de conceptos geográficos y astronómicos, enriqueciendo significativamente el proceso educativo.

### 2.2.3 La importancia del uso del material concreto para la enseñanza de la trigonometría y la geometría

El uso de materiales concretos en la enseñanza de la trigonometría aplicada a la astronomía es fundamental para facilitar la comprensión de conceptos abstractos y complejos. Los materiales manipulables son recursos didácticos concretos que los estudiantes pueden manejar físicamente para explorar y comprender conceptos matemáticos. Estos materiales incluyen objetos como bloques geométricos, modelos de figuras tridimensionales, y kits de construcción que permiten a los alumnos interactuar directamente con los elementos matemáticos. Al manipular estos materiales, los estudiantes pueden visualizar relaciones espaciales y propiedades geométricas de manera más intuitiva y tangible. Como resalta Flores (2011) sobre la importancia de que los estudiantes "hagan" para aprender, promoviendo el uso de materiales y recursos que faciliten la acción directa sobre los conceptos matemáticos, se enfatiza que el aprendizaje activo y la experimentación práctica son cruciales para la comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Flores argumenta que al involucrar a los estudiantes en actividades prácticas y manipulativas, se fomenta una mejor internalización de las ideas abstractas, se facilita la construcción de conexiones significativas entre conceptos y se desarrolla una mayor capacidad para aplicar los conocimientos en diferentes contextos. De este modo, los materiales y recursos educativos se convierten en herramientas esenciales para transformar el aprendizaje de la matemática en una experiencia más interactiva y significativa. Esta metodología permite a los estudiantes interiorizar y organizar el conocimiento a través de la manipulación física, lo cual es crucial en el aprendizaje de conceptos abstractos como los encontrados en la geometría y trigonometría.

Egues (2020), menciona que el uso de materiales manipulables en la enseñanza de la geometría ofrece múltiples beneficios educativos, incluyendo:

*Visualización y comprensión espacial:* Los materiales manipulables ayudan a los estudiantes a desarrollar habilidades de visualización espacial al permitirles construir y deconstruir figuras geométricas. Este proceso concreto facilita una mejor comprensión de conceptos abstractos, como las propiedades de las formas y las relaciones entre diferentes elementos geométricos.

*Experimentación activa:* Al trabajar con materiales concretos, los estudiantes pueden experimentar activamente con formas y volúmenes, lo cual es esencial para entender conceptos geométricos complejos. Esta experimentación activa promueve un aprendizaje experiencial donde el conocimiento se construye a través de la interacción directa con los objetos.

*Apoyo a la diversidad de estilos de aprendizaje:* Los materiales manipulables son especialmente valiosos para apoyar diversos estilos de aprendizaje. Facilitan el aprendizaje kinestésico y visual, proporcionando medios para que los estudiantes exploren matemáticas de maneras que se alinean mejor con sus preferencias personales de aprendizaje.

*Fomento de la motivación y el interés:* La manipulación de objetos físicos puede aumentar el interés y la motivación de los estudiantes, haciendo que el proceso de aprendizaje sea más atractivo y menos intimidante. Esta interacción puede transformar la percepción de la geometría de una materia abstracta y desafiante a una más accesible y entretenida.

El uso del material concreto-manipulable es especialmente pertinente en la enseñanza de la trigonometría en contextos aplicados como la astronomía, por cuanto promueve, mediante la manipulación de modelos concretos de objetos astronómicos la comprensión de algunos fenómenos o contextos (o métodos para estudiarlos), la identificación de relaciones espaciales que las representaciones planas o virtuales no permiten ver (por ejemplo, la proyección de una sombra según la posición específica de un rayo de luz, o la verificación empírica de procedimientos teóricos). De alguna manera, estos objetos manipulables son representaciones de objetos del macroespacio mediante los cuales se hace más accesible la matematización de situaciones o fenómenos.

## CAPITULO III. METODOLOGÍA

La metodología seguida para este estudio se fundamenta en el Análisis de Instrucción que sugieren Gómez et al. (2018), aunque no se desarrolla en su totalidad. Específicamente, en este trabajo de grado nos concentramos en el diseño (descripción) de tareas (o secuencia de tareas). En tal sentido, las fases del estudio se determinaron con base en estos aspectos, teniendo en cuenta, claro está, que una primera fase consiste en la elaboración del marco referencial. A continuación, describimos las fases llevadas a cabo para el desarrollo del estudio.

*Fase 1. Construcción del marco conceptual.* Hacemos énfasis a cuatro aspectos fundamentales, los cuales especificamos en el Capítulo II, que dan fundamento al desarrollo del diseño de las secuencias de tareas. Para ello, en un primero momento hicimos una indagación que llevó a precisar la situación protagonista del estudio relativa al asunto de la astronomía y su relación con objetos geométricos y trigonométricos cercanos al currículo escolar colombiano; en ese marco, decantamos el problema de hallar el perímetro de La Tierra como situación eje del estudio y el método de Eratóstenes para solventarlo –Sección 2.1–. En un segundo momento, tomando de base la tipificación de objetos matemáticos primarios del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) propuesta por Godino et al. (2007) –Sección 2.1.1–, tuvimos lentes para precisar los tipos de objetos protagonistas de procedimientos para establecer la longitud de la tierra (e.g., situaciones, procedimientos, argumentos y propiedades). En un tercer momento, siguiendo la propuesta de Gómez et al. (2018), no solo determinamos las fases para desarrollar el presente trabajo, sino que nos proveyó una conceptualización sobre los componentes esenciales para el estudio: tarea, secuencia de tareas y los elementos que describen una tarea (Sección 2.2.1). Finalmente, el cuarto momento consistió en una referencia sobre la importancia de la tecnología y el material concreto para la enseñanza de la geometría y la trigonometría; esto nos permitió tener una base con la cual reconocer el potencial del uso de tales recursos para abordar las situaciones problemas (Sección 2.2.2 y Sección 2.2.3). Vale indicar que dicho potencial se explicita durante la descripción de las secuencias de tareas diseñadas.

*Fase 2. Diseño de secuencias de tareas.* Atendiendo a los antecedentes descritos en la Sección 1.1.2 del Capítulo 1 (planteamiento del problema), determinamos tres grandes secuencias, cada una con un propósito diferente en relación con el método de Eratóstenes: la primera, procura que los estudiantes conozcan los pasos del procedimiento haciendo una modelación del mismo con material concreto; la idea es que los estudiantes verifiquen con objetos del microespacio (una bola de

icopor, palillos, linterna, etc.) que el método sí lleva a establecer una aproximación de la medida de un meridiano de una esfera dada. La segunda, pretende que los estudiantes justifiquen los pasos del procedimiento a partir de conocer cómo se usan ciertos elementos de la geometría y la trigonometría para ello, en algún momento, hay sugerencias para que los estudiantes conjeturen ciertos hechos o especulen sobre propiedades de la trigonometría que pudo haber usado Eratóstenes para establecer la medida de un ángulo clave. La tercera, pretende que los estudiantes desarrollen los pasos del procedimiento usando herramientas digitales que permiten calcular, en tiempo real, el perímetro de la tierra usando aplicaciones como Global Monitoring Laboratory y Earth System Research Laboratories.. En la tabla 4, resumimos el asunto central de cada secuencia.

Precisados los asuntos centrales relativos a las secuencias, nos basamos en los siete elementos sugeridos por Gómez y sus colegas (véase Sección 2.2.1, Capítulo II) para describir a cada una. Estos elementos incluyen los objetivos de aprendizaje, la estructura didáctica, las estrategias de enseñanza, los recursos utilizados, las actividades propuestas, los criterios de evaluación y los aspectos contextuales que influyen en la implementación de la secuencia. Al considerar cada uno de estos componentes, buscamos proporcionar una visión integral de cómo las secuencias educativas están diseñadas y cómo contribuyen a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este enfoque nos permite identificar fortalezas y áreas de mejora en el diseño de las secuencias y su alineación con los objetivos educativos establecidos.

Concretamente, cada elemento se transformó en una subfase del estudio, las cuales son: formulación de la tarea, requisitos necesarios, metas a alcanzar, los materiales y recursos utilizados, una sugerencia de configuración del agrupamiento, sugerencias de gestión por parte del profesor y algunos aspectos de índole temporal. Algunos de tales aspectos se desarrollaron de forma general para todas las secuencias o específicamente para cada secuencia en particular.

En cuanto a las subfases relativas a los requisitos y las metas, adaptamos como herramienta analítica la metodología del Enfoque Onto-Semiótico respecto a los objetos matemáticos primarios, propuesta por Godino y colegas en 2007 (ver la Sección 2.1, Capítulo II). Este marco teórico facilitó la identificación de los objetos que son esenciales para abordar las tareas y los objetivos específicos de cada secuencia de tareas. La Tabla 4 presenta un resumen de los objetos geométricos claves asociados a cada secuencia.

Tabla 4. Contenido de las secuencias

Tipo de problema	Tema sobre el que versa la secuencia	Objetos geométricos claves
Situación que implica el uso de elementos de la geometría y la trigonometría para calcular grandes distancias en la Tierra, específicamente calcular la circunferencia máxima de este planeta.	<i>Secuencia 1.</i> Esta secuencia se enfoca en verificar el método de Eratóstenes para determinar medidas de interés utilizando una sombra proyectada por un gnomon colocado en una posición adecuada. El proceso incluye la modelación de la situación matemática en la que el triángulo desempeña un papel crucial para establecer la medida deseada.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Circunferencias máximas de una esfera (meridianos de La Tierra)</li> <li>- Rectas normales a la superficie de la tierra</li> <li>- Relación de paralelismo (T. PAI)</li> <li>- Ángulo central en circunferencia</li> <li>- Teorema de Pitágoras</li> <li>- Relaciones trigonométricas en triángulo rectángulo (para establecer la medida de un ángulo)</li> <li>- Ley de seno y ley de coseno</li> <li>- Arco subtendido por un ángulo central</li> <li>- Relación perímetro de circunferencia con arco subtendido por un ángulo central.</li> </ul>
	<i>Secuencia 2.</i> Estudio del método de Eratóstenes: justificar teóricamente los pasos del procedimiento usando elementos de la geometría y la trigonometría escolar (teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, ley de senos y ley de cosenos).	
	<i>Secuencia 3.</i> Simulación del método de Eratóstenes usando las aplicaciones digitales para calcular, en tiempo real, el perímetro de la tierra, sin importa el lugar de la Tierra en el uno se encuentre.	

Para la subfase que concierne a la descripción de los materiales y recursos, consideramos los aspectos enumerados por Gómez et al. (2018), en el uso del software y material manipulable:

*Acceso:* ¿Están disponibles los recursos para profesores y estudiantes dentro de la institución educativa?, ¿funcionan adecuadamente?

*Capacitación del profesor:* ¿Está el profesor capacitado para utilizar estos recursos?, y si no, ¿merece la pena la capacitación?

*Preparación de los estudiantes:* ¿Están los estudiantes listos para emplear estos recursos?, y si no, ¿sería beneficioso prepararlos?

*Tiempo adicional:* ¿Cuánto tiempo extra se requiere para usar estos recursos en la tarea?, ¿compensa el tiempo invertido?

*Objetivos:* ¿Cómo y en qué medida contribuyen estos recursos al cumplimiento de los objetivos y expectativas de la tarea?, ¿son esenciales?

*Demandas cognitivas:* ¿Facilita el material la conexión entre el conocimiento previo del estudiante y el conocimiento que se busca desarrollar?

*Desafío:* ¿Añade el material o recurso un nivel de desafío para los estudiantes?

*Errores:* ¿Ayuda el recurso a que los estudiantes identifiquen y superen sus errores?

*Investigación:* ¿Promueve el recurso el análisis de información, formulación de preguntas, búsqueda de estrategias, descubrimiento de propiedades y relaciones y el análisis de resultados?

*Interacción:* ¿Fomenta el recurso la interacción entre estudiantes y profesores?

*Relevancia e interés:* ¿Incrementa el recurso el interés y la curiosidad de los estudiantes en la resolución de la tarea?

En la subfase relacionada con la descripción de la interacción, detallamos las soluciones deseables para cada tarea de la secuencia y actividades potenciales que los estudiantes podrían realizar. Además, se expusieron los desafíos que podrían enfrentar los estudiantes al abordar las tareas y cómo el profesor puede ayudar a superarlos.

*Fase 3. Escritura del reporte del diseño de las secuencias de las tareas.* Si bien, los elementos propuestos por Gómez y sus colegas nos permitieron hacer el diseño de las secuencias, pretendimos dejar un reporte de este diseño para que un profesor interesado en aplicar las secuencias tenga suficientes insumos para su implementación. En el Capítulo IV presentamos el producto del desarrollo de las subfases citadas antes. Esto es, hacemos una descripción de cada elemento sugerido por los autores referenciados para cada secuencia.

La manera en que presentamos el reporte es la siguiente: presentamos los elementos de las secuencias que puede ser comunes a las tres secuencias. Luego, los elementos de las secuencias específicas a cada una y mediante tablas, presentamos los enunciados de cada tarea de cada secuencia. En la misma tabla, ilustramos soluciones deseables de los estudiantes, destacando posibles errores y dificultades y sugerencias de gestión.

*Fase 4. Síntesis de resultados.* En el capítulo V, se formularon las conclusiones referidas a la experiencia obtenida al desarrollar este trabajo, teniendo en cuenta varios aspectos: primero, se realiza un informe final en el que comentamos sobre el nivel de logro de los objetivos del documento, los

aprendizajes que me dejó este trabajo como futura profesora de matemáticas y, por último, comentamos sobre algunas limitaciones que se presentaron al llevar a cabo este trabajo y sus horizontes.

## CAPITULO IV. SECUENCIAS DE TAREAS

Este capítulo detalla las Fases 2 y 3, tal como se especificaron en la metodología del Capítulo III. Se presentan las secuencias de tareas diseñadas para abordar los tres tipos de problemas previamente mencionados. Cada secuencia se describe en términos de sus subfases o componentes, ya sea de forma general o específica.

En las secciones siguientes, presentamos un análisis exhaustivo de tres secuencias clave. La primera secuencia se dedica a la modelación con material concreto en un entorno controlado, con el fin de verificar el método de Eratóstenes para calcular la longitud de la Tierra. La segunda secuencia se enfoca en sustentar y justificar el método a través de un enfoque teórico, utilizando geometría y trigonometría, con el apoyo de GeoGebra. Por último, la tercera secuencia emplea software de simulación para reproducir el método de Eratóstenes, facilitando su generalización y aplicación en distintos contextos.

La presentación de la información sobre las secuencias se organiza de la siguiente manera: primero, se ofrece una descripción general de cada secuencia. A continuación, se presenta un cuadro con las tareas de cada secuencia, donde se muestra lo que se espera que los estudiantes realicen y la posible interacción del profesor. Finalmente, se abordan las posibles respuestas y dificultades que los estudiantes puedan encontrar, junto con la orientación correspondiente del profesor.

### 4.1 Descripción de las secuencias de tareas

Esta sección desarrolla la Fase 3 de la metodología, presentando la descripción de cada subfase para cada una de las secuencias de tareas diseñadas. Inicialmente, se proporciona una descripción de los elementos comunes que componen las tareas de las secuencias (siguiendo la propuesta de Gómez y sus colegas). Posteriormente, se realiza una descripción específica, considerando los aspectos particulares de los elementos presentes en cada tarea individual de la secuencia.

#### 4.1.1 Descripción de elementos comunes de las secuencias

*Descripción general de los requisitos:* para el desarrollo de cada secuencia, consideramos que los estudiantes deben contar con los siguientes objetos matemáticos primarios:

- *Lenguaje:* Es esencial que los estudiantes posean un conocimiento previo sobre la notación específica de la geometría y de la trigonometría, así como estar familiarizados con las representaciones gráficas objetos geométricos que se explorarán en cada secuencia. La Tabla 2 indica aquellas representaciones y notaciones consideradas como requisitos.
- *Conceptos y proposiciones:* Los estudiantes debe tener un conocimiento base sobre el objeto circunferencia de orden conceptual (su definición, su perímetro, radios, tangente a una circunferencia, circunferencias máximas de una esfera -medianos de La Tierra-, arco de circunferencia, ángulo central de circunferencia); así mismo, conocer los atributos de un triángulo rectángulo, el T. Pitágoras (aproximación por longitud de lados, no por áreas de superficies), de la noción de paralelismo de rectas, y la relación entre el perímetro de una circunferencia con un arco subtendido por un ángulo central de la circunferencia ( $P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$ ). Ahora bien, otras propiedades más específicas pueden ser requisito o expectativas de aprendizaje dependiendo de la intención del profesor. Por ejemplo, si lo que se pretende es que las secuencias permitan la aplicación de los hechos razones trigonométricas, la ley de senos, la ley de cosenos, el teorema 180, el T. PAI, para establecer la medida de un ángulo clave en el procedimiento (ver paso 6 de la Tabla 2) entonces estos temas se consideran requisitos. Por otro lado, si lo que se quiere es que estos hechos sean parte de las expectativas de aprendizaje (generar una necesidad de contar con ellos para usarlos), estos no serán requisitos; más bien, objetos que emergen del estudio del procedimiento. En este caso, el profesor debe pensar en cómo gestionar la introducción de estos hechos cuando se aborde el estudio del procedimiento (nuestra secuencia 2 da algunas ideas para hacerlo).
- *Procedimientos.* Los estudiantes deben estar capacitados en diversos procedimientos matemáticos para abordar problemas y aplicaciones de manera efectiva. Esto incluye la habilidad para realizar inferencias geométricas y trigonométricas, así como la inferencia en la aplicación del teorema de Pitágoras. También es fundamental que sepan despejar ecuaciones algebraicas y simplificar expresiones trigonométricas con cierta fluidez. Además, deben familiarizarse con métodos de construcción y exploración en programas especializados. Por ejemplo, debe conocer herramientas básicas de GeoGebra, que incluyen funciones como el arrastre, la medida de ángulos, trazo de paralelas. Estas habilidades permiten a los estudiantes manipular objetos matemáticos de manera interactiva, facilitando una visualización de ciertas propiedades para conjeturar hechos. Así mismo, se espera que los estudiantes hayan tenido contacto con Google

Earth y conozcan alguna manera para establecer distancia entre dos posiciones deliberadamente escogidas. Dado el caso en el que se conciba que las razones trigonométricas y las leyes de coseno y seno sean prerequisites, sería deseable que los estudiantes conozcan maneras de usarlos para establecer medidas de ángulos a partir de ser proporcionados ciertos datos. Si no es así, sería deseable que los estudiantes conozcan propiedades de la semejanza de triángulos para que puedan comprender de mejor manera sustentos de la validez de tales hechos; por lo menos, tengan elementos conceptuales que les permita interpretar los enunciados de cada hecho geométrico, y dar cuenta y razón de la relación entre estos hechos (e.g., que el T. Pitágoras es un caso particular de la Ley de Cosenos).

- *Argumentos:* Es deseable que los estudiantes tengan habilidades en usar hechos para sustentar resultados. En particular, sería deseable que los estudiantes puedan decantar los datos que se deben tener para poder usar las definiciones de razones trigonométricas y las leyes de coseno y seno para poder inferir la medida de un ángulo determinado. En suma, sería deseable que los estudiantes reconozcan en qué casos pueden usar como garantía tales hechos para poder sustentar resultados solicitados.

