

CONCEPCIONES SOBRE PROBABILIDAD EN ESTUDIANTES DE PROCESOS
BÁSICOS DE AULA ACELERADA

JUAN CARLOS MARTÍNEZ SUÁREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

2020

CONCEPCIONES SOBRE PROBABILIDAD EN ESTUDIANTES DE PROCESOS
BÁSICOS DE AULA ACELERADA

JUAN CARLOS MARTÍNEZ SUÁREZ

C.C. 1013666677 Código: 2015140050

Trabajo de grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Modalidad:

Interés Personal del estudiante

Directora

MARITZA MÉNDEZ REINA

Magíster en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

2020

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de calidad</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 3	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de Pregrado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Concepciones sobre probabilidad en estudiantes de Procesos Básicos de Aula acelerada
Autor (es)	Martínez Suárez, Juan Carlos
Director	Méndez Reina, Maritza
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 104 p.
Palabras clave	Alfabetización probabilística, Razonamiento probabilístico, Concepciones sobre probabilidad, Aceleración del aprendizaje
2. Descripción	
La creciente necesidad de enseñar probabilidad en primaria desde las concepciones que presentan los estudiantes sobre probabilidad, se pone de manifiesto en el presente trabajo de grado, cuyo propósito es aportar a la investigación sobre la enseñanza de la probabilidad en primaria, a partir del análisis de los resultados obtenidos en una entrevista que plantea a estudiantes participantes del programa de Procesos Básicos del Aprendizaje, experimentos con características aleatorias y deterministas. A partir de los resultados obtenidos en dichos experimentos, se elaboran herramientas analíticas para identificar concepciones de probabilidad de los estudiantes según características reconocidas por el modelo de alfabetización en probabilidad, el razonamiento probabilístico y la cognición intuitiva.	
3. Fuentes	
El desarrollo del trabajo de grado se sustentó en 27 fuentes bibliográficas, de las cuales 8 son extraídas de libros, 2 son trabajos de grado de pregrado y doctorado, 12 artículos de revista y 5 documentos oficiales. Los cuales se listan a continuación: Angarita, M. A. O., Parra, A. B. S., & Sandoval, C. C. U. (2011). Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad. <i>Revista Virtual Universidad Católica del Norte</i>, (34), 360-384. Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., & Ariza, R. P. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. <i>Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas</i>, 16(1), 85-97. Barragán, D. M., & Rivera, L. P. (2015). Razonamiento probabilístico desde el desarrollo de la intuición del azar en estudiantes de quinto de primaria. Secuencia de actividades basada en juegos de azar. Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. <i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME</i>, 8(3), 247-263.	

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de calidad</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 3	

- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*, 1-17.
- Beltrán-Pellicer, P. (2017). Una propuesta sobre probabilidad en educación infantil con juegos de mesa. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(1), 53-61.
- Dividendo por Colombia. (2015). *PLAN DE ESTUDIOS*. Bogotá, Colombia.
- Eichler, A., & Vogel, M. (2014). "Three Approaches for Modelling Situations with Randomness". En: Chernoff, E., & Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking*. (págs. 75-99). Dordrecht, Springer Science +Business Media
- Estrella, S., Alvarado, H., Olfos, R., & Retamal, L. DESARROLLO DE LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA: TEXTOS ARGUMENTATIVOS DE ESTUDIANTES.
- Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational studies in mathematics*, 15(1), 1-24.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). "Towards probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer, Boston, MA.
- Gómez, E., de Haro, J. J. O., Bernabeu, M. D. C. B., & García, J. M. C. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (35), 75-91.
- Gómez Torres, E., Contreras, J. M., & Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 73-89.
- Godino, J., & Batanero, M. C. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Jones, G. A. (Ed.). (2006). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.
- MEN, C. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Magisterio, Bogotá.
- MEN, M. D. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de calidad</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 3	

MEN, C. (2010). *Manual Operativo*. Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media. Subdirección de Estándares y Evaluación.

MEN, C. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.

Mojica, J. M. L. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial* (Doctoral dissertation, Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México).

Moreno, A., & Cardeñoso, J. M. (2014). Alfabetización Probabilística: Un reto para los profesores de secundaria. In *Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.

Ortiz, C. V., & Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 454-478.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño* (Vol. 369). Ediciones Morata.

Savard, A. (2014). "Developing Probabilistic Thinking: What about people's conceptions?". En: Chernoff, E., & Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking*. (págs. 283-298). Dordrecht, Springer Science +Business Media

Van Dooren, W. (2014). "Probabilistic thinking: Analyses form a Psychological Perspective". En: Chernoff, E., & Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking*. (págs. 123-126). Dordrecht, Springer Science +Business Media

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 5-23.

4. Contenido

Para evidenciar las concepciones sobre probabilidad en estudiantes del programa Procesos Básicos, el documento presenta 7 secciones. En la sección 1 presenta la problemática entorno a la enseñanza de la probabilidad en educación primaria y lo articula con la enseñanza de la probabilidad en Aulas Aceleradas; a continuación, justifica mediante referentes nacionales e internacionales, la importancia de considerar las concepciones de los estudiantes en el planteamiento de propuestas educativas en Aulas Aceleradas. En la sección 2, se establecen los objetivos de la propuesta alrededor de reconocer las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes del programa de Procesos Básicos en una institución educativa municipal de Soacha. En los antecedentes, que corresponden a la sección 3, se consideran propuestas de enseñanza de la probabilidad en primaria, en edades tempranas y con estudiantes con Necesidades

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de calidad</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 3	

Educativas Especiales y talentosos. Con estos elementos, en el marco de referencia, que corresponde a la sección 4, se alude al marco normativo nacional frente a la educación probabilística en primaria y en Aulas Aceleradas; en seguida se abordan aspectos de la alfabetización y razonamiento probabilístico que contribuyen a la caracterización de concepciones de probabilidad. A continuación, la sección 5, marco metodológico, destaca aspectos referidos a las condiciones del contexto educativo, al diseño del instrumento de caracterización y al establecimiento de categorías *a priori*, que permitieron analizar las transcripciones de las entrevistas realizadas a un grupo de estudiantes de Procesos Básicos.

En la sección 6, análisis y resultados, se encuentra tanto el análisis preliminar, como el diseño de la herramienta analítica a la luz de un marco de referencia posterior que enriquece teóricamente la comprensión de las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes de dicho programa. Con tales resultados se elaboran en la sección 7, conclusiones entorno a la pregunta de investigación y se realizan recomendaciones que proyectan los resultados del presente documento.

5. Metodología

Este trabajo de grado presenta cinco fases que consolidaron la construcción teórica, el hallazgo y análisis de las concepciones de probabilidad de los estudiantes. La fase 1, consideró la preparación en cuanto las condiciones del contexto de aula, así como la revisión y elaboración del marco de referencia. Para la fase 2, se diseña el instrumento de reconocimiento sustentado en los hallazgos de la fase 1, así como la generación de categorías de análisis *a priori*; para la fase 3, se realizan entrevistas y el análisis preliminar con las categorías *a priori* diseñadas en la fase 2 y se detecta la necesidad de diseñar una herramienta analítica suficiente para los objetivos del trabajo. A lo largo de la fase 4, se desarrolla la herramienta analítica sustentada en el marco de referencia posterior, que permite identificar relaciones emergentes entre categorías previas y posteriores establecidas en el marco de referencia y dicha herramienta; para generar en la fase 5, el análisis general, las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

6. Conclusiones

De los resultados obtenidos a lo largo del trabajo de grado se pueden destacar -al menos- las siguientes conclusiones:

- Las relaciones evidenciadas entre alfabetización probabilística (Grandes ideas de probabilidad y Focos de lenguaje del azar) y las características de la intuición permiten caracterizar, describir y ampliar las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad. Según lo anterior, las concepciones manifestadas por los estudiantes mediante el instrumento de reconocimiento son deterministas y se clasifican como concepciones de: interpretación personal, de independencia, de representatividad y de disponibilidad. Estas obedecen al foco verbal del lenguaje del azar, responden a las grandes ideas de probabilidad y se sustentan en características de la intuición de los estudiantes al enfrentarse a

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL Educación de calidad	FORMATO		
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 01		
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 6 de 3		

experimentos aleatorios.

- Así mismo, existen transiciones entre las concepciones de los estudiantes, manifestadas mediante el uso de distintos componentes del foco verbal del lenguaje del azar, así como de la adaptación de las grandes ideas por parte de los estudiantes a lo largo de cada uno de los experimentos, para tratar eventos aleatorios propuestos. Dicha transición entre concepciones, obedece a cierta complejización de la percepción, comprensión y búsqueda de información en el tratamiento eventos.

Elaborado por:	Juan Carlos Martínez Suárez
Revisado por:	Maritza Méndez Reina

Fecha de elaboración del Resumen:	10	02	2020
--	----	----	------

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: "**Concepciones sobre probabilidad en estudiantes de procesos básicos de aula acelerada**", elaborado por el estudiante:

Juan Carlos Martínez Suárez código 2015140050 y cédula 1013666677.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **43** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

En constancia se firma a los cinco (5) días del mes de marzo de 2020.

Director del Trabajo: Profesora


MARITZA MÉNDEZ REINA

Jurado:

Profesora


INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	VI
1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA	1
1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	1
1.2. JUSTIFICACIÓN	3
2. OBJETIVOS	5
2.1. GENERAL	5
2.2. ESPECÍFICOS	5
3. ANTECEDENTES	6
4. MARCO DE REFERENCIA	8
4.1. MARCO NORMATIVO	8
4.1.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM]	8
4.1.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM]	9
4.1.3. Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] (Versión 2)	10
4.1.4. Aceleración del Aprendizaje	10
4.2. ALFABETIZACIÓN EN PROBABILIDAD.....	12
4.2.1. Elementos cognitivos.....	14
4.2.2. Focos del lenguaje del azar.....	17
4.3. RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO.....	20
4.3.1. Razonamiento probabilístico según Fischbein	21
4.3.2. Características generales de la cognición intuitiva	22
4.4. ENFOQUE SOBRE LA PROBABILIDAD	24
4.5. PANORAMA GENERAL.....	26

5. MARCO METODOLÓGICO	28
5.1. CONDICIONES DEL CONTEXTO	29
5.2. DISEÑO DEL INSTRUMENTO DE CARACTERIZACIÓN	30
5.2.1. Experimentos aleatorios	33
5.2.2. Experimentos deterministas	37
5.3. ESTABLECIMIENTO DE CATEGORÍAS (<i>A PRIORI</i>) DE ANÁLISIS	39
6. ANÁLISIS Y RESULTADOS.....	41
6.1. ANÁLISIS CON CATEGORÍAS <i>A PRIORI</i>	41
6.1.1. Aleatorio-seguro	43
6.1.2. Incertidumbre- incierto.....	45
6.1.3. Predicción- posible	49
6.1.4. Aleatorio-imposible	50
6.2. MARCO DE REFERENCIA COMPLEMENTARIO	52
6.3. DISEÑO DE LA HERRAMIENTA ANALÍTICA.....	54
6.3.1. Contribuciones de la alfabetización probabilística y la cognición intuitiva a las concepciones sobre probabilidad.	55
6.3.2. Relación entre manifestaciones de los estudiantes y categorías.....	55
6.4. RESULTADOS A PARTIR DE LA HERRAMIENTA ANALÍTICA.....	62
6.4.1. Grandes Ideas de la Probabilidad.	63
6.4.2. Componentes del foco verbal del lenguaje del azar.	64
6.4.3. Razonamiento probabilístico.	65
6.4.5. Estudiantes que manifiestan relaciones entre categorías.	67
5. CONCLUSIONES.....	73
RECOMENDACIONES	77

TABLA DE ANEXOS

Anexo 1. Respuestas de miembros del grupo de estudio a la prueba de caracterización de inicio de año	80
Anexo 2. Correcciones del instrumento de reconocimiento	81
Anexo 3. Consideraciones éticas	86

A Martha S. por estar siempre.

A Duván P. por querer estar.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de grado no se hubiera podido desarrollar sin el apoyo, siempre imprescindible, de mi mamá. Así mismo, agradezco a Duván Felipe Pérez por su incondicional creencia en mis capacidades.

A la profesora Maritza Méndez, sin su minuciosa revisión este trabajo no hubiera logrado proponerse y centrarse en lo que es, y sin su convicción sobre lo que trabajamos hubiera sido imposible.

A su vez, un agradecimiento profundo a las docentes de la I.E. Manuela Beltrán de Soacha, gracias a su colaboración y apoyo este trabajo pudo elaborarse. Particularmente, a la profesora Viviana Garzón, sin su perspectiva no hubiera podido enfocarme en el programa de Procesos Básicos.

A los niños y niñas del programa de Procesos Básicos, sin ellos no habría trabajo de grado, ni esperanzas en el futuro.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la educación en probabilidad ha obedecido a la educación estadística, por lo cual ha disminuido el avance e impacto de la investigación en la primera, a pesar de que se reconoce la comprensión de la probabilidad como una competencia necesaria para el desarrollo de habilidades en la vida cotidiana. La educación probabilística busca formar una cultura desde la alfabetización probabilística con sus implicaciones conceptuales, metodológicas y manipulativas de herramientas e instrumentos, que permiten el tratamiento de situaciones con características de aleatoriedad mientras promueven actitudes frente a los datos y su significado en determinado contexto.

Esto se ha vinculado a la enseñanza de la probabilidad en educación secundaria y universitaria del sistema educativo colombiano, así como las concepciones de los estudiantes en dichos grados de escolaridad (sexto a once) para orientar sus contenidos y su didáctica. En oposición a dicha perspectiva, el presente trabajo de grado evidencia las concepciones sobre probabilidad en un grupo de estudiantes del curso Procesos Básicos, basado en el modelo de Aula acelerada, partiendo del interés por fortalecer la investigación en alfabetización probabilística para la básica primaria.

La necesidad de comprender y categorizar concepciones empleadas por estudiantes del programa de Procesos Básicos pretende aportar al desarrollo de líneas de trabajo sobre probabilidad en primaria, con la finalidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia, para que el ciudadano pueda desenvolverse con éxito en situaciones de incertidumbre (Gómez-Torres, Contreras y Batanero, 2015). De acuerdo a lo anterior, el trabajo pretende contribuir al fortalecimiento de la educación probabilística en Aulas Aceleradas, así como al planteamiento de instrumentos que favorezcan la detección de concepciones de los estudiantes a partir de sus manifestaciones lingüísticas. Así mismo, se busca que dichos instrumentos se sustenten desde:

Los documentos oficiales (MEC, 2006; MECD, 2014) [que] proponen que la enseñanza de la probabilidad sea más experimental, para proporcionar a los niños una experiencia estocástica desde su infancia, reforzando sus intuiciones probabilísticas(...). Mediante un lenguaje elemental probabilístico, juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, se intenta que el niño aprenda a reconocer la aleatoriedad y al final de este ciclo educativo sea capaz de comparar y estimar algunas probabilidades sencillas (Gómez-Torres et. al., 2015).

Instrumentos con los que se busca comprender las concepciones de los estudiantes desde sus manifestaciones lingüísticas, como un factor que favorece la pertinencia de estrategias metodológicas, herramientas y procedimientos relacionados con los conocimientos de los estudiantes.

Las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad, como componente del razonamiento probabilístico, se traducen en los objetivos de trabajo así como en el marco legal, y están sustentadas en documentos legales que orientan la enseñanza de la probabilidad en las aulas colombianas y en programas de aceleración del aprendizaje. A su vez, el marco de referencia teórico aborda aspectos sobre alfabetización probabilística, el papel de las intuiciones en el aprendizaje y las concepciones de probabilidad en estudiantes.

De esta manera, se elabora un instrumento de caracterización con el cual se realizan entrevistas a un grupo de estudiantes del programa -bajo autorización previa escrita por parte de los acudientes de los menores para registrar en video la información- para analizar según los hallazgos sus concepciones sobre probabilidad en dos momentos -a priori y a posteriori-. De acuerdo a estos, se plantean conclusiones en relación a la pregunta de investigación, caracterizando *las concepciones sobre probabilidad detectadas*, así como el papel de las categorías propuestas en relación con dichas concepciones.

Así, se culmina el presente trabajo formulando algunas recomendaciones sobre su impacto en la educación probabilística de programas de Procesos Básicos y la importancia de su posterior implementación en distintos grados de primaria, guardando diferencias frente a las características globales de los grupos de trabajo. También, se sugiere emplear las relaciones emergentes entre categorías como criterios de referencia para el análisis de las concepciones de los estudiantes.

1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El reconocimiento del pensamiento probabilístico y su desarrollo en los primeros niveles escolares ha provocado que la enseñanza de la probabilidad en primaria durante los últimos años manifieste cierto auge, aunque al momento parecen insuficientes los estudios sobre esta. Aquí se describirá la problemática desde los aspectos señalados en algunas investigaciones revisadas: (I) la carencia de investigaciones que orienten la práctica del docente en aulas de primaria; (II) la enseñanza de la probabilidad relegada a los últimos grados de escolaridad de secundaria; (III) la insuficiente formación didáctica y disciplinar en probabilidad de los docentes de matemáticas, y (IV) la influencia de sus preconcepciones en la formación de los estudiantes. Dichos reportes permiten reconocer vínculos entre estos aspectos y proveen un panorama sobre la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en primaria.

Pese a que en el marco nacional, la probabilidad en primaria -para grados de primero a tercero- se aproxima al tratamiento cotidiano de situaciones aleatorias según el pensamiento aleatorio y sistemas de datos (MEN, 2006), de acuerdo a la alfabetización en probabilidad según el modelo de Gal (2002, citado en MEN, 2006), se presenta a nivel escolar poco tiempo al desarrollo de nociones de probabilidad, y su estudio se relega a la secundaria o no se contempla en los planes de estudios, como se evidencia en el caso de Procesos Básicos (Dividendo por Colombia, 2015).

