

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA PARA RESOLVER
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN RELACIONADOS CON LA MINIMIZACIÓN DE
COSTOS, IMPLEMENTANDO COMO APOYO EL SOFTWARE GEOGEBRA

DANYS CARLOS OTERO HERRERA
Cód. 2012182029

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, COLOMBIA
2012

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA PARA RESOLVER
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN RELACIONADOS CON LA MINIMIZACIÓN DE
COSTOS, IMPLEMENTANDO COMO APOYO EL SOFTWARE GEOGEBRA”

DANYS CARLOS OTERO HERRERA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Especialista en
Educación Matemática

MAGISTER ALBERTO DONADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, COLOMBIA

2012

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software geogebra.
Autor(es)	OTERO HERRERA, Danys Carlos
Director	DONADO NÚÑEZ GIL ALBERTO
Publicación	Bogotá, 2012, (73)
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Representaciones internas. Representaciones externas. Registro de representaciones semióticas. Máximos y mínimos. Problemas de optimización. Minimización de Costos.

2. Descripción
Este trabajo tiene como finalidad elaborar una propuesta de actividades que permita realizar traspasos entre las representaciones internas y las representaciones externas mediante preguntas que pretenden orientar al estudiante durante el desarrollo de la misma, con el fin de proporcionar herramientas para plantear la solución de problemas de optimización aplicada a la minimización de costos. Al inicio de este trabajo se realizó un pilotaje a un grupo de 20 estudiantes del grado 11°, de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central, esto permitió identificar algunas dificultades de los estudiantes al momento de desarrollar problemas de optimización, lo cual permitió realizar algunos ajustes para presentar la propuesta final. Luego

hay dos sesiones de trabajo, una con la prueba modificada en aula de clase y la otra en la sala de sistemas con la ayuda de software geogebra, donde se presenta un problema de minimización de costos y los estudiantes responden unas preguntas por medio de la observación y la manipulación del applet.

3. Fuentes

Se consultaron diversos textos como los de Raymond Duval, los cuales se concentran en los registros semióticos y aprendizajes intelectuales aplicados a las matemáticas. En el caso de Bruno D'Amore & Martha Fandiño se toma para este trabajo lo relacionado con las dificultades que experimentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, J Emilio Zapata expone la importancia en la educación actual de la enseñanza de las matemáticas en el contexto de las tecnologías. Finalmente el trabajo cuenta con documentos del Ministerio de Educación relacionados con los lineamientos, estándares y formación de docentes en el área de matemáticas.

4. Contenidos

Se inicia con un marco matemático en el cual se realiza una definición de máximos y mínimos, las etapas por las que se debe pasar para la construcción y solución de problemas de optimización; aquí es de suponerse que en grado 11° se trabaja con la derivada, esto se puede evidenciar en los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional. Luego, se presenta un marco didáctico con la teoría de las Representaciones semióticas desarrollada por R. Duval, donde se resalta la importancia de las representaciones internas y las representaciones externas, reconociendo que estas exigen el profundo conocimiento de las características semánticas, mencionando la importancia, no de tener el mejor sistema de representación, sino de proporcionar al estudiante diferentes herramientas para la comprensión de los contenidos matemáticos (Duval, 2006), una de ellas es la tecnológica. Posteriormente se presentan las actividades aplicadas con sus resultados que nos ayudaron a elaborar la propuesta final sobre problemas de optimización relacionados con la minimización de costos.

--

5. Metodología

En un primer momento se seleccionaron las fuentes necesarias para conocer las principales problemáticas en la resolución de problemas de optimización. Una vez detectadas estas problemáticas se elabora una propuesta que contempla tres actividades que el estudiante debe desarrollar con el fin de que logre identificar los pasos para resolver problemas de optimización, de tal forma que éste proceso no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión represente la visualización del suceso. De allí se hace una revisión, se toman y descartan los contenidos necesarios para la construcción definitiva de la propuesta.

6. Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos al implementar la propuesta, se puede decir que la planeación y elaboración de las actividades lograron realizar el traspaso del registro lenguaje natural al algebraico, esto puede deberse a que según lo mencionado por Duval sobre la teoría de las representaciones semióticas, estas son representaciones congruentes de registros, por el contrario en situaciones donde no se encuentra explícita la variable, se presenta un fenómeno de no congruencia, por ello hay mayor porcentaje error al responder la pregunta.

Se encontraron dificultades en temas que son considerados prerrequisitos a la hora de resolver problemas de optimización, los cuales impiden la implementación de recursos tecnológicos y contribuir a que el estudiante a tenga éxito en el traspaso entre registros.

Durante la implementación de la actividad utilizando la herramienta tecnológica los estudiantes reflejan una mayor receptividad a la hora de resolver los problemas de optimización propuestos.

Elaborado por:	DANYS CARLOS OTERO HERRERA
Revisado por:	ORLANDO AYA CORREDOR

Fecha de elaboración del Resumen:	12	01	2013
--	----	----	------

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. OBJETIVOS	3
1.1 Objetivo General	3
1.2 Objetivos Específicos	3
2. MARCO TEÓRICO	5
2.1 Marco Matemático	6
2.1.1 Valores máximos y mínimos	6
2.1.2 Valores máximos y mínimos de una función	6
2.1.3 Problemas de optimización	7
2.1.4 Aplicación de máximos y mínimos	8
2.2 Pierre Fermat: El método de Máximos y mínimos	9
2.3 Marco Didáctico	10
2.3.1 Comprensión y representación	10
2.3.2 Representaciones Gráficas	11
2.3.3 Educación Matemática y sistema de representación	12
2.3.4 Representaciones Semióticas y Cambios entre Registros	12
2.3.5 La Herramienta Computacional como Instrumento de Mediación	13
2.4 Lineamientos Curriculares en Matemáticas	14
2.4.1 Pensamiento Variacional, Sistemas algebraicos y analíticos	15
2.4.2 La Resolución y el planteamiento de problemas	16
3 METODOLOGÍA	18
3.1 Primera Actividad	18
3.1.1 Problema modelo	18
3.2 Segunda Actividad	23
3.2.1 Problema Propuesto	23

3.3 Tercera actividad	26
3.3.1 Problema	26
4 IMPLEMENTACIÓN	28
5 RESULTADOS	30
5.1 Primera Actividad	30
5.2 Segunda Actividad	39
5.3 Tercera Actividad	44
6 PROPUESTA FINAL	49
7 CONCLUSIONES	53
Recomendaciones	55
Bibliografía	56-57
Anexo 1(Propuesta inicial)	58

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1 (Página rectangular)	19, 50, 58
Figura 2 (Poste)	23, 52, 61
Figura 3 (Cable)	26
Figura 4 (Error de estudiante)	31
Figura 5 (Gráfico de estudiante)	32
Figura 6 (respuesta errada)	34
Figura 7 (Respuesta incompleta)	41
Figura 8 (Respuesta del estudiante 1, act. 3)	44
Figura 9 (Respuesta del estudiante 2, act. 3)	45
Figura 10 (Respuesta del estudiante 3, act. 3)	45
Figura 11 (Respuesta del estudiante 4, act. 3)	45
Figura 12 (Respuesta del estudiante 5, act. 3)	46

LISTA DE CUADROS

	pág.
Cuadro 1 (Porcentaje de aprobación pregunta 1)	30
Cuadro 2 (Porcentaje de aprobación pregunta 2)	31
Cuadro 3 (Porcentaje de aprobación pregunta 3)	32
Cuadro 4 (Porcentaje de aprobación pregunta 4)	33
Cuadro 5 (Porcentaje de aprobación pregunta 5)	34
Cuadro 6 (Porcentaje de aprobación pregunta 6)	35
Cuadro 7 (Porcentaje de aprobación pregunta 7)	36
Cuadro 8 (Porcentaje de aprobación pregunta 8)	36
Cuadro 9 (Porcentaje de aprobación pregunta 9)	37
Cuadro 10 (Porcentaje de aprobación pregunta 10)	38
Cuadro 11 (Porcentaje de aprobación pregunta 11)	38
Cuadro 12 (Porcentaje de aprobación pregunta 1, act. 2)	39
Cuadro 13 (Porcentaje de aprobación pregunta 2, act. 2)	40
Cuadro 14 (Porcentaje de aprobación pregunta 3, act.2)	41
Cuadro 15 (Porcentaje de aprobación pregunta 4, act. 2)	42
Cuadro 16 (Porcentaje de aprobación pregunta 5, act. 2)	43
Cuadro 17 (Porcentaje de aprobación pregunta 6, act. 2)	43

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1(respuesta pregunta 2, act. 3)	41
Tabla 2 (respuesta pregunta 3, act. 3)	42
Tabla 3 (respuesta pregunta 4, act. 3)	41
Tabla 4 (Modificaciones propuesta final)	42

INTRODUCCIÓN

Los problemas de optimización han sido de vital importancia en el desarrollo de las matemáticas, sin embargo al trabajar con ellos en las aulas de clases no se presentan como algo sencillo para los estudiantes. Por ello se genera una propuesta de intervención en el aula por medio de dos sesiones de trabajo, una en el salón de clases que según Duval (1999)

“Se puede hablar de los alumnos en función del trabajo que realizan en clase, cambiando por completo, pues, de escala y de punto de vista. Desde esta óptica, se privilegia la observación de lo que pasa durante una o varias sesiones de 50 minutos por una o varias semanas. El alumno se considera más como un miembro de un grupo de alumnos que interactúan para desarrollar una actividad común propuesta, que como individuos; la escogencia de tal actividad resulta siendo la cuestión didáctica primordial, admitiéndose, de paso, que ha de corresponder con lo típico en toda actividad matemática: la resolución de problemas. Desde esta perspectiva, los problemas, a diferencia de los ejercicios, no necesitan repetirse para ser didácticamente eficaces” (p.21-22)

Esto implica que se debe tener contacto con el grupo a trabajar para que la investigación sea satisfactoria y conlleva a que los estudiantes encuentren un espacio propicio para realizar las actividades propuestas.

Y una segunda sesión en la sala de sistemas usando como apoyo el software geogebra, según Noguera, citada por Zapata, J (2007)

“Para el aprendizaje activo se requiere cambiar ese modelo de roles, en el cual el estudiante va a que le enseñen y el profesor tiene como papel profesional el enseñar, el profesor diseña y administra (motivando, guiando, cuestionando y evaluando) experiencias de aprendizaje que facilitarán al estudiante la construcción de su propio conocimiento” (p.23)

Además, otros autores como D`Amore & Fandiño (2010) destacan la importancia de que:

“Cada docente elige un proyecto, un currículo, una metodología, interpreta de forma personal la transposición didáctica de acuerdo con sus convicciones ya sean científicas o didácticas; él cree en dicha elección y la propone a la clase porque la considera eficaz; pero lo que es realmente eficaz para algunos estudiantes no está dicho que lo sea para otros. Para estos otros, la elección de este proyecto revela un obstáculo didáctico” (p.51)

Ya que el no tener las nociones básicas de máximos y mínimos limita los procesos pertinentes para este trabajo.

Así se hace necesario hacer una introducción a la noción de optimización, dejando claro desde el inicio que la investigación se fundamenta en la minimización de costos. Esto se logra a través de sesiones donde se haga uso de problemas escritos y otra con el apoyo de software geogebra.

El presente trabajo tiene como eje la solución de problemas de optimización, y en particular los relacionados con la minimización de costos, tema fundamental en grado once de educación media. Los problemas de optimización se componen de aspectos como la visualización; elemento importante en la parte comunicativa y cognitiva, las representaciones semióticas, la modelación como aspecto que integra las representaciones y el uso de la tecnología como forma de modelación sistemática de problemas propuestos.

