REFLEXIONES SOBRE LA RELACIÓN FÍSICA Y MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA. ESTUDIO DE CASO: TERMODINÁMICA DE CLAPEYRON

CARLOS ANDRÉS BONILLA MONTENEGRO
Cód. 2010146008

Línea de profundización: Enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural
Departamento de física
Facultad de ciencia y tecnología
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C.
Noviembre, 2015

REFLEXIONES SOBRE LA RELACIÓN FÍSICA Y MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA. ESTUDIO DE CASO: TERMODINÁMICA DE CLAPEYRON

CARLOS ANDRÉS BONILLA MONTENEGRO
Cód. 2010146008

MARINA GARZÓN
Docente departamento de física
Universidad Pedagógica Nacional
Asesora Trabajo de Grado

Línea de profundización: Enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural
Departamento de física
Facultad de ciencia y tecnología
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C.
Noviembre, 2015

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Reflexiones sobre la relación física y matemática en la enseñanza de la física. Estudio de caso: Termodinámica de Clapeyron
Autor(es)	Bonilla Montenegro, Carlos Andrés
Director	Garzón Barrios, Marina
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 42 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	RELACIÓN FÍSICA Y MATEMÁTICA, REPRESENTACIÓN, MODELACIÓN, CONOCIMIENTO, ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

2. Descripción

Trabajo de grado que presenta reflexiones sobre la manera en cómo se presentan las matemáticas en la enseñanza de la física teniendo en cuenta algunas posturas consideradas por epistemólogos y educadores, teniendo en cuenta la actividad representativa en la construcción de explicaciones y la modelación matemática en la enseñanza de la física.

Respecto a la relación física y matemática se defiende una perspectiva nominada *relación constitutiva,* la cual considera los procesos internos de los sujetos en la construcción de conocimiento y el desarrollo de los procesos racionales que configuran las explicaciones matemáticas.

La postura defendida es ejemplificada a través del estudio de caso de la termodinámica propuesta por Émile Clapeyron al distinguirse por la presencia de pensamiento físico y matemático.

3. Fuentes

Bibliografía

Ayala, M. M. (2008). *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción de conocimiento sobre los fenómenos físicos.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Carnot, S. (1987). *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego.* Alianza Editorial.

Clapeyron, E. (1834). Sobre la potencia motriz del calor (Marina Garzón y Carlos Bonilla, trad). *Journal de l'École Polytechnique*, (Obra original publicada en 1834).

Lesh, R. (1997). *Matematización : la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones.* Dartmouth: Universidad de Massachusetts.

Michelsen, N. (2015). *Mathematical modeling is also physics—interdisciplinary teaching between mathematics and.* Dinamarca: Universidad de Dinamarca.

Piaget, J. (1975). El pensamiento matemático. En J. Piaget, *Introducción a la epistemología genética.* Buenos aires: Paidos.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI editores.

Rico, L. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las ciencias*, 361-371.

Romero, Á. (2003). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantanea. *Educación y pedagogía*.

Tzanakis, C. (2002). *On the relation between mathematics and physics in undergraduate teaching.* Rétino: Universidad de Creta.

4.Contenidos

El trabajo de grado se desarrolla a través de dos capítulos, los cuales son:

Capítulo 1: Caracterización de la relación entre la física y la matemática

En este capítulo se presentan tres perspectivas sobre la relación física y matemática que son:

Relación aplicativa, que caracteriza la presentación de las matemáticas como instrumentos necesarios para la comprensión de la física y que demanda del entrenamiento de los estudiantes en la manipulación de formas y métodos matemáticos. La segunda que es una *relación relativa al estudio de casos particulares* que se caracterizan por la presencia de desarrollos físicos y matemáticos y que afirma que no existe una relación determinada entre las dos áreas pues en ocasiones se desarrollan de manera simultánea, en otras las estructuras matemáticas anteceden a las teorías físicas y en otras las preocupaciones de la física se presentan como contexto de producción de formulaciones matemáticas. Por último se presenta una *relación constitutiva* que es defendida por la posición de los autores al presentarse como pertinente para la enseñanza de la física al tener en cuenta el proceso de transformación de las cualidades a las cantidades por procesos racionales y que está basado en el trabajo de Jean Piaget sobre la psicogénesis del pensamiento físico y el pensamiento matemático.

También hace parte de este capítulo la discusión sobre si las matemáticas son estructuras que existen de manera ontológica en el mundo material o si son producto de la actividad de construcción de conocimiento del hombre en su necesidad por explicar realidades; abordando la actividad representativa del sujeto y el plantemiento de la modelación matemática como estrategia para la enseñanza de la física.

Capítulo 2: Estudio de caso: Termodinámica de Clapeyron

En este capítulo se ejemplifica la *relación constitutiva* defendida en el capítulo 1, pues se realiza un análisis de las formulaciones geométricas y analíticas propuestas por Clapeyron sobre el trabajo realizado por Carnot alrededor de las máquinas térmicas.

Se presenta de manera detallada y descriptiva las relaciones de dependencia, independencia, equivalencia, constancia y variación distinguidas por Clapeyron entre las variables térmicas y que logra explicitar a través del uso de curvas, rectas, y superficies para dar cuenta de la cantidad de calor que fluye en un sistema térmico.

5.Metodología

Para la realización de este trabajo fue necesario hacer una revisión de las posiciones mas distinguidas respecto a la manera en cómo es comprendido el vinculo físico-matemático. De lo cual fue importante considerar el proceso representativo y la actividad de modelación matemática mediante el estudio de trabajos de epistemólogos y las propuestas de educadores en ciencias.

Posteriormente se acude a la revisión del documento original de Émile Clapeyron para exhibir el procedimiento por el cual las explicaciones cualitativas de los hechos se transforman en representaciones simbólicas cuantitativas.

Lo anterior en aras de cumplir con el objetivo general propuesto que es: *reflexionar sobre la relación física y matemática para la enseñanza de la física.*

6.Conclusiones

- ✓ Desde una perspectiva constructivista del conocimiento, no puede asumirse en el mundo la existencia per se de estructuras matemáticas para justificar la presentación de ellas de manera determinista. Pues entendemos que son el producto de procesos de pensamiento analíticos, sintéticos y deductivos relativos a los proceso mentales de cada sujeto.

- ✓ En aras de promover un aprendizaje significativo, es necesario reflexionar sobre la lógica del uso de matemáticas para explicar el mundo. Pues desde la práctica tradicional su uso se presenta como una regla o norma, que por un lado pareciera escogerse arbitrariamente y por el otro que puede o no estar en comunión con las explicaciones propias de los estudiantes y que les han sido suficientes para explicar su experiencia.

- ✓ Parte de la actividad de enseñar y aprender física es organizar los hechos de la realidad externa dentro de los esquemas internos que se hacen explícitos en la representación de los mismos. Aspecto caracterizado porque permite tomar distancia de lo externo y operar directamente sobre la representación en donde los productos de las operaciones se corresponden con acciones o evaluaciones del exterior. De manera que no basta con manipular formas simbólicas sino estar en la capacidad de explicitar las relaciones identificadas entre los objetos.

- ✓ Es necesario que los maestros de física conozcan los procesos a través de los cuales se han refinado los conceptos físicos de manera que le brinden herramientas con las que pueda hacer una presentación de las temáticas más coherentes con el lenguaje usado por los estudiantes para explicar los hechos del mundo. Para esto se presenta como pertinente la revisión y observación de casos particulares desde los que se pueda examinar el contexto histórico que da origen a los conceptos teóricos tanto en su forma cualitativa como cuantitativa.

- ✓ Aunque se hable de la matemática como un lenguaje universal no todos llegamos a las mismas deducciones después de observar los hechos, y las proposiciones, leyes y teorías que exponemos a los estudiantes sólo podrán ser comprendidas como verdades si se encuentran en consonancia con los esquemas mentales que ya han organizado para explicar los eventos relativos a dichas leyes y teorías.

- ✓ El papel de las matemáticas en la enseñanza de la física no debe estar enfocado en la adopción de ideas y términos o en la resolución de métodos matemáticos para encontrar como respuesta números concretos que reflejen un comportamiento del mundo sin reflexionar sobre las operaciones realizadas sobre las variables. Por el contrario debe estar dirigido al desarrollo de un pensamiento analítico reflexivo que les permita a los estudiantes organizar sus propias ideas coherentemente con el lenguaje usado por convención para expresar relaciones entre las cualidades de los eventos y objetos del mundo.

- ✓ La enseñanza de las matemáticas y el tratamiento que le damos los docentes de física debe tener como preocupación la creación de necesidades lógicas que favorezcan el desarrollo del pensamiento analítico de los estudiantes al observar el mundo, desde lo cual se fortalezca la capacidad de percibir lo cambiante, lo constante, lo aditivo, las formas de crecimiento (lineal, exponencial, logarítmica, etc.), lo proporcional, lo equivalente, lo dependiente y lo independiente.

- ✓ Las formas matemáticas son construcciones racionales tan humanas como nuestras ideas y se presentan como un producto de un proceso de refinamiento de ellas. Proceso en el que los datos que nos otorga la experiencia se reorganizan, codifican y transforman para posteriormente expresarlo a través del lenguaje como necesidad comunicativa.

- ✓ Introducir los conceptos físicos en formas matemáticas y métodos de resolución de esas formas compromete a los estudiantes con un papel pasivo en la construcción del lenguaje matemático, pues implica que su actividad deba centrarse en la reproducción de las construcciones de otros sujetos, sujetos de "ciencia" que pueden serle ajenos a su realidad.

- ✓ Es importante considerar que la comprensión de las estructuras matemáticas de las teorías físicas no implica necesariamente comprender los conceptos físicos, por lo que destinar el estudio de conceptos físicos y matemáticos a un mismo espacio curricular haría coherente la transformación del lenguaje usado para dar explicaciones a lo largo de todo el proceso que va desde la observación de los hechos hasta la formalización de los mismos.

Elaborado por:	Carlos Andrés Bonilla Montenegro
Revisado por:	Marina Garzón Barrios

Fecha de elaboración del Resumen:	02	12	2015

Tabla de Contenido.

Tabla de figuras

Introducción

El objetivo del presente trabajo de investigación es presentar algunas reflexiones a tener en cuenta en la enseñanza de la física acerca de la relación entre la física y las matemáticas debido a que las ideas alrededor de ella problematizan los procesos de enseñanza y aprendizaje de ambas disciplinas.

Desde una vertiente de las prácticas de enseñanza de la física distinguida por muchos como tradicional, la matemática cumple un rol instrumental al usarse de manera arbitraria como un lenguaje útil para representar las teorías físicas y exhibirlas en forma de ecuaciones y algoritmos matemáticos. Esta manera de asumir las matemáticas en la física se evidencia en algunos textos escolares y en el ejercicio de algunos docentes de física cuando centran su enseñanza en la aplicación e imposición de técnicas y formas matemáticas para abordar un concepto, en la cual priman los resultados de la construcción de los conceptos y no sus procesos de construcción junto con lo que a través de ellos representan y significan, favoreciendo que la conceptualización se dé separada de la matematización y por lo tanto que se presente una falta de comprensión tanto de los conceptos físicos como de los modelos matemáticos (Ayala M. M., 2008)

En los actuales estándares curriculares establecidos por el ministerio de educación nacional, por ejemplo, se observa que a cada área del conocimiento se le asignan espacios independientes para su estudio, lo que le permite a algunos docentes de física considerar que las matemáticas deben aprenderse en la clase de matemáticas y que por lo tanto deban dirigir su actividad a darles significado con los conceptos que elabora de la observación de los hechos o explicar los conceptos a partir de la matemática que ya se "aprendió".

Con lo anterior, es de entenderse entonces que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la física presente dificultades, pues requiere asumir que los estudiantes deban expresar su experiencia sensible en términos de lo que podrían identificar como abstracto y que - sin presentárseles razones lógicas – funciona para explicar el mundo.

En ese orden de ideas, consideramos que la actividad del maestro en su papel de orientador del proceso de aprendizaje debiera preocuparse por mostrar de una manera más profunda la relación entre la física y la matemática, de modo que sea posible aproximar a los estudiantes a una física más incluyente, lógica y coherente con el mundo que viven (Moreno, 2008), para lo cual es necesario que el maestro también conozca los procesos de construcción de los conceptos físicos (Rodriguez, 2006)

Desde esta mirada es importante resaltar que la enseñanza de la física se trata no solamente de imponer técnicas matemáticas para que sean ejecutadas y reproducidas sino de construir la posibilidad de matematizar los fenómenos, construir las magnitudes, las relaciones entre ellas y los procedimientos que permiten representarles (Romero, 2002).

Capítulo I

1. Caracterización de la relación entre la física y la matemática

En la transición de los conceptos físicos desde lo cualitativo hasta lo cuantitativo hemos identificado como relevantes y problemáticas las ideas relativas a: las posibles relaciones que se han considerado entre la física y la matemática, las representaciones como expresión de conceptos, el rol de los procesos de modelación en la elaboración de conocimiento científico y el fortalecimiento del pensamiento matemático, y cómo algunos autores han concebido la existencia de las matemáticas en el mundo. Razón por la cual desarrollaremos estos aspectos en el primer capítulo del presente trabajo.

1.1 Relación entre la física y la matemática

Una situación que se presenta con frecuencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física es la dificultad de los estudiantes cuando se encuentran con estructuras y formas matemáticas en la explicación de los fenómenos, o en la resolución de problemas propuestos en los libros escolares.

Es común asociar el uso de las matemáticas en la presentación de las teorías físicas como requisito indispensable para su comprensión sin reflexionar sobre el desarrollo del pensamiento físico y el pensamiento matemático. Así, la manera en como ambas disciplinas se piensan, enseñan y aprenden hace necesario que se incorporen reflexiones sobre la relación físico-matemática en la enseñanza de la física, más aún cuando involucra una postura sobre el acto de conocer, que es cuestionable si lo que se enseña son los contenidos como los productos de un proceso de elaboración cognoscitiva sin reflexionar sobre el proceso en sí mismo.

El presente estudio permitió identificar tres perspectivas alrededor de la relación física y matemática.

La primera de ellas propone que los procesos mediante los cuales se conforma cada disciplina son independientes entre sí, pero que a su vez son susceptibles de ser aplicadas la una en la otra en el desarrollo posterior de la ciencia y siguiendo el nombre que sugiere por la literatura la hemos llamado *relación de aplicación.*

La segunda establece que el problema del vínculo físico-matemático no puede resolverse de manera absoluta sino que es relativo a cada situación, pues señala situaciones específicas de la historia donde en ocasiones los conceptos físicos se propusieron a partir de las formulaciones matemáticas y otros casos donde sucede lo contrario. Relación que hemos denominado *relación relativa a casos particulares.*

Por último, la tercera, resalta a la física y a la matemática como procesos de pensamiento constitutivo y además codependientes en sus orígenes cognitivos, razón por la que le hemos bautizado con el nombre de *relación constitutiva.*

A continuación ampliaremos estas tres perspectivas en torno a la relación de la física con la matemática y que son asumidas por algunos científicos, epistemólogos y educadores.

1.1.1 Relación de aplicación

Para muchas personas – principalmente estudiantes de bachillerato - la matemática es considerada como una disciplina más compleja que la física porque el nivel de abstracción que han identificado a través de su experiencia parece ser mayor en relación con las observaciones que se pueden obtener del mundo físico. Desde esta idea pareciera como si no existiera relación alguna entre estas dos áreas, pero que en el momento en que el estudiante profundiza sobre ambos contenidos, estos empiezan a articularse a veces de maneras desconocidas, extrañas e incluso injustificadas. Hecho que evidentemente está influenciado por las ideas y reflexiones que tienen los docentes frente al conocimiento matemático y científico.

Lo anterior permite pensar que la forma más difundida de plantear la relación física y matemática ha sido "aquella por la cual se considera a las matemáticas como lenguaje de la física" (Romero, 2002) a través de la cual las matemáticas son asumidas como un medio de expresión y cálculo preformado que conduce a pensar la intervención de las matemáticas en la física como un instrumento completamente técnico y que favorece la idea de la enseñanza centrada en el entrenamiento de los estudiantes para manipular el lenguaje matemático y así ser exitosos en la "comprensión" de la física.

La enseñanza tradicional de la física, por su parte, ha mostrado a la matemática como un lenguaje abstracto al que han debido y deben ser traducidas las observaciones y análisis sobre el mundo, hecho que desencadena en una situación tan problémica en el proceso académico de los estudiantes que incluso hay quienes han llegado a proponer la presentación de una física sin matemáticas. Por ejemplo, Paul Hewitt (1997) en la presentación de su texto "Física Conceptual" sugiere que la introducción a la física hecha a través de formas matemáticas es una causa de deserción en el curso de física, por lo que para él es pertinente hacer una presentación que él denomina "conceptual" – refiriéndose al carácter meramente cualitativo - para atribuirle posteriormente expresiones matemáticas.

La visión que sustenta propuestas de este tipo es planteada desde la perspectiva en la cual el rol que desempeñan las matemáticas en la física es completamente aplicativo, que consiste en hacer uso de un cuerpo de conceptos propios de la matemática para aterrizarlos en un terreno ajeno, que para el caso sería prestado por la física.

Vemos con esto que se entiende la matemática como un conjunto de elementos que se aplican posteriormente a los saberes y no como un modo de pensar natural y propio de las personas.

En contraposición con esta mirada, distinguimos otra que demanda analizar situaciones particulares de la historia en donde convergen conceptos físicos y matemáticos para establecer entre ambos una relación que será particular a cada situación por analizar y no universal. Es decir que no establece una definición única y absoluta para la relación que nos ocupa.

1.1.2 Relación relativa a casos particulares

Constantin Tzanakis (2002) investigador en educación matemática, interesado por aportar a esta inquietante relación, revisó momentos históricos del desarrollo de algunas teorías físicas y matemáticas, y, tomando como criterio que ambas son expresiones de la interpretación del hombre, ilustró la génesis de algunos conceptos físicos y matemáticos.

Por un lado, encontró situaciones en las que teorías físicas y conceptos matemáticos son construidos de manera simultánea, presentándose incluso como el resultado del trabajo de los mismos autores.

Ejemplo de lo anterior es el desarrollo de la mecánica clásica y el cálculo diferencial ya que ambas contaron con los aportes de Newton y Leibniz. También el análisis vectorial y la teoría electromagnética que se desarrollaron con los trabajos de Maxwell, Gibbs y Heaviside.

Otros de sus ejemplos ilustran situaciones en las cuales la formulación de teorías y conceptos matemáticos se originaron en la preocupación por resolver problemas propios de la física. Tal es el caso del desarrollo de los análisis de Fourier que fueron útiles para formalizar la idea de conducción térmica, o la ecuación de Dirac que describe partículas de espín ½ como el electrón y predice la existencia de antimateria, lo que es fundamental para el desarrollo de la mecánica cuántica.

Asimismo, indica casos en los que las formulaciones matemáticas antecedieron por mucho tiempo los contextos y situaciones en los cuales fueron útiles para resolver necesidades de la física. Es decir, fueron aplicadas y ajustadas a las ideas de la física como en los casos de la teoría de la relatividad de Einstein del siglo XX y la geometría riemanniana del siglo XIX.

De acuerdo con Tzanakis, desde un punto de vista epistemológico, las matemáticas y la física tienen una cercanía más trascendental de la que usualmente se piensa. Por un lado, los métodos matemáticos son usados como una herramienta fundamental en el desarrollo de la física y no simplemente como un lenguaje que es útil para expresarla. Por otro lado los conceptos, argumentos y modos de pensar en física también han sido extrapolados hacia la matemática, por lo que la física no resulta siendo meramente un dominio de aplicación de las matemáticas en donde la física propone problemas listos para resolverse con el uso de matemáticas, sino que por el contrario, provee de contextos problemáticos pertinentes para la generación de nuevas herramientas y elementos matemáticos.

Esta posición permite decir que cualquier intento por esclarecer la relación física y matemática debe ser dirigido a revisar los trabajos particulares caracterizados por la presencia de pensamiento físico y matemático, de manera que no puede establecerse que la relación de la física con la matemática es aplicativa de manera absoluta, pues Tzanakis ilustra el panorama al respecto mediante el estudio histórico presentando los ocasionales caracteres constitutivo y aplicativo de la relación según cada caso.

Por el contrario, nuestra posición radica en considerar que toda situación que se caracterice por la presencia de pensamiento matemático y sus productos está acompañada necesariamente por la presencia de pensamiento físico y viceversa; la cual presentamos a continuación.

1.1.3 Relación constitutiva

En contraste con la *relación de aplicación* y la *relación relativa a casos particulares* identificamos una perspectiva que contempla que el desarrollo de la física y el desarrollo de la matemática no se dan de manera independiente sino que son procesos simultáneos y colaborativos en su proceso de conformación tanto en la historia como en los procesos de conocimiento del hombre. Esta relación es la que denominamos *relación constitutiva* y sobre la cual se encausan nuestros esfuerzos por pensarla como necesaria para el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues tiene en cuenta los procesos internos del sujeto en la construcción del conocimiento.

