

**REPRESENTACIONES DEL SISTEMA CONCEPTUAL DEL CÁLCULO,
UN ASUNTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN PROGRAMAS DE
CIENCIAS EMPRESARIALES**

JENNIFER PAOLA ROJAS HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN.

BOGOTÁ, D.C.

2018

**REPRESENTACIONES DEL SISTEMA CONCEPTUAL DEL CÁLCULO,
UN ASUNTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN PROGRAMAS DE
CIENCIAS EMPRESARIALES.**

JENNIFER PAOLA ROJAS HERNÁNDEZ

Trabajo de grado para optar el título de Magister en Educación.

Asesor

Carlos Edilberto Ordoñez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ, D.C.,

2018

A ti no me cansaré de agradecerte, abuelita *Dolores Pérez Villalobos* (Q.E.P.D),
Por ser el pilar fundamental en todo lo que soy,
por cuidarme desde el cielo
en cada paso...

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de grado no hubiera sido una realidad sin la motivación y el impulso directo e indirecto de quienes que están en mi realidad, a las que agradezco profundamente por estar presentes en las distintas etapas de su elaboración, así como en el resto de mi vida.

Agradezco al profesor Carlos Edilberto Ordoñez, por manifestarme su interés en dirigir mi trabajo de grado, pese a mis lentos avances, por su confianza, colaboración y apoyo en mi proceso de realización de este, hizo posible que mi trabajo se desarrollara de manera satisfactoria, a nivel personal y académico.

A los docentes del programa Maestría en Educación de la Universidad Pedagógica Nacional y de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Corporación Universitaria Iberoamericana, quienes me comunicaron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que mi formación profesional se resumiera en satisfacciones académicas e inquietudes insatisfechas en continua indagación.

A mis amigos y compañeros laborales y académicos. Quienes trabajaron conmigo hombro a hombro durante poniendo lo mejor de su energía y empeño por el bien de nuestra formación profesional, a quienes compartieron su confianza, tiempo y los mejores momentos que viví durante esta etapa como estudiante de postgrado, dentro y fuera del campus.

A mi familia y seres más queridos, en especial a mi madrina Isabel Castillo Cantor por no perderse un sólo día de mi vida alegrándola con su particular modo de ver, de ser y hacer en su constante, difícil y poco reconocida labor de ser la mejor mamá y madrina que cualquiera pudiera siquiera imaginar...

Para finalizar a ese ser más importante, e infinitamente especial para mí, que ha partido al cielo prometido, este hecho, cambió mi vida, pero mucho más lo hizo el tiempo que compartí a tu lado, lo sé, quizás has desaparecido de mi realidad, pero no de mi corazón, eres tú abuelita preciosa: Dolores Pérez Villalobos, (Q.E.P.D).

En últimas palabras a todos aquellos familiares y amigos que no recordé al momento de escribir esto. Ustedes saben quiénes son.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL Escuela de Pedagogía	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB		Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012		Página 1 de 8

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de Maestría de Investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Representaciones del sistema conceptual del cálculo, un asunto del profesor de matemáticas en programas de ciencias empresariales.
Autora	Rojas Hernández, Jennifer Paola
Director	Ordoñez Pachón, Carlos Edilberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 154 p.
Palabras Claves	CONDICIÓN DE POSIBILIDAD; CURVA; MOVIMIENTO; CAMBIO; DERIVADA; RAZÓN DE CAMBIO; DIFERENCIALES; CRECIMIENTO MARGINAL; LA HISTORIA COMO REPRESENTACIÓN; LAS REPRESENTACIONES DE LOS DOCENTES; LOS DOCENTES COMO REPRESENTANTES.

2. Descripción
En este documento, presenta un recorrido narrativo por hechos que propiciaron la emergencia del Cálculo Diferencial, profundizando en la derivada y su articulación con el análisis marginal en el marco del siglo XVII y XVIII, haciendo referencia a algunas de las prácticas sociales y producciones discursivas cuya articulación dio lugar a síntesis en el sistema conceptual de la matemática y a transformaciones del estudio de procesos económicos. Se analiza cómo las nociones de inconmensurabilidad, curva, incógnita, variable, movimiento, cambio, infinito, lugar geométrico, que están inmersas en las prácticas sociales de la época, dan lugar a un lenguaje y a un tipo de representación historiográfica estas confluyen en el estudio de la derivada, propuesta como abordaje matemático de la razón de cambio, y cómo ella es instrumentalizada en el análisis marginal propio de la microeconomía. De un modo semejante, se hace referencia a la coyuntura histórica en la que emerge la física y el rol que en ella tuvo la construcción matemática; la cual se estructuro para dar sustento a la economía como ciencia, en particular se hace referencia a la matematización de los conceptos requerida para que ella fuera reconocida como conocimiento legítimo.

Esta postura navega, fundamentándose en los elementos que describe (Anacona, 2003). De acuerdo con esto se plantea que la versión de la derivada, tal como es incorporada por el marginalismo, se configura un instrumento para los nacientes estudios económicos.

La construcción de este panorama se lleva a cabo recogiendo elementos presentes en algunos libros de divulgación y algunos documentos originales relacionados con la articulación de sistemas conceptuales propios de las matemáticas y de la economía. El recorrido narrativo tiene la pretensión de verdad, como corresponde a toda construcción de una historiografía, de acuerdo con la propuesta de Roger Chartier. En ese sentido se considera que el reconocimiento que hacen las comunidades académicas de la ocurrencia de los hechos referenciados como parte del devenir de su disciplina, la identificación de la relación de estos conceptos con las prácticas de la coyuntura en que estos se elaboraron y la incorporación posterior de estos elementos en sistemas conceptuales más complejos dentro de las disciplinas consideradas es una condición que garantiza la validez del recorrido narrativo propuesto.

Hacer visible esta dinámica permite formular la pregunta por la forma como se asume la enseñanza de las matemáticas en campos donde ella se toma como herramienta de análisis, en este caso, la enseñanza del cálculo diferencial dentro de las ciencias económicas, en particular, en el análisis marginal.

Con ese propósito se llevan a cabo grupos focales, que describen las concepciones de los docentes de matemáticas, que intervienen en la formación de ciencias empresariales; la discusión se hace en términos del reconocimiento de aportes internos y externos al proceso de constitución de las disciplinas. En particular, se desarrolla la significación de la derivada, y el reconocimiento de las representaciones historiográficas que recurren o desconocen los docentes, en su labor.

Finalmente, se describen las conclusiones, donde se reconoce el carácter internalista que se le atribuye a las matemáticas en la formación de los conceptos económicos se recurre a la propuesta de Chartier(1996) Chartier(2012) con respecto al sentido de las representaciones, en la busquedad del saber verdadero.

La historia del cálculo interviene en la representación de la realidad, es decir la historia se ubica en la categoría de relato, que identifican parentescos que se unen con otros relatos, lo que implica reconocer que el relato no son los mismos hechos, sino una construcción que pretende realizar una narración consiente y por otra parte de carácter reflexivo, en tanto que esta como construcción se ve como una representación entre otras, es decir, es posible que haya otras; por tal motivo las argumentos que se señalan en el presente documento son tan solo una propuesta que tiene un valor de verdad derivado de su correspondencia con la perspectiva vigente en la comunidad que se reconoce a sí misma como integrada por representantes de este saber.

3.Fuentes

- Alvarez, L. (2016). Los experimentos mentales como recurso epistemológico en la física. *Revista digital innovación y ciencia*.
- Anaconda, M. (2003). La historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, 30-46.
- Apostol, T. (1982). *Calculus. Volúmenes 1*. Barcelona: Editorial Reverte.
- Arenzana, V. (1998). Curvas Mecánicas en la Geometría Griega. La cuadratriz de Dinostrato. *Revista Summa*, 31-36.
- Aroca, J. (2013). Sistemas Articulado. Teorema de Kempe. *Rev.Semin. Iberoam.Mat.* 4 fasc.II, 19-53.
- Barrangan, M. (2003). *Economía y Matemáticas:Productividad, trabajo y distribución de la renta: Un estudio crítico*. Madrid.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Bourdieu, P. (2003). *El oficio de científico*. Barcelona: Editorial Anagrama.
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas*. Editorial Alianza.
- Certau, d. (2002). *Historia y Psicoanálisis entre ciencia y ficción. Nueva Edición*. México: Universidad Iberoamericana.
- Chartier. (1996). *Escribir las prácticas*. Buenos Aires.
- Chartier, R. (2012). El sentido de la representación. *Temas*, 39-51.
- Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II*. siglo veintiuno editores: Mexico, D.F.
- Dalcín, M., & Olave, M. (2007). ECUACIONES DE PRIMER GRADO: SU HISTORIA. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20*, 1-6.
- Escartin, E. (10 de Agosto de 2018). EL MARGINALISMO : JEVONS . *Historia del pensamiento económico*, 342- 368. Obtenido de http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf: http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf
- Escartin, E. (4 de Junio de 2018). http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf. Obtenido de http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf: http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf
- García, L., Moreno, M., Badillo, E., & Azcarate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: consideraciones didácticas. *Economía*, 137-

171.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de historia debe ser apropiada por un profesor de matemáticas? *Revista EDUCyT*, 132-148.

Guicciardini, N. (2009). Método versus Cálculo en las críticas de Newton a Descartes y Leibniz. *Estud.filos ISSN 0121-3628* , 9-38.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Koyré, A. (2008). Los albores de la ciencia clásica. *ContactoS* 69, 43–48 .

Lial, M., & Hungerford , T. (2000). *Matemáticas para administración y economía*. México, D. F: Pearson Educación.

Malisamni, E. (1999). Los Obstaculos epistemologicos en el desarrollo, en el desarrollo del pensamiento álgebraico visión historica. *Revista IRICE*".

Mar Mior América. (13 de noviembre de 2017). <http://mar-maior.com>. Obtenido de <http://mar-maior.com/blog/el-mito-de-la-fisica-social/>: <http://mar-maior.com/blog/el-mito-de-la-fisica-social/>

Mora, E. (26 de 03 de 2018). <http://matematicas.uclm.es>. Obtenido de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf

Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*. Londres.

Pérez, J. (1980). El método marginalista antes de AA. *Cuadernos de Economía* 8.23, 473-498.

Prada, A., & Angulo, H. (15 de 04 de 2008). Un metodo geoemtrico para resolver ecuaciones cubicas. *Memorias XVIII encuentro de geometría y VI de aritmetica*, 215-222. Obtenido de funes.uniandes.edu.co: <http://funes.uniandes.edu.co/5584/1/PradaUnm%C3%A9todoGeometr%C3%ADa2008.PDF>

Revista suma. (2004). La historia de las Matemáticas como recurso didactico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*, 17-28.

Ribnikov, k. (1987). *Historia de las Matemáticas*. URSS: Editorial Mir.

Rodríguez, M. E. (2011). *La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico*. Recuperado el 24 de 9 de 2017, de http://sinewton.org/numeros/numeros/77/articulos_01.pdf

Ruiz, A., & Barrantes, H. (1997). *Elementos del Calculo diferencial. Historia y ejercicios*

resueltos. San Jose: Universidad de Costa Rica.

Salas, S., Hille, E., & Etgen, G. (2002). *Calculus en una y varias variables*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

Sarmiento, A., & Seijas, A. (2006). MATEMATICAS Y ECONOMIA EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS. *XIV Jornadas de ASEPUMA y II Encuentro Internacional* , 1-13.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *En A. Martínón (ed.): Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.*, 93-96.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática Crítica*. Bogotá: Una empresa docente.

Stewart, J. (2012). *Calculo de una Variable, transcendentales tempranas*. Mexico: CENGAGE Learning.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Lit, C., & Niss, M. (2010). History in mathematics education. The ICMI Study . *Revista EDUCyT*,, 136-148.

Varian, H. (2010). *Un enfoque actual, microeconomía intermedia*. Barcelona: Antoni Bosh editor.

Vega, G. (2014). *Michel Foucault : para una crítica de la economía política en términos de tecnologías de gobierno.(tesis de Maestría)*. Bernal: Universidad Nacional de Quilmes.

Zuluaga, J. C. (2009). *Escribir las prácticas. Foucault, De Certeau; Marin*. Buenos Aires.

4.Contenidos

El documento se organiza en tres partes, en la primera se exponen asuntos relacionados con la perspectiva de la investigación: la construcción del problema y la reflexión sobre asuntos teórico metodológicos; en la segunda se elabora la historiografía relacionada con la emergencia del cálculo y de la economía; en la tercera se explora la posición que asumen docentes de matemáticas que participan en el desarrollo de programas de formación de profesionales en el área de ciencias empresariales en una institución de educación superior.

En la primera parte, el capítulo 1 se concentra en la construcción del problema de investigación. El capítulo 2 describe el marco teórico metodológico que permite orientar el estudio del presente documento, en ambos capítulos se recogen elementos de (Chartier, 2005) (Certeau, 2002) (Chartier, 1996) (Anaconda, 2003).

La presentación de la historia del cálculo y de su incorporación en nociones propias del marginalismo en economía se hace en cuatro capítulos. En el primero de ellos, el

capítulo tres, se realiza una descripción de los elementos que fortalecen el Cálculo diferencial a la luz de la geometría, en este aparecen consideraciones sobre la noción de curva el uso de la regla y compás y los obstáculos presentados como consecuencia de la inconmensurabilidad. En el capítulo cuatro presenta una descripción y estudio de cada una de las etapas del álgebra como lenguaje, que luego fundamentan la geometría analítica. Los anteriores capítulos rinden cuenta de algunos elementos que propiciaron la historia del Cálculo. En el capítulo cinco se evidencia como el estudio del movimiento, fundamentan el nacimiento de la física y es sustentada a la luz de las matemáticas, lo cual le da un lugar como ciencia. Los asuntos relacionados con el cambio o el movimiento encuentran su campo de análisis en el Cálculo diferencial con respecto al estudio de la derivada, que históricamente es abordada desde una postura matemática, por Leibniz, con el uso de diferenciales y el estudio de la pendiente de la recta tangente a la curva, en contraste con Newton, quien con el uso de incrementos y fluxiones ubica la derivada (fluxión) como la velocidad instantánea de un móvil, en cualquier lugar de la trayectoria. En el capítulo seis, se describe cómo la física se convierte en un modelo de conocimiento científico, el cual es acogido por la economía. Es así como la economía se configura bajo supuestos y recurre a las matemáticas como instrumento para dar sustento a su teoría; sin embargo, se reconoce que el uso de las matemáticas en economía presenta algunas restricciones. Los anteriores capítulos toman como referencia los documentos de (Boyer, 1986), (Kline, 1972) (Ribnikov, 1987) (Collette, 2000), (Newton, 1736), (Varian, 2010) (Sarmiento & Seijas, 2006).

Los siguientes capítulos, que corresponden a la tercera parte, se orientan a explorar la posición que asumen docentes de matemáticas que participan en el desarrollo de programas de formación de profesionales en el área de ciencias empresariales ante aspectos de la constitución histórica de su disciplina y de la economía; sus percepciones sobre la pertinencia a asuntos de la historia del cálculo y su incorporación en los análisis económicos de carácter marginalista, como instrumento reflexivo para la enseñanza en estos programas de formación. En el capítulo siete, se describe el trabajo de campo desarrollado, usando como instrumento de recolección de la información la técnica de grupo focal. El capítulo ocho se mencionan los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento.

Finalmente se elaboran las conclusiones del estudio en relación con los valores asociados a una concepción occidental de matemáticas, que son compartidos por los docentes participantes en el estudio.

5. Metodología

En tanto la pregunta de la investigación gira alrededor del impacto de las representaciones que se tienen sobre la forma como se ha constituido un sistema conceptual, la reflexión metodológica considera en primera instancia la forma como se elabora un relato historiográfico; al respecto se recurre a la aproximación que hacen

algunos historiadores sobre las características que deben cumplir esos relatos; en particular, se acude a los desarrollos que inició Michel de Certeau y que fueron comentados y elaborados por Roger Chartier, en particular, se toma la referencia al carácter construido del relato, a la distancia entre este y las referencias en las que se basa (el carácter transitivo), al compromiso con dotar a ese relato de un valor de verdad y a la consideración de que él es uno entre otros relatos posibles (el carácter reflexivo). En ese sentido, la narración sobre el sistema conceptual considerado, la derivada, se presenta como una construcción que recurre a fuentes (la mayoría secundarias), y que elabora una representación a partir de ellas, pero que no coincide con ellas; en cuanto al valor de verdad, se considera que esta narración comparte las propiedades de otras narraciones historiográficas que se han elaborado en el campo de la matemática y que los enunciados sobre la forma como se integran construcciones previas en otras que las incluyen ha sido aceptada como válida por los matemáticos; respecto del carácter reflexivo de la narración, se puede señalar que la propuesta de articulación no pretende ser la única posible sino que es aceptable de acuerdo con la referencia que se hace a determinadas condiciones de posibilidad y a las oportunidades de transformar la enseñanza a que ella da lugar.

Al considerar estas imágenes como una construcción que se usa para referirse a algo que está ausente y que funda las percepciones y las valoraciones sobre entidades, que se tienen por «concretas» (Chartier, 2012, p. 49), se considera que el relato sobre el proceso por el cual el sistema conceptual del cálculo, en particular, la noción de derivada y los conceptos económicos propios del marginalismo relacionados con ella, permite aproximarse al conocimiento del campo compartido por las matemáticas y la economía como la construcción de una representación por parte de los participantes en la dinámica propia de ese campo.

En segundo lugar, al caracterizar a los docentes como representantes de los conocimientos derivados de ese campo, se está acudiendo al otro sentido que los historiadores considerados (de Certeau y Chartier) le dan a la noción de representación, esto es, a su carácter institucional- político.

Es a partir de este supuesto que se emprende la exploración de las representaciones sobre la derivada en economía que tienen los representantes de este campo de conocimiento y la forma como esto incide sobre sus prácticas de enseñanza en programas de formación de profesionales en ciencias empresariales. La exploración se lleva a cabo a través de la realización de grupos focales, que tienen, entre otras características, la de permitir la discusión entre los participantes y entre ellos y el coordinador del encuentro. El desarrollo de las sesiones de grupo se lleva a cabo de acuerdo con un protocolo que menciona formas abiertas de aproximarse a ciertos temas sin inducir las respuestas, con indicaciones para el coordinador sobre el asunto por explorar en mayor profundidad en cada caso.

Teniendo en cuenta la anterior presentación, el trabajo comprende dos grandes

elaboraciones: la exploración de las condiciones históricas de posibilidad que permitieron fundamentar la teoría del cálculo diferencial, y del marginalismo como versión económica de la derivada, y la exploración de las representaciones que tienen los docentes sobre la significación de estas nociones, con el objeto de establecer si ellas se integran en un sistema conceptual y si la historia de su construcción hace parte de esa significación. A esta construcción aportan las reflexiones de los historiadores a los que se recurrió para elaborar la noción de representación.

6. Conclusiones

El conocimiento consiste en una representación, los docentes en su calidad de representantes de un campo de conocimiento, requieren apropiarse de una propuesta historiográfica que apunte a reconocer cómo se integran en la formación del Cálculo aspectos socio-culturales asumidos por las comunidades disciplinares a las que pertenecen, y se reconozca de esta manera que los relatos que se elaboren fortalecen determinadas significaciones que impactan otros campos del saber.

Particularmente con respecto al estudio de la derivada, apropiarse de una revisión historiográfica de este concepto permite aproximarse a una comprensión de la teoría económica marginalista, que indica la pertinencia de analizar las implicaciones de la enseñanza de estos objetos desde perspectivas sistémicas y críticas, un asunto que concierne al profesor de matemáticas que interviene en la formación de profesionales de las ciencias empresariales.

Elaborado por	Rojas Hernández, Jennifer Paola
Revisado por	Ordóñez Pachón, Carlos Edilberto

Fecha de elaboración	16	10	2018
-----------------------------	----	----	------

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN	16
OBJETIVOS.....	24
PRIMERA PARTE: LA PERSPECTIVA DE LA INVESTIGACIÓN	26
CAPITULO 1.....	26
CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	26
CAPÍTULO 2.....	39
MARCO TEORICO-METODOLÓGICO	39
2.1 El conocimiento propio de la historia	39
2.2 La historia como representación.....	39
2.3 El carácter que distingue la representación histórica	41
2.4 La historia como representación de una serie de acontecimientos	44
2.5 La historia de las disciplinas como narración	46
2.5.1 La historia del cálculo y la derivada como representación	46
2.5.2 La historia del cálculo y la derivada como representación de una serie de acontecimientos	47
2.6 El sentido social de la noción de representación.....	53
2.7 Los docentes como representantes.....	54
SEGUNDA PARTE: LA HISTORIA DE LA EMERGENCIA DEL CÁLCULO Y SU RELACIÓN CON EL ANÁLISIS MARGINALISTA EN ECONOMÍA	57
CAPÍTULO 3.....	58
LA INCONMENSURABILIDAD, UN TEMA DE DISCUSIÓN EN GEOMETRÍA....	58
3.1 Las construcciones con regla y compás ideales.....	58
3.2 El Método de Exhaustión y a la inconmensurabilidad	62
CAPÍTULO 4.....	68
LOS APORTES DEL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA	68
4.1 Fases del álgebra	69
4.2 La Geometría Analítica	82
CAPITULO 5.....	91
LOS REQUERIMIENTOS DE LA CIENCIA EN FORMACIÓN COMO CONDICIÓN DE POSIBILIDAD PARA LA EMERGENCIA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.	91
5.1 Las transformaciones del mundo como condición de posibilidad	91
5.2 El movimiento como objeto de estudio de la ciencia	94

5.3 La emergencia del Cálculo diferencial	100
5.4 La aproximación al Cálculo desde la geometría analítica: Wallis y Leibniz	103
5.5 La física y la matemática como construcciones articuladas	107
CAPÍTULO 6.....	109
LA MATEMATIZACIÓN DE LA ECONOMÍA, EL ASUNTO DEL MARGINALISMO	
.....	109
6.1 Las riquezas	111
6.2 El marginalismo, la versión económica de la derivada.	113
TERCERA PARTE: REPRESENTACIONES Y RESIGNIFICACIONES DE LA	
DERIVADA EN ECONOMÍA.	130
CAPÍTULO 7.....	130
EL MÉTODO DEL TRABAJO DE CAMPO	130
7.1 La estrategia de recolección de información	130
7.2 Instrumento.....	131
7.3 Sujetos.....	133
7.4 Procedimiento.....	134
CAPITULO 8.....	135
RESULTADOS	135
8.1 Visión internalista y externalista de las matemáticas, en el contexto de la	
educación superior.....	135
8.2 El abordaje de la derivada desde un enfoque histórico y epistemológico .	143
8.3 La derivada, un objeto de enseñanza en las ciencias empresariales	150
CAPÍTULO 9.....	156
CONCLUSIONES	156
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	162
ANEXOS.....	165
ANEXO 1	165
GUIA PARA EL DESARROLLO DEL GRUPO FOCAL	165

INTRODUCCIÓN

Este desarrollo responde a tres experiencias de mi formación académica y profesional, las cuales se relacionan con la historia de las matemáticas y en particular con el nacimiento del Cálculo y su articulación con la microeconomía. La primera experiencia sucede cuando fui estudiante de los cursos de Cálculo Diferencial e Historia de las Matemáticas que hicieron parte de mi formación en pregrado en el programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el año 2008, ya que en estas clases se abordó el nacimiento del Cálculo y en especial el desarrollo de la derivada. En este escenario, se manifestó la existencia de significaciones fuera del contexto matemático, sobre las cuales el docente no profundizó en ese momento, su interés en la clase se ubicó en mostrar estas posibilidades de uso del objeto de la derivada. Esta apreciación fue interrogada por algunos de mis compañeros con respecto a las razones que impulsaban a establecer esta aseveración tan fuerte; la postura del profesor en ese momento advertía, sobre la formación del objeto matemático, que responde a una coyuntura histórica en la cual están en juego distintos abordajes. Que finalmente resultan integrados en una sola noción, en este caso la derivada.

Esta escena jamás se ha borrado de mi mente convirtiéndose a partir de este momento en un asunto en continua indagación, que fue ampliada en el año 2011, en el desarrollo de mi trabajo de grado, titulado, notaciones originales versus notaciones escolares: el caso de la derivada; dirigido por el Dr. Edgar Guacaneme, docente del departamento de matemáticas, de esta Universidad.

En su desarrollo y estudio percibí la historia de las matemáticas, y en particular la historia del Cálculo, como un campo discursivo que ofrece un amplio escenario de estudio y análisis. Tal como describe a continuación,

De hecho, Kuhn introduce la idea, aunque sin elaborarla como tal, de la autonomía del universo científico, llega así a afirmar que ese universo escapa pura y simplemente a la necesidad social, y, por lo tanto, a la ciencia social. No ve que en realidad (es lo que permite entender la noción de campo), uno de las propiedades paradójicas de los campos muy autónomos, como la ciencia o la poesía, es que tienden a tener como único vínculo con el mundo social las condiciones sociales que aseguran su autonomía respecto o ese mundo, es decir, las condiciones muy privilegiadas de que hay que disponer para producir o apreciar una matemática o una poesía muy avanzada o, más exactamente, las condiciones históricas que han tenido que confluir para que aparezca una condición social tal que permita que las personas que gozan de ella puedan hacer cosas semejantes. (Bourdieu, 2001, pág. 35)

Se ubica la historia de las matemáticas como un recurso potencial que puede alimentar la estructura teórica, que soporta a un curso o a una clase; asunto que desafortunadamente no me ocupé ya que mi trabajo de grado en ese momento se orientó al estudio de la notación de la derivada desde una mirada semántica y sintáctica, contrastadas con las notaciones que aparecen en las obras originales y los libros de texto.

En mi ejercicio profesional detecté que algunas discusiones de la clase de Cálculo Diferencial son susceptibles de ser ampliadas si se consideran las condiciones históricas del nacimiento del cálculo, las matemáticas se verían como una construcción social y no como una aplicación algoritmos que orientan el desarrollo de un algoritmo matemático inerte y lejano a la realidad del estudiante. Este asunto continuó incentivando mi interés, aunque en ese momento no lograba reconocer los principios, los fundamentos y los métodos propios de la época que propiciaron la emergencia del Cálculo.

La segunda experiencia que motivó mi interés por este tema fue mi formación posgradual, en la especialización en Educación Matemática, en el año 2013, en esta misma alma mater; en ese momento, el objeto de estudio fue la curva en la historia de las matemáticas, asunto que propició discusiones en torno a la educación matemática a la luz de la geometría, el álgebra y la tecnología; sin lugar a duda, esto alimentó y fortaleció mi ejercicio y formación profesional. No obstante, mis expectativas en mi formación profesional continuaron en ese momento orientadas a entender las tendencias que propiciaron el nacimiento del Cálculo, es decir, conocer el Cálculo desde las configuraciones que han dado lugar a sus distintas formas de interpretación, reconociendo que estas condicionan las formas de concebir el mundo y aprehenderlo en una época determinada. Postura presente en mis reflexiones, pero que en ese momento de mi formación aún no era claro.

La última experiencia concierne a mi ejercicio profesional en una institución de educación superior; en su facultad de Ciencias Empresariales, donde orienté los cursos de Cálculo en el 2015. Por el contacto con los objetos de análisis de la economía

relacionados con la matemática, me interesé por el principio de marginalidad, ya que corresponde a la versión económica de la definición matemática de derivada; que es usada frecuentemente para realizar análisis y pronósticos en las ciencias empresariales; en efecto, esta práctica incrementó mis intereses investigativos y curiosidad con respecto a las condiciones que potenciaron el nacimiento del cálculo.

Al estar en contacto con el currículo de estas carreras me encontré con los planes de curso, encontré que estos documentos se caracterizan por la exposición cronológica de las temáticas que se abordan en los cursos de matemáticas, exigiendo involucrar conocimientos propios de las ciencias empresariales e insistiendo en los ejemplos que se deben incluir durante la enseñanza. Esta consideración se convirtió en un reto para mí, ya que mi formación profesional se aleja un poco de los asuntos de propios de la reflexión y aplicación de las ciencias empresariales; tal es el caso del marginalismo, elasticidad, oferta y demanda fueron objetos fáciles de describir matemáticamente, pero me quedaba corta de argumentos al analizarlos desde la perspectiva de las ciencias empresariales y su uso en economía.

Encontré que esta situación obedece a la manera como se plantean los cursos de Cálculo: en ellos no se da un lugar específico a la justificación del papel de la matemática en el desarrollo de la economía como ciencia, sino que simplemente se mencionan contenidos por abordar, sin requerir un análisis de la matemática como disciplina que hace parte del campo de la economía como disciplina científica, y menos a la explicación de la significación de nociones específicas, como la derivada, que remita a las razones de cambio, con lo cual se daría otro estatus a la formación matemática, ya no sería una adición, sino un componente estructural de la formación.

Estas experiencias e inquietudes fortalecieron mi interés por el problema de investigación de esta maestría. Los planteamientos de Michel de Certeau, en su obra sobre la historiografía, tal como son expuestos por Chartier (Escribir las prácticas, 1996), sustentaron estas reflexiones, en tanto desde esta perspectiva se puede explorar la pregunta sobre la forma como los docentes, en tanto representantes de un campo de conocimiento se aproximan a las propiedades de los conceptos desde una comprensión histórica y establecer si de alguna forma la representación que tienen de los conceptos incorpora la búsqueda constante de alteridades y voces que constituyen la historia como efecto de la crítica de los modelos forjados en esos campos y otros relacionados, si consideran que estos procesos permiten entender su configuración, las competencias que están en juego al abordarlos y las posibilidades que ofrecen.

En este escenario, se emprendió el trabajo de entender el nacimiento del cálculo como una emergencia discursiva, descrita en documentos que versan sobre la historia de las matemáticas de autores como, Boyer, Kline, Collete, Ruiz y otros autores que potencializaron el análisis de la formación de los conceptos que fortalecen el Cálculo como discurso, así mismo, algunos elementos de las obras originales de Newton que de manera paulatina permitieron aclarar aquellas inquietudes que acompañaron mi ejercicio profesional desde mi formación en el pregrado.