Por ello se propone en primer lugar identificar las dificultades que se dan en el proceso de solución de problemas de optimización. En segundo lugar, hacer una revisión del papel de la visualización en la conceptualización de máximos y mínimo. En tercer lugar, el diseño de la propuesta final para la aplicación de las sesiones de trabajo. Todo esto distribuido en cuatro capítulos que se describen de la siguiente forma:

En el primer capítulo se encuentran los objetivos que ayudan a trazar y enmarcar los aspectos de este trabajo.

En el segundo capítulo se tiene el marco teórico, que a su vez incluye:

Marco matemático en el cual se determinan diversas concepciones de problemas de optimización, así como la revisión de dos textos de los cuales se toman posturas para este trabajo.

Marco histórico en la que se realiza una breve descripción de los aspectos importantes de los conceptos de máximos y mínimos a través del teorema de Fermat.

Marco didáctico contiene un análisis de los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas.

En el tercer capítulo se describe el análisis de las sesiones así como se establece la propuesta. Por último se presentan las conclusiones, recomendaciones y reflexiones del diseño de la actividad.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar una propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, con apoyo del software Geogebra.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Plantear sesiones con problemas de optimización que permitan realizar procedimientos espontáneos a través de un texto escrito.
- Elaborar actividades que involucren el traspaso entre registros de representación como el gráfico, algebraico y lengua natural contribuyendo a la solución de problemas de optimización.
- Aplicar herramientas tecnológicas que se ajusten a los problemas de optimización y permitan su visualización.

2. MARCO TEÓRICO

El objetivo principal de este trabajo es diseñar una propuesta de intervención en el aula que relacione la representación visual de un problema de optimización y la representación computacional, con miras a posibilitar la comprensión del objeto matemático. Se plantea, un estudio histórico del método de máximos y mínimos de Fermat, el cual da ideas sobre problemas para tener en cuenta a la hora de planear actividades y así cumplir con este objetivo.

En este sentido, y teniendo en cuenta que estas actividades se encaminaron a establecer una propuesta para que los estudiantes adquirieran una comprensión del objeto, se ha tomado como referente teórico, en los cuales se fundamenta este trabajo; primero un marco matemático, seguido de un repaso al concepto de máximos y mínimos, y concluyendo con un marco didáctico, en el que se le da una mirada a los lineamientos curriculares y a los estándares básicos de competencias en matemáticas.

2.1 MARCO MATEMÁTICO

2.1.1 Valores Máximos y Mínimos

Stewart, J (2006), (p 269). Algunas aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se nos pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo. Enseguida tenemos ejemplos de esos problemas:

¿Cuál es la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?

¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expelle aire del modo más rápido al toser?

¿Qué ángulos deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas se pueden reducir a encontrar valores máximos y mínimos de una función.

2.1.2 Valores Máximos y Mínimos de una Función

Boyce, W & DiPrima, R 2004 (P 200). Decimos que f tiene un máximo global, o absoluto, en c si:

$$f(c) \geq f(x)$$

Para todo x en I . Análogamente, f tiene un mínimo global, o absoluto, en c si:

$$f(c) \leq f(x)$$

2.1.3 Problemas de Optimización

Stewart, J (2006), (p 306). En la solución de problemas prácticos, el desafío más grande suele ser convertir el problema de palabras en un problema matemático de optimización, establecer que debe maximizarse o minimizarse.

Por lo tanto se recomiendan unos pasos para la solución de problemas de optimización.

- ✓ “Comprender el problema. El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
- ✓ Dibuje un diagrama. En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar con él las cualidades dadas y requeridas.
- ✓ Introduzca notación. Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos $(a, b, c, \dots, x, y)$, para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes; por ejemplo A para el área, t para el tiempo.
- ✓ Exprese Q en término de algunos de los otros símbolos del paso anterior.
- ✓ Si en el paso anterior Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables, excepto una, en la expresión para Q . De esta suerte, Q se expresará como función de una variable x , digamos $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
- ✓ Aplique los métodos para hallar el valor máximo o el valor mínimo absoluto de f ”.

2.1.4 Aplicaciones de los Máximos y Mínimos

Boyce, W & DiPrima, R (2004) (P 213). “La observación de que en un punto máximo o mínimo de la función, su derivada, si existe, debe ser cero, es la clave para resolver una clase muy grande de problemas de optimización. En realidad, proporciona el punto de partida de métodos en los que intervienen problemas bastante más complicados.

En primer lugar, cada uno se plantea con palabras, y se incluye un enunciado de la cantidad que se debe optimizar. El primer paso es formular el problema en forma matemática; para ello se deben identificar las variables y los parámetros del problema, asígnele una letra a cada uno, y escribir una o más ecuaciones que los relacione. Con frecuencia sirve de gran ayuda trazar un esquema o diagrama para facilitar darse una idea de la situación. La meta es obtener una función de una sola variable que se pueda maximizar o minimizar en determinado dominio especificado. En algunos casos, toda la información necesaria está contenida en el enunciado del problema, mientras que en otros puede ser necesario emplear otra información; por ejemplo, hechos tomados de la geometría o de la física. La formulación del problema se complica a veces por la necesidad de llevar a cabo el manejo algebraico adecuado para expresar la cantidad por optimizar como función de una sola variable. El primer paso para estructurar el problema en términos matemáticos es con frecuencia el más difícil, precisamente porque no hay reglas formales para hacerlo; el procedimiento depende del problema, y en algunos casos se necesitará una gran cantidad de imaginación y de conocimiento. El término modelación matemática se emplea con frecuencia para describir este proceso, mediante el cual de hecho se traduce un problema de palabras a símbolos y ecuaciones matemáticas.

Habiendo formulado el problema como se acaba de indicar, debemos resolverlo matemáticamente. En este caso se trae a discusión el teorema de máximos y mínimos que se presentaron anteriormente. El grado de dificultad implícito en este

paso depende enteramente de qué tan complicada es la función que se debe optimizar. Sin embargo, en cualquier caso se tiene un procedimiento definido a seguir.

Finalmente, habiendo resuelto el problema en un sentido matemático, es necesario interpretar la solución en el contexto del problema que se planteaba originalmente. Se debe tener especial cuidado para notar si la solución parece “razonable”. Esto sirve como prueba muy valiosa del trabajo matemático. Si la respuesta obtenida es definitivamente irrazonable en términos del planteamiento original del problema, indica que se ha cometido alguna falta, ya sea en la formulación o en la solución matemática. Naturalmente, aun si la respuesta es razonable, no hay garantía de que sea correcta, pero si proporciona cierto grado de confirmación”.

Como se puede ver el marco, los dos textos seleccionados tienen mucho en común, esto hace pensar que la mayoría de los textos trabajan la misma información.

2.2 Pierre Fermat (1601-1665): El Método de Máximos y Mínimos

El método se encuentra en su obra titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (“Método para investigar máximos y mínimos”) el cual fue escrito en 1629 y se reconoció hasta 1637. En esencia el método es el que actualmente se emplea para determinar tangentes en los puntos máximos y mínimos de las funciones, es estrictamente algebraico, y sirvió de inspiración para que los matemáticos, Leibniz y Newton, crearan la definición actual de derivada..

2.3 MARCO DIDÁCTICO

2.3.1 Comprensión y Representación

Uno de los grandes objetivos que ha tenido la Educación Matemática, es lograr que los estudiantes comprendan un concepto matemático, según Duval (1999).

“Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones inertes” (p.13)

Por tal motivo damos gran importancia a las representaciones en este trabajo, reconociendo que estas exigen el profundo conocimiento de características semánticas, y este aspecto es esencial en la comunicación de las ideas matemáticas, y por ende en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Existen dos tipos de representaciones, propuestas por Goldin y Kaput citado por Espinosa,(2011) la representación interna y externa, entendidas como:

REPRESENTACIÓN INTERNA: son las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir.

REPRESENTACIONES EXTERNAS: son las representaciones que comunicamos fácilmente a otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones. Por otro lado como afirma Duval (1999)

“A pesar del aparente parentesco, las representaciones computacionales y las representaciones semióticas, no tienen la misma naturaleza. Una son representaciones internas a un sistema e independiente de toda visión del

objeto. Otras son representaciones conscientes, inseparables de la visión de algunas cosas que toman de inmediato el estatus de objeto” (p.38)

Las primeras se refieren a representaciones como contenido mental, al que se le asigna un sentido subjetivo y personal, no son directamente observables, pero se pueden inferir a través de lo que hacen y dicen los estudiantes. Por otro lado las representaciones externas tienen como objetivo representar externamente una cierta realidad matemática, en esta se consideran las configuraciones observables tales como palabras, gráficos, dibujos, ecuaciones, etc.

Los sistemas semióticos deben cumplir actividades cognitivas inherentes a toda representación como la identificación de la presencia de una representación; ello implica una selección de rasgos en el contenido a representar.

El tratamiento de una representación, es decir, la transformación de la representación de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones iniciales. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

La conversión de una representación es la transformación de la representación en una representación de otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Para este trabajo nos centraremos en la conversión de la representación, sin excluir totalmente las otras dos actividades cognitivas, puesto que estas actividades están enfocadas en que los estudiantes relacionen la representación gráfica de un problema de optimización con la representación analítica y para ello es necesario realizar una conversión, es decir, es necesario que el estudiante pase de un registro a otro; sin embargo vale mencionar que según Duval (1999)

“la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. No solo el cambio de registros ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también, con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los

diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales” (p. 46).

2.3.2 Representación Gráfica

Esta representación, se relaciona con el significado geométrico de los problemas de optimización, esto quiere decir, la construcción de esta representación fue fundamental en la interpretación del concepto de máximos y mínimos como se evidencia en el marco matemático de este trabajo, por otro lado, el uso de la herramienta tecnológica es de gran ayuda, ya que brinda una mayor visualización de la representación.

2.3.3 Educación Matemática y Sistemas de Representación

Asociadas a la idea de sistemas semióticos de representación surgen interrogantes que se pueden calificar de complejos. Por ejemplo, sabemos que del objeto matemático solo se puede hablar mediante sus representaciones, entonces ¿Cómo entender las relaciones entre las representaciones y un objeto que no existe antes de representarlo?, ¿Cómo puedo saber que el conjunto de todas las representaciones conocidas de un objeto matemático no lo agotan, y lo que es más sin usarlo?

Las respuestas a estas cuestiones pasan por admitir que la construcción de un concepto matemático es un proceso en permanente desarrollo, por lo que el nivel de objetividad con el que lo entendemos es solo transitorio. Nunca se posee plenamente el concepto, y por eso no hay lugar a concepciones platónicas de los objetos matemáticos. MEN (2001)

2.3.4 Representaciones Semióticas y Cambios entre Registros.

Esta construcción teórica es propia del enfoque semiótico desarrollado por Duval, y que se fundamenta en la noción semiótica de registro. Un registro está

constituido por signos como: trazos, símbolos, ícono, etc. Estos registros están asociados a una representación que puede ser de dos formas, interna con relación a las imágenes mentales que un individuo puede tener de un objeto y externa, referentes a lo que éste puede percibir con los sentidos. Por consiguiente los registros son medios de expresión y de representación tales como notaciones algebraicas, gráficas o menciones verbales caracterizados por sus respectivos sistemas semióticos.

Para Duval (1999 b) las representaciones semióticas

“son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin el cambio de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...)”