La familiaridad de la física con la matemática no se basa en que sean aspectos plenamente diferenciados antes de la experiencia y complementados el uno con el otro después de ella, más bien se trata de una relación "dinámica", pues como lo dice Jean Levy (1984) "Un concepto físico no es un concepto matemático más otra cosa…y un concepto matemático no es un esqueleto al que la física le presta su carne, ni una forma abstracta que la física llena de contenido concreto", oponiéndose a los argumentos que justifican las ideas de *relación aplicativa* para cualquier circunstancia.

La caracterización de este tipo de vínculo entre la física y la matemática también ha sido propia de algunos educadores en ciencias preocupados por las dificultades que hemos señalado en la introducción, pero infortunadamente su trabajo realizado en torno a la problemática no se ha hecho evidente en los resultados educativos. Abordar la física y la matemática de forma independiente favorece el fracaso académico de los alumnos en ambos espacios porque dificulta visualizar una misma identidad en las dos.

Existe también una fuerte tendencia por asumir que las formas matemáticas y geométricas pueden elaborarse sin preocuparse por la realidad y que en algún momento la experiencia puede o no llenarlas y adaptarse a ellas de manera perfecta. Como ejemplos de esto, Pedro García (2000) menciona el caso de la geometría riemanniana al considerar que se adapta mejor a las explicaciones sobre los fenómenos gravitatorios que la geometría plana de Euclides. Y el de los números imaginarios que surgen de la generalización de las operaciones aritméticas, pero que posteriormente se hicieron fundamentales en los trabajos de geometría, mecánica y la teoría de las variables complejas y sus respectivas aplicaciones.

Desde este pensar, no puede reducirse la matemática a un simple instrumento usado por el hombre para poner conceptos del mundo en formas y símbolos matemáticos, el proceso es más profundo y complejo pues - como lo señala Ángel Romero (2003) "*es desde la matemática misma que se elaboran conceptos sobre el mundo*". Y si resaltamos que el edificio matemático es tan construcción mental humana como lo son nuestras ideas e incluso como la organización de ellas mismas, tiene sentido entender la matemática como conjunto de procesos racionales desde los cuales se reorganizan, codifican y transforman los datos que nos otorga la experiencia y que posteriormente expresamos a través del lenguaje como necesidad comunicativa.

1. Romero, Á. E. (2003). *La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantanea.* Colombia: Revista educación y pedagogía Vol.XV.

Al igual que Tzanakis, nuestra perspectiva de trabajo ha involucrado el desarrollo de los estudios históricos, de allí hemos estudiado el trabajo de la epistemología genética de Piaget sobre el desarrollo del pensamiento físico y el pensamiento matemático (Piaget, 1975) que nos ha permitido consolidar junto con otros autores una mirada desde la cual argumentamos sobre la relación constitutiva que se puede encontrar en la relación física-matemática para la construcción de conocimiento científico y por lo tanto para la enseñanza de la ciencia.

En este momento, y tras haber presentado diferentes posibilidades de la relación físico-matemática sobre las que se han desarrollado propuestas en la enseñanza de la física, consideramos fundamental tener en cuenta la manera cómo se construye el conocimiento matemático y se desarrolla el razonamiento cuantitativo. Para ello acudimos a las ideas de Piaget quien se ocupa de explicar los procesos de génesis y desarrollo del pensamiento físico y el pensamiento matemático acudiendo a la evolución de las etapas biológicas de los niños, en las que se organiza el mundo con diferentes herramientas cognitivas.

1.1.1.3 Sobre la psicogénesis del pensamiento físico y matemático

Piaget (1975) realiza una clasificación de las etapas operatorias de los sujetos según el nivel de conceptualización alcanzado en cada una de ellas. Es así como denomina etapa de pensamiento intuitivo al periodo en donde la intuición y las acciones inconscientes son el único medio de relacionarse con el mundo, a la etapa posterior, caracterizada por la coordinación de las acciones que le permiten a diferencia de la primera realizar organizaciones reversibles o inversas la denomina etapa de las operaciones concretas, por ejemplo, realizar de manera consciente la separación de elementos por diferencias y reorganizarlos nuevamente por semejanzas. De manera que en estas dos primeras etapas el sujeto aún no se separa de los objetos materiales y toda acción la realiza sobre ellos. La tercera etapa denominada etapa de las operaciones abstractas o formales, que por el contrario, se distingue de las anteriores porque las acciones se realizan por abstracción y se toma distancia de los objetos materiales.

Así, una característica de los niños en edades tempranas es la carencia de ideas de permanencia, conservación o similares, pues estas ideas surgen en medio de necesidades cognitivas que aún no son propias de la edad, en su lugar, es un periodo caracterizado por interactuar con el mundo de manera inconsciente manipulando distintos materiales para ampliar su campo de sensaciones. De manera que lo que se encuentra fuera de ellos se asocia a una fuente de datos que aún no está listo para conceptualizar.

Posteriormente, el pensamiento y sus productos evolucionan con cada nuevo tipo de interacción tanto simple como reflexiva. La primera etapa de la evolución le delega todo el trabajo al campo de la percepción y la intuición, desde ella se forman imágenes espaciales poco dinámicas o causales del mundo, sin trascender en posibilidades de reversibilidad, invariancia, dependencia, conservación y permanencia.

En esta etapa se da una familiarización con las cosas de las que se reciben primeras informaciones y que son de carácter principalmente empírico, las sensaciones significan un algo que no supera las meras impresiones sensoriales. Posteriormente se construyen imágenes mentales del medio y se actúa modificándole sin comprender en qué medida las acciones logran transformar el entorno, pues no se posee una conciencia precisa de ellas. No existe acá una distinción entre un mundo externo y un mundo interno, ni siquiera existe una concepción de esta posible dualidad del mundo.

En una segunda etapa, se ha evolucionado biológicamente y necesariamente también lo han hecho las estructuras mentales, implicando la capacidad de identificar en la realidad física patrones, series, o causas de eventos, abriendo paso a la construcción de estructuras lógicas que nacen de la organización de la experiencia.

Aquí, la acción permite clasificar, separar, reunir e incluso medir las cualidades de los objetos; internamente, se desarrolla un pensamiento matemático en tanto se atribuyen estructuras mentales a los objetos al tomar distancia de su forma material; como la escala de temperaturas que se puede identificar de un conjunto de piedras expuestas a distintos calores, donde se puede establecer qué tanto más caliente se encuentra una piedra respecto a las demás o percibir una gradación de las temperaturas. Pues lo que para el hombre maduro puede ser un sencillo proceso de enumeración para el niño es un proceso complejo en el que lo cualitativo del mundo se cuantifica, se *enumera* imponiendo un orden mental a dicha cuantificación y que es poco o nada evidente.

De acuerdo con Piaget (1975), cuando *enumerar* implica poner en correspondencia una estructura mental con las cualidades de los objetos, en un primer momento el proceso mental demanda un desprendimiento temporal de las cualidades particulares del objeto. Por ejemplo, cuando se pone en correspondencia la cantidad de plumas de un ave con la cantidad de pelos de un mamífero, pues en esta situación deja de ser importante la naturaleza de las especies para centrarse en la numeración de los elementos.

Es así como en una tercera fase, distinguida como propia de las operaciones formales, el pensamiento matemático puede operar sobre objetos irreales, incluso las estructuras producto de la coordinación de las acciones llegan a un nivel de generalización en el que su coherencia con los hechos materiales puede ser nula. Pues para la validez de la matemática lo anterior no es un requisito en tanto exista coherencia racional. Tal como sucede con los números imaginarios que no proceden directamente de nuestra experiencia y tampoco nada en ella sugiere que los introduzcamos para explicarla.

Lo anterior constituye contundentemente un proceso complejo en cuanto partiendo de *necesidades cognitivas* se construyen conjuntos de elementos inexistentes en el mundo exterior como los números y se ponen en correspondencia con los objetos que si son perceptibles, con tal armonía en sus estructuras que se logra operar sobre aspectos cuantitativos de los objetos aun cuando no están presentes, ya sea con fines explicativos, operativos, descriptivos o predictivos.

De manera que la organización del mundo desde el pensamiento matemático toma un largo trayecto en el que las necesidades del hombre le demandan la creación de sistemas e instrumentos de medida, construcción de conceptos medibles o magnitudes y poner en correspondencia datos del exterior con las estructuras elaboradas internamente.

Los objetos como el agua, la arena, el aire, el plástico, el hierro, la madera, etc. A pesar de ser objetos concretos, no son contables y numerables perceptivamente, como si puede serlo un conjunto de esferas, bloques o fichas a los que podemos asignarles unidades. Para tal fin contable los primeros generan la necesidad de construir magnitudes que permitan realizar una medición sobre sus cantidades.

Es natural que en la gramática de cada idioma como por ejemplo el inglés se categorice estas identidades de los objetos organizándolos en dos grandes conjuntos que son los contables y los incontables. En ese sentido el proceso de numeración que puede resultarnos simple se torna complejo si pensamos que para llegar a él es necesario atravesar fases en las que los objetos y la información empírica inmediata deben reorganizarse de múltiples formas. Para el caso podemos pensar que para que los objetos y sus cualidades sean cuantificados es preciso realizarse una construcción completa de las mismas, y partir de la distinción de sus identidades.

En vías aun de enumerar el mundo, un segundo momento correspondería al establecimiento de correspondencias entre los objetos mismos a partir de las semejanzas. Acá pueden establecerse patrones que permitan comunicar qué tanto es una cantidad en relación con otra, es decir, seleccionar patrones de medida.

Pero cuando se trata de medir debe tenerse conciencia de que los patrones seleccionados no aplican sobre cualquier cosa que quiera medirse pues deben construirse criterios que respondan a qué es lo que se quiere medir, hecho que implica reconocer las cualidades de un mismo objeto y las diferencias entre ellas. Así, no podría pensarse en escoger la unidad de un metro para ponerla en correspondencia con el peso de un cuerpo. De manera que el proceso consiste en la distinción y clasificación de cualidades y la atribución de magnitudes propias a cada una de ellas.

Aún atravesar por el proceso anterior no es suficiente para decir que se ha atribuido una enumeración, pues la característica del proceso de enumerar es que se encuentra organizada de manera que podamos reconocer en qué proporción la medida de una magnitud es mayor que otra y esto es debido a la *ordenación*, la manera en como disponemos las cantidades.

Tampoco pasa mucho tiempo para que las posibilidades de manipulación se amplíen y los sujetos empiecen a ejecutar acciones concretas sobre los materiales a su alrededor. La separación y reunión de objetos por sus semejanzas y diferencias es una de ellas, como también lo es la fragmentación y deformación de cuerpos suaves como la goma y la plastilina, acciones de las que se extraen cada vez diferentes informaciones desde su campo perceptual pero que se reestructuran debido a la necesidad de organizar su experiencia en aras de entenderse con el mundo.

Así, mediante fases asimilatorias los sujetos atribuimos significados a lo externo, transformamos la realidad temporal limitándonos, en un inicio, por las características propias de los objetos, al mismo tiempo que evoluciona nuestro esquema asimilatorio y con él la organización de las ideas producidas, de manera que, el producto de lo que conocemos no es una simple copia pasiva de una realidad que obra fuera de nosotros. Nuestra realidad se transforma en la medida que nuestro pensamiento condiciona nuestra manera de interactuar con ella.

Comúnmente se piensan las acciones como aplicaciones del pensamiento, pero lo que sucede en los estados iniciales de formación de conocimiento es inverso, pues las acciones preceden al pensamiento, es más, las acciones y sus efectos son constitutivos de los pensamientos, principalmente del pensamiento lógico. Así, las acciones logran establecerse como proposiciones y que puede considerarse como parte de un proceso de formalización en el que el pensamiento se transforma con acciones tanto de repetición como de creación (Piaget, 1975).

Por otro lado los objetos de comprensión fuera del sujeto son inalcanzables en su forma más pura para sí mismo y según Piaget las logicizaciones y matematizaciones son el medio a través del cual nos acercamos a los objetos externos mediante sucesivos estados de equilibración (Piaget & García, 1982), por lo que es inconcebible pensar las estructuras matemáticas como naturales y determinadas en el mundo y por el contrario hace necesario entenderlas como producción independiente de cada sujeto de acuerdo con sus necesidades experienciales.

El niño por medio del lenguaje suele adoptar ideas del mundo social sin implicar necesariamente que las ha asimilado a sus estructuras mentales. Este hecho puede ponernos en contexto también situaciones relativas a la enseñanza de la física y la matemática, un ejemplo de ello es la heredada práctica de memorización de las tablas de multiplicar, un niño de 7 años bien puede decir que 7 x 6 = 42 pero con dificultad deduciría que 70 x 6 =

420, pues no se han asociado las relaciones de las unidades, decenas, centenas, etc. a los resultados de las multiplicaciones, como quizá tampoco se ha desarrollado la idea del producto como la abreviación de múltiples adiciones y que contrario a la suma se permite operar sobre objetos de diferentes conjuntos. Es decir, las adiciones implican elementos de un mismo conjunto pues como se nos ha dicho no podemos sumar manzanas con peras, o mejor, masas con aceleraciones o distancias con tiempos pues carecería de sentido lógico contrario a lo que sucede si realizamos multiplicaciones entre esas magnitudes.

Las operaciones surgen de las asociaciones y disociaciones psicológicas, permiten organizar, clasificar, etc. y las reglas de estos procesos se expresan en las propiedades de cada operación (conmutativo, asociativo, distributivo, anulativo, etc.). La matemática asimila los datos sensibles a esquemas espaciales y numéricos y somete así la materia a un sistema de operaciones siempre más complejas y coherentes que permiten que la deducción domine la experiencia e incluso la explique.

La psicología analiza las operaciones y de ellas separa lo que corresponde a la actividad del sujeto y que permanece irreductible a una simple sumisión a los datos de la realidad exterior lo que es contrario a la tendencia realista de la ciencia que subordina el espíritu y la realidad al concentrar los conocimientos sobre el objeto.

"No es común que el físico encuentre una estructura en el mundo material que no pueda expresar con precisión en el lenguaje matemático, como si existiera una armonía preestablecida entre los aspectos del universo físico y los marcos abstractos de la geometría y el análisis. Esto no solamente sucede durante el descubrimiento de una ley física sino que en la mayoría de los casos sucede que los esquemas matemáticos anticipan por muchos años al contenido experimental para el cual serán útiles." (Piaget, 1975)

De lo anterior se infiere que la matemática puede engendrarse desde la observación y las acciones del sujeto en el mundo pero las estructuras que logran armarse matemáticamente pueden llegar a generalizarse de manera tal que toda cercanía con el mundo material puede ser inexistente. Como en el caso de la constitución del concepto de infinito al encontrarse lejana de nuestra experiencia material, pero respecto al cual se le ha delegado un papel importante en el desarrollo de la matemática.

Las principales etapas distinguidas por Piaget en la formación de conceptos y sus correspondientes matemáticas son: acción sensorio-motriz, pensamiento intuitivo, operaciones concretas y operaciones formales, distinguidas por el grado de generalidad dada la distancia que se toma de lo material y que son relativos a las necesidades de equilibración del sujeto.

La abstracción a partir de la acción es constructiva porque es reflexionante y constructiva en cuanto a la elaboración de una nueva acción superior, se trata de un nuevo esquema elaborado (más móvil y más reversible) por medio de los elementos tomados de los esquemas anteriores (Piaget, 1975).

Entendemos que el número como objeto más común de la matemática no es abstraído directamente de la realidad, sino a través de una construcción que el sujeto atribuye a objetos externos. De manera que el sujeto toma la información del mundo pero procesa los datos a través de sus etapas psicogenéticas cada vez más complejas.

Hay un pasaje gradual de las acciones mentalizadas a las operaciones lógico matemáticas que se dan cuando se está en capacidad de abandonar la realidad tangible para incorporarla en un esquema representativo.

A partir de las acciones elementales el sujeto conoce por percepción elementos asociados por semejanzas o diferencias, allí cualidad y cantidad conforman un mismo elemento. Desde esto, uniendo y separando los objetos son agrupados en clases dadas las similitudes y diferencias entre ellos, para ello se reconocen las características como forma, tamaño, color, textura etc. Esto hace parte de un proceso en el que empiezan a conformarse categorías a medida que se aleja de lo motriz y el proceso cobra conciencia.

Los objetos matemáticos nacen como respuesta a la necesidad del sujeto de expresar las relaciones que encuentra entre los objetos y sus cualidades cuantitativas, ejemplo de ello es la atribución de números enteros positivos a objetos presentes y de números enteros negativos para referirse a ellos cuando están ausentes y como cuando se opera sobre estos últimos, expresar un producto entre dos negativos está asociado a lo que cualitativamente se refiere a una doble negación que en términos prácticos termina siendo una afirmación, así

- 1 x –1 = 1. Son ejemplos del proceso del hombre de generalizar operaciones inversas a partir de las operaciones directas.

Una vez identificados los objetos como unidades, desde las acciones se realizan particiones, divisiones de un objeto original, por lo que perceptualmente evoca la idea de fracción, porciones de una totalidad que no existen como fracciones matemáticas per se sino que corresponden a la actividad del sujeto al ejecutar él mismo la partición, lo cual se configura en una *necesidad* que se satisface con la construcción del conjunto de los números racionales e irracionales.

El proceso de generalización a partir de la coordinación de las acciones sensorio motrices escala desde la asimilación pasando por la acomodación dando origen a las operaciones concretas (aritmética) requiriendo de manera ajena a la realidad y propia del sujeto una simetría operacional para con todo los números, este es el caso de los números imaginarios que para efectos prácticos no se concibe la síntesis de un número en forma de: radical cuadrado de número negativo. La raíz cuadrada de número negativo toma origen al realizar la simetría de los radicales de enteros positivos a enteros negativos

Pueden pensarse entonces los productos del pensamiento matemático como formas no necesariamente coherentes con la realidad externa y que en algunos casos son susceptibles de ser señalados por la historia en donde las construcciones matemáticas no corresponden con ningún hecho del mundo físico, pero que a pesar de eso encuentran su coherencia y utilidad en los productos de las transformaciones que toma la realidad con el tiempo. Transformaciones referidas a la evolución de las concepciones del mundo y que se dan en medio de todas las asimilaciones que satisfacen los *desequilibrios*, o mejor dicho las necesidades de conocer y explicar una realidad.

1.2 Modelación matemática

En la educación en matemática se ha identificado como problema el centrar la enseñanza de la matemática en la presentación de formas, métodos y técnicas matemáticas de una manera distante de la realidad, bien sea porque se piensa más compleja o incluso ajena a ella, de cualquier forma la modelación matemática se ha planteado como propuesta didáctica con la intensión de favorecer el aprendizaje de los temas correspondientes a mencionada área.

Al respecto hemos identificado dos tendencias en cuanto a la concepción de modelación en matemáticas y que concuerdan con dos de las posiciones que distinguimos en la relación físico matemática, pues, o bien se asocian los modelos como formas últimas y de uso aplicativo o bien como organizaciones engendradas por los mismos sujetos. A continuación se exhiben mejor ambas tendencias:

Por un lado la modelación matemática ha sido propuesta como un conjunto de estructuras fijas e inamovibles a las que se ajustan condiciones y sucesos del mundo real con la intensión de representarlo. Un ejemplo de esto son los problemas de crecimiento poblacional, o similares, en los cuales la dinámica de las ecuaciones diferenciales proveen la estructura, y el contenido que se ajusta a ella es la temática poblacional. De manera que ambas son independientes y la resolución de los problemas se reduce a la *aplicación* de las técnicas establecidas.

Sobre esta línea se realiza el trabajo de Noel Michelsen (2015), director del Laboratorio de Educación coherente y de aprendizaje, y profesor de matemáticas y ciencias en la Universidad del Sur de Dinamarca. Él señala como importante la relación que conserva la matemática con las ciencias naturales y lo poco significativo que resulta la física para los estudiantes. De allí plantea actividades *interdisciplinares* como propuesta para la resolución de ejercicios relativos tanto a la física como a la matemática. Los casos que propone son: la distancia de frenado como pertinente para la aplicación del cálculo diferencial e integral; el trabajo y la energía en la cual se realizan experimentos para obtener datos y aplicar regresiones con el fin de establecer relaciones lineales o exponenciales, en el último caso se toma el crecimiento exponencial como modelo de aplicación a la desintegración radioactiva en física, el refinado del azúcar en química y la pasteurización de la leche en biología. Todos los casos planteados en aras de postular propuestas aplicativas y transformadoras del medio social.

Nuevamente podemos decir a partir de estos ejemplos que hay una fuerte tendencia por entender la matemática como un lenguaje que está a la base de las ciencias pero que no es un elemento constitutivo de los problemas propios de estas últimas. Aquí el aspecto matemático está referido a los datos numéricos y el aspecto físico a los conceptos de distancia, fuerzas, velocidades, energía, etc. Como si estás magnitudes estuvieran por fuera del proceso en que las cualidades se tornan medibles y cuantificables. Es decir, los modelos matemáticos se pueden aplicar como formas abstractas que están por fuera de los problemas específicos de las disciplinas científicas.