En efecto, en primera instancia realicé una exploración de las particularidades que permiten la emergencia del Cálculo, las cuales se estructuraron a lo largo del documento por capítulos, cuya intervención rescata las prácticas que capturan elementos que fortalecen al Cálculo como discurso, a la luz la geometría, álgebra, la

ciencia moderna, tal como se perfila en la física, y el marginalismo como otro desarrollo de este nuevo tipo de conocimiento.

Reconocer esta elaboración permite ver a las matemáticas como una construcción social que se ha estructurado desde las actividades cotidianas y a la luz de la operación historiográfica que los orienta, concebida como un modelo de historia que rescata la correspondencia entablada entre el discurso del saber con el mundo social donde se inscribe; lo cual legitima las actividades que se desarrollan en estos contextos y el saber matemático que se reconoce en ese momento histórico, donde se permiten reconocer rupturas en la formación de los objetos y discontinuidades.

Al cavilar sobre estas experiencias que hacen parte de la formación profesional y el ejercicio del licenciado en matemáticas o todo aquel que se dedique a la educación matemática, sin importar el nivel educativo, puede encontrar en la historia de las matemáticas un recurso que fortalecerá su práctica profesional, ya que las actividades sociales revelan, amplían y posibilitan reflexiones concretas sobre el objeto estudiado, impactando otros campos del saber ajenos a las matemáticas.

En este sentido, es fundamental evidenciar cómo el abordaje de la historia de las matemáticas y en especial la historia del Cálculo, tal como es elaborada en diversos documentos de divulgación, entre otros, los libros de texto, consiste simplemente en establecer el orden cronológico en que algunas figuras reconocidas propusieron algún abordaje, mientras se sugiere un proceso continuo de perfeccionamiento, sin referirse a las complejas relaciones entre la dinámica interna del campo de conocimiento y su

contexto sociocultural, y sin considerar las dificultades u obstáculos conceptuales, que más tarde enriquecieron la formación de los objetos de conocimiento.

La anterior exploración se puede apoyar en el trabajo de Anacona (2003) sobre las condiciones en que se aborda la historia de las matemáticas, ella identifica tendencias que se pueden caracterizar como internalistas o externalistas, respecto de la formación del conocimiento científico; en la primera clase incluye la forma como se generan las transformaciones de las matemáticas por la dinámica interna de sus propias áreas sin tener en cuenta el contexto y la segunda clase contempla las consideraciones y explicaciones sobre los procesos de organización del conocimiento que incorporan condiciones del ámbito social. En la postura internalista “se trata de hacer una historia de los conceptos, atendiendo básicamente a la estructura lógica de producción, mientras que en la postura externalista se reconoce la influencia del ámbito social y cultural en los desarrollos matemáticos y por tanto en la consolidación de su estructura lógica.” (Anacona, 2003, p. 32)

Atendiendo a las anteriores consideraciones, al emprender la caracterización de una disciplina desde su proceso de constitución histórica, resulta conveniente no adoptar exclusivamente una de las dos posturas, ya que la interpretación del proceso de configuración del conocimiento se vería incompleta, naturalmente, es necesario llegar a un punto en común donde se reconcilien las dos posturas, lo que permite reconocer el enriquecimiento de algún conocimiento matemático por demandas del contexto sociocultural y la solución de asuntos aplicados a partir de los desarrollos del sistema conceptual de la disciplina.

En ese sentido, rescatar elementos de la obra de Chartier permite comprender que los discursos están determinados por alteridades y problematizaciones inscritas en procesos históricos; en este marco, se aprecia que durante la operación historiográfica los conceptos se ajustan y reajustan según los hechos de la época donde se encuentren, situación que puede ser aprovechada por los docentes con el propósito de involucrar a sus estudiantes de una forma concreta a situaciones que sustentan y formalicen los conceptos, y se aproximen a los conceptos de un modo racional.

El documento se organiza en tres partes, en la primera se exponen asuntos relacionados con la perspectiva de la investigación: la construcción del problema y la reflexión sobre asuntos teórico metodológicos; en la segunda se elabora la historiografía relacionada con la emergencia del cálculo y de la economía; en la tercera se explora la posición que asumen docentes de matemáticas y economistas que participan en el desarrollo de programas de formación de profesionales en el área de ciencias empresariales, en relación con la derivada, en una institución de educación superior.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Analizar las representaciones que tienen los docentes de los sistemas conceptuales matemáticos que se integran en las nociones de teoría económica y sus implicaciones sobre la enseñanza de estos objetos.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Construir una representación historiográfica de la emergencia del cálculo y, en particular, de la derivada, y su inclusión en la teoría económica.
- Establecer el concepto de derivada que manejan los docentes, en particular, si su representación incorpora aspectos de la historia de esta noción.
- Establecer la representación que tienen los docentes del lugar de la noción de derivada en la teoría económica marginalista y la forma como la incorporan en sus prácticas de enseñanza de matemáticas a los estudiantes de ciencias económicas.

- Discutir el alcance e implicaciones de las representaciones de los docentes de la relación entre el cálculo y la economía como procesos de construcción de conocimiento.
- Discutir las tendencias posibles de enseñanza de la matemática en relación con la economía desde las perspectivas internalista, externalista o integrada.

PRIMERA PARTE: LA PERSPECTIVA DE LA INVESTIGACIÓN

CAPITULO 1

CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En relación con las actividades que hoy se realizan en las clases de matemáticas, se ha detectado en múltiples oportunidades que ellas se centran en la mera aplicación de algoritmos y la “solución de problemas”, que solo recurren a procesos de ejercitación, alejadas de la realidad de los estudiantes, las cuales a pesar de su importancia se ha restringido en la mayoría de oportunidades al seguimiento de instrucciones, tal como si fuese la preparación de una receta; en efecto, este tipo de comportamientos genera prejuicios sobre su aprendizaje provocando rechazo y desinterés por parte de los estudiantes.

Asi mismo, se reconoce que una considerable cantidad de profesionales de la educación matemática reduce su labor a indicar y verificar la aplicación de algoritmos e instrucciones los cuales deben seguir de manera exacta sus alumnos. Una disciplina como la matemática tiene que ver con la generación de estrategias de análisis de las demandas que surgen en una situación, siendo estas demandas lo que dan lugar a múltiples abordajes, esto es, a la construcción de problemas. Situación que está en sintonía con la derivada como construcción que obedece a múltiples requerimientos.

En estas condiciones, la reducción del aprendizaje al dominio de algoritmos, precisa una actividad mecánica, sin reconocer que ella es totalmente creativa, por cuanto su papel consiste en facilitar análisis pertinentes, y alejándose del proceso de su construcción social,; entonces, ¿dónde queda la reflexión y la organización racional

y sistemática del conocimiento? Es por esto que al no cumplir su cometido, las matemáticas escolares se han alejado de las matemáticas como construcción adecuada al logro de finalidades.

Este sofisma es efecto de la reforma a la educación matemática denominada “matemática moderna” que se gestó hacia los años 70, cuando se asumió como premisa que la consecución de algoritmos es “hacer matemáticas”, y que esta era la respuesta adecuada al “atraso” de los programas de matemáticas de la época, que no permitía un desarrollo adecuado y oportuno de los procesos científicos y de las matemáticas en sí mismas; en esas condiciones, se advertía que la diámica de las ciencias requería modificar el enfoque de la enseñanza de las matemáticas, el cual se interpretó en términos de los contenidos abordados.

Este movimiento no tuvo en cuenta los requerimientos de la pedagogía, ni las necesidades de formación de los maestros en sintonía con esta nueva propuesta, deslegitimando así la labor educativa; de hecho, al aumentar la mortalidad académica, “las nuevas matemáticas” fueron rechazadas por los padres y estudiantes. Se observó, entonces, que la estructura matemática ofrecida no relacionaba a las matemáticas con el mundo de los aprendices, lo que llevó a determinar que son distintas las reflexiones que se deben propiciar durante la enseñanza y el aprendizaje. En este escenario se promovió la identidad de la educación matemática como un campo especializado en la formación de profesionales en el área, donde se procuran reflexiones que restucturan las concepciones de las matemáticas escolares, mediante la apropiación de elementos como los procesos históricos y epistemológico de las matemáticas, reconocidas ellas como un conocimiento que proviene de una construcción social.

Al respecto, Sierra (2000) y Tzanakis, *et al.* (2010), destacan el creciente interés durante los últimos años por incluir la historia de las matemáticas en su enseñanza, es decir aparece el movimiento contrareforma, precisamente como una medida de contingencia para enfrentar las limitaciones procedentes de abordajes con fuerte énfasis en el desarrollo procedimental y algorítmico, que dejaron de lado la posibilidad de establecer relaciones con situaciones en las que los conceptos se aplican a la elaboración de problemas, debido a la mala comprensión de los mismos.

Desde una perspectiva histórica es posible establecer que las matemáticas son una construcción social de la humanidad durante una dinámica de confrontación con demandas específicas propias de situaciones concretas, que llegan a articularse con enunciados de carácter formal –abstracto– sobre las propiedades estructurales de la acción (lo que corresponde a las operaciones), dando lugar a la elaboración de los objetos de estudio de otras disciplinas y a la articulación de sus propios sistemas conceptuales.

En este sentido, una mirada panorámica permite ver que las matemáticas constituyen un lenguaje que describe las consideraciones sobre lo que está en juego en una situación, organiza y desarrolla el pensamiento y, como resultado de la intuición, organiza procedimientos sistemáticos de solución, por lo que ellas se han posicionado como una herramienta que sustenta el análisis en otras ramas del conocimiento, a la vez que dan lugar a la argumentación de la lógica de este proceder como desarrollo del propio campo disciplinar.

Este hecho favorece una mejor comprensión del estatus de las herramientas que las matemáticas aportan al análisis de los asuntos propios de las profesiones modernas; es así como las expectativas de aprendizaje de estudiantes en formación profesional pueden satisfacerse en términos del aporte de herramientas racionales al análisis de las relaciones objeto de estudio, de tal modo que ellas contribuyan a la articulación de redes conceptuales y se superen las habituales tendencias agregacionistas propias de los currículos que consideran que ellas son un componente necesario pero es algo externo, con el que corresponde proceder de un modo simplemente aditivo.

Para asumir esta perspectiva, es oportuno partir de reconocer que en distintos ámbitos, la matemática –como proceso de producción de conocimiento– no participa de la misma manera cuando se toma como herramienta que cuando se aborda como articulación del propio sistema teórico; se plantea que los compromisos de elaboración no son iguales cuando se trata de construir conocimiento propio de la disciplina que cuando se trata de recurrir a los recursos de la disciplina para enfrentar problemas de otras áreas de conocimiento. Sin embargo, a pesar de las diferencias, estas situaciones en las que está involucrada la matemática no son independientes, lo que no resulta extraño si se tiene en cuenta que una disciplina es producto de la actividad humana orientada a enfrentar situaciones concretas o a la reflexión sobre ellas, que se ha llevado a cabo en coyunturas históricas determinadas.

Por supuesto, tal como lo señala Guacaneme (2010), se requiere precisar el modo como se recurre a la historia de las disciplinas y la misma aproximación a este conocimiento; él plantea que este tipo de iniciativa requiere reconocer que hay diversas

aproximaciones y usos atribuidos a la historia de las matemáticas, que pueden resultar adecuadas al propósito de cualificar la enseñanza.

Al respecto resulta de interés la tipología que reconoce intervenciones internalistas y externalistas. En primer lugar, Anacona (2003) reconoce intervenciones internalistas como propuestas en las que el uso de la historia de las matemáticas da lugar a la reflexión sobre la disciplina misma y la elaboración lógica de sus conceptos, mientras en las externalistas la reflexión sobre los conceptos científicos tiene en cuenta el ámbito social. Desde luego, estos dos puntos de acción no excluyen un posible tipo de síntesis en la que fuera posible incorporar las dos acciones, que sería una manera posible en la que deben ser concebidos los cursos de matemáticas en la formación propia de la educación superior.

Según Anacona (2003), lo recomendable es reconciliar estas dos posturas filosóficas y metodológicas: “Es posible pensar en un trabajo en historia de las matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural, donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas, así como políticas educativas, entre otras. Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural.”(p. 32)

Esta propuesta se puede extrapolar al caso en el que se considera la pertinencia de la historia de otra disciplina para la formación de profesionales en ella. En ese

sentido, se plantea que para la formación de estudiantes, como profesionales o como investigadores en un campo disciplinar, es pertinente recurrir a una concepción de historia de las disciplinas que considere las relaciones con condiciones externas a ellas, como los desarrollos propios de otros campos de conocimiento, que dieron lugar a la formulación de problematizaciones centrales –las que consideran las relaciones entre categorías– y a la organización de las estrategias que sustentan la racionalidad de sus prácticas.

Desde este punto de vista, es posible detectar cómo en la organización de los sistemas conceptuales y metodológicos de las profesiones se identifican elementos que manifiestan su realidad histórica, más allá de la propia producción de verdad de estos sistemas, y que el dominio creciente de asuntos complejos es, precisamente, el efecto de la articulación de técnicas que han surgido del tratamiento de situaciones particulares.

En ese sentido, se hace referencia, entonces, a los procesos de constitución de objetos de conocimiento, a los discursos y prácticas sociales relacionados que se articulan en ella y se hace alusión, a que, a partir de una elaboración inicial, la producción de los discursos específicos se lleva a cabo de acuerdo con pautas propias de la coyuntura que establecen los lugares y los modos de enunciación (esto es, la forma como se argumenta o se narra, y el modo como se articulan enunciados de diferente naturaleza).

Ya que la matemática ha tenido un papel central en la configuración de la economía, como disciplina y como región se ha escogido este campo para estudiar

aspectos relacionados con la enseñanza de la matemática a estudiantes que se forman como futuros profesionales de ciencias empresariales, de modo que sea posible ver la relación entre las dos facetas del conocimiento considerado.

En este contexto, se reconoce cómo, desde una dimensión social y desde las mismas disciplinas, las matemáticas y la economía se permean, lo cual puede facilitar su aprendizaje para formentar una formación discursiva de los profesionales de las ciencias empresariales.

En principio, se puede decir que, como disciplina científica, la economía emerge a partir de la matematización de sus conceptos, tal como ocurrió con otras disciplinas que adoptaron como modelo de ciencia el proceder de la física. Por otra parte, los profesionales de esta región, con el propósito de llevar a cabo el análisis de las condiciones en que se desenvuelven las empresas y la modelación del comportamiento de los mercados, recurren a nociones cuya significación remite a nociones y operaciones de la matemática.

En términos generales, el presente trabajo se inscribe en la temática del carácter del Cálculo como área de la disciplina matemática, que se instala en el análisis de situaciones concretas, en tanto la formalización de operaciones que le es propia permite dar cuenta de los procesos involucrados en la problemática de estas situaciones.

En relación con la elaboración de la derivada como concepto matemático se destacan dos hechos que pueden tener implicaciones sobre su incorporación en la economía. En primer lugar, que ella respondió a la exploración de expresiones formales

y procedimientos de cálculo de las razones de cambio tanto en el tratamiento de los infinitesimales en la solución de problemas relacionados con la manera de calcular las rectas tangentes a una curva en un punto (aproximación geométrica), como en la formulación de leyes de la mecánica sobre el cambio en variables continuas relacionadas mediante expresiones que involucran el tiempo, la distancia y la velocidad del movimiento de una partícula, reconocido este como velocidad y su razón de cambio como la aceleración (aproximación desde la física).

En segundo lugar, que el reconocimiento del método de formulación matemática de los enunciados por verificar en observaciones controladas de la física moderna, como ideal de aproximación a la producción de conocimiento objetivo, dio lugar a la apropiación de esta perspectiva de trabajo por las comunidades que pretendieran que su actividad fuera incluida en el ámbito de la ciencia porque, tal como lo señala Barrangán (2003), desde los comienzos de la formalización del conocimiento económico debió parecer muy sugerente la consideración de la economía como ciencia de la sociedad (física social), por similitud con la física como ciencia de la naturaleza por antonomasia.

En particular, la noción de razón de cambio, asociada al concepto de derivada, se ubicó en el núcleo de la perspectiva marginalista en economía; de este modo, la derivada, en tanto concepto y procedimiento, hace parte de la definición de nociones como las de elasticidad precio de la demanda, oferta, costo marginal, relación marginal de sustitución, producto marginal, etc.

El análisis de esta relación de articulación entre la elaboración de un concepto de la matemática, la derivada, y su incorporación en la microeconomía (un área de la economía en la que se asume, entre otros, un enfoque marginalista), permite interrogar críticamente las prácticas de enseñanza vigentes en los escenarios de formación de profesionales de ciencias empresariales.

Por supuesto, una perspectiva educativa incorpora reflexiones sobre los diseños curriculares y sobre el rol que cumplen los docentes en los procesos de formación.

Como se ha dicho, en este medio lo común es encontrar el predominio completo en los diseños curriculares de formación de economistas de perspectivas que entienden la matemática como una herramienta proveniente de una disciplina ajena, y que se asocia con el diseño de cursos de matemáticas básicas, estadística descriptiva, álgebra lineal, cálculo diferencial y cálculo Integral, entre otros propios del área de matemáticas, donde se insiste en el uso de los algoritmos, como procedimientos a aplicar en la ejercitación de solución de problemas, sin que sea posible la reflexión desde la matemática y la economía.

De acuerdo con Anacona (2003), en su enseñanza las matemáticas han sido abordadas desde una perspectiva internalista, pero no han sido trabajadas desde una visión externalista, es decir, que permita apreciar el modo como ellas son el resultado de una dinámica histórica; también se puede decir que su lugar en el campo de otras disciplinas se ha visto desde una perspectiva externalista, sin considerar que ellas hacen parte del campo de esas disciplinas.

Es así como los diseños curriculares de una disciplina como la economía corresponden a la perspectiva externalista, donde las matemáticas se incorporan como herramientas provenientes del afuera, sin reconocer que múltiples definiciones de categorías centrales tienen una fundamentación histórica en desarrollos de esta disciplina y, consecuentemente, dejan de hacer esfuerzos para comprender la relación entre la historia de las dos construcciones.

A esto contribuyen los docentes de matemáticas, en tanto se reconoce que un grupo significativo de ellos no concibe la historia de la disciplina como un recurso para enriquecer la enseñanza, tal como se menciona en la revista Summa (2004):

“A pesar de que gran parte del profesorado asume de forma teórica estos planteamientos, en la práctica docente y como consecuencia de la formación universitaria recibida por los profesores, la matemática llega a los alumnos como un producto dogmático, cerrado y acabado.” (Revista suma, 2004,p.18)

Es por esto que la formación de los sujetos en los conceptos propios de la disciplina requiere un posible tipo de síntesis en la que sea posible asumir las dos perspectivas, la internalista y la externalista, o mejor, una perspectiva que no asuma la elaboración propia de las matemáticas como dinámica externa a la del campo disciplinar en el que es incorporada. Esa síntesis es posible si se entiende que la matemática es tanto un desarrollo teórico como un desarrollo técnico, en el caso considerado, mostrar las matemáticas desde una perspectiva de construcción social que hace parte del proceso de construcción social de la economía.

En este sentido, autores como Rodríguez (2011) hacen un llamado para propiciar un proceso educativo vivo e interdisciplinar, como lo advierte en su documento titulado *La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico*; donde se plantea que, con el propósito de llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas, es necesario identificar y comprender su lugar en la ciencia moderna, dado que se consideran necesarias para dar cuenta de cualquier fenómeno; de hecho, Descartes, Galileo y Newton, reconocen las matemáticas como el lenguaje del universo, y consideran que, por tanto, ellas forman parte de la historia de las ciencias.

En el contexto de la formación considerada, por cuanto las matemáticas tienen un lugar central en la configuración de la economía como condición de posibilidad de la disciplina, como elemento que permite entender la significación de los procesos de cambio en los rendimientos de los recursos o de las relaciones de oferta y demanda que se presentan en los mercados, es posible aprovechar estos aspectos de la historia de la disciplina en la comprensión de la dinámica que permitió definir objetos de estudio y establecer estrategias para abordarlos.

En esas condiciones será posible tener en cuenta lo que Anacona propone para la enseñanza de la matemática: “Es posible pensar en un trabajo en historia de las matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural, donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas y teológicas, así como políticas educativas, entre otras.

Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural.” (Anacona, 2003,p. 32)

En el caso de este trabajo, el tipo de conocimiento que se va a proponer como promotor del cambio de las prácticas de enseñanza de la microeconomía es el que explora la dinámica histórica de la construcción de su objeto de estudio, en tanto proceso afectado por los desarrollos de la matemática, durante el cual se articulan estrategias de orden teórico y práctico en las que las matemáticas juegan un rol central, en tanto se incorporan en su caracterización como disciplina científica y le garantizan autonomía como campo de producción y aplicación de conocimiento.

Por las razones antes expuestas, en el presente trabajo se busca establecer el conocimiento y la posición que tienen los docentes –que tienen a su cargo la enseñanza de la disciplina a estudiantes que requieren construir conocimiento sobre la economía– ante la matemática como respuesta a problemas prácticos, como técnica, tal como se infiere de la consideración de marcas visibles en su construcción histórica y el compromiso de comprensión de las teorías económicas que ella ha contribuido a elaborar cuando sus sistemas conceptuales se han incorporado a la historia de ese campo de conocimiento; es decir, se explora cuál es la posición de estos docentes ante la matemática como construcción humana histórica, en tanto disciplina y cuando responde a requerimientos de otras disciplinas donde es tomada desde una perspectiva aplicada.

La pregunta de investigación es: ¿Cuáles son las representaciones del sistema conceptual del cálculo, que asume el profesor en la enseñanza de las matemáticas en programas de ciencias empresariales?

En consecuencia, en el trabajo de grado que se presenta en este documento, se narran las problematizaciones que están presentes en la historia del cálculo, tanto de orden teórico como provenientes de las prácticas y de las demandas sociales, y la forma como las nociones matemáticas elaboradas aportaron al proceso de constitución del campo disciplinar de la economía como ciencia (se muestra que la economía requirió para su consolidación la incorporación de la formalización matemática). Desde esa perspectiva de construcción histórica se cuestiona la forma como se aborda la enseñanza de conceptos propios de los análisis marginalistas que son de interés de los estudiantes de ciencias empresariales.

En particular, se explora el modo como los docentes de matemáticas recurren a elementos de la historia de las disciplinas (o los desconocen), que permiten entender la configuración y las distintas relaciones entre las ciencias que son viables en una época, cuando se reflexiona sobre las producciones discursivas encontradas, verbigracia, en el estudio de nociones, problemas matemáticos, teorías y obras matemáticas para apoyar los procesos de construcción de conocimiento de estudiantes de estas carreras.

CAPÍTULO 2

MARCO TEORICO-METODOLÓGICO

2.1 El conocimiento propio de la historia

El objeto de este trabajo se define en términos de la representación que se tiene de una noción matemática, si esta incluye una perspectiva histórica sobre su construcción, esto es, si los sujetos asumen que ella ha sido elaborada a través de la historia, lo que incluye su incorporación en campos de saber no propiamente matemáticos.

Por lo anterior, es pertinente ocuparse, en primera instancia, de comprender la clase de saber que se elabora en la historia.

2.2 La historia como representación

Con el propósito de caracterizar el tipo de conocimiento que elabora la historia, Chartier considera las reflexiones que lleva a cabo Michel de Certeau cuando analiza el trabajo de los historiadores, en primera instancia, el objeto de conocimiento de la disciplina.

En primera instancia se identifica que el conocimiento consiste en una representación. Señala que ese autor se refiere a la representación como la construcción de imágenes que se presentan y se usan para referirse a algo que está ausente (en el caso de la historia, los procesos, los comportamientos y los conflictos

propios de los estamentos sociales), y que fundan las percepciones y las valoraciones sobre esos objetos ausentes, que se tienen por «concretos». (Chartier, 2012, p. 49)

Estos investigadores señalan adicionalmente que el carácter representacional de la historia se enriquece cuando se acude al desarrollo de la teoría del signo que llevaron a cabo los gramáticos y lógicos de Port-Royal en el siglo XVII; en esta teoría, el signo tiene dos propiedades, en primer lugar está su carácter de objeto que representa, es decir, de elemento presente que se refiere a otro ausente, y en segundo lugar, su rol de apoyo a la construcción de una perspectiva que analiza esta situación, en tanto es un discurso que se reconoce a sí mismo como una representación.

Al respecto, Chartier (2012) se refiere al análisis que hace Louis Marin; ese autor destaca las dos características del dispositivo moderno de representación: la que él denomina «transitiva»: toda representación representa algo y la «reflexiva»: toda representación se presenta representando algo. [Marin, (2009), Citado por Chartier, 2012, p. 42)]

Estas consideraciones permiten establecer el tipo de conocimiento que se trata de elaborar al abordar la historia de las disciplinas; al tener en cuenta el carácter transitivo, se entiende que se trata de una representación que incorpora representaciones de los hechos relacionados con la emergencia de sus conceptos y de los procesos que permiten articularlos en un sistema; al asumir el carácter reflexivo, se entiende que fuera de la representación elaborada, hay otras que también son posibles.

Según Chartier (1996), de Certeau plantea que la comprensión del conocimiento propio de la historia requiere en primera instancia reconocer la distancia entre el

discurso y lo real, y apreciar que ese conocimiento “transforma algo que tenía su estatuto y su papel [el documento, el archivo] en otra cosa que funciona diferente [el texto histórico].” (Chartier, 1996, p.70).

2.3 El carácter que distingue la representación histórica

Al tratar de establecer el tipo de representación construido en la historia, en el siglo XX se planteó que en la historia se trata de producir narraciones que vinculan la representación de distintos tipos de hechos lo cual, fuera del reconocimiento de la distancia entre los hechos tal como ocurrieron y los hechos tal como son presentados al ser narrados, hizo aparecer la necesidad de precisar que se trata de un proceso de producción distinto al propio de la literatura.

En relación con este tema, Lynn Hunt destaca que la *New cultural history* “encuentra modelos de inteligibilidad en disciplinas vecinas que los historiadores habían frecuentado poco hasta ese entonces: por un lado, la antropología; por otro, la crítica literaria.

Se señala, entonces, que la historia es un relato de los procesos y los hechos involucrados en ellos, reconociendo así que la historia es una escritura, literatura, también es una institución y una práctica; pero se aclara que toda escritura histórica es un relato, construido según reglas que invierten los rumbos de la investigación, puesto que organizan de acuerdo con un orden cronológico, una demostración cerrada y un discurso sin fallas, materiales siempre abiertos e incompletos.” (Chartier, 1996, p.67)

El reconocimiento del carácter narrativo de la historia, representó una encrucijada para los actores de la disciplina, porque los confrontó en relación con lo que diferencia

la historia de un género literario; es así como de Certeau, se esfuerza por determinar en qué condiciones un discurso erigido según los procedimientos específicos de trabajo del historiador puede ser aceptado, como dibujando adecuadamente la configuración histórica que se dio por objeto. (Chartier, 1996, p.70)

“Lo que de Certeau invita a pensar es lo propio de la comprensión o la interpretación histórica, es decir, el trabajo de puesta en relación que autoriza a considerar coherente, plausible y explicativo el lazo construido entre las unidades construidas por la operación histórica, ya se trate de series o indicios, y la realidad referencial de la que constituyen la huella, esa “población de muertos –personajes, mentalidades o precios–” que la escritura historiadora se propone poner en escena. (Chartier, 1996, p.69)

Tal como lo plantea Zuluaga (2009), caracterizar como una narración el saber propio de la historia genera dos requerimientos, en primer lugar establecer las particularidades que distinguen el relato de la historia con respecto a otros tipos de narración y, por otra parte, aclarar el régimen de verdad del discurso historiográfico, el cual debe pensarse como el efecto de la relación entre las ciencias sociales y las concepciones (los sentidos) que emergen en medio de prácticas sociales.

Al pensar ese régimen de verdad del discurso histórico, se ve la necesidad de tomarlo como una realidad textual ‘ producida’ (la historiografía o Historia) por una operación cuyas normas se fijan de antemano.” (Michel de Certeau, en Une épistémologie de transición, p. 1324, citado por Chartier, 1996, p.69). En ese sentido, se reconoce que se trata de una realidad textual producida por una operación, de tal modo

que “Solo conjuntamente escrituralidad, explicación comprensiva y prueba documental, son capaces de acreditar la pretensión de verdad del discurso histórico. (Chartier, 2012, p. 49)

Ese es el énfasis propio de este planteamiento sobre lo que es la historia cuando se ve en el panorama de los relatos: “La historia siempre es relato, pero relato particular, dado que apunta a producir un saber verdadero: el discurso histórico pretende dar un discurso verdadero (que responda a la verificabilidad), pero en la forma de una narración.” (de Certeau, *L’opération historiographique*, p-110, citado por Chartier, 1996, p.67).

Es así como para establecer el “saber verdadero” en historia, de Certeau remite a las particularidades que distinguen el relato de la historia de otros modos de narración, tal como están presentes en las prácticas que llevan a cabo los historiadores, los que realizan esta práctica de producción discursiva, y que, por ejemplo, se reflejan en propiedades como la estructura foliada del texto historiográfico, lo que indica que este incluye en sí mismo los materiales que lo fundan y a los que explica (documentos, citas).