Con lo dicho previamente, consideramos que la secuencia se puede aplicar en estudiantes de grado noveno o décimo en Colombia, niveles en los que se presume que se cuenta con estos prerequisites y en los que aspectos de la trigonometría se introducen o se conocen.

*Descripción general de las metas:* Presentamos las metas en relación con cada una de las secuencias, procurando resaltar (en letra cursiva) los tipos de objetos primarios involucrados en ellas.

**En relación con la secuencia 1.** Esta tiene el propósito de que los estudiantes conozcan el *procedimiento* de Eratóstenes para determinar la medida del perímetro de una circunferencia máxima de La Tierra (a lo que usualmente se refiere como longitud de la tierra o perímetro de La Tierra); en ese marco, *procedimientos* más específicos que se suscitan son: medir ángulos con un transportador, medir arcos de circunferencia con una cinta métrica, usar la expresión para calcular  $P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$  el perímetro de la circunferencia máxima de una esfera. O reconocer la relación proporcional que existe en un círculo entre el ángulo central y la longitud de su arco correspondiente. Así mismo, que *verifique de manera empírica*, que este procedimiento efectivamente permite establecer el “perímetro de una esfera” sin medirlo directamente. Para ello, se propone el uso de material concreto del microespacio del estudiante (en la sección 4.2 se presenta en detalle el material concreto) para

modelar la situación. Se busca que los estudiantes coordinen adecuadamente *registros de representación* (basado en el material concreto y en el lenguaje natural) que permita comprender el sentido del procedimiento en estudio. En relación con los *conceptos*, se busca que identifiquen la relación “meridianos de la tierra” con “circunferencias máximas de una circunferencia que se intersecan en dos puntos (que serían matematizan los polos de La Tierra)”. Así mismo, que se percaten que es posible asumir (matematizar) que, al estar tan lejos El Sol de La Tierra, los rayos del primero se pueden suponer paralelos entre sí al “tocar” la superficie de la segunda; de igual manera, que es posible suponer que uno de tales rayos es perpendicular a la superficie de La Tierra en algún lugar que esta en una época del año a una hora específica (e.g., trópico de Cáncer en el solsticio de verano del hemisferio norte –21 de junio al medio día–).

**En relación con la secuencia 2.** Esta tiene el propósito de que los estudiantes hagan un *procedimiento de construcción* en GeoGebra que lleve a una *representación gráfica dinámica* útil para matematizar el *procedimiento* de Eratóstenes. Así mismo, en ese marco, la secuencia tiene el propósito de *argumentar teóricamente* (no verificar empíricamente) que el método es eficaz. En ese marco se podría presentar dos expectativas diferentes de orden conceptual, dependiendo de las pretensiones del profesor (tal como se dijo anteriormente): (i) usar *conceptos* ya conocidos tanto de la trigonometría (leyes de seno y coseno, o razones trigonométricas) como de la geometría plana (T. PAI, T. Pitágoras) para establecer la medida de un ángulo clave en el procedimiento –ver pasos 5 y 6 de la Tabla 2–, o (ii) introducir esos *hechos* con miras a determinar su pertinencia para determinar la medida de tal ángulo. En cualquiera de las dos opciones se busca que los estudiantes expliciten, dependiendo del hecho de la trigonometría que se escoja, los datos de un triángulo que se debería tener para poder calcular la medida del ángulo en cuestión.

De igual manera que en la secuencia 1, se busca que los estudiantes coordinen adecuadamente *registros de representación*, esta vez basados en las representaciones dinámicas de GeoGebra, lenguaje natural y representaciones simbólicas (ver paso 6 de la Tabla 2) para llevar a cabo y presentar los argumentos respectivos.

**En relación con la secuencia 3.** Esta tiene el propósito de que los estudiantes, utilizando aplicativos digitales que representan La Tierra, desarrollen el *procedimiento* de Eratóstenes para establecer la medida del perímetro de este planeta en tiempo real y con datos considerados como “exactos”.

Mediante esta secuencia, a diferencia de las anteriores, sí se pueden tener datos “reales” para establecer una medida aproximada “real” para el perímetro de La Tierra. *Conceptualmente* hablando, no hay grandes expectativas: solo que es posible llevar a cabo el procedimiento en cualquier día del año, sin esperar al medio día del solsticio de verano; esto, a partir de un ajuste de horario dado por los datos de una Tabla que se construye a través de la ecuación del tiempo. No se pretende que los estudiantes sepan el intrínquilis de esta ecuación, solo que existe este objeto y que su estudio permite construir la tabla que se utiliza en la secuencia 3. En suma, es deseable que, para este momento, los estudiantes ya tengan apropiado el procedimiento de forma tal que lo puedan replicar usando material concreto (empleado para establecer la medida del ángulo clave; –el material concreto se especifica en la sección 4.4–) y datos “reales” dados por los aplicativos digitales.

*Descripción general de la formulación de las tareas:* Los enunciados de las tareas contienen instrucciones genéricas aplicables a todas ellas. Estas son: (i) Planteamiento de la situación problemática; (ii) Solicitud de descripción del procedimiento de construcción; (iii) Solicitud de descripción del proceso exploratorio (qué se mide, qué se arrastra, qué construcción auxiliar se hace y para qué se llevan a cabo tales acciones); (iv) Solicitud de la formulación de las soluciones (conjeturas) y (v) Eventualmente, una validación de estas. Estas instrucciones se adaptan para cada secuencia de tareas, y dichas adaptaciones se presentan en la descripción de cada secuencia. A lo largo de cada secuencia, el estudiante realiza tareas propuestas que le permiten construir gradualmente el método de Eratóstenes para medir la Tierra.

*Descripción general del agrupamiento e interacción:* Todas las secuencias están diseñadas para que los estudiantes trabajen en grupos de tres, fomentando la interacción entre ellos y con el profesor, lo que facilita la negociación y presentación de las soluciones a toda la clase. La interacción se estructura de la siguiente manera: primero, los estudiantes abordan la tarea de manera colaborativa, proponiendo y formulando una solución. El profesor actúa como orientador, circulando entre los grupos para observar los avances y, ocasionalmente, interviene para aclarar dudas o guiar a los estudiantes hacia la solución correcta.

Una vez que cada grupo ha concretado y formulado su propuesta de solución, se procede a la socialización. En esta etapa, se genera una conversación instruccional dirigida por el profesor, quien guía a la comunidad en la construcción de significados compartidos y la organización colectiva de

ideas. El profesor también actúa como moderador, gestionando las propuestas de los estudiantes, controlando el uso adecuado de argumentos y formalizando el conocimiento.

En la descripción de cada secuencia, precisamos algunas sugerencias de gestión por parte del profesor que podría tomar en cuenta dependiendo de ciertas acciones de los estudiantes al responder a las tareas.

*Descripción general de la temporalidad:* Para el desarrollo de las secuencias de tareas, y basándose en la descripción general de la interacción mencionada anteriormente, es fundamental asignar tiempos específicos a cada una de las siguientes tres etapas: (i) actividad autónoma de los grupos de estudiantes para abordar cada secuencia, (ii) socialización o puesta en común de las distintas propuestas frente al grupo completo, y (iii) validación o institucionalización de la solución de las tareas y de los contenidos geométricos-trigonométricos involucrados. Generalmente, cada una de estas fases requiere al menos 30 minutos; de manera más concreta, sugerimos que, para cada secuencia, lo relativo a la actividad autónoma de los grupos sea de 60 minutos, mientras que lo correspondiente a la puesta en común e institucionalización sea de 45 minutos. Si las expectativas de aprendizaje apuntan no solo a la aplicación de los hechos de la trigonometría, sino a su introducción, en las tres etapas podría tomar más tiempo (el que implique conocer tales hechos; en la sección 4.3, relativa a la secuencia 2, damos ideas de cómo hacerlo).

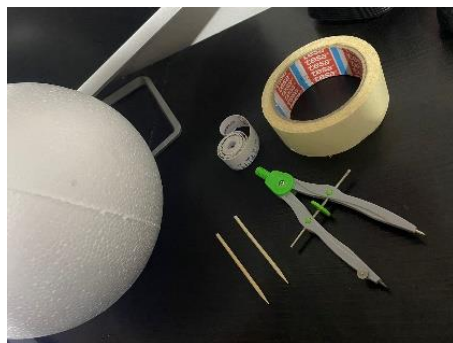
## 4.2 Primera secuencia: Modelación con material concreto en el microespacio del método de Eratóstenes

En esta sección, se presenta una secuencia de tareas mediante la cual se busca modelar el método de Eratóstenes usando material concreto del microespacio. Este enfoque busca que los estudiantes se acerquen a dicho procedimiento a partir de materiales tangibles y accesibles que les permitiría verificar su eficacia. La secuencia de tareas está diseñada para guiar a los estudiantes en la construcción de modelos concretos que ilustran la técnica de Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra, promoviendo así una mayor retención de los aspectos centrales y de algunos objetos geométricos involucrados. En lo que sigue, precisamos los materiales y recursos; luego, mediante la Tabla 5, presentamos los enunciados de las tareas, respuestas deseables (lo ideal) o esperadas (lo que podrían hacer) de los estudiantes y las respectivas sugerencias de gestión con relación a tales posibles respuestas.

*Descripción de los materiales y recursos:* Cada grupo de trabajo debería contar con:

- **Una bola de icopor de 10 cm de radio:** Este material permite a los estudiantes visualizar y manipular conceptos geométricos tridimensionales, facilitando la comprensión de esferas y circunferencias máximas.
- **Dos pinchos:** Los pinchos se utilizan para marcar y medir puntos específicos en la bola de icopor, ayudando en la identificación de relaciones geométricas.
- **Cinta adhesiva:** Es útil para fijar la bola de icopor, asegurando precisión en las mediciones y construcciones geométricas.
- **Un metro:** El metro es esencial para medir distancias y longitudes con exactitud, proporcionando datos concretos que respaldan la comprensión de las relaciones geométricas.
- **Un compás:** Permite a los estudiantes trazar circunferencias y arcos, facilitando la exploración de propiedades geométricas en un contexto tridimensional.
- **Un transportador:** Es necesario para medir y construir ángulos, tanto en planos bidimensionales como tridimensionales, asegurando que los estudiantes comprendan las relaciones angulares.

Estos materiales como se muestra en la Figura 5, son fundamentales para la secuencia de tareas, ya que proporcionan una experiencia práctica y tangible. Permiten a los estudiantes interactuar directamente con los conceptos geométricos y trigonométricos, lo que fortalece su comprensión y facilita el aprendizaje activo y participativo.



*Figura 5. Materiales concretos*

Tabla 5. Primera secuencia de tareas

<p><b>Modelación del método con materiales concretos</b></p>
<p><b>EXPECTATIVA DE APENDIZAJE:</b>          Conocer el procedimiento llevado a cabo por Eratóstenes para calcular el perímetro de La Tierra.          Verificar la eficacia del procedimiento a partir de hacer una modelación de este con material concreto del microespacio.</p>
<p><b>SECUENCIA DE TAREA: ¿CÓMO MEDIR EL PRÍMETRO DE LA TIERRA? LA RESPUESTA DE ERATOSTES</b></p> <p>Eratóstenes de Cirene (Cirene, 276 a. C.-Alejandría, 194 a. C.) fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego de origen cirenaico. Concibió por primera vez la geografía como una disciplina sistemática, desarrollando una terminología que todavía se usa en la actualidad. Es conocido, principalmente, por ser la primera persona en calcular la circunferencia de la Tierra, esto es, el perímetro de una circunferencia máxima de la Tierra (si esta se considera idealmente como una esfera). El procedimiento desarrollado por Eratóstenes, en resumen, se puede describir como sigue:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se establece la distancia (esférica) entre los puntos <b>A</b> y <b>S</b> (medida del <math>\widehat{AS}</math>), <b>A</b> y <b>S</b> puntos de una circunferencia máxima de la esfera de la Tierra (un meridiano).</li> <li>2. Se establece la medida del <math>\angle ATS</math>, donde <b>T</b> es centro de la circunferencia.</li> <li>3. Se sustituye <math>m\widehat{AS}</math> y <math>m\angle ATS</math> en la expresión <math>P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}</math> para determinar el <math>P_{\odot T}</math>, esto es, el perímetro de la circunferencia.</li> </ol> <p>Con esto en mente, Eratóstenes, necesitó establecer dos puntos sobre una circunferencia máxima de la tierra (para este caso, sobre un mismo meridiano) y, a partir de ellos, establecer <math>m\widehat{AS}</math> y <math>m\angle ATS</math>, tal como se ilustra en la Figura 6. Pero ¿cuáles puntos sobre la tierra escogió? ¿Cómo estableció <math>m\widehat{AS}</math> y <math>m\angle ATS</math>? Los “puntos” escogidos fueron dos ciudades, Siena (punto <b>S</b>) –actualmente Asuán, Egipto– y Alejandría, Egipto (punto <b>A</b>), las cuales se consideraban ubicadas en un mismo meridiano. La historia cuenta que Eratóstenes determinó que <math>m\widehat{AS}</math> era 5000 estadios (en aquella época, era usual usar el estadio como unidad de medida para distancias grandes; un estadio equivale a 184,8 m, aproximadamente, si el estadio es tipo ático-italiano; o un estadio equivale a 157,5 m si se usa el estadio egipcio); no hay certeza de cómo se estableció la <math>m\widehat{AS}</math>; algunos indican que ese dato ya reposaba en la biblioteca de Alejandría; otros, que se valió de un regimiento de soldados que diera pasos de tamaño uniforme entre ambas ciudades y los contara –para luego hacer su conversión a estadios–.</p> <p>Para calcular la <math>m\angle ATS</math>, usó un procedimiento muy ingenioso.</p> <p>Las tareas de esta secuencia permiten conocer ese procedimiento. Para ello, vamos a replicar su método usando una esfera de icopor. Si bien, es posible medir directamente el perímetro de esa esfera de icopor, lo que se pretende con estas tareas es verificar que el método de Eratóstenes es eficaz para calcular (indirectamente) ese perímetro.</p>
<p><b>Tarea 1: Preparativos para la medición del ángulo central de la esfera de La Tierra que contiene las dos ciudades, Siena y Alejandría.</b></p>

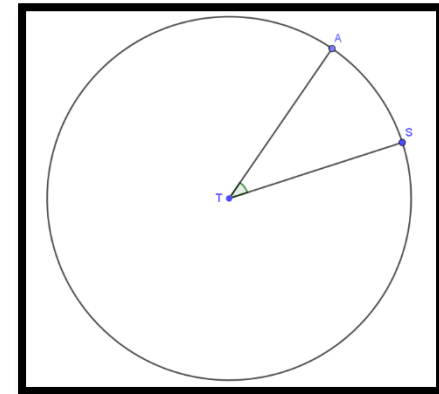


Figura 6. Representación de apoyo para hallar el perímetro de una circunferencia

Eratóstenes se percató que, durante un momento del año (solsticio de verano del hemisferio norte –entre 20 y 21 de junio–), en la ciudad Siena (**S**) los rayos del Sol no generaban sombra para los objetos (esto ocurre para todo lugar que se encuentra en el paralelo denominado trópico de cáncer), lo que implica que se deja ver el fondo de un pozo con agua; con esta evidencia, Eratóstenes supuso entonces que los rayos del Sol en ese lugar cruzan el centro de La Tierra (punto **T**), es decir, los rayos solares son perpendiculares con la superficie de la Tierra. Además, que, para ese mismo instante, en la ciudad de Alejandría (punto **A**) un gnomon (una estaca perpendicular a la superficie de la tierra) sí generaba una sombra (sea este el  $\overline{AR}$ ). Con estas condiciones, pudo determinar unos datos claves para calcular la  $m\angle ATS$ . Mediante las siguientes tareas, vamos a simular la situación con el material solicitado, además, a replicar el método llevado a cabo por Eratóstenes usando ese material:

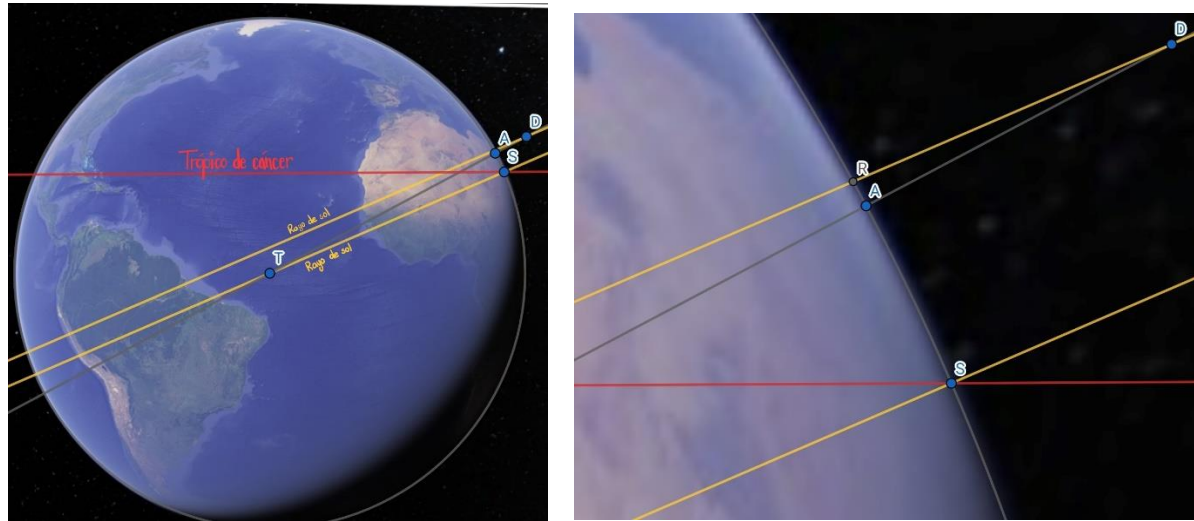

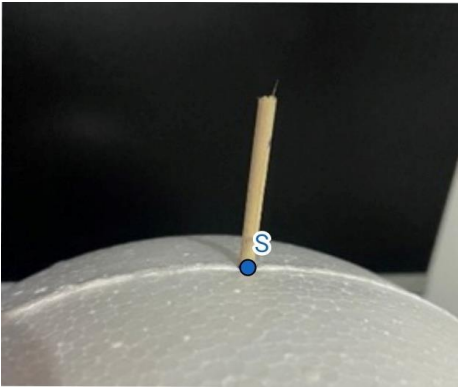


Figura 7. Método de Eratóstenes

ENUNCIADO DE TAREAS	RESPUESTAS DESEABLES O ESPERADAS DE LOS ESTUDIANTES	SUGERENCIAS DE GESTIÓN DEL PROFESOR
<p><b>Paso 1.</b> Identificación de la circunferencia máxima cuyo perímetro vamos a calcular.</p> <p>Para comenzar el proceso, es fundamental identificar el trazo particular de cada bola de icopor de radio 10 cm. Utiliza como referencia el diseño de la esfera de icopor, observando detenidamente su estructura. Encontrarás un relieve que divide la esfera justo por la mitad (este hará las veces del meridiano de La Tierra</p>	<p>Los estudiantes ubican la bola de icopor en la superficie de trabajo, alineándola con la línea de relieve y asegurándola con cinta adhesiva para que no mueva.</p>	<p>Para asegurar que los estudiantes realicen correctamente el paso " Identificación de la circunferencia máxima cuyo perímetro vamos a calcular" y obtener resultados óptimos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión para no cometer los errores enumerados en la columna dos:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <i>Demostración inicial detallada.</i> Realice una demostración detallada del proceso de fijación de la bola de icopor, mostrando claramente cómo identificar la línea de relieve y cómo aplicar la cinta</li> </ol>