Por otro lado, la reducida investigación en torno a las concepciones de probabilidad en primaria, como señala Carballo (2004, citado en Mojica, 2013) dificulta el tratamiento de contenidos relacionados con el pensamiento probabilístico. Esto puede llevar a tratar temas sin una aproximación clara sobre los saberes previos de los estudiantes, y las relaciones que pueden establecer entre contenidos enseñados y experiencias de estos frente a situaciones aleatorias. En este sentido, Angarita, Parra y Sandoval (2011) consideran que,

Los autores reflexionan sobre la importancia que se le debe dar a la caracterización del estudiante, en relación con los conocimientos básicos o lo que se requiere para iniciar el curso; igualmente es importante saber sobre preconceptos, habilidades, aptitudes y actitudes que tiene el

estudiante para afrontar situaciones con la presencia de variabilidad e incertidumbre. (p.372)

Parte de las causas de las pocas fuentes y herramientas para abordar la probabilidad en primaria (Batanero, 2006), se debe a que el eje funcional de la enseñanza de la probabilidad se centra en la educación secundaria. Estas, centran su labor en el desarrollo de contenidos curriculares sobre probabilidad dejando de lado las concepciones de los estudiantes y cómo las ponen en juego para significar una situación aleatoria, en detrimento del desarrollo de razonamiento probabilístico.

En relación con lo anterior, se suma que algunos profesores en su proceso de formación inicial no logran conocer herramientas matemáticas y didácticas suficientes para la enseñanza de la probabilidad (Vásquez y Alsina, 2014), lo cual puede decantarse en concepciones erróneas de su parte o en dificultades para conseguir que las expectativas de aprendizaje de los estudiantes alrededor de la probabilidad se realicen. Al respecto, Eichler y Vogel (2014) señalan que, frente a las concepciones de probabilidad de los docentes -tanto de primaria como de secundaria-, hay una baja apropiación y dominio de los contenidos matemáticos, puesto que

La investigación solo ha arrojado resultados escasos sobre lo que los docentes conocen sobre probabilidad y cómo enseñar probabilidad en el aula de clase (Shaugnessy 1992; Jones et al. 2007). Begg y Edwards (1999) reportaron un conocimiento matemático débil de 34 docentes de primaria en ejercicio y en formación previa sobre el concepto de probabilidad (enfoque clásico y frecuentista). (p.80)

Se revela así que las problemáticas descritas no son aisladas, sino que desde sus relaciones, plantean un panorama sobre la probabilidad en primaria. En este sentido, el programa de Procesos Básicos donde se realiza este estudio no escapa de esta realidad; pues sumado al panorama descrito, al ser un programa bajo el modelo de aula acelerada de grados primero, segundo y tercero, el plan de estudios no contempla conceptos o procesos asociados a probabilidad (Fundación Dividendo por Colombia, 2015). Se relegan orientaciones para el desarrollo del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y se privilegia el desarrollo de habilidades numéricas, y estrategias que impliquen capacidades tanto aritméticas, como ciertos procesos del pensamiento matemático.

Bajo esta perspectiva, aparece el siguiente cuestionamiento *¿Cuáles son las concepciones de los estudiantes de Procesos Básicos de aula acelerada, en relación con la alfabetización probabilística y el razonamiento probabilístico?*

1.2. JUSTIFICACIÓN

El presente estudio surge de cuestionamientos sobre la situación actual de la enseñanza de la probabilidad en el marco de la alfabetización probabilística. La población con la que se desarrolla el trabajo hace parte de un programa de formación para estudiantes en extraedad que acceden al primer ciclo de educación básica primaria (Procesos Básicos, Aula acelerada) de una institución educativa de Soacha. Se busca a partir del desarrollo de experimentos aleatorios y deterministas por parte de los participantes, caracterizar sus concepciones sobre probabilidad, para entender cómo a través de manifestaciones lingüísticas, muestran intuiciones sobre ideas de probabilidad (Gal, 2002) ligadas a la alfabetización probabilística.

En Colombia, los documentos curriculares como Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998), incluyen, entre los tipos de pensamiento que componen el pensamiento matemático, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, donde se señala que:

El pensamiento aleatorio [...] ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (pp.64-65)

Así mismo, las competencias dirigidas al tratamiento de la probabilidad en el ciclo de primero a tercero de primaria (grados que pretende acelerar el programa de Procesos Básicos) según los EBCM del MEN (2006) se traducen en los siguientes estándares respectivamente: “[Expliquen] –desde [su] experiencia- la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos” y “[Predigan] si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro”(p.81).

Dentro del marco de acción de la educación formal del país, la probabilidad en primaria se orienta como un trabajo introductorio, donde se reconocen nociones de

probabilidad tales como evento, posibilidad, imposibilidad y ocurrencia de un evento a partir de la situaciones cotidianas, buscando el empleo de sistemas de datos para comprender aquellas situaciones con algún grado de aleatoriedad. Bajo estos términos y la posibilidad de explorar el trabajo en probabilidad en Aulas Aceleradas, se reconoce la necesidad de comprender las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad, para generar propuestas de enseñanza en probabilidad para primaria.

Investigaciones muestran que la construcción de significado de los objetos de la probabilidad, está mediada por la dualidad entre objetividad y subjetividad, la cual se explica por el carácter personal o institucional que se asigne a los temas tratados en el aula, a propósito, Batanero (2005) señala que:

Distinguimos entre el significado institucional y personal de un mismo objeto matemático, ya que cuando un estudiante ingresa en una escuela o centro educativo el significado que asigna a un objeto matemático podría no coincidir con el acordado dentro de la institución. De este modelo de significado se [...] plantea que la aprehensión de un concepto no sería unitaria, sino gradual, e implicará la adquisición de los distintos elementos que componen los significados institucionales. (p.253)

Lo cual implica la necesidad de conocer las concepciones de los estudiantes de un aula acelerada sobre probabilidad, entendidas como significados personales, pues es una herramienta que las involucra en la formulación de planes de estudio y propuestas de enseñanza, ya que desde las concepciones de estos estudiantes, se pueden fortalecer tales propuestas al articularse con la alfabetización probabilística.

A pesar de esto, la probabilidad en el sistema educativo colombiano sufre una realidad común en las instituciones educativas, pues es relegada dentro del currículo y su intensidad horaria es reducida, o nula como se evidencia en el plan de estudios del programa de Procesos Básicos (Dividendo por Colombia, 2015), frente a esto, Angarita, et. al (2011) consideran que

En Colombia existen recomendaciones a nivel de educación básica y media, dadas por el Ministerio de Educación Nacional, en cuanto a los temas de Probabilidad que se deben incluir en los currículos; sin embargo, hay grandes debilidades en el cumplimiento de los contenidos por parte de las instituciones educativas, lo que genera la necesidad de iniciar un estudio en este campo. (p.378)

Por tanto, este trabajo busca caracterizar las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes de un aula acelerada, bajo grandes ideas de probabilidad y el foco verbal del lenguaje del azar. Caracterización que permita orientar futuras prácticas pedagógicas alrededor de la alfabetización probabilística en aulas aceleradas y el fortalecimiento de la enseñanza de la probabilidad en primaria.

2. OBJETIVOS

2.1. GENERAL

Caracterizar las concepciones sobre Probabilidad de los estudiantes de Aula acelerada del programa Procesos Básicos de Aprendizaje, por medio del análisis de sus manifestaciones lingüísticas.

2.2. ESPECÍFICOS

Identificar las manifestaciones lingüísticas de los estudiantes para denotar aleatoriedad, predicción e incertidumbre en experimentos clásicos de probabilidad.

Emplear las grandes ideas de probabilidad, el foco verbal del lenguaje del azar y las características de las intuiciones sobre probabilidad para detectar concepciones en los estudiantes.

Detectar contribuciones de la alfabetización probabilística y el razonamiento probabilístico a las concepciones de probabilidad de los estudiantes.

Proponer un instrumento que favorezca el análisis y detección de las concepciones de probabilidad que poseen los estudiantes en primaria.

3. ANTECEDENTES

Distintas fuentes sugieren que si bien en los últimos años se ha presentado cierto desarrollo investigativo sobre la enseñanza de la probabilidad en primaria, aún existe una brecha amplia respecto a producciones en áreas como la enseñanza de la aritmética, el álgebra o la geometría. A pesar de dicha brecha, se hallan investigaciones que promueven la enseñanza de la probabilidad a edades cada vez más tempranas, basándose en dos necesidades mencionadas por Fischbein (1975, en Barragán y Rivera, 2015): (I) de conocimientos sobre probabilidad en el mundo actual y (II) de integrarlos a los currículos de instituciones educativas.

De esta manera, los antecedentes que se presentan a continuación, son producto de una revisión de estudios sobre concepciones de probabilidad en primaria. Así mismo, sobre la enseñanza probabilística en edades tempranas como sustento del desarrollo de competencias en primaria y con poblaciones con necesidades educativas especiales [[NEES]] en cuanto la condición de extraedad del grupo de estudio.

Barragán y Rivera (2015) abordan la idea de azar -como componente de la probabilidad- en estudiantes de primaria, el papel de los juegos de azar en la comprensión de nociones básicas de probabilidad y en la transición de intuiciones primarias a secundarias, donde además de favorecer dicha transición, se generan estrategias que contribuyen a modificar características presentes en las intuiciones primarias de los estudiantes. A partir de ello, concluyen la necesidad de adelantar en primaria la enseñanza de la probabilidad para proporcionar experiencias genuinas en los estudiantes, sobre el azar y su tratamiento.

Dicho estudio, produce orientaciones para elaborar secuencias didácticas para la enseñanza de probabilidad en primaria y puntualiza la necesidad de dominio conceptual del docente sobre las nociones a trabajar. De lo contrario, sus comprensiones pueden reñir con la propuesta de alfabetización probabilística, debilitando las herramientas y el lenguaje necesario para dar sentido a situaciones con características aleatorias. También destaca la necesidad de aproximar la enseñanza de la probabilidad desde juegos de azar cercanos a los estudiantes, que faciliten la realización de repeticiones en los experimentos, para evidenciar el grado de aleatoriedad de los eventos considerados. Este trabajo aporta en el diseño del instrumento mediante el cual se entrevista a los estudiantes, así como al tratamiento de la alfabetización probabilística en el análisis de los resultados.

Para la enseñanza de la probabilidad en edades tempranas, Beltrán- Pellicer (2017) destaca el papel de los juegos de azar como aproximación a situaciones de incertidumbre con estudiantes de 3 a 6 años. En su estudio considera el empleo de juegos para el desarrollo de secuencias -de carácter introductorio- sobre términos de la probabilidad como lo seguro, imposible o probable. La propuesta contempla la utilización de algunos juegos, cuya importancia es relevante para la elaboración del instrumento de entrevista a los estudiantes.

Frente a la enseñanza de la probabilidad en poblaciones con [NEES], Mojica (2013) retoma los esquemas compensatorios postulados por Vygotsky, para argumentar que dichas poblaciones los desarrollan para soportar y reemplazar esquemas mentales que no desplegaron en etapas adecuadas, y por tanto, el análisis de estos frente a cómo abordan tareas los estudiantes permite comprender los esquemas mentales determinantes en la comprensión de situaciones con rasgos de aleatoriedad.

Mojica (2013) a su vez plantea que la caracterización de las herramientas empleadas en el aula, permite un análisis preciso del desarrollo de las intuiciones primarias y la transición a las secundarias sobre el azar según los esquemas compensatorios, para identificar los elementos percibidos por los estudiantes para comprender las situaciones planteadas. El anterior estudio sustenta el trabajo desarrollado en aula acelerada, pues como población en extra edad, pueden emplear esquemas compensatorios (visuales, gestuales, entre otros) para apoyar procesos que quedaron sin desarrollar en etapas adecuadas, como la caracterización cualitativa y cuantitativa de situaciones aleatorias.

Guardando una discreta relación con Mojica (2013), sobre el grupo de estudio, Estrella, Alvarado, Olfos y Retamal (2019), abordan el desarrollo de la comprensión probabilística en estudiantes con talento académico de 11 a 13 años. En su propuesta bajo la alfabetización probabilística, describen las argumentaciones iniciales y finales de los estudiantes frente a la asignación de probabilidades y el uso del lenguaje probabilístico. Allí, concluyen que los estudiantes avanzaron en su comprensión de “probabilidad” al aplicar ciertos enfoques de esta para asociar lo cualitativo de las situaciones propuestas con lo cuantitativo en términos del enfoque clásico de probabilidad. Este estudio favorece la obtención de indicadores para identificar el nivel de las concepciones de los estudiantes del programa de Procesos Básicos -que se encuentran en el mismo rango de edad- en relación al grupo caracterizado por Estrella, et. al. (2019).

4. MARCO DE REFERENCIA

Este estudio considera el marco de referencia nacional, según los referentes curriculares que orientan la enseñanza de la probabilidad en Colombia, contemplando también aquellos lineamientos frente al modelo educativo flexible de Aceleración del Aprendizaje. En seguida, se referencian los elementos cognitivos de la alfabetización probabilística, las características de la intuición enmarcada en el razonamiento probabilístico, estableciendo vínculos entre estos y entre las condiciones de aula con que se trabaja.

4.1. MARCO NORMATIVO

El sistema educativo colombiano está regido actualmente por la Ley 115 de 1994, la cual regula y estipula la estructura y organización de este, y promueve distintos estamentos dentro del Ministerio de Educación Nacional [MEN] para la estructuración curricular de las instituciones educativas del país. De aquí se derivan distintas políticas encaminadas a orientar y estructurar los currículos institucionales, a través de documentos oficiales como los LCM (MEN, 1998), los EBCM (MEN 2006), y los Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA V.2] (MEN, 2016).

Adicionalmente el MEN reglamenta los programas flexibles (Aceleración del Aprendizaje) como una alternativa a la educación básica de las instituciones educativas y son dirigidos a estudiantes en extraedad, buscando que retomen sus estudios a edades distintas de las estipuladas para los procesos de matrícula regular. A continuación, se presentan referencias de documentos oficiales que sustentan la enseñanza de probabilidad con la población objeto de estudio.

4.1.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM]

Estos lineamientos proferidos por el MEN (1998), son herramientas orientadoras para la creación y desarrollo de currículos en las instituciones educativas del país, buscan orientar la organización institucional y la práctica docente. En matemáticas se basa en tres aspectos fundamentales: los procesos generales, relacionados con el aprendizaje de los estudiantes y la manera de entender los objetos matemáticos; los conocimientos básicos, relacionados con los conocimientos específicos de las matemáticas; y, el contexto, referente a los ambientes que rodean al estudiante y dan sentido a su aprendizaje de las matemáticas (MEN,1998).

El MEN (1998) estructura los conocimientos básicos a partir de los tipos de pensamiento matemático, los cuales promueven determinados sistemas epistemológicos y cognitivos, por lo cual, para el presente estudio se tiene en cuenta el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. Para este pensamiento, se manifiesta la necesidad de promover experiencias significativas en el aula, que aproxime a los estudiantes al análisis y reflexión de las situaciones probabilísticas:

La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permita exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones. (MEN, 1998, p.47)

Atendiendo a lo anterior, es necesario impulsar la enseñanza de la probabilidad articulando comprensiones y análisis sobre la naturaleza de los datos, la aleatoriedad, las experiencias cotidianas relacionadas con problemas probabilísticos, mediante la generación de espacios de exploración, análisis y reflexión por parte de los estudiantes, de aquellas circunstancias que inciden en que una situación posea características de aleatoriedad.

4.1.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM]

Los EBCM señalan aquellas competencias mínimas que deben poseer los estudiantes colombianos en cada conjunto de grados, desde básica primaria, atravesando la secundaria, hasta la educación media. Así mismo, articulan y establecen relaciones entre los conocimientos básicos y los procesos generales de las matemáticas, siguiendo así las orientaciones establecidas en los LCM.

Dado que el grupo de estudio es parte de un programa de Aula acelerada que abarca desde grado primero hasta tercero de básica primaria, se consideran aquellos estándares que favorecen los conocimientos básicos del pensamiento aleatorio y sistemas de datos en estos grados, los cuales indican que los estudiantes: “[Expliquen] –desde [su] experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos” y “[Predigan] si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro” (p.81, MEN, 2006).

Así, los EBCM manifiestan que los estudiantes atiendan intuitivamente la aleatoriedad -como componente de la probabilidad- en experiencias cotidianas o provocadas en el aula, a partir de la descripción o predicción de resultados de eventos. También, evidencian la necesidad de considerar la predicción, implicando para los estudiantes analizar condiciones dadas en un problema e imaginar mundos posibles con estas, con el fin de acercar la enseñanza probabilística desde contextos, mediante la reflexión sobre resultados posibles y sus consecuencias.

4.1.3. Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] (Versión 2)

Los DBA V.2 (MEN, 2016), son una estrategia del MEN para aproximar a los padres de familia al trabajo desarrollado en las instituciones. Con esta herramienta se pretende que la comunidad educativa se acerque a los contenidos, competencias y capacidades que los estudiantes han de poseer al finalizar cada curso desde primaria hasta bachillerato.

Para este estudio se consideran los derechos para grados primero, segundo y tercero, donde no se detectan menciones del pensamiento probabilístico en grado primero de primaria. Para segundo y tercero de primaria se detecta un derecho respectivamente, que se presentan a continuación:

[Grado Segundo. Derecho 11.] Explica, a partir de la experiencia, la posibilidad de ocurrencia o no de un evento cotidiano y el resultado lo utiliza para predecir la ocurrencia de otros eventos. (MEN, 2016, p.21)

[Grado Tercero. Derecho 11.] Plantea y resuelve preguntas sobre la posibilidad de ocurrencia de situaciones aleatorias cotidianas y cuantifica la posibilidad de ocurrencia de eventos simples en una escala cualitativa (mayor, menor e igual). (MEN, 2016, p.29)

Considerando los derechos planteados para el desarrollo de pensamiento aleatorio en los estudiantes, se observa cómo queda relegado frente a otros pensamientos, no solo en cantidad sino también en importancia, favoreciendo el uso de experiencias cotidianas como herramientas evocativas para dar preponderancia a la necesidad de predicción a partir de modelos representativos de la cotidianidad.