“La historia es un discurso, pero un discurso cuyas determinaciones deben buscarse, no en las convenciones perpetuadas de un género literario, sino en «las prácticas determinadas por las instituciones técnicas de una disciplina», diferentes según los tiempos y los lugares, articuladas por los recortes variables entre verdad y falsedad o por las definiciones contrastadas de lo que, históricamente, constituye una prueba.” (Chartier, 1996, p.63)

2.4 La historia como representación de una serie de acontecimientos

Otro aspecto distintivo de los textos reconocidos como propios de la historia es la consideración explícita del tratamiento que se da a la forma de concebir la secuencia de hechos; en ese sentido, se tiene que las representaciones que presentan el devenir como un proceso continuo han dado paso a propuestas que los presentan como una serie de saltos cualitativos entre construcciones discretas, a la que no se atribuye ningún sentido de progreso o decadencia. Se considera que esta transformación representa el abandono de una visión idealista de la historia que tiende a ver los acontecimientos en una continuidad ideal, y que, por el contrario, destaca los acontecimientos en lo que tienen de único, de particular, otorgándole un valor significativo a la pluralidad de fuerzas particulares que constituyen el motor de esta. (Zuluaga, J. C., 2009, p. 108)

El énfasis en el acontecimiento, en la singularidad, dio lugar a que las prácticas de los historiadores incluyeran el estudio de hechos y construcciones concretas como asuntos dignos de ser tenidos en cuenta, transformación muy significativa ya que conduce a los historiadores a reflexionar sobre sus propias prácticas y, en particular, sobre las elecciones conscientes o las determinaciones desconocidas que rigen su manera de construir las narraciones y los análisis históricos. (Chartier, 2005, p.14)

Centrar la atención en el acontecimiento acentúa la posibilidad de hacer referencia en el relato histórico tanto a documentos como a las prácticas sociales, surge entonces la necesidad de reflexionar sobre las diferencias de tratamiento que es

necesario dar a estas en comparación con el que se le da a los documentos; al respecto, según Zuluaga (2009), de Certau resalta que en la actividad del historiador es necesario tener en cuenta la relación entre el discurso del saber y el mundo social donde este se inscribe. Entonces surge la pregunta sobre la forma de pensar las relaciones que mantienen las producciones discursivas y las prácticas sociales. (Zuluaga, 2009, p.107)

Por su parte, Hunt considera la perspectiva que se asume en el campo de la *New Cultural History* y señala que ella centra la atención en los lenguajes, las representaciones y las prácticas, y al hacerlo, introduce una nueva perspectiva para comprender las relaciones entre las formas simbólicas y el mundo social. “Al enfoque clásico, dedicado a identificar las divisiones y las diferencias sociales objetivas, ella opone la construcción móvil, inestable y conflictiva de las mismas, a partir de las prácticas sin discurso, de las luchas de representación y de los efectos performativos de los discursos.” (Citado en Chartier, 2005, p.13)

En desarrollo de este tema de los ámbitos que se incorporan en la historia de los objetos de los discursos también se puede hacer referencia a la posición que Foucault (1970) asume al proponer la metodología propia de la arqueología de los saberes.

Refiriéndose a las condiciones para que surja un objeto de discurso, plantea que,

“[el objeto del discurso] Existe en las condiciones positivas de un haz complejo de relaciones. Estas relaciones se hallan establecidas entre instituciones, procesos económicos y sociales, formas de comportamiento, sistemas de normas, técnicas, tipos de clasificación, modos de

caracterización; y estas relaciones no están presentes en el objeto [...] No definen su constitución interna, sino lo que le permite aparecer, yuxtaponerse a otros objetos, situarse en relación con ellos, definir su diferencia, su irreductibilidad, y eventualmente su heterogeneidad, en suma, estar colocado en un campo de exterioridad.” (Foucault M, 1969.p.73)

El mismo autor señala que las formaciones discursivas, entendidas como conjunto de reglas que gobiernan la construcción de enunciados sobre ese y otros objetos relacionados, corresponden a la articulación entre una serie de acontecimientos discursivos y otras series de acontecimientos, de transformaciones, de mutaciones y de procesos no discursivos.

2.5 La historia de las disciplinas como narración

Los elementos previamente expuestos permiten establecer la forma como se asume el conocimiento propio de las disciplinas consideradas y el tratamiento que se le da.

2.5.1 La historia del cálculo y la derivada como representación

En el caso del cálculo y, en particular, de la derivada, se considera su historia como una representación, como un relato, que no coincide con las referencias consultadas, sino que es una construcción que tiene un carácter determinado en tanto presenta la progresiva articulación de conceptos de distinta procedencia en sistemas que los incorporan como componentes.

Esta articulación, lo mismo que los sistemas conceptuales que se integran como componentes parciales, constituye un saber reconocido por los matemáticos, de allí deriva su valor de verdad.

Por otra parte, el relato está elaborado con los elementos generados por matemáticos que se han referido a las distintas construcciones que se han tenido en cuenta como afluentes que han contribuido a la organización de los sistemas conceptuales objeto de análisis.

El carácter reflexivo de la representación elaborada permite dejar la posibilidad de que haya otras narraciones que incorporen más elementos en los sistemas conceptuales del cálculo y la economía marginalista; sin embargo, se considera que la representación expuesta satisface condiciones básicas que permiten ilustrar la opción de tomar la historia como referente para la enseñanza del cálculo en ciencias empresariales, en tanto da lugar al reconocimiento de una serie de aspectos que, de ser tenidos en cuenta, permiten una comprensión holística y multifacética de la derivada como construcción de matemática y como condición básica en economía.

2.5.2 La historia del cálculo y la derivada como representación de una serie de acontecimientos

El cálculo se toma como un sistema conceptual –discursivo– de la matemática, que no siempre hizo parte de la disciplina, sino que emergió entre los siglos XVII y XVIII, en una época en la que también se constituyeron como disciplinas científicas la física y posteriormente la economía. En ese sentido se afirma que el Cálculo matemático se toma como producto de una construcción histórica.

Al emprender la elaboración de la representación de este proceso se hace necesario reconocer que las construcciones matemáticas no solo responden a los problemas propios de las prácticas discursivas de esta disciplina, sino que estas prácticas tienen relación con las prácticas sociales y culturales, en las cuales se van gestando exigencias para los sistemas conceptuales que ellas elaboran.

En ese sentido, se plantea que las matemáticas son un conjunto de construcciones que se dieron con el objeto de atender requerimientos específicos y que se fueron enriqueciendo y ajustando de acuerdo a las necesidades e intereses del ser humano, proceso en el cual se han estructurado herramientas abstractas cada vez más complejas; es así como, diversas manifestaciones de esta actividad –geométricas, algebraicas, estadísticas, etc.– se articulan e incorporan de distinto modo en los procesos y actividades humanas, en la elaboración de cuerpos teóricos abstractos, en la lectura e interpretación de los procesos de la naturaleza y en la solución de problemas prácticos (por ejemplo, en las actividades comerciales).

La construcción de la narración histórica mostrará que los conocimientos previos no pueden ser incorporados inicialmente en una misma teoría y que solo con un cambio de perspectiva, esto es, con la adopción de nuevos supuestos, se hace posible integrar un sistema conceptual que hace aparecer esos conocimientos independientes como componentes de una misma teoría.

En el caso del tema de este trabajo, el énfasis en las condiciones de posibilidad de un acontecimiento permite tomar distancia de planteamientos previos en los que se

proponía que las prácticas no discursivas son externas a las disciplinas que abordan el estudio de objetos caracterizados en términos abstractos.

En ese sentido, se recurre a los planteamientos de Anacona sobre las condiciones de posibilidad de las disciplinas; al respecto, la autora plantea que “...estos estudios muestran que las matemáticas, como construcción humana, están ligadas a diferentes dinámicas sociales” (Anacona 2003 p. 36), lo que indica la pertinencia de incorporar en la elaboración de la historia de las matemáticas y la economía, la comprensión de que en este proceso de producción de conocimiento se requiere considerar las prácticas sociales y las discursivas que constituyeron el contexto en el que se configuraron los distintos conceptos y nociones.

Sin embargo, es oportuno aclarar que este trabajo, aunque apropia la idea de que el objeto del discurso de las disciplinas consideradas existe a partir de unas condiciones de posibilidad, no se compromete con la identificación y caracterización de formaciones discursivas entre las cuales existen diferencias cualitativas que permitan, como hace Foucault, elaborar el archivo en busca de regularidades que sustenten el planteamiento de discontinuidades, de mutaciones que inciden en distintos ámbitos de la producción discursiva y no discursiva.

En ese sentido, aunque Foucault caracteriza la episteme de la época clásica a partir de la forma de concebir el signo, tal como lo hizo la gramática de Port Royal, en este trabajo no se busca mostrar la forma como esa concepción permite reconocer los saltos cualitativos que separan esta concepción de las vigentes en otras coyunturas de la historia de las disciplinas consideradas.

Sin embargo, el compromiso con establecer el valor de los verdades de los enunciados incluidos en el relato histórico se mantiene. En ese sentido, como ya se dijo, el reconocimiento del carácter narrativo de la historia también dio lugar al cuestionamiento sobre la o las propiedades que diferencian esta disciplina de la literatura.

En el presente documento se describen elaboraciones tomadas como antecedentes, como elementos que permitieron ampliar el alcance de esos conceptos y que atendiendo a las problematizaciones tanto internas como externas, hicieron posible la formalización del cálculo como sistema conceptual de la matemática que se incorpora en disciplinas científicas en calidad de estructura que configura nociones de esos campos.

En desarrollo de esta perspectiva se identifican prácticas sociales propias de distintas coyunturas históricas, que hacen parte de este devenir y que contribuyeron a articular, en medio de la racionalidad concreta del siglo XVII, una concepción que desde entonces nutre distintos campos de saber, el cálculo.

Una vez alcanzada esta construcción holística de la matemática, se puede apreciar que ella se integra en el medio cultural y que se convierte en una condición de posibilidad para la construcción de las categorías de disciplinas científicas. Tal como señala Bourdieu (Bourdieu, 2003), el tratamiento matemático de las nociones y las relaciones que definen los objetos de estudio se convirtió en la condición sine qua non de cualquier campo de construcción de conocimiento que aspirara ser reconocido como científico.

Un proceso comparable ocurre en el caso de las profesiones, donde al llevar a cabo análisis de situaciones problema, las nociones matemáticas se convierten en una herramienta que permite poner en juego la significación de los conceptos para establecer las relaciones entre variables en cuyos términos se da cuenta de la situación.

Es así como el Cálculo se convierte en una de las nociones de la matemática que ha potencializado los desarrollos científicos, en el caso analizado de la economía, y la organización de prácticas profesionales, principalmente porque ha permitido el estudio de las razones de cambio, a partir de la derivada que en calidad de estructura abstracta configura el sistema conceptual de las disciplinas básicas y de las aplicaciones profesionales.

Se puede ver, entonces, que todas estas elaboraciones constituyen condiciones en donde se vuelve posible la construcción y fundamentación del análisis marginalista. En el caso de este campo de conocimiento se aprecia que, en sintonía con Schumpeter,

“A los economistas que aspiran a vivir en el futuro no les será fácil ser unos economistas competentes sin el conocimiento matemático. Por esta razón, yo apremio a los estudiantes de economía (...) a que adquieran alguna experiencia mínima en matemáticas. Pero este mínimo no es el mismo para todos. Aquel que desee únicamente entender nuestros conceptos fundamentales y seguir las contribuciones más importantes de los economistas matemáticos necesita muy poco, y la introducción más elemental a los conceptos básicos del cálculo le será

suficiente. Sin embargo, aquel que desea entender todo lo que se hecho hasta ahora, y especialmente que desee hacer un trabajo por sí mismo, es claro, tiene que extender su estudio a las ecuaciones diferenciales, el cálculo diferencial, la geometría analítica, etc.” (Shumpelter 1982, citado por Maya, 2010).

En este orden de ideas es necesario apelar a las ideas de infinito (en cada una de sus manifestaciones), de límite y de función, propias del Cálculo, entendiendo que este no es un producto acabado, sino que, por el contrario, es un objeto matemático que se transforma y se enriquece mientras se ajusta a las prácticas sociales y producciones discursivas propias de coyunturas específicas.

Sin embargo, en el caso de las prácticas de enseñanza de los docentes que actúan en programas de formación de profesionales, ocurre con frecuencia que los aportes de la matemática a las disciplinas se presentan como algoritmos para obtener cifras, sin una comprensión de las relaciones que tiene un concepto con otros que también hacen parte del sistema conceptual, lo que genera visiones desintegradas.

Tal como lo manifiesta Anacona (2003), en los estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica, que posibilitan no sólo una mejor comprensión del concepto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática en consideración, que merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas educativas.

2.6 El sentido social de la noción de representación

El concepto de representación que elabora de Certeau incorpora una dimensión adicional a la de hacer presente algo ausente, es lo que se refiere al papel de ciertos actores sociales que actúan en nombre de otros, lo que constituye una referencia al aspecto social y político de la representación.

Zuluaga, (2009) señala que la noción de representación elaborada por de Certeau ha sido un valioso apoyo para que se puedan articular las diferentes relaciones que los individuos o grupos tienen con el mundo social en el que están inmersos. “Gracias a la multiplicidad de sus significados, el concepto, en su sentido sociológico de «representaciones colectivas», designa en primer lugar los esquemas de percepción y de apreciación que conllevan las operaciones de clasificación y jerarquización que construyen el mundo social. En segundo término, puede indicar las prácticas y los signos, los símbolos y las conductas que pretenden mostrar y hacer reconocer una identidad social o un poder. Finalmente, en el sentido político, califica las formas institucionalizadas por las que los «representantes» (individuos singulares o entidades colectivas) encarnan de manera visible, «presentifican», la coherencia de una categoría social, la permanencia de la identidad o la pujanza de un poder.” (Zuluaga, J. C., 2009, p. 108).

El énfasis en el sentido de manifestación pública de la representación tiene implicaciones importantes para el caso de actores sociales, en tanto hace referencia a que estas personas que representan tienen el compromiso de actuar de modo acorde a aquellos a quienes representan, lo que transforma las relaciones de poder en relaciones simbólicas.

En sentido político, esto remite a las formas institucionalizadas por las que los «representantes» (individuos singulares o entidades colectivas) encarnan de manera visible, «presentifican», la coherencia de una categoría social, la permanencia de la identidad o la pujanza de un poder. (Marin, 2009, citado por Chartier, 2012, p. 43)

Chartier destaca que para de Certeau, hacer historia exige que siempre se dilucide la relación entablada entre el discurso del saber y el mundo social en que se inscribe. Toma la historia como un lugar y como una práctica, como una ciencia y como una escritura. Por ello, también en el reconocimiento de las discontinuidades históricas, el acento se pone sobre las tensiones entre el discurso de autoridad y voluntades rebeldes, porque atraviesan tanto nuestro presente como las sociedades la antigüedad. La historia es lugar de experimentación, manera de destacar diferencias, saber del otro y, por lo tanto, de uno mismo. (Chartier, 1996, p.72).

Se propone así que, al asumir la construcción histórica, también se trata de dilucidar las prácticas mediante las cuales los hombres y las mujeres de una época se apropian, a su manera, de los códigos y los lugares que les son impuestos, o bien subvierten las reglas comunes para conformar prácticas inéditas.

2.7 Los docentes como representantes

La significación de representación anteriormente expuesta permite hacer algunas reflexiones sobre el lugar del docente, en particular sobre su carácter de representante de un área de conocimiento; en este caso, el docente de matemáticas se toma como sujeto que actúa en nombre de otros que comparten un saber, que pueden dar cuenta de la racionalidad que ha dado lugar a las construcciones conceptuales

reconocidas como legítimas. Es en calidad de representante de esa colectividad que él hace un discurso ante sujetos en formación.

En ese sentido cabe preguntar si el docente de matemáticas ha elaborado un sistema conceptual que permita exponer las múltiples relaciones que están presentes en la significación de un concepto, elaboradas durante la historia de su disciplina, y si comprende el estatus de esta disciplina en la construcción de conocimientos de la disciplina en la que se basa el saber profesional de los estudiantes a los que contribuye a formar.

Reflexionar y reconocer el carácter de construcción social de la matemática a partir de la comprensión de la historia del cálculo y su incorporación en la economía, como condición que estructura las nociones de ciertas construcciones conceptuales (el marginalismo, en este caso), puede orientar las prácticas de enseñanza en la dirección de comprensiones racionales de las nociones, apoyar la justificación teórica de los análisis abordados, y superar las exposiciones de solución de problemas mediante la aplicación de algorítmicos.

Tal como lo plantea Anacona (2003), desde esta perspectiva, se promueve una actitud diferente frente al conocimiento matemático y a su enseñanza, pues éste aparece en una interesante relación con otras formas de expresión de la cultura, tales como el arte y la filosofía.

También es válido preguntar si el docente ha reflexionado sobre el estatus de las prácticas relacionadas con su rol en tanto indicaciones de los lugares desde los que

puede hablar, que le han sido impuestos, o bien cuestiona esas reglas para articular prácticas innovadoras.

SEGUNDA PARTE: LA HISTORIA DE LA EMERGENCIA DEL CÁLCULO Y SU RELACIÓN CON EL ANÁLISIS MARGINALISTA EN ECONOMÍA

Esta sección comprende cuatro capítulos: En el capítulo tres se realiza una descripción de los elementos que fortalecen el Cálculo diferencial a la luz de la geometría, en este aparecen consideraciones sobre la noción de curva el uso de la regla y compás y los obstáculos presentados como consecuencia de la inconmensurabilidad. El capítulo cuatro presenta una descripción y estudio de cada una de las etapas del álgebra como lenguaje, que luego fundamentan la geometría analítica. En el capítulo cinco se evidencia cómo el estudio del movimiento, que se ubica en el nacimiento de la física, se sustenta a la luz de las matemáticas, que lo legitima como ciencia. En el capítulo seis se describe cómo la derivada interviene como objeto matemático a la hora de elaborar conceptos propios de la microeconomía, particularmente en el caso del marginalismo.

CAPÍTULO 3

LA INCONMENSURABILIDAD, UN TEMA DE DISCUSIÓN EN GEOMETRÍA

3.1 Las construcciones con regla y compás ideales

Para los griegos la matemática fue un arte relacionado estrechamente con la filosofía dejando de lado los problemas cotidianos, en consecuencia, su reflexión se ubicó en la geometría no métrica, es decir aquella que está centrada en las construcciones geométricas con el uso de regla y compás ideales.

Las escuela Jónica liderada por Thales de Mileto y la escuela Pitagórica¹, como las más representativas de Grecia antigua, lograron establecer sistemas teóricos que describían relaciones geométricas entre objetos que se hacen manifiestas con el uso de postulados y teoremas, cuya demostración se realiza con el uso de regla y compas ideales.

El uso de la regla y compás estaba asociado a los significados que le fueron dados a la recta y a la circunferencia como curva perfecta; a partir de esta consideración se podrían obtener todas las demás construcciones de la geometría. Una de las evidencias, donde es protagonista el uso de la regla y compas ideales, está en la descripción de las demostraciones geométricas que se encuentra en del documento *Elementos* de Euclides, esto debe ser considerado como producción discursiva, ya que

¹En la antigua Grecia se gestó un movimiento filosófico que hoy se conoce como los presocráticos, ellos estaban interesados en establecer el principio organizador del cosmos; en esa dirección la reflexión los llevó a proponer que el número (Pitágoras de Samos), el agua (Thales de Mileto) o el fuego (Heráclito) eran ese elemento que daba cuenta del orden propio del cosmos. En medio de esas búsquedas, Heráclitoplanteó que la naturaleza está en un continuo devenir, todo cambia, postura que se difundió entre los pitagóricos.

este proceso es característico de la matemática griega, lo cual contribuyó a fundamentar a la matemática como disciplina formal.

Esta práctica propia del campo representa una modalidad de mediciones que no recurrían a unidades, de trabajo intelectual orientado al establecimiento de relaciones entre magnitudes, está incorporada a la producción de enunciados, esto es, caracteriza la modalidad de enunciación y corresponde a una forma de proceder que no ubica la noción de número en el centro de la reflexión matemática; esta práctica caracteriza la geometría de la antigua Grecia, en el uso de esos instrumentos ideales se basan los procesos de formalización y validación del conocimiento del momento; a la construcción resultante se le otorga el nombre de geometría no métrica, precisamente por cuanto no recurre a la cuantificación de unidades.

En la comunidad griega se creó una clasificación de las curvas, en primer lugar, las curvas elaboradas con los instrumentos ideales, las cuales son estáticas, a este tipo de construcción se le denominó *Plana*, en este grupo se incluyen las curvas anteriormente definidas como construcciones sólidas, clasificándose con el nombre de curvas geométricas.

Este es el caso de las curvas que corresponden a las secciones cónicas, ellas son el resultado de la intersección de una superficie cónica con un plano; ellas se convirtieron en objeto de estudio de la geometría con el uso de la regla y compás; su desarrollo teórico que se encuentra en la obra de Apolonio son el resultado de las medidas proporcionales, a estas construcciones se les definió como sólidas.

A partir de la formalización desarrollada con el uso de la regla y compas se genera el término inconmensurable, noción que aparece en el documento *Elementos* de Euclides en su libro X; sin embargo, no es muy explícita su definición, no obstante, en exploraciones históricas se ha establecido que:

La inconmensurabilidad es una relación entre dos magnitudes del mismo tipo y no una característica propia de un número. En geometría se distinguen distintos tipos de objetos y magnitudes asociadas a ellos: segmento, región, volumen y ángulo; en esta primera definición, Euclides no hace distinción sobre el tipo de magnitud a la que se refiere, por lo que se asume que la definición es aplicable a todas las anteriores (Rios & Sandoval, 2016, p.14)

La exploración de este abordaje teórico llevó a la imposibilidad de abordar únicamente con regla y compás, tres problemas clásicos de la geometría: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, cuyo trasfondo teórico, está en la imposibilidad de construir con ese procedimiento magnitudes inconmensurables.

Esta situación desestabilizó las matemáticas del momento, al reconocer que no solo existen magnitudes discretas, también es posible encontrarse con la continuidad, noción fundamental en los procesos de formalización del Cálculo.

La primera crisis que se reconoce en la historia de las matemáticas involucra la concepción de la existencia de magnitudes inconmensurables provenientes de actividades geométricas como por ejemplo el estudio del teorema de Pitágoras.

Considerar el cálculo de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene catetos cuya longitud es 1 se convirtió en todo un reto. Este tipo de números se define como inconmensurables, asociados a la continuidad, de la magnitud expresada; sin embargo, a la luz de los fundamentos matemáticos de los griegos no era considerada esta magnitud como un número con sentido en su lógica.

En ese momento histórico, aquello que se considera inconmensurable causó conmoción en la comunidad matemática, exactamente en la escuela pitagórica; encontrar la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado aparece como tarea imposible de ser abordado matemáticamente en ese momento, lo cual deslegitima el pensamiento pitagórico que consideraba que toda la realidad podía ser descrita con el uso de números enteros y racionales, ya que tenían la posibilidad de ser contables. La existencia de otro tipo de expresiones no conmensurables, es decir, escrito matemáticamente en términos de otra, hizo reconocer la existencia de la inconmensurabilidad, es decir, de cantidades que son continuas, las cuales ya no están asociadas a cosas o elementos separados que se puedan contar.

Por otra parte, en contraste con la postura filosófica de la escuela Pitagórica y la de Heráclito, en la antigua Grecia se encuentra la postura de Parménides de Elea, quien sostiene que lo existente es una realidad única, es decir, se rechaza lo cambiante y se destacan lo permanente y la pluralidad. Un discípulo de Parménides, Zenón de Elea, sostenía que todo era permanente y estático, esta idea se sustentaba en su percepción del tiempo y del espacio como indefinidamente subdivisibles; en ese orden, el movimiento era imposible; por otra parte, si la subdivisibilidad no es indefinida, es

decir, termina en indivisibles, también se podía considerar que el movimiento no existe. En conclusión, para Zenón de Elea el movimiento era un espejismo.

Zenón es uno de los pensadores que se preocupa por asuntos relacionados con la continuidad y el infinito, propios de la formalización que hoy conocemos del Cálculo diferencial; por ejemplo, en su paradoja² de Aquiles, menciona:

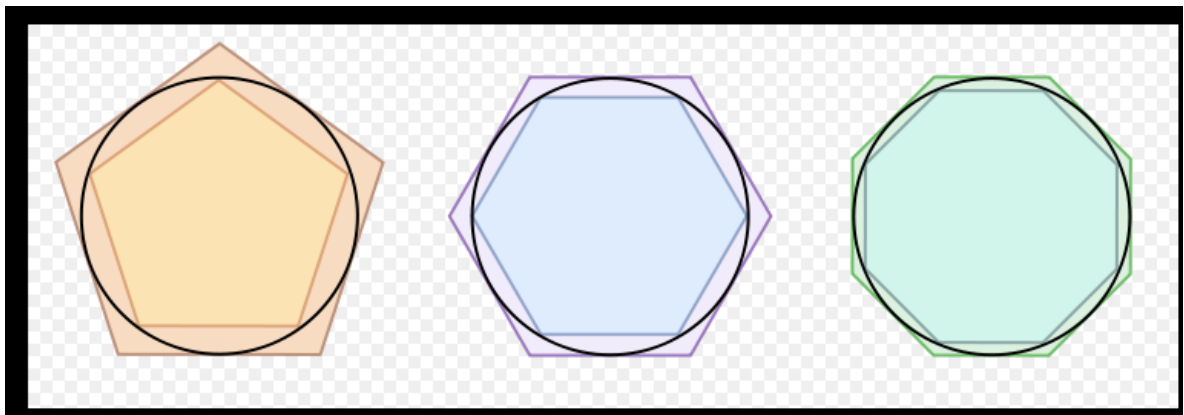
Supongamos, decía Zenón, que Aquiles, que corre cinco veces más rápidamente que una tortuga, juega con ella una carrera dándole una ventaja de cinco kilómetros. Cuando Aquiles recorra esos cinco kilómetros, la tortuga habrá avanzado un kilómetro. Cuando Aquiles cubra ese kilómetro que lo separa ahora de su contrincante, ésta habrá caminado a su vez un quinto de kilómetro, es decir, doscientos metros. Pero cuando Aquiles trate de alcanzarla corriendo esos doscientos metros, la tortuga habrá recorrido cuarenta metros. Y una vez que Aquiles salve esos cuarenta metros, con la esperanza de alcanzarla, la tortuga habrá avanzado ocho metros, y todavía le llevará ventaja. Una ventaja que disminuye sin cesar, pero que siempre está, porque cada vez que Aquiles recorre la distancia que lo separa de la tortuga, ésta, en ese lapso de tiempo, se habrá movido algo, por poco que sea, en consecuencia, lleva siempre la delantera. Conclusión: Aquiles nunca la alcanza. (Instituto Venezolano de investigaciones científicas, 2016)

3.2 El Método de Exhaución y a la inconmensurabilidad

Una construcción de origen geométrico, estructurada como respuesta a la comparación de figuras rectilíneas con figuras curvilíneas, que contribuye a la

² Según la Real Academia Española, se considera paradoja como “hecho o expresión aparentemente contrarios a la lógica”.

emergencia del Cálculo, desarrollada por los griegos, es el *Método de Exhaución*. Se trata de reducir el círculo a una figura poligonal regular con el uso de regla y compas ideales. Ante esta tarea, Eudoxo partía de que era posible circunscribir e inscribir polígonos, y es ahí donde se evidencia las dificultades del infinito tal como se observa en la siguiente imagen:



Tomado de <https://euclides59.wordpress.com>

Ante este aporte, Eudoxo inaugura la idea de *tan pequeño como se quiera* (Revista Summa, 2004) esa fue la salida para entender las consideraciones que propician acercamientos para entender el infinito, planteamiento matemático que bastantes siglos después dio sentido a la formalización del asunto de estudio, “el Cálculo”.

Si bien, los alcances del desarrollo de Eudoxo se restringen al uso de la regla y compas, es precisamente desde este punto de partida, donde Arquímedes propicia el auge del método de exhaución, ya que es aprovechado con el fin de encontrar el área de un círculo; que a su vez influenciaba la necesidad de encontrar el valor aproximado del número π .

El método mencionado se describe de la siguiente manera:

Dada una región cuya área requiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que sea próxima a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor y se continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada. (Apostol, 1982, p. 3)

Precisamente, el método insiste en tomar polígonos cada vez con mayor número de lados, ya sean circunscritos o inscritos en la circunferencia, lo cual implica realizar esta actividad de manera indefinida.

Como se menciona en las líneas anteriores, es necesario reconocer que las elaboraciones de Zenón, Eudoxo y Arquímedes inscriben sus desarrollos en el hecho de reconocer la existencia de los inexplicables inconmensurables.

En esas condiciones, la introducción de la inconmensurabilidad desestabilizó el saber de las matemáticas de la antigua Grecia; esto implicó enfrentarse a situaciones problema relacionadas con lo infinitamente pequeño, que no fue posible resolver en ese momento, como efecto de la escasa teoría e insistente consideración de ver el infinito como una noción intuitiva.

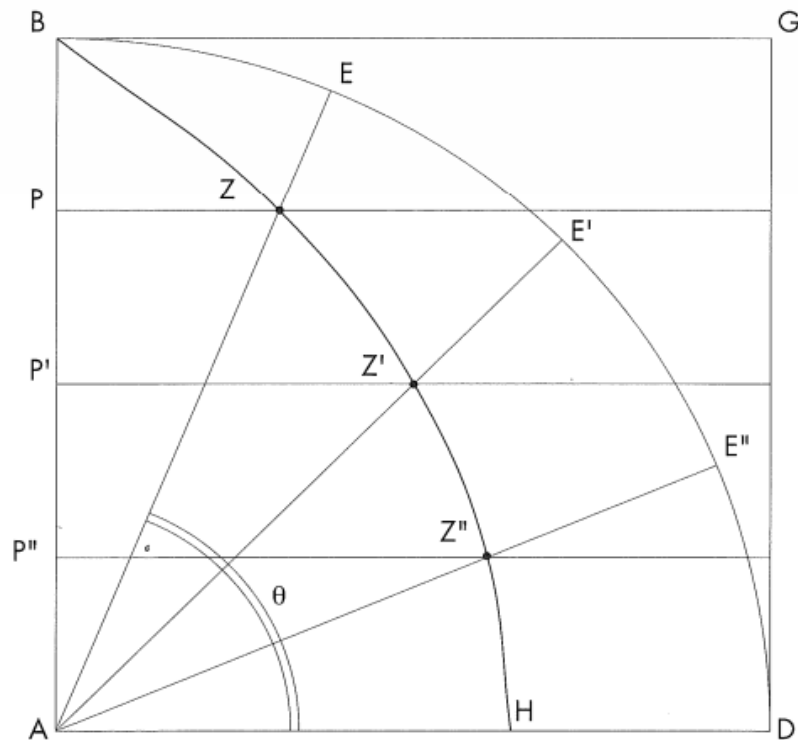
En estas condiciones,

“se abandona la visión idealista de la historia que tiende a ver los acontecimientos en una continuidad ideal y, por el contrario, se percibe el acontecimiento en lo que tiene de único, de particular. Esta perspectiva de historia

“efectiva” abandona toda construcción racionalista de la historia (Hegel, Kant), otorgándole un valor significativo a la pluralidad de fuerzas particulares que constituyen el motor de esta, y que Nietzsche distingue como el azar.” (Zuluaga, 2009, P. 108)

En medio de esta situación, los griegos crearon métodos para hallar las salidas a estos problemas clásicos. Este es el momento donde aparecen por primera vez las denominadas por Arquímedes *Curvas Mecánicas*, y que estas implican el uso del movimiento en su construcción, es decir eran consideradas como curvas no estáticas, sino generadas por las trayectorias de los cuerpos en movimiento. Se trata de curvas que no están elaboradas con regla y compas y su generación corresponde a desplazamientos y movimientos en el plano; este tipo de curvas reciben el nombre de decir curvas mecánicas.