Teniendo en cuenta esto, Guzmán cita a Duval plantea tres aspectos, en los cuales se enmarcan las intenciones, posibilidades e intereses que se persiguen a la hora de hacer uso de los símbolos. En primer lugar se encuentra la determinación de la importancia que tienen los signos y lo que estos pueden llegar a representar, en segundo lugar la fenomenología, es decir, lo que se quiere aprender y el tercero está relacionado a la utilidad que prestan estos signos (Guzmán, 1998).

2.3.5 La Herramienta Computacional como Instrumento de Mediación.

Se implementó la herramienta tecnológica geogebra en la elaboración de una de las actividades, dicha herramienta tiene como objetivo que los estudiantes logren la adquisición del objeto matemático en la solución de problemas de optimización, a través de la conversión de su representación analítica y gráfica, ya que se consideran estos entornos más allá de artefactos tecnológicos. Se ven más claramente en las políticas del MEN.

“Si bien las tecnologías del papel y lápiz nos sirven para liberar la memoria, las tecnologías computacionales nos permite ir más lejos: no solo sirven para liberar la memoria(al funcionar como dispositivos de almacenamiento de la

información) sino que además pueden realizar ciertas funciones cognitivas (que anteriormente eran privativas de las personas). Esto es muy importante: la capacidad de procesar matemáticamente información abre nuevas posibilidades para una nueva relación entre el estudiante y la tecnología” MEN (2001)

Toda representación que emplea un recurso tecnológico, sea una calculadora o en su defecto un software se denomina una Representación Ejecutable, debido a la forma dinámica en que representa un objeto matemático y en el sentido que permite manipularlo y transformarlo directamente. Estas representaciones son portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia de quién sea el usuario del recurso tecnológico empleado.

2.4 Lineamientos Curriculares en Matemáticas

Según los lineamientos del MEN, los sistemas son aquéllos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

El objetivo de enseñar las habilidades del pensamiento no se debería considerar, por tanto, como algo opuesto al de enseñar el contenido convencional sino como un complemento de éste. La capacidad del pensamiento y el conocimiento son como la trama y la urdimbre de la competencia intelectual, y el desarrollo de cualquiera de las dos cosas en detrimento de la otra, nos produciría algo muy distante de una tela de buena calidad.

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas

del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan. Estas intervenciones generan preguntas y situaciones interesantes que por estar relacionadas con su entorno son relevantes para el estudiante y le dan sentido a las matemáticas. Así es como del contexto amplio se generan situaciones problemáticas.

El diseño de una situación problemática debe ser tal que además de comprometer la afectividad del estudiante, desencadene los procesos de aprendizaje esperados. La situación problemática se convierte en un microambiente de aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de las otras ciencias. Podría afirmarse que la situación problemática resulta condicionada en mayor o menor medida por factores constituyentes de cada contexto.

2.4.1 Pensamiento Variacional, Sistemas Algebraicos y Analíticos

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación.

Adicionalmente la tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente. Y aunque en algunas ocasiones enfatiza la variación numérica discreta, es necesario ir construyendo la variación numérica continua. Así mismo, las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de las fórmulas. La exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra. La tabla también se constituye en una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo. Además, el uso de variables en la tabla también ayuda a la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas para describir la variación o el cambio.

Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, en una primera instancia, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación. Los contextos de variación deben incluir patrones aditivos y multiplicativos.(MEN 2010)

2.4.2 La resolución y el Planteamiento de Problemas

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas aspectos como los siguientes:

- ✓ Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.
- ✓ Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- ✓ Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
- ✓ Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
- ✓ Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas.

3. METODOLOGÍA

En la solución de problemas de optimización se requiere que el estudiante tenga claro en el manejo de máximos y mínimos, de tal manera que le permita identificar constantes, parámetros, y variables. Por tal motivo en la propuesta se contemplan 3 actividades que el estudiante debe desarrollar con el fin de que logre resolver el problema de optimización dado, de tal forma que ésta no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión represente la visualización del suceso expresado en lenguaje natural.

3.1 PRIMERA ACTIVIDAD

En esta actividad se pretende que el estudiante resuelva el problema de optimización con una serie de pasos guiados, y que logre mejorar el tránsito entre el registro lengua natural y el algebraico en diferentes situaciones reales. Para ello se elaboró una serie de preguntas y se le pide al estudiante leer e interpretar cada momento del problema.

3.1.1 Problema modelo

Una página rectangular ha de contener $24dm^2$ de texto, con márgenes superior e inferior de $1.5dm$ y laterales de $1.0dm$ ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?

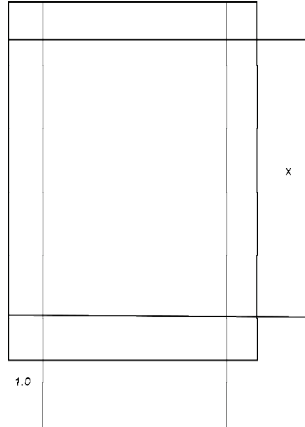


Figura 1(Página rectangular)

Después que el estudiante ha leído el problema y observado la gráfica se plantean las siguientes preguntas:

1) ¿Qué datos nos presenta el problema?

Esta pregunta permite guiar el problema, ya que al momento de identificar los datos el estudiante realiza traspaso del lenguaje gráfico al lenguaje natural, con lo que se espera respondan: el área del texto escrito y el valor de las medidas de las márgenes

2) ¿Qué variables nos presenta el problema?

Esta pregunta contiene una variable explícita y una variable implícita y se espera contesten:

✓ Variable explícita: (x)

✓ Variable implícita: (y)

3) Observando el dibujo, completar los datos y la variable que hace falta

El estudiante cuenta con el gráfico y con unos datos del problema explícitos, lo que se espera completen es el valor de $1.5dm$, la variable implícita y .

En este caso tenemos que optimizar una expresión de área, como es una página de las características del problema, entonces la ecuación a optimizar es:

$$A(x, y) = 4(1.5 \cdot 1) + xy + 2(1 \cdot x) + 2(1.5 \cdot y)$$

4) ¿El área que resultante luego de realizar las operaciones es?

Esta pregunta tiene elementos básicos de aritmética donde se espera el estudiante resuelva las operaciones básicas propuestas y respondan:

$$A(x, y) = 6 + xy + 2x + 3y$$

5) Evidentemente las variables por definir son dimensiones no nulas. Por tal motivo las dimensiones de las variables deben ser mayores que:

Esta pregunta pretende lograr que el estudiante identifique que las variables son mayores que cero y logren responder:

$$x > 0, y > 0$$

Nos dice el problema que la página debe tener un área de texto, esto quiere decir, y observando el gráfico, que la segunda ecuación a trabajar es: $A = x \cdot y$

6) Según lo anterior, despejando la variable y , la ecuación resultante es:

Para esta pregunta se pretende que el estudiante realice proceso de despeje de la ecuación propuesta, teniendo que $x \cdot y = 24$, entonces se espera que contesten

$$y = \frac{24}{x}$$

Realizando la sustitución de la ecuación despejada anteriormente en la ecuación principal de área $A(x, y) = 6 + xy + 2x + 3y$, el resultado es:

$$A(x) = 6 + x \frac{24}{x} + 2x + 3 \frac{24}{x}$$

$$A(x) = 6 + 24 + 2x + \frac{72}{x}$$

$$A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

7) Respecto a la ecuación anterior $A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$ la derivada de esta función es:

Se plantea esta pregunta esperando que los estudiantes apliquen correctamente los pasos para derivar y puedan responder: $A'(x) = 2 - \frac{72}{x^2}$

8) Si la derivada anterior la igualamos a cero y se halla los máximos y mínimos el valor de x es:

Esta pregunta busca que el estudiante pueda por medio la pregunta anterior despejar y visualizar los valores máximos y mínimos del problema y lo que se espera responda es: $x = \pm 6$

La solución negativa no tiene sentido, por tanto la utilizamos. En cambio la solución positiva será analizada en la segunda derivada de la función dada.

La segunda derivada de la función $A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$ es:

$$A''(x) = \frac{144}{x^3}$$

9) Reemplazando el valor positivo de la solución positiva de x en la segunda derivada nos da:

Como fue expuesto en el punto anterior los valores de x son 6 y -6 , por lo tanto se espera que el estudiante responda tomando el valor de 6 positivo de la siguiente forma: $A''(x) = \frac{144}{6^3}$ entonces $A''(x) = \frac{144}{216}$

10) Reemplazando el valor positivo de la solución positiva de x en la ecuación despejada $y = \frac{24}{x}$ nos da:

Sabiendo que en la pregunta anterior el valor de la x positiva reemplazada en la segunda derivada nos da un mínimo, entonces tomamos este valor para reemplazarlo en la ecuación $y = \frac{24}{x}$, y se espera que el estudiante conteste:

$$y = \frac{24}{6}, \quad y = 4$$

11) Por lo tanto las dimensiones de la página está dada por $A = (1+1+y)(1.5+1.5+x)$ y reemplazando los valores de x, y entonces la solución es:

Para esta última pregunta se espera que el estudiante tenga identificadas las variables x, y , reemplace en la función dada y logre encontrar el valor funcional que se espera sea:

$$A = (1+1+y)(1.5+1.5+x)$$

$$A = (1+1+4)(1.5+1.5+6)$$

$$A = (6)(9)$$

3.2 SEGUNDA ACTIVIDAD

Para esta segunda actividad se va a proponer un problema el cual tiene menos pautas para resolverse, esperando que con el problema de la actividad 1 el estudiante posea herramientas para lograr resolver dicho problema.

3.2.1 Problema propuesto

Dos postes de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros entre sí. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?

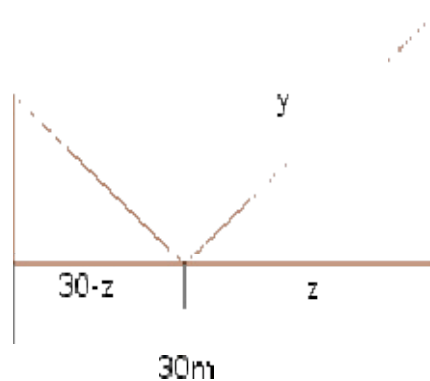


Figura 2(postes)

1) ¿Qué datos nos presenta el problema?

Esta es la pregunta guía del problema, ya que permite identificar los datos y con ellos tener un punto de partida para la resolución del problema, con lo que se espera respondan: la altura de los postes y la distancia entre ellos.

2) ¿Qué variables nos presenta el problema?

Este problema tiene tres variables dos de las cuales están explícitas en la gráfica y una está implícita, se espera que el estudiante logre identificarlas y conteste:
 x, y, z

3) Observando el gráfico, completar los datos y la variable que hace falta

Luego de hallar la variable implícita se espera que el estudiante complete el gráfico de la siguiente forma:

4) En este caso tenemos que optimizar una expresión de longitud, entonces la ecuación a optimizar es:

Como el problema nos plantea un cable conectado entre dos postes y atado a un punto en el suelo, por lo tanto se espera que el estudiante conteste que la ecuación a optimizar es: $L(x, y) = x + y$

Los valores lógicos de x son: $x = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2}$

5) Entonces los valores lógicos de y son:

Dado que x, y pertenecen a la hipotenusa de cada triángulo rectángulo, se espera que el estudiante encuentre los valores lógicos de y por lo tanto responda:

$$y = \sqrt{28^2 + z^2}$$

Sustituyendo estos valores lógicos en la función principal de longitud no queda:

$$L(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$$

6) Respecto a la ecuación anterior $L(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$ la derivada de esta función es:

Esta pregunta busca la capacidad de los estudiantes para hallar la derivada de una función dada, se espera que luego de resolverla el estudiante obtenga:

$$L'_{(z)} = \frac{-30 + z}{\sqrt{12^2 + (30 - z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{28^2 + z^2}}$$

Igualando el valor de la primera derivada a cero llegamos a la ecuación:

$$640z^2 - 47040z + 705600 = 0$$

Entonces los valores de z son $z_1 = 21m$ y $z_2 = 52.5m$

De estas dos soluciones hay que descartar la de $z_2 = 52.5m$, puesto que el problema nos dice que el cable atarse entre dos postes cuya distancia entre ellos es de $30m$, por lo tanto $z_1 = 21m$ es un mínimo.