4.1.4. Aceleración del Aprendizaje

El modelo de Aula acelerada es una estrategia del MEN con la cual busca que los estudiantes en extraedad superen el desfase edad-grado, por medio de la

atención a estudiantes entre los 10 y 15 años durante un año lectivo. Año en el que se lleva a cabo una serie de seis módulos interdisciplinarios que permiten a los estudiantes desarrollar y reforzar competencias y desempeños tanto en lectura y escritura, como en conocimientos matemáticos básicos (MEN, 2010).

Programa Procesos Básicos

El programa de Procesos Básicos es un modelo de Aula acelerada desarrollado con apoyo de la Fundación Dividendo por Colombia, la cual realizó convenios con el MEN y las Secretarías de Educación Municipales y Departamentales, con el fin de que se implementara el modelo en instituciones educativas oficiales de diferentes regiones del país. Este programa atiende a estudiantes entre los 9 y 15 años, que requieren desarrollar habilidades básicas en lectura, escritura y matemáticas, buscando evitar la deserción y el fracaso escolar. Para el desarrollo de los conocimientos matemáticos, la estrategia plantea las siguientes metas:

- Desarrollar actividades para el desarrollo del pensamiento lógico matemático de manera permanente e integrarlas con el desarrollo de las demás áreas del conocimiento.
- Despertar en los estudiantes las expectativas, el interés y la motivación mediante el uso de preguntas y actividades.
- Fortalecer los momentos en los que el estudiante reflexiona, expresa sus ideas y confronta sus opiniones.
- Incentivar el uso de estrategias para plantear y resolver problemas y reiterar los procedimientos matemáticos. (Fundación Dividendo por Colombia, 2015, p.11)

Así mismo, el plan de estudios presenta el perfil de salida de los estudiantes del programa, donde señala que las habilidades matemáticas adquiridas sean:

- Hacer uso adecuado de los números y las operaciones de suma y resta para representar y resolver situaciones problema que impliquen la composición y descomposición aditiva de centenas, decenas y unidades.
- Hacer uso adecuado de modelos y representaciones geométricas que les permita identificar y clasificar figuras geométricas y establecer relaciones de direccionalidad, lateralidad y proyección.
- Establecer algunos procedimientos y estrategias para comparar magnitudes como longitud y tiempo.

- Identificar regularidades de cambio en algunas variaciones de tipo aditivo.
- Organizar datos en listas y tablas y representar dicha información de manera gráfica. (Fundación Dividendo por Colombia, 2015, p.29)

De esta manera el plan de estudios presenta algunos elementos de los LCM (1998), como de los EBCM (2006), para acelerar y nivelar los procesos educativos de los estudiantes hasta el grado tercero de primaria, buscando garantizar la permanencia de los estudiantes participantes del programa en la escuela, sin embargo, excluye dentro de su organización el pensamiento probabilístico.

Con estos elementos, el panorama curricular nacional establece competencias que buscan desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes de primaria, así como estándares que indican las expectativas de aprendizaje, mediante la articulación de experiencias de aula que permitan caracterizar eventos con cierto grado de aleatoriedad desde la cotidianidad. Sin embargo, dicho panorama no se evidencia en el plan de estudios de Procesos Básicos.

4.2. ALFABETIZACIÓN EN PROBABILIDAD

Para autores como Gal (2002), Moreno y Cardeñoso (2014), Ortiz y Alsina (2017) y Jones (2006), la alfabetización probabilística es vista como un conjunto de capacidades, disposiciones y herramientas que poseen los individuos para comprender, analizar, interpretar y participar en situaciones probabilísticas. En el ámbito nacional, documentos como los LCM (1998), evidencian consonancias con esta concepción de alfabetización, señalando la necesidad de desarrollar competencias en los estudiantes para ser considerados alfabetizados respecto a asuntos probabilísticos del mundo real.

La alfabetización probabilística según Gal (2002, 2005) es un conjunto de capacidades, conocimientos, habilidades, creencias, actitudes, hábitos y una perspectiva crítica apoyada en: 1) la alfabetización numérica, entendida esta como los conocimientos y capacidades para interactuar y relacionarse con los números y la resolución cotidiana de problemas aritméticos; y, 2) en la alfabetización estadística (Moreno y Cardeñoso, 2014), asumida como las capacidades para interpretar, evaluar y reflexionar críticamente sobre un conjunto de datos y representaciones estadísticas.

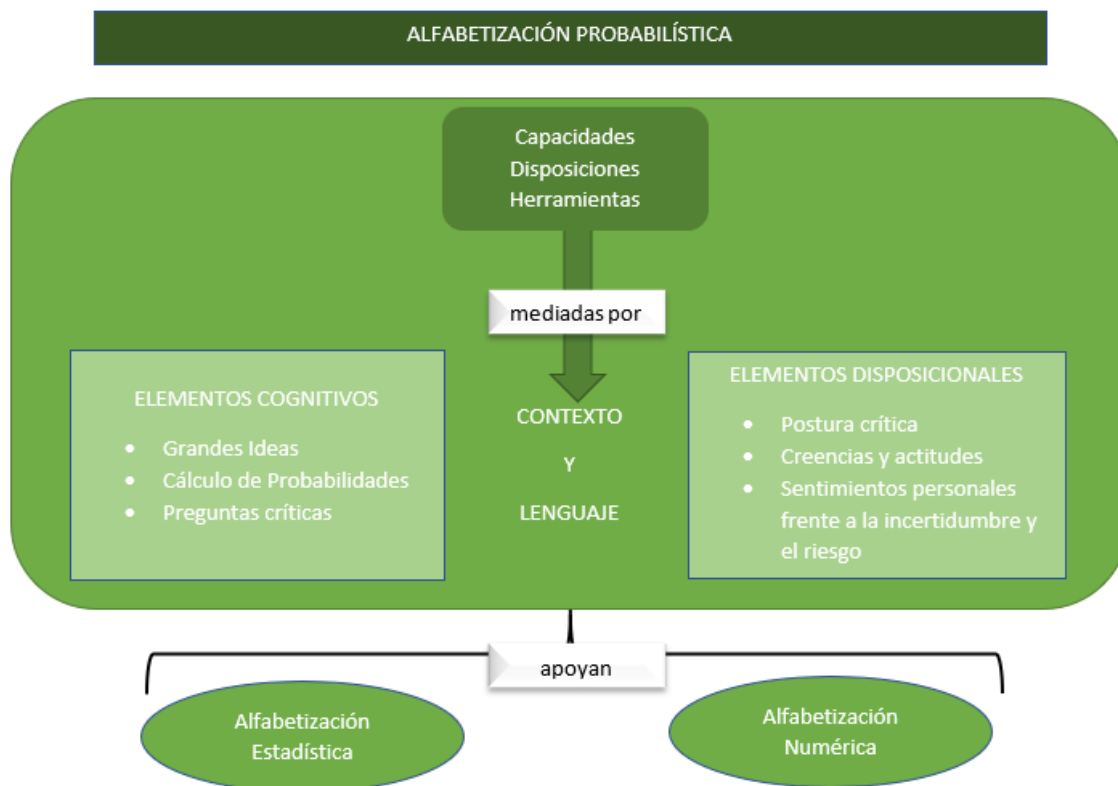
La alfabetización probabilística articula la actitud y la disposición, la adaptación y manipulación de herramientas aritméticas, estadísticas e interpretativas, para dar

cuenta de una serie de datos en situaciones cotidianas que afectan el contexto inmediato de los sujetos. Su pertinencia radica en la necesidad de proporcionar herramientas suficientes desde las matemáticas y la probabilidad, para que los estudiantes generen respuestas eficaces sobre situaciones de su cotidianidad.

Un elemento importante de la alfabetización probabilística es el contexto en que está el individuo, pues gracias a este, los problemas del azar poseen elementos de reflexión que pueden alterarse si se movilizan dentro de otros contextos. Por esta razón, la alfabetización probabilística da respuesta a los objetivos de la cultura estadística en cuanto a la formación de sujetos críticos y reflexivos sobre conjuntos de datos propios de su realidad inmediata.

En tanto elementos cognitivos, Ortiz y Alsina (2017) resaltan: 1) las grandes ideas de probabilidad como conceptos básicos para promover dicha alfabetización en función de la asignación o la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento; 2) el lenguaje, con los términos utilizados para comunicar el azar; 3) el contexto, y su comprensión de las implicaciones de los problemas probabilísticos y sus mensajes en diferentes contextos y en el discurso personal y público; y, 4) las preguntas críticas, como aquellas cuestiones que refieren a la capacidad de los estudiantes para explicarse un problema probabilístico a partir de preguntas fundamentales.

Estos elementos se complementan y articulan con los elementos disposicionales, tales como: actitudes, posturas, comprensiones, análisis y reflexiones de los estudiantes frente a los problemas de la probabilidad. Se destacan la postura crítica, como la capacidad de reflexionar sobre los datos que arrojan los cálculos y qué representan. Las creencias y actitudes, como ejercicio diferenciador entre la narración anecdótica de las experiencias y su análisis con herramientas matemáticas; y, los sentimientos personales en relación con la incertidumbre y el riesgo, donde el grado de incertidumbre o previsión de un evento permiten evaluar los riesgos referentes a la toma de decisiones. (Ortiz y Alsina, 2017)



Esquema 2. Estructura del modelo empleado de alfabetización probabilística.

Fuente. Creación propia basada en Gal (2002)

Para este estudio, el contexto y el lenguaje se extraen de los elementos cognitivos para ser mediaciones, debido a que vinculan las habilidades con los conocimientos frente a situaciones probabilísticas. Gracias a dicha mediación del lenguaje se pueden recuperar disposiciones y herramientas empleadas por los estudiantes para enfrentarse a un experimento con características aleatorias enmarcadas en el contexto de juego, mediante el cual, se pueden recuperar las concepciones de probabilidad empleadas.

4.2.1. Elementos cognitivos

Dentro de la alfabetización probabilística los conocimientos son considerados como aquellos que permiten a un sujeto formado alfabéticamente en probabilidad, desarrollar capacidades y abordar situaciones probabilísticas. Estos elementos incluyen las grandes ideas, las cuales permiten a los sujetos caracterizar una situación con rasgos de aleatoriedad. Para el presente estudio se destacan la aleatoriedad, la predicción y la incertidumbre.

Gal (2002, 2005) presenta estos elementos de la siguiente manera: frente a la aleatoriedad, plantea que “es una construcción resbaladiza debatida por muchos estadistas (un posible punto de vista es que el azar es una característica del resultado [del evento aleatorio])” (p.52); mientras que, la predicción y la incertidumbre se relacionan con el estado de nuestro conocimiento general acerca de la probabilidad de un determinado evento (Ortiz y Alsina, 2017).

La caracterización de las grandes ideas busca establecer las concepciones que poseen los estudiantes sobre probabilidad como caracterización de lo indeterminado, es decir, de aquellos elementos de la experiencia con eventos probabilísticos de los cuales no se puede referir directamente. Así mismo, la predicción e incertidumbre, se entienden como disposiciones y herramientas empleadas por los estudiantes para denotar la posibilidad de los eventos o señalar cuál de estos es más probable que ocurra (Gal, 2005). A continuación se amplía las ideas de aleatoriedad e incertidumbre y las implicaciones de la predicción.

4.2.1.1. Aleatoriedad

Gal (2005) considera al menos dos concepciones de aleatoriedad para alfabetizar probabilísticamente a los sujetos, que retoma de Bennet (1998, en Gal, 2005), quien la destaca como (I) propiedad intrínseca de los eventos; y de Beltrami (1999, en Gal, 2005), quien la describe como (II) un proceso aleatorio, para el que los eventos no pueden modelarse bajo diseños deterministas o referirlos a causas predecibles.

Por su lado, Piaget e Inhelder (1997) hacen referencia a la aleatoriedad a partir del surgimiento de la idea de azar en el niño entendida como una percepción inicial de aleatoriedad como obstáculo, es decir que el niño no posee suficientes herramientas, que no permite identificar o establecer las causas y consecuencias en un fenómeno o suceso a desarrollar.

Azcárate, Cardeñoso y Ariza (1998), señalan la importancia de la noción de aleatoriedad como concepto implicado directamente con nuestra propia forma de concebir la realidad y el conocimiento. Por tanto, la idea de aleatoriedad debe ser una idea mediada y definida de acuerdo con las herramientas disponibles para probar el carácter aleatorio de los eventos cotidianos a los que nos enfrentamos. Lo cual implica que tenga múltiples significados, que desarrollan los individuos, de acuerdo al tipo de experiencia y a su mediación con lo aleatorio. De la noción de aleatoriedad, Azcárate et al. (1998), destacan al menos cinco concepciones -

caracterizadas según la capacidad de identificar y manipular la aleatoriedad para argumentar los eventos planteados-, estos se exponen en la siguiente tabla,

CONCEPCIÓN DE ALEATORIEDAD	CARACTERÍSTICAS
Indefinido	Reconocimiento dificultoso de la aleatoriedad. No explican los criterios utilizados.
Determinista	Reconocimiento muy bajo de la aleatoriedad. La aleatoriedad como ausencia de control a las causas. Sesgo determinista en sus razonamientos.
Causalidad	Reconocimiento medio de la aleatoriedad. Justificaciones bajo argumentos causales. Falta de control de las causas, por desconocimiento de estas o imposibilidad de control del azar. Reconocimiento mínimo de la imprevisibilidad.
Estándar	Explicaciones que se modifican de acuerdo con el contexto. Reconocimiento alto de la aleatoriedad, uso de distintas argumentaciones.
Incertidumbre	Reconocimiento superior de la aleatoriedad. Explicaciones basadas en la imprevisibilidad, con menor presencia de explicaciones causales.

Tabla 1. Concepciones de aleatoriedad

Fuente. Azcárate et al., 1998

4.2.1.2. Predicción e Incertidumbre

Para Gal (2005, p.53), “la predicción y la incertidumbre se relacionan con el estado de nuestro conocimiento general sobre la probabilidad de un evento determinado (...). Es posible que podamos describir la probabilidad de ese evento mediante una declaración de probabilidad (...)”. Sin embargo, hablar de la probabilidad de un evento no es lo mismo que hablar de su predicción o de la certeza de su ocurrencia. La predicción de un evento depende de las suposiciones sobre la ocurrencia de dicho evento y la calidad de la información poseída para respaldarlas.

La predicción y la incertidumbre de un fenómeno, necesitan de sujetos capaces de seleccionar, relacionar y caracterizar la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de una serie de datos obtenidos de este. Es decir, se requiere de un conjunto de capacidades de los sujetos para seleccionar y analizar información sobre los eventos, para dar un juicio sobre la posibilidad o imposibilidad del suceso.

Savard (2014) plantea que el razonamiento sobre la incertidumbre se sustenta en tipos de cognición caracterizados por actitudes y acciones que emplean los

sujetos para comprender una situación probabilística. Mientras el conocimiento formal de la teoría de probabilidades lleva a los sujetos a emplear estrategias para entender eventos aleatorios. En el caso de los juicios, las actitudes, consideraciones y respuestas sobre eventos aleatorios, son distintos según los conocimientos y herramientas cognitivas empleadas por los sujetos para entender la incertidumbre y operar la predicción. Savard (2014) observa que:

Según Konold (1989), el razonamiento sobre la incertidumbre implica dos tipos de cognición: el conocimiento formal de la teoría de probabilidad y las “evaluaciones que se organizan como heurísticas de juicios” (p.88). Podemos traducir eso por el hecho de que generalmente, las personas usan un razonamiento probabilístico o un razonamiento determinista para pensar acerca de la probabilidad. (p.288)

De esta manera, el desarrollo de las grandes ideas de probabilidad (aleatoriedad, predicción e incertidumbre), favorece el la alfabetización probabilística de los individuos, pues forma capacidades para hacer frente a los datos, proporcionados en distintos medios y contextos, para comprender, analizar y reflexionar sobre estos, a partir de las características aleatorias de los eventos de los que se extraen dichos datos.

4.2.2. Focos del lenguaje del azar

Involucrar el lenguaje del azar en la alfabetización probabilística, revela una necesidad por considerar su evolución de acuerdo a las etapas de desarrollo de los estudiantes. Piaget e Inhelder (1997) señalan la relación entre lógica y lenguaje para la estructuración del desarrollo cognitivo, relación que promueve los fundamentos para las operaciones intelectuales que favorezcan el pensamiento matemático:

... las raíces de la lógica hay que buscarlas en la coordinación general de las acciones (comprendidas las conductas verbales) a partir de ese nivel censo-motor cuyos esquemas parecen ser de importancia fundamental desde los inicios; y ese esquematismo continúa luego desarrollándose y estructurando el pensamiento, incluso verbal, en función del progreso de las acciones, hasta la constitución de las operaciones lógico-matemáticas, finalización auténtica de la lógica de las coordinaciones de acciones, cuando éstas se hallan en estado de interiorizarse y de agruparse en estructuras de conjunto. (pp. 94-95)

Se observa así que existe una complementariedad entre lógica y lenguaje, según las estructuras generales que comparten y cómo se modifican a la par, en la realización de esquemas que permitan la aprehensión y manipulación de ambas. Dichos esquemas, se desenvuelven en múltiples representaciones de los objetos que abordan y de la lógica subyacente para abordarlos.

Tal estructuración del pensamiento devenida de la esquematización, favorece el lenguaje probabilístico, al ser empleado para representar y referir sucesos o eventos con rasgos de aleatoriedad. Las maneras de denotar la aleatoriedad dependen de las interacciones con el contexto, vistas como un ejercicio de adquisición de lenguaje mediado por la percepción de la lógica subyacente al evento que se esté refiriendo y su significado.

Dicha lógica sustenta la evolución del lenguaje para tratar la probabilidad. Se puede manifestar verbal y gestualmente en los primeros niveles de desarrollo cognitivo, y que bajo ciertas mediaciones, permite la adquisición de nuevas herramientas lingüísticas con su lógica, para denotar y comprender la probabilidad en diferentes situaciones.