<p>donde estarían ubicadas las ciudades Alejandría y Siena). Antes de proceder, utiliza cinta adhesiva para fijar la bola de icopor a la superficie de trabajo, asegurándote de que no se mueva durante el siguiente paso.</p>	<div data-bbox="751 190 1209 649" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="751 651 1150 678"><i>Figura 8. Ubicación de la bola de icopor</i></p> <p data-bbox="709 711 1266 768">Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:</p> <ol data-bbox="762 797 1266 1008" style="list-style-type: none"> <li>1. Bola de icopor incorrectamente fijada</li> <li>2. Dificultad para identificar la línea de relieve</li> <li>3. Uso excesivo de cinta adhesiva</li> <li>4. Bola de icopor mal alineada con respecto a la superficie de trabajo</li> <li>5. Daño a la bola de icopor durante la fijación</li> </ol>	<p>adhesiva correctamente. Una demostración práctica ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender mejor los pasos necesarios.</p> <ol data-bbox="1297 285 1864 919" style="list-style-type: none"> <li>2. <i>Proveer materiales de referencia.</i> Entregue a los estudiantes materiales de referencia, como imágenes o diagramas que muestren claramente la línea de relieve y la correcta fijación de la bola de icopor. Los materiales visuales pueden servir como guía durante el proceso y reducir errores.</li> <li>3. <i>Monitoreo y Asistencia Activa.</i> Mientras los estudiantes trabajan, circule por el aula observando y ofreciendo asistencia cuando sea necesario. Corrija de inmediato cualquier error en la fijación o alineación de la bola de icopor. La intervención oportuna puede prevenir problemas mayores y asegurar que los estudiantes avancen correctamente.</li> <li>4. <i>Feedback Inmediato y Constructivo.</i> Proporcione retroalimentación inmediata y constructiva a los estudiantes, elogiando los aspectos que han realizado correctamente y sugiriendo mejoras donde sea necesario. El feedback inmediato refuerza el aprendizaje y permite a los estudiantes corregir errores al instante.</li> </ol>
<p><b>Paso 2.</b> Simulación de gnomon y pozo de agua: Marcación con palillos de madera</p> <p>1. Toma los palillos; cada uno debe tener una medida de longitud de 6 cm; estos deben ser previamente marcados con un esfero o lápiz a 3 cm (justo en la mitad).</p>	<p>Los estudiantes marcan cada palillo a 3 cm desde uno de los extremos.</p>	<p>Los estudiantes pueden tener dificultades al usar el metro o la regla para marcar los palillos. Verificar que los estudiantes realicen las marcas a la mitad (3 cm) de manera precisa. Mostrar ejemplos claros y corregir marcas incorrectas.</p> <p>Para abordar los posibles errores de los estudiantes durante el paso de "Marcación de palillos" enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p>

	 <p><i>Figura 9. Marcación de palillos</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 2 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Marcación desigual o incorrecta</li> <li>2. Uso de herramientas de marcación inadecuadas</li> <li>3. Palillos dañados durante la marcación</li> <li>4. Variabilidad en la longitud de los palillos</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Proporcione una plantilla o guía de marcación que los estudiantes puedan usar para asegurar que todas las marcas estén a exactamente 3 cm. La plantilla garantiza que todas las marcas sean uniformes y precisas, reduciendo errores y mejorando la consistencia.</li> <li>2. Reparta herramientas de marcación adecuadas y asegúrese de que todos los estudiantes las usen. Usar las herramientas correctas garantiza marcas consistentes y visibles.</li> <li>3. Muestre a los estudiantes cómo aplicar una presión adecuada al marcar para evitar romper o astillar los palillos. La técnica adecuada de marcación previene daños a los palillos, asegurando que todos estén en buen estado para el proyecto.</li> <li>4. Verifique que todos los palillos tengan la longitud correcta de 6 cm antes de comenzar la marcación. Asegurar la longitud uniforme de los palillos evita problemas durante la inserción y garantiza una estructura equilibrada.</li> </ol>
<p>2. Ubica un punto <b>S</b> en la circunferencia (este punto simula la ciudad de Siena). Para ubicar el primer palillo (<i>palillo s</i>), insértalo en la bola de icopor perpendicularmente hasta alcanzar la línea marcada. Asegúrate de que el <i>palillo s</i> esté bien alineado y firmemente colocado, sobre la línea de relieve en la esfera como guía para asegurar que el otro palillo se inserte de manera uniforme y precisa. Este palillo simula el gnomon puesto en la ciudad de Siena (punto <b>S</b>).</p>	<p>Insertan el <i>palillo s</i> perpendicularmente en la bola de icopor hasta la marca de 3 cm, siguiendo la línea de relieve de la esfera.</p>  <p><i>Figura 10. Ubicación del palillo s</i></p>	<p>Asegurarse de que los estudiantes inserten el <i>palillo s</i> perpendicularmente y alineado con la línea de relieve. Ofrecer asistencia y correcciones si el palillo no está bien colocado.</p> <p>Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Realice una demostración clara de cómo insertar el palillo perpendicularmente a la superficie de la bola de icopor, utilizando una regla o un nivel si es necesario. La demostración visual ayuda a los estudiantes a comprender la importancia de la perpendicularidad y cómo lograrla.</li> <li>2. Supervise la inserción inicial de los palillos para asegurarse de que los estudiantes se detengan en la marca de 3 cm. La supervisión directa permite correcciones inmediatas, asegurando una inserción a la profundidad correcta.</li> </ol>

	<p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 3 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Inserción en ángulo incorrecto</li> <li>2. Inserción demasiado profunda o superficial</li> <li>3. Palillo no alineado con la línea de relieve</li> <li>4. Palillo flojo o mal colocado</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Proporcione guías visuales adicionales, como cintas o marcadores en la bola de icopor, para ayudar a los estudiantes a alinear el palillo con la línea de relieve. Las guías visuales adicionales facilitan una alineación precisa y correcta de los palillos.</li> <li>4. Enséñeles a los estudiantes a aplicar la presión adecuada para insertar firmemente el palillo sin dañar la bola de icopor. La técnica adecuada de inserción asegura que los palillos se mantengan firmemente en su lugar, contribuyendo a la estabilidad de la estructura.</li> </ol>
<p>3. A partir del punto <i>S</i>, mide con el metro de costura 5 cm sobre la línea de relieve, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda y marca un nuevo punto <i>A</i> (que simula la ciudad de Alejandría). En ese punto, inserta el otro palillo (<i>palillo a</i>) perpendicularmente hasta alcanzar la marca de 3 cm que realizaste previamente. Asegúrate de que el <i>palillo a</i> esté bien alineado y colocado de manera precisa, siguiendo la misma técnica utilizada para el <i>palillo s</i>.</p>	<p>Los estudiantes insertan el palillo a perpendicularmente en la bola de icopor hasta la marca de 3 cm, siguiendo la línea de relieve de la esfera.</p> <div data-bbox="827 678 1184 1154" data-label="Image"> </div> <p>Figura 11. Medida de para ubicar palillo a</p>	<p>Los estudiantes pueden cometer dos errores cruciales en este paso, el primero es al medir con el metro no lo usen de manera adecuada u determinen esta distancia entre <i>S</i> y <i>A</i> diferente a 5cm. La segunda es que no inserte el palillo en el relieve de la bola de icopor. Estos errores afectarían el resultado final de esta modelación. Para ello el profesor debe verificar que los estudiantes midan correctamente 5 cm desde el <i>palillo s</i> y coloquen el <i>palillo a</i> de manera precisa, asegurarse de que los estudiantes inserten el palillo perpendicularmente y alineado con la línea de relieve. Guiar en la medición y corrección si es necesario. Ofrecer asistencia y correcciones si el palillo no está bien colocado.</p>

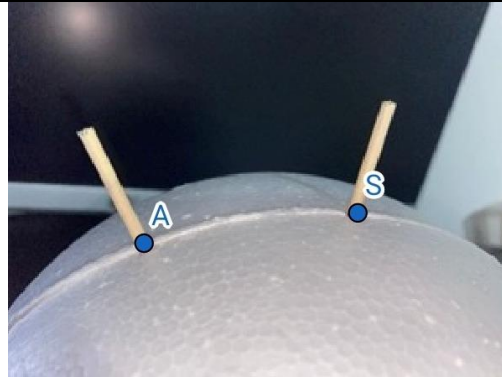


Figura 12. Ubicación del palillo a

Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 4 son:

1. Medición incorrecta de la distancia
2. Palillo no alineado con la línea de relieve

**Paso 3.** Simulación de los rayos de Sol: Ubicación de la linterna.

Sobre el *palillo s*, coloca la linterna a una altura que proyecte una sombra en el *palillo a* y no proyecte sombra en el *palillo s* (puede ser a una de 78 cm aproximadamente desde la superficie en la que se encuentra la bola de icopor. Ajusta la posición de la linterna cuidadosamente para que la luz se proyecte de manera directa y no genere ninguna sombra en el *palillo s*. Asegúrate de que la linterna esté estable y bien alineada, permitiendo una iluminación uniforme y sin obstrucciones sobre la bola de icopor.

Este *palillo s* va a simular el pozo de agua. Esto es, no deberá generar sombra bajo cierto rayo de luz, asunto que es equivalente a la situación de que ese mismo rayo de luz deja ver el fondo del pozo de agua, atravesando el centro de La Tierra (centro de la esfera).

Los estudiantes colocan la linterna a una altura de 78 cm sobre el *palillo s* y ajustan para que la luz no genere sombra de ese palillo.

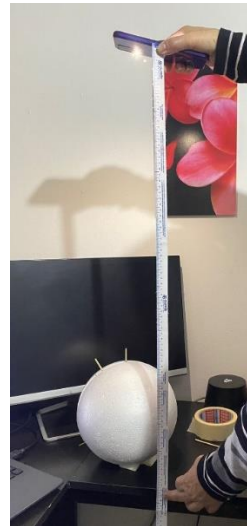
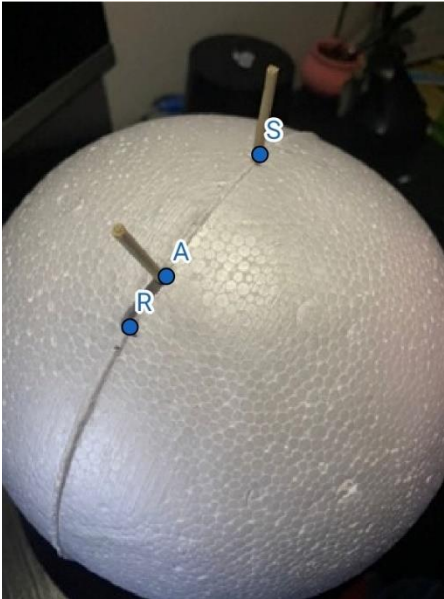


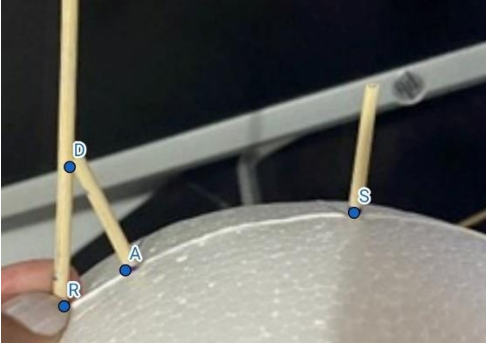
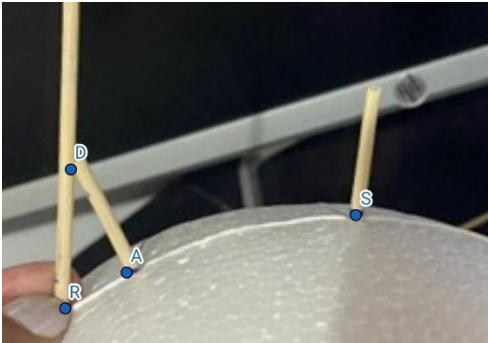
Figura 13. Ubicación de la linterna

Ayudar a los estudiantes a ajustar la linterna para que la luz se proyecte sin sombra sobre el *palillo s*. Verificar la altura y el ángulo de la linterna, corrigiendo cualquier desalineación.

Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:

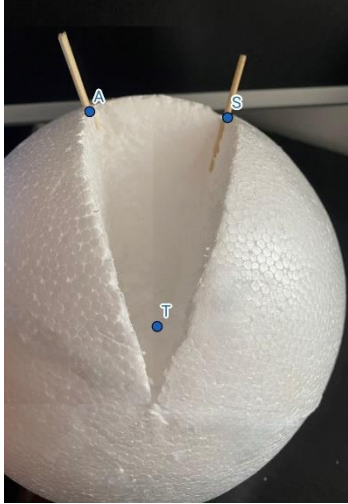
1. Proporcione una regla o cinta métrica y realice una demostración de cómo medir y ajustar la altura de la linterna exactamente a 78 cm desde la superficie. Hay que asegurar que la linterna esté a la altura correcta mejora la calidad de la iluminación y facilita el trabajo preciso en la bola de icopor.
2. Realice una demostración de cómo alinear correctamente la linterna para que la luz se proyecte de manera directa y sin sombras sobre el *palillo s*. La alineación adecuada de la linterna asegura una iluminación uniforme, mejorando la visibilidad y precisión en el trabajo.
3. Muestre a los estudiantes cómo fijar la linterna de manera segura utilizando soportes o bases adecuadas, asegurándose de que no se mueva durante el

	<p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 5 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Altura incorrecta de la linterna</li> <li>2. Posición desalineada de la linterna</li> <li>3. Linterna inestable o mal fijada</li> <li>4. Proyección de sombras sobre el <i>palillo s</i></li> </ol>	<p>trabajo. Una linterna estable mantiene la dirección de la luz constante, evitando interrupciones y mejorando la eficiencia del trabajo.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>4. Asegúrese de que los estudiantes comprendan la importancia de ajustar la posición de la linterna para evitar sombras, mostrando cómo hacer ajustes finos si es necesario. Evitar sombras asegura que los estudiantes puedan ver claramente el <i>palillo s</i>.</li> </ol>
<p><b>Paso 4. Generación de sombra en el palillo a</b></p> <p>Con el paso anterior ya establecido y asegurándose de que no se genere sombra en el <i>palillo s</i>, date cuenta de que el <i>palillo a</i> sí genera una sombra. Traza con un lápiz o esfero dicha sombra.</p> <p>○ ¿Cuánto mide esta sombra?</p> <p>Una vez que hayas obtenido la medida con el metro, anótala en una hoja o en tu cuaderno.</p>	<p>Los estudiantes miden la longitud de la sombra del <i>palillo a</i> y anotan la medida.</p> <p>Si realizan correctamente todas las indicaciones, la medida de la sombra es 1,5 cm.</p>  <p><i>Figura 14. La sombra proyectada por A</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 6 son:</p>	<p>Guiar a los estudiantes en la medición precisa de la sombra del <i>palillo a</i>. Asegurarse de que anoten correctamente la medida. Proporcionar ayuda con la medición si es necesario.</p> <p>Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Realice una demostración clara de cómo trazar y medir la sombra utilizando el metro de costura, asegurándose de que la técnica sea precisa. La demostración visual ayuda a los estudiantes a comprender la técnica correcta y a evitar errores de medición.</li> <li>2. Ajuste la posición de la linterna y el <i>palillo a</i> para obtener una sombra más definida y visible antes de que los estudiantes comiencen a medir. Una sombra clara y definida facilita una medición precisa y reduce la confusión.</li> <li>3. Proporcione a los estudiantes un formato estándar para registrar las medidas y supervise la anotación para evitar errores. Un formato estándar y la supervisión directa reducen la probabilidad de errores al anotar las medidas.</li> </ol>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Medición incorrecta de la sombra</li> <li>2. Sombra no visible o difusa</li> <li>3. Error al anotar la medida</li> </ol>	
<b>Tarea 2. Revela el secreto de Eratóstenes para medir el ángulo clave</b>		
<p><b>Paso 1. Medición del ángulo clave</b></p> <p>Dada la proyección de la sombra, imagina un triángulo proyectado con el extremo del <i>palillo a</i> y el extremo de la sombra. Puedes ayudarte con esta visualización colocando otro palillo uniendo estos dos extremos. La figura siguiente te puede orientar:</p>  <p>○ Con un transportador mide el ángulo determinado por el “palillo a” y el palillo que “une” el extremo del palillo a y extremo de la sombra. (<math>\angle ADR</math>) Escribe en la hoja o en el cuaderno la medida de ese ángulo.</p> <p>Este dado será clave para medir el ángulo central que contiene los puntos <b>A</b> y <b>S</b>.</p>	<p>Visualizan el triángulo formado por el <i>palillo a</i> y su sombra, y miden el ángulo entre el palillo y la sombra usando un transportador. Esta medida debería ser <math>28^\circ</math> aproximadamente.</p>  <p><i>Figura 15. Medición del ángulo clave</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Medición incorrecta del ángulo</li> <li>2. Dificultad para visualizar el triángulo proyectado</li> <li>3. Error al registrar las medidas</li> <li>4. Uso inadecuado del transportador</li> </ol>	<p>Asistir a los estudiantes en la visualización del triángulo y en la correcta medición del ángulo. Verificar la precisión de la medición y corregir si es necesario. Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Realice una demostración detallada de cómo medir el ángulo utilizando el compás y el transportador, destacando la importancia de la precisión. La demostración visual ayuda a los estudiantes a comprender la técnica correcta y a evitar errores de medición.</li> <li>2. Proporcione diagramas y ejemplos visuales del triángulo proyectado y cómo colocar el palillo adicional correctamente. Los ejemplos visuales ayudan a los estudiantes a visualizar mejor el triángulo, facilitando la medición precisa del ángulo.</li> <li>3. Proporcione a los estudiantes un formato estándar para registrar las medidas y supervise la anotación para evitar errores. Un formato estándar y la supervisión directa reducen la probabilidad de errores al registrar las medidas.</li> <li>4. Ofrezca una sesión práctica sobre cómo utilizar el compás y el transportador correctamente antes de que los estudiantes comiencen a medir el ángulo. La práctica con las herramientas de medición asegura que los estudiantes las utilicen correctamente, mejorando la precisión.</li> </ol>

### Paso 2. Perforación hacia el centro

Conociendo la medida del ángulo del paso anterior, procede, con cuidado, a perforar con un cutter o bisturí perpendicularmente desde los puntos  $S$  y  $A$  de la superficie de la esfera de icopor directamente hacia su centro ( $T$ ). A continuación, realiza perforaciones a lo largo de las líneas trazadas desde  $A$  y  $S$  hacia el centro de la esfera. El objetivo es retirar una fracción de la esfera de icopor para ilustrar visualmente el ángulo formado entre  $A$ ,  $S$  y el centro del icopor ( $T$ ). La siguiente figura ilustra lo deseado:



- ¿Cuánto mide  $\angle ATS$ ? Usa el transportador para medir ese ángulo.
- ¿Encuentras alguna relación entre la medida de este ángulo y el ángulo del paso 1? ¿Cuál?