7) Entonces la distancia de x , y la distancia de y serán:

Luego en esta pregunta, después de elegir el valor de $z_1 = 21m$ como un mínimo, se espera que el estudiante responda que el valor restante es de $9m$.

3.3 TERCERA ACTIVIDAD

En esta actividad se hace la implementación de la herramienta tecnológica del geogebra, se modela un problema de optimización, se le pide a los estudiantes la lectura detenida del mismo y luego responder las preguntas propuestas.

3.3.1 Problema

Los puntos D y A están situados uno frente otro y en los lados opuestos de un río recto de 300 metros de ancho. El punto B está situado a 600 metros de A y en su misma orilla.

Una compañía de teléfonos desea tender un cable desde D hasta B. Si el costo por metro de cable es el 25% más caro bajo el agua, que el de por tierra.

¿Cómo se debe tender el cable, para que el costo total sea mínimo?

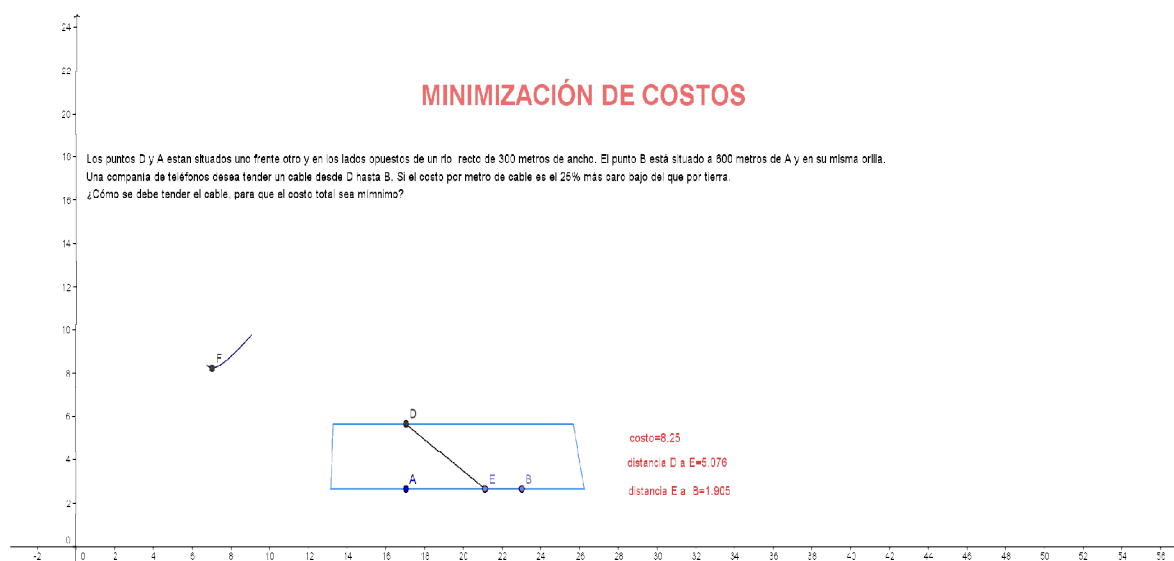


Figura 3 (cable)

- 1) **Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB crees que se hacen mínimos los costos?**

Con esta pregunta se busca que el estudiante con la sola visualización del applet ubique un punto en el segmento AB, en los cuales los costos se hacen mínimos para el problema propuesto.

- 2) **Moviendo el punto E, ¿qué relación encuentra entre la distancia AB y la función que contiene el punto F?**

Ya en este punto se le pide al estudiante que manipule el punto que tiene movimiento (E), y se espera encuentre la relación que hay entre la distancia AB y la función que contiene al punto F.

- 3) **Moviendo el punto E, ¿qué relación encuentra entre la tabla de datos y la distancia DE, el costo y la función que contiene el punto F?**

Aquí ya con todos los datos visibles se espera que el estudiante encuentre la relación distancia DE, el costo y la función que contiene al punto F, y así pueda identificar donde queda ubicado el punto en AB donde el costo hace mínimo.

- 4) **¿Qué se puede concluir del problema?**

Se espera que los estudiantes concluyan si su respuesta de la pregunta uno coincide con la respuesta de la pregunta tres y verificar que otras conjeturas pueden hallar.

4. IMPLEMENTACIÓN

La propuesta se implementó a un grupo de 20 estudiantes de once grado de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central. Se realizaron las actividades uno y dos en el salón de clases y la actividad número tres en la sala de sistemas, en la cual se utilizaron 5 computadores, todos con conexión a internet, y con la plataforma java requerida para la reproducción del applet. El tiempo de implementación de la propuesta fue de dos días de clases, el primer día se realizaron las actividades uno y dos, y el segundo día se utilizó para la actividad tres. Cada actividad fue individual y con una duración de 2 horas cada sesión de clases.

El primer día durante el desarrollo de las dos primeras actividades, a cada estudiante se le entregó, la guía de actividades en forma impresa. La primera actividad inició con la lectura del problema que estaba escrito y se le pidió que respondieran las preguntas propuestas. Se pudo evidenciar que los estudiantes tomaban la actividad como una evaluación y estaban un poco tensos y nerviosos, algunos pretendían copiar de sus compañeros las posibles respuestas. Esta actividad se realizó en más de una hora en ser culminada lo que se tomó como la fase introductoria de la misma.

Terminada la actividad número uno se procedió a distribuir la segunda actividad, posteriormente se realizó lectura del problema propuesto y la forma de las preguntas. Para la actividad número dos se invirtió menos tiempo ya que la actividad uno brindó las bases para la culminación de esta.

El proceso de implementación finalizó el primer día con la segunda actividad en la que nuevamente se realizó la lectura del problema y la forma de responder las preguntas, cuando los estudiantes se dispusieron a responder la pregunta 5 no

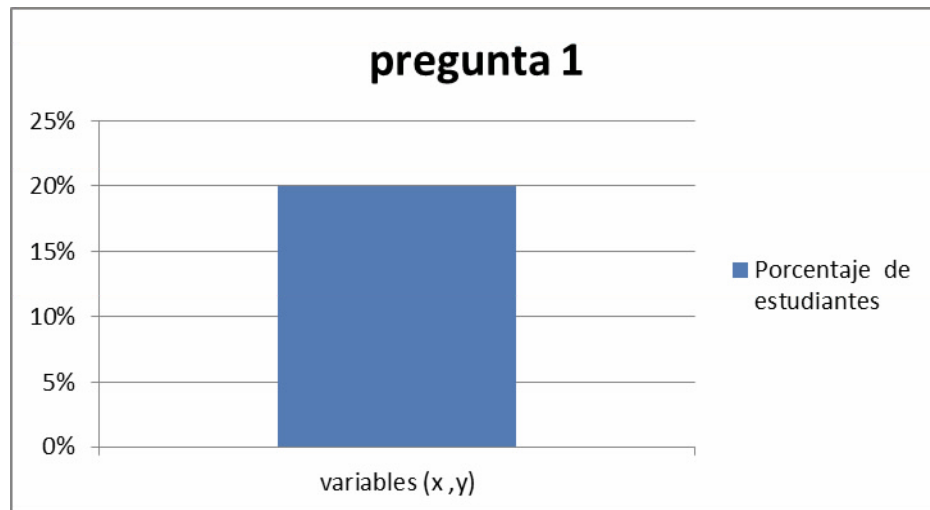
llegaron a la respuesta con la facilidad que se esperaba, ya que tenían que hallar la derivada de una raíz, lo cual dificultó la culminación del problema, por lo tanto fue necesario la intervención del docente donde se les guió en algunos pasos para la solución de la derivada para que los estudiantes continuaran con el desarrollo de la actividad.

En el segundo día se implementó la tercera actividad, la cual consta de un problema de optimización relacionado con la minimización de costos, para esta situación se realiza la descarga del applet uno subido a cada computador que utilizó cada uno de los estudiantes, este proporciona un efecto visual en relación con la información dada, pasando después a la lectura y repuesta de las preguntas planteadas para el problema. Como se esperaba, la pregunta en la que los estudiantes gastaron más tiempo y generó mayor dificultad, según lo observado por el docente, fue la pregunta cuatro, en donde fue necesaria la intervención del docente orientando el razonamiento que se puede aplicar para abordar este tipo de problemas. Después de esta intervención los estudiantes culminaron las diversas preguntas de la actividad número tres.

5. RESULTADOS

5.1 Actividad 1

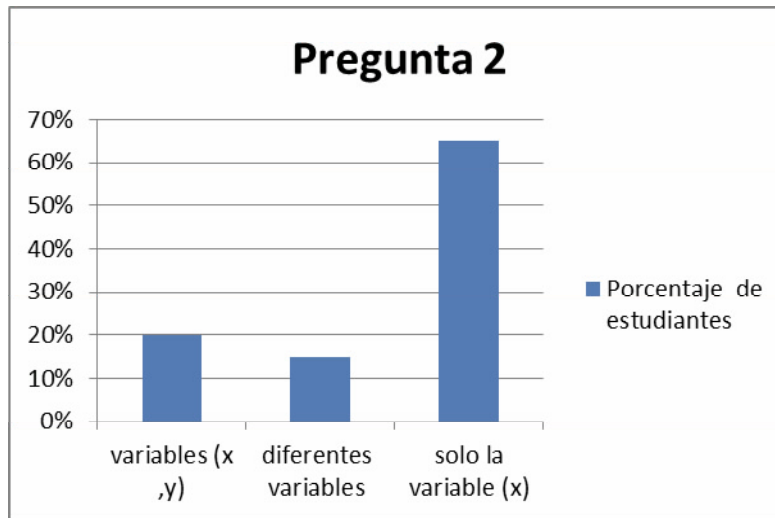
Cuadro 1 (porcentajes de aprobación pregunta 1)



20 estudiantes equivalentes al 100%, contestaron que el texto y el grosor de las márgenes, aun cuando de manera diferente:

- ✓ 14 estudiantes equivalentes al 70%, solo escribieron el texto y el grosor de las márgenes
- ✓ 6 estudiantes equivalentes al 30%, escribieron el valor de las márgenes y el área del texto escrito

Se observa que un 100% de estudiantes contestó acertadamente, lo cual indica que la pregunta fue clara, por lo tanto se deja la pregunta (1) para la propuesta final



Cuadro 2 (porcentajes de aprobación pregunta 2)

4 estudiantes equivalentes al 20%, colocaron las variables (x, y)

3 Estudiantes equivalentes al 15%, colocaron datos diferentes a las variables pedidas.

13 estudiantes equivalente al 65%, vieron en el gráfico una sola variable entonces colocaron solo la variable (x)

Se nota que un 75% de los estudiantes tuvieron errada la pregunta, pero como es de vital importancia para el desarrollo del problema se ha decidido modificarla por lo tanto la nueva pregunta quedará así:

¿Qué variables explícitas e implícitas presenta el problema?

Ejemplo de error cometido.