Las curvas mecánicas dieron solución a los problemas clásicos (Arenzana, 1998); por ejemplo:



Tomado de (Arenzana, 1998,p.33)

Dado un cuadrado ABGD, describamos el arco BED con centro A. La recta BG, manteniéndose constantemente paralela a la AD, arrastre al punto B en su recorrido sobre AB, además de que esta gire con velocidad uniforme en el ángulo que forman AB y AD, es decir el punto B recorrerá el arco BED en el mismo tiempo que la recta BG se traslada a lo largo de BA. Es evidente que las rectas AB y BG coincidirán simultáneamente con la AD y, como consecuencia dichas rectas AB y BG coincidirán en un punto constantemente trasportado por ellas [z], el cual describirá una línea cóncava en la misma dirección, tal como la BZH, en el espacio comprendido entre las rectas AB y AD y el arco BED.

(Arenzana, 1998,p.33)

Se destaca que mientras las curvas geométricas fueron reconocidas como entidad propia del campo, las curvas mecánicas no, ya que sus procesos de elaboración no eran lo suficientemente claros. Sin embargo, a pesar de que atentaban con las condiciones iniciales de la formulación propia de la geometría, tales soluciones cumplían con su finalidad, resolvían los problemas derivados de las mismas reglas de enunciación.

En la matemática de la antigua Grecia, la Aritmética se limita al mero estudio de los números, pero siempre sustentados desde la geometría, lo cual retrasó la evolución del álgebra, convirtiéndola en retórica en los procesos de generalización que involucraban geometría.

Es preciso insistir en que reconocer la inconmensurabilidad provocó conmoción en la comunidad matemática de la época, y de hecho constituyó un escollo en el desarrollo de la geometría vigente hasta ese momento; esta dificultad se debió a que no estaba disponible formalmente la continuidad, concepto fundamental en el desarrollo del Cálculo.

Tal como lo describen Ruiz & Barrantes (1997), en el seno de la formulación de relaciones entre magnitudes que permea el pensamiento de los griegos de la antigüedad, aparecen los inconmensurables, enigmáticos hasta ese momento, lo cual generó una total desestabilización de las matemáticas griegas, produciendo un sesgo entre los números enteros y los racionales que participaban de situaciones discretas, pero que al abordar magnitudes continuas se apartaban del número.

CAPÍTULO 4

LOS APORTES DEL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

El álgebra es una rama de las matemáticas que se ha constituido como un lenguaje. En este lenguaje el significado remite a las propiedades de las operaciones entre números que tienen valores fijos o variables, las cuales dan lugar a igualdades, esto es, ecuaciones. La sintaxis establece la forma de expresar las relaciones existentes entre los diferentes símbolos, entre otros, los que se refieren a números desconocidos (a la ecuación y al conjunto de símbolos incluidos en ella se les denominará *significantes*). La retórica remite a los usos que se dan a las expresiones, a las aplicaciones en distintos campos.

Mediante el uso de las expresiones propias del lenguaje algebraico se pretende simplificar y generalizar asuntos relacionados con las operaciones consideradas; por otra parte, la resolución de ecuaciones consiste en la identificación de los números que satisfacen los términos de la ecuación.

Al realizar una exploración de las transformaciones históricas de este campo de la matemática, se logra identificar una estrecha relación con condiciones tanto de las mismas matemáticas, como de otros campos de conocimiento y de prácticas sociales que involucran la aplicación de desarrollos algebraicos.

Un aspecto que ha contribuido a la ampliación del campo del álgebra y a su integración con otras áreas de la matemática o de sus aplicaciones ha sido la transformación de las formas de representación, esto es, de los significantes que se usan para expresar la significación de las operaciones involucradas en la solución de

ecuaciones. En este orden de ideas, se considera que el álgebra se ha desarrollado a través de tres fases distintas, como consecuencia de los cambios que se producen en la misma representación.

El desarrollo de la representación potencializa la integración del álgebra con la geometría, lo cual representa un salto cualitativo, como se planteará posteriormente.

4.1 Fases del álgebra

Fase retórica o primitiva

En las civilizaciones antiguas, como Egipto y Babilonia, las matemáticas abrieron nuevas posibilidades dada su articulación con asuntos relacionados con la agricultura y la organización política, por ejemplo, el manejo del calendario. Estos hechos resaltaron el uso de la aritmética y potencializaron el desarrollo del álgebra como una extensión de la aritmética, que representa un desarrollo conceptualmente significativo, es decir la transición matemática de lo concreto a lo abstracto.

En muchas oportunidades, las matemáticas se ubicaron como una mera estrategia para recaudar información con respecto al pago de impuestos o cualquier transacción económica o en procura de dar respuesta a situaciones que involucrarán la noción de cantidad; es común encontrar menciones de cantidades de pan y cerveza, lo cual no es sorprendente ya que a los trabajadores egipcios, por ejemplo, se les pagaba, con comida y bebida. En tanto que estas situaciones estaban asociadas a valores o cantidades concretas y discretas en su mayoría, estos problemas se pueden clasificar como aritméticos ya que se piden resultados con cantidades conocidas.

Cuando las transacciones económicas entre los reinos estaban en auge aumentó el interés en resolver problemas prácticos relacionados con las equivalencias de medidas y peso. Un ejemplo de estas situaciones están asociadas al uso de una balanza, si se necesitaba saber el peso de un algún producto que se quisiera vender, se colocaba en la balanza y se comparaba con un gin o con un mana³, entre otras medidas, (un mana equivalía a 60 gin), y es así como, de manera práctica, se empiezan a estructurar las primeras ecuaciones matemáticas de la historia.

Esto fue significativo, puesto que sin tener un lenguaje algebraico eran capaces de manipular las cantidades, usando la comparación, situación que se podía evidenciar con el uso de una balanza. Por otra parte se reconoce que ellos no utilizaban letras para representar las cantidades incógnitas, ya que no poseían un alfabeto; en lugar de esto utilizaban sus palabras como, longitud, anchura, área, para referirse al asunto problema.

En el inicio, desde la formulación del problema algebraico a su solución se trabajaba con el lenguaje verbal de los pobladores, es decir, había ausencia total de un simbolismo asociado al valor desconocido; desde luego este tipo de expresiones fueron mencionadas a través de su escritura como lo evidencian de sus disertaciones elaboradas a través del lenguaje verbal.

La expresión en lenguaje natural de las operaciones asociadas a una tarea se limitó a formular instrucciones, al tiempo que la referencia a las operaciones asociadas

³ El gin y el mana son medidas de peso de la antigua babilonia

potencializó la reducción de los esquemas de solución a casos típicos. Como lo mencionan Dalcin y Olave (2007), se encuentran problemas como:

Encontré una piedra, pero no la pesé; después pesé seis veces (su peso) y sumé 2 gin, después sumé la tercera parte de la séptima parte de esta cantidad multiplicada por 24. Todo pesa un mana. ¿Cuál es el peso original de la piedra?
Solución: $4 \frac{1}{3}$ gin. (1 mana = 60 gin).

En el lenguaje del álgebra actual este problema se resolvería mediante la ecuación:

$$6x + 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} 6x + 2 \cdot 24 = 60,$$

cuya solución es efectivamente $4 \frac{1}{3}$. (p.157)

En Boyer (1986) se hace referencia a otro problema tratado: “Se pide calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19”. Para dar solución a esta situación, los egipcios recurren al método de la falsa posición o “regula falsi”; el cual consiste en asignarle un valor concreto al montón o valor desconocido, lo probable es que no sea el correcto, se realizan las operaciones con el valor concreto señaladas en el miembro izquierda de la igualdad, luego se compara el resultado de estas operaciones, con el resultado esperado. Y mediante el uso de proporciones se halla la respuesta correcta.

En su momento no se reconoció la diferencia entre la aritmética y el álgebra, estas actividades fueron concebidas en general como matemáticas, cuya preocupación está

en la solución de problemas usando un lenguaje natural permeado con un lenguaje matemático.

De esta manera, como lo consideran Prada y Angulo (2008) se da inicio al álgebra, los alcances de las civilizaciones antiguas, aunque aparecen en distintas épocas, pero guardan algunas características comunes, precisamente un “álgebra” sin simbolismo, orientada a resolver problemas cotidianos; entre tanto, los problemas y los paso a paso para resolverlos reconocían algunas reglas generales, que se reducían a casos típicos, expresados en lenguaje natural.

Posteriormente, en ambas culturas se introdujeron símbolos para representar cantidades. En Egipto, esta práctica se perfeccionó llegando al uso de expresiones abstractas, en paralelo con la transformación escritural que se evidenciaba en sus papiros; sin embargo, los símbolos no se usaron con la intención de darles un tratamiento algebraico, ni para plantear ecuaciones, sino que, lo más importante de sus aportes está en la tendencia a usar expresiones abreviadas. Aunque se aclara que en algunos momentos se requirió del uso de símbolos en la solución de las ecuaciones, tal actividad se hizo sin plena conciencia de su uso, es más, sin atribuirles algún significado matemático.

En la antigüedad, muchos de los problemas de las matemáticas se centraron en medir la tierra, incentivados por el aumento de la soberanía de los reinos (la expansión de los territorio se asoció a crecimiento del poder y riqueza); con la intención de llevar los registros en términos de medidas de los terrenos, se encuentran las primeras ecuaciones al cuadrado, estas implican que la cantidad desconocida que se desea

decifrar se multiplica por sí misma, y se denomina “al cuadrado”, porque se hace referencia al área de un cuadrado; de estas prácticas provienen las ecuaciones de segundo grado.

Estos cálculos se podían realizar apoyados en las elaboraciones matemáticas, pero sus métodos se basaron en el ensayo y el error, de ahí que no existen demostraciones o justificaciones que indiquen una estructura lógica; es así como el método desarrollado por los babilonios y los egipcios no contó con una estructura teórica consistente.

Sin embargo, con el uso de la prueba y el error, o dicho de otra manera, con el tanteo, las matemáticas empiezan a desprenderse de su motivación social utilitarista y de la interpretación estática, y se transforman progresivamente en una actividad que contribuye a la reflexión y que fortalece el pensamiento abstracto.

En esa dirección se tienen los desarrollos de los árabes; fue en esta civilización que se empezaron a resolver ecuaciones de segundo grado, con la condición de que cada uno de los coeficientes que se encontraran siempre fueran positivos, en ellas están presentes las cantidades desconocidas o incógnitas, las cuales se identifican con la expresión “mal” o “tesoro”.

Al- Khwarizmi⁴, elaboró un tratado sobre álgebra en el que disertó sobre los números naturales y dio solución a seis tipos de ecuaciones. (Ruiz, 2003, p.161)

⁴ Al- Khwarizmi, a quien se conoce como el padre del álgebra. trabajó bajo la tutela de Al-Mamun y sus tratados de álgebra y astronomía se los dedicó a él, por otra parte, su trabajo fue influido por la obra de Euclides. De los dos tratados el que se considera de mayor importancia es el tratado de álgebra porque fue el primer libro que se escribió acerca del álgebra. (Ruiz, 2003, p.161)

Con respecto a la notación usada por Al-Khowarismi para dar solución a la ecuación de segundo grado se puede observar que esta corresponde a una expresión de tipo 4, donde se tienen, cuadrados⁵ (mal) y raíces iguales a números; para su solución se basa en el lenguaje natural,

Tipo 1.

$$bx = ax^2, \text{ Raíces iguales a mal.}$$

- Tipo 2

$$bx = c, \text{ Raíces iguales a números.}$$

- Tipo 3

$$ax^2 = c, \text{ mal iguales a números.}$$

- Tipo 4

$$ax^2 + bx = c, \text{ Mal y raíces iguales a números}$$

- Tipo 5

$$bx + c = ax^2, \text{ Raíces y números iguales a mal.}$$

- Tipo 6

$$ax^2 + c = bx \text{ mal y números iguales a raíces.}$$

Donde se acepta que a, b, c son números enteros mayores que cero.

Para resolver mal y 10 raíces igual a 39 (en notación moderna, resolver $x^2 + 10x = 39$), se sigue la siguiente secuencia:

⁵ En algunas ocasiones a la palabra “mal” se le otorgó el significado de cuadrado, para las condiciones de este documento se tomará de esta forma.

Notación de al-Khowârismi:
"Considera la mitad del número de raíces, en este caso cinco, después multiplícalo por sí mismo, el resultado es cinco y veinte" (por veinticinco).

"Suma este número a nueve y treinta (por treinta y nueve), que da sesenta y cuatro.

Calcula la raíz cuadrada, es decir, ocho; del resultado,

resta la mitad del número de raíces, es decir, cinco; quedan tres".

"Esta es la raíz".

Tomado de (Malisamni, 1999, p.10)

En general, se encuentra que los árabes utilizaban fundamentalmente el lenguaje natural en sus ecuaciones algebraicas, las cuales eran expuestas como una receta matemática.

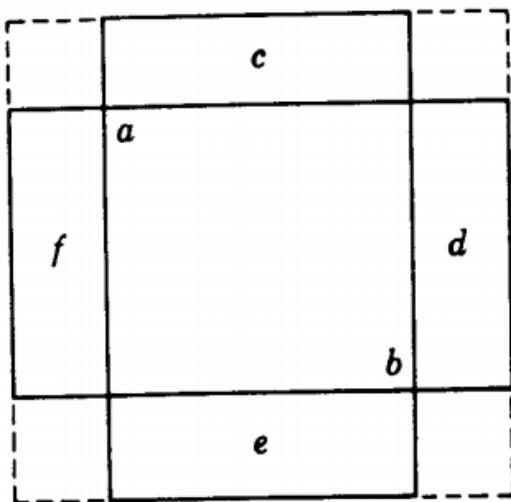
En paralelo al abordaje algebraico se buscó la justificación del procedimiento recurriendo a la geometría: mediante la construcción de figuras se obtienen evidencias y se valida el resultado algebraico.

Al respecto se tiene la siguiente ilustración referenciada por Malisamni (1999):

Por ejemplo, se presentó una ecuación de segundo grado de este modo: *Un cuadrado y diez de sus raíces son iguales a nueve y treinta (por*

treinta y nueve), es decir tú sumas diez raíces a un cuadrado y la suma es igual a nueve y treinta⁶.

Para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$ se traza un cuadrado ab para representar x^2 , y sobre los cuatro lados de este cuadrado construye cuatro rectángulos c, d, e y f , de $2\frac{1}{2}$ o 2,5 unidades de ancho cada uno. Esta medida atiende a la solicitud de la ecuación de $10x$, es decir, las dimensiones del área de un rectángulo de lados 10 unidades y x unidades.



Tomado de (Mora, 2018,p.9)

Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos, hay que añadir los cuatro cuadrados menores de las esquinas (que en la figura siguiente aparecen punteados), cada uno de los cuales tiene un área de $6\frac{1}{4}$ unidades. Este valor se obtiene de solucionar $(2\frac{1}{2})^2$ que es equivalente a $\frac{5}{2}^2$; resolviendo $\frac{25}{4}$ y rescribiendo como número mixto $6\frac{1}{4}$. Por lo tanto, para “completar el cuadrado” añadimos cuatro

⁶ Este enunciado, traducido al lenguaje simbólico moderno del álgebra, corresponde a la ecuación: $x^2 + 10x = 39$.

veces $6\frac{1}{4}$ ó 25 unidades, obteniendo así un cuadrado de área total $39 + 25 = 64$ unidades, tal como resulta de la ecuación dada.

Por lo tanto, el lado del cuadrado mayor debe ser igual a 8 unidades, del cual, restando dos veces $2\frac{1}{2}$ ó 5 unidades, obtenemos $x = 3$ como solución, demostrando así que la solución hallada en la ecuación de tipo 4 era correcta.

Se aprecia que en la solución de los problemas se potencializa la conjunción del desarrollo del pensamiento algebraico y geométrico.

En el álgebra musulmana ya está presente la intención de justificar los procesos algebraicos a la luz de los procedimientos geométricos y viceversa, aspecto que más adelante será significativo para el nacimiento y evolución de la geometría analítica y el cálculo diferencial.

Este aporte al desarrollo matemático de los árabes está relacionado con su trabajo sobre las ecuaciones cúbicas, que los llevó a encontrarse con el problema de las raíces de esas ecuaciones (como ocurre en la intersección de dos secciones cónicas); fue esta situación la que dio lugar a dos construcciones recíprocas:

- Algunos problemas geométricos son susceptibles de encontrar su solución con el uso de ecuaciones algebraicas con una incógnita.
- La(s) solución(es) de las ecuaciones de tercer grado, se pueden encontrar mediante construcciones geométricas.

Se destaca que la solución de este tipo de expresiones algebraicas hace posible el desarrollo de la noción de número irracional, que más adelante contribuirá a la construcción de la noción de continuidad.

De este modo, producto del intercambio con los árabes, la concepción del álgebra en Occidente se amplió considerablemente: se admitieron como números las razones conmensurables e inconmensurables, a partir del reconocimiento de la existencia de los irracionales como números.

Pero el trabajo de los árabes se hizo sobre los números naturales, y esto implicó un retroceso con respecto a las elaboraciones de los indios, que sí admitían los números negativos en sus ecuaciones.

En general, el álgebra en esta etapa se puede caracterizar como una actividad matemática sin una estructura teórica y lógica, al tiempo que se da una insistencia en la creación de procesos algorítmicos que facilitan los cálculos algebraicos.

Fase sincopada o intermedia

En esta etapa del desarrollo del álgebra se evidencia el uso de alguna abreviatura, para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente que puede sustituir el uso del lenguaje natural sin perder información, sin embargo, la respuesta se entregaba en lenguaje natural. En este sentido, se destaca la obra de Diofanto (un macedonio que vivió en el siglo V d. de C, en Alejandría) que se caracteriza por el estudio de ecuaciones de coeficiente positivo; desarrollo tan significativo que se siguió teniendo impacto sobre otras construcciones hasta finales del siglo XVI.

En el álgebra Diofántica se evidencia una preocupación por solución a ecuaciones de primer grado, donde se incluían dos o tres incógnitas, o número(s) desconocido(s), los cuales daban respuesta a una colección de problemas producto de la imaginación o

de la realidad de la época; estas prácticas fortalecieron el desarrollo operacional de los números con exponentes.

Las incógnitas con exponentes o potencias eran números completamente abstractos, ya que no hacen referencia a objetos concretos, como en su momento eran las cantidades para babilonios y egipcios, es aquí donde se evidencia una ruptura en términos del tipo de pensamiento que estaba involucrado predominantemente: el concreto o el abstracto.

Asimismo, se presenta discontinuidad con respecto al tipo de soluciones que se aceptan en las ecuaciones. Al respecto, Boyer indica que

Diofanto está interesado únicamente en soluciones racionales *exactas*, mientras que los babilonios, expertos calculistas, estaban dispuestos siempre a aceptar aproximaciones de números irracionales como soluciones de sus ecuaciones. Por este motivo las ecuaciones cúbicas aparecen raramente en la obra de Diofanto, mientras que entre los babilonios se había prestado mucha atención a la reducción de las cúbicas (p.242).

El álgebra de Diofanto se debe considerar como una discontinuidad, en la medida en que en ella se reelaboran unos saberes, pero en un plano distinto; el álgebra emerge como una construcción que no se basa en el álgebra geométrica, sino que este acercamiento se promueve desde lo numérico, tal como había ocurrido con los desarrollos babilónicos.

Al respecto se aprecia que el álgebra desarrollada por Diofanto fue ampliamente permeada por los aportes de los babilonios, por ejemplo, en la solución de ecuaciones

indeterminadas opta por la tendencia a aplicar el método del ensayo y el error, que no corresponde al desarrollo de una demostración. La propuesta también se caracteriza por el uso incipiente de símbolos para expresar las operaciones y las relaciones entre ellas, aunque si bien este uso permite plantearlas, no da lugar a su solución⁷.

El álgebra se limitó solo al planteamiento de algunos casos, de modo que se abandona la idea de reconocer otras formas de describir ecuaciones, y llegar a una posible generalización para obtener su resultado.

La dificultad para llegar a solventar esta necesidad matemática corresponde a la ausencia de un recurso que permitiera diferenciar las magnitudes conocidas de las desconocidas. Y fue aquí donde se propuso introducir letras para designar números, donde las consonantes harán referencia a una magnitud o número que debe ser conocido o dado, mientras las vocales se asociarán a valores conocidos o determinados. A este número desconocido se le llamaba “*aha*” o montón. Aquí se evidencia por primera vez una diferencia entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita.

Sin embargo, aunque el desarrollo de Diofanto era un desarrollo abstracto que se desprendió de un fin social o significado concreto, se trató de una actividad asociada a la elaboración de acertijos matemáticos, que careció de una organización lógica de las construcciones conceptuales y, por ende, de una formulación conceptual sistémica, lo

⁷ El uso de signos se detecta en su obra Aritmética, (influenciada por la obra de los babilonios), en la cual se usa un signo para variables desconocidas y para potencias mayores a tres, siendo esta última apreciación significativa ya que conduce a un total desprendimiento de la geometría clásica.

que privó a esta construcción de los procesos de demostración, limitando así la proyección teórica.

Esta situación cultural corresponde a lo que se considera una discontinuidad, ya que transcurridos unos cuantos años, y aunque los pobladores alejandrinos son de linaje griego, se niegan a reflexionar como sus ancestros lo había hecho antes; con respecto a la imposibilidad de construcción de curvas con elementos que no fueran la regla y compas no graduados, ellos propusieron la creación de sistemas articulados o compases especiales que describen curvas a partir del movimiento. Esta situación conduce a la formulación de una estructura teórica que lo valida, escenario que es evidente en su construcción, pero oscura en su demostración.

Fase simbólica

En esta fase se inaugura una nueva forma de pensar el álgebra, se concibe como una forma de razonamiento que trasciende con respecto a la resolución de ecuaciones, con lo que se contradice la configuración de la época de Diofanto, donde se concebía como una actividad que requería de la aplicación de trucos o el seguimiento de instrucciones para unos casos especiales.

Las ecuaciones se deben entender como una expresión algebraica en la que subyace la igualdad matemática entre dos expresiones, la cual permite demostrar reglas generales, es decir, atiende a situaciones que se relacionan con la equivalencia, la simbolización y los métodos de resolución que subyacen al operar lo representado, con el uso de incógnitas; en otras palabras, se requiere operar no solo los datos, sino también la cantidad desconocida.

En este momento histórico se utiliza el lenguaje simbólico, usando letras para cantidades y signos para operaciones, y no solo para dar solución a las ecuaciones.

En esta fase existe un manejo simbólico que da lugar a que se establezca una relación entre el álgebra y la geometría, tal como en su momento lo admitieron los griegos y los árabes, pero yendo más allá de los alcances de las anteriores propuestas. Entonces, al establecer una relación teórica entre las dos áreas, fue posible movilizarse desde la geometría al álgebra y del álgebra a la geometría para asegurar sus resultados.

Este tipo de álgebra es el que está en condiciones de aportar al desarrollo de la ciencia naciente en tanto ella requiere de una descripción matemática que permita expresar las relaciones vigentes en el movimiento y sus cambios.

4.2 La Geometría Analítica

Cuando el álgebra se organiza como lenguaje en el que se da una articulación de los planos semántico, sintáctico y pragmático se hace posible una nueva lectura de la geometría de la Grecia antigua que, por tanto, se reelabora ya no desde la geometría sino desde el álgebra.

En este caso, el objeto de estudio del álgebra serán los problemas geométricos a través de la relación de las curvas y ecuaciones en un sistema coordenado; por ende, el papel de las matemáticas se reconfigura, ya que el estudio de los números, de las magnitudes constantes y de las curvas se complementan con el estudio de los movimientos y transformaciones y, a partir de allí, con las dependencias funcionales.

Así, la Geometría Analítica se convierte en un instrumento potente que atiende los problemas geométricos usando como herramienta elemental el álgebra. Lo más significativo de su aplicación es la correspondencia existente con un sistema coordenado, permitiendo que cada curva tenga asociada una ecuación de dos variables, así mismo de manera recíproca, a una curva.

De este modo, en la geometría coordenada cartesiana se asimilan y recuperan los alcances de las construcciones abstractas, formales, de los griegos, una autentica transformación, ya que se inaugura la posibilidad de movilizarse de un problema geométrico a uno algebraico y viceversa, que permite validar los resultados obtenidos de sus ecuaciones algebraicas tal como lo menciona (Ruiz, 2003):

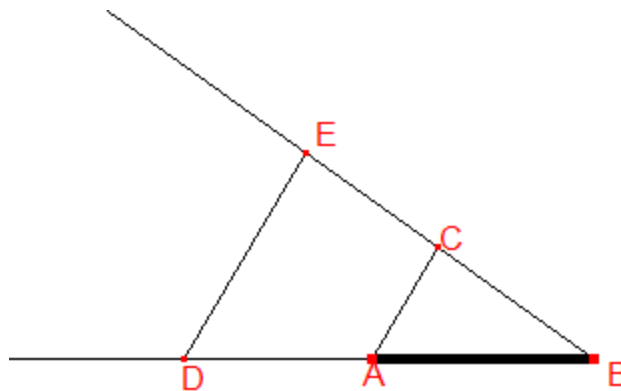
Tres pasos resumen el método de la geometría de coordenadas cartesianas:

1. se expresa un problema geométrico (o mejor dicho una construcción) de manera algebraica,
2. se resuelven las ecuaciones algebraicas obtenidas en el paso anterior,
3. y finalmente se realiza una construcción geométrica de los resultados arrojados por las soluciones de las ecuaciones algebraicas.

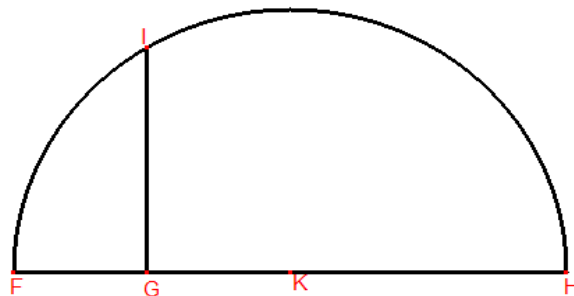
Para Descartes, la construcción geométrica clásica generaba un exceso innecesario de figuras, que él quería reducir, y, además, complementariamente, quería ofrecer un significado al álgebra usando la interpretación geométrica.
(p.261)

Tal como lo advierte Guicciardini,(2009), las relaciones susceptibles de ser establecidas entre las ordenadas y las abscisas se traducen en ecuaciones, de esta manera se puede genera un sistema de ecuaciones que expresa que el problema está resuelto. De eso se trata precisamente el método: los segmentos desconocidos son tratados como si fueran conocidos y se usan en los problemas en paralelo con los datos del problema. De esta manera se manipula el problema desde la suposición de que está resuelto, es decir, se emprende la reducción de lo desconocido.

La nueva perspectiva se puede entender mejor si se acude a la forma como inicialmente Descartes planteó la reflexión. Se trataba de buscar la magnitud de determinados datos, por ejemplo:



Con respecto al producto entre segmentos, sea AB la unidad de medida, y se solicita hallar el producto entre los segmentos BD y BC, se traza un segmento que contiene a los puntos AC y luego traza una paralela a AC, definida como DE; Obteniendo como resultado que el producto de los segmentos BD y BC es DE.



El segundo diagrama es la construcción de la raíz cuadrada del segmento GH, en esta oportunidad se toma como dado el segmento GH y un segmento de unidades FG, al trazar el diámetro de la circulo, se obtiene el segmento FH, en este segmento se ubica el punto medio definido como K, luego sobre el punto G, se traza un segmento perpendicular al diámetro FH, este segmento se definirá como GI, obteniendo como resultado la raíz cuadrada solicitada; así mismo, tal como lo advierte Guicciardini(2009):

“No obstante, la resolución de la ecuación no es la solución del problema. De hecho, ésta debe ser la construcción geométrica de la magnitud buscada en términos de operaciones geométricas realizadas con base en los datos (¡Q.E.F.!)”.
(p.18)

De esta manera se realiza un acercamiento de la geometría al álgebra; el acercamiento desde el álgebra a la geometría lo realizará Descartes de la siguiente manera:

1. *Construcción de la ecuación*: las raíces o soluciones de la ecuación algebraica deben construirse geométricamente, esta debe conocerse como la parte sintética y compositiva.

2. *Uso de curvas:* Descartes acepta el planteamiento donde la construcción de la ecuación algebraica se realice por intersección de curvas, es decir la posibilidad que las raíces sean representadas geométricamente por segmentos.

A partir del método de la geometría de coordenadas cartesiana se posibilitará el estudio de las curvas, algebraico y geométrico, las cuales ya no son corresponden a las construibles con regla y compás. Es entonces cuando se reelabora la concepción de curva dejando ella de ser el rastro dejado por un artefacto, dibujado ya sea con la regla y compas ideales o con sistemas articulados, a considerar curva aquello que se puede escribir como una ecuación algebraica determinada.