Perforan desde el punto  $A$  hacia el centro de la esfera y miden  $\angle ATS$ . Comparan este ángulo con el medido en el paso anterior. De igual manera este ángulo debe medir  $28^\circ$  aproximadamente, con lo cual los estudiantes podrían conjeturar que ese ángulo central ( $\angle ATS$ ) mide igual que el ángulo medido en el paso 1.




Figura 16. Perforación hacia el centro del icopor


Supervisar las perforaciones y la medición del ángulo  $\angle ATS$ . Asegurar precisión en la perforación y en la medición. Guiar en la comparación de ángulos y en la identificación de la relación geométrica deseada. Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:

1. Realice una ejemplificación detallada de cómo perforar perpendicularmente utilizando la segueta, asegurándose de que la técnica sea precisa. La demostración visual ayuda a los estudiantes a comprender la técnica correcta y a evitar errores de perforación.
2. Proporcione consejos y técnicas para perforar el icopor de manera efectiva, como aplicar presión constante y movimientos suaves. La técnica adecuada reduce la resistencia y facilita una perforación más precisa y uniforme.
3. Muestre cómo manejar y cortar el icopor con cuidado para evitar daños, utilizando herramientas adecuadas y movimientos controlados. El manejo cuidadoso del icopor asegura que el segmento permanezca intacto, permitiendo una ilustración clara del ángulo.
4. Institucionalice el resultado deseable, a partir de las respuestas de sus estudiantes. Esto es que la  $m\angle ATS = m\angle RDA$ .

En esta institucionalización, el profesor debe advertir que acá está lo ingenioso del método de Eratóstenes: para medir el ángulo central  $m\angle ATS$  clave, claramente él no podía hacer un corte como lo hicimos en el icopor. Entonces, él tomó la medida del ángulo  $m\angle RDA$  y sabiendo que ese ángulo mide lo mismo que  $m\angle ATS$ , pudo saber la medida de este último.

	 <p>Figura 17. Medición del ángulo al centro del icopor</p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 2 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Perforación incorrecta o desviada</li> <li>2. Dificultad para perforar el icopor</li> <li>3. Segmento dañado o desmoronado</li> <li>4. Errores al relacionar los ángulos</li> </ol>	<p>El profesor, en este punto podría hacer proponer la siguiente pregunta de indagación (la segunda secuencia de tareas abordará este asunto):</p> <p><i>Si Eratóstenes no podía medir directamente el ángulo central clave (claro, no podía romper un fragmento de la tierra) ¿cómo pudo justificar que la medida de ese ángulo era igual a la medida del <math>\angle RDA</math>?</i></p>
<p><b>Tarea 3: Calcular la medida del perímetro de la superficie de la bola de icopor, sin medirla directamente</b></p>		
<p><b>Paso 1:</b> Medida del perímetro de la superficie de la esfera con la fórmula</p> <p>Con todos los datos que obtuviste en la tarea 2:</p> <p><i>¿Conoces alguna fórmula para hallar el perímetro con solo los datos que tienes en este momento?</i></p>	<p>Es deseable que los estudiantes aludan a la siguiente fórmula para establecer el perímetro de la bola de icopor:</p> $P_{\odot r} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$ <p>Esto, sabiendo que cuenta con los siguientes datos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <math>m\widehat{AS} = 5 \text{ cm}</math></li> <li>○ <math>m\angle ATS = 28^\circ</math></li> </ul> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. No recuerdo de la fórmula</li> </ol>	<p>Pregunte por maneras estudiadas en los cursos para calcular el perímetro de una circunferencia, o sobre expresiones que relacionen el ángulo central de una circunferencia con el perímetro de una circunferencia. Los estudiantes pueden presentar dos casos diferentes: primero, que reconozcan la relación proporcional existente en un círculo entre el ángulo central y la longitud de su arco correspondiente, o que ya tengan presentes estos conceptos en sus conocimientos previos. Asegúrese de que los estudiantes comprendan y apliquen correctamente la fórmula para calcular el perímetro, considerando ambos enfoques en la resolución del problema.</p>

	$P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$ <p>2. Por ende, consideración de la falta de datos necesarios.</p>	<p>Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Asegúrese de que los estudiantes recopilen todos los datos necesarios antes de proceder con el cálculo del perímetro, proporcionando una lista de verificación de los datos requeridos. La lista de verificación garantiza que los estudiantes tengan todos los datos necesarios para realizar el cálculo correctamente.</li> <li>2. Proporcione explicaciones claras y materiales de apoyo sobre el procedimiento y la fórmula a utilizar para calcular el perímetro de la esfera. Las explicaciones claras y los materiales de apoyo ayudan a los estudiantes a comprender mejor el procedimiento y la fórmula, reduciendo la confusión.</li> </ol>
<p><b>Paso 2. Aplicación de la fórmula</b></p> <p>Con el ángulo determinado en la tarea 2 (paso 2), puedes estimar el perímetro de la bola de icopor a partir de tu respuesta a la tarea previa:</p> <p><i>¿Cuánto te da el perímetro usando los datos?</i></p>	<p>Sustituyen los datos en la fórmula y obtienen el perímetro de la esfera. Una respuesta podría ser similar a la siguiente:</p> $P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$ $P_{\odot T} = 5 \text{ cm} \cdot \frac{360^\circ}{28^\circ}$ $P_{\odot T} \approx 64,28 \text{ cm}$ <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 2 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Cálculo incorrecto del perímetro</li> <li>2. Errores en la sustitución de datos</li> <li>3. Confusión sobre la fórmula o los datos</li> </ol>	<p>El profesor debe asegurar que los estudiantes entiendan y apliquen correctamente la fórmula para obtener el perímetro. Verificar los cálculos y corregir errores. Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Exponga con detallada de cómo aplicar la fórmula correctamente, sustituyendo todos los datos obtenidos en la tarea 2. La demostración visual ayuda a los estudiantes a comprender la aplicación correcta de la fórmula y a evitar errores en el cálculo.</li> <li>2. Proporcione una guía o lista de verificación para que los estudiantes puedan revisar los datos antes de sustituirlos en la fórmula. La guía o lista de verificación garantiza que los estudiantes sustituyan correctamente los datos, mejorando la precisión del cálculo.</li> </ol>

		<ol style="list-style-type: none"> <li>Proporcione explicaciones claras y materiales de apoyo sobre la fórmula y los datos necesarios, asegurándose de que los estudiantes comprendan bien cómo utilizarlos. Las explicaciones claras y los materiales de apoyo ayudan a los estudiantes a comprender mejor la fórmula y los datos, reduciendo la confusión.</li> </ol>
<p><b>Paso 3. Medir la bola de icopor con el metro para verificar</b></p> <p>Ahora, mide con el metro el perímetro de nuestra bola de icopor: ¿Qué resultado obtienes?</p>	<p>Miden el perímetro de la esfera con el metro y anotan la medida. Esta medida debe ser aproximadamente 63,5 cm.</p>  <p><i>Figura 18. Medir la bola de icopor con el metro</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 3 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Medición incorrecta del perímetro</li> <li>Dificultad para usar el metro correctamente</li> <li>Medición inconsistente del perímetro</li> </ol>	<p>Verificar que los estudiantes midan correctamente el perímetro con el metro. Comparar las medidas obtenidas con las calculadas anteriormente.</p> <p>Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Muestre cómo medir el perímetro de la bola de icopor utilizando el metro, asegurándose de que la técnica sea precisa y adecuada. La demostración visual ayuda a los estudiantes a comprender la técnica correcta y a evitar errores en la medición.</li> <li>Ofrezca una sesión práctica sobre cómo utilizar el metro de manera efectiva antes de que los estudiantes realicen la medición del perímetro. La práctica con el metro garantiza que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para realizar una medición precisa.</li> <li>Proporcione instrucciones claras sobre cómo mantener una técnica de medición consistente, midiendo siempre en la misma parte de la bola de icopor. La consistencia en la técnica de medición asegura resultados más precisos y confiables.</li> </ol>
<p><b>Paso 4. Análisis de resultados</b></p>	<p>Analizan y comparan los resultados de ambas mediciones, discutiendo la precisión del método y su aplicabilidad.</p>	<p>Facilitar la discusión y análisis de resultados. Guiar a los estudiantes en la evaluación de la precisión del</p>

<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <i>¿Los resultados obtenidos en el paso 2 y el paso 3 estuvieron cercanos?</i></li> <li>○ <i>¿Consideras que el método para hallar el perímetro de la bola de icopor en la tarea 1, 2 y 3 sin usar el metro funciona?</i></li> <li>○ <i>¿Crees que se puede usar con esferas más grandes y seguiría funcionando?</i></li> </ul>	<p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 4 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Resultados de los pasos 2 y 3 está lejanos.</li> <li>2. Los estudiantes creen que al no ser iguales los resultados, el método no es eficaz.</li> </ol>	<p>método utilizado y en la exploración de su aplicabilidad en diferentes contextos.</p> <p>Para abordar estos posibles errores enumerados en la columna dos, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Realice una revisión detallada de los pasos de cálculo y medición con los estudiantes para identificar y corregir posibles errores. La revisión detallada ayuda a identificar y corregir errores, mejorando la precisión de los resultados y la comprensión del método.</li> <li>2. Proporcione una guía para el análisis de resultados, destacando los puntos clave a discutir, como la precisión del método y su aplicabilidad a esferas más grandes.</li> </ol> <p>El profesor debería hacer una reflexión sobre el hecho de lo que implica una modelación y sobre los posibles errores que casi siempre, un proceso de modelación implica. En este caso hay varias cosas que podrían llevar a la imprecisión que, en cualquier caso, no son tan sustanciales: No precisión en el establecimiento de la sombra del <i>palillo a</i> (que simula el gnomon) y no precisión en la medición directa de los ángulos, por ejemplo.</p>
--	---	---

### 4.3 Segunda secuencia: Modelación del método de Eratóstenes en GeoGebra

En esta sección se presenta una secuencia de tareas centradas en la modelación del procedimiento de Eratóstenes utilizando GeoGebra. Este enfoque didáctico busca facilitar la comprensión de conceptos geométricos y trigonométricos abstractos a través de herramientas digitales, permitiendo a los estudiantes experimentar de manera interactiva y visual los principios subyacentes y verificar el método de Eratóstenes. La secuencia de tareas está diseñada para guiar a los estudiantes en la construcción de una representación dinámica que modela el procedimiento. Por otro lado, busca promover la justificación teórica de la eficacia del método utilizando elementos de la geometría y la trigonometría escolar, tales como el T. PAI, el teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, la ley de senos y la ley de cosenos. Estas herramientas matemáticas permiten a los estudiantes comprender y validar cada etapa del método de Eratóstenes de manera rigurosa y fundamentada.

*Descripción de los materiales y recursos:* Para llevar a cabo la secuencia de tareas utilizando GeoGebra en el estudio del método de Eratóstenes, se necesitarán los siguientes materiales y recursos:

- **Computadoras o tabletas con acceso a GeoGebra:** Dispositivos con suficiente capacidad de procesamiento y memoria para ejecutar GeoGebra de manera eficiente.
- **Acceso a internet:** Conexión estable y rápida para garantizar el acceso continuo a GeoGebra, videos educativos y recursos en línea. Facilitar la visualización de videos explicativos y la búsqueda de información adicional necesaria para las tareas.
- **Proyector o pantalla:** Equipo audiovisual con buena resolución y tamaño adecuado para que todos los estudiantes o profesor puedan ver sus producciones escritas o en GeoGebra.
- **Materiales de referencia sobre geometría y trigonometría:** Libros de texto, apuntes de clase, y recursos en línea que cubran temas como el teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, ley de senos y cosenos. Brindar a los estudiantes el fundamento teórico necesario para comprender y aplicar los conceptos geométricos y trigonométricos en las tareas.

Estos recursos son fundamentales para la secuencia de tareas, ya que permiten a los estudiantes interactuar directamente con los conceptos matemáticos de manera digital y visual, facilitando una comprensión más profunda y aplicada de los mismos. La combinación de herramientas tecnológicas y materiales educativos asegura que los estudiantes puedan experimentar de manera práctica y colaborativa, lo que fortalece su aprendizaje y retención de los conceptos.

A continuación, presentamos la Tabla 6 donde describe los enunciados, respuestas deseables o esperados de los estudiantes y sus respectivas sugerencias de gestión del profesor de la primera secuencia.

### Modelación del método en GeoGebra

#### EXPECTATIVA DE APENDIZAJE:

Modelar el procedimiento de Eratóstenes para medir el perímetro de la tierra, usando el software GeoGebra.

Construir argumentos teóricos que sustenten pasos del procedimiento de Eratóstenes para medir el perímetro de la tierra.

#### Tarea 1. Contextualización del método

A partir de la secuencia de tareas que abordaste anteriormente, conociste el método Eratóstenes para medir el perímetro de la tierra. Mediante esa secuencia, todo lo hicimos con mediciones directas verificando que él método “funciona” empíricamente. Ahora, ha llegado el momento de sustentar teóricamente que ese método funciona. ¿Qué datos pudo haber necesitado Eratóstenes para establecer la medida del  $\angle RDA$ ? ¿Por qué la medida del  $\angle RDA$  es igual a la medida del ángulo central  $\angle STA$ ? En la secuencia de tareas siguiente tienen oportunidad de construir respuestas para estas preguntas. Para ello, vamos a modelar la situación en un software de geometría dinámica como GeoGebra. ¡Iniciemos, entonces!

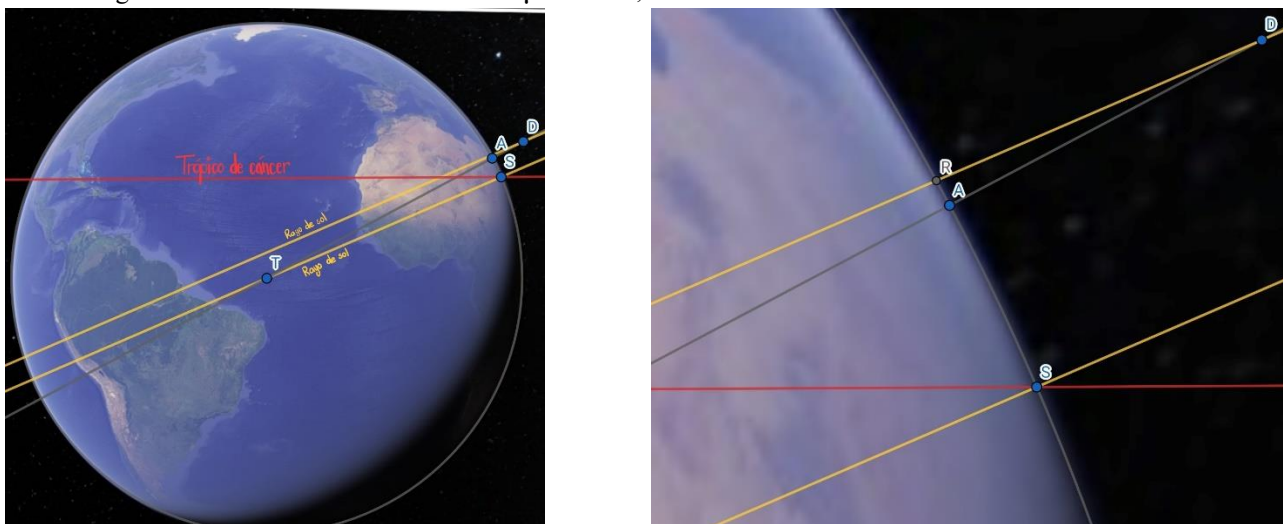
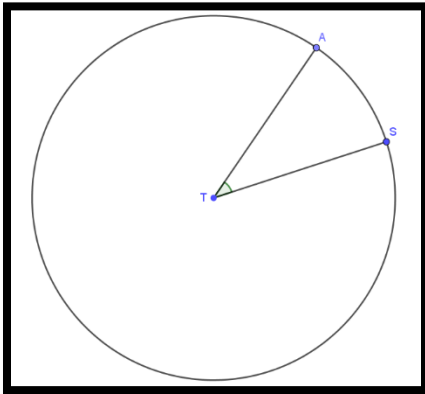


Figura 19. Método de Eratóstenes



Recordemos las ideas claves del procedimiento:

Se establece la distancia (esférica) entre los puntos  $A$  y  $S$  (medida del  $\widehat{AS}$ ),  $A$  y  $S$  puntos de una circunferencia máxima de la esfera de la Tierra (un meridiano).

2. Se establece la medida del  $\angle ATS$ , donde  $T$  es centro de la circunferencia.

3. Se sustituye  $m\widehat{AS}$  y  $m\angle ATS$  en la expresión  $P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$  para determinar el  $P_{\odot T}$ , esto es, el perímetro de la circunferencia.