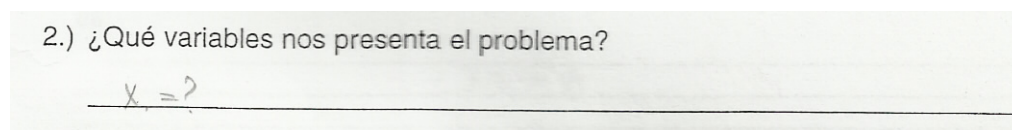
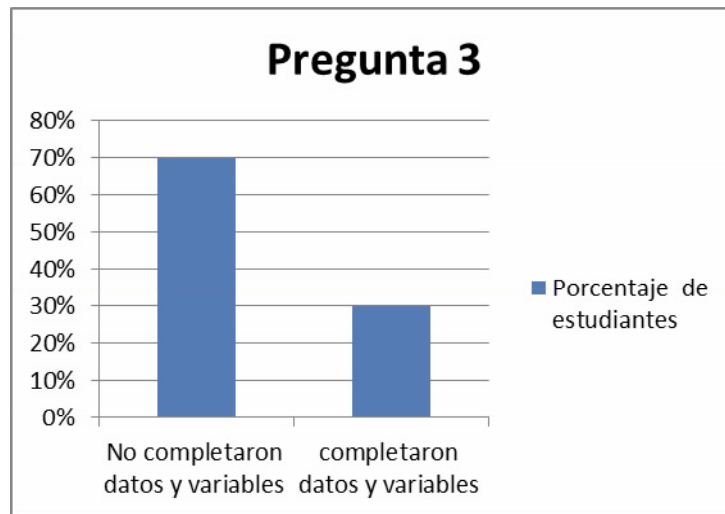


Figura 4(error de estudiante)



Cuadro 3 (porcentajes de aprobación pregunta 3)

14 estudiantes equivalentes al 70%, no completaron los datos y las variables del problema

6 estudiantes equivalentes al 30%, completaron los datos y las variables del problema

Es claro que en esta pregunta un alto porcentaje de los estudiantes no completó los datos y las variables faltantes en el gráfico, para que no resulte un elemento distractor se decide anular la pregunta.

Como se verá en el gráfico los estudiantes no completaron los datos y las variables del problema

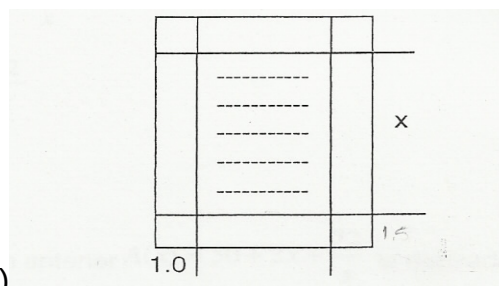
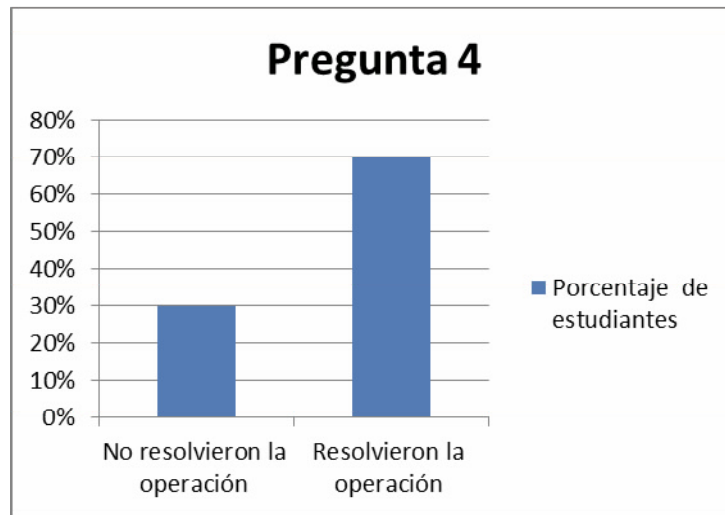


Figura 5(gráfico de estudiante)



Cuadro 4(porcentajes de aprobación pregunta 4)

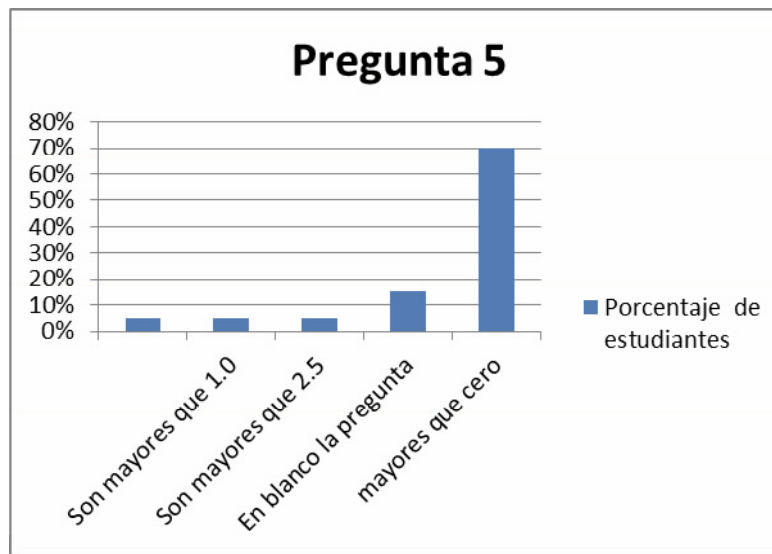
6 estudiantes equivalentes al 30%, no resolvieron la operación pedida

14 estudiantes equivalentes al 70%, resolvió correctamente la operación

Para esta pregunta el porcentaje de acierto respecto a la resolución de las operaciones básicas es alto, por tal motivo se deja la pregunta pero se le hace una reestructuración nos queda así:

El área que resulta luego de realizar las operaciones en la siguiente ecuación es:

$$A(x, y) = 4(1.5 \cdot 1) + xy + 2(1 \cdot x) + 2(1.5 \cdot y)$$



Cuadro 5 (porcentajes de aprobación pregunta 5)

1 estudiante equivalente al 5%, respondió que son el grosor de las márgenes

1 estudiante equivalente al 5%, respondió que son mayores que 1.0

1 estudiante equivalente al 5%, respondió que mayores de 2.5

3 estudiantes equivalentes al 15%, dejó en blanco la pregunta

14 estudiantes equivalentes al 70%, respondió que mayores que cero

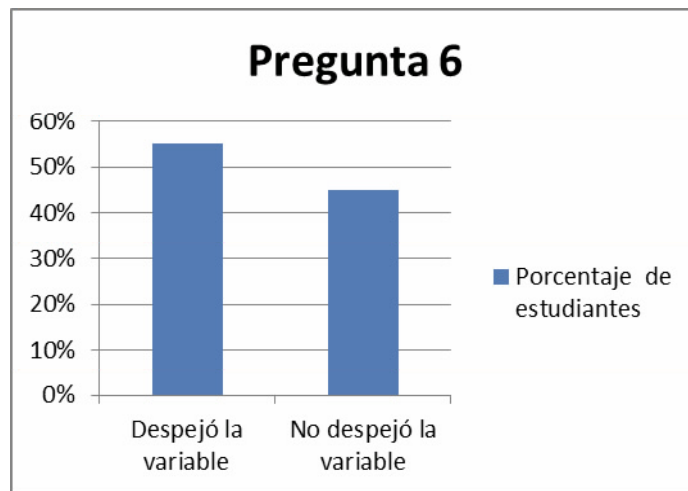
Aunque una gran mayoría contestó acertadamente es evidente que un porcentaje considerable de los estudiantes se equivocaron en la respuesta, por lo tanto y para efectos de no hacer confundir a los estudiantes se decide anular la pregunta.

Como se observa para algunos estudiantes no fue clara la pregunta:

5.) Evidentemente las variables por definir son dimensiones no nulas. Por tal motivo las dimensiones de las variables deben ser mayores que:

0

Figura 6(respuesta errada)



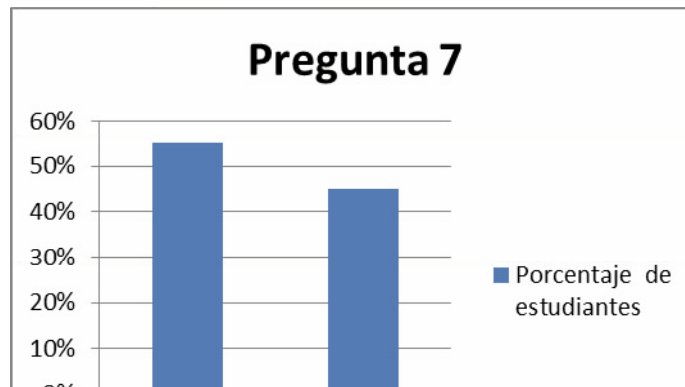
Cuadro 6 (porcentajes de aprobación pregunta 6)

11 estudiantes equivalentes al 55%, despejó correctamente la variable

9 estudiantes equivalentes al 45%, no despejó correctamente la variable

Se observa que un poco más de la mitad de los estudiantes despejó correctamente la variable por lo tanto se replantea la pregunta, la nueva pregunta para la prueba final será:

Nos indica el problema que la página debe tener $24dm^2$ de texto, esto quiere decir que es un área, la ecuación que representa esta área es: $xy = 24$, Por lo tanto si despejo la variable y la ecuación resultante será:

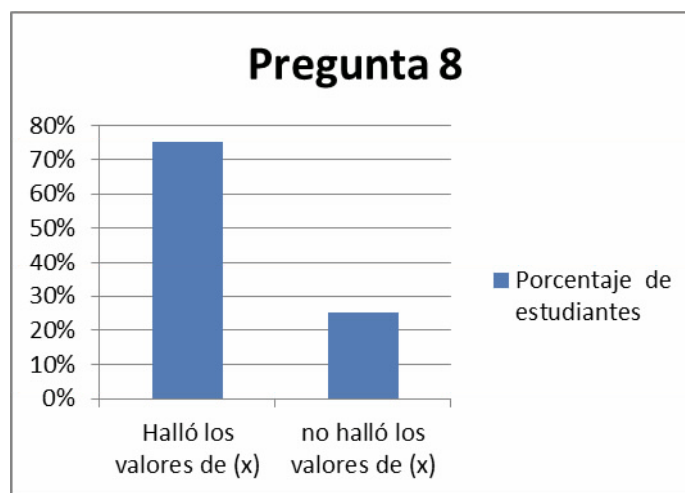


Cuadro 7 (porcentajes de aprobación pregunta 7)

11 estudiantes equivalentes al 55%, resolvió correctamente la derivada

9 estudiantes equivalentes al 45%, no resolvió correctamente la derivada

Se observa que un poco más de la mitad de los estudiantes resolvió correctamente la derivada, pero siendo una pregunta esencial para el desarrollo del problema se deja la pregunta para la propuesta final.