La consideración de la relación entre el álgebra y la geometría no fue completamente nueva, ya que por lo menos cinco siglos antes ya se habían realizado acercamientos por parte de la matemática árabe, de hecho, posiblemente influenciados por el contacto que tuvieron con algunas obras griegas; es así como se considera que un pensamiento se compone y se recompone en cada coyuntura.

Algo similar sucede en el estudio de las curvas sintéticas o cónicas, tal como lo señala Boyer (1986), donde expone que los métodos desarrollados en la obra *Las cónicas*; estos métodos son parecidos a los planteados en las elaboraciones cartesianas, ya que el uso de rectas de referencia, el diámetro y una tangente en uno de sus extremos potencializa la creación de un sistema coordenado, las distancias desde el punto de tangencia a lo largo del diámetro son las abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, que intersecan al diámetro y la curva son las ordenadas; ellas son, en efecto, las relaciones que se pueden establecer entre abscisas y ordenadas; el

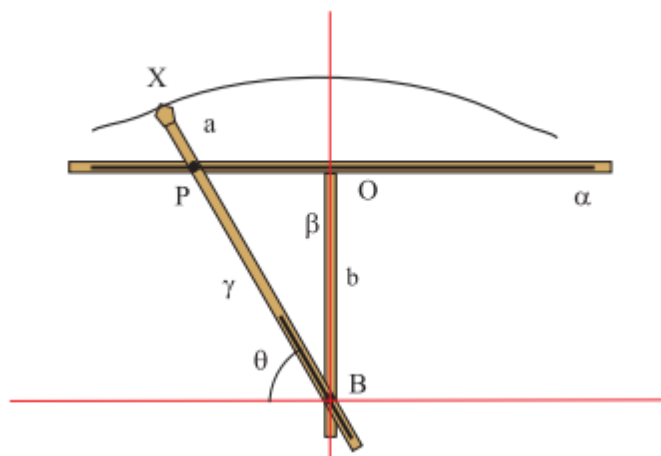
estudio de la propiedad o *Symptoma* de cada una de las curvas será un asunto de interés de la geometría analítica ya que permite definir la curva generada por estas correspondencias como lugar geométrico.

De esta manera, se instala una forma analítica de describir las ecuaciones algebraicas de las curvas, usando las proporciones que intervienen. En efecto, inicialmente se consideraba que las ecuaciones estaban determinadas por las curvas, pero no viceversa; así mismo, en esta coyuntura, para reconocer si un lugar geométrico correspondía a una curva, era necesario producirla como una sección de un sólido o describir su construcción de manera cinemática. Este escenario fue el punto de partida para el desarrollo de la geometría analítica moderna, ya que sus restricciones y condiciones se ubicaron como un asunto de interés que permitió recomponer la formación de la noción de curva como lugar geométrico.

Ocurrió entonces que las consideraciones manifestadas en el tratado de *Las cónicas*, que no fueron tomadas como de vital importancia, se retomaron en la geometría analítica moderna, logrando establecer nexos entre las medidas que variaban continuamente y la relación de la abscisa y la ordenada en cada uno de los puntos que pertenecen a la curva.

Otro hecho, que fortalece el desarrollo de la Geometría Analítica moderna corresponde al estudio de la conoide de Nicomedes y la espiral de Arquímedes, las cuales reaparecen y se usan para dar solución a los tres problemas señalados como imposibles con el uso de regla y compas no graduados; en su análisis se permite reconocer relaciones de dependencia que guarda la curva, y la manera como su

comportamiento puede describirse como un lugar geométrico, a través del uso de proporciones; por otra parte, estos autores preocupados por la construcción de esta curva crearon artefactos, que hoy se conocen como sistemas articulados, que permitieron construir el trazo de la curva, tal como se señala a continuación:



Tomado de (Aroca, 2013,p.22)

Este tipo de actividades permitía un acercamiento que pasaba de lo abstracto a lo concreto, con respecto a la idea de continuidad de una curva, diferente a la circunferencia.

Este abordaje permitió reconocer nuevos retos a la hora de realizar la construcción de la ecuación, por ejemplo, identificar los criterios para seleccionar las dos curvas pertinentes para ser intersecadas, de tal manera que su intersección determinará los puntos a partir de los cuales los segmentos se pueden trazar, donde se debe evidenciar que sus longitudes indican geoméricamente las raíces de la ecuación algebraica; a partir de este análisis, Descartes consideró que las curvas que cumplían con estas condiciones corresponden a las “curvas geométricas” o lo que hoy se

reconoce como “curvas algebraicas”, advirtiéndole que se deben elegir las curvas de menor grado posible ya que son más simples. Así mismo, excluyó a las “curvas mecánicas”, las que hoy reconocemos como “curvas transcendentales”, adecuadas para su construcción. En resumidas cuentas, Descartes otorga un nuevo lugar a la curva como aquella que posee una ecuación algebraica y viceversa, a partir de una ecuación donde intervienen dos incógnitas, que genera un lugar geométrico. Esta idea se fundamentó luego con el uso del plano cartesiano.

Es así como se insiste en el uso de métodos algebraicos encaminados a la generalización y a potencializar la movilidad del álgebra a la geometría y de la geometría al álgebra, sin el uso de las coordenadas negativas.

En este contexto se gesta un especial interés por asuntos relacionados con el movimiento, el tiempo, la rapidez y la velocidad instantánea encaminado que busca asociar los conceptos físicos con las curvas matemáticas, ya que el movimiento se puede asociar a curvas; sin ir muy lejos, la trayectoria del lanzamiento de un proyectil puede ser descrita como una curva.

De este modo se logra caracterizar, describir y traducir un lugar geométrico en términos de una ecuación algebraica. Esta actividad se lleva a cabo alejándose de la matemática que se estaba desarrollando en ese momento histórico; se rompe así con un tipo de pensamiento donde los valores de x^2 son considerados un área, ahora se tomarán como otra longitud, resultado del producto de dos longitudes; es así como su significación también se modifica.

En este momento histórico se establece de manera insistente dar solución una necesidad matemática de caracterizar las curvas desde un punto de vista algebraico y un punto de vista geométrico, potenciando la movilidad que se puede dar de una representación a la otra, lo que implica establecer la certeza de los procedimientos tomando como evidencia la concordancia entre los signos-representantes y las representaciones-representadas.

Estas construcciones estimulan un cambio al contenido interno de las matemáticas, ocurre una completa eclosión con respecto al estudio de la variable, emergen “las matemáticas de las variables, como efecto de estudiar el movimiento y con él la dialéctica”. (Ribnikov, 1987, p.154).

CAPITULO 5

LOS REQUERIMIENTOS DE LA CIENCIA EN FORMACIÓN COMO CONDICIÓN DE POSIBILIDAD PARA LA EMERGENCIA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

5.1 Las transformaciones del mundo como condición de posibilidad

En los siglos XV y XVI la navegación y la invención de aparatos o instrumentos que facilitaron las tareas en altamar se intensificaron de acuerdo con las condiciones relacionadas con los procesos de exploración de otros continentes (entre otros América), que exigían transportar con seguridad a la tripulación y las mercancías, un compromiso que no podían evadir los responsables de la embarcación.

Era necesario conocer la ubicación exacta del barco, reconociendo que a medida que transcurría el tiempo se encontraba a una mayor distancia con respecto a la costa de donde había zarpado; al estar ubicado en altamar se requería información sobre la medida del tiempo; esta necesidad fue resuelta con la creación de cartas marítimas, con métodos para encontrar la posición del barco en el mar usando como referencia la ubicación de las estrellas, y con el perfeccionamiento del prototipo de reloj existente.

Ya el siglo XVI, se desarrolló el estudio formal de la astronomía náutica, tomando su independencia y diferencia de la astronomía terrestre. En su momento los estudios realizados se convirtieron en asuntos fundamentales y casi exclusivos para la navegación con la intención de mejorar la ejecución de esta actividad.

La observación que realizaban los marineros a las estrellas y constelaciones como estrategia para guiarse intensificó el uso de artefactos como el sextante y el

telescopio en las actividades marítimas, también generó observaciones y registros que posteriormente apoyaron los intentos de describir y entender el universo; el estudio de la astronomía fue un campo en el que se integró el uso de la geometría, la aritmética y la trigonometría.

La reflexión sobre el lugar de la tierra en relación con las estrellas permitió poner en tela de juicio la obra de Ptolomeo, que reflejaba el pensamiento predominante en la Edad Media, según el cual la tierra se mantenía estática en el punto central del firmamento, y todos los cuerpos celestes giraban en torno a ella en orbitas circulares de forma independiente; en una de esas trayectorias se movía el sol y en otra los planetas y en otra las estrellas fijas; esta teoría se conoció como teoría geocéntrica, que además, tenía la propiedad de no explicar el movimiento irregular de los planetas

En medio de la revolución científica del siglo XV, Copérnico propone un esquema de concepción del mundo en cuyo centro se encuentra el sol. La idea del universo heliocéntrico llegó a Copérnico con la lectura de los estudios antiguos; en estos encontró un pensamiento revolucionario, ya que Aristarcos de Samos había afirmado en la antigüedad que la tierra también se movía y su órbita tenía al sol, y que lo hacía más rápido que los planetas que se encuentran a mayor distancia del centro. En su momento esta teoría no convenció ya que sobrepasaba la imaginación de la gente de época. No obstante, Copérnico profundizó sobre esta teoría y consideró que, en primer lugar, la tierra gira a diario sobre su propio eje, así mismo el sol es el centro del universo y la tierra gira alrededor a él, finalmente, que la tierra es solo uno de muchos planetas.

La teoría heliocéntrica fue un aporte significativo para la astronomía moderna, la cual fue retomada por Kepler en el siglo XVII, quien se preocupó por las trayectorias de los planetas; a partir de sus cálculos determinó que todos los planetas se trasladan alrededor del sol describiendo trayectorias elípticas y no circulares como inicialmente fueron concebidas.

Estos desarrollos rompieron con las explicaciones mitológicas con respecto al orden del universo. En este escenario, entender la naturaleza de una manera objetiva se convirtió en una necesidad que potencialmente podía ser solventada con el uso de las matemáticas.

Un asunto central es el reconocimiento de que la naturaleza de manera permanente está cambiando, de hecho, esta siempre ha dado indicios de que sus características no son estáticas y este cambio se evidencia permanentemente a través del tiempo; de hecho, en este sentido, cualquier objeto de la naturaleza es susceptible de ser comparado, por tanto, siempre existirá un antes y en después de la característica propia del objeto en cuestión, a esta situación se le considera como el cambio con respecto al tiempo.

Este interés por el cambio en la naturaleza, específicamente por el movimiento de los cuerpos, en particular, el cambio en el movimiento, los cambios en la velocidad; hace necesaria una herramienta para analizar y comprender de manera cuantitativa los diversos procesos de movimiento. En relación con el movimiento se advierte que este es continuo, también se requiere explicar por qué se da el cambio en el movimiento; para enfrentar estas preguntas se van a requerir las nociones de infinito, mientras las

causas del cambio se van a atribuir al “ímpetus”⁸, entendido como la causa del movimiento inmanente al móvil; en esta coyuntura se requiere un cambio de perspectiva, con respecto a la concepción de infinito, de movimiento y causas del mismo.

El estudio del cambio, incluido el movimiento que se observa en fenómenos terrestres, representa una motivación para el desarrollo de instrumentos de medición del tiempo que transcurre para el observador; de esta situación se desprende el estudio de métodos más precisos para la medida del tiempo. El artefacto ideado para solventar esta necesidad fue el reloj de péndulo, aunque no fue eficaz, se requería que fuera durable, preciso en condiciones para navegación, (en efecto como se dijo anteriormente, el movimiento del péndulo se altera con el movimiento de la embarcación en altamar, modificando la medida de tiempo) ya que siendo conocido el tiempo es posible calcular la distancia recorrida.

5.2 El movimiento como objeto de estudio de la ciencia

Los datos registrados y las comparaciones entre ellos son prácticas que en esta coyuntura han adquirido preponderancia en la cultura occidental, y para su interpretación se va a recurrir a las matemáticas, ese es el caso de Galileo Galilei quien emprendió la elaboración matemática y teórica de las propuestas de Copérnico y Kepler; a partir de los datos obtenidos con el uso del telescopio; se trataba de elaborar enunciados generales, leyes, que permitieran interpretar los recorridos de los planetas.

⁸El ímpetus resulta difícil de comprender en la actualidad. Es una especie de cualidad, potencia o virtud que impregna al móvil, debido a su participación en el movimiento y a consecuencia de ella (Koyré, 2008)

Tras numerosas observaciones y registros logró reconocer que la velocidad de los planetas no siempre era la misma en los lugares donde se ubicaban durante su recorrido alrededor del sol, es decir, existía una diferencia que implicaba un cambio en su velocidad, en algunos momentos de su recorrido su velocidad era inferior y en otro superior.

Las consideraciones sobre el movimiento de los astros se extendieron al estudio de la trayectoria de un móvil, verbigracia, los movimientos que siguen los proyectiles; lo que motivó el interés de Galileo a dar cuenta de estos movimientos con el uso de herramientas matemáticas; en esa dirección exploró formas de calcular la trayectoria del movimiento, la altura que podía alcanzar, la velocidad del proyectil y el alcance que puede llegar a tener.

Con el objeto de realizar las comparaciones sistemáticas entre los datos se introdujo la aplicación del método experimental, una postura que asegura que la verdad y la validación del conocimiento se obtienen a partir de la planeación, producción y reproducción de hechos que den lugar a observaciones controladas, cuyos resultados son potencialmente matematizables. Galileo se referirá a experimentos mentales que implican la formulación de hipótesis sobre los resultados que se pueden obtener cuando se prepara un experimento y que conllevan la reflexión sobre su adecuación a las teorías de las que se derivan estas hipótesis. Según Álvarez (2016), esta etapa de especulación, si se puede llamar así, es la que se va a reconocer como propia del método que propone Galileo.

A partir de sus análisis, Galileo expresó las relaciones funcionales que identificó con palabras y con una significación que puede considerarse afín a la las

razones de cambio, por ejemplo, los tiempos de descenso a lo largo de planos inclinados de la misma altura, pero de diferentes pendientes, están unos con respecto a los otros en la relación de las longitudes de esas superficies. (Kline, 1972, p.446).

La anterior descripción corresponde a las leyes de caída de los cuerpos, descritos en lenguaje común, en la que se afirma que hay una relación entre el cambio de la posición de un cuerpo y el tiempo transcurrido, tomado como sistema de referencia; este enunciado hacía parte del estudio de la caída de los cuerpos, en términos de relaciones entre magnitudes. Estos enunciados establecen las leyes básicas del movimiento, una de ellas, que la velocidad corresponde a los cambios de posición en el tiempo.

La introducción de métodos que incorporan la noción de variable

La medida, potencializó asuntos en los que fue posible calcular las identidades y las diferencias; se hace referencia a la razón comprendida como una función (en su momento intuitiva) entre dos magnitudes. La razón, en matemáticas, es considerada como la comparación entre dos magnitudes en la que se puede determinar cómo una magnitud depende de la otra.

Es así como en el siglo XVII, se insiste en el estudio de comparaciones entre los cambios que ocurren en dos variables a partir de la consideración de cambios de una unidad en una de ellas, cuando existe una relación de dependencia entre ellas.

En este orden de ideas, a partir del estudio del movimiento se estableció que existe una correspondencia entre los cambios en magnitudes susceptibles de variación, es decir, que estas magnitudes están relacionadas, que entre ellas hay relaciones

funcionales; este acercamiento significativo requería del simbolismo que expresara formalmente las relaciones establecidas, lo que propició un acercamiento al álgebra variacional.

En efecto, tal como lo advierte Kline (1972): “Del estudio del movimiento obtuvieron las matemáticas un concepto fundamental, que fue central en prácticamente todo el trabajo de los siguientes doscientos años, fue el concepto de función o relación entre variables⁹”. Además, el acercamiento al concepto de función obedece a la aparición del concepto de razón de cambio; este se refiere a la medida a la cual una variable se modifica en relación con otra.

La razón de cambio más conocida es la velocidad ya que corresponde a la razón entre la distancia recorrida por un móvil por unidad de tiempo, por tanto, se establece una relación entre la distancia y el tiempo. Según como se modifique la distancia recorrida con la unidad de tiempo, es posible determinar la velocidad de un móvil.

En general se puede establecer que, si una magnitud depende de la otra, es posible definir una función, verbigracia, y es una función de x , lo cual se puede enunciar como $y = f(x)$. Si x se modifica de x_1 a x_2 , entonces existirá un incremento de x , expresado así:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Simultáneamente,

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

⁹ variable es un concepto que representa a aquello que cambia o que está sujeto a algún tipo de cambio. Se trata de algo que se caracteriza por no ser estable, ni constante.

Teniendo en cuenta que y depende de x , se puede establecer el siguiente cociente de diferencias

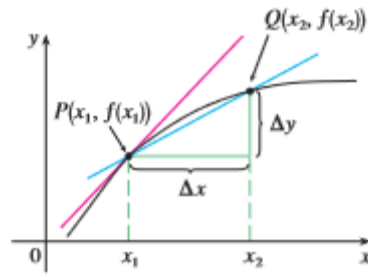
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Definido como razón de cambio promedio de y con respecto a x . En un intervalo cerrado de x_1 a x_2 .

Simultáneamente, con la velocidad y partiendo de la razón de cambio promedio se toman intervalos cada vez más pequeños haciendo x_2 se acerque a x_1 , por tanto Δx tiende a cero.

Lo cual permite calcular la velocidad instantánea en un punto. En su momento se utilizó la noción de límite de manera intuitiva, este hallazgo se denomina razón de cambio instantánea.

Desde la geometría analítica, esta relación se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva, en este caso, la que toca al punto de coordenadas $P(x_1, f(x_1))$. En la siguiente figura, la pendiente de la recta secante PQ .



razón de cambio promedio = m_{PQ}
razón de cambio instantánea =
pendiente de la recta tangente en P

Tomada de (Stewart, 2012, p.148)

Posteriormente, emerge un interés por entender el cambio de la velocidad como razón de cambio, lo que se dio lugar al estudio de la aceleración, que va a hacer parte de los asuntos que atiende la física.

El éxito de la revelación y formulación de estas funciones que expresan leyes de la naturaleza, se configuró como un instrumento para los científicos de la época que estudiaban la naturaleza, lo cual produjo la aparición de las ciencias exactas, estas pretenden describir los fenómenos de la naturaleza matemáticamente.

En este escenario se reacomodan las matemáticas, en busca del saber verdadero, el estudio de los números, magnitudes constantes, figuras geométricas, el movimiento y sus cambios, configuran un nuevo objeto de estudio, la matemática de las variables; como elemento transversal a estas prácticas discursivas, que favorecen la emergencia de una rama de las matemáticas, el cálculo diferencial.

5.3 La emergencia del Cálculo diferencial

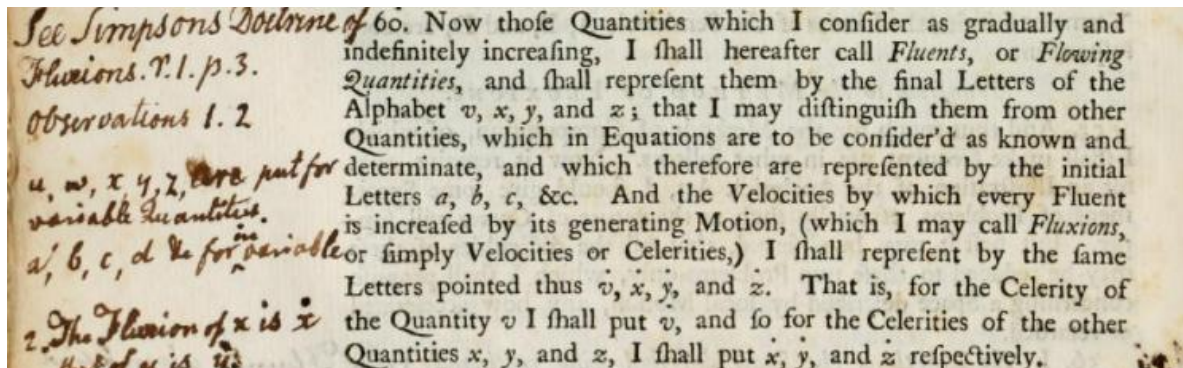
La aproximación desde la razón de cambio: Newton

El objeto de estudio central del cálculo diferencial es la razón de cambio instantánea, la cual se interpretará como derivada. Antes de intervenir con el análisis de la razón de cambio instantánea es necesario reconocer la diferencia entre razón de cambio promedio y la razón de cambio.

El método newtoniano, incorpora la teoría heliocéntrica, que fue rechazada hasta ese momento, además retoma la teoría de Galileo donde reconoce y enfatiza en el estudio de los cuerpos en caída libre, su comportamiento ya no está en concordancia con el deseo de estar cada vez más cerca de la tierra; esta apreciación fue una de las tantas inquietudes que impulsaron el estudio de la gravedad y la aceleración, al observar con detalle en múltiples oportunidades la caída de un objeto, se logró identificar que su velocidad aumentaba, es decir su velocidad presentaba una diferencia con respecto a la velocidad que tenía en un momento anterior, recorría una distancia mayor por unidad de tiempo, en la medida en que había transcurrido más tiempo. Es aquí donde el análisis con respecto a la diferencia toma sentido: el interés es entender cómo cambia esta velocidad.

En el documento *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (Newton, 1736) expone el método de las fluxiones. Este debe ser entendido como el estudio de lo que hoy se define como derivadas; a la luz del estudio del movimiento de un móvil que se desplaza por una trayectoria que ha sido descrita como un lugar geométrico, es decir existe una ecuación algebraica que la describe.

En cada uno de los puntos que se ubica el móvil del lugar geométrico describe la relación entre la distancia y el tiempo, es decir describe la velocidad en ese punto, pero el propósito no está en interpretar lo inmutable o lo estático, está en describir el cambio, es decir la variación de la velocidad con respecto al tiempo.



Tomada de (Newton, 1736, p.20)

En este texto se aprecia la introducción de la notación newtoniana característica que utiliza las letras finales del alfabeto (v, x, y, z) para representar las cantidades fluyentes o fluentes (fluents), las variables que varían continua e indefinidamente, mientras que dichas letras con un punto sobre ellas ($\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) designan las fluxiones (Fluxions) o tasas de cambio de la variable respecto (las velocidades instantáneas del movimiento). Newton puntualiza que las fluxiones son las velocidades o las celeridades (velocities or celerities) por las cuales cada fuente es aumentado o incrementado por la tendencia del movimiento (generating motion).

Así mismo, como x e y son cantidades fluyentes porque cambian, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las fluxiones de las fuentes x e y . La fluxión de la fluxión se denotará mediante $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$, etc. Un poco más adelante, Newton llama «momento de la fuente» a la cantidad infinitamente pequeña que varía una fuente como x en un intervalo de tiempo

infinitamente pequeño. Por tanto «la velocidad x por una cantidad infinitamente pequeña o , es decir, xo , representa el momento de una cantidad cualquiera x .» (Collette, 2000,p.110).

En términos simbólicos el método de las fluxiones, tiene en cuenta para su realización dada una ecuación algebraica en un pequeño intervalo de tiempo, que fue definido como momento o , x se incrementa $x + xo$, y se incrementa $y + yo$.

$$y - x^3 = 0$$

$$(y + yo) - (x + xo)^3 = 0$$

$$y + yo - (x^3 + 3x^2xo + 3xo^2x^2 - o^3x^3 - x^3 + 3x^2xo + 3xo^2x^2 + o^3y^3) = 0$$

$$y + yo - x^3 - 3x^2xo - 3xo^2x^2 + o^3x^3 - x^3 - 3x^2xo + 3xo^2x^2 - o^3y^3 = 0$$

Como o es infinitamente pequeño se cancelan los términos que poseen o

$$y - x^3 - x^3 = 0$$

$$y - 3x^2 = 0$$

Esta última expresión es la fluxión o la ecuación algebraica que describe la razón de cambio de la ecuación:

$$y - x^3 = 0$$

La elaboración del método de las fluxiones permitió interpretar las variaciones de la velocidad de los cuerpos. Pero, adicionalmente, al permitir tratar las variaciones como razones de cambio se pudo interpretar la gravitación universal y, por otra parte, calcular la constante gravitacional en términos de aceleración constante, como movimiento uniformemente acelerado. De este modo se pudo explicar el cambio a

distancia y desde entonces no fue necesario recurrir a causas inmanentes presentes en los cuerpos, ahora los fenómenos son producto de relaciones, de fuerzas que ejercen las magnitudes de los cuerpos.

Al realizar un análisis con respecto a la notación newtoniana sobre las fluxiones es posible dimensionar la concepción cinemática en su análisis de las trayectorias que naturalmente son curvas, ya que subyacen a fenómenos físicos; con respecto a la geometría, en el método de las fluxiones las trayectorias son concebidas desde un punto de vista de la cinemática.

5.4 La aproximación al Cálculo desde la geometría analítica: Wallis y Leibniz

Para alcanzar este desarrollo, en la época se dieron otras condiciones que posibilitaron la emergencia del Cálculo, una de ellas fue la relacionada con el estudio de la curva que describe el rastro del movimiento de una partícula o móvil, es decir desde una concepción cinemática de la curva y su generación.

En efecto, el estudio del cambio como razón conduce al estudio de los problemas relativos a cambios de posición de un objeto o de una partícula por unidades de tiempo, asunto que requiere ser estudiado con elementos de la geometría analítica, como el sistema coordenado y el uso de curvas que puedan ser escritas algebraicamente, es decir con el uso de ecuaciones algebraicas, las cuales configuran un nuevo concepto la

curva descrita como un lugar geométrico¹⁰. Este desarrollo constituye un acercamiento desde la Geometría Analítica¹¹.

Wallis se interesa en el estudio de la obra de Arquímedes, recogiendo elementos que permiten precisar las relaciones físicas y la demostración matemática que se apoyan mutuamente, recuperó lo ocurrido durante la actividad productiva del ingeniero de Siracusa, asociada a la fabricación de artefactos bélicos, donde el perfeccionamiento de estas máquinas requirió el estudio del movimiento de una partícula, para lo cual recurrió a calcular el área bajo la curva que describe la trayectoria de la partícula (la cuadratura del segmento de parábola), en tanto ese sector corresponde a la velocidad de la partícula, asuntos propios del Cálculo integral (que por ahora no son de nuestro interés).

En efecto, Wallis al retomar los desarrollos de Arquímedes, reconoce debilidades al involucrar el álgebra en los procesos de generalización; a partir de estas reflexiones, Wallis, influenciado por los aportes de la geometría analítica, se preocupa por el estudio de los infinitesimales, que parten del análisis de la medida y la descripción de la curva con un tratamiento algebraico.

Entonces el Cálculo empieza a tener allí un lugar: permite captar la complejidad del cambio.

¹⁰ Un lugar geométrico es un conjunto de puntos (x, y) que satisfacen una determinada condición o propiedad geométrica. La solución de un problema de lugares geométricos es una ecuación, la ecuación de todos los puntos que cumplen la dicha condición.

¹¹ Como se mencionó en la sección correspondiente, Descartes retomó el documento “las Cónicas” de Apolonio y se preocupó por el análisis de las curvas, desde la representación que estas ofrecen, es decir, según la medida, ya que el comportamiento de estas se analiza con el uso de proporciones y entre distancias generadas por la curva y el plano oblicuo, y en relación al orden con respecto a la ecuación algebraica que la describe como lugar geométrico, cuya categorización está determinada en términos del exponente o grado de la misma.

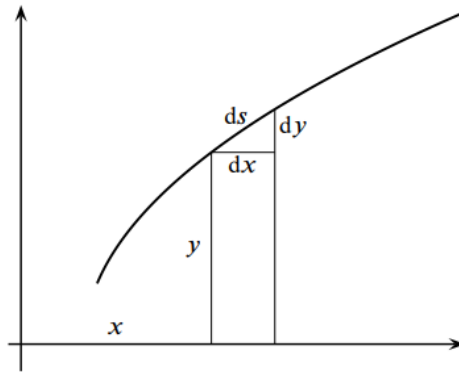
Paralelamente ocurre una reflexión en la que se concibe la curva como un polígono compuesto por un número infinito de lados, bajo una corriente matemática que se preocupa por el estudio de las series numéricas.

De este modo, la corriente leibniziana, que da lugar a la formalización del cálculo, se interesa por el uso de simbología, tomando como referencia la ecuación algebraica del lugar geométrico; la curva es considerada como un polígono con infinito número de lados y analizando el comportamiento de estos es posible desarrollar el cálculo, en nuestro caso la preocupación es la derivada, aunque en su momento no fue definida de esta manera.

A una curva se le puede asociar una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ donde los puntos (x_i, y_i) , ubicados en la curva, esos se pueden contemplar como los vértices de la curva poligonal. La diferencia entre dos valores sucesivos de y es llamada la diferencial de y y se representa por dy significado análogo al que tiene dx .

Como se puede evidenciar en la representación usada, se insiste en la diferencia, lo cual está en concordancia con la configuración del conocimiento de la época.

El diferencial dx es una cantidad, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x , de hecho es infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por ds . Resulta así el triángulo característico



Triángulo característico.

Teniendo en cuenta que la curva es infinitamente poligonal, por tanto la unión de estos segmentos, es decir los diferenciales, dx , dy , ds permiten la construcción de un triángulo rectángulo, tal que $ds^2 = dx^2 + dy^2$ como se observa en la figura. Se considera el lado de la curva como el lado ds sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y) . La pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{dy}{dx}$, que es un cociente de diferenciales o cociente diferencial.

En consecuencia, el uso de la representación se instala como un lenguaje que expresa leyes físicas, de igual manera sucede con las notaciones y simbología que permite reconocer y ajustarse a procesos en matemáticas, a su vez, se convirtió en una construcción relacionada con la investigación científica: permitió vincular la geometría con la identificación de razones de cambio.