Así es como la categoría del lenguaje del azar, dentro de los elementos cognitivos del modelo de Gal, es presentado por Ortiz y Alsina (2017), como una categoría fundamental en el desarrollo del proceso de alfabetización probabilística. En este sentido Azcárate et al. (1998), Ortiz y Alsina (2017), Jones (2006) y Batanero (2006), consideran que en la enseñanza de la probabilidad en primaria, deben adoptarse elementos del lenguaje para dar sentido al azar desde situaciones cotidianas con rasgos aleatorios, destacando la importancia del lenguaje tanto por las condiciones del contexto, como por el significado de las palabras utilizadas para expresar aleatoriedad y las herramientas lingüísticas necesarias para abordarla.

De ahí, la importancia de que la probabilidad se trabaje en las primeras edades a partir de lenguaje cotidiano e informal. Este proporciona bases para construir un lenguaje probabilístico adecuado con que los estudiantes puedan superar dificultades y concepciones erróneas sobre probabilidad y les permita transitar hacia la cuantificación de la incertidumbre mediante la probabilidad (Ortiz y Alsina, 2017). El lenguaje probabilístico expresado por los estudiantes se constituye en una herramienta fundamental para categorizar sus concepciones y maneras de abordar eventos aleatorios, es decir, las formas en que denotan la posibilidad de que suceda un evento de acuerdo a una serie de características presentadas del mismo, permite orientar y reflexionar sobre sus concepciones de probabilidad.

Respecto a lo anterior, Ortiz y Alsina (2017) destacan cinco focos del lenguaje probabilístico que son: el lenguaje verbal, numérico, tabular, gráfico y simbólico, que categorizan la manipulación de herramientas lingüísticas que denotan probabilidad. Esta categorización y su desarrollo, se amplía en Gómez, Bernabéu y García (2013), de acuerdo a las representaciones lingüísticas empleadas en libros de texto de primaria para abordar la probabilidad (Tabla 2).

FOCO DEL LENGUAJE	DESCRIPCIÓN	REPRESENTACIONES
VERBAL	Referente a la diversidad de términos y expresiones verbales para referir la probabilidad, conceptos y procedimientos de esta, clasificadas por: palabras específicas de las matemáticas (ejemplos); palabras que aparecen en las matemáticas y el lenguaje ordinario (ejemplos); palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos (ejemplos).	• Expresiones cotidianas. (Suerte, más posible, menos posible, adivinar, sin querer, casualidad, más fácil, más difícil.) • Expresiones específicas de aleatoriedad y probabilidad. (Seguro, acertar, azar, imposible, estimar, anticipar.) • Expresiones específicas de los juegos de azar. (Suceso, evento, aleatorio.)
NUMÉRICO	Asociado a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia y la comparación de probabilidades.	• Números enteros • Números decimales • Fracción que representa probabilidad • Fracción que representa frecuencia relativa.
TABULAR	Su uso radica en la representación de datos. Allí se presentan frecuencias relativas y se emplean para la estimación de probabilidades, se asocia este tipo de representación al significado frecuentista de la probabilidad.	• Listado de datos. • Tablas de recuento. • Tablas de frecuencias sin agrupar. • Tablas de frecuencias con datos agrupados. • Tablas de doble entrada. • Tablas de frecuencia relativa. • Tablas de frecuencias relativas en formato no estándar.
GRÁFICO	Bajo la misma perspectiva del significado frecuentista de la probabilidad, este lenguaje se asocia a representaciones gráficas tomadas de la estadística para significar conceptos de probabilidad y son empleados para la estimación de probabilidades.	• Gráfico de barras • Gráfico circular • Pictograma • Histograma • Diagrama de árbol
SIMBÓLICO	Relacionado al significado clásico y	• Igualdad

FOCO DEL LENGUAJE	DESCRIPCIÓN	REPRESENTACIONES
	axiomático de la probabilidad, hace referencia al uso de símbolos y herramientas lingüísticas que comunican la probabilidad de ocurrencia de un suceso.	• Suma • Desigualdad • Aproximación • División • Letras como símbolos • Notación funcional

Tabla 2. Focos del lenguaje en probabilidad en primaria

Fuente. Gómez, et. Al (2013), citado por Ortiz y Alsina (2017)

Considerar el foco verbal del lenguaje del azar con el grupo de estudio es fundamental. La estructuración de la lógica del lenguaje probabilístico para denotar la aleatoriedad, permite el desarrollo de estructuras mentales necesarias para la comprensión de los eventos aleatorios y la superación de sesgos producidos por las nociones de probabilidad, y permiten fortalecer el desarrollo de la caracterización de los sucesos cotidianos con rasgos aleatorios.

4.3. RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

El razonamiento probabilístico, desde algunas concepciones teóricas, se caracteriza, como un conjunto de capacidades y herramientas que buscan significar las situaciones probabilísticas y la comprensión de conjuntos de datos representados en situaciones cotidianas de los estudiantes, para tomar decisiones en circunstancias que reflejan aleatoriedad.

Es así como al menos aparecen dos posturas respecto al razonamiento probabilístico que permiten profundizar sobre su estructura y cómo se aproximan los estudiantes en la educación formal a este. Fischbein (1975, en Barragán y Rivera, 2015) lo describe como una estructura que integra intuiciones primarias y secundarias sobre eventos en que se presenta aleatoriedad, las cuales proporcionan herramientas para resolver dichos eventos. Las intuiciones primarias entendidas como adquisiciones a partir de experiencias cercanas. Las intuiciones secundarias las plantean como adquisiciones formadas mediante los procesos de enseñanza en la escuela (Godino, Batanero & Cañizares, 1996). Dichas intuiciones, movilizan procesos mentales como emplear datos obtenidos para predecir la posibilidad de un evento y tomar decisiones frente a este.

Al respecto, Piaget e Inhelder (1997) indican, en referencia al razonamiento probabilístico, que la evolución de la idea de azar en el niño es resultado de una serie de operaciones cognitivas que se establecen en el nivel de desarrollo concreto, las cuales definen como proporcionalidad y reversibilidad. Dichas

operaciones permiten que los estudiantes puedan caracterizar eventos cotidianos como azarosos. A continuación, se aborda el razonamiento probabilístico según Fischbein para relacionarlo con la alfabetización probabilística como conjunto de capacidades, disposiciones y herramientas para abordar situaciones con características de aleatoriedad.

4.3.1. Razonamiento probabilístico según Fischbein

El razonamiento probabilístico, para Fischbein (1975, en Godino et. al, 1996), es una parte de la conducta inteligente. Este tipo de razonamiento, implica hacer estimaciones intuitivas, de carácter subjetivo en algunas ocasiones, de posibilidades de eventos. Las intuiciones tienen un papel central en el razonamiento probabilístico en cuanto que, como indican Fischbein y Gazit (1984),

La intuición significa, básicamente, una evaluación o predicción sintética, global, no justificada explícitamente. Donde el sujeto siente que dicha comprensión es autoevidente, autoconsistente y difícilmente cuestionable. Donde incluso se menciona que una intuición, es de alguna manera una creencia cognitiva” (p.2).

Una definición más precisa, la proporciona Godino et. al. (1996) basados en Fischbein, donde “[las] intuiciones son, según Fischbein, adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, en virtud de sus características de inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y autoevidencia” (p. 37). Lo cual indica el papel de las intuiciones como eje fundamental en la comprensión, análisis y reflexión de situaciones con rasgos de aleatoriedad, pues, gracias a sus intuiciones los estudiantes reconocen características de aleatoriedad en eventos. Por su parte, Fischbein y Gazit (1984) indican también que la intuición de los estudiantes en el aula les permite extraer herramientas, conocimientos y actitudes de experiencias previas, para abordar situaciones con características aleatorias y asumir posturas respecto a estas.

Fischbein y Gazit (1984), proponen que el papel del docente frente a las intuiciones de los estudiantes, ha de ser el de promoverlas y orientarlas respecto a los propósitos de las situaciones con características aleatorias planteadas en el aula. Si dichas intuiciones son apropiadas, son herramientas cognitivas que les permite obtener elementos para abordar la situación, mientras que en caso contrario, les permite predecir sobre los resultados esperados, tal que ajusten sus intuiciones para abordar las situaciones planteadas en el aula. Para Fischbein los

estudiantes desde edades tempranas pueden desarrollar nociones de probabilidad, pues como señala Godino et. al (1996):

No obstante, la representación del azar, que no es sino una intuición primaria en el niño de preescolar se convierte en una estructura conceptual distinta y organizada después de la edad de los 7 años. El azar en el sentido de lo no determinado se comprende explícitamente como oposición a lo deducible. El niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. (p.42)

Lo anterior orienta sobre el desarrollo esperado en los estudiantes respecto a sus concepciones de probabilidad en experimentos aleatorios, siguiendo la idea de intuición primaria como una herramienta que les permite abordar nociones de probabilidad desde lo indeterminado, lo que lleva a la construcción de cadenas de eventos con consecuencias irreversibles.

La importancia del razonamiento probabilístico, como marco de trabajo radica en las pautas y orientaciones sobre los conocimientos y herramientas cognitivas que poseen los estudiantes cuando se plantean situaciones con características de aleatoriedad (Jones, 2006). Estos permiten comprender los procesos cognitivos de los estudiantes, según sus intuiciones, lo que favorece la articulación con sus concepciones sobre probabilidad.

4.3.2. Características generales de la cognición intuitiva

Bajo el modelo propuesto por Fischbein respecto al desarrollo de las intuiciones de los estudiantes como herramienta cognitiva que aproxima a los conocimientos y conceptos matemáticos, se caracterizan las propiedades más relevantes de la intuición como categorías de análisis de la actuación de los estudiantes frente a los eventos aleatorios.

De esta manera, Fischbein (1987) destaca ocho características generales de las intuiciones de los estudiantes, estas son la evidencia personal, la certeza intrínseca, la perseverancia, la coercitividad, el estatus teórico, la extrapolabilidad, la globalidad y lo implícito de las intuiciones. Sus propiedades estructuran el desarrollo de concepciones sobre probabilidad en los estudiantes. A continuación se muestra una breve descripción de cada característica de la intuición.

Características generales	DESCRIPCIÓN
---------------------------	-------------

Características generales	DESCRIPCIÓN
Evidencia personal	La evidencia personal implica no solo el hecho de que el individuo es capaz de justificar (lógica o empíricamente) la declaración relevante. Una declaración aceptada intuitivamente no solo es verdadera (o aparentemente verdadera); parece ser auto explicativa o, en la terminología de Kant, un juicio analítico. (p. 44)
Certeza intrínseca	Subjetivamente, el sentimiento de certeza y el sentimiento de evidencia no son idénticos. En términos generales, cuando se trata de identificar la presencia de una cognición intuitiva, uno tiene que determinar hasta qué punto el individuo la ve como una creencia intrínseca. (p. 46)
Perseverancia	Las intuiciones son adquisiciones estables, resistentes a interpretaciones alternativas. (p. 201) Las intuiciones como evidencia personal, se vuelven argumentos cognitivos fundamentales para comprender y modelar la realidad, lo cual genera conflictos entre lo comprendido a través de las intuiciones y lo propuesto a través de modelos deductivos.
Coercitividad	En la historia de la ciencia y las matemáticas, la naturaleza coercitiva de las intuiciones ha contribuido con frecuencia a la perpetuación de interpretaciones erróneas y a la renuencia a aceptar las correctas, incluso después de que se hayan probado lógicamente. (p.48) Esto produce que el carácter coercitivo de las intuiciones genere conflictos semejantes a los producidos por la perseverancia, pero acentuados debido al sesgo intuitivo que riñe contra interpretaciones correctas de los objetos matemáticos trabajados.
Estatus teórico	Una intuición nunca se limita a afirmar la universalidad de una propiedad ni a la percepción de un hecho determinado. En una intuición, uno generalmente comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley, de un invariante, a través de una realidad particular. (p. 50) Esto significa que, las intuiciones debido a sus características previas adquieren un nivel de teoría por la aplicabilidad universal de estas a los problemas a los que se puede aplicar.
Extrapolaridad	En virtud de su extrapolación específica, la intuición excede los hechos proporcionados por las informaciones disponibles. Pero esa estructura conjetural de intuiciones generalmente está oculta por su aparente evidencia y certeza. De hecho, este es el papel fundamental de las cogniciones intuitivas: conferir certeza a las ideas extrapoladas. (p.53) Esto caracteriza la Extrapolaridad a partir de la necesidad de traducir las intuiciones a distintos escenarios, sin condicionarlas a la información disponible respecto a un problema o situación abordada.
Globalidad	Una intuición es una cognición estructurada que ofrece una visión global unitaria, en contraste con el pensamiento lógico que es explícito, analítico y discursivo. Las intuiciones alcanzan la globalidad a través de un proceso de selección que tiende a eliminar las pistas discordantes y a organizar al otro en conformidad con un significado unitario y compacto. (p. 201) De esta manera, las intuiciones son globalizadas y generalizan una serie de procesos, eventos y evidencias dentro de un sistema que selecciona herramientas y datos suficientes y acordes a las necesidades que busca

Características generales	DESCRIPCIÓN
	suplir dicha intuición.
Implícito	Aunque aparentemente evidentes, las intuiciones se basan de hecho en complejos mecanismos de selección, globalización e inferencia. Pero esta actividad es generalmente inconsciente y el individuo solo es consciente del producto final, las cogniciones aparentemente autoevidentes e intrínsecamente consistentes explican la dificultad de controlarlas e influirlas. (p. 201) Esta característica de las intuiciones revela la importancia de estas debido a que contienen procesos complejos sobre experiencias previas que son sistematizadas de determinadas maneras por los sujetos, lo cual implica que estos procesos no se hagan evidentes para estos sino que la construcción final de la intuición sea manifestada para abordar y tratar el resto de situaciones semejantes a las que materializaron la intuición.

Tabla 3. Características generales de la intuición cognitiva relacionada con el Razonamiento Probabilístico

Fuente. Fischbein (1987)

Esta caracterización de las intuiciones es pertinente para este estudio, pues proporciona elementos para el análisis del quehacer de los estudiantes frente a eventos con rasgos de aleatoriedad. Permiten categorizar, inicialmente, las intuiciones de los estudiantes frente a experimentos aleatorios, y posteriormente, articularlas en función de las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad.

Los anteriores planteamientos permiten analizar y categorizar las concepciones de los estudiantes a partir del papel de las intuiciones frente a situaciones aleatorias. Tal categorización da cuenta de los elementos cognitivos empleados por los estudiantes para manifestar respuestas en situaciones con características aleatorias a partir de las nociones de probabilidad involucradas en los experimentos.

4.4. ENFOQUE SOBRE LA PROBABILIDAD

La enseñanza de la probabilidad puede ser incidida a partir de las experiencias de los estudiantes sobre aleatoriedad, por tanto, las maneras de aproximarse y entender las situaciones probabilísticas, serán distintas de acuerdo a la configuración de las características de la intuición; así mismo, están ligadas a determinados enfoques de probabilidad (Eichler y Vogel, 2014), lo cual modifica las maneras de enfrentarse a situaciones con características de aleatoriedad. Estos enfoques se sustentan en el desarrollo histórico de la probabilidad, y hacen referencia al uso y las consideraciones sobre esta y los experimentos que son empleados para evidenciar y abordar la aleatoriedad. Eichler y Vogel (2014)

proponen los siguientes tres enfoques sobre probabilidad según su carácter histórico y cultural.

ENFOQUE	CARACTERÍSTICAS	NATURALEZA DE LOS EXPERIMENTOS
Clásico	Un punto muy esencial de su trabajo [de Laplace] es la definición de probabilidad, que nosotros conocemos como “probabilidad Laplaciana”: “La probabilidad es así simplemente una fracción en la cual el numerador es el número de casos favorables y en la que el denominador es el número total de casos posibles.” [...] La precondition teórica subyacente de esta definición es la de equiprobabilidad dada siendo considerados todos los posibles resultados en el proceso aleatorio. (p. 77)	“ <i>A priori</i> ” significa que, junto con la hipótesis teórica subyacente de equiprobabilidad alineada antes, no hay necesidad de conducir un experimento con un generador aleatorio. De hecho, probabilidades que se refieren a generadores aleatorios se puede[n] calcular deductivamente sin tirar un dado o girar una ruleta. (p.77)
Frecuentista	Fue Bernoulli quien justificó el enfoque frecuentista de la probabilidad formulando un teorema correspondiente: Dado que hay un experimento aleatorio que se repite suficientes veces, la probabilidad de que la distancia entre la frecuencia observada de un evento y su probabilidad sea menor que un valor determinado puede acercarse a 1 tanto como se quiera. (p.78)	Desde un punto de vista práctico, fue criticado que esta orientación empírica del enfoque es solo útil para eventos en los cuales se permite repetir el experimento subsecuente tanto como se necesite, al menos en teoría. Sin embargo, dentro de los fenómenos del mundo real esto es frecuentemente poco posible o impracticable. (p.78)
Subjetivista	El punto de vista subjetivista de la probabilidad está estrechamente conectado con la fórmula Bayesiana publicada en el siglo XVIII. La fórmula Bayesiana permite revisar una estimación “ <i>a priori</i> ” de la probabilidad por procesamiento de nueva información y para estimar una nueva “ <i>a posteriori</i> ” probabilidad. En general, el enfoque subjetivista es llamado el carácter objetivo postulado por el enfoque frecuentista o el enfoque clásico en cuestión. (p. 79)	Con el enfoque subjetivista, la probabilidad es descrita como el grado de creencia, basado en el juicio personal y la información acerca de la situación que incluye objetivamente ninguna aleatoriedad. (...) Por lo tanto, siguiendo el enfoque subjetivista, no es posible tratar la probabilidad como una magnitud física y medirla de acuerdo con una manera objetiva. (p.79)

Tabla 4. Enfoques sobre probabilidad según Eichler y Vogel.