La razón que motiva la anterior propuesta es el poco sentido que tiene para los estudiantes el desarrollo de habilidades matemáticas en la comprensión del mundo, razón que también tomamos como propia pero que flexionamos desde una mirada de afín con la segunda tendencia, la cual se refiere a la modelación matemática como el proceso mediante el cual un fenómeno o situación problema es puesto en términos de símbolos y relaciones matemáticas que representan el fenómeno en cuestión (Villa, 2009). Es decir, un proceso en el que el sujeto comunica sus organizaciones lógicas en su trabajo por comprender y dar explicación a los eventos.

Jhony Villa (2009) caracteriza el problema de lo ineficaz que puede resultar la modelación matemática de situaciones en relación con el cómo asume el profesor la realidad, pues si esa realidad es inventada, caducada, desactualizada o simplemente lejana de la realidad de los estudiantes no podría esperarse con entusiasmo que ellos asuman una papel activo en la resolución de problemas que no los somete a experimentación, abstracción, simplificación y determinación de variables de manera significativa.

Adicional a esto, menciona lo que puede ser común en un aula y es que la modelación termina con el planteamiento del problema en forma de ecuaciones y su resolución como un número u otra expresión matemática, abandonando la riqueza cualitativa de los resultados en ausencia de su interpretación y reflexión.

Cuestionando la actividad tradicional también señala que someter a los estudiantes a asumir conceptos teóricos para buscar posteriormente su aplicación los compromete con un papel pasivo de las matemáticas en la cual no construyen matemáticas sino que simplemente ejecutan lo que *otros* sí han construido, lo cual puede implicar repercusiones en el razonamiento analítico de los estudiantes.

1.3 Actividad representativa

Al analizar la dinámica de un sistema físico particular es primario reconocer sus características, condiciones cambiantes, invariantes, dependientes e independientes, factores de cambio, etc. en aras de elaborar esquemas con los que se puedan obtener resultados con fines descriptivos, predictivos o explicativos, y que dependiendo de la pretensión que se tenga realizar con los productos finales puedan plantearse múltiples modelos para una misma situación.

Desde lo anterior se reconocen dos implicaciones importantes, por un lado se debe estar en la capacidad de percibir lo aditivo, lo cambiante, lo invariante, lo proporcional, lo equivalente, lo dependiente, etc. y por el otro ha de suponerse en el mundo una coherencia explícita o implícita con estructuras matemáticas construidas.

En ese sentido, podemos pensar que no accedemos a los objetos u observables de manera directa, mediante la experiencia pura y sin significado, sino necesariamente a través de un proceso racional en el que ponemos el mundo en nuestros términos para dar cuenta de él asignándole significados; proceso que constituimos a través de la formalización de los conceptos y que se está mediado por la interacción sujeto-objeto, del sujeto que al actuar sobre el mundo obtiene un resultado que a su vez condiciona su proceder, lo cual implica una transformando sus ideas del mundo.

El planteamiento de la física en forma matemática como una forma de expresión de las relaciones físicas también es un lugar desde el que se pueden situar las dificultades que se presentan en la enseñanza asociadas a la expresión de conceptos físicos bajo formas matemáticas, razón por la cual la representación es un proceso que ha sido objeto de importantes discusiones en la educación matemática, relegando parte del problema al proceso de representación y a su vez en el papel que tienen las representaciones en el razonamiento matemático (Lesh, 1997). De esta manera pueden abordarse y pensarse soluciones al problema sobre cómo los estudiantes dan sentido a los problemas físicos en su formulación matemática.

La complejidad de este proceso se atribuye a los distintos niveles de esfuerzo por abstracción que debe superar el sujeto en su labor de representar un objeto o experiencia, en donde no son importantes los aportes que realizan sujeto y objeto de manera aislada sino la interacción entre ellos. El aprendizaje se remite a los significados elaborados en ese proceso de interacción (Moreira, 1998). Es así como Luis Rico (1997) señala puntualmente cinco entidades presentes en el acto representacional, que son:

-Los objetos representados,

-Los objetos representantes

-Los aspectos del mundo representado que se representan

-Los aspectos del mundo representante que realizan la representación

-La correspondencia entre ambos mundos

Respecto a la correspondencia entre lo construido o representado por el sujeto y el mundo mismo es que las propuestas de los sujetos hacen parte de sistemas internos que deben encontrarse en comunión con el mundo o sistemas externos para que sean válidas, cuando no sucede esto el proceso interno debe ser mejorado, hasta el momento que exista congruencia entre el modelo y lo que se está modelando, situación que puede dificultarse en condiciones de pensamiento desorganizado o inconsciente, ya sea sobre los datos o sobre los problemas a solucionar.

Las estructuras numéricas son un ejemplo de lo dicho, pues se articulan como un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente con operaciones que reflejan íntimas relaciones entre sí. De manera que es común ver como las cantidades y unidades representan hechos concretos. Ej.: 1, 10, 134 por decir cualquier numero; y formas del tipo 3+20, 8/32, 25(4), representan las operaciones que inducen relaciones entre "hechos u objetos" concretos. De manera que la construcción de una cantidad tiene mayor significado que el de atribuir una forma simbólica, ya que involucra un cantidad ilimitada de posibilidades de relacionar elementos numéricos y a su vez eventos que pueden constituirle a través de procesos operatorios.

1.4 Concepciones sobre la existencia natural de las matemáticas en el mundo

Otro aspecto a profundizar que presenta inconvenientes en el uso de la matemática en física tiene que ver con las ideas que existen respecto a su naturaleza en el mundo exterior, aspecto respecto al cual existe una dicotomía entre quienes se han dedicado al estudio de la física a lo largo de la historia.

Por un lado Galileo afirmaba que "El universo no puede conocerse si primero no se conoce la lengua y los caracteres en que está escrita… matemática, triángulos, círculos, etc." y que "Toda ley se extrae de la experiencia pero requiere el lenguaje especial de la matemática para ser enunciada… pues el lenguaje ordinario es pobre, vago e impreciso", asumiendo un mundo que se encuentra escrito matemáticamente de manera natural y que la actividad del hombre al estudiar el mundo de "manera correcta" consiste en descubrir esa lengua.

Está idea postula la matemática como un aspecto propio del mundo, inherente a él, sugiriendo que el rol del hombre en la construcción matemática es pasivo y asimilatorio de formas que le son ajenas.

Por el contrario, Poincaré concibe la construcción del número no como su descubrimiento según una existencia preestablecida sino en medio de la facultad del sujeto para identificar unidades y series. Tanto Lesh (1997) como Piaget y Garcia (1982) también entienden la matemática, sus estructuras y formas como constructos que el hombre engendra desde sus necesidades prácticas y racionales para implementarlas como recursos, medios y herramientas en la interacción con el mundo. Como causa y efecto propios del proceso de construcción de conocimiento.

Las representaciones como construcción del sujeto, ponen de manifiesto descripciones, interpretaciones, explicaciones y predicciones relativas a nuestro mundo, de manera que las habilidades requeridas para realizar desarrollos matemáticos implican más que la manipulación de los símbolos consensuados como parte del lenguaje especial de la matemática. Para ello es necesario trabajar sobre un razonamiento especial de cuantificación, visualización de estructuras, identificación de propiedades y características de aquello que se desea matematizar.

Lo anterior es la razón por la que tomar un dominio particular de la física nos permitirá ilustrar con mayor detalle la manera en cómo se presentan los contenidos y las concepciones bajo las cuales se organizaron para su construcción y modelación en su proceso de formalización o como lo llamaríamos nosotros, en su transición desde lo cualitativo hasta lo cuantitativo.

Así realizar un estudio de caso sobre el aporte de Émile Clapeyron a la termodinámica moderna, nos permite confirmar y verificar el carácter constitutivo entre los productos del pensamiento físico y el pensamiento matemático.

Capítulo II

2. Estudio de caso: Termodinámica de Clapeyron

En la presente monografía adoptamos la perspectiva de una constitución mutua entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático como un proceso natural del pensamiento, por lo que es pertinente el análisis de esta situación en la que se exhibe la transformación del lenguaje de ideas científicas alrededor de un fenómeno físico desde su forma cualitativa hasta formas matemáticas analíticas.

Para tal fin, realizamos a continuación una revisión de la obra de Émile Clapeyron quien considera el trabajo de Carnot expuesto en "Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego" (Carnot, 1987) muy fecundo para constituir una ley general que permitiera recoger las leyes particulares de la época y que bajo esa ley hace fecundas nuevas maneras de entender las ideas sobre el calor que hasta el momento se encontraban sintetizadas en las leyes de Boyle, Mariotte, Charles y Lussac.

Clapeyron fue un ingeniero y físico francés nacido en el año de 1799, conocido en la actualidad por su aporte a la formalización de la termodinámica moderna, que se encuentra en su memoria "sur la puissance motris de la chaleur" (Clapeyron, 1834) que se encuentra escrita originalmente en francés (ver anexo 1) y sobre la cual realizamos la traducción "Sobre la potencia motriz del calor" (Garzón & Bonilla, 2014), en la cual se expone en términos gráficos y analíticos el ciclo de Carnot. y del cual más tarde se deduciría la que ahora conocemos como segunda ley de la termodinámica.

En el siglo XVIII en Francia el problema de la eficiencia de las máquinas térmicas era un problema económico tanto para los constructores de máquinas térmicas como para sus usuarios, pues se requería de un alto contenido de combustible para la obtención de pequeñas cantidades de potencia motriz. Hecho que motivó la creación de máquinas de diferentes estilos con el objetivo de optimizar su funcionamiento. (Carnot, 1987)

Las soluciones propuestas eran en su mayoría de tipo empírico pues en ese momento las ciencias encargadas del estudio de los gases se encontraban en un estado de desarrollo en el cual no existía un trabajo que sintetizara las leyes de los gases y la cantidad del calor. Lo que llevó a los científicos a "*tratar las cuestiones relacionadas con esa teoría tales como la medición de calores específicos, y el establecimiento de leyes que relacionaban la presión, volumen y temperatura de un sistema en cualquier circunstancia"* (Carnot, 1987)

A inicios de 1800 Sadi Carnot planteó posibilidades que permitieran resolver los interrogantes estudiando el comportamiento de las máquinas térmicas, pues esperaba que estas le enseñaran cosas nuevas sobre la cantidad del calor al ser productoras de potencia motriz mediante el uso del calor.

Para Clapeyron el trabajo realizado por Carnot es fundamental en la medida en que comprende que de su trabajo deriva una nueva ley que puede sintetizar las demás leyes y lo dicho hasta el momento sobre el calor, pero que al no encontrarse formulada esta ley general encaminaría sus esfuerzos por sintetizarla en formas matemáticas y geométricas que además le permitieran descubrir nuevas relaciones entre las variables térmicas considerando que las leyes formuladas en la época eran insuficientes para describir el calor en los gases en sistemas térmicos

2.1 Leyes de Boyle, Mariotte, Charles y Lussac

Las leyes de los gases postuladas por Mariotte, Boyle, Charles y Lussac representan para Clapeyron una primera forma de matematizar las relaciones entre la presión, el volumen y la temperatura de un sistema, implicando una cantidad importante de experiencias sintetizadas bajo esas nuevas formas.

La *ley de Boyle-Mariotte* escrita como $P_1V_1 = P_2V_2$ deduce que la presión P ejercida sobre una masa de gas es inversamente proporcional al volumen V que ocupa cuando se encuentra en un sistema a temperatura constante de manera que

$$PV = R_1$$

Por su parte la *ley de Gay Lussac* deduce de un sistema a volumen constante una relación de proporción directa entre los cambios de temperatura T y los cambios de presión P a los que se somete un gas y que matemáticamente se expresan como $P_1T_2 = P_2T_1$ implicando que

$$\frac{P}{T} = R_2$$

Adicionalmente en un sistema isobárico, Lussac en colaboración con Charles establecen como ley la proporcionalidad directa que observan entre las variaciones de temperatura T y del volumen V de una masa de gas. Escrita como $V_1T_2 = V_2T_1$ o

$$\frac{V}{T} = R_3$$

Estas tres leyes implican las proporciones dadas entre las variables de presión, volumen y temperatura en un sistema térmico y que se resumen juntas en la expresión:

$$\frac{PV}{T} = R$$

2.1.1 Geometrización del ciclo termodinámico por Émile Clapeyron

Respecto a los anteriores resultados Clapeyron dice que "*no enseñan nada sobre la cantidad de calor que poseen los gases, cuando aumentan la presión o disminuyen la temperatura"*. (Clapeyron, 1834, pág. 1)

Y resalta el trabajo de Carnot por basarse sobre *lo absurdo que sería admitir que se puede crear movimiento con todo el calor, o crear calor con toda la fuerza motriz* (Clapeyron, 1834, pág. 1) y cuyos resultados devienen de una ley más general y que no se conoce pero que desea encontrar.

Para ello toma como punto de partida la revisión del axioma presente en la base de las investigaciones de Carnot y que es la producción de fuerza motriz a partir del calor y viceversa, arguyendo que la producción de fuerza mecánica en una máquina térmica está acompañada por un transporte de calor desde un cuerpo a cierta temperatura destinado a hacer las veces de caldera hasta un cuerpo con temperatura inferior que cumple el rol de refrigerador.

De este análisis se originan los diagramas que hoy son conocidos como diagramas del ciclo termodinámico de Carnot, en donde ilustra bajo formas geométricas las respectivas variaciones de presión, volumen y temperatura del gas encerrado en la máquina para cada etapa del funcionamiento de una máquina térmica. Al parecer este tipo de diagramas no existen antes de Clapeyron pues dice que "*este nuevo medio de demostración me parece digno de llamar la atención de los geómetras"* (Clapeyron, 1834, pág. 2) asegurando que dilucidarían nuevas relaciones importantes en la resolución de las cuestiones sobre la cantidad del calor en los gases.

Queremos llamar la atención en este punto pues el logro de Clapeyron con este tipo de representaciones geométricas consiste en sintetizar las observaciones de Carnot en relaciones entre las variables de presión, volumen, temperatura, cantidad de acción y calor mediante su explicitación en elementos geométricos como curvas, rectas, áreas y superficies.

Clapeyron representa cada momento del sistema con el uso de elementos geométricos como líneas rectas, segmentos de hipérbolas, ejes coordenados cuando los pone en correspondencia con las variables de presión, volumen, temperatura y cantidad de calor que describen la situación. Variables que posteriormente llamará variables de estado y que en compañía de la representación gráfica y las deducciones analíticas que de éstas deriven serán útiles para describir el estado del sistema en cualquier momento.

De acuerdo con el trabajo de las maquinas térmicas del estudio de Carnot, estas máquinas están conformadas por: un líquido, una caldera encargada de suministrar calor a ese líquido para favorecer el cambio de fase y un aumento de volumen por dilatación, y un cuerpo refrigerante cuya función es quitar el calor que libera el gas al condensarse.

A continuación expondremos las cuatro etapas que constituyen el ciclo termodinámico identificado por Carnot acompañado del respectivo aporte geométrico de Clapeyron.

ETAPA 1:

Se toma un gas cualquiera a temperatura *T* dentro de un recipiente extensible y aislado al calor, y se pone en contacto con una caldera o foco de calor A de tal manera que el suministro de calórico favorezca su libre dilatación conservando su temperatura a expensas de aumentar su volumen y disminuir su presión. Lo cual corresponde con la ley de Mariotte.

De esta manera en el primer momento hace explicita la relación inversa entre la presión y el volumen y las sucesivas variaciones de cada una usando una curva *CE*, con la cual representa al mismo tiempo la constancia de la temperatura *T* del gas que es adquirida por el contacto con fuente.

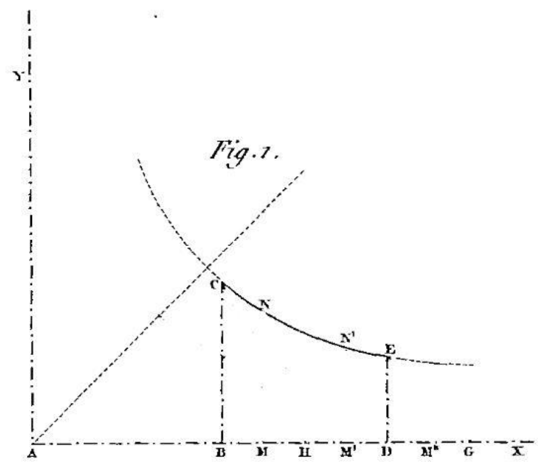

Figura 1: Primera etapa del ciclo termodinámico. Tomada de Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (Clapeyron, 1834)

Démonos cuenta que describe la curva *CE* sobre un plano en el que ubica la presión *P* en el eje de las ordenadas y el volumen *V* en el eje de las abscisas, acto que implica que la curva sea función de ambas variables.

La acción de la fuente sobre el gas produce la dilatación del mismo por lo que su volumen inicial definido por el segmento *AB* aumenta para definirse con el segmento *AD* y su presión se reduce pasando de coincidir con el segmento *BC* para hacerlo con el segmento *ED* según la gráfica de la *figura 1*.

Durante estos cambios, "*el gas, mientras se dilata habrá generado una cantidad de acción mecánica que tendrá por valor la integral del producto de la presión y el diferencial de volumen*" (Clapeyron, 1834, pág. 4). Es decir que de manera sorprendente asocia o hace corresponder la acción mecánica con el área que se describe bajo la curva isométrica.

ETAPA 2:

Ahora se retira la caldera permitiendo que el gas continúe su dilatación aislado al calor, "*entonces, una parte de su calórico sensible se vuelve latente, su temperatura disminuirá y su presión continuará decreciendo de una manera más rápida y* ***siguiendo una ley desconocida"*** (Clapeyron, 1834, pág. 4)

Así como la primera curva en el gráfico anterior describía la ley de Mariotte, en este representa esa ley desconocida que describiría el aumento de volumen y la reducción de la presión y la temperatura del gas que inicialmente era *T* a través de la curva *EF*, como lo muestra la *figura 2*.

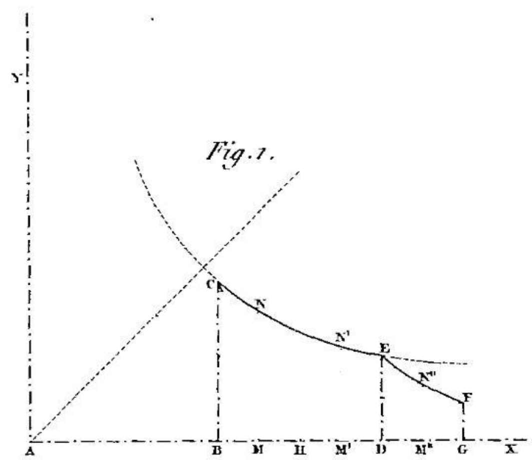

Figura 2: Segunda etapa del ciclo termodinámico. Tomada de Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (Clapeyron, 1834)

Por la variación del volumen también se obtiene como consecuencia la obtención de acción mecánica que representa con la superficie del trapecio *DEFG*.

ETAPA 3:

Se pone en contacto el gas con el cuerpo refrigerante B que se encuentra a temperatura *t* comprimiendo el gas y absorbiendo parte de su calórico. Por lo que *"la temperatura del gas tenderá a aumentar por la liberación del calórico latente vuelto sensible por la compresión, pero será absorbido paulatinamente por el cuerpo B de modo que la temperatura del gas permanecerá igual a t*" (Clapeyron, 1834, pág. 4), hasta que el calor liberado inicialmente por A es absorbido en su totalidad por el cuerpo B.

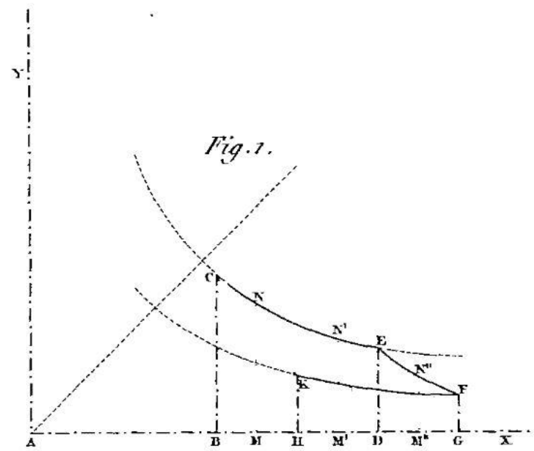

Figura 3: Tercera etapa del ciclo termodinámico. Tomada de Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (Clapeyron, 1834)

En consecuencia la ley de Mariotte justifica el crecimiento de la presión y la disminución del volumen y la representa por una curva *FK* paralela a la curva *CE*, paralelismo que las caracteriza a ambas como parte de un conjunto de curvas isotermas que describirían los posibles estados isotérmicos en los que pueda encontrarse el gas y en la que todas representarían la ley de Mariotte.

La acción mecánica consecuencia de este proceso se representa por el área del trapecio *KHFG* como se muestra en la *figura 3*.

<u>ETAPA 4</u>:

En este momento el gas "*posee la misma cantidad de calor que al momento donde comenzó la operación".* Se retira el refrigerador B y el gas continúa comprimiéndose, reduciendo su volumen lo que nuevamente sería explicado por la ley desconocida. "*Su temperatura crecerá sucesivamente por la liberación del calórico latente que la compresión vuelve sensible".* (Clapeyron, 1834, pág. 5) De manera que la temperatura nuevamente será *T*.