Figura 20. Representación de apoyo para hallar el perímetro de una circunferencia

**Tarea 1. Preliminares de la modelación: Sobre la circunferencia máxima de una esfera**

ENUNCIADOS DE LA TAREA	RESPUESTAS DESEABLES O ESPERADAS DE LOS ESTUDIANTES	SUGERENCIAS DE GESTIÓN DEL PROFESOR
<p>Recordemos que el procedimiento de Eratóstenes supone que la tierra es una esfera y alude a dos ciudades (Siena y Alejandría) ubicadas en el mismo meridiano. Ahora bien, cómo simulamos un meridiano en una esfera. Las siguientes preguntas, te permiten concluir respuestas al respecto:</p> <p><b>Paso 1. Circunferencia máxima de la Tierra</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Dada una esfera, plantee un procedimiento para construir una circunferencia que pertenezca a la esfera.</li> <li>○ Seleccione ahora las circunferencias máximas de una esfera.</li> <li>○ ¿Cuántas circunferencias máximas tiene una esfera?</li> </ul>	<p>Se espera que los estudiantes propongan como procedimiento: construir un plano que contenga el centro de la esfera y determinar la circunferencia de intersección entre el plano y la esfera. Se tienen en cuenta los siguientes conceptos de la Geometría del Espacio:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La intersección de un plano que contiene el centro de una esfera con la esfera es una circunferencia máxima.</li> <li>- Una esfera tiene infinitas circunferencias máximas.</li> <li>- Los meridianos de la Tierra son circunferencias máximas de la Tierra.</li> <li>- Si un plano tiene un punto en el interior de una esfera, la intersección del plano con la esfera es una circunferencia. Además, su centro es el punto de intersección entre el plano y la recta perpendicular a este por el centro de la esfera.</li> <li>- Las circunferencias máximas de una esfera son las que tienen el mayor perímetro posible de las circunferencias contenidas en la esfera. (Esfera se entiende</li> </ul>	<p>Para ser más específicos en la gestión de la enseñanza sobre las circunferencias máximas de una esfera, el profesor puede seguir estos pasos detallados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Usar GeoGebra o similar para modelar una esfera y mostrar cómo se pueden trazar diferentes circunferencias máximas. Mostrar visualmente que no importa cuántas circunferencias se tracen, todas pueden ser círculos máximos si cumplen con las condiciones.</li> <li>- Pedir a los estudiantes que expliquen cómo verificaron que las circunferencias trazadas son máximas y que expliquen por qué hay infinitas circunferencias máximas en una esfera.</li> <li>- Realizar una retroalimentación focalizada, corregir errores conceptuales en el momento, enfocándose en la necesidad</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>○ ¿Cómo garantizas que el resultado del procedimiento indicado en la anterior pregunta es correcto?</li> </ul>	<p>como todos los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto dado en ese espacio).</p>	<p>de que la circunferencia divida la esfera en dos hemisferios iguales y tenga el radio de la esfera.</p>
<p><b>Paso 2. Establecer el perímetro de la circunferencia</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ ¿Mediante cuál procedimiento se puede establecer el perímetro de una circunferencia si no se conoce su radio?</li> <li>○ ¿Qué datos son necesarios tener en cuenta para poder usar ese procedimiento?</li> </ul>	<p>Para establecer el perímetro de una circunferencia cuando no se conoce el radio, los estudiantes debería aludir a la siguiente expresión.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dada una <math>\odot T</math>, entonces el perímetro <math>P_{\odot T} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}</math></li> </ul> <p>En ese marco, los estudiantes deberían hacer alusión a los siguientes conceptos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definición de ángulo central en circunferencia</li> <li>- Definición de arco de circunferencia</li> <li>- Definición de arco subtendido por ángulo central</li> <li>- La suma de medida de ángulos centrales de una circunferencia es 360</li> </ul>	<p>El rol del profesor en un proceso de aprendizaje donde los estudiantes están destinados a descubrir por sí mismos la fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia usando la longitud de un arco y el ángulo central es fundamentalmente de facilitador y guía. el profesor debe asumir algunas funciones clave:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Establecer un ambiente de clase que fomente la curiosidad, la exploración y el respeto por las ideas de los demás. Esto incluye organizar el espacio físico de manera que promueva la colaboración y la comunicación entre los estudiantes.</li> <li>- <i>Instrucciones claras:</i> Dar instrucciones claras y concisas sobre la tarea y asegurarse de que todos los estudiantes entiendan los objetivos y los pasos del proceso de descubrimiento.</li> <li>- <i>Estimular la indagación:</i> Hacer preguntas abiertas que promuevan el pensamiento crítico y la reflexión. Estas preguntas deben ayudar a los estudiantes a pensar en las relaciones matemáticas y sus implicaciones. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ ¿Cómo se relaciona el ángulo central con la longitud del arco en una circunferencia?</li> <li>○ ¿Qué información te proporciona el ángulo central sobre la longitud del arco si conoces el ángulo en grados y el perímetro total de la circunferencia?</li> <li>○ ¿Cómo puedes usar el ángulo central para determinar la longitud de un</li> </ul> </li> </ul>

		<p>arco si conoces su proporción respecto al perímetro total de la circunferencia?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Si tienes el valor de un arco y el ángulo central que lo subtiende, ¿cómo podrías encontrar el perímetro de la circunferencia?</li> <li>○ ¿Qué otras formas conoces para encontrar el perímetro de una circunferencia utilizando diferentes medidas como el diámetro o el arco?</li> <li>○ Si te dan la longitud de un arco y el ángulo central correspondiente, ¿cómo podrías calcular el radio de la circunferencia?</li> <li>○ ¿Cómo puedes usar el diámetro para encontrar el perímetro si te han proporcionado información sobre el arco o el ángulo central?</li> <li>○ Si conoces una proporción entre la longitud de un arco y el perímetro de la circunferencia, ¿cómo puedes calcular el perímetro total?</li> <li>○ ¿Cómo se puede aplicar la relación entre el ángulo central y el arco para deducir el valor del perímetro cuando solo se conocen ciertos valores parciales?</li> </ul> <p>- <i>Observar y escuchar:</i> Monitorear activamente los progresos de los estudiantes, escuchando sus discusiones y observando cómo abordan el problema. Esto es clave para entender sus procesos de pensamiento y dónde pueden necesitar guía adicional.</p>
--	--	---

**Tarea 2. Procedimiento de construcción en GeoGebra: una representación dinámica del método de Eratóstenes**

**Paso 1. Ingresar a GeoGebra**

Abre la aplicación GeoGebra 3D en tu computador, en tu celular o en la tableta. Si es desde un computador allí se partirá la pantalla en dos ventanas; la ventana de la parte derecha corresponde a las construcciones visualizadas en 3D y la ventana de la parte izquierda corresponde a las representaciones en 2D.

El plano que se encuentra en la vista 3D se lo representaremos simbólicamente como  $\alpha$ .

Los estudiantes abren correctamente la aplicación GeoGebra 3D en sus dispositivos, visualizando las dos ventanas: una para construcciones en 3D (parte derecha) y otra para representaciones en 2D (parte izquierda). La correcta apertura de GeoGebra permite a los estudiantes seguir las instrucciones y realizar las construcciones geométricas necesarias, facilitando el aprendizaje y la comprensión de los conceptos.

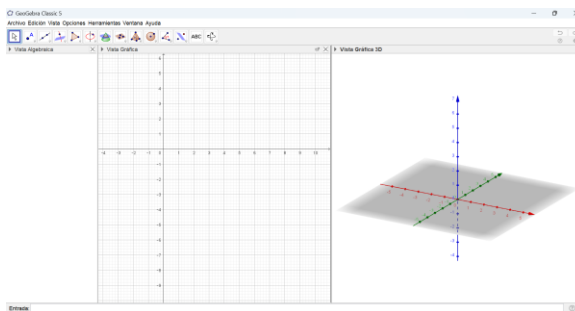


Figura 21. Aplicación GeoGebra

Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:

1. Los estudiantes experimentan dificultades técnicas al intentar abrir GeoGebra 3D, como problemas de instalación, incompatibilidad de dispositivos o errores de ejecución.
2. Los estudiantes están confundidos sobre cómo navegar y utilizar la interfaz de GeoGebra, especialmente en la diferenciación entre las ventanas 3D y 2D.
3. Los estudiantes tienen dificultades para identificar o representar simbólicamente el plano  $\alpha$  en la vista 3D de GeoGebra.

Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:

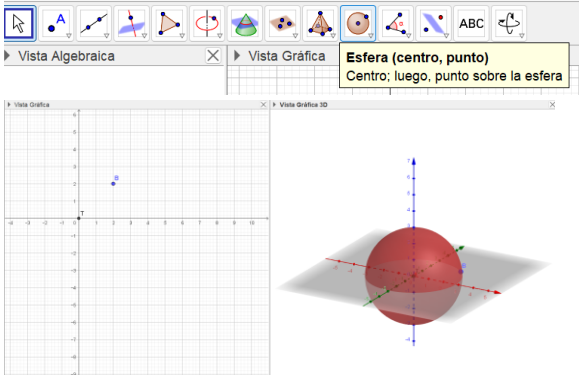
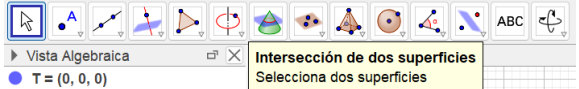
1. Proporcione una guía paso a paso para la instalación y apertura de GeoGebra 3D en diferentes dispositivos, y ofrezca soluciones a problemas técnicos comunes. Una guía detallada ayuda a los estudiantes a superar problemas técnicos, asegurando que todos puedan acceder a la aplicación y realizar las actividades.
2. Realice una demostración de la interfaz de GeoGebra, explicando cómo navegar entre las ventanas 3D y 2D y cómo utilizar las herramientas básicas. La demostración de la interfaz facilita la familiarización con la aplicación y permite a los estudiantes utilizarla de manera efectiva.
3. Explique claramente cómo identificar y representar el plano  $\alpha$  en la vista 3D de GeoGebra, utilizando ejemplos visuales y ejercicios prácticos. La explicación clara y los ejemplos visuales ayudan a los estudiantes a comprender cómo representar simbólicamente el plano  $\alpha$  y a aplicarlo en sus construcciones geométricas.

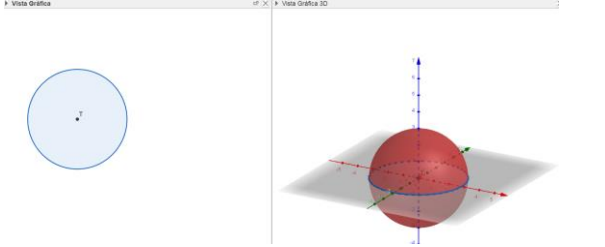
**Paso 2. Construcción de la esfera de la Tierra**

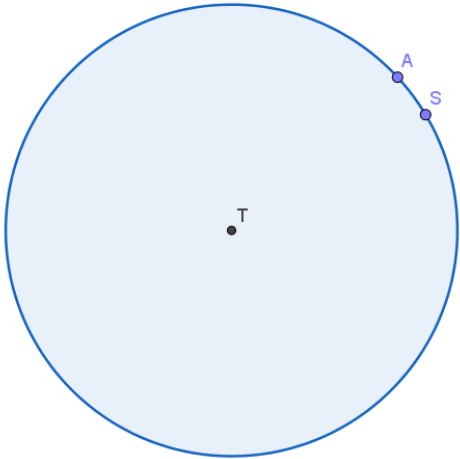
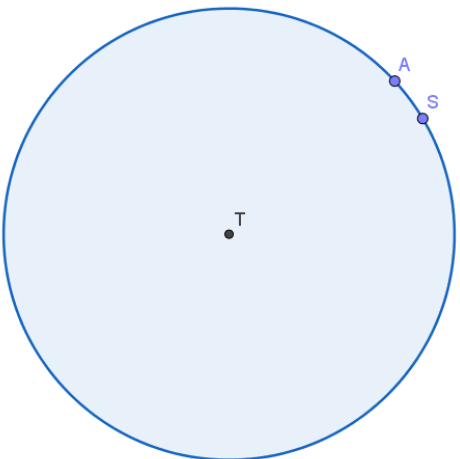
Construye una esfera  $\odot T_r$  tal que  $T \in \alpha$ .

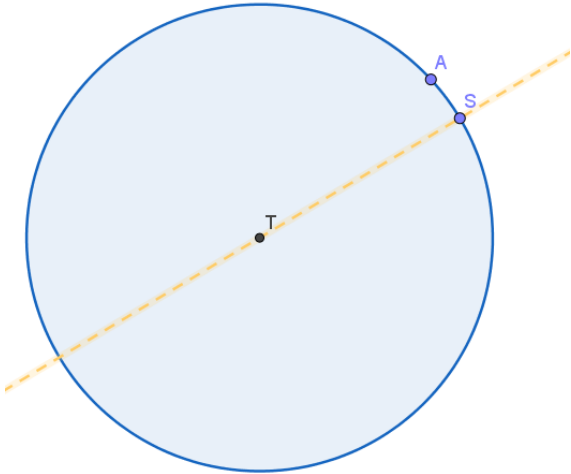
Los estudiantes construyen correctamente una esfera  $\odot T_r$  en GeoGebra 3D, asegurando que el punto  $T$  (punto central de la esfera) se encuentre en el plano  $\alpha$ .

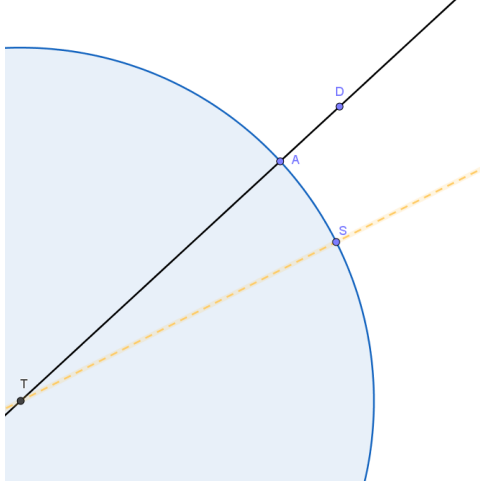
Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:

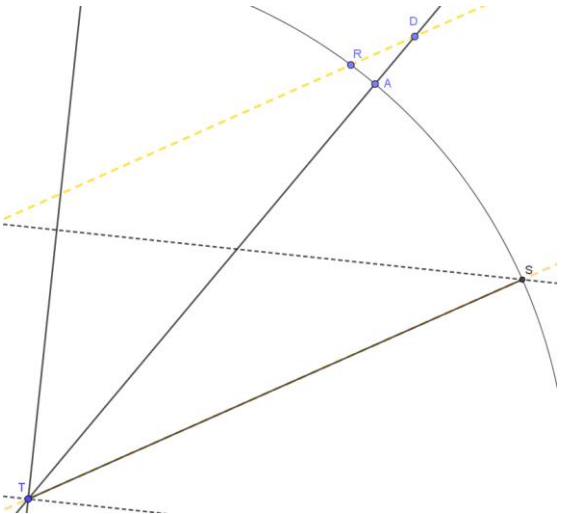
	 <p><i>Figura 22. Construcción de la esfera de la Tierra</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 2 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los estudiantes experimentan dificultades técnicas al intentar construir la esfera en GeoGebra 3D, como problemas para definir el radio o ubicar el punto <math>T</math> en el plano <math>\alpha</math></li> <li>2. Los estudiantes están confundidos sobre cómo asegurar que el punto <math>T</math> se encuentre en el plano <math>\alpha</math> durante la construcción de la esfera.</li> <li>3. Los estudiantes definen incorrectamente el radio de la esfera, lo que resulta en una construcción imprecisa.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Indique la construcción de una esfera en GeoGebra 3D, incluyendo cómo definir el radio y ubicar el punto <math>T</math> en el plano <math>\alpha</math>.</li> <li>2. Explique una demostración de cómo asegurar que el punto <math>T</math> se encuentre en el plano <math>\alpha</math> durante la construcción de la esfera, utilizando ejemplos visuales en GeoGebra. La demostración visual facilita la comprensión de la ubicación correcta del punto <math>T</math> y su relación con el plano <math>\alpha</math>.</li> <li>3. Aclare cómo definir el radio de la esfera en GeoGebra 3D y cómo verificar que la definición sea correcta, utilizando ejercicios prácticos. La explicación clara y los ejercicios prácticos aseguran que los estudiantes definan correctamente el radio de la esfera, mejorando la precisión de la construcción.</li> </ol>
<p><b>Paso 3. Representación de una circunferencia máxima de la Tierra</b></p> <p>Usando el procedimiento del paso 1 de la tarea 1, construye una circunferencia máxima de la esfera. Verifica que tu método funciona, esto es, que sí genera circunferencias máximas.</p>	<p>Se espera que los estudiantes usen el procedimiento establecido en el paso 1 de la tarea 1 para determinar circunferencias máximas de la esfera. Podrían, simplemente, determinar la intersección entre dos superficies en GeoGebra, en este caso entre <math>\odot T_r</math> y el plano <math>\alpha</math>. En ese caso, el lugar geométrico representado en la vista 2D es una circunferencia.</p> 	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Proporcione una guía paso a paso sobre cómo usar la herramienta de Intersección de dos superficies en GeoGebra, incluyendo cómo seleccionar correctamente las superficies. Una guía detallada ayuda a los estudiantes a superar problemas técnicos y a usar correctamente la herramienta para representar la circunferencia máxima.</li> <li>2. Realice una demostración de cómo aplicar la herramienta de Intersección de dos</li> </ol>

	 <p>Figura 23. Representación de una circunferencia máxima de la Tierra</p> <p>Para verificar que las circunferencias así construidas son máximas, los estudiantes podrían construir planos que no contienen el centro de la esfera para determinar circunferencias de intersección entre dichos planos y la esfera. Luego, comparar el perímetro de estas últimas circunferencias (usando la herramienta <i>distancia o longitud</i>) con aquellas construidas con el plano que contiene el centro de la esfera.</p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 3 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los estudiantes encuentran problemas técnicos al intentar usar la herramienta de Intersección de dos superficies en GeoGebra, como dificultades para seleccionar correctamente las superficies.</li> <li>2. Los estudiantes no tienen claro qué lugar geométrico se obtiene al aplicar la herramienta de Intersección de dos superficies, o cómo interpretarlo en la vista 2D</li> <li>3. La circunferencia máxima no se representa correctamente en la vista 2D, ya sea por problemas de configuración o por un mal uso de las herramientas de GeoGebra.</li> <li>4. Los estudiantes usan planos que no contienen el centro de la esfera para determinar circunferencias de intersección entre dichos planos y la esfera.</li> </ol>	<p>superficies y explique qué lugar geométrico se determina (una circunferencia) y sus características. La demostración visual facilita la comprensión de la relación entre la esfera y el plano, y cómo la intersección determina una circunferencia máxima.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>3. Explique claramente cómo interpretar la circunferencia máxima en la vista 2D de GeoGebra, utilizando ejemplos visuales y ejercicios prácticos.</li> <li>4. Asegúrese que los estudiantes representen la circunferencia como <math>\odot T_r</math></li> </ol>
<p><b>Paso 4. Ubicación de Siena y Alejandría</b></p>	<p>Los estudiantes deben ubicar los puntos Siena (S) y Alejandría (A) tal como se muestra en la Figura 24 sobre una</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p>

<p>Para hallar el perímetro de la Tierra Eratóstenes, necesitaba establecer dos puntos sobre una circunferencia máxima de la tierra Siena (<math>S</math>) y Alejandría (<math>A</math>) (para este caso, sobre un mismo meridiano) y, a partir de ellos, establecer <math>m\widehat{SA}</math> y <math>m\angle ATS</math> tal como se muestra en la figura. Entendido ello, ubica los dos puntos <math>S</math> y <math>A</math> tal que <math>S, A \in \odot T_r</math></p> 	<p>circunferencia que represente una circunferencia máxima de la Tierra, en este caso, sobre un mismo meridiano.</p>  <p>Figura 24. Ubicación de Siena y Alejandría</p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 4 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Errores de ubicación, los estudiantes podrían colocar <math>S</math> y <math>A</math> en posiciones incorrectas que no correspondan a la misma circunferencia máxima o meridiano.</li> <li>2. Problemas de escala, al manejar una representación a escala de la Tierra, los estudiantes podrían tener dificultades para estimar las posiciones relativas correctas de Siena y Alejandría.</li> <li>3. Uso de herramientas, dificultades en el uso eficiente de las herramientas de GeoGebra para realizar las construcciones y mediciones necesarias.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Instrucción clara sobre ubicación: Asegurarse de que los estudiantes comprendan la geografía implicada y la razón por la cual Siena y Alejandría deben estar sobre el mismo meridiano. Proporcionar una mini-lección sobre meridianos y la estructura de la Tierra podría ser útil.</li> <li>2. Prácticas guiadas: Permitir que los estudiantes practiquen en clase bajo supervisión, haciendo correcciones en tiempo real y dando feedback específico.</li> <li>3. Recursos adicionales: Proporcionar tutoriales en video o hojas de instrucciones sobre cómo usar GeoGebra para este tipo de tareas.</li> </ol>
<p><b>Paso 4.</b> Representación del rayo solar en el solsticio de verano</p> <p>Eratóstenes se percató que, durante un momento del año (solsticio de verano del hemisferio norte – entre 20 y 21 de junio–), en la Ciudad Siena (<math>S</math>)</p>	<p>Los estudiantes deben trazar una línea recta que simbolice el rayo solar llegando verticalmente a Siena (<math>S</math>) en el solsticio de verano, representando que el Sol está directamente sobre el Trópico de Cáncer.</p> <p>Los estudiantes por la anterior secuencia deberán entender por qué en Siena, en este día específico, no se generan sombras para los objetos verticales.</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El profesor debe asegurarse de explicar el fenómeno del solsticio de verano, enfocándose en cómo y por qué en ciertos lugares del Trópico de Cáncer, como Siena,</li> </ol>