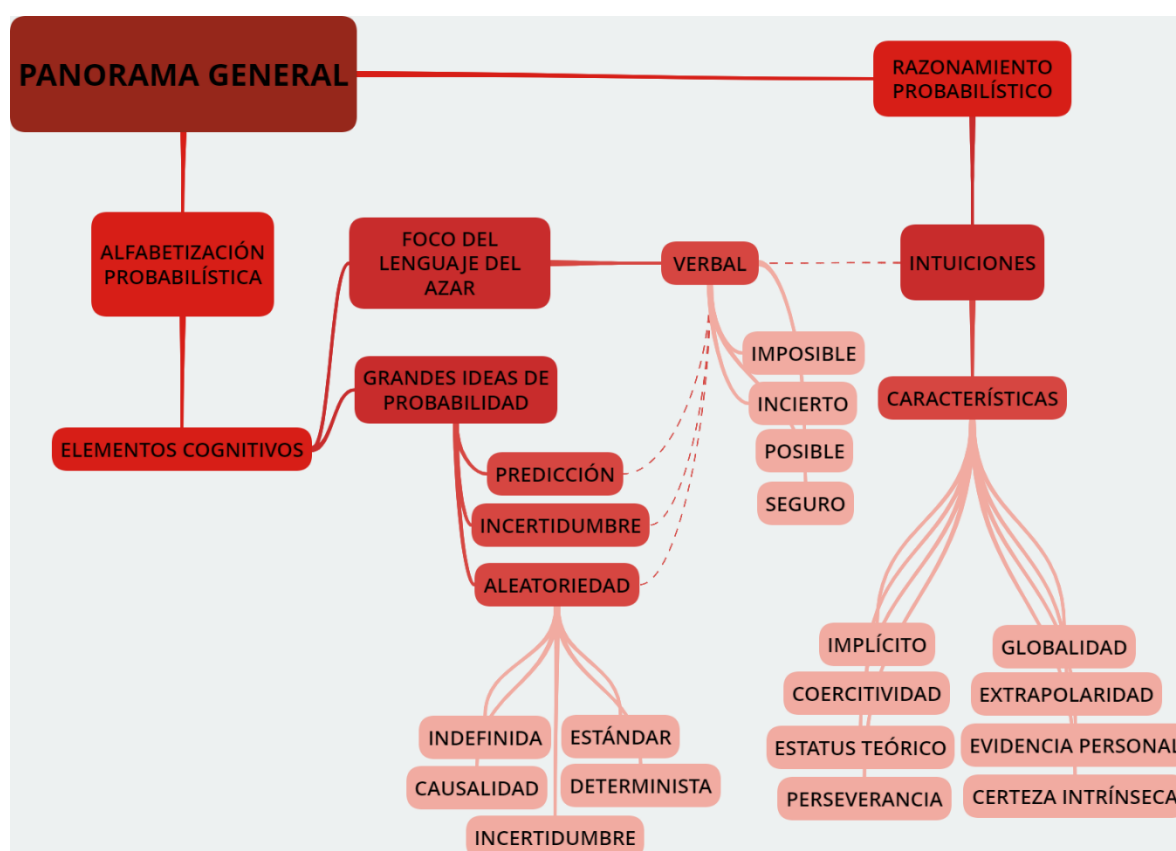
Fuente. Eichler y Vogel (2014)

Se considera para la presente propuesta, la probabilidad desde el enfoque clásico y la naturaleza de los experimentos que dan cuenta de este de acuerdo con los LCM (MEN, 1998). En cuanto que desde este enfoque, la alfabetización

probabilística (Gal, 2002), es entendida como herramienta, que permite la reflexión de los estudiantes sobre situaciones con características de aleatoriedad, y justifica la relación entre cantidad de casos favorables y la totalidad de casos posibles.

4.5. PANORAMA GENERAL

A continuación se representa la articulación entre las categorías a trabajar de la alfabetización probabilística desde sus elementos cognitivos, las grandes ideas de probabilidad y el foco verbal del lenguaje del azar, del razonamiento probabilístico y las intuiciones como componente fundamental de dicho razonamiento. Aquí las grandes ideas sobre probabilidad se relacionan con el foco verbal del lenguaje del azar para contribuir a la manifestación de las intuiciones sobre probabilidad de los estudiantes, mediante manifestaciones verbales sobre lo seguro, lo posible, lo incierto y lo imposible.



Esquema 1. Panorama general del marco de referencia

Fuente. Creación propia, basada en Gal (2002), Moreno y Cardeñoso. (2014), Ortiz y Alsina (2017), Fischbein (1987)

Bajo estas circunstancias se considera abordar como ejes centrales de estudio, elementos cognitivos como el foco verbal del lenguaje del azar, con sus

componentes: seguro, posible, incierto e imposible; la aleatoriedad, la incertidumbre y la predicción, que permiten articular la alfabetización y razonamiento probabilísticos, detectando desde el foco verbal del lenguaje las características de la cognición intuitiva de situaciones con rasgos de aleatoriedad.

Aquí la capital importancia centrada en el foco verbal del lenguaje del azar, revela el papel que juegan las manifestaciones verbales en la comprensión del razonamiento probabilístico de los estudiantes en cuanto a sus intuiciones y cómo estas están mediadas a través del lenguaje verbal por los elementos cognitivos de la alfabetización probabilística.

5. MARCO METODOLÓGICO

Esta sección presenta las fases que se siguieron en el desarrollo del presente estudio, cuyo propósito se orienta en caracterizar las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes de un aula acelerada (que cursan procesos básicos de aprendizaje, año 2019) de una institución educativa del municipio de Soacha. A continuación, se esquematizan las fases del estudio,



Esquema 3. Fases de trabajo metodológico
Fuente. Creación propia

El estudio de corte cualitativo permitió se desarrolló con tales fases, con las entrevistas realizadas a estudiantes del programa Procesos Básicos como insumo. Inicialmente se analizan tales entrevistas a la luz de las categorías extraídas en el marco de referencia, donde se caracterizaron elementos correspondientes a la alfabetización y razonamiento probabilístico. Surge un marco de referencia complementario que permite diseñar una herramienta analítica que articula categorías y permite caracterizar según los objetivos de estudio las concepciones sobre probabilidad en los estudiantes del programa. De los hallazgos detectados en la herramienta analítica se elaboran conclusiones y recomendaciones.

5.1. CONDICIONES DEL CONTEXTO

El estudio se desarrolla con una muestra (escogida aleatoriamente) de ocho estudiantes del programa de Procesos Básicos de una institución educativa municipal de Soacha. Sus edades oscilan entre los 10 y 13 años de edad. Dicha institución educativa se ubica en la comuna tres La Despensa del municipio de Soacha, es de carácter municipal y las clases abarcan desde finales de enero hasta mediados de noviembre en el horario de lunes a viernes de 12:15 p.m. a 5:45 p.m.

Este grupo de estudiantes está ubicado en los estratos socioeconómicos 0 y 1, cuyos núcleos familiares pertenecen a grupos desplazados por la violencia. Se caracterizan por situaciones de violencia intrafamiliar o por pertenecer a grupos inmigrantes. El rendimiento académico de los estudiantes es bajo, debido a que han presentado repitencia o deserción escolar, ligado a dificultades en procesos lecto- escritores, que obstaculizan tareas con instrumentos escritos, como se observa en el instrumento de caracterización de ingreso de algunos estudiantes (Anexo 1).

Según las entrevistas realizadas a los estudiantes, frente al pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, reconocen algunas nociones de probabilidad en relación con experiencias cotidianas. De acuerdo a Fischbein (1975, en Godino, et. al, 1996) tales nociones de probabilidad están ligadas a intuiciones primarias sobre probabilidad; sin embargo, como se plantea en el problema, el plan de estudios del programa de Procesos Básicos (Dividendo por Colombia, 2015), limita el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos comprender y elaborar gráficas estadísticas, relegando la formación probabilística.

Tales condiciones llevan a que la propuesta recopile mediante entrevistas personalizadas, realizadas por el docente titular quien hace las veces de entrevistador, los datos de las interacciones y procedimientos desarrollados por los estudiantes registrados de manera audiovisual, para su análisis y confrontación teórica, buscando comprender las concepciones de los estudiantes frente a experimentos aleatorios y deterministas, según los componentes del foco verbal de lenguaje del azar, las grandes ideas de probabilidad y las características de la intuición probabilística. La institución educativa es seleccionada debido a que el profesor, quien desarrolla esta propuesta, es titular del curso Procesos Básicos del Aprendizaje.

5.2. DISEÑO DEL INSTRUMENTO DE CARACTERIZACIÓN

Se elabora un instrumento que permite recopilar las intervenciones verbales de los estudiantes cuando se enfrentan a experimentos aleatorios y deterministas. Se decide que dicho instrumento tenga formato de entrevista personalizada, donde el profesor a través de preguntas orientadoras, promueve en los estudiantes la manipulación de cinco materiales concretos para realizar experimentos y que manifiesten la posibilidad o imposibilidad de ciertos eventos.

Este instrumento busca caracterizar el estado de los estudiantes acerca de: (1) el uso del foco verbal del lenguaje del azar (Ortiz y Alsina, 2017) al abordar situaciones aleatorias; (2) características generales de las intuiciones que manifiestan sobre el azar (Fischbein, 1987); (3) ideas relacionadas con aleatoriedad, predicción e incertidumbre (Gal, 2002), presentes en situaciones aleatorias y deterministas.

Se espera detectar respecto al foco verbal del lenguaje del azar, como elemento cognitivo de la alfabetización probabilística actitudes para denotar la posibilidad o imposibilidad, lo seguro o incierto de las situaciones propuestas, a través manifestaciones lingüísticas de los estudiantes.

De las características de la intuición (Fischbein, 1987) se espera detectar, a partir del conjunto de expresiones lingüísticas, evidencias de las intuiciones de los estudiantes para explorar sus concepciones sobre la aleatoriedad, tales como: (a) un obstáculo para establecer causas sobre las situaciones presentadas a través de expresiones como: “es difícil de saber”, “¿cómo puedo saber la respuesta?”, “no sé” (Piaget e Inhelder, 1997); (b) algo difícil de detectar en una situación (Azcárate et al., 1998); y (c), reconocimiento de causas y poco control sobre estas ya sea por desconocimiento de estas o falta de control del azar (Azcárate et al., 1998).

Se espera que respecto a aleatoriedad, predicción e incertidumbre (Gal, 2002) se evidencien habilidades de predicción y reconocimiento de incertidumbre, mediante gestos con las manos, manipulación del material concreto con el que se desarrollan los experimentos, la suposición de posibilidades y sus justificaciones, junto con la confrontación entre sus expectativas y el evento ocurrido.

El instrumento de reconocimiento se compone de experimentos aleatorios y deterministas, mediados por materiales concretos (ruletas con espacio muestral equiprobable y no equiprobable, pimpones de colores en urnas con distribución equiprobable y no equiprobable, monedas, juego de tres en línea, y fichas para

nim). De tales experimentos tres poseen cierto grado de aleatoriedad: aquellos relacionados con activación de ruletas, extracción de pimpones y lanzamiento de monedas; y dos son deterministas: realizar ciertos movimientos de fichas (tres en línea) o escoger una cantidad de fichas para ganarle a un contrincante (juego nim). Estos experimentos buscan evidenciar las intuiciones de los estudiantes por medio de su registro y análisis teniendo en cuenta lo que plantea Van Dooren (2014):

Frecuentemente, las situaciones probabilísticas no son meramente neutrales para el solucionador de problemas, ya que los resultados tienen una relevancia personal particular y un valor emocional, social o material: Una estrategia para jugar un juego puede llevar a un mayor probabilidad de éxito de ganar un premio valioso...(p.124)

De esta manera los experimentos se mediatizan a través del juego, buscando que los resultados obtenidos por los estudiantes posean una relevancia personal en términos de acertar y ganar para emplear el valor emocional como medio para explorar las intuiciones de los estudiantes al acertar o no. Los experimentos propuestos mantienen un enfoque clásico de probabilidad, pues el material concreto permite que los estudiantes de acuerdo con una medición de la posibilidad intuitiva, identifiquen la cantidad de posibilidades y aciertos, según datos obtenidos del material y la descripción propuesta por Eichler y Vogel (2014):

Las situaciones problema que contienen toda la información necesaria y representan un concepto estocástico como un enfoque de probabilidad en un contexto muy reducido (que generalmente no se da en las circunstancias complejas de los problemas del mundo real que llamamos situaciones problema virtuales.(p.88)

Así, los experimentos propuestos en el instrumento se sustentan en situaciones virtuales como ganar, perder o empatar un juego. Características que proporcionan información sobre los experimentos a los estudiantes para identificar concepciones sobre probabilidad, como se presenta en la Tabla 6,

Experimentos Aleatorios		
Experimento	Material	Categorías relacionadas
Activación de ruleta con espacio muestral equiprobable		Gran idea de probabilidad: Predicción
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Posible
		Características de la intuición:

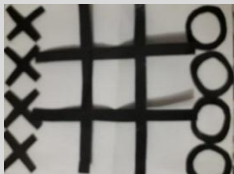
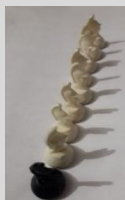
		Certeza teórica, evidencia personal, globalidad
Activación de ruleta con espacio muestral no equiprobable		Gran idea de probabilidad: Predicción
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Posible
		Características de la intuición: Certeza teórica, evidencia personal, globalidad
Extracción de pimpones de una urna con espacio muestral equiprobable		Gran idea de probabilidad: Incertidumbre
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Incierto
		Características de la intuición: Extrapolaridad, Perseverancia
Extracción de pimpones de una urna con espacio muestral no equiprobable		Gran idea de probabilidad: Incertidumbre
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Incierto
		Características de la intuición: Extrapolaridad, Perseverancia
Lanzamiento de moneda con espacio muestral equiprobable		Gran idea de probabilidad: Aleatoriedad
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Imposible
		Características de la intuición: Coercitividad, Implícito
Experimentos Deterministas		
Tres en línea		Gran idea de probabilidad: Aleatoriedad
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Seguro
		Características de la intuición: Estatus Teórico
Nim		Gran idea de probabilidad: Aleatoriedad
		Componente del foco verbal del lenguaje del azar: Seguro
		Características de la intuición: Estatus Teórico

Tabla 5. Categorías relacionadas con cada experimento

Fuente. Creación propia

La aplicación del diagnóstico se hace a través de una entrevista basada en tres experimentos aleatorios y dos deterministas. Las preguntas son de estructura semiabierta y consideran los posibles eventos resultantes durante las entrevistas. Cada experimento se estructura en etapas: etapa de inicio, preguntas realizadas previo al experimento; la etapa de desarrollo, acciones y preguntas orientadoras al realizar el experimento; y, etapa final, posterior al experimento, donde las preguntas dependen de los eventos resultantes. A continuación, se describe cada experimento, el material empleado y las preguntas específicas a desarrollar.

5.2.1. Experimentos aleatorios

Los experimentos aleatorios empleados en este estudio son: la activación de ruletas -con espacio muestral equiprobable y no equiprobable-, la extracción de pimientos de la urna -con espacio muestral equiprobable y no equiprobable-, y el lanzamiento de monedas -con espacio muestral equiprobable-. Tales experimentos, buscan detectar componentes del foco verbal del lenguaje del azar tales como: lo inseguro, lo posible y lo imposible, así como habilidades de predicción y detección de la incertidumbre y características de la intuición como la certeza teórica, la evidencia personal, la coercitividad, globalidad, lo implícito, extrapolabilidad y perseverancia.

5.2.1.1. Activación de ruletas

Se realiza con dos ruletas, una con espacio muestral equiprobable de eventos de sucesión de colores con cinco repeticiones y la segunda sin espacio muestral equiprobable de sucesión de colores con cinco repeticiones. Las ruletas deben ser activadas por los estudiantes a partir de la instrucción del entrevistador, para determinar la posibilidad de acertar un color escogido en cada ruleta. Este material busca identificar la detección de la predicción, referir lo posible del foco del lenguaje del azar y detectar indicios de certeza teórica, evidencia personal y globalidad.

Las preguntas elaboradas no presentan distinción según el espacio muestral de cada ruleta; así, durante la etapa de inicio -previa a la activación de la ruleta- el docente plantea preguntas a los estudiantes sobre el color más probable que sea señalado por la aguja de la ruleta; en la etapa de desarrollo se indica la activación de cada ruleta; y en la etapa final -reflexión sobre el evento ocurrido- se indaga sobre los resultados obtenidos frente a las respuestas dadas en la etapa de inicio.

Etapas de inicio

- Si giramos la ruleta (con espacio muestral equiprobable en la primera sección de la entrevista y con espacio muestral no equiprobable en la segunda sección) ¿cuál color será más probable que salga? (señalando la ruleta) ¿Por qué?
- Ahora escoge un color de la ruleta. Si tienes 5 intentos ¿Crees que el color que escogiste saldrá en alguno de los intentos? ¿Por qué?
- ¿Crees que 5 intentos son suficientes para que salga el color que escogiste?

Etapas de desarrollo

- Ahora gira la ruleta.

Etapas finales

- ¿Por qué crees que acertaste/ no acertaste?
- ¿Debería tener más intentos? ¿Cuántos?
- ¿Crees que 5 intentos fueron suficientes para que saliera el color que escogiste? ¿Por qué?
- ¿Habrá algún color con el que siempre aciertes? ¿Por qué?

5.2.1.2. Extracción de pimplones de una urna

La extracción de pimplones utiliza una caja cubierta y diez pimplones de dos colores. Se desarrolla primero la situación con espacios muestrales equiprobables (pimplones rosados y blancos) y luego la situación con espacios muestrales sin equiprobabilidad (pimplones naranja y blancos), cada extracción con cinco repeticiones sin establecer relación entre cantidad de repeticiones y pimplones de cada color. Se busca detectar lenguaje de lo incierto, ideas sobre incertidumbre e identificar características de la intuición como extrapolación y perseverancia.