El valor del volumen de nuevo queda representado por el segmento *AB* y el de la presión por el segmento BC. El sistema regresa a sus condiciones iniciales completando un ciclo. El ciclo de Carnot. *Figura 4.*

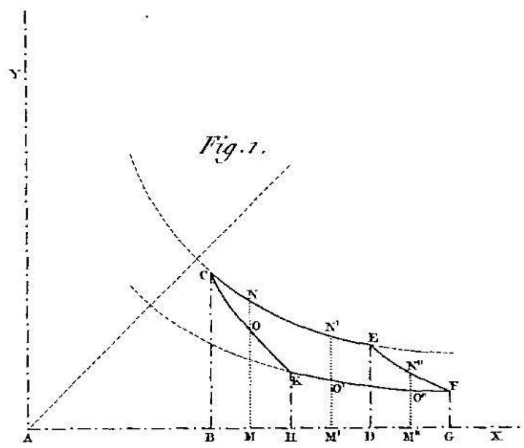

Figura 4: Cuarta etapa del ciclo termodinámico. Tomada de Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (Clapeyron, 1834)

La ley desconocida que hablaría del comportamiento del calor durante el aumento de temperatura y presión mientras se reduce el volumen se representa con la curva *CK* paralela a la curva *EF* haciendo parte de un grupo de curvas paralelas a estas y que conocemos como adiabáticas.

Otra vez la acción mecánica en este proceso es descrita por la superficie de un trapecio mixtilíneo definido por los puntos *CKDH*.

Podemos decir que el paso de calor producido por una caldera a temperatura *T* a un refrigerador a temperatura menor *t* a través de una masa de gas es la causa de las variaciones de presión, volumen y temperatura, pero también de la producción de una fuerza útil, la potencia motriz.

Durante las cuatro etapas que describen el ciclo de Carnot hay una producción de fuerza motriz o acción mecánica que siempre se representa por las áreas de las curvas que se trazan en cada etapa, de lo cual se puede inferir después del ciclo la realización de una acción mecánica neta que también tendría representación geométrica y estaría determinada por el área del paralelogramo curvilíneo *CKEF* y que puede ser calculado por integración.

El proceso descrito es pensado en una máquina ideal como un proceso reversible, de manera que si se cuenta con potencia motriz equivalente a la producida por el paso de calor del cuerpo A al B y con ella en un sistema aislado al calor se hace pasar al gas por un orden inverso de operaciones donde las que eran dilataciones se hacen compresiones y viceversa, pasando "*por todos los estados de temperatura y presión por los cuales había pasado en la primera serie de operaciones"* (Clapeyron, 1834, pág. 6) y siguiendo las mismas leyes, se obtendrá una cantidad de calor equivalente a la que en el primer momento fue producida por la caldera.

Clapeyron realiza este mismo procedimiento suponiendo un sistema en que emplea una mezcla entre líquido y gas, llegando a las mismas deducciones y afirmando que "*una cantidad de acción mecánica, y una cantidad de calor que puede pasar de un cuerpo caliente a un cuerpo frío, son cantidades de la misma naturaleza,…que pueden transformarse las unas en las otras por acciones mecánicas"* (Clapeyron, 1834, pág. 9)

En ese orden de ideas, adjudicar una misma identidad para la acción mecánica y para el calor le da permiso de hacer uso de la misma representación para ambas, de manera que las áreas que describían los trapecios corresponden también a las cantidades de calor transportadas durante cada etapa del ciclo, estableciendo no solo una equivalencia de cantidad entre esas dos magnitudes sino también cualitativa al pensar que ambas poseen la misma naturaleza.

Por otro lado, la obtención de los mismo resultados independientemente de la sustancia empleada para el transporte de calor de un cuerpo a otro le permiten establecer una relación de independencia entre la naturaleza de la sustancia y la cantidad de acción mecánica producida y que sería útil en la medida que la sustancia empleada seria irrelevante en la preocupación por la eficiencia de producción de potencia motriz en procesos térmicos.

2.1.2 Traducción analítica de la geometría propuesta

En su documento destina el capítulo tres a la "traducción analítica" de las operaciones descritas en el ciclo, señalando que expresar la cantidad de acción máxima como producto del paso de una cantidad de calor entre cuerpos de diferente temperatura le permitirá llegar "*a nuevas relaciones entre el volumen, la presión, la temperatura y la cantidad absoluta de calor o el calórico latente de los cuerpos sólidos, líquidos o gaseosos"* (Clapeyron, 1834, pág. 10).

Conociendo como síntesis de la ley de Mariotte y la de Lussac la expresión:

$$PV = R(267 + t) \qquad (1)$$

Deduce que la cantidad de acción está generada por

$$R\frac{dtdv}{v}\text{[1]} \qquad (2)$$

Y se dirige a calcular la cantidad absoluta de calor Q que posee el gas, entendiendo el calor como función de las variaciones de presión y de volumen, es decir de los diferenciales dp y dv.

La cantidad absoluta de calor para Clapeyron resulta de la suma de las variaciones del calor respecto a las variaciones de presión y de volumen, que ayudado por la organización de ecuaciones en derivadas parciales queda como:

$$dQ = \frac{dQ}{dv}dv + \frac{dQ}{dp}dp \qquad (3)$$

Pero teniendo en cuenta la constancia de la temperatura durante el cambio de volumen obtiene que

$$dp = -\frac{p}{v}dv \qquad (4)$$

pues $vdp + pdv = 0$, de lo cual al sustituir (4) en (3) resulta que:

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dv} - \frac{p}{v}\frac{dQ}{dp}\right)dv \qquad (5)$$

De lo cual al establecer el cociente entre *F* y dQ obtiene "*la expresión del efecto **máximo** producido por el paso de una cantidad de calor de un cuerpo que está a temperatura t a uno con temperatura t – dt"* (Clapeyron, 1834, pág. 13), como sigue:

$$\frac{F}{dQ} = \frac{\frac{Rdtdv}{V}}{\frac{dQ}{dv}dv - \frac{P}{V}\frac{dQ}{dp}dv} =$$

[1] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)

$$\frac{Rdtdv}{V\frac{dQ}{dv}dv - P\frac{dQ}{dp}dv} = \frac{Rdtdv}{\left(V\frac{dQ}{dv} - P\frac{dQ}{dp}\right)dv} =$$

$$\frac{Rdt}{V\frac{dQ}{dv} - P\frac{dQ}{dp}} \qquad (6)$$

Atribuyendo a la ausencia de variables que caracterizan la sustancia transmisora del calor la independencia entre la cantidad de acción generada y la naturaleza de esa sustancia, es decir, que la cantidad de acción será la misma sin importar cuál sea el agente usado para realizar la transferencia.

Sin embargo no nada le prueba que la cantidad de calor producida sea independiente de t por lo que en (6) la parte $V\frac{dQ}{dv} - P\frac{dQ}{dp}$ de (6) debe corresponder a una función de temperatura que sea igual para todos los gases. De manera que puede organizarse como:

$$V\frac{dQ}{dv} - P\frac{dQ}{dp} = F(p,v) \qquad (7)$$ [2]

Ya que dada la equivalencia $PV = R(267 + t)$, *t* puede expresarse como una función del volumen y la presión.

Al integrar (7) se consigue que:

$$Q = f(p,v) - F(p,v)\log[(hyp)p] \qquad (8)$$ [3]

En donde las funciones $f(p,v)$ y $F(p,v)$ serian funciones arbitrarias y que por lo tanto asigna respectivamente las variables *B* y *C* para representarlas.

$$Q = R(B - C\ log\ p) \qquad (9)$$ [4]

Suponiendo que la función *B* está relacionada con las características particulares de cada sustancia y la función *C* es esa que intenta descubrir, la cual es independiente de la naturaleza del gas y función de la temperatura.

---

[2] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)
[3] *ibidem.*
[4] *ibidem.*

Dada esa nueva organización analítica para hablar de la cantidad de calor, resuelve por ecuaciones diferenciales las variaciones de la cantidad de calor Q que se desconoce respecto a las variaciones de presión y el volumen:

$$\frac{dQ}{dv} = R(\frac{dB}{dt}\frac{p}{R} - \log p \ \frac{dC}{dt}\frac{p}{R})$$ [5]

$$\frac{dQ}{dp} = R(\frac{dB}{dt}\frac{v}{R} - \log p \ \frac{dC}{dt}\frac{v}{R} - C\frac{1}{p})$$ [6]

Encontrando la siguiente equivalencia:

$$V\frac{dQ}{dv} - P\frac{dQ}{dp} = V\left[R\left(\frac{dB}{dt}\frac{P}{R} - Log\ P\frac{dC}{dt}\frac{P}{R}\right)\right] - P\left[R\left(\frac{dB}{dt}\frac{V}{R} - Log\ P\ \frac{dC}{dt}\frac{V}{R} - C\frac{1}{P}\right)\right] =$$

$$= VP\frac{dB}{dt} - VP\ Log\ P\ \frac{dC}{dt} - PV\frac{dB}{dt} + PV\ Log\ P\ \frac{dC}{dt} - \frac{P}{P}CR$$

$$= CR \qquad (10)$$

Y que al sustituir en (6) le permite poner la máxima cantidad de acción en términos de la función desconocida C como sigue:

$$\frac{Rdt}{V\frac{dQ}{dv} - P\frac{dQ}{dp}} = \frac{Rdt}{CR}$$

$$= \frac{dt}{C} \qquad (11)$$ [7]

En adelante destina su trabajo a encontrar la función C que le permitirá establecer la respectiva relación para calcular la cantidad de calor Q que se transfiere entre dos cuerpos de diferente temperatura y que hasta el momento no se había determinado.

[5] *ibidem.*
[6] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)
[7] *ibidem.*

La cantidad de calor que libera el gas en su paso de condiciones de presión p y volumen *v* a condiciones posteriores de volumen *v'* y presión *p'* se determinan por la expresión[8]:

$$Q - Q' = RC\log\frac{p'}{p} = RC\log\frac{v'}{v} \qquad (12)$$

Y sabiendo que

$$R = \frac{PV}{267 + t}$$

Entonces:

$$Q - Q' = \frac{PV}{267 + t} C\log\frac{v'}{v}$$

A través de lo cual se puede conocer la influencia de la presión, de manera que al tener iguales volúmenes de gas a la misma temperatura la cantidad de calor o acción mecánica será proporcional a las presiones efectuadas para comprimirles o dilatarles.

De las cantidades presión, volumen, temperatura y calor dos se conocían con anterioridad, la presión y el volumen mientras que el calor Q y la temperatura t pueden pensarse como funciones de ellas. En los trabajos de Mariotte y Lussac queda expresada esta funcionalidad de *t* en la igualdad

$$pv = R(267 + t)$$

Y la cantidad de calor Q en función de p y *v* se define por el trabajo de Clapeyron de la siguiente manera:

[8] Sabiendo que de la integración de la ecuación $Vdp + Pdv = O$ evaluado entre condiciones iniciales de presión P y volumen V y condiciones finales P' y V' se obtiene que $Log\frac{P'}{P} = Log\ \frac{V'}{V}$

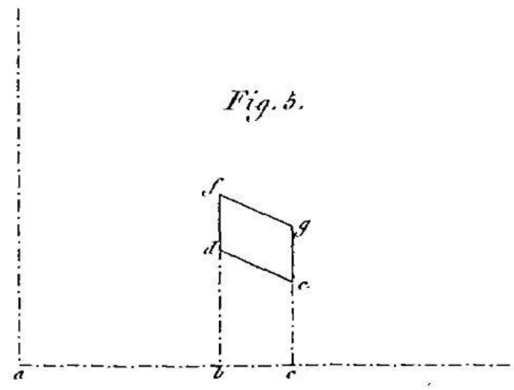

Figura 5: Representación del ciclo termodinámico completo. Tomada de Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (Clapeyron, 1834)

La *figura 5* representa los cambios de presión inicial p_0 a presión final p_f y del y volumen inicial v_0 al volumen final v_f para cada una de las cuatro etapas del ciclo en relación con los segmentos del gráfico de la siguiente manera:

PRIMERA ETAPA: $v_0 = ab, \; p_0 = bf \;\; \rightarrow \;\; v_f$ = ac , $p_f = cg$

SEGUNDA ETAPA: $v_0 = ac, \; p_0 = cg \;\; \rightarrow \;\; v_f$ = ac , p_f =*ce*

TERCERA ETAPA: $v_0 = ac \,, \; p_0 = ce \;\; \rightarrow \;\; v_f =$ ab , p_f =*bd*

CUARTA ETAPA: $v_0 = ab \,, \; p_0 = bd \;\; \rightarrow \;\; v_f$ = ab , p_f =*bf*

Los cambios de presión *dp* son proporcionales a los cambios de temperatura *dt*, pues como se observa en la gráfica los *dp=df=ge* son la medida del cambio de temperatura, del cambio entre la recta *fg* y la recta *de*. En donde el flujo de calor se da entre una fuente A a temperatura *T* + *dT* y la de un cuerpo B a temperatura *T*.

La recta *fd* equivale al cambio que experimenta la presión respecto a la temperatura así: $df = \frac{dp}{dT} dT$ y que se invierte obteniendo $df = \frac{1}{\frac{dT}{dp}} dT$ aún equivalente al cambio de la presión *dp*.

El cambio del volumen dv representado por la recta *bc* determina el área del cuadrilátero al multiplicarse por el *dp* así:

$$dv * dp = fd * bc = \frac{dvdT}{\frac{dT}{dp}}$$ [9]

Que como hemos visto al ser corresponder al área del cuadrilátero equivale a la cantidad de acción realizada en el ciclo y que requirió una cantidad de calor para su producción, la cual será calculada a continuación:

Al realizarse a temperatura constante durante el contacto con la fuente A se tiene que la variación de temperatura respecto a la presión y el volumen es:

$$\frac{dT}{dp} dp + \frac{dT}{dv} dv = 0 \qquad (13)$$

Con lo que *dp* puede expresarse como $dp = -\frac{(\frac{dT}{dv})}{(\frac{dT}{dp})}$ que será útil para simplificar los

cálculos al dejar (13) en términos de dv y remplazarlo en (3):

$$dQ = \frac{dQ}{dp} dp + \frac{dQ}{dv} dv = dv \left[\frac{dQ}{dv} - \frac{dQ}{dp} \frac{(\frac{dT}{dv})}{(\frac{dT}{dp})} \right] \qquad (14)$$

Y del que se obtiene como efecto producido:

$$\frac{dT}{\frac{dQ}{dv} * \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} * \frac{dT}{dv}} = 1 = F$$

Que al comparar con (11) permite reconocer la equivalencia:

$$\frac{dQ}{dv} * \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp} * \frac{dT}{dv} = C \qquad (15)$$

Que al derivar $\frac{dT}{dp}$ y $\frac{dT}{dv}$ y sustituir en (15) queda:

$$v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp} = RC = F(p, v)$$ [10]

Probando que CR era aquella función $F(p, v)$ que encontrábamos en (8).

[9] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)
[10] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)

Ahora, retomando (14) y organizando con (15):

$$dQ = -dpC\frac{dv}{dT}$$ [11]

Se establece una proporción directa entre el calor, la función de temperatura C y el cambio de volumen respecto a la temperatura. Estableciendo una ley general "*que se aplica a todos los cuerpos de la naturaleza*, sólidos, líquidos o gaseosos: *si se aumenta una pequeña cantidad la presión que soportan diferentes cuerpos tomados a la misma temperatura, se liberaran cantidades de calor que serán proporcionales a su dilatabilidad por el calor*" (Clapeyron, 1834, pág. 24).

De igual manera, establece analíticamente los calores específicos a volumen constante y a presión constante y determina la relación del calor latente con la presión y la temperatura.

2.1.3 Establecimiento de la relación del calor latente con la presión y la temperatura

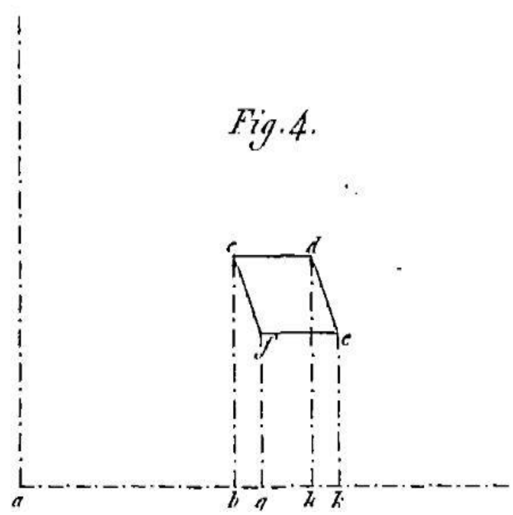

Figura 6: Ciclo termodinámico completo a presión constante durante la dilación y contracción del gas. Tomada de Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (Clapeyron, 1834)

La *figura 6* muestra el ciclo en donde un gas transmite el calor producido en una fuente A a temperatura *t* hasta un cuerpo con una temperatura infinitamente pequeña *t-dt*, en donde el área

[11] *ibidem.*

del cuadrilátero *cdef* equivale a la medida de la cantidad de acción producida por ese paso de calor, estaría determinada por el producto entre los segmentos de volumen *cd* y el del diferencial de la presión dada por *dh-ek.* El segmento *dh-ek* representando al diferencial *dp* queda expresado como función de la temperatura así:

$$dp = \frac{dp}{dt}dt$$

Denomina ρ a la densidad del líquido contenido, δ a la densidad del vapor, v al volumen del vapor y al volumen del líquido evaporado lo señala con la expresión $\frac{\delta v}{\xi}$. De manera que el volumen v menos el volumen $\frac{\delta v}{\xi}$ formado por evaporación del líquido determina el incremento del volumen así:

$$v - \frac{\delta v}{\xi} = v(1 - \frac{\delta}{\xi})$$

Y que es el que se toma en cuenta para el cálculo de la cantidad de acción:

$$\left(1 - \frac{\delta}{\xi}\right) v \frac{dp}{dt} dt \quad (16)$$ [12]

Como la cantidad de acción realizada en este caso fue invertida en el cambio de fase de una porción de líquido a vapor, Clapeyron deduce que la cantidad de calor requerida para desarrollar esta cantidad de acción debe ser el calor latente del líquido que designa con la constante *K.*

De manera que la cantidad de acción máxima producida, se establece por el cociente entre el efecto producido (16) y el calor latente *K:*

$$\frac{\left(1 - \frac{\delta}{\xi}\right) v \frac{dp}{dt} dt}{k} \qquad (17)$$

Y que como se observa, ninguna variable corresponde a las propiedades de las sustancias en cuestión, por lo que se puede decir que dicha acción máxima es independiente de la sustancia empleada y del estado de fase en que se encuentre.

[12] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)

Adicionalmente, de (10) se conoce la acción máxima producida al dividir el efecto producido entre la variación de calor *dQ*, por lo que se puede establecer una equivalencia entre (10) y (17) obteniendo:

$$k = \left(1 - \frac{\delta}{\xi}\right)\frac{dp}{dt}C$$

Y como "*para la mayor parte de los vapores, la razón* $\frac{\delta}{\xi}$ *de la densidad de vapor debida al líquido que la formó es baja frente a la unidad, tanto como la temperatura no es muy alta"* se tiene que:

$$k = \frac{dp}{dt}C$$

De manera que logra conocer la proporcionalidad entre el calor latente y la variación de la presión respecto a la temperatura. Que no se conocía al no acudir a este proceso de síntesis.

2.1.4 Determinación numérica de calores específicos a volumen constante y a presión constante

Asimismo, de la ecuación (8) obtiene la ley de los calores específicos a volumen constante y a presión constante. A presión constante lo consigue al derivar (11) respecto a t

$$C_p = R\left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log P\right)$$ [13]

Y obtiene el calor específico a volumen constante $\boldsymbol{C_v}$ **derivando (11) respecto a t**

$$C_v = R(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p) - C\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$$

[13] Tomada de *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (Clapeyron, 1834)

Igual a

$$C_v = R(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p - \frac{C}{267 + t})$$ [14]

De lo cual también deduce que a razón de cambio C_p/C_v es igual para todos los gases sabiendo que la constante R por la ley de Mariotte también lo es.

A lo largo de todo el proceso de formalización que realiza Clapeyron sobre los procesos térmicos, se observa que partiendo de necesidades de contexto y de una amplia base conceptual respecto a los fenómenos térmico organiza matemáticamente las ideas expuestas por Carnot y que le permiten deducir una nueva ley que sintetiza toda la información sobre el comportamiento de los gases en sistemas térmicos, incluida la cantidad de calor sobre la que nada se había dicho al respecto.

El trabajo de Clapeyron se torna relevante en cuanto explicita las funciones entre presión, volumen, temperatura en formas geométricas desde las que logra caracterizar la cantidad de calor como equivalente a la cantidad de acción cuando a ambas magnitudes las asocia con las superficies descritas por esas funciones.