En efecto, el estudio del cambio como razón conduce al estudio de los problemas relativos a cambios de posición de un objeto o de una partícula por unidades de tiempo, asunto que requiere ser estudiado con elementos de la geometría analítica, como el sistema coordenado y el uso de curvas que puedan ser escritas algebraicamente, es

decir con el uso de ecuaciones algebraicas, las cuales configuran un nuevo concepto la curva descrita como un lugar geométrico¹².

5.5 La física y la matemática como construcciones articuladas

Para finalizar, el desarrollo de las perspectiva física y matemática permite encontrar puntos en común, por ejemplo, su método analizaba el cambio, la diferencia, por tanto, su análisis respondía a variables y no a funciones como ocurre con el método actual de derivación.

De hecho, en esta situación del siglo XVII es donde se intensifica la generalización y el uso de variables consecuencia de la evolución del lenguaje común a lenguaje algebraico, tal como lo señala Ribnikov (1984):

Las matemáticas se transformaron convirtiéndose fundamentalmente en las matemáticas de las variables, fue así como ocurrió la ampliación del objeto de las matemáticas a cuenta de la inclusión en el movimiento y la elaboración de nuevos medios de su transformación matemática.

Esto constituye una ampliación del enfoque y la reflexión de las matemáticas, es allí donde se inauguran una nueva forma de pensar, la cual se orienta a definir aquellos objetos matemáticos que se habían considerado imposibles de definir, como lo es la noción de infinito.

El estudio del movimiento es un asunto que hace parte de la física, ya que permite introducir el concepto de cambio y los efectos de las propiedades generales de este; en

¹² Un lugar geométrico es un conjunto de puntos (x, y) que satisfacen una determinada condición o propiedad geométrica. La solución de un problema de lugares geométricos es una ecuación, la ecuación de todos los puntos que cumplen la dicha condición.

medio de este escenario aparece la noción de magnitud variable y función en matemáticas. Estos elementos, en conjunción con los alcances de la geometría, álgebra y geometría analítica en el siglo XVII, constituyen las condiciones de posibilidad que permiten el nacimiento del Cálculo. Al mismo tiempo se inauguran el pensamiento científico de la época, que se constituye como modelo para otros campos.

Precisamente al establecer la relación entre matemáticas y física, motivada por el estudio del movimiento, particularmente como propiedad de la naturaleza, se detecta que los conceptos e hipótesis físicas se fundamentan en las construcciones de las matemáticas: la posibilidad de formalización de las relaciones será lo que otorga a la física la categoría de ciencia; desde entonces, los conceptos se expresarán en sus términos, de lo que se derivará una comprensión operatoria de los conceptos. De hecho, tal como lo argumenta en su tesis Barrangan (2003):

Las hipótesis físicas resultan inseparables de su forma matemática, (considérese el caso simple de la velocidad instantánea, resulta indisoluble del concepto de derivada respecto del tiempo); Lévy-Leblond, caracteriza esta relación especial mediante dos propiedades, que, a nuestro juicio, explican de forma clara ésta singular situación...Se trata de la *plurivalencia* física de las matemáticas y del *polimorfismo* matemático de la física. (p.14)

En efecto, la física y las matemáticas se integran; las leyes de la física provienen de la experimentación y requieren de un lenguaje universal y simple (sin perder información) que permita comprender su significación y alcance, por esto, las relaciones existentes manera se expresan e interpretan como relaciones entre variables o magnitudes continuas, como por ejemplo, el tiempo y la distancia, para

calcular a partir de ellas otras no conocidas, por ejemplo, la velocidad, información que propicia la predicción de hechos; simultáneamente con la oportuna toma decisiones.

En relación con la plurivalencia física, esta debe ser entendida como el modelo matemático que expresa relaciones o propiedades físicas distintas; en contraste con el polimorfismo matemático que permite que una relación física pueda ser expresada con el uso de las matemáticas, situación que se acerca a lo que hoy es considerado como funciones matemáticas, que pueden ser estudiadas a la luz del cálculo diferencial como razón de cambio.

CAPÍTULO 6

LA MATEMATIZACIÓN DE LA ECONOMÍA, EL ASUNTO DEL MARGINALISMO

A finales del siglo XVIII, las Matemáticas se han constituido como el lenguaje de las ciencias, las cuales se ajustaron con otras ramas del conocimiento como la física,

química, astronomía, hoy definidas como ciencias de la naturaleza; de la misma manera se sitúan en las ciencias sociales, o humanas y en especial la economía, como instrumento para legitimar su conocimiento; en economía con menor eficiencia, comparada con la física.

Los alcances en torno al desarrollo de la física relacionados con el análisis del movimiento incentivaron en las nacientes ciencias sociales la búsqueda de un componente matemático que las legitimara, tal como fue la tendencia de la época (siglos XVII y XVIII). Al concebirse las matemáticas como lenguaje de las ciencias, se consideró que en los distintos campos de conocimiento era posible configurar los aspectos estudiados por las correspondientes disciplinas como se había hecho en la física, aunque se reconoció que algunos elementos que hacen parte de sus sistemas conceptuales no eran susceptibles de ser cuantificados¹³. Una de las áreas de conocimiento en las que fue posible introducir procesos de matematización de las nociones y de sus relaciones fue la del análisis de la riqueza de las naciones.

Así, uno de los aspectos más sobresalientes de la historia de las ciencias sociales fue la emergencia de la Física Social, un área de conocimiento que involucró de manera significativa las matemáticas, como estrategia para formalizar las relaciones entre aspectos establecidos teóricamente, es decir la introducción de tipos de análisis

13 Según Bourdieu (2001) cuando la matematización de las nociones y las relaciones no es posible, esta condición cuestiona el calificativo de ciencia que se le otorga al campo de saber; según este autor, la matematización es una propiedad sine qua non para que un proceso de producción simbólica sea reconocido como ciencia.

que hoy conocemos como relaciones entre variables. De hecho, tal como se advierte en Mar Mior América (2017), denominamos Física Social a un área de conocimiento que tiene la pretensión de ser una ciencia, la ciencia de los hechos sociales que se expresa en un lenguaje matemático análogo al de la Física, es decir, midiendo magnitudes “objetivas” y estableciendo relaciones entre ellas mediante ecuaciones.

6.1 Las riquezas

Este proceso de establecimiento de relaciones entre magnitudes fue posible en este campo, dada la tradición de análisis del valor de los bienes intercambiados en los mercados, que en el caso de Europa y de Occidente está vinculada con las prácticas mercantilistas que habían adquirido gran alcance (incluso intercontinental) desde el siglo XV, y en las que la moneda se usó ampliamente para representar valores, en virtud de que se asigna un valor a los metales¹⁴. La práctica de representar los valor permite relacionar el valor de los bienes, en consecuencia asignar un precio, y establecer la magnitud de las riquezas.

Para que un bien pueda representar a otro en un cambio, se requiere que exista ya asignado un valor; pese a que el valor solo existe en el interior de la representación es decir, en su posibilidad de ser intercambiado. Esta consideración, permite reconocer dos puntos de vista de manera simultanea, en primer lugar se analiza con anterioridad la posibilidad del cambio, y por otra parte, se analiza el valor en la ejecución del

¹⁴ El oro, era considerado inicialmente como un bien que tiene valor, y que en calidad de objeto valioso se puede intercambiar con otros bienes (lo que remite a las prácticas de trueque), solo posteriormente es acuñado como moneda, es decir, se utiliza como patrón para el intermediario entre otras mercancías, convirtiéndolo en medio de cambio acumulable, base del enriquecimiento.

cambio, en el momento mismo del cruce entre lo dado y lo recibido; es decir se produce una comparación que lo valida.

Que la moneda se acepte como patrón de medida de otras mercancías y las sustituya en el proceso de intercambio, es decir, se convierta en medida de las riquezas, requiere que esté cargada con un valor nominal exacto. No obstante en estos siglos en que el capitalismo se está estructurando, el precio de los bienes no corresponde a magnitudes constantes, por las cuales pueden ser cambiados, sino que responde, entre otras consideraciones, al cálculo de su utilidad es decir al nivel de satisfacción que su adquisición y consumo pueden generar en el individuo que los posee. En el mismo proceso de intercambio, se establece la capacidad de satisfacer necesidades, que provienen de considerar la utilidad del bien propio con respecto al bien ajeno. En consecuencia la fuente de la riqueza se configura, entre otras, en la actividad del comercio.

Otra aproximación al análisis de las riquezas (la de los fisiócratas) llevó a establecer que el trabajo (esfuerzo) invertido en su producción es el que determina el verdadero valor de intercambio asignado a toda mercancía; por tal motivo, un bien o un conjunto de bienes serán más o menos valiosos en razón al esfuerzo y fatiga que haya exigido su producción; sin embargo, la recompensa a este esfuerzo puede variar, si esta mercancía es escasa¹⁵.

¹⁵ En general, se tiene que el valor de un bien no se establece de manera arbitraria, corresponde a distintas perspectivas teóricas, que pueden destacar la necesidad de los compradores, el deseo que desierta el bien, los recursos invertidos o el trabajo requerido para su producción. En estas condiciones, la elaboración conceptual llevará a distinguir dos tipos de valor que tienen los bienes, en primer lugar el

6.2 El marginalismo, la versión económica de la derivada.

Del estudio de la variación en la retribución al esfuerzo, cuando los bienes son escasos, es precisamente el asunto que se encarga la disciplina que aborda el comportamiento de los sujetos en los mercados. Este andamiaje es el que propicia la emergencia de la economía como ciencia, saber social que ostenta el carácter de ciencia en virtud de los procesos de matematización de sus sistemas conceptuales: “se basa en la construcción de modelos de los fenómenos sociales, estos modelos deben ser entendidos como una representación simplificada de la realidad.” (Varian, 2010, p.1)

Esta situación requirió estratégicamente de un lenguaje y de una estructura formal, que se fortalece con el uso del cálculo infinitesimal y la noción de puntos extremos locales, que más adelante se alimentaron de la noción de función, y que en este momento inicial remiten a la noción de relación, entendida como la interdependencia entre valores que están cambiando.

A delimitar y llevar a cabo este análisis, se orientan los desarrollos propios de la microeconomía. La microeconomía estudia el funcionamiento de las empresas en tanto unidades económicas que realizan procesos de producción y comercialización de mercancías, y ofrece elementos para la toma de decisiones en ellas, con base en el comportamiento propio y del mercado (de los competidores y de los consumidores); se

que atañe a su uso y utilidad, en segundo lugar el que corresponde a su relación con el de otros bienes cuando se incorpora en el mercado, valor de cambio; esta última noción será la base de la elaboración de la noción de mercancía y de acumulación de valores, asuntos centrales en la comprensión del capitalismo.

trata de establecer qué producir y cuánto cobrar, en relación con las decisiones de los consumidores acerca de qué y cuánto comprar. La disciplina busca explicar las tendencias de producción de bienes y servicios que se observan (Case, Fair, & Oster, 2012, p.8).

En este campo, se lleva a cabo el análisis marginalista, que, tal como lo describe Pérez(1980),

Es el resultado del esfuerzo científico en la búsqueda y elaboración de un método general que permita, de una forma ordenada, tratar el problema de obtener el mayor provecho posible de los recursos limitados de un sistema económico, o lo que es equivalente, obtener algo con la menor cantidad de recursos. (p. 473).

En estricto sentido, el marginalismo¹⁶ se constituye en la intersección de dos construcciones conceptuales que se integran entre sí, el saber social y el saber matemático; requiere del reconocimiento de las variables económicas y su dependencia, es decir, de sus relaciones funcionales; a partir de él, el análisis marginal se ocupa de estudiar el margen, en otros términos, la frontera, buscando determinar los efectos producidos en una variable por las modificaciones de la magnitud –la adición de una unidad– en la otra. Todo lo cual representa la articulación de los procesos de intercambio de valores y el aporte de la matemática a su elaboración formal.

¹⁶ La expresión “marginal” proviene de los economistas de la escuela marginalista, que reconocen las deficiencias de los anteriores modelos de análisis cualitativos propuestos para resolver algunos problemas planteados en su momento por la teoría económica.

El procedimiento matemático lleva a establecer la forma como los cambios en la aplicación de recursos inciden en el nivel de satisfacción del consumidor y en la utilidad del vendedor, es decir a establecer la razón de cambio; entonces será posible identificar los valores que optimizan la función de utilidad, asunto que se resuelve mediante el cálculo de la derivada.

Pérez (1980), citando al profesor Shumpeter, considera que en estas condiciones:

Desde el punto de vista técnico, las “nuevas” teorías del valor y de la distribución se reducirán realmente al descubrimiento al cálculo diferencial como instrumento de la economía. Y esto basta para mostrar lo absurda que es cualquier oposición de principio al “marginalismo”. (Pérez, 1980, p.473).

Este desarrollo teórico se comprende a la luz de la fundamentación teórica que se describe hoy en los libros de textos universitarios, en estos se requiere una función de dos variables,

$$y = f(x),$$

en donde x es la variable independiente e y la dependiente.

La derivada (dy/dx) se define como el límite del cociente entre los incrementos de las variables dependiente e independiente, cuando este tiende a cero.

Esta propuesta involucra la notación de derivada usada por Leibniz, la cual se puede asociar al cálculo de la pendiente m de la recta tangente a la curva en un punto; a la luz de los procesos desarrollados en este documento, se contempla como información económica valiosa y precisa, puesto que $m < 0$ se puede asociar para el

caso de demanda y $m > 0$ para la oferta, que fundamenta elementos teóricos de microeconomía.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sin embargo, es necesario anotar que esta expresión matemática corresponde a una descripción mucho más reciente del concepto de derivada, la cual está asociada al cálculo de la tasa de cambio instantánea.

En las ciencias empresariales el análisis marginal recurre a la utilización de la derivada o “diferencial”, con la intención de determinar el cambio que presenta una función que modela una situación de la economía, como lo es, el ingreso, costo, utilidad, producción, al incrementarse en una unidad.

Tal como lo advierten Lial & Hungerford, (2000): “Una de las principales aplicaciones del cálculo es determinar cómo cambia una variable en relación con otra. Un hombre de negocios quiere saber cómo cambian las ganancias con respecto a la publicidad” (p. 402). En este orden de ideas, es posible reconocer algunas funciones en las que interviene el uso de la derivada: ingreso marginal, costo marginal, elasticidad de la demanda, entre otras.

Originalmente, los economistas estudiaron el coste o costo marginal a un nivel de producción x como $C(x + 1) - C(x)$, que es el coste de producir una unidad adicional de un producto, como

$$C(x + 1) - C(x) = \frac{C(x + 1) - C(x)}{1} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x + h) - C(x)}{h} = C'(x)$$

De ahí que, que el coste marginal $C'(x)$ al nivel de producción x es aproximadamente el coste de producir la unidad $(x + 1)$. (Salas, Hille, & Etgen, 2002, p.151).

Por otra parte, como lo consideró Escartin(2018), los economistas marginalistas reconocieron que este método es útil en situaciones de corto plazo con el propósito de encontrar situaciones de equilibrio, es decir la igualdad entre dos funciones, la de oferta y la de demanda; en efecto al reconocer estas relaciones funcionales, se afronta el problema del valor y aparece la teoría del comportamiento del consumidor, que conduce a reconocer la demanda; luego se amplía al estudio del comportamiento del productor o las empresas, lo cual lleva a la oferta, así mismo aparece la teoría de la distribución y la teoría de producción. Este proceder permite tener en cuenta a los sujetos económicos, (productores y consumidores), que corresponden al ámbito de la microeconomía.

En el caso de la demanda, se consideran las preferencias del consumidor; con este propósito se recurre a un enfoque matemático y físico en conjunción con la ley de utilidad marginal decreciente; esta ley económica establece que el consumo de un bien proporciona menor utilidad o satisfacción adicional cuando se consume, es decir, se produce una valoración decreciente a medida que se consume una nueva unidad de este bien. En otras palabras, se plantea que una variable modifica sus valores en el margen, ante el aumento de una unidad de otra variable.

Sin embargo, para entender esta situación es necesario comprender la restricción presupuestaria que afrontan los consumidores, esto corresponde a la limitación del

presupuesto que esos enfrentan para adquirir bienes o servicios, en otras palabras, debido a que su presupuesto es limitado o fijo procuran determinar cuánto pueden consumir de cada bien y así establecer su nivel de satisfacción posible. El análisis del comportamiento del consumidor se hace a partir de las relaciones funcionales que se pueden establecer entre la cantidad y el precio, por esto, la curva se obtiene a partir de estas dos variables.

Así, en microeconomía se ha identificado la necesidad de contar con una medida de la “sensibilidad” de la demanda con respecto a las variaciones del precio. A la luz de las matemáticas esto corresponde al cálculo de la pendiente de la curva de demanda, ya que al interpretar este objeto matemático con elementos de la microeconomía corresponde al cociente de la variación de la cantidad demandada con la variación del precio.

$$\text{Pendiente de la curva de demanda} = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Esta medida de sensibilidad presenta algunas dificultades matemáticas para llevar a cabo su interpretación. Verbigracia la pendiente de la curva de demanda depende de las unidades en que se mida la demanda y el precio. Tal como lo advierte Varian (2010);

Si la demanda se mide en hectolitros en lugar de litros, la pendiente es cien veces más inclinada. Por lo tanto, en vez de especificar en cada ocasión las unidades, es más cómodo utilizar una medida de la sensibilidad independiente

de las unidades de medida. Los economistas han decidido utilizar una medida conocida con el nombre de elasticidad.

En el marco del estudio de la demanda se elabora la noción de **elasticidad-precio de la demanda**, ε ; ella se define como la variación porcentual que se presenta en las cantidades demandadas de un bien ante la variación también porcentual del precio. Una subida del precio en un 10 por ciento es una subida del 10 por ciento, independientemente de que se mida en dólares americanos o en euros. (p.283)

En efecto, la anterior consideración elimina el uso de unidades, resultando útil medir sus variaciones en términos porcentuales. En tanto la elasticidad se define de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}$$

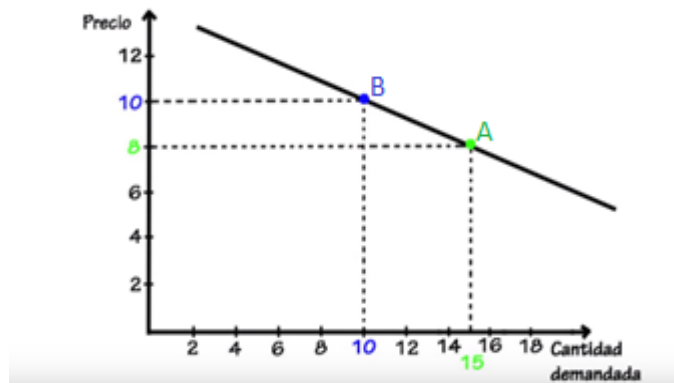
Expresión que se puede expresar como:

$$\varepsilon = \frac{p\Delta q}{q\Delta p}$$

Según Varian(2010):

La elasticidad se puede expresar como el cociente entre el precio y las cantidades iniciales multiplicada por la pendiente de la curva de demanda. En el apéndice de este capítulo describimos la elasticidad por medio de la derivada de la función de demanda. Si el lector sabe cálculo, esta formulación es la manera más útil de entender la elasticidad. (p.284)

Así, por ejemplo, al calcular el precio de la demanda de la siguiente situación:



Se debe tener en cuenta que la elasticidad se calcula, de modo que:

$$\varepsilon = \frac{\text{Cambio porcentual de la cantidad demanda}}{\text{Cambio porcentual en el precio}} = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}$$

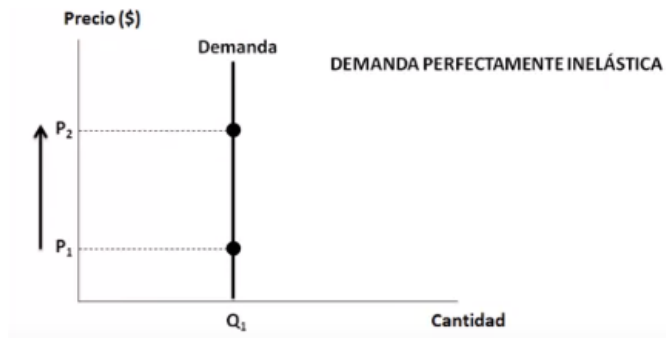
Supongamos A el punto inicial, donde el precio es 8 y la cantidad demandada es 15 si el precio sube a 10 la cantidad demanda es 10.

$$\varepsilon = \frac{\frac{10-15}{15}}{\frac{10-8}{8}} = \frac{8(10-15)}{15(10-8)} = \frac{8(-5)}{15(2)} = \frac{-40}{30} = -1.33 = 1.33$$

El resultado del cálculo de la elasticidad precio de la demanda siempre es menor que cero, es decir tiene signo negativo, esto ocurre por la ley de la demanda que implica que cuando el precio sube la cantidad demandada baja, y viceversa. Para efectos de análisis, esto implica que siempre se toma el valor absoluto.

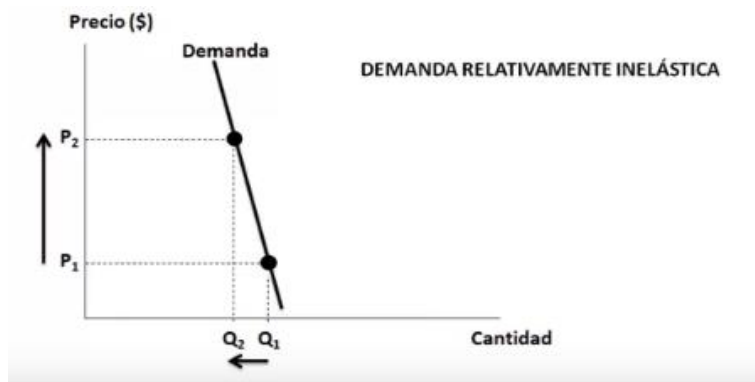
Para comprender mejor el concepto es necesario reconocer los distintos tipos de elasticidad.

- Demanda perfectamente inelástica



Ante una curva de demanda como la anterior el coeficiente de elasticidad es cero, $\varepsilon = 0$ lo que implica, que no importa cuánto aumente el precio el consumidor siempre adquiere la misma cantidad de bienes.

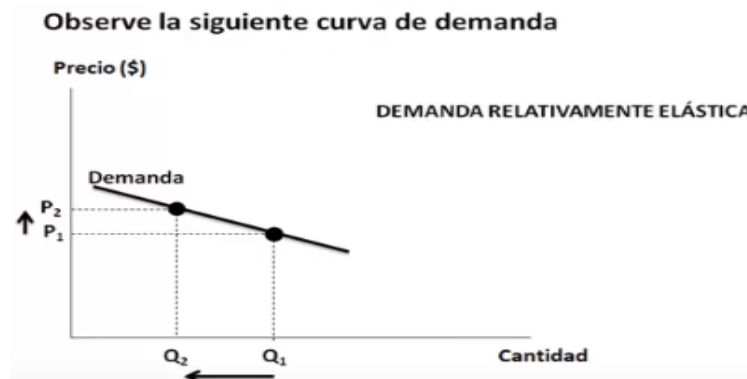
- Demanda relativamente inelástica:



En este caso, el coeficiente de elasticidad es $\varepsilon < 1$, esto indica que la variación porcentual en la cantidad es pequeña comparado con el cambio porcentual mayor en el precio.

En las empresas, este tipo de análisis permite tomar decisiones; por ejemplo, en la situación anterior se puede observar que al aumentar el precio significativamente son pocas las cantidades que disminuyen, por tanto, para quien toma decisiones con respecto al alza de precios es prudente incrementar el precio, ya que los ingresos se incrementan aún dada la sensibilidad que presenta el mercado.

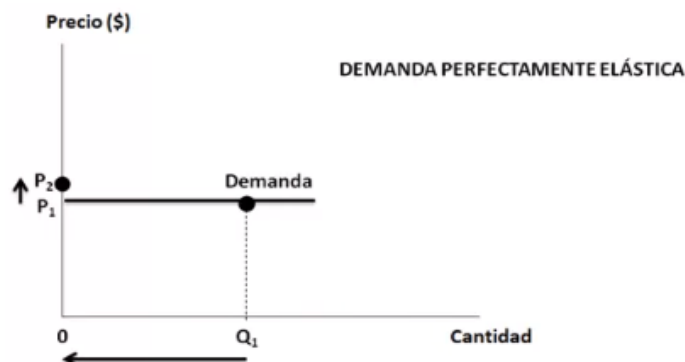
Demanda relativamente elástica



Ante una curva de demanda como la anterior el coeficiente de elasticidad es $\varepsilon > 1$, esto indica que la cantidad adquirida por el consumidor aumenta en mayor porcentaje, comparado con el cambio porcentual en el precio.

Esta situación también brinda información con respecto al comportamiento del mercado; en la gráfica se puede evidenciar que en demandas relativamente elásticas es prudente disminuir el precio del bien con el fin de aumentar la cantidad de bienes que desea adquirir el consumidor.

- Demanda perfectamente elástica



En este caso, $\varepsilon = \infty$.

El coeficiente de elasticidad será infinito cuando el precio se mantiene constante.

En general, por cuanto la medición de las elasticidades permite caracterizar el comportamiento de la demanda respecto a la variación de los precios, sirve de apoyo a las decisiones de las organizaciones sobre su forma de actuar en el mercado.

Todos estos análisis no implican que el marginalismo sea otra rama de la economía. Por el contrario, se debe considerar como un método de análisis económico que recurre a las matemáticas para elaborar los conceptos propios de las teorías del productor, del consumidor y del mercado. En pocas palabras, el principio de marginalidad es la versión económica del concepto matemático de derivada. Lo que incluye la apropiación de los desarrollos conceptuales que constituyeron condiciones de posibilidad para la emergencia del cálculo, por ejemplo, la referencia a la síntesis entre construcciones geométricas y algebraicas, tal como ocurre en el caso de las conocidas como curvas de indiferencia, que están presentes en las ecuaciones de oferta y demanda, que incorporan el estudio de ecuaciones algebraicas.

A partir de las anteriores consideraciones se puede inferir que el modelo de marginalidad que hoy es usado en asuntos relacionados con la microeconomía (el comportamiento de productores y consumidores), corresponde a un “ajuste obligado” de las consideraciones que hoy se manifiestan a través del cálculo.

Este es un tema de reflexión, que recoge los dos ajustes medidos desde dos posturas a la luz de la educación matemática tal como advierte, Anacona (2003):

Tradicionalmente se han distinguido dos maneras de abordar el trabajo histórico en torno al conocimiento científico, una internalista y otra externalista. Desde la corriente internalista, se considera que el objeto de la Historia de las

Ciencias es la ciencia misma. Es así como se trata de hacer una historia de los conceptos, atendiendo básicamente su estructura lógica de producción. Desde la externalista, se considera que las explicaciones sobre acontecimientos científicos se pueden obtener primordialmente desde el ámbito social, postura que se acerca más a una sociología de las ciencias. (p. 31)

Con respecto al asunto que se describe en este documento se puede considerar que la economía retoma algunos elementos para la consolidación de su teoría desde una postura externalista, ya que los elementos que captura del Cálculo para sustentar su teoría marginalista requieren del estudio de los comportamientos de la utilidad cada vez que se incrementa una unidad del bien considerado.

La formación lógica de los conceptos matemáticos que, fortalecida a partir de las prácticas sociales, verbigracia, la microeconomía, se convierte en un conocimiento útil, para el desarrollo de actividades cotidianas, que puede convertirse después de un largo proceso en una ciencia, desde luego esta sería una motivación, que fortalecería la comprensión de tales conceptos.

Dado que la noción matemática de razón de cambio lleva a establecer la forma como los cambios en la aplicación de recursos inciden en el nivel de satisfacción del consumidor y en la utilidad del vendedor, y a identificar los valores que optimizan la función de utilidad, la noción de derivada ocupa un lugar central en la comprensión de los procesos empresariales.

En las ciencias empresariales el análisis marginal conlleva la utilización de la derivada o el diferencial, con la intención de determinar el cambio que presenta una

función que modela una situación de la economía, como lo es, el ingreso, costo, utilidad, producción, al incrementarse en una unidad.

En efecto, los profesionales en formación de las ciencias empresariales requieren tener presente a la derivada en tanto que esta puede intervenir en múltiples aplicaciones.

La anterior consideración resulta interesante, ya que el mismo autor del libro de texto de microeconomía titulado “Un enfoque actual microeconomía intermedia” reconoce la importancia de tener un dominio en el cálculo diferencial. Esta precisión permite ver como la microeconomía recurre al cálculo como un instrumento.

Tal como lo advierten Garcia, Moreno, Badillo, & Azcarate, (2011) se reconocen algunas interpretaciones históricas de la derivada, que son mencionadas en los cursos de Cálculo diferencial de los programas de ciencias empresariales, una de ellas la derivada como razón de cambio de Newton, es decir la velocidad instantánea, otra es la interpretación geométrica de Leibniz, la pendiente de la recta tangente a la curva; estos enfoques pueden ser aprovechados en los cursos de cálculo diferencial, al relacionarlos con el estudio analítico de las funciones con el fin de modelar situaciones económicas que puedan ser analizadas usando la derivada como herramienta.

No obstante, la aplicación de las nociones matemáticas en economía requiere ajustes, dado que los valores de las variables en esta disciplina corresponden a variables discretas ya que las variables que son susceptibles de asignarles un valor numérico atañen a situaciones donde se analiza particularmente la utilidad dada una unidad adicional por tanto no es posible considerar que la variable independiente tiende

a cero. Esto sucede, ya que en matemáticas solo se acepta que un valor se acerca a cero si se está pensando en el comportamiento de valores que correspondan a valores continuos.

Al contrastar estos análisis con la definición de derivada que normalmente se encuentra en los libros de cálculo universitarios, se encuentran notables diferencias, por ejemplo, estos análisis no requieren en su tratamiento de la noción de límite, negando la posibilidad de recurrir a la noción de continuidad en sus análisis, no obstante, el análisis marginalista estudia la variación de la *unidad*, reconociendo de esta manera, una variación discreta.