Para cada espacio muestral (equiprobable y no equiprobable) se realizan preguntas diferentes. En la etapa de inicio, tanto en los espacios muestrales equiprobables como no equiprobables, el entrevistador muestra la urna vacía al estudiante e introduce los pimplones sin mencionar cantidad y sin tener criterio de color al introducir. En la etapa de desarrollo los estudiantes extraen cinco pimplones sin reemplazamiento; y en la etapa final, los estudiantes relacionan sus predicciones con los eventos ocurridos en términos de ganar (acertar) o perder (no acertar).

5.2.1.2.1. Espacio muestral equiprobable

Etapas de inicio

En la caja -muestra la caja vacía- voy a poner esta cantidad de pimplones -señala los pimplones sobre la mesa-, escoge uno de los colores de los pimplones, y durante cinco intentos intentará acertar el pimplón que sacará -extrae de la urna-.

- Si sacas uno de los pimplones ¿cuál crees que salga “de primeras”? ¿Por qué?
- ¿Crees que el pimplón -escogido- saldrá en alguno de los intentos? ¿Por qué?
- ¿Crees que 5 intentos son suficientes para que salga el color que escogiste?

Etapas de desarrollo

Los estudiantes realizan cinco extracciones sin reemplazamiento.

Etapas finales

1 o 2 aciertos:

- ¿Por qué te salieron tan pocos pimplones del mismo color?
- ¿Necesitas más intentos para sacar todos los pimplones escogidos? ¿Cuántos?

3 o 4 aciertos:

- ¿Qué hiciste para que te salieran tantos pimplones del mismo color?
- ¿Hacen falta intentos para sacar todos los pimplones escogidos? ¿Cuántos?

5 aciertos:

- ¿Cómo lograste sacar todos los pimplones del color que escogiste?
- ¿Qué te ayudó a ganar?

5.2.1.2.2. Espacio muestral sin equiprobabilidad

El entrevistador extrae los pimplones del primer experimento y se insertan otros pimplones de color naranja y blanco, con una distribución de 7 pimplones blancos y tres naranja, se explica el juego con cinco extracciones sin reemplazamiento.

Etapas de inicio

- ¿De cuáles pimplones hay mayor cantidad?

- ¿Cuál pimpón es más seguro que salga en los cinco intentos?
- Escoge un color de pimpón. Te voy a dar 5 intentos para que ese pimpón salga. ¿Crees que el pimpón -escogido- salga en alguno de los intentos? ¿Por qué?
- ¿Crees que 5 intentos son suficientes para que salga el color que escogiste?

Etapas de desarrollo

- Los estudiantes realizan cinco extracciones de pimpones sin reemplazamiento.

Etapas finales

1 o 2 aciertos

- ¿Por qué te salieron tan pocos pimpones del mismo color?
- ¿Necesitas más intentos para sacar 5 pimpones del color escogido? ¿Cuántos?

3 o 4 aciertos

- ¿Qué hiciste para que salieran tantos pimpones del mismo color?
- ¿Te hacen falta intentos para sacar los pimpones del mismo color? ¿Cuántos?

5 aciertos

- ¿Cómo lograste sacar 5 pimpones del mismo color?
- ¿Qué te ayudó a ganar?

5.2.1.3. Lanzamiento de monedas

Este experimento se caracteriza por la equiprobabilidad de sucesos al lanzar la moneda. Con este experimento se busca identificar el lenguaje de lo imposible, caracterizar la aleatoriedad, e identificar la coercitividad y lo implícito de la intuición. En la etapa de inicio, el entrevistador indaga al estudiante por el lado de la moneda con mayor posibilidad de que salga y la estrategia para ganarle al entrevistador la apuesta. En la etapa de desarrollo, se indica la cantidad de lanzamientos en el juego (dos lanzamientos sin empate, y tres, en caso de empate). En la etapa final se pregunta sobre el resultado obtenido y las razones por las que gana o pierde.

Etapas de inicio

Se muestran ambos lados de la moneda según las imágenes grabadas en esta.

¿Cuál lado crees que es el más seguro que salga al lanzar la moneda? ¿Importa cómo lanzas la moneda para que caiga en el lado que buscas?

Luego, el entrevistador explica a los estudiantes la apuesta de cinco canicas que habrá en la mesa y quien gane en las dos rondas gana las canicas; además, que en caso de empate se realiza un tercer lanzamiento para definir el ganador.

- ¿Cómo evitar que empatemos el juego?
- ¿Cómo asegurarte de ganar?

Etapas de desarrollo

El estudiante y el entrevistador realizan cada uno dos lanzamientos de moneda, en caso de empate en el segundo lanzamiento, realizan un tercer lanzamiento con la elección previa del lado de la moneda.

Etapas finales

Situación acierto en la predicción: “ganar”

- ¿Por qué estabas seguro de que ganarías la apuesta?
- ¿Cómo atinaste al resultado?

Situación desacierto en la predicción: “perder”

- ¿Qué ocurrió para que perdieras?
- ¿Qué debiste hacer para ganar?

5.2.2. Experimentos deterministas

Se escogen dos juegos: tres en línea y Nim, estos se eligen pues se basan en la detección de causas y consecuencias, a partir del movimiento de fichas para identificar estrategias para ganar. Estos experimentos buscan detectar el componente de lo seguro del foco verbal del lenguaje del azar, así como la característica de la intuición estatus teórico.

5.2.2.1. Tres en línea

El juego se compone de un arreglo cuadrado de nueve casillas donde se ubican tres fichas circulares o tres con forma de cruz. Consiste en organizar fichas iguales en una línea vertical, horizontal o diagonal. Para el presente estudio en la etapa de

inicio, se adapta en todas las partidas ocupando la casilla central con una cruz, el estudiante debe tomar las fichas circulares e iniciar en todas las rondas, el entrevistador toma las cruces y se juegan dos rondas, si hay empate se juega una tercera ronda para determinar el ganador. Durante la etapa de desarrollo se ubican las fichas y en la etapa final se realizan preguntas sobre los resultados del juego.

Etapas de inicio

¿Puede asegurar que alguien tiene más posibilidad de ganar? ¿Cuál es la mejor estrategia para ganar?

Etapas de desarrollo

Los estudiantes y el entrevistador ubican las fichas en el esquema de juego hasta agotar las fichas o ubicar tres en línea.

Etapas finales

Situación de empate

- ¿Se podía saber que habría empate antes de terminar el juego?
- ¿Qué se puede hacer para evitar el empate?

Pierde el estudiante

- ¿Pudiste saber antes de que terminara el juego que ibas a perder?
- ¿Qué debiste hacer para no perder?

Gana el estudiante

- ¿Pudiste saber antes de que terminara el juego que ibas a ganar?
- ¿Qué hiciste para ganar?

5.2.2.2. El juego Nim

Consiste en una fila de nueve fichas, ocho de un color y una de color diferente. Cada jugador en su turno debe tomar a lo máximo dos fichas de la fila, siendo quien tome la ficha de distinto color el perdedor. En la etapa inicial el entrevistador explica el juego, se juegan dos rondas para determinar el ganador, si hay empate se juega una tercera ronda. Para la etapa de desarrollo, el entrevistador arma una fila de nueve fichas, ocho blancas y una negra e indica el turno para extraer las

fichas. En la etapa final el entrevistador pregunta al estudiante sobre los resultados del juego.

Etapa de inicio

¿Se puede saber por anticipado quién va a ganar el juego? ¿Cuál es la mejor estrategia para ganar?

Etapa de desarrollo

Los estudiantes y el entrevistador juegan.

Etapa final

Gana el estudiante

- ¿Pudiste saber antes de terminar el juego quién iba a ganar?
- ¿Cuál fue tu estrategia para ganar el juego?
- ¿Por qué funcionó tu estrategia?

Pierde el estudiante

- ¿Pudiste saber antes de terminar el juego quien iba a ganar?
- ¿Qué pudiste hacer para lograr ganar el juego?
- ¿Por qué no funcionó tu estrategia?

5.3. ESTABLECIMIENTO DE CATEGORÍAS (A PRIORI) DE ANÁLISIS

Para el análisis de las entrevistas, se prevé abordar las categorías que involucren la alfabetización probabilística, en cuanto sus elementos cognitivos, los cuales son las grandes ideas de probabilidad y el foco verbal del lenguaje del azar (Gal, 2002). En la Tabla 6 se muestra relaciones entre las grandes ideas de la probabilidad (filas), los componentes del foco verbal del lenguaje del azar (columnas) a partir de los experimentos empleados en el instrumento, articulados con las características de la intuición probabilística. Debajo del nombre de cada experimento aparece un código que señala las características de la intuición sobre probabilidad (Fischbein, 1987) que se espera se manifieste en los estudiantes.

Elementos cognitivos de la Alfabetización Probabilística		Foco verbal del lenguaje del azar (Ortiz y Alsina, 2017)			
		Imposible	Posible	Seguro	Incierto
Grandes ideas de Probabilidad	Aleatoriedad	Experimentos con monedas (C) - (I)		Tres en línea Nim	

(Gal, 2002)				(ET)	
	Predicción		Experimentos con Ruletas (CI)-(EP)-(G)		
	Incertidumbre				Extracción de pimpones (E)-(P)
Características de la intuición sobre probabilidad (Fischbein, 1987). (EP): Evidencia Personal. (CI): Certeza intrínseca. (P): Perseverancia. (C): Coercitividad. (ET): Estatus Teórico. (E): Extrapolaridad. (G): Globalidad. (I): Implícito.					

Tabla 6. Articulación de categorías en términos de los experimentos realizados en entrevistas.

Fuente. Creación propia basado en Fischbein (1987); Gal (2002); Ortiz y Alsina (2017)

Considerando lo anterior se determinan cuatro categorías: 1) aleatoriedad-imposible, 2) aleatoriedad-seguro, 3) predicción-posible, 4) incertidumbre-incierto. Estas categorías involucran los elementos cognitivos de la alfabetización probabilística tanto en su denominación, como en los experimentos en los que se esperan detectar dichos elementos; además, involucran determinadas características de la intuición que se consideran los experimentos van a movilizar. Así, se considera que la aleatoriedad por sus múltiples concepciones moviliza los componentes imposible y seguro del foco verbal del lenguaje del azar junto con la coercitividad, lo implícito y el estatus teórico; la predicción, moviliza el componente de lo posible con la certeza intrínseca, la evidencia personal y la globalidad. Por su parte, la incertidumbre moviliza el componente de lo incierto en el foco verbal del lenguaje del azar con la extrapolaridad y la perseverancia de las intuiciones.

6. ANÁLISIS Y RESULTADOS

6.1. ANÁLISIS CON CATEGORÍAS A PRIORI

El análisis de las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad se realiza a partir de las entrevistas, en ellas se trabajaron los cinco juegos descritos en el diseño del instrumento de reconocimiento, y considera las categorías *a priori* descritas en el marco de referencia. Con estos datos se caracteriza al grupo de estudio según los elementos cognitivos (grandes ideas y foco verbal del lenguaje del azar) de la alfabetización probabilística y su relación con las características de la intuición. A continuación, en la tabla 7 se relacionan las categorías de análisis *a priori* con etiquetas que facilitan la identificación de estas en los episodios extraídos de las entrevistas.

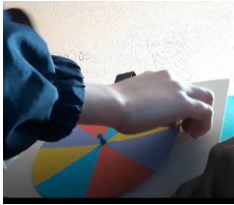
CATEGORÍA	ETIQUETA
Categoría 1. Aleatoriedad- Seguro	AP1.
Categoría 2. Incertidumbre- Incierto	AP2.
Categoría 3. Predicción- Posible	AP3.
Categoría 4. Aleatoriedad- Imposible	AP4.

Tabla 7. Categorías *a priori* de análisis

Fuente. Creación propia

Se puede observar, a manera de ejemplo, en el siguiente episodio tomado de la entrevista #8, cómo se movilizan las características de la intuición y los elementos de las grandes ideas de probabilidad en el experimento ‘Activación de la ruleta equiprobable’:

E: Si tienes cinco intentos para girarla ¿crees que el azul va a salir en alguno de esos intentos?	
E8: Si.	
E: ¿Por qué?	
E8: Porque... [...] porque uno tiene fe.	El uso de causas que no se pueden controlar para eventos que no se pueden determinar o

	prever. (AP2)
E: Entonces empecemos, gírala.	
E8: Activa la ruleta. 	
E: ¿Por qué crees que no acertaste?	
E8: ¿Cómo así que no acerté?	
E: ¿Por qué crees que no te salieron tantas veces el azul?	
E8: Porque uno tiene que darle más vueltas.	A mayor cantidad de intentos, mayor cantidad de éxitos (AP1)

Episodio 1. Extracto de la entrevista 8, activación de la ruleta equiprobable

Fuente. Creación propia

Se puede observar que el estudiante emplea la expresión “*porque uno tiene fe*”, para denotar incertidumbre al no poder establecer conexiones entre los eventos y sus causas, lo que lleva a la manipulación de la idea de incertidumbre, a la vez que del lenguaje de lo seguro, en cuanto que el éxito de este se relaciona con la cantidad de vueltas. Así mismo, el aporte de las características de la intuición a la comprensión de este episodio, revela la perseverancia en la fe, pues esta genera la certidumbre que el experimento no puede proporcionar y que no está controlado por el estudiante. Luego del desarrollo del experimento, las características de la intuición evidenciadas son la certeza intrínseca y la evidencia personal, en cuanto se manifiesta la creencia de que el éxito del evento está en la cantidad de repeticiones, hecho que el estudiante toma como evidencia para justificar el evento.

Este análisis, también permite acercarse a las expresiones verbales que emplean los estudiantes a la hora de denotar la probabilidad sobre los experimentos aleatorios propuestos, por tanto, a lo largo de las entrevistas, se pueden evidenciar expresiones verbales de posibilidad e incertidumbre como “*la fe*”, “*la esperanza*”, “*la confianza*”, “*todo es posible*”, “*no sé*”, onomatopeyas como: mmm..., ah..., y movimientos físicos limitados: moverse en la silla, voltear la cara, mirar a los lados, taparse la cara con las manos, indicar con los dedos varias posibilidades. En el Episodio 2 de la entrevista #6 se muestra lo anterior,

E: ¿Si giramos la ruleta (ruleta no equiprobable) cuál color crees que es más probable que salga?	
E6: ¿Morado?	
E: ¿Por qué morado?	

E6: Porque es el más grande, y tal vez porque la flechita va a apuntar, y tal vez va a apuntar por acá o por acá – señala distintas regiones de la sección morada-.	A mayor región mayor probabilidad (AP2)
	
E: Ahora te toca escoger un color de esa ruleta, el que quieras.	
E6: ¿No importa que sea el morado?	
E: No importa que sea morado, puede ser morado.	
E6: El Amarillo.	
E: ¿El amarillo? Te voy a dar cinco intentos para que tú la gires a ver si cae en el amarillo, ¿Tú crees que el amarillo va a caer en alguno de esos intentos?	
E6: Pues sí, tal vez, en alguno.	Existe posibilidad de acertar pero pueden ocurrir otros eventos. (AP2)

Episodio 2. Extracto de la entrevista 6, activación de la ruleta no equiprobable

Fuente. Creación propia

Para el entrevista 6, la posibilidad de que al accionar la ruleta, caiga en el color morado, está dada por el área que este color ocupa respecto a los otros. Evidenciando aspectos del Estatus Teórico y la Globalidad, en términos del uso de la condicionalidad como criterio para justificar su respuesta, con el razonamiento: “*si la región es mayor entonces tiene mayor posibilidad de salir*”. Así mismo, el lenguaje no verbal está presente en la indicación de distintas zonas de dicha región, es decir, dicha condicionalidad es probada por la indicación con los dedos de cuál región de color es más probable que acierte según su tamaño.

Estos elementos, proporcionan información respecto a las categorías descritas previamente y permiten comprender las intuiciones, el foco verbal del lenguaje y el manejo de las ideas por parte de los estudiantes en relación con los experimentos. Para cada categoría *a priori* la información proporcionada en las entrevistas articula: el foco verbal del lenguaje del azar, las grandes ideas y las características de la intuición para denotar ideas de probabilidad dentro de una misma situación.

6.1.1. Aleatorio-seguro

Lo aleatorio-seguro se identifica cuando el control sensorial (tangible) sobre el experimento es mayor, por lo cual hay certeza sobre lo que sucede si se puede controlar en términos de la visión, la manipulación o el espacio del material. Por

ejemplo en el experimento ‘Activar la ruleta’ (con espacio muestral equiprobable y no equiprobable) el control sensorial se evidencia en expresiones como “*si lo giro más duro*” o “*debo girarlo más pasito*”, para atribuir causas a resultados que obedecen al control sensorial del material y es consecuencia de un acto individual.

El control espacial de los experimentos permite a los estudiantes entrevistados seguridad sobre la ocurrencia de eventos. En los experimentos deterministas realizados con los juegos Tres en línea y Nim, la mayoría de estudiantes aseguran que pueden saber antes de que termine el juego el ganador, debido a que la observación de los movimientos permite prever el evento que sucederá. Mientras que en la ‘Activación de la ruleta’, la ‘Extracción de pimpones’ y el ‘Lanzamiento de monedas’ es menos precisa la predicción, pues el control sobre los eventos no referencia capacidades sensoriales más allá de la cantidad de fuerza aplicada al girar la ruleta o al lanzar la moneda, o la posibilidad de que en la misma región de la caja aparezca el pimpón esperado.

E: ¿Qué hiciste para que te salieran tantos pimpones rosados?	
E6: Por las esquinas.- toma la caja-. 	Manejo de espacio para acertar el resultado. (AP3)
E: ¿Por las esquinas? Listo.	
E6: Cuando uno va así, cuando uno las va sacando quedan ahí, y tú le haces así –sacude la caja- y se va para abajo, y se va para las esquinas y ahí las encuentras. 	El evento se puede acertar si se manipulan determinadas cualidades físicas del experimento. (AP1)

Episodio 3. Extracto de la entrevista 6, extracción de pimpones de la urna con espacio muestral equiprobable

Fuente. Creación propia

El manejo del espacio físico de la urna con pimpones, como justificación de los aciertos, ilustrado en el Episodio 3, hace referencia a la capacidad extrapolatoria de las intuiciones del estudiante, para argumentar desde fenómenos físicos los

experimentos aleatorios, mientras emplea la característica implícita de la intuición como justificación de los eventos resultantes.