Cuadro 8 (porcentajes de aprobación pregunta 8)

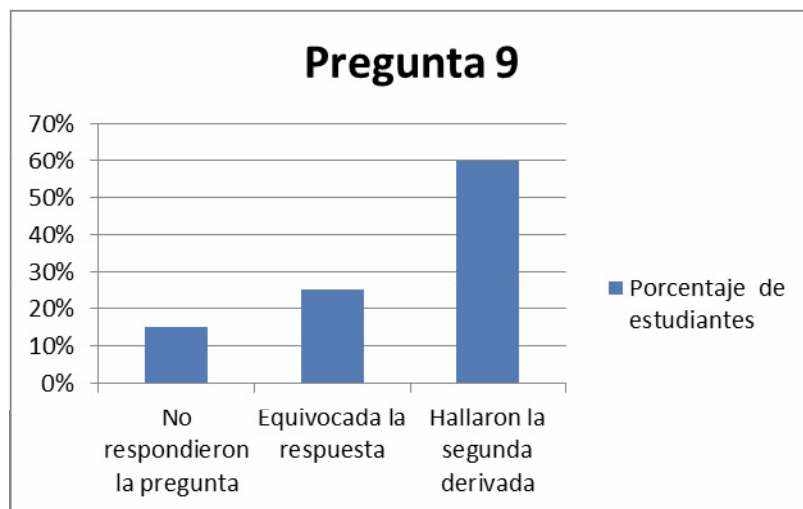
5 estudiantes equivalentes al 25%, no halló correctamente los valores de (x)

15 estudiantes equivalentes al 75%, Halló correctamente los valores de (x) , sin embargo, de ellos:

- ✓ 7 estudiantes equivalentes al 35 %, resolvió sin proceso
- ✓ 8 estudiantes equivalentes al 40 %, resolvió con proceso

Se observa que un alto porcentaje de los estudiantes halló correctamente los valores de (x) , pero se replantea la pregunta; la nueva pregunta para la propuesta final será:

Luego de hallar la derivada anterior igualamos a cero, los valores de (x) serán:



Cuadro 9 (porcentajes de aprobación pregunta 9)

3 estudiantes equivalentes al 15%, no respondió la pregunta

5 estudiantes equivalentes al 25%, fue equivocada la respuesta

12 estudiantes equivalentes al 60%, hallaron correctamente la segunda derivada

Un poco más de la mitad los estudiantes halló correctamente el valor de la segunda derivada luego de reemplazar el valor positivo de (x) , ya que es una pregunta fundamental se deja para la propuesta final

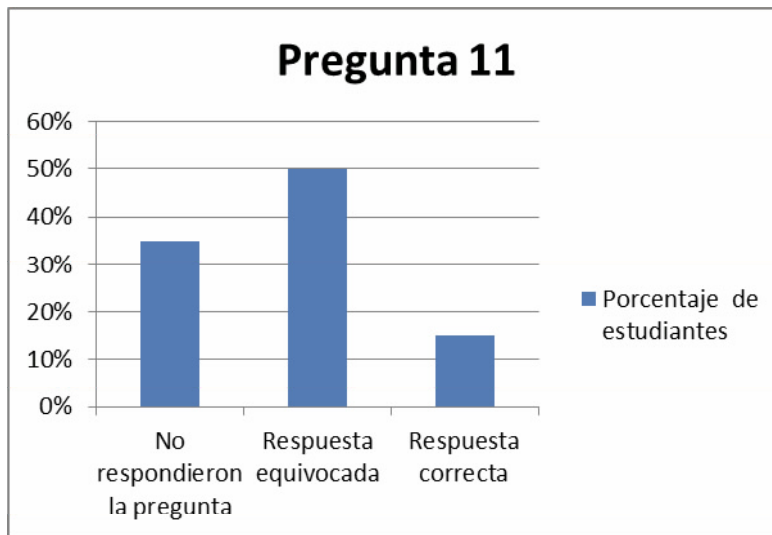


Cuadro 10 (porcentajes de aprobación pregunta 10)

8 estudiantes equivalentes al 40 %, reemplazó y halló el valor de (x)

12 estudiantes equivalentes al 60 %, no halló el valor de (x)

Se observa que un poco más de la mitad los estudiantes hallaron correctamente el valor de la variable (y) luego de reemplazar el valor positivo de (x) , dejándose así la pregunta para la propuesta final.



Cuadro 11 (porcentajes de aprobación pregunta 11)

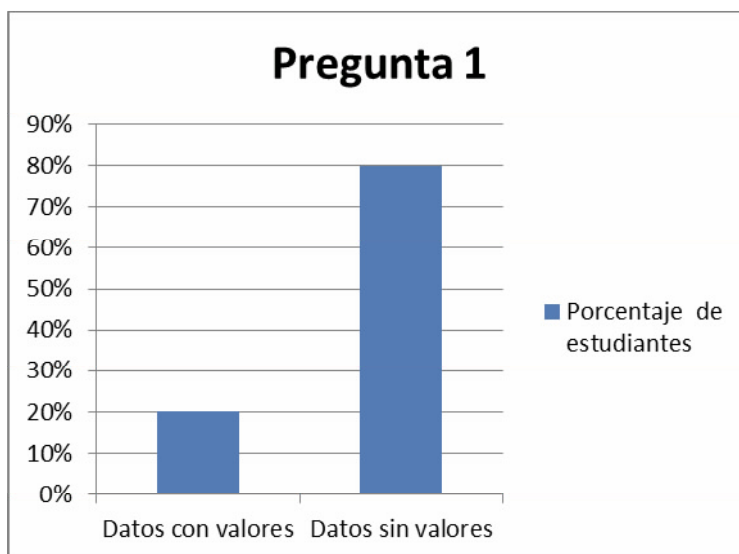
7 estudiantes equivalentes al 35 %, no respondió la pregunta

10 estudiantes equivalentes al 50 %, tiene la respuesta equivocada

3 estudiantes equivalentes al 15 %, tiene la respuesta correcta

Aunque la mitad los estudiantes tiene equivocada la respuesta se espera con las correcciones hechas a la actividad uno mejore el porcentaje de respuestas acertadas de esta pregunta, por lo tanto se deja la pregunta para la propuesta final.

5.2 Actividad 2

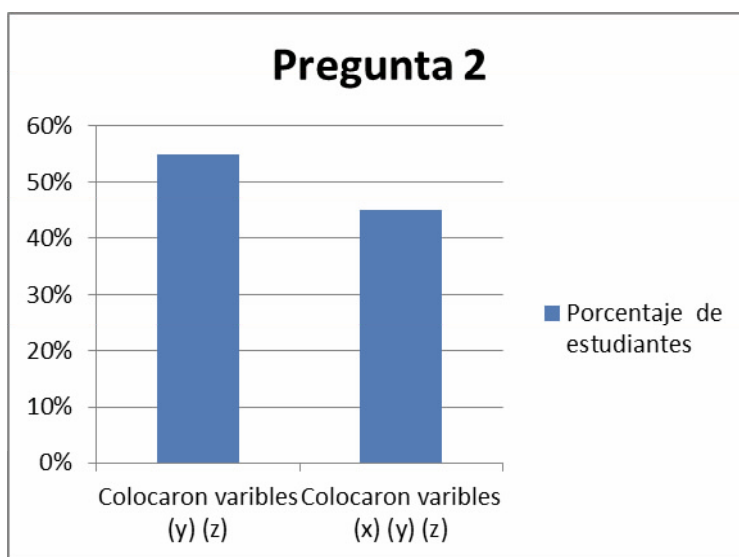


Cuadro 12 (porcentajes de aprobación pregunta 1 act. 2)

16 estudiantes equivalentes al 80 %, colocaron los datos incompletos, es decir los datos sin los valores necesarios para completar el ejercicio.

4 estudiantes equivalentes al 20 %, colocaron los datos con los valores

Para esta pregunta un 100% de los estudiantes colocó los datos del problema, por lo tanto se deja la pregunta para la propuesta final.



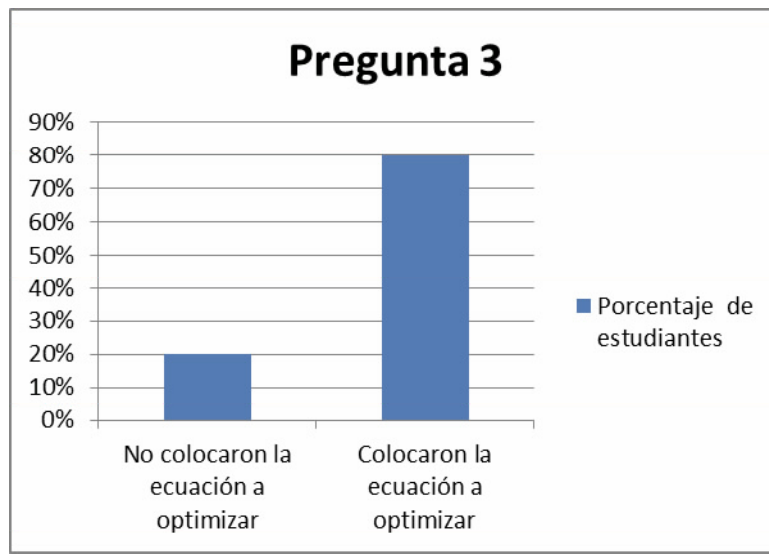
Cuadro 13 (porcentajes de aprobación pregunta 2 act. 2)

11 estudiantes equivalentes al 55 %, como vieron las variables (y, z) solo colocaron estas dos variables

9 estudiantes equivalente al 45 %, colocaron las variables (x, y, z)

Al igual que en la actividad uno, un alto porcentaje de los estudiantes colocó solo las variables que observaba en la gráfica, por lo tanto se modifica la pregunta para efectos de ser claros en lo que se quiere que contesten los estudiantes, la pregunta modificada es:

¿Qué variables explícitas e implícitas presenta el problema?



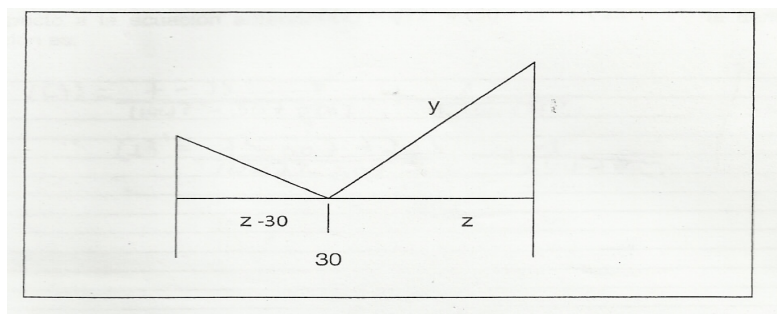
Cuadro 14 (porcentajes de aprobación pregunta 3 act. 2)

4 estudiantes equivalentes al 20%, no colocaron correctamente la ecuación a optimizar

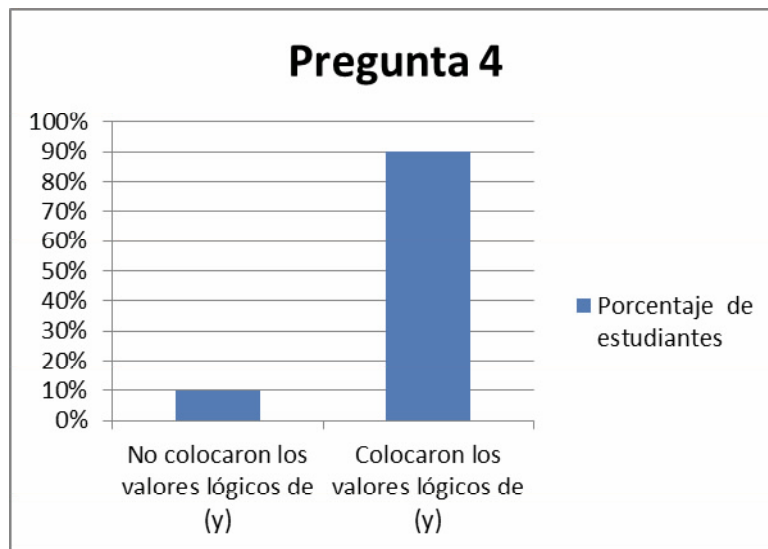
16 estudiantes equivalente al 80%, colocaron correctamente la ecuación a optimizar

A pesar que un alto porcentaje de los estudiantes colocó correctamente la ecuación a optimizar, no completaron los datos y variables en la gráfica, por lo tanto y para no desviar la parte central del problema se decide anular la pregunta de la propuesta final.