<p>los rayos de Sol no generaban sombra para los objetos (esto ocurre para todo lugar que se encuentra en el paralelo denominado Trópico de Cáncer), lo que implica también que el fondo de un pozo con agua se deja ver.</p> <p>Para representar este rayo en nuestra construcción, use la herramienta “recta” para construir la recta <math>\overline{TS}</math>.</p>	 <p><i>Figura 25. Representación del rayo solar en el solsticio de verano</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 4 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Puede que los estudiantes no comprendan completamente el significado astronómico y geográfico del solsticio de verano y cómo afecta la incidencia de los rayos solares.</li> <li>2. Los estudiantes podrían tener problemas utilizando la herramienta “recta” de manera correcta, posiblemente trazando líneas que no representen adecuadamente la verticalidad del rayo solar en Siena.</li> <li>3. Dificultades para visualizar y representar la dirección exacta del rayo solar como una línea que no produce sombra.</li> </ol>	<p>el Sol se encuentra en el cenit al mediodía.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Mostrar en GeoGebra cómo trazar la línea representativa del rayo solar, destacando la importancia de que esta debe ser vertical en el modelo para simular la ausencia de sombra.</li> <li>3. Organizar actividades prácticas donde los estudiantes practiquen el trazado de la línea usando GeoGebra, con supervisión y correcciones en tiempo real.</li> <li>4. Proporcionar material adicional, como vídeos educativos o simulaciones que muestren el movimiento solar y su impacto en diferentes latitudes durante el solsticio.</li> </ol>
<p><b>Paso 5. Construcción del gnomon</b></p> <p>Además del descubrimiento de Eratóstenes en el paso 4 (no generación de sombra en <b>S</b>), que, para ese mismo instante, en la ciudad de Alejandría (<b>A</b>) un gnomon (una estaca perpendicular a la superficie de la tierra) sí generaba una sombra. Con estas</p>	<p>Los estudiantes deben representar un gnomon en Alejandría (<b>A</b>) como una línea perpendicular a la superficie terrestre simulada en la construcción.</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El profesor debe explicar claramente la función de un gnomon y cómo la inclinación del sol afecta la generación de sombras en diferentes latitudes.</li> </ol>

<p>condiciones, pudo determinar unos datos claves para calcular la <math>m\angle ATB</math>.</p> <p><i>¿Cómo representarías este gnomon en nuestra construcción? ¿Qué condiciones geométricas debe tener esta representación?</i></p>	 <p>Para ello, pueden construir la <math>\overleftrightarrow{AT}</math> o, quienes tienen conocimiento sobre tangentes a una circunferencia, usar la recta tangente a <math>\odot T</math> por <math>A</math> y construir la recta perpendicular a dicha tangente por <math>A</math> (i.e., la normal a <math>\odot T</math> por <math>A</math>); por su puesto, las construcciones son equivalentes. Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 5 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Perpendicularidad incorrecta: Puede ser común que los estudiantes no tracen la línea perpendicular correctamente, lo cual afectaría la precisión de la sombra simulada.</li> <li>2. Confusión sobre el propósito del gnomon: Los estudiantes podrían no entender por qué el gnomon en Alejandría genera una sombra y en Siena no, especialmente si no se comprende la geometría solar subyacente.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Demostración en GeoGebra: Realizar una demostración sobre cómo dibujar un gnomon utilizando la herramienta de línea perpendicular en GeoGebra, asegurando que los estudiantes entiendan cómo verificar la perpendicularidad en su construcción.</li> <li>3. Visualización y Modelado: Mostrar ejemplos de cómo el ángulo del sol crea diferentes longitudes de sombras en diferentes latitudes durante el solsticio.</li> <li>4. Guías Prácticas: Proporcionar instrucciones paso a paso o guías visuales que los estudiantes puedan seguir durante la construcción para asegurar que la línea del gnomon esté correctamente representada.</li> <li>5. Es primordial indicar a los estudiantes que deben nombrar el extremo del gnomon con un punto <math>D</math>.</li> </ol>
<p><b>Paso 6. Representación de la sombra del gnomon</b></p> <p>Estableciendo en el paso 5, que el extremo del gnomon es el punto <math>D</math>, retoma el procedimiento que estudiaste en la secuencia de tarea 1 con el ma-</p>	<p>Los estudiantes deben trazar una recta que contenga el punto <math>D</math> (extremo del gnomon). Al retomar el procedimiento estudiado en la Secuencia 1, dicha recta es paralela a la <math>\overleftrightarrow{TS}</math> por <math>D</math>.</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El profesor debe contextualizar a los estudiantes y llevarlos a precisar</li> </ol>

<p>terial concreto y construye la recta correspondiente al rayo del Sol en <math>D</math>, de tal manera que genere sombra en <math>\odot T_r</math>.</p>	 <p><i>Figura 26. Representación de la sombra del gnomon</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 6 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Incorrecta inclinación de la recta: Los estudiantes pueden trazar la recta sin la inclinación correcta, es decir, construirlo de tal manera que no sea paralela con <math>\overleftrightarrow{TS}</math>, lo que implica resultando en una representación inexacta de la sombra.</li> <li>2. Confusión en la relación entre rectas: Puede haber confusión al relacionar la línea vertical y <math>\overleftrightarrow{TS}</math> y la recta inclinada del rayo solar en <math>D</math>, especialmente en cómo estas representan diferentes posiciones del sol.</li> </ol>	<p>que Eratóstenes asumió que los rayos de Sol llegan paralelos entre sí a la superficie de la Tierra, dado lo alejado que está el Sol de la Tierra. Así las cosas, que la relación de paralelismo es una manera conveniente que permite construir la recta <math>l</math> deseada como simulación del rayo de Sol que “atraviesa” a <math>D</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Establecer junto con los estudiantes, que <math>\{R\} = l \cap \odot T_r</math></li> </ol>
<p><b>Paso 7. Relación de ángulos</b></p> <p>Teniendo claro que en el paso 6, <math>\{R\} = l \cap \odot T_r</math>.</p> <p>Explorando con todas las herramientas de esta aplicación:</p>	<p>Los estudiantes deben identificar y construir los ángulos <math>\angle ATS</math> y <math>\angle RDA</math> correctamente dentro de GeoGebra. <math>\angle ATS</math> es un ángulo en Siena relacionado con la recta que representa los rayos del sol, y <math>\angle ADR</math> es un ángulo formado en Alejandría por el rayo de sol y <math>\overline{AR}</math> que es la sombra del gnomon sobre la circunferencia terrestre.</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Proporcionar una explicación clara de cómo se forman estos ángulos y sugerir tomar su medida. Decirles que muevan los puntos <math>A</math> y <math>S</math> con miras a establecer</li> </ol>



	<p>pueden interpretar mal cómo los ángulos se reflejan uno al otro en términos de medidas y propiedades.</p>	
<p><b>Paso 8. Determinación del triángulo</b></p> <p>Eratóstenes uso el <math>\Delta RDA</math> indirectamente, para establecer la <math>m\angle ATS</math>. Según las condiciones dadas:</p> <p><i>¿qué tipo de triángulo es <math>\Delta RDA</math>? ¿Qué datos del <math>\Delta RDA</math> podría necesitar Eratóstenes para calcular la <math>m\angle ATS</math>? Explica tu respuesta.</i></p>	<p>Se espera que los estudiantes digan que el <math>\Delta ADR</math> es rectángulo, dadas las condiciones impuestas por Eratóstenes. Ahora bien, dado que <math>\angle ATS</math> y <math>\angle ADR</math> son congruentes, se espera que los estudiantes se percaten que trabajando en el <math>\Delta ADR</math> y estableciendo la medida de <math>\angle ADR</math>, indirectamente tenga la medida del <math>\angle ATS</math>.</p> <p>Respecto a cómo trabajar con dicho triángulo para establecer la <math>m\angle ADR</math>, surgen, por lo menos, las siguientes dos hipótesis:</p> <p>1) Mediante el uso de razones trigonométrica: dado que el <math>\Delta ADR</math> es rectángulo en <math>A</math> y conocida <math>AD</math> (altura de gnomon) y <math>AR</math> (la medida de la sombra del gnomon), se usa el Teorema de Pitágoras para hallar <math>RD</math>,</p> $RD^2 = AR^2 + AD^2$ $RD = \sqrt{AR^2 + AD^2}$ <p>Luego se usa la razón trigonométrica de seno:</p> $\text{sen}(m\angle ADR) = \frac{AR}{RD}$ $m\angle ADR = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AR}{RD}\right)$ <p>Otra manera puede basarse en el uso la razón trigonométrica del coseno:</p> $\text{cos}(m\angle ADR) = \frac{AD}{RD}$ $m\angle ADR = \text{cos}^{-1}\left(\frac{AD}{RD}\right)$ <p>Ahora bien, si no se usa el Teorema de Pitágoras para hallar <math>HK</math>, la medida del ángulo en cuestión se podría establecer con la razón trigonométrica de tangente:</p> $\text{tan}(m\angle ADR) = \frac{AR}{AD}$ $m\angle ADR = \text{tan}^{-1}\left(\frac{AR}{AD}\right)$	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Revisar los conceptos del Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y sus aplicaciones, así como la ley de senos y cosenos. Si los estudiantes no han tenido un proceso educativo relativo a estos aspectos, el profesor podría sugerir que consulten recursos en la web como el siguiente: <a href="https://brianstiffcha-con.wixsite.com/fcm-matematicas">https://brianstiffcha-con.wixsite.com/fcm-matematicas</a> En ese link se encuentra una página web que presenta los objetos protagonistas, mostrando su aplicación y sustento de su validez. En el marco del estudio correspondiente de dicha página web, el profesor puede orientar ciertos aspectos, enfocados particularmente en el uso de tal hecho para el cálculo de la medida de un ángulo.</li> <li>2. Realizar ilustraciones, paso a paso, sobre cómo aplicar correctamente cada método en GeoGebra. Mostrar ejemplos claros de cada técnica para calcular ángulos y lados.</li> <li>3. Permitir a los estudiantes realizar ejercicios en GeoGebra bajo supervisión, donde puedan aplicar cada una de las técnicas trigonométricas discutidas y recibir retroalimentación inmediata.</li> <li>4. Proporcionar hojas de trabajo, videos tutoriales o enlaces a simulaciones que expliquen el uso de trigonometría en triángulos rectángulos. Esto puede ayudar especialmente a aquellos estudiantes que</li> </ol>

2) Mediante la ley de senos, conocidos  $AK$  y  $KH$ :

$$\frac{\text{sen}(m\angle ADR)}{AR} = \frac{\text{sen}(m\angle RAD)}{RD}$$

Dado que el  $\triangle ADR$  es rectángulo en  $A$ , entonces

$$\frac{\text{sen}(m\angle ADR)}{AR} = \frac{\text{sen}(90^\circ)}{RD}$$

$$\text{sen}(m\angle ADR) = \frac{AR}{RD}$$

$$m\angle ADR = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AR}{RD}\right)$$

Mediante la ley de coseno, conocidas las medidas de los lados del  $\triangle ADR$ :

$$AR^2 = AD^2 + RD^2 - 2(AD)(RD)\cos(m\angle ADR)$$

$$\cos(m\angle ADR) = \frac{AR^2 - (AD^2 + RD^2)}{-2(AD)(RD)}$$

Lo cual es equivalente a  $\cos(m\angle AHK) = \frac{AD}{RD}$  dado que el  $\triangle ADR$  es rectángulo en  $A$ . Así,

$$m\angle ADR = \cos^{-1}\left(\frac{AD}{RD}\right)$$

necesitan un repaso adicional o diferentes enfoques para entender los conceptos.

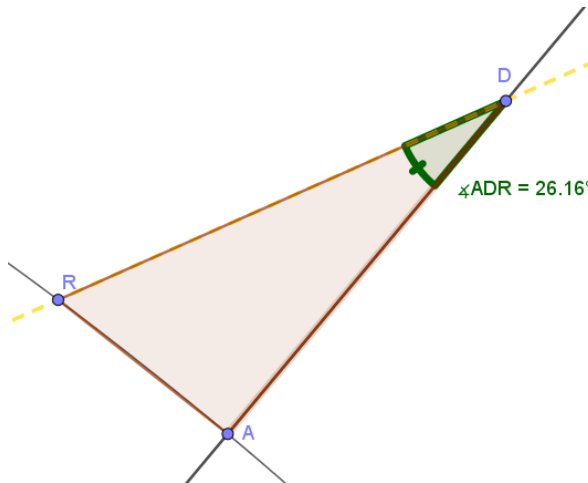


Figura 27. Determinación del triángulo

	<p>Los conceptos matemáticos se le logran utilizar en este paso son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definición de triángulo rectángulo</li> <li>- HG “Teorema” Pitágoras</li> <li>- Definición de relaciones trigonométricas</li> <li>- Ley de seno</li> <li>- Ley de coseno</li> </ul> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 8 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los estudiantes pueden cometer errores al aplicar el teorema, por ejemplo, sumando en lugar de restar los cuadrados de los lados o confundiendo los lados del triángulo al asignar sus valores.</li> <li>2. Usar seno, coseno o tangente incorrectamente basándose en los lados conocidos o el ángulo que desean encontrar.</li> <li>3. Errores al calcular la inversa trigonométrica, en la confusión sobre cuándo y cómo usar funciones inversas como <math>\text{sen}^{-1}</math>, <math>\text{cos}^{-1}</math> o <math>\text{tan}^{-1}</math>.</li> <li>4. Aplicación incorrecta de la ley de senos o cosenos en un triángulo rectángulo, específicamente, la ley de cosenos raramente se necesita en un triángulo rectángulo, ya que el Teorema de Pitágoras es más directo y menos propenso a errores.</li> <li>5. Medición incorrecta de lados y ángulos en GeoGebra, los estudiantes pueden no medir correctamente las distancias o ángulos utilizando las herramientas de GeoGebra, o podrían no ajustar correctamente la escala del dibujo para sus cálculos.</li> </ol>	
<p><b>Paso 9. Determinación del ángulo y el perímetro de la Tierra según Eratóstenes</b></p> <p>La historia cuenta que Eratóstenes determinó que la <math>m\angle ATS = 7^\circ 12'</math>. Si se toma dicho dato como verdadero, y sabiendo que <math>m\widehat{AS}</math> era 5000 estadios,</p>	<p>Se espera que los estudiantes utilizando la <math>m\angle ATS = 7^\circ 12'</math> y la distancia entre Siena (S) y Alejandría (A) de 5000 estadios, los estudiantes puedan aplicar la relación proporcional entre el ángulo subtendido y el ángulo total de un círculo (360 grados) para encontrar el perímetro de la Tierra. A partir del perímetro, los estudiantes deberán utilizar la fórmula:</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Antes de comenzar los cálculos, asegurarse de que todos los estudiantes entiendan cómo convertir minutos a grados decimales y viceversa.</li> </ol>

<p><i>¿Cuál es el perímetro de la circunferencia de la Tierra? ¿Cuál es la medida del radio de la Tierra? Explique [sugerencia: use toda la información provista a lo largo de la Secuencia de tareas].</i></p>	<p>Dada una <math>\odot T_r</math>, entonces</p> $P_{\odot T_r} = m\widehat{AS} \frac{360}{m\angle ATS}$ <p>Sustituyendo los valores medidos y estimados anteriormente, puedan concluir que:</p> $P_{\odot T_r} = 5000 \text{ estadios} \cdot \frac{360^\circ}{7^\circ 12''}$ $P_{\odot T_r} = 5000 \text{ estadios} \cdot 50$ $P_{\odot T_r} = 25000 \text{ estadios}$ <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 9 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los estudiantes pueden cometer errores al convertir minutos a grados decimales, lo cual es crucial para la correcta proporción en el cálculo del perímetro.</li> <li>2. Errores al establecer la proporción correcta entre el ángulo subtendido y los grados totales de un círculo, o errores aritméticos al multiplicar por 360.</li> <li>3. Confusión al manejar unidades como en este caso los estadios.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Mostrar ejemplos detallados de cómo establecer y resolver la proporción para calcular el perímetro, utilizando tanto la pizarra como software como GeoGebra.</li> <li>3. Discutir en clase la importancia de la precisión en el uso de unidades y constantes, especialmente en contextos históricos y científicos.</li> </ol>
<p><b>Paso 10.</b> <i>Unidades de medida para hallar el perímetro de la Tierra.</i></p> <p><i>Establezca el perímetro de la circunferencia de la Tierra y la medida del radio de la Tierra usando como unidad de medida el kilómetro suponiendo que:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <i>Eratóstenes usó como unidad de medida un estadio ático-italiano</i></li> <li>○ <i>Eratóstenes usó como unidad de medida un estadio egipcio</i></li> </ul> <p><i>¿Cuál de los dos resultados se acerca más a las medidas conocidas actualmente tanto para el perímetro como para el radio de la tierra?</i></p> <p><i>[haga una consulta para conocer tales medidas actuales].</i></p>	<p>Los estudiantes deberán usar la regla de tres directa para determinar las equivalencias.</p> <p>La medida del estadio que uso Eratóstenes equivale, aproximadamente, 157,5 m. Con lo cual,</p> $P_{\odot T} = 250000 \text{ estadios} \cdot 157,5 \text{ m}$ $P_{\odot C} = 39.375 \text{ km}$ <p>Para convertir las medidas del perímetro y radio de la Tierra de estadios a kilómetros, primero necesitamos saber las conversiones específicas para cada tipo de estadio que Eratóstenes podría haber usado: el estadio ático-italiano y el estadio egipcio.</p> <p>Usando estas conversiones para calcular el perímetro y el radio de la Tierra en kilómetros para cada tipo de estadio. Luego comparando los resultados con las medidas modernas del perímetro y el radio de la Tierra.</p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 10 son:</p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Proporcionar una lección o material de referencia sobre las conversiones de unidades específicas para cada tipo de estadio, asegurándose de que los estudiantes comprendan las diferencias.</li> <li>2. Proponer ejercicios prácticos de conversión de unidades antes de proceder con los cálculos del perímetro y el radio.</li> <li>3. Demostraciones en clase sobre cómo aplicar las fórmulas para calcular el perímetro y el radio, usando ejemplos claros y resolución paso a paso.</li> <li>4. Sesiones de práctica en clase donde los estudiantes puedan calcular estos valores</li> </ol>

<p>Recuerde que un estadio Ático-italiano se estima que mide aproximadamente 184,8 m, mientras que un estadio egipcio en aproximadamente 157,5 m.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Errores de conversión: Puede haber errores en la conversión de estadios a kilómetros si los estudiantes usan valores incorrectos o malinterpretan las unidades.</li> <li>2. Cálculos incorrectos: Errores en el uso de fórmulas para calcular el perímetro y el radio pueden llevar a resultados incorrectos.</li> <li>3. Comparación incorrecta: Los estudiantes pueden tener dificultades para contextualizar sus resultados frente a los datos modernos, especialmente si no entienden cómo comparar las magnitudes o no tienen acceso a los datos actuales.</li> </ol>	<p>bajo supervisión, permitiendo la corrección inmediata de errores.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>5. Emplear herramientas como calculadoras en línea o software como GeoGebra para ayudar en los cálculos y visualizaciones.</li> <li>6. Acceso a bases de datos o recursos educativos que provean las medidas modernas de la Tierra para facilitar comparaciones precisas.</li> <li>7. Organizar discusiones sobre cómo las mediciones de Eratóstenes se comparan con las modernas y lo que esto implica sobre el desarrollo de la ciencia geográfica y astronómica.</li> <li>8. Reflexionar sobre la precisión y los métodos antiguos frente a los modernos, fomentando una apreciación de los avances en la medición y el entendimiento de nuestro planeta.</li> </ol>
---	--	---

#### 4.4 Tercera secuencia: Modelación del método de Eratóstenes con simuladores en tiempo real

En esta sección, se presenta una secuencia de tareas centrada en la simulación del método de Eratóstenes utilizando aplicaciones digitales. En esta secuencia se simulará el método usando datos “reales” provistos por los aplicativos y experimentaciones con objetos reales como la sombra de un palo generada por el Sol que el estudiante mismo debe gestionar. Si bien, con la secuencia previa se ha generado una sustentación del método y con la primera se ha verificado la eficacia del mismo, con esta secuencia se podrá desarrollar el método y verificarlo con datos que sí corresponden con la realidad.