Un hecho sencillo propicia semejante análisis, el dinero es discreto; en efecto la formación de los conceptos, que provienen de las ciencias empíricas y se reconfiguran en las ciencias sociales, solo funcionarán como metáforas, por tanto, no cuentan con una eficacia operatoria equivalente al marco de su origen. (Vega, 2014,p.31)

En economía resulta claro que el concepto de marginalidad conlleva un salto de lo discreto a lo continuo justificable sólo para poder utilizar toda la potencia del cálculo infinitesimal. Economistas como Samuelson critican la falta de realismo de los supuestos matemáticos utilizados en la teoría económica marginalista. Se critica que en el proceso de elaboración de algunos modelos se suele forzar la realidad de los procesos económicos para adecuarla o adaptarla a las exigencias formales del análisis matemático. Incluso, la propia definición de algunas funciones y teoremas matemáticos pueden ser instrumentalizados en favor de la demostración de ciertos resultados económicos. (Sarmiento & Seijas, 2006,p.6).

Es necesario reconocer que la teoría microeconómica está fundamentada en supuestos, resulta interesante analizar cómo en algunas oportunidades el origen de la información corresponde a datos de tipo discreto, sin embargo, su manipulación con modelos matemáticos en las cuales se involucren razones de cambio se adapta como si fueran de tipo continuo, es decir se ajustan a la teoría.

Precisamente al hablar de análisis marginal en las clases de Cálculo diferencial, se recurre a las aplicaciones en la economía en las que se manipularán funciones con restricciones propias de la economía, teniendo en cuenta que se emplearán cantidades como lo son precios, sueldos, empleados, entre otras. Así por ejemplo, al encontrar el dominio de la función se encontrará acotado, además será discreto, por la naturaleza de los valores que esta manipulando.

Verbigracia, para un fabricante la función de costo total es:

$$C(q) = 0.04q^3 + 12.4,$$

donde q representa tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas.

En esta ecuación se observa que la expresión algebraica $0.04q^3$ está representando los costos variables, mientras 12.4, describe el valor de los costos fijos.

Un estudiante incauto que le pidan calcular el dominio de la anterior función, sin conocer que corresponde a una función del costo total respondería:

$$Dom\ C = \mathbb{R}$$

No obstante, posiblemente su respuesta cambiaría si se informa que la expresión entregada corresponde a una función del costo total.

$$Dom\ C = \mathbb{R}^+ = 0, \infty +$$

El dominio en este corresponde a los reales positivos pues hablar de un conjunto de cantidades negativas no tiene sentido en el marco de la economía; así mismo existe otra inconsistencia, en economía debe existir una cantidad mínima o máxima de productos es decir el dominio debe estar acotado, así el dominio se configuraría de la siguiente manera:

$$Dom\ C = \mathbb{R}^+ = 0, \infty + = 0, M$$

No obstante, existe otra restricción que el profesor de cálculo debe tener en cuenta, en su clase debe realizar un paréntesis y explicar, que, en la función mencionada, la q , indica las unidades producidas y vendidas por el fabricante, lo que implica que el dominio de la función es un subconjunto de los números racionales del intervalo,

$$0, M$$

Sin embargo, se acepta como supuesto que su dominio pertenece al conjunto de los números reales, ya que en caso contrario la función no sería continua, ergo, no sería derivable.

Por otra parte, en el caso del cálculo del coeficiente de elasticidad, el docente de Cálculo debe advertir que este es una extensión de la pendiente, y que no se debe confundir la ubicación de las variables en los ejes de la representación gráfica, porque

visualmente esto puede generar dificultades en los análisis que realicen los estudiantes de las ciencias empresariales.

TERCERA PARTE: REPRESENTACIONES Y RESIGNIFICACIONES DE LA DERIVADA EN ECONOMÍA.

CAPÍTULO 7

EL MÉTODO DEL TRABAJO DE CAMPO

7.1 La estrategia de recolección de información

En este trabajo se adopta un procedimiento propio de la investigación cualitativa, el grupo focal, como estrategia para establecer las representaciones de la derivada y los abordajes que promueven los docentes de matemáticas en estudiantes universitarios del área de ciencias económicas.

El grupo focal es una técnica que consiste en el planteamiento de temas y exploración de su significado entre los participantes, primero, tal como ellos la expresan espontáneamente y luego de acuerdo a como se desarrollan los temas planteados.

En esta iniciativa se graban y posteriormente se transcriben y analizan las discusiones que han sido minuciosamente estructuradas y detalladas con el fin de obtener información sobre el estatus y la significación que este equipo de profesionales atribuye a la matemática en esta formación.

Esta estrategia es adecuada ya que permite capturar las percepciones propias de un grupo de profesores de matemáticas que durante su formación como licenciados o economistas han contemplado y estudiado asuntos propios de la historia de las matemáticas, pero que al momento de ser confrontados pueden recurrir o dejar de lado esos referentes.

Puntualizando en caso de que los docentes recurran a estos referentes, es posible encontrar distintas concepciones de la historia de las matemáticas y los usos que le han sido dados por parte de este grupo de profesionales.

7.2 Instrumento

La actividad se presentó en términos de una discusión sobre la forma de abordar la enseñanza de la matemática en la educación superior, contemplando su lugar como docentes, reconociéndola como herramienta de ejercicio profesional. Esto tuvo el propósito de iniciar una problematización, que eventualmente llevara a establecer que en este ciclo educativo no se trata de aprender a hacer cálculos, sino que se orienta a elaborar definiciones operativas de los conceptos, a apoyar la sustentación de teorías, o a servir como herramienta para la toma de decisiones.

La discusión de los docentes en relación con los propósitos y el carácter de matemáticas que deben ser enseñadas en la educación superior se condujo hacia una conversación que permitiera reconocer la posición y la eventual postura crítica ante representaciones de las matemáticas universitarias como matemáticas disciplinares, como disciplina de apoyo o como disciplina integrada al desarrollo de otras disciplinas.

En desarrollo de la anterior temática se buscó explorar la tendencia de los docentes a reconocer el abordaje de la perspectiva histórica en torno a la construcción de conocimiento de las disciplinas y, si este está presente a establecer el predominio de posturas internalistas, externalista o de mezclas de las dos posturas, a la luz de la propuesta de Anaconda.

Sondear la concepción del objeto derivada, es el punto de encuentro del grupo de profesionales, con el fin de reconocer si recurren o no a elementos históricos para dar sustento a los aspectos que destacaban en sus intervenciones, situación en la que sería posible establecer el estatus que atribuyen al dominio del algoritmo y cuestionarlos sobre los problemas a los que respondieron la formulación teórica y aplicada, incluidos los hitos de desarrollo dentro de la matemática, la respuesta a demandas externas y la relación con la emergencia de la ciencia.

En desarrollo de este tema se solicita a los docentes mencionar los conocimientos requeridos para un manejo adecuado de la derivada, con lo que se pretende identificar si ellos recurren a elementos históricos para su formalización como conocimiento científico o si hacen otro tipo de consideraciones para abordar ese concepto.

Posteriormente se busca detectar si durante la enseñanza de las matemáticas se considera la relación con la emergencia de la economía, y sondear así configuraciones en de las intenciones, los fines y significaciones de los conceptos en la especificidad propia de la labor docente en Ciencias empresariales. En esta situación se propicia la exploración de la estructuración estratégica de los contenidos matemáticos que afectan el desempeño y los alcances del perfil profesional de los estudiantes; su papel como sustento de la teoría económica, sin descuidar el fortalecimiento de habilidades propias de las matemáticas.

En consecuencia, se explora si en los cursos de Cálculo los temas se abordan de tal manera que el estudiante comprenda los procesos y conceptos relacionados con la Derivada, como sistema conceptual.

En esta situación, también es posible explorar si los docentes de matemáticas reconocen las restricciones y requerimientos al abordar el objeto Derivada asociado al estudio del marginalismo. Si se establece que el marginalismo es propio de estudios microeconómicos, en tanto solo se está pensando en supuestos que implican el cambio de comportamientos del costo, el ingreso, la cantidad producida y en ellos las cantidades mencionadas son elementos discretos, que a su vez se encuentran acotados, es necesario admitir que esta aplicación no corresponde exactamente a la definición matemática de derivada.

Al final, se brinda una oportunidad para cuestionar la relación que existe entre las matemáticas y la economía, con el propósito de revelar posturas sobre la significación de objetos matemáticos que la configuran y dan sustento a teorías como ciencia en ambas partes. Si se plantea que las matemáticas son un medio en el que se busca establecer el saber verdadero, se puede llegar a reconocer un círculo vicioso donde las matemáticas se argumentan acomodándose a comportamientos de la economía y, a su vez, en las teorías económicas se recurre a las matemáticas para sustentar y validar su saber.

La secuencia de asuntos explorados y las preguntas con que son puestos en consideración, se presentan en el *Anexo 1*.

7.3 Sujetos

El grupo de participantes en los grupos focales son matemáticos, economistas, o economistas que han dictado matemáticas, en instituciones de educación superior que

ofrecen formación en ciencias empresariales. En el anexo 2, se presentan datos sobre la formación y experiencia docente de los participantes en cada sesión.

7.4 Procedimiento

Se invitó personalmente a algunos docentes de ciencias básicas y economía. Inicialmente se hizo una presentación de la actividad.

Para iniciar cada sesión, la coordinadora del debate se presentó, pidió permiso para grabar, reiterando que cada uno de ellos tiene experiencia en el tema que se abordará en esta discusión; mencionó que la información suministrada es muy importante, influirá en futuras decisiones en el grupo de trabajo; así mismo, informó que el tratamiento de la información se hará en el marco del desarrollo de un trabajo de grado; aclaró que en esta actividad no hay respuestas correctas o equivocadas, sino distintos puntos de vista por tanto existen libertad de expresar su opinión, aun cuando esta difiera de la que expresen sus compañeros.

Señaló que el informe final no incluirá los nombres para asegurar la confiabilidad. Reconoció que son importantes tanto los comentarios negativos como en los positivos, precisó que en algunos casos los comentarios negativos son aún más útiles que los positivos.

La coordinadora del debate introdujo cada una de las secciones de la agenda mediante la formulación de la pregunta consignada en el anexo o con una pregunta semejante. En desarrollo de la conversación hizo intervenciones orientadas a precisar el sentido de lo que los docentes expresaban y a llevarlas hacia los asuntos en los que

se quería profundizar. La coordinadora del debate cerró cada sesión agradeciendo la participación del asistente.

CAPITULO 8

RESULTADOS

La información fue sometida a un análisis temático que permite establecer unidades comparables de categorización que preservan su significado. Para lograr tal fin, la información obtenida en las grabaciones del grupo focal fue transcrita en Word, constituyéndose este archivo en el documento que nutre a la investigación.

La información de los licenciados y los economistas obtenida se organiza definiéndose las siguientes categorías:

- **CATEGORÍA 1.** Visión internalista y externalista de las matemáticas, en el contexto de la educación superior.
- **CATEGORIA 2.** La derivada desde un enfoque histórico y epistemológico.
- **CATEGORÍA 3** La derivada, un objeto de enseñanza en las ciencias empresariales.

8.1 Visión internalista y externalista de las matemáticas, en el contexto de la educación superior

- ***Posiciones de los licenciados en matemáticas***

En la educación superior, los licenciados en matemáticas, les atribuyen el papel de brindar herramientas para la vida.

Según ellos, las matemáticas en la educación superior constituyen un elemento importante ya que permiten, adquirir habilidades, que fortalecen al individuo para desempeñarse como ciudadano y futuro profesional, una apreciación que se describe en los siguientes argumentos:

“...Reconozco que la matemática es un componente permanente y transversal que está presente en las actividades en las cuales el ser humano se desempeña; por tanto, más allá de la carrera que esté cursando, <<el individuo>> necesita de conceptos básicos en matemática, que le permitan desempeñarse mejor en su plano profesional...” (Docente D, 2018)

Ante la descripción anterior mencionada por los licenciados en matemáticas, es posible inferir que atribuyen al conocimiento matemático un valor relacionado con el control:

El poder del conocimiento matemático también lo puede comprender bien cualquier persona, que aprenda matemáticas: Los “hechos” y los algoritmos de las Matemáticas familiares pueden ofrecer, pueden ofrecer seguridad y control difícil de resistir (Bishop, 1999, p.98).

De esta manera a la luz de la discusión sobre los valores asociados a las matemáticas, se puede detectar que entre los entrevistados está presente la asociación de las matemáticas con el poder.

Por otra parte, se encuentra que, en la educación superior, a las matemáticas se les atribuye el papel de aportar a la organización de procesos mentales de carácter abstracto.

Otro de los docentes de matemáticas asegura que la intervención de las matemáticas en la educación superior, fortalecen el desarrollo de actividades mentales, tal como se advierte a continuación:

“Para responder esa pregunta también debería cuestionarse para qué necesita uno aprender matemáticas, entonces la matemática de por sí tiene unos procesos de desarrollo mentales que ayudan a cualquier profesional independientemente de la carrera que tenga.” (Docente B, 2018)

En la anterior intervención se detecta que a las matemáticas se asocia el valor del racionalismo en tanto se piensa que aprender matemáticas conlleva el desarrollo del aprecio de los jóvenes por la lógica y las construcciones teóricas, asociado con la creencia de que “es necesario hacer que sean conscientes, de la explicación, abstracción y teorización.” (Bishop, 1999, p. 90)

Esta intervención es un reflejo de la idea de que las matemáticas representan un logro de una formación racionalista que se manifiesta en las posibilidades de formalización que es capaz de llevar a cabo el estudiante.

A las matemáticas en la educación superior también se les atribuye el papel de dar bases a un pensamiento crítico, siendo el espacio universitario un escenario donde se promueve la solución de situaciones problemas que fortalecen su desempeño como ciudadano y como profesional en formación, tal como se aprecia a continuación:

“...si, igual al enfrentarse al mundo sea en la vida cotidiana o sea en la vida laboral, las actividades académicas de investigación requieren de habilidades de pensamiento matemático, que se requieren en el análisis de información, también el manejo de variables, identificación y solución de problemas, el uso de la estadística, por ejemplo, para el análisis de información y la toma de decisiones; particularmente para programas de la facultad de la ciencias empresariales y económicas es fundamental el uso de unas, o la aplicación, desplegar sus habilidades de pensamiento matemático, para la interpretación de solución de problemas...” (Docente F, 2018)

En la anterior intervención se encuentran apreciaciones relacionados con la percepción de la matemática desde su carácter racionalista, asociado con la capacidad para analizar información:

Con frecuencia oímos quejas acerca de personas que son “ilógicas” y una de las mayores armas de un crítico es encontrar incoherencias en un argumento ajeno. La institucionalización de los debates, las polémicas, los argumentos y las discusiones de todo tipo en la sociedad la creencia generalizada del racionalismo” (Bishop, 1999, p. 89)

De esta manera se logra reconocer que el lugar valor que se concede al racionalismo como aporte de las matemáticas; ellas se ven como un medio que conduce a valorar y adquirir habilidades de razonamiento, requeridas en el desempeño de cualquier profesional.

Desde la postura de los licenciados en matemáticas que intervienen en la educación superior es necesario, reconocer que las matemáticas que son usadas en los

programas de formación, no son las mismas en términos de los objetos matemáticos que estudian, estas deben contemplar las intenciones de formación de los programas curriculares, tal como se manifiesta a continuación:

“Dentro de lo que yo considero un profesional debe saber matemáticas, primero para desarrollar una serie de competencias que se conocen desde el mundo crítico llamemos desde el pensamiento crítico y lo que le permite dar cuenta hacia... como hacia sus conexiones frente a su carrera como tal; dependiendo de qué carrera, pues hay una serie de matemáticas que se afianzan o se utilizan dentro de su carrera, entonces hay ejemplos que en algunas carreras se necesitan más la estadística, en otras se necesita más la matemática o el álgebra lineal; dependiendo de cada programa o de lo que quiere afianzar, se involucra las matemáticas, y con la práctica es donde ellos empiezan a ver, dónde se aplica más la matemática.” (Docente A, 2018)

A la luz de los componentes que describe Alan Bishop, se reconoce que en este caso se atribuye asociado a las matemáticas un valor asociado al control, tal como lo manifiesta en su libro *Enculturación matemática*:

Es interesante ver cómo intentamos ahora explicar y controlar nuestro entorno social, mediante el desarrollo de las ciencias sociales. El procedimiento consiste en tratar tanto fenómenos humanos como sociales en términos Matemáticos, con el fin de encontrar explicaciones racionalmente aceptables de estos fenómenos. (Bishop, 1999, p.97)

- ***Posiciones de los economistas***

Para los docentes con formación inicial en economía, implementar las matemáticas en la educación superior permite, principalmente, dar un “tratamiento matemático” a los datos, es decir, su uso se restringe a la categoría de “herramienta”, que facilita y agiliza procesos, esta es una precisión dada por un docente de economía:

“...Si! la derivada pues se compone, o se entiende como una herramienta, una función matemática elemental, para entender lo que dicen aquí nuestros compañeros; esa razón de cambio que se presentan en diferentes sucesos de la vida diaria, en problemas de pronto administrativos, financieros en los cuales tenemos que hallarle una interpretación y creo que la derivada es una herramienta que es esencial para poder explicar estos problemas que surgen a nivel de todas las áreas y de ciencias económicas que actualmente pues manejamos.”
(Docente E, 2018)

Al concebir las matemáticas como un objeto o herramienta que puede ser manipulado, se confronta una postura muy cercana la descrita por Alan Bishop, donde a las matemáticas se les otorga el valor de “objetivar” la realidad, entendiéndose este tratamiento como la elaboración de “La red de conexiones lógicas desarrollada con ideas Matemáticas mediante demostraciones, extensiones, ejemplos, contraejemplos, generalizaciones y abstracciones que ayuda a darles a los fenómenos un significado objetivo, y en consecuencia permite abordarlos como si fueran objetos”. (Bishop, 1999, p.93)

Así mismo los profesionales en economista manifiestan cómo, desde su hacer, las matemáticas se configuran como el sustento teórico para la comprensión y formulación de modelos, que posibiliten la toma de decisiones, tal como se advierte a continuación:

“...Las matemáticas son una parte fundamental de cualquier carrera, sobre todo de la parte financiera, administrativa y contable, porque nos permite ver el proceso del desarrollo del valor presente o futuro de una operación que se realice en una empresa y a su vez la matemática financiera da las bases para saber cómo conocemos el valor presente o el valor futuro de un proyecto.” (Docente C, 2018)

“...Es una materia fundamental nosotros, observamos la realidad de un país, de una sociedad, que en términos generales es compleja, tomamos algunas variables que son necesarias analizar y las plasmamos mediante modelos matemáticos, para poderle dar una resolución lógica a esos inconvenientes que se presentan en la vida diaria. Podemos calcular la oferta y demanda, hallar el punto de equilibrio, podemos hallar una restricción presupuestal, podemos hallar una probabilidad de exportación e importación de productos, entonces es una herramienta fundamental en el 80% del desarrollo de una clase, de un tema de economía; es necesario entender las matemáticas, el cálculo, la estadística como base para desarrollar cada uno está solo de estos problemas que surgen.” (Docente E, 2018)

En general, se plantea que en educación superior, se requiere dar un “tratamiento matemático” que posibilite el desarrollo y aplicación de modelos en el campo de las finanzas o de la misma economía.

Las descripciones mencionadas por el docente de Economía, remite a elementos del componente sociológico abierto que describe Alan Bishop: “El conocimiento matemático es abierto e impersonal, refuerza y estimula los sentimientos de

democracia y de liberación de nuestras sociedades y de nuestras instituciones sociales.” (Bishop, 1999, p.104)

El siguiente cuadro resume las posiciones encontradas.

VISIÓN INTERNALISTA Y EXTERNALISTA DE-LAS MATEMÁTICAS, EN EL CONTEXTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR

LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS	ECONOMISTAS
A las matemáticas en la educación superior se les atribuye el papel de brindar herramientas para la vida.	A las matemáticas en la educación se les atribuye el papel de herramienta para el tratamiento de datos.
A las matemáticas en la educación superior se les atribuye el papel de aportar a la organización de procesos mentales de carácter abstracto.	A las matemáticas en la educación se les atribuye el papel de dar bases a la comprensión y formulación de modelos.
A las matemáticas en la educación se les atribuye el papel de dar bases a un pensamiento crítico.	

En general, como resultado de la aplicación del instrumento a través de la metodología de los grupos focales, se encontró que, al comparar la visión de los licenciados en matemáticas y economistas, sus enfoques son distintos, cada uno habla desde el lugar que deriva de su formación profesional inicial.

Los licenciados en matemáticas, reconocen el papel de las matemáticas en la educación superior, en relación con tres puntos de acción, en primer lugar, brindar herramientas para la vida, rescatando la posibilidad que ofrecen las matemáticas de facilitar tareas; en segundo lugar, la organización procesos mentales de orden abstracto, las matemáticas, propician escenarios donde la representación interviene adecuando la conceptualización; finalmente, consideran que las matemáticas, dan las

bases de un pensamiento crítico, el cual resulta oportuno para la toma de decisiones propia de cualquier profesional.

8.2 El abordaje de la derivada desde un enfoque histórico y epistemológico

- ***Posiciones de los licenciados en matemáticas***

Según estos docentes, un abordaje histórico da lugar a una comprensión matemática elaborada. Ellos entienden la derivada como una razón de cambio, que requiere de un buen desarrollo algebraico y geométrico, para que pueda ser interpretada en sus diversas representaciones, tal como se advierte en la discusión en el grupo focal I:

“Para entender la derivada como razón de cambio, es necesario conocer el álgebra de los polinomios, y saber factorizar, si es todo el concepto de álgebra, lo que ve uno en octavo, realmente funciones.”
(Docente B, 2018)

“Digamos, es donde empieza la conexión del algebra hacia el cálculo, que es la conexión que está ahí, pues muchas veces la mayoría de los estudiantes no saben para qué aprenden álgebra y pues realmente una de esas aplicaciones, donde se ve toda esa teoría y esa aplicación es ya cuando se ve Cálculo, digamos como dentro de la vida diaria, ese tipo de cosas, están dadas a partir de la derivada.”(Docente A, 2018)

“... y debe saber geometría, para entender el concepto del cambio de la derivada, y saber factorizar, ¡sí! Tener claro todo el concepto de álgebra, lo que ve uno en octavo, por ejemplo, funciones debe tener claro en geometría y plano cartesiano, saber graficar funciones.” (Docente B, 2018)

Las consideraciones mencionadas anteriormente son un claro ejemplo de la referencia al carácter afectivo de la formación en matemáticas, al componente de

sentimiento, y su valor asociado, el progreso en la capacidad para comprender las situaciones cotidianas.

Se considera que el estudiante de matemáticas, puede experimentar este sentimiento tras desarrollar, por ejemplo, un algoritmo para desarrollar un problema determinado; lo que es revelador de la creencia en que, como consecuencia se podrán solucionar otros problemas. “A partir de este descubrimiento, pronto se desarrolla la idea de que realmente, podemos abordar problemas desconocidos y encontrar otras maneras de resolverlos” (Bishop, 1999,p.99)

También se dice que un abordaje histórico de la derivada da lugar a una comprensión intuitiva de las nociones: El abordaje histórico da lugar a una percepción intuitiva de los objetos matemáticos; por ejemplo, un niño manipulando un carrito, puede reconocer como está cambiando la velocidad a medida que va aumentando (cambiando) la trayectoria recorrida, tal como se advierte a continuación:

“...Yo creo que las limitaciones de que un individuo pueda resolver situaciones recurriendo a la derivada tiene mucho que ver los recursos representacionales que se tengan; la formalidad que le puede dar, sin embargo desde un niño pequeño, uno puede encontrar que resuelve situaciones de cambio que puede pensar, en calcular, estimar, velocidades particularmente, instantáneas sin recurrir a una representación formal y obviamente pues sus cálculos o su estimación se dan mucho más precisos, si se cuenta con la representación un poco más elaborada, pero pues, no sé si de manera intuitiva, más bien desde las herramientas, ya sean representacionales, no necesariamente algebraicas pero pues sí, que pueda representar mediante una relación en un plano cartesiano o en el mismo lenguaje natural. Uno podría aproximarse a tomar esas decisiones en términos de las relaciones de cambio, por ejemplo, si un niño está cambiando de velocidad, va corriendo, va caminando y podría determinar en cada uno de esos momentos, a qué velocidad se encontraban cada uno, también cuando juega impulsando sus carritos, mediante su lenguaje natural podría expresar cómo sería esa velocidad instantánea, más allá de lo que puede representar algebraicamente de manera formal. Si yo le digo a un niño, si tú dedicas una hora más a estudiar durante el día, ¿en cuánto se incrementaría la cantidad ejercicios que puedas desarrollar? o ¿tus habilidades respecto a alguna, alguna tarea? O, si tú dedicas al final de tu entrenamiento 30 minutos más para hacer abdominales para practicar un tiro libre, para hacer un fondo, ¿en cuánto creerías tú que podrías incrementar tu rendimiento en el partido? Esto es, en últimas palabras, podemos decir es como una derivada sin necesidad de llegar a una representación formal que es diferente a tener el concepto de las razones de cambio...” (Docente F, 2018).

Este profesor, desde la perspectiva de Alan Bishop, atribuye a las matemáticas la capacidad de interpretar los fenómenos físicos de modo objetivo ya que considera que las matemáticas, además de recibir la influencia de esa visión [objetivista] del mundo, también han contribuido a ella, particularmente, mediante su utilización dentro de las ciencias físicas; en este sentido, se piensa que “Los principios Matemáticos permitieron explicar los fenómenos dinámicos en términos de materia en movimiento, lo cual era

imaginable de acuerdo con las percepciones de la naturaleza y tecnología que se tenían entonces.” (Bishop, 1999, p.95)

También se afirma que el abordaje histórico de la derivada da lugar a una interpretación enriquecida de la noción matemática producto de su uso en campos de aplicación. La derivada responde y justifica saberes, que la misma historia de las matemáticas han reportado. Por ejemplo, esto es posible evidenciarlo, en la relación que se establece entre la física y las matemáticas, al tratar asuntos como la velocidad y la aceleración, lo que se manifiesta así:

“Pues estoy tratando de ubicar un significado por medio de la razón de cambio, asociado a una situación de la vida diaria, con el fin de otorgarle un significado o interpretación, por ejemplo, la velocidad es a partir de la razón de cambio como surge, más aún se constituye en un fenómeno de la vida diaria.”(Docente D, 2018)

- ***Posiciones de los economistas***

Estos docentes consideran que un abordaje histórico de la derivada ofrece datos curiosos: la historia de las matemáticas ofrece información adicional, que no trasciende en su actividad docente, más que como “un dato curioso”.

“...Sí, de acuerdo, todo punto de partida tiene un origen y en ese origen digamos están los cimientos, los postulados o las reglas de juego para poder desarrollar todos los factores matemáticos, fórmulas que involucra, desarrollar un sistema de variables, yo creo que la historia se hace necesaria sacarla digamos a flote para tener una fuente a la cual recurrir, tanto nosotros los docentes profesionales, como los estudiantes, porque como dije anteriormente es el pilar fundamental para comprender postulados de ellas y funciones que van a desencadenar la resolución de diferentes problemas de la vida real.” (Docente E, 2018)

Al realizar una exploración conceptual de la noción de derivada: el docente economista considera que basta con tener como punto de partida un buen desempeño en la suma, resta, multiplicación y división.

“...Pues para mí, debe tener primero una concepción algebraica totalmente clara, las bases necesarias para trabajar una derivada, tienes que tener claras las reglas de la derivada, ¡las básicas!, porque lo que tiene que ver con suma, resta, multiplicación y división que es lo que más se va encontrar y lo que tiene que ver con logaritmos que son las otras que están más enfocadas a la parte de economía.” (Docente C, 2018)

“Muy de acuerdo con la opinión del profesor, porque el álgebra es necesaria; si no hay nociones de álgebra y de las leyes que se manejan de acuerdo con esta ciencia, pues creo que el estudiante o las personas que quieran desarrollar o solucionar una derivada, les va a quedar un poco complejo, pues en mi opinión hay que tener nociones de álgebra para poder solucionar problemas matemáticos.” (Docente E, 2018)

Al ser interrogados sobre su concepción de derivada, los economistas, que participaron en la discusión propiciada en los grupos focales, hicieron descripciones que reconocían el uso de la derivada como la aplicación de un modelo, entendida esta “aplicación”, como la articulación de una serie de condiciones que han sido representadas con lenguaje algebraico, cuya solución se obtiene con la repetición de instrucciones, es decir con la ejecución de un algoritmo; esta consideración se evidencia en la descripción señalada a continuación:

“...Bueno, desde mi formación, que es más centrada en la economía, manejamos diferentes modelos, los cuales tenemos que plasmarlos con diferentes fórmulas que deben ser bastante dúctiles para, para transmitir y explicar las realidades que son complejas. El Cálculo las Matemáticas, cómo lo decía ese gran científico que fue René Descartes, “el lenguaje de Dios” y creo que sí es el lenguaje de Dios tenemos que saberlo para dar una explicación a cualquier problema en nuestra vida cotidiana.” (Docente E, 2018)

Los profesionales en economía consideran la derivada como el cambio entre la relación establecida entre dos variables, esta apreciación aparece con mayor fuerza en el estudio de la microeconomía, particularmente con el uso y estimación de marginales, que aparecen en la oferta y la demanda.

“...Es una materia fundamental, nosotros observamos la realidad de un país, de una sociedad, que en términos generales es compleja, tomamos algunas variables que son necesarias analizar y las plasmamos mediante modelos matemáticos, para poderle dar una resolución lógica a esos inconvenientes que se presentan en la vida diaria. Podemos calcular la oferta y demanda, hallar un punto de equilibrio, podemos hallar una restricción presupuestal, podemos hallar una probabilidad de exportación e importación de productos, entonces es una herramienta fundamental en el 80% del desarrollo de una clase, de un tema de economía; es necesario entender las matemáticas, el cálculo, la estadística como base para desarrollar cada uno está solo de estos problemas que surgen.” (Docente E, 2018)

En las posturas que manifiestan los docentes en este apartado se reconoce una postura donde está presente la referencia al poder simbólico, ya que como lo señala Skovsmose (1999) se considera que las matemáticas fundamentan un gran poder

simbolico, aunque no ejercen un poder directo y visible, tienen una legitimidad que emana de la creencia de la exactitud y confiabilidad de sus aplicaciones. Por tal motivo es más difícil hacer de las matemáticas y sus aplicaciones en la sociedad un objeto centro de crítica.