Figura 7(respuesta incompleta)



Como se evidencia en la figura anterior, los estudiantes no colocaron los datos del problema ni las variables del mismo.

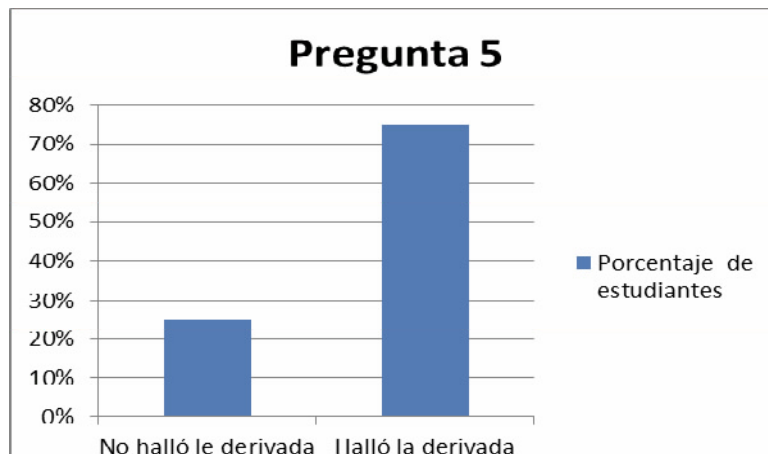


Cuadro 15 (porcentajes de aprobación pregunta 4 act. 2)

2 estudiantes equivalente al 10%, no colocaron correctamente los valores lógicos de (y)

18 estudiantes equivalente al 90 %, colocaron correctamente los valores lógicos de (y)

Se evidencia que un 90% de los estudiantes colocó acertadamente los valores lógicos de la variable (y), por lo tanto se toma como acertada la pregunta y se deja para la propuesta final.

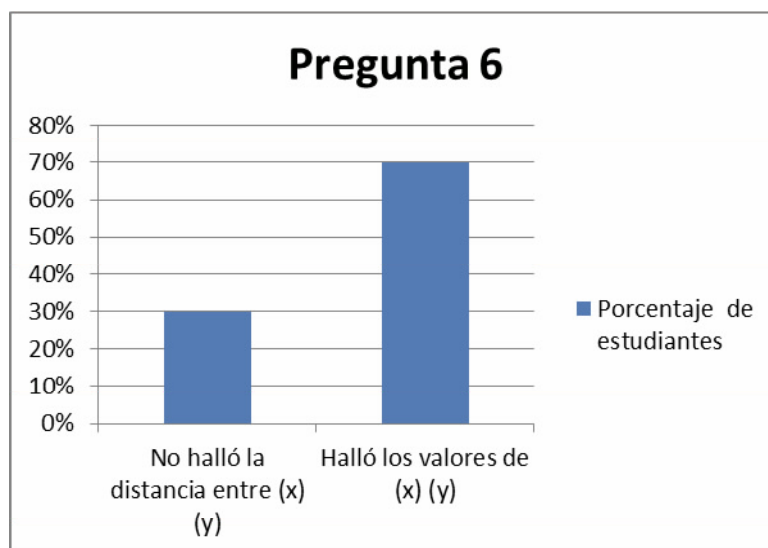


Cuadro 16 (porcentajes de aprobación pregunta 5 act. 2)

5 estudiantes equivalentes al 25%, no halló correctamente la derivada.

15 estudiantes equivalentes al 75%, halló correctamente el valor de la derivada.

Se puede evidenciar que un alto porcentaje de los estudiantes halló correctamente la derivada, aun cuando hacía referencia a una derivada con raíces, es así como se deja la pregunta para la propuesta final.



Cuadro 17 (porcentajes de aprobación pregunta 6 act. 2)

6 estudiantes equivalente al 30%, no hallaron la distancia de un poste al punto fijo y la distancia del otro poste al mismo punto fijo; (x, y)

14 estudiantes equivalente al 70%, hallaron correctamente la distancia de un poste al punto fijo y la distancia del otro poste al mismo punto fijo; (x, y)

Un alto porcentaje de los estudiantes halló correctamente los valores de las variables (x, y) , esto también evidencia que el hecho de haber colocado una primera actividad con pasos definidos para resolverla hizo que para esta segunda actividad los resultados fueran exitosos, es así como esta pregunta queda para la propuesta final.

5.3 Actividad 3

El análisis de la actividad tres se hizo con base a las respuestas explícitas de la actividad, ya que se trabajó con cinco estudiantes nombraremos: estudiante uno (E1), estudiante dos (E2) y así sucesivamente, para la identificación de las respuestas.

Pregunta 1

(E1)

- 1.) Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB Crees que se hacen mínimos los costos? (grafique la situación)

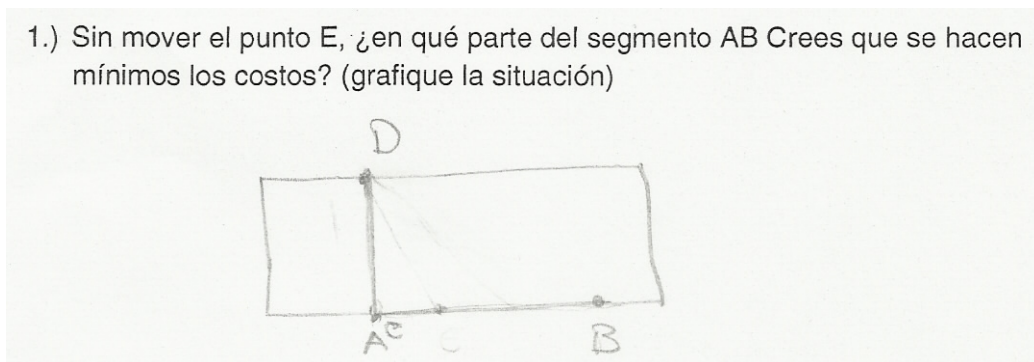


Figura 8 (respuesta del estudiante 1act.3)

(E2)

- 1.) Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB Crees que se hacen mínimos los costos? (grafique la situación)

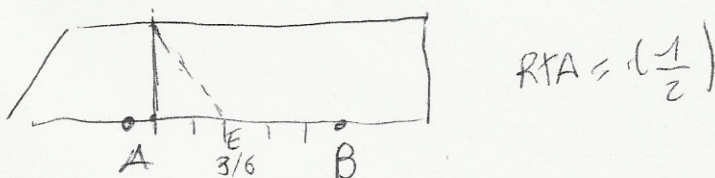


Figura 9 (respuesta del estudiante 2 act.3)

(E3)

- 1.) Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB Crees que se hacen mínimos los costos? (grafique la situación)

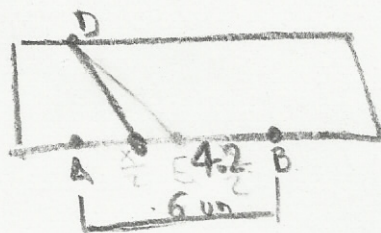


Figura 10 (respuesta del estudiante 3 act.3)

(E4)

- 1.) Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB Crees que se hacen mínimos los costos? (grafique la situación)

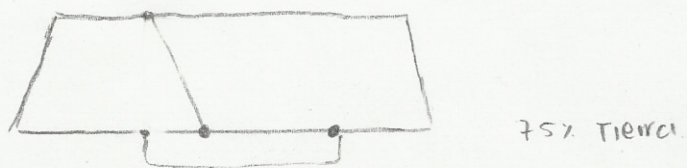


Figura 11 (respuesta del estudiante 4 act.3)

(E5)

1.) Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB Crees que se hacen mínimos los costos? (grafique la situación)

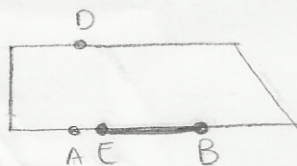


Figura 12 (respuesta del estudiante 4 act.3)

Pregunta 2

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	“Son inversamente proporcionales porque al aumentar la distancia del punto E, el punto F desciende”.
E2	“La relación que encuentro es que al ver que AB es lo mismo, que parte de la parábola F corriendo el punto E se puede ver en qué punto de la función el costo daría mínimo”.
E3	“El punto mínimo de la función F representa los mínimos costos. O sea el punto indicado entre AB para disminuir costos”.
E4	“Entre más cercano esté al punto A la función F va ascendente y B descendente, prácticamente en el centro del segmento AB el punto F está casi en el final de la línea”.
E5	“Es una función parabólica, a medida que el punto E se mueve nos va reflejando el gasto bajo o costo que tendría”.

Tabla 1 (respuestas pregunta 2 act.3)

Pregunta 3

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	“Al aumentar la distancia DE disminuye la distancia EB y la función F disminuye. El costo también disminuye, es decir, aumenta DE disminuye EB, desciende F y bajan también los datos de la tabla”.
E2	“La relación que se encuentra es que tanto en la tabla como las distancias y el punto F se denota que en el centro de la parábola y la gráfica tiene un punto donde el costo se da mínimo y se gaste la menor cantidad de cable por tierra”.
E3	“Por medio de la tabla de datos podemos encontrar aproximadamente el punto de menor costo, la distancia DE es la distancia en el agua del cable que es 75% aproximadamente más que la distancia EB. (Distancia cable tierra)”.
E4	“Que cuando se acerca al punto A la distancia DE disminuye y la EB aumenta, el costo también aumenta y pues lógicamente cerca al punto B la distancia DE y la EB hacen lo contrario al igual que los costos”.
E5	“Al jugar con estos puntos, respecto a la función F, sigue mostrándonos el punto donde es más bajo el costo, la tabla a partir de las distancias nos da un dato de referencia por el cual podemos ver en un segmento y una distancia determinada, el costo es más bajo, conserva una relación y función parabólica”.

Tabla 2 (respuesta a la pregunta 3 act.3)

Pregunta 4

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	“La hipótesis que hice al principio, resultó ser incorrecta porque la posición en la que puse el punto realmente es en donde saldría más costosa la ubicación del cable. Habría que haber ubicado el punto casi en el punto B”.
E2	“Se puede concluir que desde la ubicación de ciertos puntos se puede entender más un problema que desde una función la cual en este caso era una parábola y que se muestra igualmente desde el costo o un valor es mínimo y también que uno al no ver este tipo de ejercicios en una manera así se vuelve en contra a nuestro conocimiento”.
E3	“Para disminuir los costos un 25% del cable debe ir por tierra. Ya que si aumentamos la distancia en tierra sería muy poco la distancia en agua y los costos no bajarían, y si aumentamos más en agua los costos aumentan considerablemente. Al principio del ejercicio imaginé que la mayor cantidad de cable iba por tierra. Pero después de observar el applet descubrí que era todo lo contrario”.
E4	“Se puede concluir del problema que el cable se debe tender cercano a B o en B para que el costo sea mínimo ya que en A tanto la distancia DE como los costos aumentan relativamente. La gráfica del inicio no concuerda con el resultado ya que al suponer gráficamente encontré que si estaba tendiendo el cable en A tendría menos costos”.
E5	“Que en ocasiones el razonamiento o la lógica funcionan, pero en otras no, por ejemplo se puede pensar que mientras menos distancia bajo tierra tenga el cable sería más económico pero a partir de las herramientas del programa se puede notar que el segmento tiene otra forma de llegar a su meta y causar menos gastos”.