Conclusiones

Desde una perspectiva constructivista del conocimiento, no puede asumirse en el mundo la existencia per se de estructuras matemáticas para justificar la presentación de ellas de manera determinista. Pues entendemos que son el producto de procesos de pensamiento analíticos, sintéticos y deductivos relativos a los proceso mentales de cada sujeto.

En aras de promover un aprendizaje significativo, es necesario reflexionar sobre la lógica del uso de matemáticas para explicar el mundo. Pues desde la práctica tradicional su uso se presenta como una regla o norma, que por un lado pareciera escogerse arbitrariamente y por el otro que puede o no estar en comunión con las explicaciones propias de los estudiantes y que les han sido suficientes para explicar su experiencia.

[14] *ibidem.*

Parte de la actividad de enseñar y aprender física es organizar los hechos de la realidad externa dentro de los esquemas internos que se hacen explícitos en la representación de los mismos. Aspecto caracterizado porque permite tomar distancia de lo externo y operar directamente sobre la representación en donde los productos de las operaciones se corresponden con acciones o evaluaciones del exterior. De manera que no basta con manipular formas simbólicas sino estar en la capacidad de explicitar las relaciones identificadas entre los objetos.

Es necesario que los maestros de física conozcan los procesos a través de los cuales se han refinado los conceptos físicos de manera que le brinden herramientas con las que pueda hacer una presentación de las temáticas más coherentes con el lenguaje usado por los estudiantes para explicar los hechos del mundo. Para esto se presenta como pertinente la revisión y observación de casos particulares desde los que se pueda examinar el contexto histórico que da origen a los conceptos teóricos tanto en su forma cualitativa como cuantitativa.

Aunque se hable de la matemática como un lenguaje universal no todos llegamos a las mismas deducciones después de observar los hechos, y las proposiciones, leyes y teorías que exponemos a los estudiantes sólo podrán ser comprendidas como verdades si se encuentran en consonancia con los esquemas mentales que ya han organizado para explicar los eventos relativos a dichas leyes y teorías.

El papel de las matemáticas en la enseñanza de la física no debe estar enfocado en la adopción de ideas y términos o en la resolución de métodos matemáticos para encontrar como respuesta números concretos que reflejen un comportamiento del mundo sin reflexionar sobre las operaciones (acciones) realizadas sobre las variables. Por el contrario debe estar dirigido al desarrollo de un pensamiento analítico reflexivo que les permita a los estudiantes organizar sus propias ideas coherentemente con el lenguaje usado por convención para expresar relaciones entre las cualidades de los eventos y objetos del mundo.

La enseñanza de las matemáticas y el tratamiento que le damos los docentes de física debe tener como preocupación la creación de necesidades lógicas que favorezcan el desarrollo del pensamiento analítico de los estudiantes al observar el mundo, desde lo cual se fortalezca la capacidad de percibir lo cambiante, lo constante, lo aditivo, las formas de crecimiento (lineal, exponencial, logarítmica, etc.), lo proporcional, lo equivalente, lo dependiente y lo independiente.

Las formas matemáticas son construcciones racionales tan humanas como nuestras ideas y se presentan como un producto de un proceso de refinamiento de ellas. Proceso en el que los datos que nos otorga la experiencia se reorganizan, codifican y transforman para posteriormente expresarlo a través del lenguaje como necesidad comunicativa.

Introducir los conceptos físicos en formas matemáticas y métodos de resolución de esas formas compromete a los estudiantes con un papel pasivo en la construcción del lenguaje matemático, pues implica que su actividad deba centrarse en la reproducción de las construcciones de otros sujetos, sujetos de "ciencia" que pueden serle ajenos a su realidad.

Es importante considerar que la comprensión de las estructuras matemáticas de las teorías físicas no implica necesariamente comprender los conceptos físicos, por lo que destinar el estudio de conceptos físicos y matemáticos a un mismo espacio curricular haría coherente la transformación del lenguaje usado para dar explicaciones a lo largo de todo el proceso que va desde la observación de los hechos hasta la formalización de los mismos.

Bibliografía

Ayala, M. M. (2008). *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción de conocimiento sobre los fenómenos físicos.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Carnot, S. (1987). *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego.* Alianza Editorial.

Clapeyron, E. (1834). Sobre la potencia motriz del calor (Marina Garzón y Carlos Bonilla, trad). *Journal de l'École Polytechnique*, (Obra original publicada en 1834).

Garzón, M., & Bonilla, C. (2014). *Sobre la potencia motriz del calor [Traducción de: Sur la puissance motris de la chaleur].* Bogotá: Traducción al español.

Hewitt, P. (1997). *Física Conceptual.* Massachusetts: Adison Wesley Logman, inc.

Lesh, R. (1997). *Matematización : la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones.* Dartmouth: Universidad de Massachusetts.

Levy, J. (1984). Física y matemática. En F. Guénard, *Pensar la matemática* (págs. 75-92). España: Tusquets.

Michelsen, N. (2015). *Mathematical modeling is also physics—interdisciplinary teaching between mathematics and.* Dinamarca: Universidad de Dinamarca.

Moreira, M. (1998). *MODELOS MENTALES Y APRENDIZAJE.* Puerto Alegre: Instituto de Física, UFRGS.

Moreno, R. (2008). *Contextualización de las ecuaciones de Maxwell empleando formas diferenciales.* Bogotá: Tesis de Grado Universidad Pedagógica Nacional.

Pedro, G. (2000). Geometría y física: ¿Cara y cruz de una misma moneda? Salamanca: Real academia de ciencias.

Piaget, J. (1975). El pensamiento matemático. En J. Piaget, *Introducción a la epistemología genética.* Buenos aires: Paidos.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI editores.

Rico, L. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las ciencias*, 361-371.

Rodriguez, J. A. (2006). *Una aproximación a la relación física y matemática en Newton.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Romero, Á. (2002). *La matematización de los fenómenos físicos: el caso de los fenomenos mecanicos y térmicos.* Medellín: Universidad de Antioquía.

Romero, Á. (2003). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantanea. *Educación y pedagogía*.

Tzanakis, C. (2002). *On the relation between mathematics and physics in undergraduate teaching.* Rétino: Universidad de Creta.

Villa, J. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *Alexandría, ciencia y tecnología*.

ANEXO 1: Documento original de Émile Clapeyron sobre la potencia motriz del fuego de 1834 titulado *"Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur".*

MÉMOIRE

SUR LA

PUISSANCE MOTRICE DE LA CHALEUR,

Par E. CLAPEYRON,

INGÉNIEUR DES MINES.

§ I.

Il est peu de questions plus dignes de fixer l'attention des géomètres et des physiciens, que celles qui se rapportent à la constitution des gaz et des vapeurs; le rôle qu'ils jouent dans la nature et le parti qu'en tire l'industrie, expliquent les nombreux et importans travaux dont ils ont été l'objet; mais cette vaste question est loin d'être épuisée. La loi de Mariotte et celle de M. Gay-Lussac établissent les relations qui existent entre le volume, la pression et la température d'une même quantité de gaz; toutes deux ont obtenu depuis long-temps l'assentiment des savans. Les expériences nouvelles faites par MM. Arago et Dulong ne laissent plus aucun doute sur l'exactitude de la première entre des limites très étendues de la pression; mais ces résultats importans n'apprennent rien sur la quantité de chaleur que possèdent les gaz, et qu'en dégagent la pression ou un abaissement de température, ils ne donnent pas la loi des caloriques spécifiques à pression constante et à volume constant. Cette partie de la théorie de la chaleur a pourtant été l'objet de recherches approfondies, parmi lesquelles on remarque le travail de MM. Laroche et Bérard sur le calorique spécifique des gaz. Enfin, M. Dulong, dans un Mémoire qu'il a publié sous le titre de *Recherches sur la Chaleur spécifique des fluides élastiques*, a établi par des expériences à l'abri de toute objection, que *des volumes égaux de tous les fluides élastiques pris à une même température et sous une même pression, étant comprimés ou dilatés subitement d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même quantité absolue de chaleur.*

Laplace, et plus tard M. Poisson, ont publié sur ce sujet des recherches théoriques très remarquables, mais qui reposent sur des données hypothétiques qui paraissent contestables ; ils admettent que le rapport du calorique spécifique à volume constant au calorique spécifique à pression constante ne varie pas, et que les quantités de chaleur absorbées par les gaz sont proportionnelles à leur température.

Je citerai enfin parmi les travaux qui ont paru sur la théorie de la chaleur, un ouvrage de M. S. Carnot, publié en 1824, sous le titre de *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. L'idée qui sert de base à ses recherches me paraît féconde et incontestable, ses démonstrations sont fondées sur l'*absurdité qu'il y aurait à admettre la possibilité de créer de toutes pièces de la force motrice ou de la chaleur.* Voici l'énoncé de plusieurs théorèmes auxquels le conduit cette méthode nouvelle de raisonnement.

1°. *Lorsqu'un gaz passe, sans changer de température, d'un volume et d'une pression déterminés, à un autre volume et à une autre pression également déterminés, la quantité de calorique absorbée ou abandonnée est toujours la même, quelle que soit la nature du gaz choisi comme sujet d'expérience.*

2°. *La différence entre la chaleur spécifique sous pression constante, et la chaleur spécifique sous volume constant, est la même pour tous les gaz.*

3°. *Lorsqu'un gaz varie de volume sans changer de température,* *les quantités de chaleur absorbées ou dégagées par ce gaz sont en progression arithmétique, si les accroissemens ou réductions de volume sont en progression géométrique.*

Ce nouveau moyen de démonstration me paraît digne de fixer l'attention des géomètres ; il me semble à l'abri de toute objection, et acquiert une nouvelle importance depuis la vérification qu'il trouve dans les travaux de M. Dulong, qui a démontré par l'expérience le premier théorème dont je viens de rappeler l'énoncé.

Je crois qu'il est de quelque intérêt de reprendre cette théorie ; M. S. Carnot, évitant l'emploi de l'analyse mathématique, arrive par une série de raisonnemens délicats et difficiles à saisir, à des résultats qui se déduisent sans peine d'une loi plus générale, que je vais chercher à établir. Mais avant d'entrer en matière, il est utile de revenir sur l'axiome fondamental qui sert de base aux recherches de M. Carnot, et qui sera aussi mon point de départ.

§ II.

On a remarqué depuis long-temps que l'on peut employer la chaleur à développer de la force motrice, et réciproquement, qu'avec de la force motrice on peut développer de la chaleur. Dans le premier cas, on doit observer qu'il y a toujours passage d'une quantité déterminée de calorique d'un corps d'une température donnée à un corps d'une température inférieure ; ainsi, dans les machines à vapeur, la production de force mécanique est accompagnée du passage d'une partie de la chaleur que la combustion développe dans le foyer, dont la température est très élevée, à l'eau du condenseur, dont la température est beaucoup moindre.

Réciproquement, il est toujours possible d'utiliser le passage du calorique d'un corps chaud à un corps froid pour la production d'une force mécanique : il suffit pour cela de construire un appareil semblable à celui des machines à vapeur ordinaires, dans lequel le corps chaud serve à développer la vapeur, et le corps froid à la condenser.

Il résulte de là qu'il y a perte de force vive, de force mécanique ou de quantité d'action, toutes les fois qu'il y a contact immédiat entre deux corps de température différente, et que la chaleur passe de l'un à l'autre sans intermédiaire; donc enfin, dans tout appareil destiné à réaliser la force motrice que développe la chaleur, il y a perte de force toutes les fois qu'il y a communication directe de chaleur entre corps de température différente, et par suite, l'effet produit *maximum* ne pourrait être réalisé que par un appareil dans lequel il ne s'établirait de contact qu'entre corps de température égale.

Or, ce que nous connaissons de la théorie des gaz et des vapeurs montre la possibilité d'atteindre ce but.

Imaginons en effet deux corps entretenus, l'un à une température T, l'autre à une température inférieure t, tels par exemple que les parois d'une chaudière à vapeur, dans laquelle la chaleur développée par la combustion remplace sans cesse celle qu'emporte avec elle la vapeur qui se dégage; et le condenseur d'une machine à feu ordinaire, dans lequel un courant d'eau froide enlève à chaque instant la chaleur que dégage la vapeur en se condensant, et celle qui est due à sa température propre. Nous nommerons pour plus de simplicité le premier corps A, et le second B.

Cela posé, prenons un gaz quelconque à la température T, et mettons-le en contact avec la source de chaleur A; représentons son volume v_0 par l'abscisse AB, et sa pression par l'ordonnée CB (fig. 1).

Si le gaz est renfermé dans un vase extensible, et qu'on le laisse se détendre dans un espace vide où il ne perde pas de chaleur par rayonnement ni par contact, la source de chaleur A lui fournira à chaque instant la quantité de calorique que son augmentation de volume rend latente, et il conservera la même température T. Sa pression, au contraire diminuera suivant la loi de Mariotte. La loi de cette variation peut être représentée géométriquement par une courbe CE dont les volumes seraient les abscisses, et les pressions correspondantes seraient les ordonnées.

Supposons que la dilatation du gaz soit continuée jusqu'à ce que le volume primitif AB soit devenu AD; et soit DE la pression correspondante à ce nouveau volume; le gaz, pendant sa dilatation, aura développé une quantité d'action mécanique qui aura pour valeur l'intégrale du produit de la pression, par la différentielle du volume, et qui sera représentée géométriquement par la surface comprise entre l'axe des abscisses, les deux coordonnées CB, DE, et la portion d'hyperbole CE.

Supposons maintenant qu'on écarte le corps A, et que la dilatation du gaz se continue dans une enveloppe imperméable à la chaleur; alors une partie de son calorique sensible devenant latente, sa température diminuera, et sa pression continuera de décroître d'une manière plus rapide et suivant une loi inconnue, qui pourra être représentée géométriquement par une courbe EF dont les abscisses seraient les volumes du gaz, et les ordonnées les pressions correspondantes; nous supposerons que la dilatation du gaz soit continuée jusqu'à ce que les réductions successives qu'éprouve le calorique sensible du gaz l'aient ramené de la température T du corps A à la température t du corps B. Son volume sera alors AG, et la pression correspondante sera FG.

On verra de même que le gaz, pendant cette seconde partie de sa dilatation, développera une quantité d'action mécanique représentée par la surface du trapèze mixtiligne DEFG.

Maintenant que le gaz est amené à la température t du corps B, mettons-les en présence; si l'on comprime le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur, mais en contact avec le corps B, la température du gaz tendra à s'élever par le dégagement du calorique latent rendu sensible par la compression, mais il sera absorbé à mesure par le corps B, en sorte que la température du gaz restera égale à t. Par suite, la pression croîtra suivant la loi de Mariotte; elle sera représentée géométriquement par les ordonnées d'une hyperbole KF, et les abscisses correspondantes représenteront les volumes. Supposons que la compression soit poussée jusqu'à ce que la chaleur dégagée par la compression du gaz et absorbée par le corps B, soit précisément égale à la chaleur communiquée par la source A au gaz, pendant sa dilatation en contact avec elle lors de la première partie de l'opération. Soit alors AH le volume du gaz, et HK la pression correspondante. Le gaz dans cet état possède la même quantité absolue de chaleur qu'au moment où l'on a commencé l'opération, quand il occupait le volume AB sous la pression CB. Si donc on écarte le corps B et que l'on continue à comprimer le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur jusqu'à ce que le volume AH soit ramené au volume AB, sa température s'accroîtra successivement par le dégagement du calorique latent que la compression rend sensible. La pression augmentera également, et lorsque le volume sera réduit à AB, la température redeviendra T, et la pression BC. En effet, les états successifs dans lesquels un même poids de gaz peut se trouver sont caractérisés par le volume, la pression, la température et la quantité absolue de calorique qu'il renferme; de ces quatre quantités, deux étant connues, les deux autres en sont des conséquences; ainsi, dans le cas dont il s'agit, la quantité absolue de chaleur et le volume étant redevenus ce qu'ils étaient au commencement de l'opération, on peut être certain que la température et la pression seront aussi ce qu'elles étaient alors. Conséquemment, la loi inconnue suivant laquelle variera la pression lorsque l'on réduira le volume du gaz dans son enveloppe imperméable à la chaleur, sera représentée par une courbe KC qui passera par le point C, et dans laquelle les abscisses représentent toujours les volumes, et les ordonnées les pressions.

Cependant, la réduction du volume gazeux de AG à AB aura consommé une quantité d'action mécanique qui sera, par les mêmes motifs que nous avons exposés plus haut, représentée par les deux trapèzes mixtilignes FGHK et KHBC. Si nous retranchons ces deux trapèzes des deux premiers CBDE et EDGF, qui représentent la quantité d'action développée pendant la dilatation du gaz, la différence, qui sera égale à l'espèce de parallélogramme curviligne CEFK, représentera la quantité d'action développée dans le cercle d'opérations que nous venons de décrire, et à la suite desquelles le gaz se retrouvera précisément dans l'état où il était primitivement.

Cependant, toute la quantité de chaleur fournie par le corps A au gaz pendant qu'il s'est dilaté en contact avec lui, s'est écoulée dans le corps B pendant la condensation du gaz qui s'est opérée en contact avec celui-ci.

Voilà donc de la force mécanique développée par le passage du calorique d'un corps chaud à un corps froid, et ce passage s'est effectué sans qu'il y ait eu contact entre corps de température différente.

L'opération inverse est également possible; ainsi, prenons le même volume de gaz AB à la température T et sous la pression BC; renfermons-le dans une enveloppe imperméable à la chaleur, et dilatons-le jusqu'à ce que sa température diminuant graduellement devienne égale à t; continuons la dilatation dans la même enveloppe, mais après avoir introduit le corps B qui a la même température; celui-ci fournira au gaz la chaleur nécessaire pour maintenir sa température, et nous pousserons l'opération jusqu'à ce que le corps B ait rendu au gaz la chaleur qu'il en avait reçue dans l'opération précédente. Écartons ensuite le corps B, et condensons le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur, jusqu'à ce que sa température redevienne égale à T. Alors approchons le corps A qui possède la même température, et continuons la réduction de volume jusqu'à ce que toute la chaleur prise au corps B soit rendue au corps A. Le gaz se trouve alors avoir la même température et posséder la même quantité absolue de chaleur qu'au commencement de l'opération; on en peut conclure qu'il occupe le même volume et est soumis à la même pression.

Ici le gaz passe successivement, mais dans un ordre inverse, par tous les états de température et de pression par lesquels il avait passé dans la première série d'opérations; conséquemment les dilatations sont devenues des compressions, et réciproquement, mais elles suivent la même loi. Par suite, les quantités d'action développées dans le premier cas sont absorbées dans le second, et réciproquement, mais elles conservent les mêmes valeurs numériques, car les élémens des intégrales qui les composent sont les mêmes.

On voit ainsi qu'en faisant passer de la chaleur, par la méthode que nous avons d'abord indiquée, d'un corps entretenu à une température déterminée à un corps entretenu à une température inférieure, on développe une certaine quantité d'action mécanique, laquelle est égale à celle qu'il faut consommer pour faire passer la même quantité de chaleur du corps froid au corps chaud, par le procédé inverse dont nous avons parlé en dernier lieu.

On peut arriver à un résultat semblable par la réduction en vapeur d'un liquide quelconque. Prenons en effet ce liquide et mettons-le en contact avec le corps A dans une enveloppe extensible et imperméable à la chaleur; nous supposons que la température du liquide soit égale à la température T du corps A. Portons sur l'axe des abscisses AX (fig. 2), une quantité AB égale au volume du liquide, et sur une ligne parallèle à l'axe des ordonnées AY une quantité BC égale à la pression de la vapeur du liquide qui correspond à la température T.

Si nous augmentons le volume du liquide, une portion de celui-ci passera à l'état de vapeur, et comme la source de chaleur A fournit le calorique latent nécessaire à sa formation, la température restera constante et égale à T. Alors, si l'on porte sur l'axe des abscisses des quantités représentant les volumes successifs qu'occupe le mélange de liquide et de vapeur, et que l'on prenne pour ordonnées les valeurs correspondantes de la pression, comme celle-ci reste constante, la courbe des pressions se réduira ici à une ligne droite CE parallèle à l'axe des abscisses.

Lorsqu'une certaine quantité de vapeur a été formée et que le mélange de liquide et de vapeur occupe un volume AD, on peut écarter le corps A, et continuer la dilatation. Alors une nouvelle quantité de liquide passera à l'état gazeux, et une partie du calorique sensible devenant latente, la température du mélange diminuera ainsi que la pression; supposons que l'on pousse la dilatation jusqu'à ce que la température diminuant graduellement devienne égale à la température t du corps B; soit AF le volume, et FG la pression qui y correspondent. La loi de la variation de la pression sera donnée par une courbe EG qui passera par le point E et le point G.

Pendant cette première partie de l'opération que nous décrivons, on aura développé une quantité d'action représentée par la surface du rectangle BCED, et celle du trapèze mixtiligne EGFD.

Maintenant, approchons le corps B, mettons-le en contact avec le mélange de liquide et de vapeur, et réduisons successivement son volume; une partie de la vapeur passera à l'état liquide, et comme la chaleur latente qu'elle dégagera en se condensant sera absorbée à mesure par le corps B, la température restera constante et égale à t. Nous continuerons ainsi de réduire le volume jusqu'à ce que toute la chaleur fournie par le corps A dans la première partie de l'opération ait été rendue au corps B.