A lo largo de esta secuencia, los estudiantes trabajarán en actividades grupales, compartirán sus propuestas y validarán colectivamente las soluciones, siguiendo indicaciones que asegura una inmersión profunda y un aprendizaje colaborativo.

*Descripción de los materiales y recursos:* Para llevar a cabo la secuencia de tareas utilizando simuladores digitales en el estudio del método de Eratóstenes, se necesitarán los siguientes materiales y recursos:

- **Computadoras o tabletas con acceso a aplicaciones digitales:** Dispositivos a través de los cuales se pueda ejecutar aplicaciones como Google Earth.
- **Acceso a internet:** Conexión estable y rápida para garantizar el acceso continuo a los aplicativos, videos educativos y recursos en línea. Facilitar la visualización de videos explicativos y la búsqueda de información adicional necesaria para las tareas, en este caso, centrada en la tabla de ecuación del tiempo.
- **Proyector o pantalla:** Equipo audiovisual con buena resolución y tamaño adecuado para que todos los estudiantes puedan ver claramente las presentaciones y demostraciones. Utilizarlo en presentaciones grupales y demostraciones en vivo de las tareas realizadas en las aplicaciones.
- **Material manipulable:** Un palo de escoba o un recogedor que se puedan mantener estable sobre la superficie del suelo, perpendicular a este.

A continuación, presentamos la Tabla 7 donde describe los enunciados, respuestas deseables o esperados de los estudiantes y sus respectivas sugerencias de gestión del profesor de la primera secuencia.

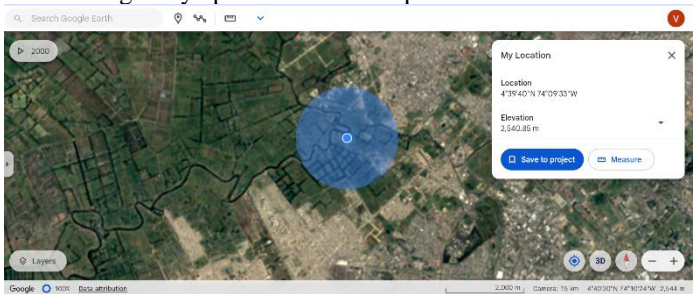
### Modelación del método con simuladores en tiempo real

#### Expectativa de aprendizaje:

Simular el método de Eratóstenes para calcular el perímetro de la tierra en tiempo real y con datos reales del macro espacio usando recursos digitales disponibles en la red.

En las secuencias anteriores has tenido la oportunidad de conocer el método de Eratóstenes para calcular el perímetro de la Tierra y sustentar razonabilidad. Sin embargo, no has tenido oportunidad de hacer exactamente lo que él hizo, con datos “reales” (desde tu ubicación al punto de intersección entre el trópico de cáncer y el meridiano de tu ubicación) y siguiendo las indicaciones de tiempo llevada a cabo por él (tomar unas medidas específicas al medio día del solsticio de verano del hemisferio norte). Por supuesto, hacerlo implica conocer esos datos y tener solo una oportunidad en el año (aquel día del solsticio de verano). Sin embargo, con recursos digitales actuales y un ajuste de carácter temporal es posible desarrollar el método en tiempo real y con datos reales, dados por simuladores virtuales de La Tierra. ¿Cómo hacerlo? Mediante la siguiente secuencia tendrás respuestas a esta pregunta. Necesitarás tener un dispositivo con acceso a internet y Google Earth. Además, debe contar con una varilla que simule un gnomon; un recogedor doméstico podría ser suficiente. Veamos:

#### Tarea 1. Ubicación en el espacio

ENUNCIADOS DE LA TAREA	RESPUESTAS DESEABLES O ESPERADAS DE LOS ESTUDIANTES	SUGERENCIAS DE GESTIÓN DEL PROFESOR
<p><b>Paso 1. Establece tu ubicación en coordenadas</b></p> <p>Abre Google Earth en tu dispositivo. Esto puede ser a través de la aplicación móvil en tu celular o Tablet, o utilizando un navegador web en tu computadora.</p> <p>Busca el botón “mostrar tu ubicación”, usualmente representado por un ícono de punto o cruz ubicado en la parte inferior derecha de la pantalla. Este botón puede variar ligeramente en diseño entre la versión de escritorio y la móvil, pero su función es la misma.</p> <p>Haz clic o toca este botón. Automáticamente centrará el mapa en tu ubicación actual, marcándola claramente en el mapa. Este punto lo representaremos intuitivamente como <b>A</b>. Una vez centrado el mapa en tu ubicación, puedes visualizar una ventana de tus coordenadas exactas tanto de la longitud y latitud.</p>	<p>Los estudiantes logran centrar el mapa en su ubicación actual, obteniendo las coordenadas de latitud y longitud exactas de donde se encuentran. Además, aprenden a identificar y entender la representación de las coordenadas geográficas en términos de latitud (N/S) y longitud (E/O). Mejoran sus habilidades en el manejo de herramientas tecnológicas y aplicaciones de mapeo.</p>  <p><i>Figura 28. Ubicación en coordenadas en Google Earth</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los estudiantes pueden tener dificultades para acceder a Google Earth debido a conexiones a internet inestables o lentas.</li> <li>2. El GPS o la localización por red puede no ser precisa, especialmente en interiores o áreas urbanas densamente pobladas.</li> <li>3. Algunos estudiantes pueden no encontrar fácilmente el botón de ubicación debido a diferencias en la interfaz entre dispositivos móviles y de escritorio.</li> </ol>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Asegurarse de que todos los estudiantes tengan acceso a una conexión de internet estable antes de la actividad.</li> <li>2. Tener listos dispositivos alternativos o una ubicación con buena señal de GPS.</li> <li>3. Proporcionar instrucciones claras y detalladas, posiblemente con imágenes o un video demostrativo, sobre cómo usar Google Earth y encontrar el botón de ubicación.</li> <li>4. Enseñar previamente sobre latitud y longitud para asegurar la comprensión de estos conceptos.</li> <li>5. Caminar por el aula para ayudar a los estudiantes que luchan con la tecnología o la tarea específica.</li> </ol>

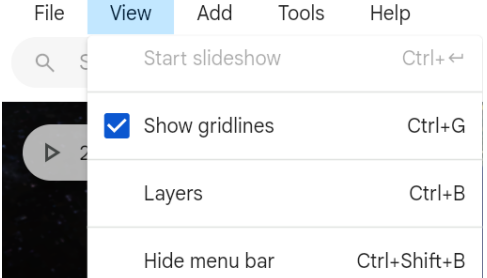

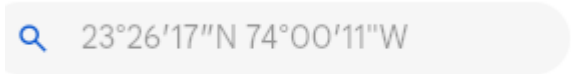
	<p>4. Puede haber confusión sobre qué representan las coordenadas y cómo se leen o interpretan.</p>	
<p><b>Paso 2.</b> <i>Encontrar las coordenadas exactas en el trópico de cáncer</i></p> <p>Después de identificar tu longitud y latitud, utiliza el control de zoom de Google Earth para alejar la vista y visualizar el globo terráqueo. Luego en la aplicación en la parte superior en las herramientas habilita “Show gridlines” para poder visualizar el trópico de cáncer.</p> <p>Ahora, ubica un punto de referencia en el trópico de cáncer de tal modo que lo ubiques con el buscador de la aplicación; la latitud 23°26'14” (trópico de cáncer) y coincida con tu longitud. Este punto lo representaremos como <b>B</b>.</p> <p><i>¿Qué coordenadas tendría este punto?</i></p>	<p>Los estudiantes deberían ser capaces de alejar la vista en Google Earth para ver todo el globo terráqueo. Deberán poder habilitar la opción “Show Gridlines” como se ilustra en la Figura 27, para visualizar las líneas de longitud y latitud, incluyendo la línea ecuatorial. Ubicarán correctamente un punto en el trópico de cáncer que tenga la misma longitud que su ubicación original (Punto A).</p>  <p><i>Figura 29. Herramienta para visualizar la línea ecuatorial</i></p>  <p><i>Figura 30. Representación del trópico de cáncer en el globo terráqueo</i></p>  <p><i>Figura 29. Búsqueda del punto B</i></p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mostrar en una pantalla grande o mediante un proyector cómo realizar cada paso, incluyendo cómo alejar la vista, activar las líneas de cuadrícula y encontrar el punto B.</li> <li>2. Proporcionar capturas de pantalla o folletos que ilustren dónde y cómo activar las opciones necesarias en Google Earth.</li> <li>3. Antes de la actividad, explicar qué es la línea ecuatorial y cómo se relaciona con las coordenadas de latitud y longitud.</li> <li>4. Reforzar cómo leer y entender las coordenadas en un mapa o globo.</li> <li>5. Se puede explicar este paso 2 con el siguiente video, aunque allí se utiliza la aplicación Google Maps en vez de Google Earth pero es el mismo procedimiento: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=H4ci0uPc9XQ">https://www.youtube.com/watch?v=H4ci0uPc9XQ</a></li> </ol>



Figura 31. Ubicación del punto B

Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 2 son:

1. Dificultad en el uso de herramientas: Algunos estudiantes podrían tener problemas para encontrar y activar la opción "Show Gridlines".
2. Comprensión del trópico de cáncer: Puede haber confusión sobre qué representa el trópico de cáncer y cómo encontrarla.
3. Navegación y zoom: Problemas para controlar el zoom y navegar por el mapa para alinear correctamente la longitud con la línea ecuatorial.
4. Identificación de coordenadas exactas: Dificultad para leer o interpretar las coordenadas exactas del punto B una vez ubicado.

**Paso 3.** Hallar la distancia entre estas dos ubicaciones

Debes medir la distancia entre tu ubicación actual y el punto en el trópico de cáncer que coincide con tu longitud, con la herramienta "Measure distance and area". Explora.

*¿Cuál es la distancia entre estos dos puntos de referencia?*



Figura 32. Herramienta para hallar distancias en Google Earth

Los estudiantes aprenderán a utilizar la herramienta "Measure distance and area" en Google Earth para medir la distancia entre dos puntos. Entenderán cómo se mide la distancia en línea recta sobre la superficie terrestre entre dos puntos de coordenadas diferentes. Aplicarán sus conocimientos de latitud y longitud en una tarea práctica que involucra el cálculo de distancias.

Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:

1. Realizar una demostración en vivo de cómo acceder y usar la herramienta "Measure distance and area". Mostrar también cómo seleccionar correctamente los puntos de inicio y fin para la medición.
2. Proporcionar instrucciones visuales o guías paso a paso que los estudiantes puedan seguir durante la actividad.
3. Asegurarse de que cada estudiante o grupo de estudiantes reciba atención individual

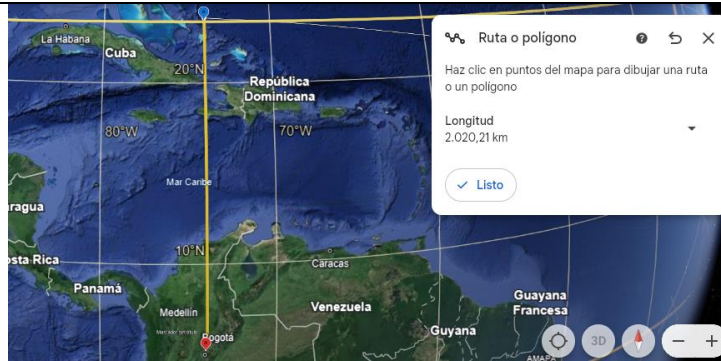


Figura 33. Distancia entre A y B

Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:

1. Algunos estudiantes pueden tener problemas para encontrar o usar correctamente la herramienta de medición en Google Earth.
2. Puede haber imprecisiones al seleccionar el punto de ubicación actual o el punto en la línea ecuatorial, afectando la medición de la distancia.
3. Los estudiantes podrían tener dificultades para entender o interpretar las unidades de medida (kilómetros, millas) mostradas por la herramienta.
4. Navegar y manejar la aplicación puede ser desafiante para algunos, especialmente si no están familiarizados con herramientas de mapeo digital.

durante la actividad para resolver cualquier problema técnico o de comprensión.

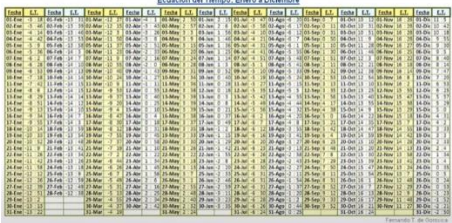
4. Configurar estaciones de trabajo donde los estudiantes puedan practicar la medición en presencia de un instructor o asistente.
5. Explicar y revisar las diferentes unidades de medida que pueden utilizar en Google Earth (kilómetros, millas) y cómo convertir entre ellas si es necesario.
6. Incluir una discusión sobre cómo la forma y tamaño de la Tierra pueden afectar las mediciones de distancias reales.


**Paso 4.** Establecer la fecha de la simulación del método

Para replicar el método de Eratóstenes y medir la circunferencia de la Tierra, es crucial que elijas un día en que el cielo esté completamente despejado y soleado. Esta condición es esencial porque el método se basa en medir la longitud de las sombras proyectadas por objetos verticales (como varillas o columnas) en dos localizaciones diferentes al mismo tiempo del día, típicamente durante el mediodía solar, cuando el sol

En este paso del proceso, los estudiantes tendrán la responsabilidad de seleccionar un día específico que sea ideal para aplicar el método de Eratóstenes. Esta elección es crucial, ya que las condiciones climáticas deben ser óptimas para la observación y medición de las sombras, elementos centrales de este método. Se recomienda que los estudiantes consulten previamente pronósticos meteorológicos para asegurar un cielo despejado y soleado. Además, se debería considerar la coordinación con el calendario académico para evitar conflictos con otras actividades escolares. Esta planificación detallada y cuidadosa permitirá a los estudiantes aprovechar al máximo la experiencia

El profesor debe enfatizar la importancia de seleccionar un día soleado y con pocas nubes para el adecuado desarrollo del método. Además, puede recomendar a los estudiantes consultar páginas web que pronostiquen el clima, asegurando así las condiciones óptimas para la tarea.

<p>alcanza su punto más alto en el cielo en cada ubicación.</p>	<p>educativa que ofrece el método de Eratóstenes, facilitando una comprensión más profunda de los conceptos geométricos y astronómicos que se exploran a través de su aplicación.</p>	
<p><b>Paso 5. Determina la ecuación del tiempo</b></p>		
<p>La "ecuación del tiempo" es un concepto utilizado para corregir la diferencia entre el tiempo solar verdadero, que varía a lo largo del año debido a la inclinación del eje terrestre y la forma elíptica de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y el tiempo solar medio, que asume un sol virtual moviéndose a una velocidad constante a lo largo del ecuador celeste. Esta diferencia puede ser positiva o negativa y cambia día a día a lo largo del año.</p> <p>Para ello utiliza la siguiente tabla de la ecuación del tiempo:</p>  <p>En la tabla de la ecuación del tiempo, busca la fecha seleccionada. Esta te indicará el ajuste necesario en minutos que debes aplicar al tiempo solar medio para obtener el tiempo solar verdadero. El valor indicado puede ser positivo o negativo, lo que significa que debes sumar o restar ese tiempo al mediodía local para encontrar el momento exacto en que el Sol estará en su punto más alto en el cielo, es decir, en el meridiano solar.</p> <p><i>¿Cuál sería tu ecuación del tiempo según el día que elegiste?</i></p>	<p>Los estudiantes aprenderán sobre la ecuación del tiempo y su importancia en la corrección del tiempo solar medio frente al tiempo solar verdadero. Serán capaces de leer y aplicar correctamente la información de la tabla de la ecuación del tiempo para ajustar el mediodía local y determinar el momento exacto del meridiano solar. Utilizarán este conocimiento para realizar observaciones precisas del sol en su punto más alto, integrando conceptos astronómicos y matemáticos.</p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los estudiantes podrían tener dificultades para entender la diferencia entre el tiempo solar medio y el tiempo solar verdadero.</li> <li>2. Podrían leer incorrectamente los valores de la tabla o aplicar de manera equivocada el ajuste al mediodía local.</li> <li>3. Calcular mal el tiempo exacto para la observación debido a confusiones con la suma o resta de minutos.</li> <li>4. Tener problemas para observar el sol en el momento exacto debido a la imprecisión en los cálculos o la falta de un reloj preciso.</li> </ol>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Antes de la actividad, explicar en detalle la ecuación del tiempo y la importancia de las correcciones para determinar el tiempo solar verdadero.</li> <li>2. Proporcionar una indicación clara paso a paso sobre cómo leer y utilizar la tabla de la ecuación del tiempo.</li> <li>3. Asegurarse de que los estudiantes tengan acceso a relojes precisos o cronómetros para realizar sus observaciones.</li> <li>4. Estar presente durante las observaciones para ayudar a ajustar el tiempo de observación si es necesario.</li> <li>5. Después de la observación, discutir los resultados y las experiencias de los estudiantes para reforzar el aprendizaje y corregir cualquier malentendido.</li> </ol> <p>A continuación, presentamos un ejemplo claro de como abordar este paso 5 con las indicaciones dadas, suponiendo que el día escogido para aplicar el método es el 15 de agosto del 2024.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Buscar el Ajuste de la Ecuación del Tiempo</b></li> </ul> <p>Para el 15 de agosto, supongamos que la tabla de la ecuación del tiempo indica un ajuste de -4 minutos. Esto significa que el tiempo solar verdadero es 4 minutos antes del tiempo solar medio.</p>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Determinar el Tiempo Solar Medio</b> El tiempo solar medio se basa en el estándar de mediodía solar, que en este caso es a las 12:00 PM (hora local).</li> <li>○ <b>Aplicar el Ajuste de la Ecuación del Tiempo</b> Dado que el ajuste es -4 minutos, debemos restar esta cantidad del tiempo solar medio para encontrar el tiempo solar verdadero. Entonces, el cálculo sería: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiempo solar medio: 12:00 PM</li> <li>• Ajuste de la ecuación del tiempo: -4 minutos</li> </ul> </li> </ul> <p>12:00 PM - 4 minutos = 11:56 AM</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Resultado</b> Para el 15 de agosto, el Sol estará en su punto más alto en el cielo (el meridiano solar) a las 11:56 AM (hora local) en lugar de a las 12:00 PM.</li> </ul>
<p><b>Paso 6. Aplicación del método</b></p>		
<p>Con los preparativos completos para aplicar el método de Eratóstenes, incluida la selección de la fecha y la corrección horaria según la ecuación del tiempo, el siguiente paso es realizar la observación y medición de las sombras para calcular la circunferencia de la Tierra.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Escoge un lugar al aire libre, como el patio de un colegio o cualquier espacio abierto que tenga una superficie plana. Este sitio debe estar libre de obstrucciones que puedan alterar la sombra del palo que hará las veces del gnomon (una varilla perpendicular al suelo, puede ser un recogedor de basura domésticos).</li> <li>- Colocación: Coloca el objeto que simula el gnomon perpendicular al suelo. Asegúrate de que esté perfectamente perpendicular al</li> </ul>	<p>Los estudiantes deberán instalar correctamente el gnomon en el suelo, asegurándose de que esté perfectamente vertical. Deberán medir con precisión la longitud del gnomon y la longitud de su sombra en el momento adecuado. Aplicarán las medidas obtenidas para calcular el ángulo de la sombra y, posteriormente, usarán este ángulo para estimar la circunferencia de la Tierra.</p>  <p style="text-align: center;"><i>Figura 34. Estudiantes realizando el método de Eratóstenes</i></p>	<p>Para abordar estos posibles errores, el profesor puede implementar las siguientes estrategias de gestión:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Antes de la actividad, demostrar cómo colocar correctamente el gnomon en vertical utilizando un nivel.</li> <li>2. Durante la actividad, caminar entre los grupos de estudiantes para verificar y corregir la posición del gnomon.</li> <li>3. Realizar un taller previo para enseñar cómo medir longitudes con precisión, utilizando herramientas adecuadas como cintas métricas.</li> <li>4. Permitir que los estudiantes practiquen la medición de longitudes en un entorno controlado antes de la actividad real.</li> </ol>