Asimismo, para referir seguridad frente a lo aleatorio, el estudiante lo desarrolla en términos generales de manera menos refinada, es decir. Hace un tratamiento de la acción sobre los materiales concretos, así la seguridad se vuelve sobre la capacidad de manipularlos para obtener los resultados esperados.

E: ¿Por qué crees que cayó tan poquitas veces en el color que escogiste?	
E2: -Mueve la ruleta- porque lancé muy suavemente esto.	Las causas de los eventos son debido a acciones ejecutadas por él. (AP1)
E: ¿Era de lanzar más suavemente?	
E2: No, era más duro, 	Acertar es consecuencia de control de sus acciones. (AP1)

Episodio 4. Extracto de la entrevista 2, activación de la ruleta equiprobable.

Fuente. Creación propia.

En el experimento 'Activación de la ruleta' independientemente de la aleatoriedad de los resultados, como presenta el Episodio 4, los materiales concretos se pueden controlar de manera sensorial para acertar en un evento, lo cual sirve a los estudiantes para referir causas a lo aleatorio. Dichas causas son Evidencias Personales, lo cual significa que no sólo está el hecho de aplicar más fuerza al material concreto, sino que en efecto, la suposición de este hecho significa acertar en futuras ocasiones, pese a que los intentos desarrollados con las dos ruletas, como en este caso, produzcan resultados diferentes.

Estos Episodios muestran, como las intuiciones sobre los eventos aleatorios se vuelven perseverantes aun cuando los resultados aleatorios del experimento señalen la ausencia de relación entre causas y efectos; así mismo, operan referencias al mecanismo de los objetos y su manipulación.

6.1.2. Incertidumbre- incierto

La incertidumbre mediante el lenguaje de lo incierto, permite a los estudiantes caracterizar la mayor cantidad de eventos en los experimentos aleatorios y

deterministas planteados, mediante tres tipos de relaciones entre cualidades físicas del material concreto y las cualidades del experimento: la primera, entre la cantidad de los elementos físicos del fenómeno y la posibilidad de acertar; la segunda relación, propia del experimento, entre los resultados previos y los futuros; la tercera, relaciona propiedades físicas -como el color- con la posibilidad de acertar.

6.1.2.1. Relación entre la cantidad de elementos en el experimento y la posibilidad de acertar.

Esta relación está dada por expresiones referentes a: (I) la cantidad de región ocupada por un color en una ruleta -no equiprobable-, (II) la cantidad de pimpones (la urna con espacio muestral equiprobable y no equiprobable); y (III) la cantidad de intentos necesarios para lograr acertar en un evento. Así, la cuantificación para los estudiantes, es necesaria para designar la posibilidad o imposibilidad de los eventos, esto revela una intuición globalizada en la que se asume que a mayor cantidad de elementos descritos hay mayor posibilidad de ganar.

E: ¿Qué color de la ruleta vas a escoger?	
E4: Amarillo.	
E: Listo, si tienes cinco intentos para que el amarillo salga, ¿crees que son suficientes?	
E4: Mmm – niega con la cabeza-.	No existe relación entre la cantidad esperada de veces que saldrá el color y los intentos dados. (AP4)
E: ¿Por qué?	
E4: Porque son muchos más –señala la ruleta- y de pronto salen los otros. 	Dificultad para que salga el color esperado debido a que hay equiprobabilidad de eventos. (AP2)
E: Puedes repetir más duro por favor.	
E4: Que de pronto son más chiquitas y entonces de pronto salen de los otros.	A mayor cantidad de eventos, menor cantidad de posibilidades. (AP2)

Episodio 5. Extracto de la entrevista 4, activación de la ruleta no equiprobable

Fuente. Creación propia

En la entrevista #4 se observa que la incertidumbre frente al experimento con la ruleta no equiprobable, está ligada a la posibilidad de que ocurran demasiados eventos, como lo muestra el Episodio 5. Así, para el estudiante se vuelve necesario que la cantidad de intentos sea mayor, para relacionarla directamente

con la cantidad de eventos posibles, para que al menos se acierte en uno. De esta manera, el carácter cuantitativo al que se hace referencia, remite a certeza intrínseca entre la correspondencia entre dichas cantidades.

6.1.2.2. Relación entre los resultados previos y futuros.

Esta relación es consecuencia de las características propias de las intuiciones sobre aleatoriedad, es decir, cuando la ocurrencia de eventos es insistente, la intuición desarrolla un proceso implícito de causa-consecuencia, en cuyas interpretaciones se puede aceptar que si un evento ocurrió determinadas veces, puede volver a ocurrir, o por el contrario, no va a volver a repetirse; así, se evidencia que dicha causalidad evidencia rasgos de Certeza Intrínseca sobre el evento que ocurrirá. Frente al experimento de lanzamiento de monedas, en la entrevista #5 se observa,

E: ¿Atinaste?	
E5: No profe.	
E: Bueno, -lanza la moneda-. Yo tampoco atiné, empate, siguiente.	
E5: -Lanza la moneda- no profe.	
E: -Lanza la moneda- ¡gané! Listo. ¿Qué crees que ocurrió para que perdieras?	
E5: No sé profe, la cara me gusta siempre elegir la cara cuando juego siempre me sale la cara.	La certeza está dada por experiencias previas que implican las futuras. (AP1)
E: ¿Y esta vez que pasó?	
E5: No sé profe, tanto que no juego eso.	La falta de práctica es una consecuencia que permite determinar la dificultad para ganar. (AP2)
E: ¿Qué debiste hacer para ganar?	
E5: Nada profe, así uno si toca perder, pues, perder.	No existe otro evento posible más allá de lo impredecible. (AP4)

Episodio 6. Extracto de la entrevista 5, lanzamiento de monedas

Fuente. Creación propia

En este Episodio se muestra que la experiencia previa es importante para la intuición bajo la condicionalidad implícita, pues, si un evento ocurrió entonces volverá a ocurrir en otra circunstancia. De esta manera, la Coercitividad en la intuición del estudiante, se manifiesta como resignación frente al evento con la expresión “*nada profe, [...] si toca perder, pues, perder*”, esto revela que la condicionalidad implícita justifica los resultados, solo que el resultado obtenido es

una excepción a una norma establecida como Estatus Teórico en cuanto su fiabilidad, y, por tanto, este resultado nada significa frente a la intuición.

6.1.2.3. Relación entre las propiedades físicas del experimento y la posibilidad de acierto.

La última relación, propiedades físicas y posibilidad de acertar, tiene dos vertientes, aquella que refiere a fallos en el material concreto para acertar y aquella en que las propiedades físicas del experimento, como el color, orientan la intuición sobre la posibilidad de acertar. Es así, como para el primer caso, el material falla en su construcción y en consecuencia no permite acertar; mientras que en el segundo, el color más llamativo o las preferencias de los estudiantes inciden en la elección del evento más probable. Para la primera situación, el Episodio 7 presenta

E: ¿Por qué crees que te cayó tan poquitas veces?	
E1: -Gesticula- No sé.	I-I (AP2)
E: ¿Por qué no sabes? ¿Qué crees que pasó ahí?	
E1: -toca la ruleta-.	
E: ¿Qué no sirve?	
E1: Venga -gira la ruleta-, pues si sirve pero no, esto - toca la flecha- esto lo vara.	Falla no la predicción sino la herramienta (AP1-AP2)

Episodio 7. Extracto de la entrevista 1, Ruleta no equiprobable

Fuente. Creación propia

El fallo en el material radica, según el estudiante, en la elaboración de la ruleta, más no en la posibilidad del evento, es decir, una ruleta con propiedades físicas más precisas le permitiría acertar en el resultado, pues la Coercitividad no permite considerar el evento como aleatorio sino que lo asume como uno en el que el control sensorial del material concreto debe permitir acertar, pero las circunstancias físicas de dicho material no permiten tal control, por tanto no existe aleatoriedad.

Para la segunda vertiente, en la que la selección del evento es consecuencia de las preferencias del estudiante, incide la capacidad de determinar qué es incierto y qué es imposible, como se evidencia en el siguiente Episodio 8

E: Bueno empecemos, la primera pregunta que te voy a hacer es ¿si giramos esta ruleta cuál color crees que es más probable que salga?	
E8: El rojo	
E: ¿Por qué?	
E8: Mmm... porque... es mi color favorito.	La dificultad para asumir causas

	reduce el problema a cualidades físicas (AP2)
E: Listo, bien. Ahora escoge un color de esta ruleta ¿cuál color vas a escoger?	
E8: El azul.	
E: Si tienes cinco intentos para girarla ¿crees que el azul va a salir en alguno de esos intentos?	
E8: Sí.	
E: ¿Por qué?	
E8: Porque... [...] porque uno tiene fe.	El uso de causas que no se pueden controlar para eventos que no se pueden determinar o prever. (AP2)

Episodio 8. Extracto de la entrevista 8, Ruleta equiprobable

Fuente. Creación propia

Aquí el estudiante escoge como criterio de selección su color favorito, no brinda indicios sobre el fenómeno aleatorio que puede ocurrir, por tanto, la intuición se pone en juego al hacer otra justificación de carácter subjetivo para dar interpretación al evento, es decir, la selección se da bajo un criterio personal sustentado por elementos subjetivos, que luego se justifica en lo implícito de la intuición y se sustenta en una evidencia personal ligada a un estatus teórico, donde la fe sobre el evento esperado, se manifiesta en la condicionalidad de que “si tengo fe” entonces el evento se cumple, y cuando se cumple significa que tal intuición funcionó, lo cual se vuelve una evidencia personal justificada en la selección bajo un criterio personal.

6.1.3. Predicción- posible

La predicción y lo posible están estrechamente relacionados con la categoría anterior, en cuanto la capacidad de prever resultados futuros al asignarle causas y consecuencias a eventos previos; así, entre más eventos posibles presentara el experimento, más dificultad mostraban los estudiantes para predecir qué iba a suceder, mientras que si el control tangible sobre el material del experimento era más plausible, es más fácil detectar los posibles resultados.

E:¿Habrás algún color de esa ruleta con el que siempre acertarás? ¿Con el que siempre te saliera?	
E7: El rojo.	
E: ¿El rojo? ¿Por qué el rojo?	
E7: Porque me salió más veces.	La posibilidad de un evento está dada por eventos previos como causa para eventos posteriores. (AP3)
E: Listo, bien, bueno, ahora vamos a hacer lo mismo pero lo vamos a hacer con esta ruleta de acá ¿vale?	

Bueno. Entonces, otra vez ¿si giramos esta ruleta cuál crees que es el color que más sale?	
E7: El morado, porque está más grande y puede salir.	Relaciona color con posibilidad de ocurrencia. (AP3)
E7: Bien, ahora, ¿cuál color de esa ruleta vas a escoger?	
E: morado.	
E: Si, tienes cinco intentos para que el morado salga, ¿va a salir ese color en alguno de esos intentos?	
E7: Si.	
E: ¿Por qué?	
E7: Porque hay más probabilidad de que salga.	La posibilidad está dada por la cantidad de región. (AP3)

Episodio 9. Extracto de la entrevista 7, Ruleta no equiprobable

Fuente. Creación propia

En la ruleta sin equiprobabilidad, el estudiante del Episodio 9 consideraba que existían menos eventos a tener en cuenta, debido a la disposición de los colores, en consecuencia, la expresión “*porque hay más probabilidad de que salga*”, refiere que dentro de los posibles eventos, primero, hay menos eventos, y, segundo, que el de mayor posibilidad es aquel de mayor área, y, por tanto el Estatus Teórico de la intuición se sostiene en dicho principio y en la implicación de que si se escoge el color de mayor área hay más posibilidad de ganar, estos se globalizan y se aplican durante las entrevistas, para justificar las causas de ocurrencia en dichos eventos.

6.1.4. Aleatorio-imposible

Esta categoría se manifiesta en menor grado en los estudiantes debido a la mediación que realizan entre facilidad o dificultad para establecer causas y consecuencias en los eventos; por lo cual queda supeditada a la predicción y lo posible para establecer estrategias para prever eventos futuros; mientras que, cuando esta categoría queda ligada a la incertidumbre, es porque no existe una estrategia clara para seleccionar cuál de los posibles eventos es más seguro.

E: ¿Por qué crees que no acertaste? Solo te salió una vez el color morado.	
E5: Porque es que, no profe, no sé profe, no quería salir el color morado. Solo una vez.	Acertar o no, no depende de la estudiante sino de situaciones ajenas a ella. (AP2)
E: ¿Crees que cinco intentos fueron suficientes?	
E5: No profe.	Es imposible asegurar que cinco intentos sean suficientes porque el proceso no se puede prever. (AP4)

E: Ahora, ¿hay un color con el que siempre seguro aciertes?	
E5: El amarillo.	
E: ¿El amarillo?	
E5: -Asiente-.	
E: Listo, ¿por qué?	
E5: Porque ese amarillo también está muy muy bonito, no está muy oscuro.	La elección está dada por cualidades físicas subjetivas ya que no se puede predecir los eventos. (AP3)

Episodio 10. Extracto de la entrevista 5, Ruleta no equiprobable.

Fuente. Creación propia.

En el Episodio 10, los cinco intentos no fueron suficientes para el estudiante, porque no le fue posible predecir cuál evento ocurrirá. Como la posibilidad de predecir y acertar es reducida, se vuelve una evidencia personal que cinco intentos no sean suficientes, y, en consecuencia, la respuesta queda cerrada con la expresión “*no profe*”, pues existe dificultad para establecer relaciones con los eventos resultantes.

E: ¿Habría alguna estrategia para que sacaras más pimpones?	
E2: No.	
E: ¿No?	
E2: -Niega con la cabeza-.	No existe relación entre lo que hace y lo que espera.(AP4)
E: Lo que saliera.	
E2: Si –sonríe-.	
E: Si te diera más intentos... ¿necesitarías más intentos?	
E2: Sí.	(AP3)

Episodio 11. Extracto de la entrevista 2, Extracción de pimpones de la urna con espacio muestral no equiprobable.

Fuente. Creación propia.

En el Episodio 11 se muestra la imposibilidad del estudiante de establecer estrategias para determinar eventos futuros, la cual está dada por la falla en las suposiciones hechas, pues como aquellas predicciones no funcionaron la operación implícita rechaza las predicciones previas. Para el estudiante, con la información disponible es menos evidente la imposibilidad de un evento pues todos son realizables, indicando que con dicha información es difícil predecir un resultado.

Las relaciones propuestas en la Tabla 6 no son suficientes para integrar las categorías eficazmente e identificar las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad. A lo largo de las entrevistas se detecta el uso continuo de distintas categorías independientemente del experimento. Por tal motivo, es pertinente

ahondar en las relaciones entre categorías, para establecer el aporte de cada una en la detección de las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad.

6.2. MARCO DE REFERENCIA COMPLEMENTARIO

Es necesario determinar las concepciones sobre probabilidad que poseen los sujetos, por tanto, se adoptan las concepciones propuestas por Savard (2014). Allí plantea que existe una estrecha relación entre intuiciones y concepciones sobre probabilidad, donde las primeras orientan la acción de los estudiantes sobre eventos aleatorios, y gracias a las segundas se puede hablar en el marco de este trabajo, de alfabetización probabilística, pues debido a la movilización de las concepciones se adquieren conocimientos y herramientas sobre probabilidad, donde destaca que:

Una concepción está basada en experiencia personal y es el filtro mental para interpretar una situación [para] que tenga sentido (Giordan y Pellaud, 2004). Las concepciones proponen un enfoque personal y simple hacia la comprensión de un fenómeno o un problema surgido del entorno. Son respuestas a regulaciones desarrolladas por una persona para balancear sus estructuras cognitivas al momento de adaptación (Piaget, 1967, 1974, 1975). Compensan las estructuras cognitivas para enfrentar una perturbación en el medio. (p. 285)

Bajo esta interpretación de las concepciones sobre probabilidad, Savard (2014) destaca dos conjuntos de concepciones, las probabilísticas y las deterministas, que se describen en la Tabla 8.

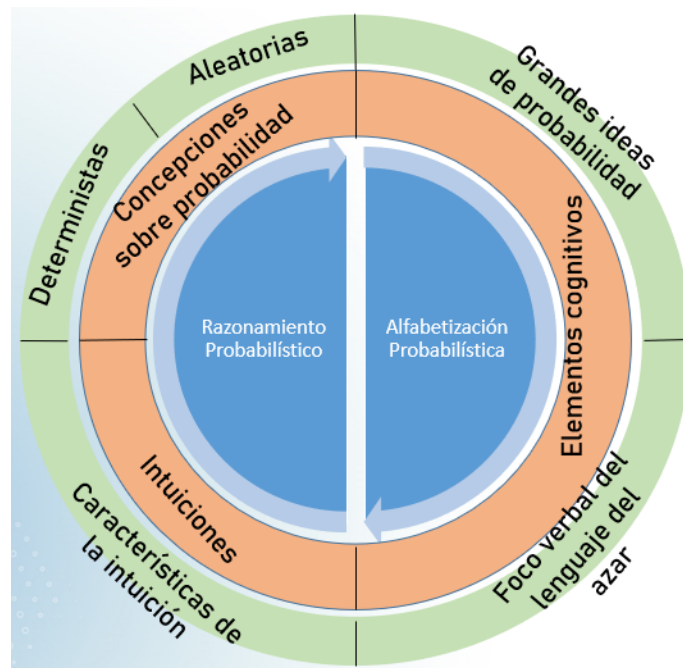
CONCEPCIONES DETERMINISTAS	CARACTERIZACIÓN
Independencia	Los resultados pasados influyen los resultados futuros. Los resultados están conectados con otros. No se reconoce aleatoriedad.
Interpretación personal	Animismo Atribución de los fenómenos a: Dios, suerte o casualidad. Todopoderoso, fatalidad, bien y mal La persona: suerte, virtud, habilidades El medio: condiciones y objetos a favor o no Las reglas de juego: leyes de compensación o amplificación Sin reglas o desinterés de Dios El mecanismo del objeto Manipulación del dispositivo
Representatividad	Eventos que parecen representar la mejor de las posibilidades. Cuanto más representativo sea un evento, mayor será la probabilidad de que ocurra. La población es similar a la muestra.