Soit AH le volume occupé alors par le mélange de vapeur et de liquide; la pression correspondante sera KH égale à GF; la température restant égale à t pendant la réduction du volume de AF à AH, la loi de la pression entre ces deux limites sera représentée par la ligne KG parallèle à l'axe des abscisses.

Arrivé à ce point, le mélange de vapeur et de liquide sur lequel nous opérons, qui occupe le volume AH sous une pression KH, et à une température t, possède la même quantité absolue de chaleur que possédait le liquide au commencement de l'opération; si donc on éloigne le corps B et que l'on continue la condensation dans un vase imperméable à la chaleur, jusqu'à ce que le volume redevienne égal à AB, on aura la même quantité de matière occupant le même volume, et possédant la même quantité de chaleur qu'au commencement de l'opération; sa température et sa pression devront donc être aussi les mêmes qu'à cette époque; la température redeviendra ainsi égale à T, et la pression égale à CB; la loi des pressions pendant cette dernière partie de l'opération sera donc donnée par une courbe passant par les points K et C, et la quantité d'action absorbée pendant la réduction du volume de AF à AB sera représentée par le rectangle FHKG et le trapèze mixtiligne BCKH.

Si donc on retranche de la quantité d'action développée pendant la dilatation, celle qui est absorbée pendant la compression, on aura pour différence la surface du parallélogramme mixtiligne CEGK, qui représentera la quantité d'action développée pendant la série entière d'opérations que nous avons décrite, et à la suite desquelles le liquide employé se retrouve dans son état primitif.

Mais il faut remarquer que tout le calorique communiqué par le corps A a passé dans le corps B, et que cette transmission s'est opérée sans qu'il y ait eu d'autre contact qu'entre corps de même température.

On prouverait, de la même manière que pour les gaz, qu'en répétant la même opération dans un ordre inverse, on peut faire passer de la chaleur du corps B au corps A, mais que ce résultat ne sera obtenu que par l'absorption d'une quantité d'action mécanique, égale à celle qu'a développée le passage de la même quantité de calorique du corps A au corps B.

Il résulte de ce qui précède qu'une quantité d'action mécanique, et qu'une quantité de chaleur pouvant passer d'un corps chaud à un corps froid, sont des quantités de même nature, et qu'il est possible de remplacer les unes par les autres; de la même manière qu'en mécanique un corps pouvant tomber d'une certaine hauteur, et une masse animée d'une vitesse, sont des quantités du même ordre, et que l'on peut transformer les unes dans les autres par des agens physiques.

Il suit de là également que la quantité d'action F développée par le passage d'une certaine quantité de chaleur C, d'un corps A entretenu à une température T à un corps B entretenu à une température t, par l'un des procédés que nous venons d'indiquer, est la même quel que soit le gaz ou le liquide employé, et est la plus grande qu'il soit possible de réaliser. Supposons en effet qu'en faisant passer par tout autre procédé la quantité de chaleur C du corps A au corps B, il fût possible de réaliser une quantité d'action mécanique plus grande F', nous en emploierions une partie F, à ramener du corps B au corps A la quantité de chaleur C, par l'un des deux moyens que nous venons de décrire; la force vive F employée dans ce but serait égale, comme nous l'avons vu, à celle que développerait le passage de la même quantité de chaleur C du corps A au corps B ; elle est donc d'après l'hypothèse plus petite que F′, il y aurait donc production d'une quantité d'action F′—F, qui serait créée de toutes pièces et sans consommation de chaleur, résultat absurde qui conduirait à la possibilité de créer gratuitement et d'une manière indéfinie de la force ou de la chaleur. L'impossibilité d'un pareil résultat me paraît pouvoir être acceptée comme un axiome fondamental de la mécanique ; la démonstration par les poulies, que Lagrange a donnée du principe des vitesses virtuelles, contre laquelle on n'a pas songé à élever d'objection, repose sur quelque chose d'analogue.

On démontrerait de la même manière qu'il n'existe pas de gaz ni de vapeur qui, employé par les procédés décrits à transmettre la chaleur d'un corps chaud à un corps froid, puisse développer une quantité d'action plus grande que tout autre gaz ou toute autre vapeur.

Nous admettrons donc comme base de nos recherches les principes suivans :

Le calorique en passant d'un corps, à un autre entretenu à une température moindre, peut donner lieu à la production d'une certaine quantité d'action mécanique ; il y a perte de force vive toutes les fois qu'il y a contact entre corps de température différente. L'effet produit *maximum* a lieu lorsque le passage du calorique du corps chaud au corps froid se fait par l'un des moyens que nous venons de décrire. Nous ajouterons qu'il se trouve être indépendant de la nature chimique du liquide ou du gaz employé, de sa quantité et de sa pression ; en sorte que la quantité d'action *maximum* que peut développer le passage d'une quantité déterminée de chaleur d'un corps chaud à un corps froid, est indépendante de la nature des agens qui servent à la réaliser.

§ III.

Nous allons maintenant traduire analytiquement les opérations diverses que nous avons décrites dans le paragraphe précédent ; nous en déduirons l'expression de la quantité d'action *maximum* que produit le passage d'une quantité donnée de chaleur, d'un corps entretenu à une température déterminée à un corps entretenu à une température moindre, et nous arriverons à des relations nouvelles entre le volume, la pression, la température et la quantité absolue de chaleur ou le calorique latent, des corps solides, liquides ou gazeux.

Reprenons nos deux corps A et B, et supposons que la température t du corps B soit inférieure d'une quantité infiniment petite dt à la température t du corps A. Nous supposerons d'abord que ce soit un gaz qui serve à la transmission du calorique du corps A au corps B. Soit v_0 le volume du gaz sous la pression p_0 et à la température t_0; soient p et v le volume et la pression du même poids du gaz à la température t du corps A. La loi de Mariotte, combinée avec celle de Gay-Lussac, établit entre ces quantités diverses la relation

$$pv = \frac{p_0 v_0}{267 + t_0}(267 + t),$$

ou posant, pour simplifier, $\frac{p_0 v_0}{267 + t_0} = \mathrm{R}$:

$$pv = \mathrm{R}(267 + t).$$

Le corps A est mis en contact avec le gaz. Soit $me = v$, $ae = p$ (fig. 3). Si l'on dilate le gaz d'une quantité infiniment petite $dv = eg$, la température restera constante à cause de la présence de la source de chaleur A; la pression diminuera et deviendra égale à l'ordonnée bg. Maintenant, on écarte le corps A et l'on dilate le gaz dans une enveloppe imperméable à la chaleur, d'une quantité infiniment petite gh, jusqu'à ce que la chaleur devenue latente abaisse la température du gaz d'une quantité infiniment petite dt, et l'amène ainsi à la température $t - dt$ du corps B. Par suite de cet abaissement de température, la pression diminuera plus rapidement que dans la première partie de l'opération, et deviendra ch. Nous approchons maintenant le corps B et nous réduisons le volume mh d'une quantité infiniment petite fh, et calculée de façon à ce que pendant cette compression, le gaz rende au corps B toute la chaleur qu'il a puisée dans le corps A pendant la première partie de l'opération. Soit *fd* la pression correspondante; cela fait, nous éloignons le corps B et nous continuons de comprimer le gaz jusqu'à ce qu'il ait repris le volume *me*. Alors la pression sera redevenue égale à *ae* comme nous l'avons démontré dans le paragraphe précédent, et l'on prouvera aussi de la même manière que le quadrilatère *abcd* sera la mesure de la quantité d'action produite par la transmission au corps B de la chaleur puisée dans le corps A pendant la dilatation du gaz.

Or, il est aisé de démontrer que ce quadrilatère est un parallélogramme; cela résulte des valeurs infiniment petites attribuées aux variations de volume et de pression : imaginons en effet que par chacun des points du plan sur lequel est tracé le quadrilatère *abcd*, on élève des perpendiculaires à ce plan, et que l'on porte sur chacune d'elles, à partir de leur pied, deux quantités T et Q, la première égale à la température, la seconde à la quantité absolue de chaleur que possède le gaz, lorsque le volume et la pression ont la valeur que leur assignent l'abscisse v et l'ordonnée p qui correspondent à chaque point.

Les lignes *ab* et *cd* appartiennent aux projections de deux courbes d'égalité de température passant par deux points infiniment voisins, pris sur la surface des températures; *ab* et *cd* sont donc parallèles, *ad* et *bc* seront aussi les projections de deux courbes pour lesquelles $Q = \text{const.}$, et qui passeraient aussi par deux points infiniment voisins, pris sur la surface $Q = f(p, v)$, ces deux élémens, sont donc aussi parallèles; le quadrilatère *abcd* est donc un parallélogramme, et il est aisé de voir que son aire s'obtiendra en multipliant la variation du volume pendant le contact du gaz avec le corps A ou le corps B, c'est-à-dire *eg* ou son égal *fh*, par la différence *bn* des pressions supportées pendant ces deux opérations, et correspondantes à la même valeur du volume v. Or, *eg* ou *fh* étant les différentielles du volume, sont égaux à dv; *bn* s'obtiendra en différentiant l'équation $pv = R(267 + t)$ en supposant v constant; on aura donc $bn = dp = R\,\frac{dt}{v}$.

La quantité d'action développée aura donc pour expression $R\,\frac{dt\,dv}{v}$.

Il reste à déterminer la quantité de chaleur nécessaire pour produire cet effet; elle est égale à celle que le gaz a puisée dans le corps A, pendant que son volume s'est accru de dv en conservant la même température t; or, Q étant la quantité absolue de chaleur que possède le gaz, devra être une certaine fonction de p et de v, pris comme variables indépendantes, la quantité de chaleur absorbée par le gaz sera donc

$$dQ = \frac{dQ}{dv}\,dv + \frac{dQ}{dp}\,dp\,;$$

mais la température restant constante pendant la variation du volume, on a

$$vdp + pdv = 0, \quad \text{d'où} \quad dp = -\frac{p}{v}\,dv,$$

et par suite

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dv} - \frac{p}{v}\frac{dQ}{dp}\right)dv.$$

Divisant l'effet produit par cette valeur de dQ, nous aurons

$$\frac{R\,dt}{v\frac{dQ}{dv} - p\,\frac{dQ}{dp}}$$

pour l'expression de l'effet produit *maximum* que peut développer le passage d'une quantité de chaleur égale à l'unité, d'un corps entretenu à la température t à un corps entretenu à la température $t - dt$.

Nous avons démontré que cette quantité d'action développée est indépendante de l'agent qui a servi à transmettre la chaleur; elle est donc la même pour tous les gaz et ne dépend pas non plus de la quantité pondérable du corps employé; mais rien ne prouve qu'elle soit indépendante de la température; $v\,\frac{dQ}{dv} - p\,\frac{dQ}{dp}$ doit donc être égal à une fonction inconnue de t qui est la même pour tous les gaz.

Or, à cause de l'équation $p.v = R\,(267.+t)$; t est lui-même fonction du produit $p.v$, on a donc l'équation aux différentielles partielles

$$v\frac{dQ}{dv} - p\,\frac{dQ}{dp} = F\,(p.v);$$

elle a pour intégrale

$$Q = f(p.v) - F\,(p.v)\log[(hyp)\,p].$$

On ne change rien à la généralité de cette formule en remplaçant ces deux fonctions arbitraires du produit $p.v$ par des fonctions B et C de la température, multipliées par le coefficient R : on aura ainsi

$$Q = R\,(B - C\log p).$$

Il est aisé de vérifier que cette valeur de Q satisfait à toutes les conditions auxquelles elle est assujettie; on a, en effet,

$$\frac{dQ}{dv} = R\left(\frac{dB}{dt}\frac{p}{R} - \log p\,\frac{dC}{dt}\frac{p}{R}\right)$$
$$\frac{dQ}{dp} = R\left(\frac{dB}{dt}\frac{v}{R} - \log p\,\frac{dC}{dt}\frac{v}{R} - C\frac{1}{p}\right);$$

on tire de là

$$v\frac{dQ}{dv} - p\,\frac{dQ}{dp} = CR\,,$$

et par suite,

$$\frac{R\,dt}{v\dfrac{dQ}{dv} - p\,\dfrac{dQ}{dp}} = \frac{dt}{C}.$$

La fonction C qui multiplie le logarithme de la pression dans la valeur de Q est, comme on voit, d'une haute importance; elle est indépendante de la nature des gaz, et n'est fonction que de la température; elle est essentiellement positive et sert de mesure à la quantité d'action *maximum* que peut développer la chaleur.

Nous avons vu que des quatre quantités Q, t, p et v, deux étant connues, les deux autres s'ensuivent; elles doivent donc être liées entre elles par deux équations; l'une d'elles,

$$pv = R(267 + t),$$

résulte des lois de Mariotte et de Gay-Lussac combinées. L'équation

$$Q = R(B - C \log p),$$

que nous déduisons de notre théorie, est la seconde. Toutefois, la détermination numérique des changemens qu'éprouvent les gaz quand on fait varier d'une manière arbitraire le volume et la pression, exigent que l'on connaisse les fonctions B et C.

Nous verrons plus tard que l'on peut obtenir une valeur approchée de la fonction C dans une étendue considérable de l'échelle thermométrique; d'ailleurs, étant déterminée pour un gaz, elle le sera pour tous. Quant à la fonction B, elle peut varier d'un gaz à l'autre; cependant, il est probable qu'elle est la même pour tous les gaz simples : c'est au moins ce qui paraît résulter de ce que l'expérience indique, qu'ils ont tous la même capacité pour la chaleur.

Reprenons l'équation

$$Q = R(B - C \log p).$$

Comprimons un gaz occupant le volume v sous la pression p jusqu'à ce que le volume devienne v', et laissons-le se refroidir jusqu'à ce que sa température revienne au même point. Soit p' la nouvelle valeur de la pression; soit Q' la nouvelle valeur de Q, on aura

$$Q - Q' = RC \log \frac{p'}{p} = RC \log \frac{v}{v'}.$$

La fonction C étant la même pour tous les gaz, on voit que *des volumes égaux de tous les fluides élastiques, pris à la même température et sous la même pression, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même quantité absolue de chaleur*. C'est la loi que M. Dulong a déduite de l'expérience directe.

Cette équation démontre en outre que *lorsqu'un gaz varie de volume sans changer de température, les quantités de chaleur absorbées ou dégagées par ce gaz sont en progression arithmétique, si les accroissemens ou réductions de volume sont en progression géométrique*. M. Carnot énonce également ce résultat dans l'ouvrage cité.

L'équation

$$Q - Q' = \mathrm{R}C \log\left(\frac{v}{v'}\right)$$

exprime une loi plus générale; elle tient compte de toutes les circonstances qui peuvent influer sur le phénomène, telles que la pression, le volume et la température.

En effet, puisque

$$\mathrm{R} = \frac{p_0 v_0}{267 + t_0} = \frac{pv}{267 + t},$$

on a

$$Q - Q' = \frac{267 + t}{pv} C \log \frac{v}{v'}.$$

Cette équation fait connaître l'influence de la pression; elle démontre que *des volumes égaux de tous les gaz, pris à la même température, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume dégagent ou absorbent des quantités de chaleur proportionnelles à la pression*.

Ce résultat explique comment la rentrée subite de l'air dans le vide de la machine pneumatique ne dégage pas une quantité sensible de chaleur. Le vide de la machine pneumatique n'est autre chose qu'un volume v de gaz dont la pression p est très petite; si on laisse rentrer l'air atmosphérique, sa pression p deviendra égale subitement à la pression p' de l'atmosphère, son volume v sera réduit à v', et l'expression de la chaleur dégagée sera

$$C\frac{pv}{267+t}\log\frac{v}{v'} = C\frac{pv}{267+t}\log\frac{p'}{p}.$$

La chaleur dégagée par la rentrée de l'air atmosphérique dans le vide sera donc ce que devient cette expression quand on y fait p très petit; on trouve alors que $\log\frac{p'}{p}$ devient très grand, mais le produit de p par $\log\frac{p'}{p}$ n'en est pas moins très petit; on a, en effet,

$$p\log\frac{p'}{p} = p\log p' - p\log p = p(\log p' - \log p),$$

quantité qui converge vers zéro, quand p diminue.

La chaleur dégagée sera donc d'autant plus petite, que la pression dans le récipient sera plus faible, et elle se réduira à zéro quand le vide sera parfait.

Nous ajouterons que l'équation

$$Q = R(B - C\log p),$$

donne la loi des caloriques spécifiques à pression constante et à volume constant. Le premier a pour expression

$$R\left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p\right),$$

le second

$$R\left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p - C\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}\right),$$

égal à

$$R\left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p - \frac{C}{267+t}\right).$$

Ils s'obtiennent, le premier en différentiant Q par rapport à t, en supposant p constant ; le second, en supposant v constant. Si l'on prend des volumes égaux de différens gaz à la même température et sous la même pression, la quantité R sera la même pour tous, et par suite on voit que l'excès du calorique spécifique à pression constante sur le calorique spécifique à volume constant, est le même pour tous, et égal à $\frac{R}{267+t}C$.

§ IV.

La même méthode de raisonnement appliquée aux vapeurs nous permettra d'établir une relation nouvelle entre leur calorique latent, leur volume et leur pression.

Nous avons montré dans le second paragraphe comment un liquide en passant à l'état de vapeur, peut servir à transmettre le calorique d'un corps entretenu à une température T, à un corps entretenu à une température moindre t, et comment cette transmission peut développer de la force motrice.

Supposons que la température du corps B soit inférieure d'une quantité infiniment petite dt à la température du corps A. Nous avons vu que si cb (fig. 4) représente la pression de la vapeur du liquide, correspondante à la température t du corps A, et fg celle qui correspond à la température $t - dt$ du corps B, bh l'accroissement de volume dû à la vapeur formée en contact avec le corps A, hk celui qui est dû à la vapeur formée après que le corps A a été éloigné, et dont la formation a abaissé la température d'une quantité dt, nous avons vu, dis-je, que la quantité d'action développée par la transmission du calorique latent fourni par le corps A, de celui-ci au corps B, a pour mesure le quadrilatère $cdef$. Or, cette surface est égale, en négligeant les infiniment petits du second ordre, au produit du volume cd par la différentielle de la pression $dh - ek$. Nommant p la pression de la vapeur du liquide qui correspond à la température t, p sera une fonction de t, et l'on aura $dh - ek = \frac{dp}{dt}dt$.

cd sera égal à l'accroissement de volume qu'éprouve l'eau en passant de l'état liquide à l'état gazeux sous la pression p et à la température correspondante. Si l'on nomme ρ la densité du liquide, et δ celle de la vapeur, v le volume de la vapeur formée, δv en sera le poids, et $\frac{\delta v}{\rho}$ sera le volume du liquide évaporé. L'accroissement de volume dû à la formation d'un volume v de vapeur sera donc

$$v\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right).$$

L'effet produit sera donc

$$\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)v\,\frac{dp}{dt}\,dt.$$

La chaleur qui a servi à produire cette quantité d'action est le calorique latent du volume v de vapeur formée; soit k une fonction de t représentant le calorique latent que contient l'unité de volume de la vapeur fournie par le liquide, sujet de l'expérience, à la température t, et sous la pression correspondante, le calorique latent du volume v sera kv, et le rapport de l'effet produit à la chaleur dépensée aura pour expression

$$\frac{\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)\frac{dp}{dt}\,dt}{k}.$$

Nous avons démontré qu'il est le plus grand qu'il soit possible d'obtenir, qu'il est indépendant de la nature du liquide employé et le même que celui que nous avons obtenu par l'emploi des gaz permanens; or, nous avons vu que celui-ci a pour expression $\frac{dt}{C}$, C étant une fonction de t indépendante de la nature des gaz, nous aurons donc également

$$\frac{\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)\frac{dp}{dt}}{k} = \frac{1}{C}, \quad \text{d'où} \quad k = \left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)\frac{dp}{dt}C.$$

Pour la plupart des vapeurs, le rapport $\frac{\delta}{\rho}$ de la densité de la vapeur à celle du liquide qui l'a formée est négligeable devant l'unité, tant que la température n'est pas très élevée ; on aura donc sensiblement

$$k = C\frac{dp}{dt}.$$

Cette équation exprime que *le calorique latent que renferment des volumes égaux de vapeur de différens liquides à la même température et sous la pression correspondante, est proportionnel au coefficient* $\frac{dp}{dt}$ *de la pression par rapport à la température.*

Il résulte de là, que le calorique latent que renferment les vapeurs des liquides qui ne commencent à bouillir qu'à de hautes températures, comme le mercure, par exemple, est très faible, puisque pour ces vapeurs la quantité $\frac{dp}{dt}$ est très petite.

Nous n'insisterons pas sur les conséquences qui résultent de l'équation

$$k = \left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)\frac{dp}{dt}C.$$

Nous nous bornerons à remarquer que si, comme tout porte à le croire, C et $\frac{dp}{dt}$ ne deviennent infinis pour aucune valeur de la température, k deviendra nul quand on aura $\delta = \rho$, c'est-à-dire que lorsque la pression sera assez forte et la température assez élevée pour que la densité de la vapeur soit égale à celle du liquide, le calorique latent se réduira à zéro.