<p>suelo para una medición precisa. Puedes usar un nivel para verificar su verticalidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Medición del Gnomon (<b>LG</b>): Mide la longitud del gnomon desde su base hasta su punto más alto. Anota esta medida, ya que la necesitarás para los cálculos posteriores.</li> <li>- Marca la Sombra: Justo en el momento calculado (ajustado por la ecuación del tiempo), observa la sombra que el gnomon proyecta. Con una tiza o cualquier otro marcador temporal, señala en el suelo el punto donde termina la sombra del gnomon.</li> <li>- Medición de la Sombra (<b>LS</b>): Mide la distancia desde la base del gnomon hasta el extremo de la sombra marcada. Esta es la longitud de la sombra que necesitarás para los cálculos.</li> </ul> <p>Anota cuidadosamente tanto la longitud del gnomon (<b>LG</b>) como la longitud de la sombra (<b>LS</b>). Estos datos son cruciales para calcular el ángulo de la sombra, que a su vez te permitirá estimar la circunferencia de la Tierra utilizando las fórmulas matemáticas correspondientes.</p>	<p>Nota: Martínez, A, 2009. <i>Alumnos del cabanillas y de un instituto polaco miden la circunferencia terrestre. Pontevedra, España.</i></p> <p>Los posibles errores o dificultades de resultados de los estudiantes al realizar el Paso 1 son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El gnomon puede no estar perfectamente vertical, afectando la precisión de las sombras proyectadas.</li> <li>2. Medir incorrectamente la longitud del gnomon o la longitud de la sombra puede llevar a cálculos erróneos del ángulo de la sombra.</li> <li>3. No realizar la observación en el momento correcto ajustado por la ecuación del tiempo puede resultar en una medición incorrecta de la longitud de la sombra.</li> <li>4. Los estudiantes podrían tener problemas para aplicar las fórmulas matemáticas necesarias para calcular el ángulo de la sombra y la circunferencia de la Tierra.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>5. Explicar detalladamente cómo y por qué ajustar el tiempo de observación según la ecuación del tiempo.</li> <li>6. Recordar a los estudiantes el tiempo exacto de observación durante el día de la actividad.</li> <li>7. Proporcionar una hoja con las fórmulas necesarias y ejemplos de cómo aplicarlas.</li> <li>8. Ayudar a los estudiantes con los cálculos durante la actividad, asegurándose de que comprenden cada paso del proceso.</li> </ol>
---	--	--

## CAPITULO V. CONCLUSIONES

El trabajo de grado ha procurado promover mediante una secuencia de tres tareas, la integración de métodos antiguos de medición geométrica para grandes longitudes, como el método de Eratóstenes para el cálculo del perímetro de La Tierra, dentro de un marco educativo contemporáneo. Esto es, procura llevar al aula de clase una situación de la astronomía antigua para estudiarla con objetos de la geometría y la trigonometría. Este estudio enfatizamos en el análisis didáctico de esta secuencia didáctica siguiendo la propuesta de Gómez et al. (2018). En este capítulo presentamos las conclusiones relativas a nuestro trabajo de grado en relación con tres apartados específicos: el cumplimiento parcial o completo de los objetivos planteados en este TG; los aportes y aprendizajes que nos dejó a nosotros como futuros profesores; y, las dificultades presentadas durante la elaboración de las secuencias junto con su panorama.

### *Evaluación de Objetivos Específicos*

Para realizar un balance detallado en la Tabla 6, se ha considerado cada objetivo específico (EO) propuesto en la sección (1.2.1 Capítulo 1) y se describe la forma, la medida y las dificultades asociadas en que se alcanzó:

*Tabla 6. Tabla de Cumplimiento de Objetivos Específicos*

<b>Objetivo específico</b>	<b>Nivel de alcance</b>
OE1: Describir el método de Eratóstenes para hallar el perímetro de la Tierra, decantando los objetos de la geometría y trigonometría presentes en él.	En el capítulo 2 procuramos hacer una descripción detallada del método de Eratóstenes, empleando los tipos de objetos primarios propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico. Así, mediante esa descripción, destacamos los elementos de la geometría y la trigonometría que permiten sustentar la razonabilidad del método. No hubo espacio para hacer un estudio juicioso del error involucrado en el método. Este podría tener sus bases en dos datos: la medida del ángulo clave (el generado por el gnomon y el rayo de sol que “atraviesa” su extremo) y la medida de longitud entre Alejandría y Siena. Hacer un estudio de estos asuntos, sobre todo lo relativo al primero asunto en cuanto la modelación de la dirección de los rayos de luz del Sol podría ser interesante.
OE2. Diseñar secuencias de tareas que promueva el estudio del método de Eratóstenes y, en ese marco, el estudio del uso de algunos objetos de la geometría y la trigonometría (e.g., razones trigonométricas, ley de senos y de cosenos)	Se diseñaron tres secuencias de tareas, expuestas en el capítulo 4 de este documento: una relativa a la verificación del método de Eratóstenes mediante la simulación del mismo con material concreto que involucra datos del microespacio. La segunda relativa a modelación del método con GeoGebra y a promover sustentos teóricos (de la geometría y la trigonometría – razones trigonométricas, ley de senos y de cosenos –) de su razonabilidad. Y la final asociada a una simulación del método en tiempo real con datos reales del macro espacio y, usando recursos digitales y material concreto.
OE3: Hacer una descripción de las secuencias de tareas diseñadas, de forma tal que se logre identificar su potencial para	En capítulo 4 expone una descripción, con cierto detalle, de las tareas o indicaciones que compone cada una de las secuencias diseñadas. Para ello, seguimos la propuesta de descripción de tareas propuesta por Gómez et al (2018). Para precisar aspectos relativos a los requisitos y las metas, usamos la propuesta de tipos de objetos primarios del Enfoque Onto-Semiótico (2007).

<p>precisar maneras de articulación entre la trigonometría, la geometría y la astronomía.</p>	<p>No se tuvo el espacio para pilotear las secuencias; con lo cual todas nuestras descripciones son basadas en un análisis a priori de corte teórico el cual, como advierten Gómez et al. (2018) es valioso. Sin embargo, el contraste con los resultados de una implementación piloto hubiese podido ser valioso para enriquecer las dificultades en el abordaje de cada indicación o solicitud y posibles maneras de gestionarlas.</p>
---	--

### *Aprendizajes clave*

Este estudio ha proporcionado múltiples aprendizajes valiosos en diversos ámbitos:

- *Matemáticas:* Profundización en la aplicación práctica de la trigonometría y la geometría, demostrando que estos campos no solo son esenciales para la comprensión teórica sino también para aplicaciones reales como la medición de distancias y perímetros grandes. En ese marco del potencial del uso de métodos históricos como recursos para estudiar objetos de las matemáticas y proveerles cierto significado. En particular, tuve la ocasión de conocer cómo aspectos de la trigonometría permiten sustentar la razonabilidad del método llevado a cabo por Eratóstenes para calcular la circunferencia de la Tierra.
- *Didáctico:* Se tuvo la oportunidad de reconocer la exigencia y la complejidad que implica el diseño de una secuencia de tareas bajo una cierta sistematicidad. En ese marco, me percaté de la necesidad de tener un conocimiento de tipo (i) matemático sólido al hacer el diseño, (ii) mediacional sobre el potencial de los artefactos (concretos y digitales –geogebra y aplicativos de la web–) y su articulación para promover el estudio de una situación o un objeto matemático, y (iii) cognitivo e interaccional para reconocer posibles dificultades de los estudiantes al resolver la tarea y posibles maneras para gestionarlos.

### *Horizonte y Limitaciones del Trabajo de Grado*

El estudio también establece una base para futuras investigaciones y prácticas educativas, además de reconocer sus limitaciones actuales:

#### *Futuras Direcciones:*

- *Expansión temática:* Incluir otros métodos de medición históricos para calcular la circunferencia de La Tierra (e.g., el de Al Biruni) o para calcular distancia entre astros como el Sol, la Luna y la Tierra.

- *Desarrollo tecnológico:* Crear módulos de aprendizaje que empleen realidad aumentada y modelado 3D para simular conceptos geométricos en contextos astronómicos y físicos, aumentando así la comprensión y la interactividad.

*Limitaciones:*

Durante el estudio, hubo limitaciones que dificultaron el alcance del mismo. En un principio, varios asuntos de índole familiar afectaron el desarrollo del trabajo de grado; luego, el tomar en cuenta las exigencias que implican la elaboración de una secuencia de tareas siguiendo la propuesta de Gómez et al. (2018) y los aspectos de índole matemático llevaron a que fuéramos cada vez más disminuyendo nuestras pretensiones (no abordamos asuntos del error del método de Eratóstenes, no piloteamos las secuencias, no abordamos el método de Al Biruni ni alguno más moderno; tampoco maneras de calcular la distancia entre otros astros). Tomar conciencia de todo lo que implica un diseño juicioso (más aspectos familiares que uno no puede controlar), hicieron que nuestra propuesta se enfatizar en la descripción a priori del método de Eratóstenes.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ballesteros, F. (2019) *Midiendo el cielo y la Tierra*. Bonallerra Alcompas, S. L. Editorial Shakelton Books. ISBN: 978-84-1361-137-2.
- Chaisson, E., & McMillan, S. (2019). *Astronomy: A Beginner's Guide to the Universe*. (7th ed.) Pearson.
- Díaz, L. (2021) *Breve historia de la astronomía*. Editorial Guadalmazán.
- Egues, J. (2020) *Construcción educativa de la geometría y el uso de materiales concretos como proceso de aprendizaje*. Revista Científica Multidisciplinar. Núcleo del conocimiento ISSN: 2448-0959. DOI:10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacion-es/construccion-educativa.
- Estrabón, L. (1991) *Geografía. Libros I-II*. Editorial Gredos, S. A. Sánchez Pacheco, 81.
- Flores, P. (2011) *Materiales y recursos en aula de matemáticas*. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada.
- Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.
- Godino, J. D., Batanero, C y Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gómez, P., Mora, M. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (págs. 197-268). Universidad de los Andes.
- Guevara, L. Puig, C. (2017) *Las medidas del mundo. Calendarios, longitudes y matemáticas*. Editorial El mundo de las Matemáticas.
- Linton, C. M. (2004) *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge University Press The first chapter deals with ancient people and early Greek astronomy.
- Martínez, A, 2009. Alumnos del cabanillas y de un instituto polaco miden la circunferencia terrestre. Pontevedra, España.
- MEN. (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN. (2004). *Lineamientos para la educación matemática en la educación básica y media*. Ministerio de Educación Nacional.
- Molina, O. y Samper, C. (2019) Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63).
- Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G. (2013). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. México: Ediciones Díaz de Santos.

- Paupitz, L. (2022) *Características de aplicativos e simuladores no ensino de astronomia*. Jaraguá Do Sul.
- Peralta, M., Rodríguez, G. (2008) *El lenguaje y la trigonometría: una mirada desde el planteamiento y la resolución de problemas*. Universidad Industrial de Santander Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas Licenciatura en Matemáticas.
- Sánchez, R., Borja, A. (2022) *Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas Geogebra in the Mathematics Teaching-Learning Process Geogebra no processo de ensino-aprendizagem de matemática*. Dom. Cien., ISSN: 2477-8818 Vol. 8, núm. 2. Mayo Especial, 2022, pp. 33-52. DOI: <http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i2.2737>.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.

## ANEXOS

Tabla 7. Sistema axiomático para el método de Eratóstenes

Sistema axiomático – Método de Eratóstenes
Geometría plana
Postulados
<p><i>P. de la Distancia:</i> Dados dos puntos <math>A</math> y <math>B</math> diferentes, existe un único <math>x \in \mathbb{R}</math> con <math>x &gt; 0</math> tal que <math>x = \overline{AB}</math></p> <p><i>P. Ángulo número:</i> Dado <math>\angle ABC</math>, existe un único <math>x \in \mathbb{R}</math>, con <math>x</math> entre 0 y 180 tal que <math>m\angle ABC = x</math></p>
Definiciones
<p><i>D. Triángulo:</i> <math>\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}</math> donde <math>A, B, C</math> no colineales.</p> <p><i>D. Rectas perpendiculares:</i> <math>\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}</math> si y solo si <math>\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{X\}</math> y <math>\angle CXA</math> recto</p> <p><i>D. Interestancia:</i> El punto <math>B</math> está entre los puntos <math>A</math> y <math>C</math> si y solo si:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) <math>A, B</math> y <math>C</math> colineales.</li><li>b) <math>AC = AB + BC</math>.</li></ul> <p><b>Notación:</b> <math>A - B - C</math></p> <p><i>D. Ángulo:</i> <math>\angle ABC = \overline{BA} \cup \overline{BC}</math> donde <math>A, B, C</math> no colineales.</p> <p><i>D. Ángulos congruentes:</i> <math>\angle ABC \cong \angle MNO</math> si y solo si <math>m\angle ABC = m\angle MNO</math></p> <p><i>D. Rectas perpendiculares:</i> <math>\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}</math> si y solo si <math>\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{X\}</math> y <math>\angle CXA</math> recto</p> <p><i>D. Ángulo central:</i> Un ángulo central es un tipo de ángulo cuyo vértice es el centro <math>O</math> de una circunferencia, y cuyos lados son dos radios correspondientes a dos puntos distintos de la circunferencia <math>A</math> y <math>B</math>.</p> <p><i>D. Ángulos alternos externos:</i> Son aquellos ángulos entre rectas paralelas y una secante que se encuentran en la zona externa de las rectas paralelas.</p> <p><i>D. Ángulos alternos internos:</i> Son aquellos ángulos entre rectas paralelas y una secante que se encuentran en la zona interna de las rectas paralelas.</p> <p><i>D. Tangente a una circunferencia:</i> una línea recta tangente a una circunferencia es aquella que toca la circunferencia exactamente en un punto.</p> <p><i>D. Congruencia de triángulos:</i> <math>\Delta ABC \cong \Delta MNO</math> si y solo si <math>\angle A \cong \angle M, \angle B \cong \angle N, \angle C \cong \angle O, \overline{AB} \cong \overline{MN}, \overline{BC} \cong \overline{NO},</math> y <math>\overline{AC} \cong \overline{MO}</math>.</p>
Teoremas
<p><i>T. Recta – Punto:</i> Dada una recta <math>m</math>, existe un punto <math>A \in m</math>.</p>

*T. Ángulos opuestos vértice:* Dados  $\angle ABC$  y  $\angle MBN$  opuestos por el vértice. Entonces  $\angle ABC \cong \angle MBN$ .

*T. Congruencia de ángulos alternos externos:* Dadas dos rectas  $n \parallel m$  intersecada por una secante  $t$ , entonces los ángulos alternos externos son congruentes.

*T. Recta – Punto:* Dada una recta  $m$ , existe un punto  $A \in m$ .

*T. Ángulos opuestos vértice:* Dados  $\angle ABC$  y  $\angle MBN$  opuestos por el vértice. Entonces  $\angle ABC \cong \angle MBN$ .

*T. Congruencia de ángulos alternos internos:* Dadas dos rectas  $n \parallel m$  intersecada por una secante  $t$ , entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

*T. Semejanza de triángulos:* Para que dos triángulos sean semejantes deben cumplir al menos uno de los siguientes criterios:

- Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.
- Dos triángulos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados correspondiente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente entre sí.

*T. Par lineal – Congruentes:* Si  $\angle ABC$  y  $\angle ABD$  par lineal con  $\angle ABC \cong \angle ABD$  entonces  $\angle ABC$  y  $\angle ABD$  rectos.

*T. Punto al lado:* Dados puntos  $A$  y  $B$  diferentes existen un punto  $C$  tal que  $A - B - C$ .

*T. Intersección de rectas:* Si dos rectas diferentes se intersecan, entonces su intersección es un único punto.

*T. 180:* En cualquier triángulo, la suma de los ángulos interiores es siempre 180 grados.

*T. PAI:* La suma de los ángulos internos de un polígono convexo es siempre 180 grados menos el número de triángulos que se pueden formar dentro del polígono al conectarse todos sus vértices con un vértice común.

## Geometría del espacio

### Definición

*D. Circunferencia máxima de esfera:* es la circunferencia contenida en la esfera que tiene mayor perímetro.

*T. Circunferencia máxima de esfera:* Una circunferencia máxima de una esfera es la intersección de la esfera con un plano que contiene el centro de la esfera.

## Trigonometría

*T. Razones trigonométricas:* Dada una circunferencia de cualquier radio y un  $\triangle OBA$  rectángulo con  $m\angle AOB = \theta$  y  $\angle ABO$  recto. Entonces se tiene que<sup>3</sup>:

<sup>3</sup> *co:* Cateto opuesto; *ca:* cateto adyacente; *hp:* hipotenusa.

$$\sin \theta = \frac{co}{hp}$$

$$\cot \theta = \frac{ca}{co} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{ca}{hp}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{hp}{co}$$

$$\tan \theta = \frac{co}{ca} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{hp}{ca}$$

*Ley de Cosenos.* Dado cualquier triángulo  $ABC$ , con  $AB = c$ ,  $BC = a$  y  $AC = b$  tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

*Ley de Senos.* Dado cualquier triángulo  $ABC$ , con  $AB = c$ ,  $BC = a$  y  $AC = b$ , tenemos que:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$