El siguiente cuadro resume las posiciones encontradas.

ABORDAJE DE LA DERIVADA DESDE UN ENFOQUE HISTORICO Y EPISTEMOLOGICO

LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS	ECONOMISTAS
Un abordaje histórico de la derivada da lugar a una comprensión matemática elaborada.	Un abordaje histórico de la derivada ofrece datos curiosos.
Un abordaje histórico de la derivada da lugar a una comprensión intuitiva de las nociones.	No se le atribuye importancia a una exploración conceptual de la noción de derivada.
Un abordaje histórico de la derivada da lugar a una interpretación enriquecida de la noción matemática producto de su uso en campos de aplicación.	El dominio de la derivada se entiende como la aplicación-repetición de un algoritmo.
	La derivada se entiende como relación entre variables.

En esta categoría se reconoce que la Derivada, en tanto objeto matemático, es abordada desde perspectivas influenciadas por la formación disciplinar del profesor que interviene en el proceso de enseñanza. En primer lugar, los licenciados en matemáticas contemplan la enseñanza de la derivada desde un enfoque histórico, ya que este escenario da lugar a una comprensión matemática elaborada que recurre a las representaciones, una postura que está en sintonía con la propuesta de Chartier, así mismo, los licenciados detectan que las matemáticas participan en otros campos

enriqueciendo su interpretación, tal como sucede en la física, al referirse a conceptos como la velocidad instantánea y la aceleración, que son formalizados usando la definición de Derivada.

Desde la postura de los economistas, se reconoce que contemplar la derivada desde un enfoque histórico, aporta “datos curiosos”; pero para ellos lo central es la posibilidad de realizar algoritmos que faciliten actividades propias de las ciencias empresariales; así mismo, consideran que la aplicación de la derivada solo se propicia en los momentos en que es posible establecer la relación entre dos magnitudes.

8.3 La derivada, un objeto de enseñanza en las ciencias empresariales

- ***Posiciones de los licenciados en matemáticas***

Según los docentes con formación en matemáticas, la comprensión histórica de la derivada posibilita una comprensión más sistémica de la noción matemática en las ciencias empresariales.

Ellos plantean que logran involucrarse con la historia, puesto que esto permite reconocer un tipo de comprensiones y significados que hacen parte de las matemáticas y otros campos del saber; desde luego, requieren del uso de representaciones para entender estos alcances, tal como se logra evidenciar en la siguiente intervención:

“... ¡Exacto!, es la evolución de la representación, creería yo, aquella que siempre estuvo presente el análisis de las situaciones problema, por ejemplo, los avances matemáticos nos permitieran encontrar una manera de representar de manera específica conceptos con el fin de hacerlos manipulables y establecer relaciones de cambio; la evolución y la comprensión de todos esos avances permite que se gestione la notación. Los pensadores usaban distintas notaciones; la notación la podemos ver como un acuerdo que surge ya después de empezar a relacionar todos los diferentes acercamientos que realizaban los pensadores, por ejemplo, la relación del cambio de la distancia con respecto al tiempo, precisamente representa la relación y los cambios entre las variables, de esas dos variables (la distancia y el tiempo), este suceso, motiva a buscar representaciones que nos permitan manipular y operar. Alcanzar esta representación, propicia un común acuerdo entre los matemáticos, con el fin de ser modelada y usada en la solución de problemas que aparecen en las ciencias empresariales.” (Docente F, 2018)

Una posición semejante se aprecia en el siguiente planteamiento:

“...Yo creo que la historia siempre nos trae, como dice el docente F, las situaciones donde emerge el concepto. De ahí, es importante reconocer cuál es la parte fundamental o ese problema, que nos permite desarrollar el concepto, conocer quién lo desarrolla y cómo ha sido su evolución a través del tiempo, para llegar a lo que hoy en día tenemos como representación, su manera de calcular o bien se cuenta con programas actualmente que lo calculan, esto permite que nosotros lo podamos determinar o entender como ha sido el proceso histórico, esto permite pensar ese concepto como está hoy en día.”(Docente D, 2018)

También consideran que la comprensión histórica de la derivada posibilita el análisis de situaciones problema en las ciencias empresariales.

Los docentes reconocen elementos históricos que alimentan el desarrollo conceptual y amplían las posibilidades de solución de las situaciones problema que se planteen, esta concepción es reconocida por uno de los docentes:

“...Casi, incluso con todas las ciencias, por decirlo así, las matemáticas, lo que incluye la derivada, alientan a modelar las diferentes ciencias, entonces creo, que los avances los conceptos y herramientas matemáticas han permitido que la economía, por ejemplo, pueda mejorar en sus análisis que hace sus modelaciones que hace, el análisis de sus problemas mejorar sus concepto, ampliar nuevos problemas que puede resolver, y eso le ha permitido a enriquecer sus, sus, ... corpus, sus teorías, formalizarlas incluso.” (Docente F, 2018)

Se expresa que la comprensión histórica de la derivada en las ciencias empresariales posibilita su utilización como herramienta profesional.

La enseñanza de la derivada en las ciencias empresariales debe posibilitar el estudio de situaciones problema que recurran a saberes propios, de su desempeño profesional; de esta manera sus resultados pueden sustentados, tal como se menciona a continuación:

“...Sí, digamos que dentro de lo que uno trabaja, bueno uno da las bases de la parte de derivadas y se tiene claro que una de las aplicaciones desde la economía, es la derivada desde la parte marginal, y lo que apoya es la oferta y la demanda y como se puede vincular frente a eso, una de las aplicaciones fuertes que tiene de la economía, la derivada.” (Docente A, 2018)

- **Posiciones de los economistas**

Los docentes con formación en economía consideran que la comprensión del concepto de derivada posibilita el análisis de situaciones problema concretas en las ciencias empresariales.

Los economistas reconocen que es importante hacer ejercicios con un sentido real económico, insisten en que ellos no sean inventados (entendiéndose con datos que no hacen parte de la realidad), que no requieran tanto desarrollo algorítmico, pero si potencialicen el análisis analítico. Insisten en que los estudiantes no se debe quedar con la teoría económica, es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones a las que se les pueda otorgar un significado.

“La derivada es un concepto, digamos lo podemos ver como un concepto relacionado con la estadística, y de ahí podemos tener las derivadas como en economía, como el costo marginal, y esas derivadas lo que determinan son posibles comportamientos que puede tener en una situación en un momento dado...”(Docente C, 2018)

El siguiente cuadro resume las posiciones encontradas.

LA DERIVADA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA EN LAS CIENCIAS EMPRESARIALES

LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS	ECONOMISTAS
La comprensión histórica de la derivada posibilita una comprensión más sistémica de la noción matemática en las ciencias empresariales.	La comprensión del concepto de derivada posibilita el análisis de situaciones problema concretas en las ciencias empresariales.
La comprensión histórica de la derivada posibilita el análisis de situaciones problema en las ciencias empresariales.	

La comprensión histórica de la derivada en las ciencias empresariales posibilita su utilización como herramienta profesional.	
---	--

En general, cuando se aborda el objeto derivada en las ciencias empresariales, también se encuentran dos corrientes de pensamiento, en primer lugar, los licenciados se refieren a este objeto reconociendo la posibilidad de articular asuntos propios de la microeconomía, por ejemplo, analizar razones de cambio que impactan la conceptualización del marginalismo, siendo esta la versión económica de la derivada; no obstante, desde los procesos de reflexión que lleva a cabo el profesor de matemáticas, su análisis en el aula de clase privilegia aspectos teóricos de las mismas matemáticas, por ejemplo las demostraciones y aplicación de propiedades, dejando de lado interpretaciones de otros campos del saber, precisamente el marginalismo, se quedan con reconocer algunos de estos conceptos como la versión económica de la derivada.

En este orden de ideas, es importante reconocer que recurrir a los elementos historiográficos donde intervienen la derivada revela otro tipo de comprensiones, que son alcanzadas con el uso de la representación que ofrece la historia con respecto a la construcción de estos saberes demandados por el contexto cultural, político, social y por la formalización de otros campos del saber, los cuales sería pertinente que fueran apropiados por licenciados, con el fin de enriquecer sus clases con el uso de este tipo de procesos semánticos.

Por su parte, los economistas mencionan que el concepto de derivada posibilita el análisis de situaciones problema, con el uso del algoritmo pertinente, reconocen que

este facilita las tareas de análisis; empero las preocupaciones del profesional de economía remiten a los significados que se pueden atribuir al resultado obtenido en términos de los contenidos conceptuales, despreciando los elementos matemáticos teóricos que intervienen, los cuales estipulan otro tipo de comprensiones.

Ante estas apreciaciones y contemplando la postura de Skovsmose (1999), al tener en cuenta la reflexión sobre el poder simbólico que reside en la referencia a conceptos y cálculos matemáticos, en los recintos universitarios, se encuentra que es necesario cuestionar ese poder simbólico de las matemáticas y se asuma un papel formativo y de reflexión.

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES

A partir de una propuesta historiográfica, en este trabajo se analizaron las representaciones que tienen los docentes de la forma como se articulan aspectos de la geometría, el álgebra y la geometría analítica, que nutren la formación del Cálculo, en el sistema conceptual de la derivada y de esta en nociones propias del marginalismo.

Este trabajo recurrió a la propuesta de de Certeau y de Chartier(1996 y 2012) con respecto al sentido de las representaciones historiográficas; desde su enfoque se reconoce que la historia del cálculo interviene en la forma como él contribuye en la configuración del conocimiento en otras disciplinas diferentes de la matemática.

En primer lugar, se advierte que esta historia se ubica en la categoría de relato en la que se identifican parentescos con otros relatos, lo que implica reconocer que el relato no son los mismos hechos, sino una construcción que pretende realizar una narración intencionada y por otra parte de carácter reflexivo, en tanto esta se ve como una representación entre otras; por tal motivo la narración que se elabora en el presente documento es una propuesta que tiene una pretensión de verdad en tanto las referencias y las construcciones que se han derivado de ellas son aceptadas por las comunidades disciplinares y profesionales, y, por tanto refleja tendencias socio-culturales; por esto, se presenta como un antecedente para discutir la forma como se incorporan las matemáticas en proyectos de formación que las incluyen.

La representación historiográfica de la emergencia del cálculo requirió recoger distintos aspectos (provenientes tanto de las formulaciones matemáticas como de las prácticas que demandaban herramientas para enfrentar problemas prácticos) que fundamentan la representación de la derivada como sistema conceptual matemático; en concreto, (i) la aproximación a partir del cálculo de magnitudes con regla y compás, propia de la geometría euclidiana, a la concepción de la inconmensurabilidad y a la introducción de la noción de infinito; (ii) la introducción de un lenguaje simbólico para representar las propiedades de las relaciones entre variables, que permitió formular en términos abstractos las operaciones y sus equivalencias, durante las fases de formación del álgebra, (iii) y la articulación de conocimientos del álgebra y la geometría, en los sistemas de representación que introduce Descartes durante el estudio de las cónicas, que dan lugar a la geometría analítica, y que hacen posible solucionar problemas geométricos utilizando el álgebra y viceversa.

La narración historiográfica también incorpora la referencia a la forma como el Cálculo, y para este caso la derivada, responde a los requerimientos y se incorpora en las construcciones de conocimiento de carácter científico que se llevan a cabo en los siglos XVII y XVIII, inicialmente en la formulación teórica de la física y, luego, en la economía, de modo que el sistema conceptual de la matemática se convierte en propiedad sine qua non de esta clase de saber.

Esta referencia a condiciones de posibilidad tanto teóricas como prácticas en la estructuración del sistema conceptual considerado, permite hacer frente al planteamiento de Anaconda (2003) sobre la pertinencia de tener en cuenta las perspectivas internalistas y externalistas de desarrollo del conocimiento en un área de

formación específica (en su caso, de la matemática). Puntualmente, para el caso de la historia de la economía, y específicamente en el caso del marginalismo, la discusión se refiere a si la matemática, en este caso, el sistema conceptual de la derivada, tiene un carácter interno a la constitución histórica de la disciplina que incorpora la matemática, o si tiene un carácter externo a ella, de modo que la matemática se toma como una herramienta.

En tanto la matemática y, en particular, la derivada se pueden reconocer como parte de la génesis de la formación de la economía como disciplina, como modo de definición de sus categorías y elemento para la validación de su conocimiento, de la narración historiográfica se deriva en primera instancia que la matemática hace parte de la economía, de su modo de ser como disciplina científica.

El recorrido historiográfico también permite destacar los aspectos que son centrales en la comprensión sistémica de la derivada, tal como ella es integrada en las teorías marginalistas: en primer lugar, la referencia a los conceptos de infinito, de variación y la posibilidad de interpretación bien desde la representación geométrica bien desde la representación algebraica, relacionados con el cálculo; en segundo lugar, la referencia a las nociones de cambio y razón de cambio y la introducción de la noción de continuidad, relacionados con la aproximación al estudio científico de las trayectorias de los cuerpos; y, en tercer lugar, la identificación de la forma como la derivada operacionaliza los conceptos del marginalismo, en economía. Estos elementos son los que permitirían caracterizar una representación de la derivada como un sistema conceptual propio del abordaje marginalista de los procesos empresariales y, por tanto, serían aspectos que el docente de matemáticas o el economista que se

refiere a nociones económicas de carácter matemático han de elaborar con los estudiantes en formación profesional, con el fin de alcanzar una comprensión de nociones propias de las ciencias empresariales.

La discusión anterior resulta pertinente para la estructuración de currículos en educación superior, en tanto cuestiona las prácticas que atribuyen a la formación en matemáticas un carácter instrumental, lo que en ocasiones da lugar a que docentes sin una aproximación específica a la forma como se constituye el saber de una disciplina o una profesión, enseñen matemáticas como el servicio que ofrece un departamento a otros que usan esas herramientas. El recorrido que se llevó a cabo permite indicar que la historia de las disciplinas ha incorporado las matemáticas en la forma de definir sus categorías, de elaborar sus objetos de conocimiento (como ocurre en el caso del marginalismo), por esto, la enseñanza de una noción como la derivada requiere de los docentes con formación básica en matemáticas identificar la forma específica como la noción matemática está incorporada en la teoría económica y, a su vez, es necesario que los docentes con formación básica en economía tengan una comprensión de las distintas facetas del sistema conceptual matemático, de modo que puedan apoyar la comprensión de su alcance, incluídos los ajustes que ha requerido su introducción en las áreas específicas.

En el diálogo establecido en los grupos focales se encontró que la aproximación al saber de las matemáticas en economía atiende a una estructura lógica de comprensión del conocimiento desde el saber disciplinar de quien la imparte, y esto propicia un escenario que no integra las dos disciplinas, negando la posibilidad de una articulación de saberes, de modo que ellos resulten significativos para la formación del estudiante.

Los docentes reconocen este tipo de conexiones, pero en sus argumentos revelan pocas elaboraciones que sustenten la integración de sistemas conceptuales.

Las discusiones evidenciaron que los docentes con formación básica en matemáticas le atribuyen importancia a la revisión histórica de la construcción del concepto de derivada, a que su representación incorpore aspectos de la historia de esta noción, sin embargo, los docentes tienen escasa información sobre este asunto, por tanto no lo incorporan en las aulas de clase como posibilidad de generar una estrategia metodológica de enseñanza que apunte a formar una racionalidad, lo que implicaría el reconocimiento de referentes sociales y culturales. Esta falta de formación en el perfil del docente implica que lamentablemente su labor se restrinja a la mera aplicación de algoritmos que para el estudiante no tienen sentido. Adicionalmente, estos docentes tampoco manifestaron tener conocimiento sobre la forma como la derivada es abordada en el campo de la teoría económica marginalista.

Por su parte los docentes con formación básica en economía que abordan la enseñanza de las matemáticas se limitan a insistir en los cálculos y sus resultados sin ocuparse de una comprensión sistémica de los conceptos y de la forma como estos configuran las categorías de ciertas áreas del conocimiento propio de la economía.

De reconocerse el carácter dialógico entre los procesos de construcción de la matemática y la economía, sería posible, fuera de articular sistemas conceptuales, identificar particularidades de la forma como se elaboran los conocimientos matemáticos en economía; por ejemplo, se reconocería que los procesos abordados por la teoría económica marginalista tienen un carácter discreto, mientras la formalidad

matemática los concibe y los argumenta a partir de la noción de continuidad; también se podría reconocer que las formas de representación gráfica invierten el lugar atribuido a las variables dependiente e independiente, por lo que una aclaración al estudiante sobre este asunto le permitiría una comprensión más ágil de las gráficas.

Los docentes que intervienen en los grupos focales manifiestan sin ser conscientes de ello, que existen los valores asociados a las matemáticas, particularmente a unas matemáticas occidentalizadas, ya que responden a unos sucesos históricos que señalan estas matemáticas, las cuales se configuran como una representación historiográfica del “saber verdadero”.

También se puede concluir que la educación matemática en la educación superior precisa una reflexión académica y formativa, permeada por la perspectiva sociocultural en la que se develen y se anliquen críticamente las valoraciones de la matemática, tal como lo menciona Bishop (1999), y la forma como de ellas se derivan las implicaciones sociopolíticas que menciona Skovsmose (1999). Esto constituye una aproximación al análisis crítico de los presupuestos de las matemáticas occidentales con los cuales hemos sido formados y desde los cuales pensamos.

Al involucrarse en las matemáticas de las ciencias empresariales, es necesario reconocer la no neutralidad de estas matemáticas, a pesar de que los representantes de este saber, docentes de matemáticas, tal como lo manifestaron en los grupos focales realizados, asuman la neutralidad de las mismas, desde la cual fundamentan ideológicamente la validez del modelo económico estudiado, evidenciando la vigencia y respaldo al orden social derivado del poder simbólico de las matemáticas).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Alvarez, L. (2016). Los experimentos mentales como recurso epistemológico en la física. *Revista digital innovación y ciencia*.
- Anaconda, M. (2003). La historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, 30-46.
- Apostol, T. (1982). *Calculus. Volúmenes 1*. Barcelona: Editorial Reverte.
- Arenzana, V. (1998). Curvas Mecanicas en la Geometria Griega. La cuadratriz de Dinostrato. *Revista Summa*, 31-36.
- Aroca, J. (2013). Sistemas Articulados. Teorema de Kempe. *Rev.Semin. Iberoam.Mat.* 4 fasc.II, 19-53.
- Barrangan, M. (2003). *Economía y Matemáticas:Productividad, trabajo y distribución de la renta: Un estudio critico*. Madrid.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Bourdieu, P. (2003). *El oficio de científico*. Barcelona: Editorial Anagrama.
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas*. Editorial Alianza.
- Certau, d. (2002). *Historia y Psicoanálisis entre ciencia y ficción. Nueva Edición*. México: Universidad Iberoamericana.
- Chartier. (1996). *Escribir las prácticas*. Buenos Aires.
- Chartier, R. (2012). El sentido de la representación. *Temas*, 39-51.
- Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II*. siglo veintiuno editores: Mexico, D.F.
- Dalcin, M., & Olave, M. (2007). ECUACIONES DE PRIMER GRADO: SU HISTORIA. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20*, 1-6.
- Escartin, E. (10 de Agosto de 2018). EL MARGINALISMO : JEVONS . *Historia del pensamiento economico*, 342- 368. Obtenido de http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf:
http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf
- Escartin, E. (4 de Junio de 2018). http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf. Obtenido de http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf:
http://personal.us.es/escartin/Jevons_Marginalismo.pdf

- Garcia, L., Moreno, M., Badillo, E., & Azcarate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias economicas: consideraciones didacticas. *Economía*, 137-171.
- Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de historia debe ser apropiada por un profesor de matemáticas? *Revista EDUCyT*, 132-148.
- Guicciardini, N. (2009). Método versus Cálculo en las críticas de Newton a Descartes y Leibniz. *Estud.filos ISSN 0121-3628* , 9-38.
- Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.
- Koyré, A. (2008). Los albores de la ciencia clásica. *ContactoS* 69, 43–48 .
- Lial, M., & Hungerford , T. (2000). *Matemáticas para administración y economía*. México, D. F: Pearson Educación.
- Malisamni, E. (1999). Los Obstaculos epistemologicos en el desarrollo, en el desarrollo del pensamiento álgebraico visión historica. *Revista IRICE*".
- Mar Mior América. (13 de noviembre de 2017). <http://mar-maior.com>. Obtenido de <http://mar-maior.com/blog/el-mito-de-la-fisica-social/>: <http://mar-maior.com/blog/el-mito-de-la-fisica-social/>
- Mora, E. (26 de 03 de 2018). <http://matematicas.uclm.es>. Obtenido de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf
- Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*. Londres.
- Pérez, J. (1980). El método marginalista antes de AA. *Cuadernos de Economía* 8.23, 473-498.
- Prada, A., & Angulo, H. (15 de 04 de 2008). Un metodo geoemtrico para resolver ecuaciones cubicas. *Memorias XVIII encuentro de geometría y VI de aritmetica*, 215-222. Obtenido de funes.uniandes.edu.co: <http://funes.uniandes.edu.co/5584/1/PradaUnm%C3%A9todoGeometr%C3%ADa2008.PDF>
- Revista suma. (2004). La historia de las Matemáticas como recurso didactico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*, 17-28.
- Ribnikov, k. (1987). *Historia de las Matemátcas*. URSS: Editorial Mir.
- Rodríguez, M. E. (2011). *La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico*. Recuperado el 24 de 9 de 2017, de http://sinewton.org/numeros/numeros/77/articulos_01.pdf

- Ruiz, A., & Barrantes, H. (1997). *Elementos del Calculo diferencial. Historia y ejercicios resueltos*. San Jose: Universidad de Costa Rica.
- Salas, S., Hille, E., & Etgen, G. (2002). *Calculus en una y varias variables*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.
- Sarmiento, A., & Seijas, A. (2006). MATEMATICAS Y ECONOMIA EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS. *XIV Jornadas de ASEPUMA y II Encuentro Internacional* , 1-13.
- Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *En A. Martínón (ed.): Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.*, 93-96.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática Critica*. Bogotá: Una empresa docente.
- Stewart, J. (2012). *Calculo de una Variable, transcendentales tempranas*. Mexico: CENGAGE Learning.
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Lit, C., & Niss, M. (2010). History in mathematics education. The ICMI Study . *Revista EDUCyT*,, 136-148.
- Varian, H. (2010). *Un enfoque actual, microeconomía intermedia*. Barcelona: Antoni Bosh editor.
- Vega, G. (2014). *Michel Foucault : para una crítica de la economía política en términos de tecnologías de gobierno.(tesis de Maestría)*. Bernal: Universidad Nacional de Quilmes.
- Zuluaga, J. C. (2009). *Escribir las prácticas. Foucault, De Certeau; Marin*. Buenos Aires.

ANEXOS

ANEXO 1

GUIA PARA EL DESARROLLO DEL GRUPO FOCAL

regunta	Qué se busca detectar
¿Para qué necesitan aprender matemáticas, los profesionales en formación en la CUI?	Si los participantes creen que la matemática puede ser enseñada como disciplina pura. Hay una oposición entre lo interno, propio de la disciplina y lo externo, como aplicación.
Qué relación existió inicialmente entre la matemática y la ciencia.	Si se considera que la matemática se ha enriquecido a partir de los requerimientos de la ciencia. Si se plantea una interacción dinámica entre el desarrollo de la matemática y el desarrollo de la ciencia.
¿Qué relación hubo entre la invención del cálculo infinitesimal y la emergencia de la ciencia moderna?	Si los docentes reconocen el papel de la expresión formal de las relaciones entre variables y de la razón de cambio, en particular en la configuración de la ciencia moderna.
¿Cuál es el significado de la derivada?	Si los docentes han buscado significar la derivada en los términos del lenguaje común o si se remiten exclusivamente al algoritmo que permite el cálculo de la derivada; en general, qué elementos se incluyen en la significación de la derivada.
¿A qué problemas respondió la formulación aplicada del algoritmo y teoría del $\frac{dy}{dx}$?	Reconoce los contextos históricos donde aparece y se estructura la noción de derivada, además si le resulta claro que la noción da respuesta a unos requerimientos internos y externos del objeto de conocimiento.
¿Cuáles conocimientos matemáticos se requieren para un manejo adecuado de la derivada?	Si los docentes mencionan espontáneamente temas relacionados con la historia del cálculo y, en particular, de la derivada, que están

	asociados a este concepto.
¿Qué tan importante considera hacer referencia a la historia?	Si los participantes comprenden el lugar de temas relacionados con la historia del cálculo y, en particular, de la derivada, que están asociados a la organización sistémica de este concepto.
¿Cómo ha sido la relación entre el desarrollo de la economía y las matemáticas?	Si se reconoce que la matemática aportó a la constitución de la economía como disciplina científica.
¿Cuál es el lugar de la matemática en las CE?	Si se reconocen la importancia de que el docente comprenda los temas específicos en los que la matemática sustenta los conceptos y ofrece elementos para la toma de decisiones.
¿Qué importancia tiene saber y tener un concepto claro sobre la derivada en ciencias empresariales?	Si los participantes comprenden la relación entre el concepto de derivada y las nociones involucradas en el marginalismo.
¿Cómo podría mejorarse el interés y la comprensión de la matemática de los estudiantes de CE?	Si los docentes, tras el recorrido temático comprenden que la matemática hace parte de los conocimientos propios de las CE, si destacan que la matemática es un componente de las ciencias empresariales, y si incluso recomiendan superar la noción de interdisciplinariedad

ANEXO 2

PERFIL DE LOS INTEGRANTES DE LOS GRUPOS FOCALES

GRUPO FOCAL 1

DIANA MIRELLA MARTINEZ PINILLA – DOCENTE A
• Licenciada en matemáticas de Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en educación matemática de Universidad Distrital Francisco José de Caldas. • Magister en Docencia de las matemáticas Universidad Pedagógica Nacional • Docente de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central sección Bachillerato • Docente de la Corporación Universitaria Iberoamericana Experiencia • Docente de secundaria y media 12 años • Docente universitaria 3 años y media Experiencia Universitaria en los Cursos de: • Matemática Básica • Calculo Diferencial • Estadística Descriptiva • Estadística Inferencial • Algebra Lineal

CARLOS AUGUSTO MONTES FAJARDO- DOCENTE B
• Licenciado en Matemáticas de la UPN. • Especialista en Matemáticas aplicada de la U. Sergio Arboleda. • Magíster en Docencia de la U. de La Salle. • Docente de la Secretaria de Educación Distrital • Docente de la Corporación Universitaria Iberoamericana. • De docente de media secundaria durante 11 años. • Docente de Educación Superior durante 8 años. Experiencia Universitaria en los Cursos de: • Matemática Básica • Calculo Diferencial • Estadística Descriptiva • Estadística Inferencial • Algebra Lineal

CARLOS JULIO SILVA ROJAS- DOCENTE C
--

- Economista de la Universidad Central
- Especialización en Gerencia Financiera del Politécnico Grancolombiano
- Curso Máster en Project de la Universidad del Rey Juan Carlos
- Diplomado en Docencia de la Corporación Universitaria Iberoamericana.
- Experiencia docente en educación durante 20 años.

Experiencia universitaria en los cursos de:

- Fundamentos de economía
- Microeconomía
- Fundamentos de Macroeconomía
- Economía y Comercio Internacional
- Fundamentos – Principios de Finanzas (1)
- Finanzas Corto y largo plazo (2)
- Finanzas Públicas
- Finanzas internacionales
- Informática aplicada a las finanzas
- Énfasis 2 - Simulación Financiera
- Presupuestos
- Sistema Financiero Colombiano
- Gerencia de Planeación Estratégica
- Gerencia del Talento Humano
- Electiva 1 – Plan de Negocios
- Electiva 2 – Indicadores de Gestión
- Electiva 3 – Planeación Financiera
- Operaciones Financieras
- Valoración de empresas
- Modelos y Gestión del riesgo
- Fundamentos de Matemáticas
- Calculo diferencial.

GRUPO FOCAL 2

ANDRES AMADO ORDUZ – Docente D

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Licenciado en Matemáticas Universidad Distrital Francisco José de Caldas.• Especialista en Educación Matemática Universidad Distrital Francisco José de Caldas.• Magister en Docencia de la Matemática; Universidad Pedagógica Nacional |
|---|

- Docente de la Secretaría de Educación Distrital, Docente de Media secundaria durante 11 años.
- Docente de Educación Superior, en la Corporación Universitaria Iberoamericana.

Experiencia Universitaria en los Cursos de:

- Matemática Básica
- Calculo Diferencial
- Estadística Descriptiva
- Estadística Inferencial
- Álgebra Lineal
- Pensamiento Matemático
- Investigación de Operaciones

PABLO ANDRES CUBIDES AGUILAR- Docente F

- Licenciado en matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- Magíster en Educación, Pontificia Universidad Javeriana
- Docente educación básica durante 5 años
- Docente educación superior en el área de ciencias básicas durante 8 años, en la Corporación Universitaria Iberoamericana.

Experiencia Universitaria en los Cursos de:

- Matemática Básica
- Calculo Diferencial
- Estadística Descriptiva
- Estadística Inferencial
- Álgebra Lineal
- Pensamiento Lógico Matemático

JHON HERNANDO ESCOBAR RODRIGUEZ-Docente E

- Economista egresado de la Universidad Jorge Tadeo Lozano
- Especialista en gerencia y gestión pública de la Universidad Jorge Tadeo Lozano
- Docente en educación superior 7 años, de los cuales dos años en la Corporación Universitaria Iberoamericana.

Experiencia como docente Universitario en los cursos de:

- Fundamentos de Economía
- Economía Colombiana
- Microeconomía
- Macroeconomía
- Economía Matemática

- Economía y comercio Internacional
- Geografía Economía
- Fundamentos de Administración
- Aranceles
- Calculo Integral
- Cálculo Diferencial.
- Fundamentos de Matemáticas