§ V.

Tous les corps de la nature varient de volume par des changemens dans leur température et leur pression ; les liquides et les solides n'échappent pas à cette loi ; ils peuvent également servir à développer la puissance motrice de la chaleur ; on a proposé de les substituer à la vapeur d'eau pour utiliser cette force motrice ; on s'est même quelquefois trouvé fort bien de leur emploi, notamment quand il fallait développer un effort momentané très considérable, mais s'exerçant dans d'étroites limites.

Dans ces sortes de corps comme dans les gaz, on peut remarquer que des quatre quantités, le volume v, la pression p, la température T, et la quantité absolue de chaleur Q, deux étant déterminées, les autres s'ensuivent ; si donc on prend deux d'entre elles, p et v, par exemple, comme variables indépendantes, les deux autres T et Q, pourront être considérées comme fonctions de celles-ci.

Des expériences directes sur l'élasticité et sur la dilatabilité des corps peuvent faire connaître comment les quantités T, p et v, varient ensemble, c'est ainsi que pour les gaz, la loi de Mariotte relativement à leur élasticité, et la loi de Gay-Lussac sur leur dilatabilité, conduisent à l'équation

$$pv = \mathrm{R}(267 + t);$$

il ne resterait alors qu'à déterminer Q en fonction de p et de v.

Il existe, entre les fonctions T et Q, une relation que l'on peut déduire de principes analogues à ceux que nous venons d'établir. Augmentons en effet d'une quantité infiniment petite $d\mathrm{T}$ la température du corps, en empêchant le volume de croître, alors la pression augmentera ; si l'on représente le volume v par l'abscisse ab (fig. 5), et la pression primitive par l'ordonnée bd, cet accroissement de pression pourra être représenté par la quantité df, qui sera du même ordre que l'accroissement de température dT, auquel elle est due, c'est-à-dire infiniment petite.

Maintenant, nous approchons une source de chaleur A entretenue à la température $T + dT$, et nous laissons le volume v s'accroître d'une quantité bc, la présence de la source A entretenue à la température $T + dT$, empêche la température de décroître. Pendant ce contact, la quantité Q de chaleur que possède le corps s'accroîtra d'une quantité dQ qui sera puisée dans la source A. Ensuite, nous éloignerons la source A, et nous ferons refroidir le corps donné d'une quantité dT en lui conservant le volume ac. Alors la pression diminuera d'une quantité infiniment petite ge.

La température du corps se trouvant ainsi réduite à T, qui est celle de la source de chaleur B, nous approchons celle-ci, et nous réduisons le volume du corps d'une quantité bc, de façon que toute la chaleur développée par la diminution de volume soit absorbée par le corps B, et que la température reste égale à sa valeur primitive T. Le volume V redevenant aussi ce qu'il était au commencement de l'opération, on peut être certain que la pression reprendra sa valeur primitive bd, et qu'il en sera de même de la quantité absolue de chaleur Q.

Si maintenant on joint par des lignes droites les quatre points f, g, e, d, on formera un quadrilatère dont l'aire mesurera la quantité d'action développée pendant l'opération décrite. Or, il est aisé de voir que fg et de sont deux élémens infiniment voisins pris sur deux courbes infiniment voisines dont les équations seraient $T + dT = \text{const.}$, et $T = \text{const.}$ Ils doivent donc être considérés comme parallèles; les deux ordonnées qui terminent le quadrilatère dans l'autre sens étant aussi parallèles, la figure est parallélogrammique, et a pour mesure $bc \times df$.

Or, fd n'est autre chose que l'accroissement qu'éprouve la pression p, le volume v restant constant, et T devenant $T + dT$. On a donc

$$df = \frac{dp}{dT}\, dT,$$

d'où

$$fd = \frac{1}{\frac{dT}{dp}} dT.$$

Et bc étant l'accroissement de volume dv

$$fd \times bc = \frac{dv.dT}{\frac{dT}{dp}}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la consommation de chaleur qu'a nécessitée la production de cette quantité d'action mécanique.

D'abord nous avons élevé la température du corps soumis à l'expérience d'une quantité dT sans changer son volume primitif v, puis, lorsqu'il est devenu $v + dv$, nous avons abaissé sa température de la même quantité dT sans faire varier son volume $v + dv$. Or, il est aisé de voir que cette double opération peut être effectuée sans perte de chaleur; supposons en effet que n étant un nombre indéfiniment grand, l'intervalle de température dT soit partagé en un nombre n de nouveaux intervalles $\frac{dT}{n}$, et que l'on ait $n + 1$ sources de chaleur entretenues aux températures T, $T + \frac{dT}{n}$, $T + \frac{2dT}{n}$,......., $T + \frac{(n-1)dT}{n}$ et $T + dT$.

Pour porter le corps sur lequel nous opérons, de la température T à la température $T + dT$, nous le mettons successivement en contact avec la seconde, la troisième, la $(n + 1)^{ième}$ de ces sources, jusqu'à ce qu'il ait acquis la température de chacune d'elles. Lorsqu'au contraire le volume v du corps s'étant accru de dv, on voudra lui rendre la température T, on le mettra successivement en contact avec la $n^{ième}$, la $(n - 1)^{ième}$, la première de ces sources, jusqu'à ce qu'il ait acquis la température de chacune d'elles. On rendra alors à ces sources la chaleur qui leur a été empruntée dans la première partie de l'opération, car on pourra négliger les différences d'un ordre de grandeur inférieur, provenant de ce que le calorique spécifique du corps aura pu changer par suite des variations de v et Q.

Chacune de ces sources n'aura donc rien gagné ni perdu, à l'exception toutefois de la source dont la température est $T + dT$, qui aura perdu la chaleur nécessaire pour élever la température du corps sur lequel nous opérons de $T + \frac{(n-1)dT}{n}$ à $T + dT$; et de la source entretenue à la température T, qui aura gagné la chaleur nécessaire pour abaisser la température du même corps de $T + \frac{dT}{n}$ à T. Si l'on suppose n infiniment grand, ces quantités de chaleur pourront être négligées.

On voit donc que, lorsque la température du corps dont il s'agit étant ainsi réduite à T, ce corps sera mis en contact avec la source de chaleur B, il n'aura gagné depuis le commencement de l'opération, que la chaleur qui lui a été communiquée par la source A. Par suite de la réduction de son volume en contact avec le corps B, il se retrouvera avoir le même volume et la même température qu'à l'origine; les quantités Q et P auront donc aussi repris leur valeur primitive; on peut donc être certain que toute la chaleur empruntée à la source A, et rien que cette chaleur, aura été rendue au corps B.

Il résulte de là que l'effet produit

$$\frac{dv dT}{\frac{dT}{dp}}$$

est dû à la transmission de la chaleur absorbée par le corps soumis à l'expérience pendant son contact avec la source A, et qui s'est écoulée ensuite dans la source B.

Pendant le contact avec la source A, la température est restée constante; d'où il suit que les variations dp et dv de la pression et du volume sont liées par la relation

$$\frac{dT}{dp} dp + \frac{dT}{dv} dv = 0.$$

Ces variations dp et dv en occasionent une dans la quantité absolue de chaleur Q, qui a pour expression

$$dQ = \frac{dQ}{dp}\,dp + \frac{dQ}{dv}\,dv = dv\left[\frac{dQ}{dv} - \frac{dQ}{dp}\frac{\left(\frac{dT}{dv}\right)}{\left(\frac{dT}{dp}\right)}\right];$$

telle est la quantité de chaleur consommée pour produire l'effet que nous venons de calculer. L'effet produit par une quantité de chaleur égale à l'unité sera donc

$$\frac{dT}{\frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp}\cdot\frac{dT}{dv}}.$$

On démontrera, comme pour les gaz, que cet effet produit est le plus grand de tous ceux qu'il est possible de réaliser; et tous les corps de la nature pouvant être employés, de la manière que nous venons d'indiquer, à produire cet effet *maximum*, il faut nécessairement qu'il soit le même pour tous.

Lorsque nous avons appliqué cette théorie spécialement aux gaz, nous avons nommé $\frac{1}{C}$ le coefficient de dT dans l'expression de cette quantité d'action *maximum;* on aura donc pour tous les corps de la nature, solides, liquides ou gazeux, l'équation

$$\frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} = C,$$

dans laquelle C est une fonction de la température qui est la même pour tous.

Pour les gaz on a

$$T = -267 + \frac{1}{R}\,pv,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v}{R} \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dv} = \frac{p}{R}.$$

L'équation précédente, appliquée aux gaz, prend donc la forme

$$v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp} = \text{RC} = \text{F}(p, v):$$

c'est l'équation à laquelle nous sommes déjà arrivés directement, et qui a pour intégrale

$$\text{Q} = \text{R}(\text{B} - \text{C} \log p);$$

celle de l'équation générale

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dT}{dv} = \text{C}$$

est de la forme

$$\text{Q} = \text{F}(\text{T}) - \text{C}\varphi(p, v);$$

F(T) est une fonction arbitraire de la température, et $\varphi(p, v)$ une fonction particulière satisfaisant à l'équation

$$\frac{dT}{dv}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{dT}{dp}\frac{d\varphi}{dv} = 1. \qquad \text{(\textit{Voyez} la note ci-après.)}$$

Nous allons maintenant déduire diverses conséquences de l'équation générale à laquelle nous sommes parvenus.

Nous avons vu précédemment que lorsque l'on comprime un corps d'une quantité dv, la température restant constante, la chaleur dégagée par la condensation est égale à

$$d\text{Q} = dv \left[\frac{dQ}{dv} - \frac{dQ}{dp} \frac{\left(\frac{dT}{dv}\right)}{\left(\frac{dT}{dp}\right)} \right];$$

et comme $\frac{dQ}{dv}\frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dT}{dv} = C$, l'expression précédente prend la forme

$$dQ = dv \frac{C}{\left(\frac{dT}{dp}\right)} = - dp \frac{C}{\left(\frac{dT}{dv}\right)}.$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$dQ = - dp\, C \frac{dv}{dT};$$

$\frac{dv}{dT}$ est le coefficient différentiel du volume par rapport à la température, la pression restant constante.

Nous sommes donc conduits ainsi à cette loi générale qui s'applique à tous les corps de la nature, solides, liquides ou gazeux: *si l'on augmente d'une petite quantité la pression supportée par différens corps pris à la même température, il s'en dégagera des quantités de chaleur qui seront proportionnelles à leur dilatabilité par la chaleur.*

Ce résultat est la conséquence la plus générale que l'on déduit de cet axiome : qu'il est absurde de supposer que l'on puisse créer gratuitement et de toutes pièces de la force motrice ou de la chaleur.

§ VI.

La fonction de la température C est, comme on voit, d'une grande importance, à cause du rôle qu'elle joue dans la théorie de la chaleur; elle entre dans l'expression du calorique latent que renferment tous les corps et qu'en dégage la pression. Malheureusement les expériences manquent pour déterminer les valeurs de cette fonction correspondantes à toutes les valeurs de la température; pour $t = 0$, on peut le faire de la manière suivante.

M. Dulong a fait voir que l'air et tous les autres gaz pris à la température de 0°, et sous la pression 0m,76 de mercure, étant comprimés de $\frac{1}{267}$ de leur volume, dégagent une quantité de chaleur capable d'élever de 0,421 le même volume d'air atmosphérique.

Supposons que nous opérions sur un kilogramme d'air occupant un volume $v = 0{,}770$ de mètre cube, sous la pression de l'atmosphère p, équivalente à 10230 kilogrammes par mètre carré; on a

$$pv = R(267 + t),$$

et

$$Q = R(B - C\log p).$$

Si l'on fait varier subitement v d'une quantité infiniment petite dv, sans que la quantité absolue de chaleur Q varie, on aura

$$pdv + vdp = Rdt,$$

et

$$o = R\left(\frac{dB}{dt} - \log p\,\frac{dC}{dt}\right)dt - RC\frac{dp}{p},$$

ou bien

$$\frac{dt}{C}R\left(\frac{dB}{dt} - \log p\,\frac{dC}{dt}\right) = R\,\frac{dp}{p} = \frac{R}{p}\left(\frac{Rdt - pdv}{v}\right) = \frac{Rdt - pdv}{267 + t}.$$

Or, $R\left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p\right)$ étant la différentielle partielle de Q par rapport à t, p restant constant, n'est autre chose que le calorique spécifique de l'air à pression constante, c'est le nombre d'unités de chaleur nécessaire pour élever d'un degré un kilogramme d'air sous la pression atmosphérique; on a donc

$$R\left(\frac{dB}{dt} - \frac{dC}{dt}\log p\right) = 0{,}267.$$

Remplaçant alors dv par $-\frac{v}{267}$ et dt par 0,421, on trouve enfin

$$\frac{1}{C} = 1{,}41.$$

C'est l'effet *maximum* que peut produire une quantité de chaleur égale à celle qui élèverait de 1° un kilogramme d'eau pris à zéro, passant d'un corps entretenu à 1° à un corps entretenu à 0°. Il est exprimé en kilogrammes élevés à un mètre.

Ayant la valeur de C qui correspond à $t = 0$, il est intéressant de savoir si, à partir de ce point, C croît ou décroît, et dans quelle proportion. Une expérience de MM. Laroche et Bérard sur les variations qu'éprouve le calorique spécifique de l'air quand on fait varier la pression, permet de calculer la valeur du coefficient différentiel $\frac{dC}{dt}$.

En effet, d'après nos formules, le calorique spécifique de l'air sous deux pressions p et p' varie de $R\frac{dC}{dt}\log\frac{p}{p'}$; égalant cette quantité à la différence des caloriques spécifiques, telle qu'on la déduit des résultats de MM. Laroche et Bérard, on trouve, en prenant la moyenne de deux expériences,

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}002565.$$

Dans ces expériences, l'air entrait dans le calorimètre à la température de 96°,90, et en sortait à celle de 22°,83. 0,002565 est donc la valeur moyenne du coefficient différentiel $\frac{dC}{dt}$ entre ces deux températures.

Ce résultat nous apprend qu'entre ces limites la fonction C croît, mais très lentement; par suite la quantité $\frac{1}{C}$ diminue; il suit de là que l'effet produit par la chaleur diminue dans les hautes températures, quoique d'une manière très lente.

La théorie des vapeurs va nous fournir de nouvelles valeurs de la fonction C à d'autres températures. Reprenons la formule

$$\frac{1}{C} = \frac{\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)\frac{dp}{dt}}{k},$$

que nous avons démontrée dans le paragraphe IV. Si nous négligeons la densité de la vapeur devant celle du fluide, cette formule se réduit à

$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{dp}{dt}}{k}.$$

Remarquons, en passant, qu'à la température de l'ébullition, $\frac{dp}{dt}$ est à peu près le même pour toutes les vapeurs; C lui-même varie peu avec la température, en sorte que k est lui-même à peu près constant. Ceci explique comment des physiciens ont cru remarquer qu'à la température de l'ébullition, des volumes égaux de toutes les vapeurs contenaient la même quantité de calorique latent; mais on voit en même temps que cette loi n'est qu'approchée, puisqu'elle suppose que C et $\frac{dp}{dt}$ sont les mêmes pour toutes les vapeurs à la température de l'ébullition.

Des expériences faites par divers physiciens permettent de calculer pour différens liquides les valeurs de k et de $\frac{dp}{dt}$, qui correspondent à la température de l'ébullition; nous pourrons donc en conclure les valeurs correspondantes de $\frac{1}{C}$. Nous avons ainsi pu dresser la table suivante :

NOMS DES LIQUIDES.	VALEUR en atmosphère de $\frac{dp}{dt}$ à la température de l'ébullit	DENSITÉ de la vapeur à la température de l'ébul., la densité de l'air étant 1.	QUANTITÉ de chaleur latente comprise dans un kilogr. de vapeur.	TEMPÉRATURE de l'ébullition.	VALEURS correspondantes de $\frac{1}{c}$.
Éther sulfurique.	$\frac{1}{28,12}$	2,280	90,8	35,5	1,365
Alcool..........	$\frac{1}{25,19}$	1,258	207,7	78,8	1,208
Eau............	$\frac{1}{29,1}$	0,451	543,0	100	1,115
Essence de téréb.	$\frac{1}{30}$	3,207	76,8	156,8	1,076

Ces résultats confirment d'une manière frappante la théorie que nous exposons ; ils montrent que C augmente lentement avec la température, comme nous l'avons déjà reconnu : nous avons vu que pour $t = 0$, $\frac{1}{C} = 1,41$, d'où $C = 0,7092$, ce résultat est déduit d'expériences sur la vitesse du son. Nous trouvons ici qu'en partant d'expériences sur la vapeur d'eau, pour $t = 100°$, $\frac{1}{C} = 1,115$, d'où $C = 0,8969$; C s'est donc accru de 0 à 100° de 0,187, ce qui donne pour moyenne du coefficient différentiel entre ces deux limites,

$$\frac{dC}{dt} = 0,00187.$$

La moyenne de deux expériences dues à MM. Laroche et Bérard nous a donné, entre les limites 22°,83 et 96,90, pour valeur moyenne de $\frac{dC}{dt}$, la quantité

$$0,002565.$$

Ces deux résultats diffèrent peu l'un de l'autre, et leur divergence s'explique assez quand on réfléchit au nombre et à la variété des expériences auxquelles on a dû emprunter les données dont ils résultent.

Il existe un autre moyen de calculer les valeurs de $\frac{1}{C}$ d'une manière approximative entre des limites étendues de la température ; il faut pour cela admettre que la quantité de calorique contenue dans un même poids de vapeur d'eau est la même, quelles que soient la température et la pression correspondante, et de plus, que les lois relatives à la compression et à la dilatation des gaz permanens, s'appliquent également aux vapeurs ; en adoptant ces lois, qui ne sont qu'approchées, on peut dans la formule

$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{dp}{dt}}{K},$$

exprimer K en fonction de t ; $\frac{dp}{dt}$ se déduira, de 0 à 100° d'anciennes expériences dues à divers physiciens, et depuis 100° jusqu'à 224 des expériences récentes de MM. Arago et Dulong.

On trouve ainsi pour

		Valeurs de $\frac{1}{C}$
$t = 0, \frac{1}{C} = 1{,}586$	Nous avons déjà trouvé pour les valeurs de $\frac{1}{C}$ correspondantes aux mêmes valeurs de t :	1,410
$t = 35{,}5, \frac{1}{C} = 1{,}292$		1,365
$t = 78{,}8, \frac{1}{C} = 1{,}142$		1,208
$t = 100, \frac{1}{C} = 1{,}102$		1,106
$t = 156{,}8, \frac{1}{C} = 1{,}072$		1,078

Ces dernières, déduites d'expériences sur le son, les vapeurs d'éther sulfurique, d'alcool, d'eau et d'essence de térébenthine, présentent, avec les premières, un accord assez satisfaisant.

Ces coïncidences remarquables obtenues par des opérations numériques faites sur un grand nombre de données diverses, empruntées à des phénomènes fort différens, nous paraissent ajouter beaucoup à l'évidence de notre théorie.

§ VII.

La fonction C est, comme l'on voit, d'une haute importance : elle est le lien commun de tous les phénomènes que produit la chaleur sur les corps solides, liquides ou gazeux; il serait à désirer que des expériences comportant une grande exactitude, telles que des recherches sur la propagation du son dans les gaz pris à des températures différentes, fissent connaître cette fonction avec toute la certitude désirable; elle servirait à la détermination de plusieurs autres élémens importans de la théorie de la chaleur, à l'égard desquels l'expérience n'a conduit qu'à des approximations insuffisantes, ou sur lesquels elle n'a encore rien appris. Dans ce nombre, nous rangerons la chaleur dégagée par la compression des corps solides ou liquides ; la théorie que nous avons exposée nous permet de la déterminer numériquement pour toutes les valeurs de la température pour lesquelles la fonction C est connue d'une manière suffisamment exacte, c'est-à-dire depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 224^\circ$.

Nous avons vu que la chaleur dégagée par une augmentation de pression dp, est égale à la dilatation par la chaleur du corps soumis à l'expérience, multipliée par C. Pour de l'air pris à zéro, la quantité de chaleur dégagée peut se déduire immédiatement des expériences sur le son, de la manière suivante.

M. Dulong a fait voir qu'une compression de $\frac{1}{267}$ élève de $0^\circ{,}421$ la température d'un volume d'air pris à zéro. Or, les 0,267 d'unité de chaleur nécessaires pour élever de 1°, un kilogramme d'air pris à zéro sous pression constante, sont égaux à la chaleur nécessaire pour maintenir à zéro la température du gaz dilaté de $\frac{1}{267}$ de son volume, plus la chaleur nécessaire pour élever de 1° le volume dilaté maintenu constant; cette dernière est égale à $\frac{1}{0{,}421}$ de la première : leur somme est donc égale à la première multipliée par $1 + \frac{0}{0{,}421}$; donc celle-ci, c'est-à-dire la chaleur nécessaire pour maintenir à zéro la température de 1 kil. d'air, dilaté de $\frac{1}{267}$ de son volume, est égale à $(0{,}267) : \left(1 + \frac{1}{0{,}421}\right)$, ou à 0,07911.