Tabla 3 (respuesta a la pregunta 4 act. 3)

6. PROPUESTA FINAL

De acuerdo a los resultados obtenidos en la implementación se han modificado ciertas preguntas y otra se han anulado de la propuesta final, esperando que esto reduzca los porcentajes de respuestas erradas que se presentaron. Tomando como referencia los análisis hechos en el capítulo anterior las modificaciones son las siguientes:

ACTIVIDAD	MODIFICACIÓN
1	Se eliminan las preguntas 3 y 5. Esto debido a la consideración propuesta de que estas no fueran elementos distractores para la resolución del problema de optimización. Se modifican las preguntas 2, 4, 6, y 8, buscando con esto una mejor comprensión de las mismas y unas efectivas respuestas. Las 11 preguntas de la actividad 1 se reducen a 9 preguntas, que se esperan sean pertinentes en futuras implementaciones.
2	Fue eliminada la pregunta 3 la cual se vio como un elemento distractor del problema. Igualmente, se modificó la pregunta 3, buscando un mejor entendimiento de la misma y por ello procurando una respuesta asertiva. La actividad 2 se reduce a 5 preguntas enfocadas y estructuradas para un desarrollo eficaz y concreto.
3	La actividad 3 no tiene cambios fueron explícitos con las respuestas.

Tabla 4(modificaciones propuesta final)

Una vez incorporada las modificaciones mencionadas, se tiene que estas se pueden presentar de la siguiente manera:

Actividad 1

Una página rectangular ha de contener $24dm^2$ de texto, con márgenes superior e inferior de $1.5dm$ y laterales de $1.0dm$ ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?

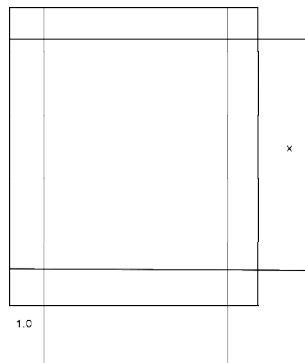


Figura 1(página rectangular)

- 1.) ¿Qué datos nos presenta el problema?
- 2.) ¿Qué variables explícitas e implícitas presenta el problema?
- 3.) El área que resulta luego de realizar las operaciones en la siguiente ecuación es :

$$A(x, y) = 4(1.5 \cdot 1) + xy + 2(1 \cdot x) + 2(1.5 \cdot y)$$

- 4.) Nos indica el problema que la página debe tener $24dm^2$ de texto, esto quiere decir que es un área, la ecuación que representa esta área es: $xy = 24$, Por lo tanto si despejo la variable (y) la ecuación resultante será:

- 5.) Respecto a la ecuación anterior $A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$ la derivada de esta función es:
- 6.) Luego de hallar la derivada anterior e igualar a cero, los valores de (x) serán:
- 7.) Reemplazando el valor positivo de la solución de x en $A''(x) = \frac{144}{x^3}$ la segunda derivada.
- 8.) Reemplazando el valor positivo de la solución de (x) en la ecuación despejada, $y = \frac{24}{x}$, nos da:
- 9.) Por lo tanto las dimensiones de la página está dada por $A = (1+1+x)(1.5+1.5+y)$ y reemplazando los valores de (x,y) entonces la solución es:

Actividad 2

Dos postes de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros entre sí. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?

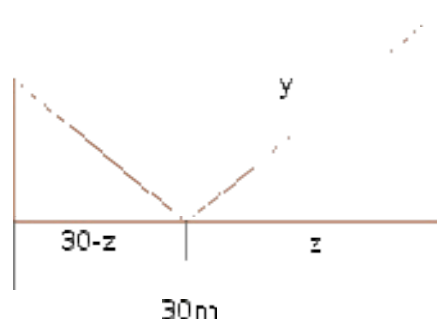


Figura 2 (postes)

1.) ¿Qué datos nos presenta el problema?

2.) ¿Qué variables explícitas e implícitas presenta el problema?

3.) Los valores lógicos de x son $x = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2}$, entonces los valores lógicos de y son:

Sustituyendo estos valores lógicos en la función principal de longitud no queda:

$$L(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$$

4.) Respecto a la ecuación anterior $L(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$ la derivada de esta función es:

5.) Entonces la distancia de x y la distancia de y serán:

7. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos al implementar la propuesta, se puede decir que la planeación y elaboración de las actividades lograron realizar el traspaso del registro lenguaje natural al algebraico, esto puede deberse a que según lo mencionado por Duval sobre la teoría de las representaciones semióticas, estas son representaciones congruentes de registros, por el contrario en situaciones donde no se encuentra explícita la variable, se presenta un fenómeno de no congruencia, por ello hay mayor porcentaje error al responder la pregunta. Debido a esto, se modificó la propuesta de tal forma que las situaciones en las que los estudiantes se equivocaban al realizar el traspaso de registro fueron eliminadas, y las que tuvieron un margen de error pequeño pero se verificaba una proyección de las posibles respuestas, se modificaron esperando que les permita ampliar las representaciones semióticas dadas en los registros de representación trabajados en la actividad 1 y la actividad 2. De igual manera estas actividades según los resultados obtenidos sirven como herramienta para identificar datos explícitos e implícitos en problemas de optimización.

La implementación del software geogebra permite identificar y visualizar condiciones un problema de optimización, pero algunas deficiencias propias del software son propicias para que los estudiantes no logren el traspaso de registros, como por ejemplo las dificultades generadas por la escala de medidas del problema y la utilizada en el applet, esto sumado a las falencias en el manejo de la herramienta tecnológica.

Las dificultades encontradas en las preguntas 2, 4, 6 y 8 de la actividad 1, y la pregunta 2 de la actividad 2, muestran que los estudiantes expresaron la respuesta de tal forma que la representación algebraica no coincide con la representación gráfica

Por lo tanto se considera que las modificaciones que se realizaron están de acuerdo a la implementación, la propuesta presentada finalmente proporciona herramientas que permiten resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos.

RECOMENDACIONES

Es pertinente que al iniciar el tema de la derivada se considere un espacio dedicado a los conceptos de máximos y mínimos, que en lo posible durante el grado once, se trabaje con problemas de optimización.

Propender por la continuidad de este trabajo, en cuanto a problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, ya que se pueden resolver problemas de maximización y además aplicarlos a otras áreas del conocimiento. Estos pueden ser modelados con la ayuda del software geogebra, ampliando los traspasos de registro lenguaje natural al algebraico mediante representaciones ejecutables.

Implementar el modelo de las actividades propuestas con el objetivo evaluar el impacto causado en el aprendizaje de la solución de problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, a su vez explorar alternativas para la enseñanza de los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

Boyce, W & Diprima, (2004). Cuarta Edición

DUVAL R. (1999 a). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. Universidad del Valle

Duval, R. (1999 b). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectual. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1

D'Amore B. & Fandiño M. (2010). La didáctica y la dificultad en matemáticas. Ed. Magisterio.

Espinosa. M, (2011). Los sistemas de representación en la solución de problemas de algebra elemental. Revista Internacional Alammi. Instituto tecnológico de Minatitlán.

MEN (2001). Memorias del Seminario Nacional. Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.

MEN (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Editorial MEN

MEN (2003). Estándares básicos de matemáticas y lenguaje educación básica y media. Editorial MEN

Stewart. J (2006). Cálculo. Editorial Cengage

Zapata, J (2007). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de las tecnologías de la información y la comunicación. Editorial Mejora.

ANEXO A
(Propuesta Inicial)

ACTIVIDAD 1

Una página rectangular ha de contener $24dm^2$ de texto, con márgenes superior e inferior de $1.5dm$ y laterales de $1.0dm$. ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?

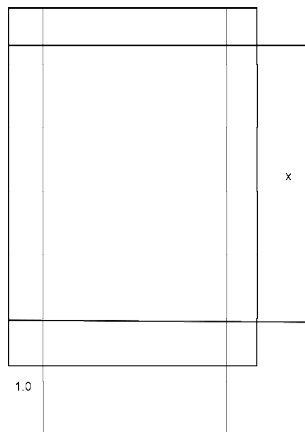


Figura 1

- 1) ¿Qué datos nos presenta el problema?
- 2) ¿Qué variables nos presenta el problema?
- 3) Observando en el dibujo, completar los datos y la variable que hace falta.

En este caso tenemos que optimizar una expresión de área, como es una página de las características del problema, entonces la ecuación a optimizar es:

$$A(x, y) = 4(1.5 \cdot 1) + xy + 2(1 \cdot x) + 2(1.5 \cdot y)$$

4) El área que resultante luego de realizar las operaciones es:

5) Evidentemente las variables por definir son dimensiones no nulas. Por tal motivo las dimensiones de las variables deben ser mayores que:

Nos dice el problema que debe tener $24dm^2$ de texto, esto quiere decir, y viendo el dibujo, que la segunda ecuación a trabajar es: $xy = 24$

6) Según lo anterior, despejando la variable y la ecuación resultante es:

Realizando la sustitución de la ecuación despejada en la ecuación principal de área $A(x, y) = 6 + xy + 2x + 3y$, el resultado es:

$$A(x) = 6 + x \frac{24}{x} + 2x + 3 \frac{24}{x}$$

$$A(x) = 6 + 24 + 2x + \frac{72}{x}$$

$$A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

7) Respecto a la ecuación anterior $A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$ la derivada de esta función es:

8) Si la derivada anterior la igualamos a cero y se halla los máximos y mínimos el valor de x es:

La solución negativa no tiene sentido, por tanto lo utilizamos. En cambio la solución positiva será analizada en la segunda derivada de la función dada.

La segunda derivada de la función $A(x) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$ es: $A''(x) = \frac{144}{x^3}$

9) Reemplazando el valor positivo de la solución positiva de x en la segunda derivada nos da: $A''(x) =$

10) Reemplazando el valor positivo de la solución positiva de x en la ecuación despejada nos da: $y = \frac{24}{x}$

11) Por lo tanto las dimensiones de la página está dada por $A = (1+1+x)(1.5+1.5+y)$ y reemplazando los valores de x , y entonces la solución es:

ACTIVIDAD 2

Dos postes de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros entre sí. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?

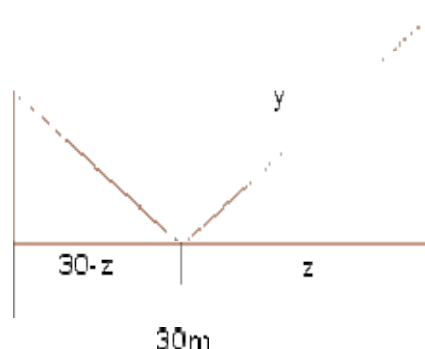


Figura 2 (postes)

- 1) ¿Qué datos nos presenta el problema?
- 2) ¿Qué variables nos presenta el problema?
- 3) Observando el dibujo, completar los datos y la variable que hace falta

En este caso tenemos que optimizar una expresión de longitud, entonces la ecuación a optimizar es:

Los valores lógicos de x son $x = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2}$

- 4) Entonces los valores lógicos de y son:

Sustituyendo estos valores lógicos en la función principal de longitud no queda:

$$L(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$$

5) Respecto a la ecuación anterior $L(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$ la derivada de esta función es:

La solución que sobrepasa a 30 no tiene sentido, por tanto lo utilizamos. En cambio la solución que está por debajo de 30, sí nos sirve para nuestra solución.

6) Entonces la distancia de x y la distancia de y serán:

ACTIVIDAD 3

1) Sin mover el punto E, ¿en qué parte del segmento AB crees que se hacen mínimos los costos?

2) Moviendo el punto E, ¿qué relación encuentra entre la distancia AB y la función que contiene el punto F?

.

3) Moviendo el punto E, ¿qué relación encuentra entre la tabla de datos y la distancia DE, el costo y la función que contiene el punto F?

4) ¿Qué se puede concluir del problema?