On arriverait au même résultat en appliquant la formule

$$Q = R(B - C \log p),$$

d'où

$$dQ = RC\frac{dv}{v},$$

en posant $C = \frac{1}{410}$, et en observant qu'une diminution de volume de $\frac{1}{267}$ correspond à un accroissement de pression égal à $\frac{1}{267}$ d'atmosphère.

Connaissant la chaleur que la compression dégage des gaz, pour avoir celle qu'une pression semblable dégagerait d'un corps quelconque, du fer par exemple, nous écrirons la proportion : 0,07911, chaleur dégagée par un volume d'air égal à 0,77 de mètre cube, soumis à un accroissement de pression égal à $\frac{1}{267}$ d'atmosphère, est à celle dégagée par un même volume de fer dans les mêmes circonstances, comme 0,00375, dilatabilité cubique de l'air, est à 0,00003663, dilatabilité cubique du fer. On trouve pour le second terme de la proportion le nombre 0,0007718. Or, un volume $0^{m},77$ de fer pèse 5996 kilogr.; la chaleur dégagée par un kilogr. sera donc de $\frac{0,0007718}{5996}$; pour une pression d'une atmosphère, elle sera 267 fois plus considérable, ou égale à 0,00003436; divisant ce nombre par le calorique spécifique du fer rapporté à celui de l'eau, on aura la quantité dont une pression d'une atmosphère élève la température du fer; on voit qu'elle est trop faible pour pouvoir être appréciée par nos instrumens thermométriques.

§ VIII.

Nous n'insisterons pas davantage sur les conséquences qui résultent, pour la théorie de la chaleur, des résultats énoncés dans ce Mémoire : nous croyons utile seulement d'ajouter quelques mots sur l'emploi de la chaleur comme force motrice. M. S. Carnot, dans l'ouvrage déjà cité, nous paraît avoir posé les véritables bases de cette partie importante de la mécanique pratique.

Les machines à haute ou à basse pression sans détente, utilisent la force vive que peut développer le calorique contenu dans la vapeur, par son passage de la température de la chaudière à celle du condenseur; dans les machines à haute pression sans condenseur, tout se passe comme si elles étaient pourvues d'un condenseur dont la température serait 100°. On n'utilise donc dans celles-ci que le passage du calorique latent que contient la vapeur, de la température de la chaudière à la température 100°. Quant au calorique sensible de la vapeur, il est entièrement perdu dans toutes les machines sans détente.

Il est utilisé en partie par les machines à détente dans lesquelles on laisse s'abaisser la température de la vapeur ; le cylindre enveloppe qui, dans les machines de Wolff a deux cylindres, a pour but de maintenir constante la température de la vapeur, fort utile pour diminuer les limites entre lesquelles varie la force motrice agissant sur les pistons, n'a qu'une influence fâcheuse quant à l'effet produit, comparé à la consommation de combustible.

Pour utiliser complètement la force motrice dont on peut disposer, il faudrait que la détente fût poussée jusqu'à ce que la température de la vapeur se réduisît à celle du condenseur ; mais des considérations pratiques tirées de la manière dont on utilise dans les arts la force motrice du feu, s'opposent à ce que l'on atteigne cette limite.

D'une autre part, nous avons démontré que l'emploi des gaz ou de tout autre liquide que l'eau, entre les mêmes limites de la température, n'ajouterait rien aux résultats déjà obtenus ; mais il résulte des considérations qui précèdent, que la température du feu étant supérieure de 1000° à 2000° à celle des chaudières, il y a une perte énorme de force vive au passage de la chaleur du foyer dans la chaudière. C'est donc uniquement de l'emploi du calorique à de hautes températures et de la découverte d'agens propres à en réaliser la force motrice, que l'on a lieu d'attendre des perfectionnemens importans dans l'art d'utiliser la puissance mécanique de la chaleur.

NOTE.

L'intégrale de l'équation générale

$$\frac{dQ}{dv} \cdot \frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dT}{dv} = C,$$

est, comme nous avons vu,

$$Q = F(T) - C\,\varphi(p, z). \qquad (1)$$

F(T) est une fonction arbitraire de la température T, pouvant varier d'un corps à l'autre; C une fonction de la température qui est la même pour tous les corps de la nature, et $\varphi(p, v)$ une fonction particulière de p et de v satisfaisant à l'équation

$$\frac{dT}{dv} \cdot \frac{d\varphi}{dp} - \frac{dT}{dp}\frac{d\varphi}{dv} = 1. \qquad (2)$$

Cette fonction φ peut se déterminer de la manière suivante. Soit

$$\varphi = \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} + \varphi',$$

substituant dans l'équation (2), il vient

$$\frac{dT}{dv}\frac{d\varphi'}{dp} - \frac{dT}{dp}\frac{d\varphi'}{dv} = \frac{dT}{dp}\frac{d}{dv}\int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}};$$

on satisfait à cette équation en posant

$$\varphi' = \int dp\, \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} + \varphi'';$$

φ'' satisfaisant à l'équation

$$\frac{dT}{dv}\frac{d\varphi''}{dp} - \frac{dT}{dp}\frac{d\varphi''}{dv} = \frac{dT}{dp}\frac{d}{dv}\int dp\, \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv}\int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}},$$

on aura également

$$\varphi'' = \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} + \varphi'''.$$

On voit ainsi que $\varphi(p, v)$ est donné par une série de termes, dont chacun s'obtient au moyen de celui qui le précède, en le différentiant par rapport à v, multipliant par le rapport $\frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}}$, et intégrant le résultat par rapport à p. Le premier terme de cette série étant $\int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}}$, on voit que la valeur de φ peut être obtenue aisément ; substituant cette valeur dans l'équation (1), on a pour expression de l'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dT}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dT}{dv} = C,$$

la formule

$$Q = F(T) - C \left| \begin{array}{l} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} \\ + \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} \\ + \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int dp \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}} \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{\frac{dT}{dv}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Cette équation donne la loi des caloriques spécifiques et de la chaleur dégagée par les variations de volume et de pression de tous les corps de la nature, lorsque l'on connaît la relation qui existe entre la température, le volume et la pression.

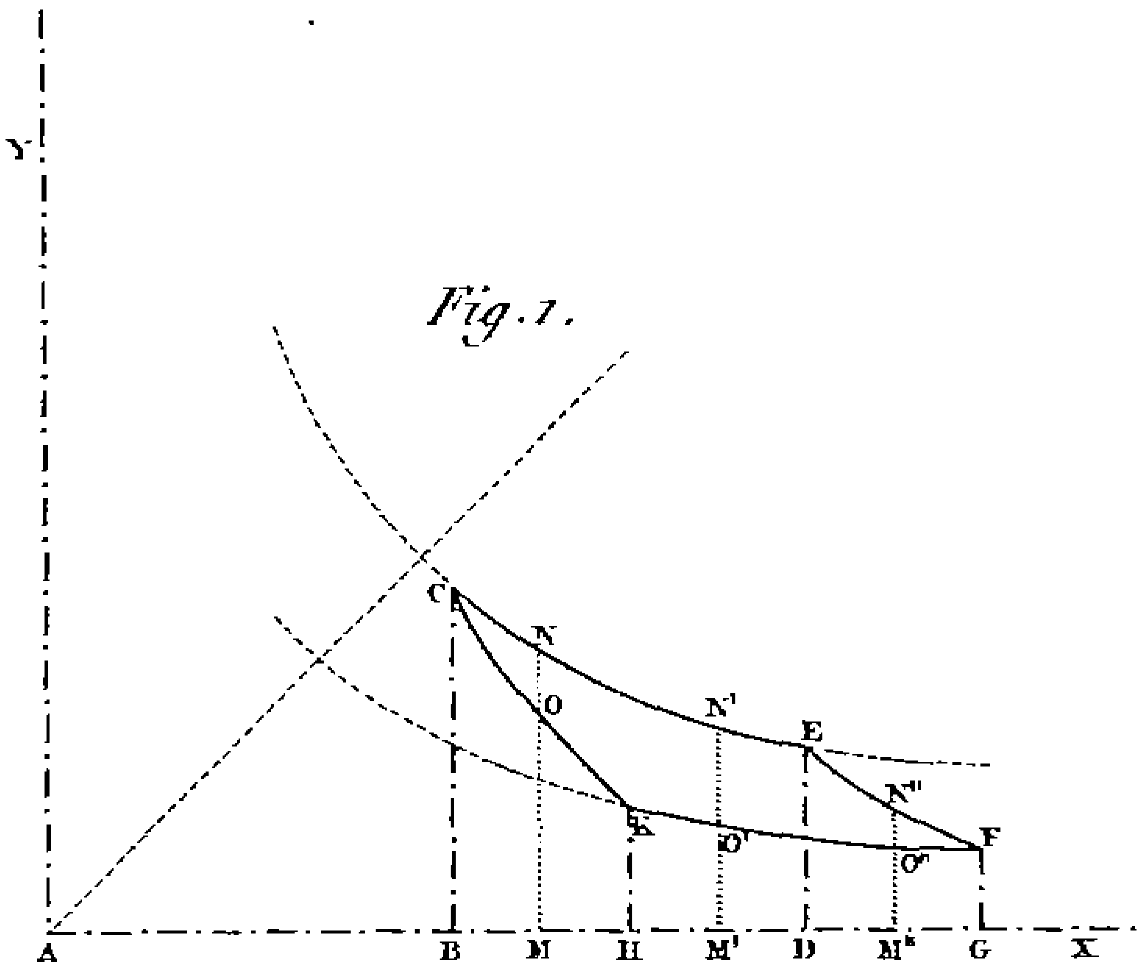

Fig. 1.

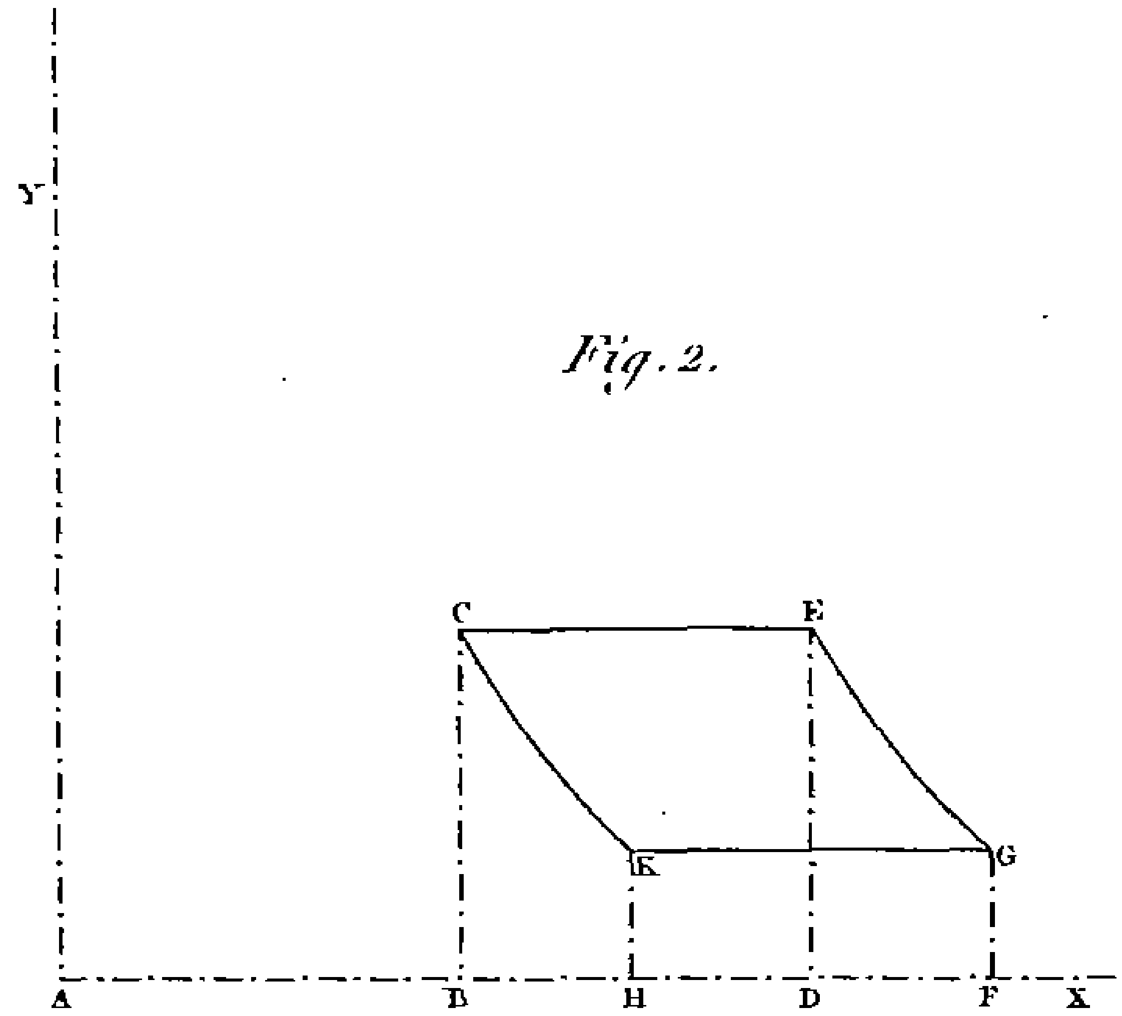

Fig. 2.

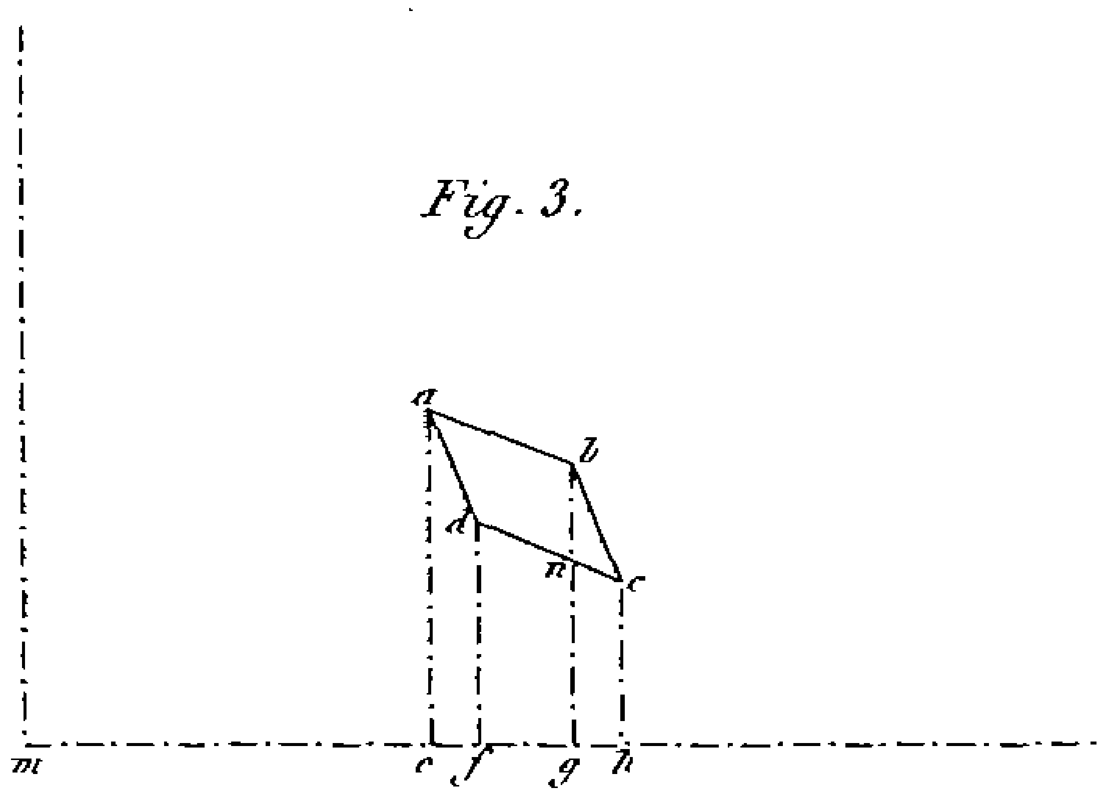

Fig. 3.

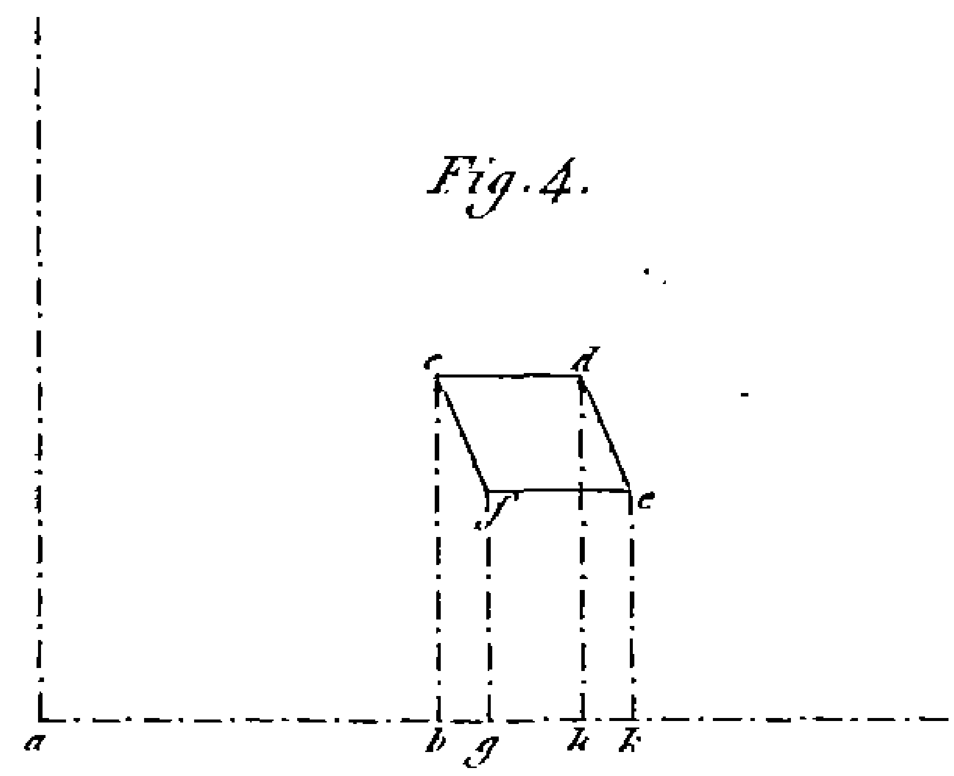

Fig. 4.

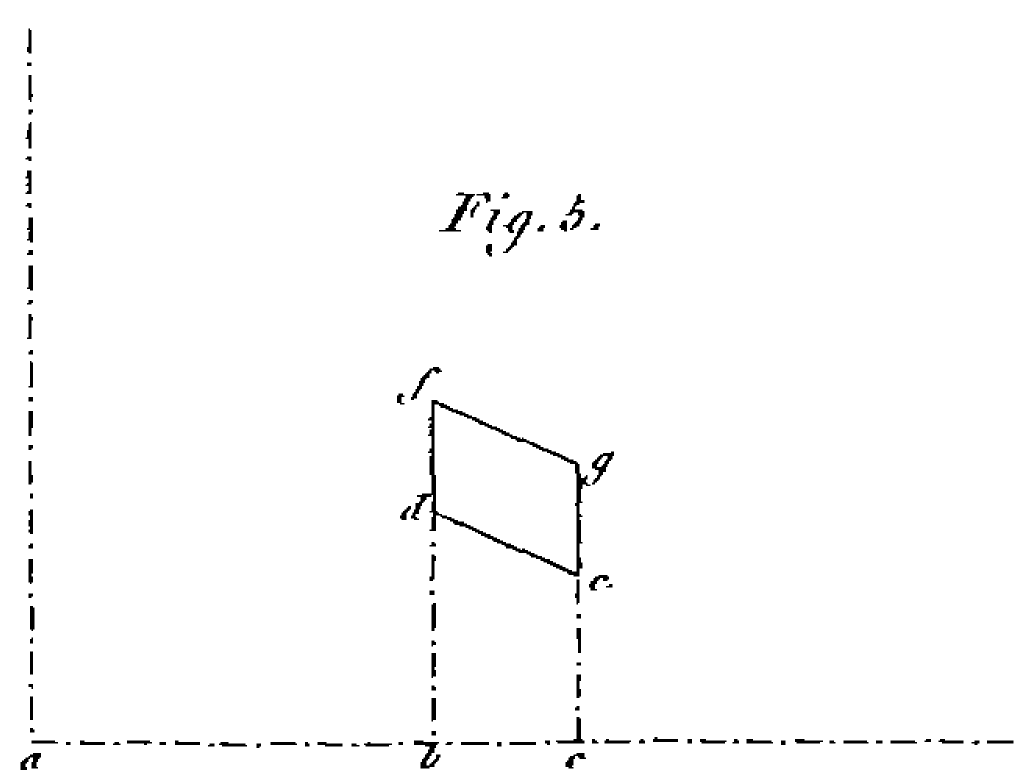

Fig. 5.