Disponibilidad	Los juicios son creados sobre la disponibilidad de información en la memoria en lugar de los datos completos.
CONCEPCIONES ALEATORIAS	DESCRIPCIÓN
Anclaje	Estimación basada en valores iniciales que se ajustaron a la respuesta final. El valor inicial puede ser sugerido por las palabras utilizadas en el problema o por un cálculo parcial. Diferentes puntos de partida conducen a diferentes estimaciones que tienen un sesgo de valores iniciales.
Efectos sobre el tamaño de la muestra	Al estimar, el tamaño de la muestra no se tiene en cuenta (ley de grandes números).
Efectos sobre el tiempo: probabilidad condicional	Probabilidad condicional: inversión en el eje de causalidad-efecto. El resultado de un evento viene después del evento condicionado (causa y efecto).
Equiprobabilidad	Teniendo en cuenta que dos eventos son equiprobables para ocurrir cuando no son. También llamado: eventos compuestos y únicos.
Predicción	Predecir en la próxima prueba en lugar de considerar el panorama general.
Espacio muestral	No reconocer que todos los resultados pueden ocurrir
Apariencia o efectos visuales	Los segmentos de una ruleta tienen diferentes probabilidades, dependiendo de su lugar.

Tabla 8. Concepciones deterministas y probabilísticas sobre probabilidad

Fuente. Savard (2014)

De esta manera, las concepciones sobre probabilidad describen el comportamiento de los sujetos frente a eventos aleatorios, sustentadas en las intuiciones frente a experiencias previas con la aleatoriedad y su aplicabilidad en experimentos aleatorios propuestos. Según estas concepciones, surgen relaciones entre las categorías descritas en el marco de referencia y las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes, las cuales se complementan en el Esquema 4.



Esquema 4. Articulación de categorías con el marco de referencia posterior

Fuente. Creación propia

El esquema cíclico puede interpretarse desde la alfabetización probabilística y las grandes ideas de probabilidad como la predicción, la incertidumbre y la aleatoriedad fragmentada en las definiciones sugeridas por Azcárate et. al (1998). Estas grandes ideas obedecen, según el sentido del ciclo a manifestaciones del foco verbal del lenguaje del azar, compuesto por elementos que refieren lo seguro, lo posible, lo incierto y lo imposible. En seguida, se relaciona con las características de la intuición como componente del razonamiento probabilístico para articularse con las concepciones, que como menciona Savard (2014) permiten la producción de comprensiones que inciden en la alfabetización del sujeto. Dicha articulación, también contempla el paso de las intuiciones a las concepciones, en cuanto la transición entre las acciones a las comprensiones en situaciones con características de aleatoriedad.

6.3. DISEÑO DE LA HERRAMIENTA ANALÍTICA

La herramienta analítica establece relaciones emergentes entre categorías descritas en la revisión teórica sobre elementos cognitivos de la alfabetización probabilística (Gal, 2002), las características de la intuición (Fischbein, 1975), y el marco de referencia posterior sobre concepciones de probabilidad (Savard, 2014). Tales relaciones emergentes vinculan manifestaciones de los estudiantes con las categorías, para describir y caracterizar sus concepciones sobre probabilidad.

6.3.1. Contribuciones de la alfabetización probabilística y la cognición intuitiva a las concepciones sobre probabilidad.

Las concepciones de probabilidad descritas en el marco de referencia posterior, se pueden configurar según los componentes de la alfabetización probabilística y las características de la cognición intuitiva. A continuación, se presenta en la Tabla 9, aquellos elementos de la alfabetización y del razonamiento probabilístico que articulados pueden favorecer determinadas concepciones sobre probabilidad.

			Alfabetización probabilística (Gal, 2002)		Razonamiento probabilístico (Fischbein, 1987)
			Grandes ideas de probabilidad	Foco verbal del lenguaje del azar (Azcárate et. al, 1998)	Características de la cognición intuitiva
CONCEPCIONES SOBRE PROBABILIDAD (Savard, 2014)	Concepciones deterministas	Independencia	Predicción	Seguro; Posible	Evidencia personal; Estatus teórico; Implícito
		Interpretación Personal	Aleatoriedad determinista; Incertidumbre	Posible; Incierto	Certeza intrínseca; Perseverancia; Coercitividad; Globalidad
		Representatividad	Aleatoriedad Causalidad; Predicción	Seguro; Posible	Estatus teórico; Implícito; Globalidad; Extrapolaridad
		Disponibilidad	Aleatoriedad indefinido; Predicción	Imposible; Seguro	Evidencia personal; Estatus teórico; Implícito
	Concepciones aleatorias	Anclaje	Predicción; Aleatoriedad estándar	Posible	Estatus teórico; Implícito; Extrapolaridad
		Efecto sobre el tamaño de la muestra	Aleatoriedad estándar; Incertidumbre	Posible; Incierto	Evidencia personal; Perseverancia
		Efecto sobre el tiempo: probabilidad condicional	Aleatoriedad Incertidumbre	Imposible; Seguro	Estatus teórico; Evidencia Personal; Globalidad
		Equiprobabilidad	Aleatoriedad estándar	Imposible; Seguro	Estatus teórico; Evidencia Personal; Globalidad
		Predicción	Predicción; Aleatoriedad Estándar	Posible; Incierto	Evidencia personal; Perseverancia
		Espacio Muestral	Aleatoriedad estándar	Imposible; Seguro	Evidencia personal; Estatus Teórico; Coercitividad
		Apariencia o efectos visuales	Aleatoriedad estándar	Posible; Incierto	Evidencia personal; Estatus Teórico; Coercitividad

Tabla 9. Contribuciones de la alfabetización probabilística y el razonamiento probabilístico a las concepciones sobre probabilidad

Fuente. Fischbein (1987), Gal (2002, 2005) y Savard (2014)

6.3.2. Relación entre manifestaciones de los estudiantes y categorías.

En esta sección, se presentan tabulados los indicadores que muestran cuando un estudiante presenta determinado componente de cada categoría. Aquí se presentan tres elementos: 1) el nombre del componente de la categoría; 2) la

etiqueta con la cual se representa dicho componente, para posterior análisis; y, 3) los indicadores, que destacan cuáles acciones o manifestaciones corresponden al componente respectivo.

6.3.2.1. Alfabetización en probabilidad

CATEGORÍA 1. Grandes ideas		
Aleatoriedad	Etiqueta	Indicadores
	C1-A	
Indefinido	C1-AI	Los estudiantes evidencian, después de realizar experimentos dificultad para reconocer eventos aleatorios, no pueden justificar posibles resultados de experimentos aleatorios propuestos, expresan desconcierto sobre los resultados de dicho experimento, no pueden aludir a características que determinen si el evento es aleatorio o no.
Determinista	C1-AD	Los estudiantes, después de realizar experimentos aleatorios describen consecuencias de los resultados obtenidos, ligadas al mecanismo o al diseño de los materiales concretos del experimento. Se dificulta justificar cuál evento es susceptible de ocurrir.
Causalidad	C1-AC	Se evidencia que los estudiantes, después de realizar experimentos aleatorios, atribuyen causas a los resultados cuando su control sensorial es mayor sobre los materiales concretos. Dicho control sensorial se observa con expresiones como “si lo giro más duro [ruleta]” o “debo girarlo [ruleta] más pasito”. Atribuyen causas al control espacial de los movimientos, asignadas a eventos físicos con materiales concretos empleados. Dicho control espacial se manifiesta mediante expresiones como [Profesor: ¿tú cual crees que es la mejor estrategia para ganar? - Estudiante: calcular.- Profesor: ¿qué hay que calcular? - Estudiante:] por ejemplo, si queda en vertical o en horizontal, para que pueda quedar todo...(organiza las fichas de manera horizontal y lo indica con su dedo).
Estándar	C1-AE	Los estudiantes, después de realizar experimentos aleatorios, designan causas a los resultados según el contexto, es decir, en contextos de apuestas pueden referirse a la suerte en expresiones como “estoy de buenas”, “mala suerte”; mientras que frente a aciertos pueden referirse a la cantidad de posibles aciertos de acuerdo con la totalidad de aciertos (probabilidad clásica), con expresiones como “tengo cuatro opciones de diez”, “es más posible que acierte si elijo la región más grande de la ruleta”.
Incertidumbre	C1-Ain	Los estudiantes, durante la realización de experimentos aleatorios, identifican el grado de posibilidad de ocurrencia de un evento sin aludir a causas específicas mediante expresiones cualitativas como “puede salir cualquier color”, “no importa que color escoja, puedo acertar o no”. También puede referir el grado de probabilidad de un evento cuantitativamente “si tienen la misma cantidad de región

		[colores de la ruleta] cualquiera puede salir”.
Predicción	C1-P	Los estudiantes, después de realizar experimentos aleatorios, expresan causas de los resultados obtenidos empleando expresiones como “porque hay más probabilidad de que salga [Ruleta no equiprobable]” o “estoy teniendo razón”, “tener fe”, “mala suerte”, “suerte”, para manifestar que hay menor cantidad de resultados posibles y es más fácil escoger uno de los eventos, o que aquel evento con mayor cantidad de región (ruleta no equiprobable) o de elementos (urna no equiprobable), será más favorable su predicción.
Incertidumbre	C1-I	Los estudiantes manifiestan la incertidumbre, después de realizar el experimento, a partir de las relaciones entre las cualidades físicas de los materiales concretos como: 1. La cantidad de los elementos físicos del fenómeno y la posibilidad de acertar la cantidad de elementos, 2. Retomar propiedades físicas -como el color- para relacionarlas con la posibilidad de acertar el color de la región [en la ruleta] en donde quedará el apuntador (v.g., “[Profesor: ¿cuál pimpón crees que más sale?] Estudiante: ¿El rosado?”), Esto evidencia una relación entre las cualidades del experimento y su posibilidad de acertar, donde los estudiantes manifiestan vínculos entre resultados previos y futuros, relacionando la cantidad de elementos de un evento (v.g. [Estudiante: “pues porque como no salió el amarillo, tal vez tampoco sale el rojo”]), donde, existe una conexión entre los resultados ocurridos -como justificación- y los eventos futuros, pues, si el evento no presenta regularidades en su comportamiento, es más incierto el resultado que saldrá.

Tabla 10. Indicadores de manifestaciones de los estudiantes sobre grandes ideas de la probabilidad.

Fuente. Creación propia.

CATEGORÍA 2. Componentes del foco verbal del lenguaje del azar		
	Etiqueta	Indicadores
Imposible	C2-I	Los estudiantes, después de realizar el experimento, emplean expresiones que niegan hipótesis, gestos de negación con la cabeza, onomatopeyas que denotan duda, <i>Entrevistador:</i> Si tienes cinco intentos para que el amarillo salga, ¿crees que son suficientes? <i>Estudiante:</i> mmm-... El evento es considerado imposible en la medida que no se cuenta con datos suficientes. A su vez, se incluyen expresiones verbales que representan resignación respecto a los resultados que ocurren <i>Entrevistador:</i> ¿Por qué crees que no acertaste? Solo te salió una vez el color morado.

		<i>Estudiante:</i> porque es que, no profe, no quería salir el color morado.
Seguro	(C2-S)	Los estudiantes emplean expresiones verbales de éxito, después de realizar experimentos aleatorios, frente a los eventos esperados, la cantidad de veces necesarias para acertar un evento, la relación entre eventos previos y posteriores, la repetición de aciertos como causa de éxito (v.g. <i>Estudiante:</i> “porque cogí más” [¿?]), asignación de causas como el deseo y la suerte (v.g. <i>Estudiante:</i> “y desear ganar”), o la afirmación de acciones y predicciones, a partir de manifestaciones verbales y gestos afirmativos con la cabeza.
Posible	(C2-P)	Los estudiantes manifiestan la posibilidad de ocurrencia de los eventos, antes y después de realizar el experimento, a partir de expresiones verbales para: 1. Denotar el mecanismo de los materiales concretos <i>Estudiante:</i> Venga –gira la ruleta-, pues si sirve pero no, esto – toca la flecha- esto lo vara; 2. El cambio de elecciones; 3. La justificación de las elecciones; 4. Los resultados ocurridos; 5. Los posibles procesos para acertar “probabilidad”; 6. La posibilidad de distintos resultados v.g. “tal vez”; la inequiprobabilidad v.g. “más posibilidad”; la posibilidad de ocurrencia; 7. El uso de expresiones como: “confianza”, “creo”, para denotar posibilidad de ocurrencia; para expresar la relación entre cantidad y posibilidad de acierto.
Incierto	(C2-In)	Los estudiantes, antes de realizar el experimento, usan expresiones verbales como: “no sé”, “de pronto”, “toca mirar”, “alguno”, “no se sabe”, “cualquiera”; para señalar causas asociadas al mecanismo del material concreto y su relación con la predicción; gestos de negación o desconcierto para predecir; inseguridad para justificar causas de los resultados; manifestación de dudas para seleccionar un evento; actitud pensativa; manifiesto de indecisión y duda, pausas largas para dar respuestas.

Tabla 11. Manifestación de los estudiantes de los componentes del foco verbal del lenguaje del azar

Fuente. Creación propia.

6.3.2.2. Razonamiento sobre la probabilidad

CATEGORÍA 3. Características de las Intuiciones sobre la probabilidad

Evidencia	Etiqueta	Indicadores
-----------	----------	-------------

personal	C3-EP	Se presenta en los estudiantes luego de realizar los experimentos, pues, a partir de los resultados, apoyan sus respuestas en hipótesis como: a mayor cantidad de repeticiones del evento, mayor número de aciertos.
Certeza intrínseca	C3-CI	Los estudiantes emplean certeza intrínseca, después de realizar el experimento, en dos circunstancias: la primera, que relaciona los eventos previos con los posteriores (v.g., porque me salió tres veces), sustentado en su experiencia previa; y, la segunda, que relaciona la cantidad de intentos con la cantidad de éxitos v.g. (ruleta con espacio muestral equiprobable): <i>Entrevistador:</i> Si tienes cinco intentos para que el amarillo salga, ¿Crees que son suficientes? <i>Estudiante:</i> mmm -niega con la cabeza-. <i>Entrevistador:</i> ¿por qué? <i>Estudiante:</i> Porque son muchos más -señala la ruleta- y de pronto salen otros-.
Perseverancia	C3-P	La perseverancia en las intuiciones de los estudiantes, se evidencia, antes y después de realizar el experimento, con la capacidad de validación personal de los resultados ocurridos a partir de las creencias, se evidencia en expresiones como “porque uno tiene fe”, “porque estoy en la mala”, “confianza”, para validar resultados y las justificaciones dadas.
Coercitividad	C3-C	Los estudiantes, , después de realizar el experimento, acomodan los resultados ocurridos (pese a que indiquen elementos distintos a la experiencia previa de los estudiantes), para que respondan a dichas experiencias previas, otras evidencias se rechazan debido a que no se adaptan a las intuiciones previas, sustentadas en expresiones como “porque sí”.
Estatus teórico	C3-ET	Se observa que el estatus teórico se manifiesta a partir de la condicionalidad de una causalidad intrínseca de los resultados, tal condicionalidad funciona así: si la operación intuitiva aplicada es cierta, entonces el fenómeno ocurre de determinada forma; es así como se justifica la causalidad a partir de la relación entre: 1. eventos previos y futuros, después de realizar el experimento, v.g. saldrá rojo porque siempre sale a cada rato; 2. entre la dificultad de predecir eventos futuros debido a la cantidad de posibilidades, antes de realizar el experimento, v.g. el que salga porque yo no estoy seguro. 3. la relación entre la fe y los aciertos sobre los resultados obtenidos, antes y después de realizar el experimento, v.g. porque tengo fe de que saldrá ese color.
Extrapolaridad	C3-E	Los estudiantes, después de realizar el experimento, cuando a partir de los materiales concretos pueden asignar una causa a los resultados, los analizan y justifican a partir de 1. La manipulación física (cantidad de fuerza aplicada al material concreto); 2. A la posición relativa de los elementos -ubicación aproximada

		pese a ser mezclada (v.g., Estudiante: “me fui casi por el mismo lado”)-, 3. A estrategias de juegos – tomar determinada cantidad de fichas, ubicar en posiciones estratégicas las fichas-, para comprender los resultados ocurridos.
Globalidad	C3-G	Las estrategias empleadas por los estudiantes, antes y después de realizar el experimento, articulan eventos aleatorios y los expresan en términos deterministas, los resultados así se pueden cuantificar, hallar sus causas y determinar sus consecuencias o producir conclusiones (v.g. “[Profesor: ¿Por qué te salió el color rojo una vez? ¿Por qué crees que te salió una vez?]- [Estudiante:] no sé, tal vez porque le di suave algunas veces y algunas veces le di duro”).
Implícito	C3-I	Se evidencia el carácter implícito de las intuiciones de los estudiantes, antes y después de realizar el experimento, por las relaciones estrechas entre las intuiciones y los procesos lógicos que justifican los resultados ocurridos, que evidencia la implicación condicional (si, entonces,...) en casos como [Estudiante:] “pues, tal vez como hay más rosados, entonces algunas veces deben salir los blancos”.

Tabla 12. Manifestación de los estudiantes sobre las características de la intuición probabilística.

Fuente. Creación propia.

6.3.2.3. Concepciones sobre probabilidad

CATEGORÍA 4. Concepciones sobre la probabilidad (C4)		
Concepciones Deterministas	Etiquetas	Indicadores
	CD4	
Independencia	CD4-I	Se observa que los experimentos en los que se presenta mayor evidencia de esta categoría son: la extracción de pimpones con conjuntos equiprobables y no equiprobables; y, el lanzamiento de monedas. Cuando los estudiantes no se pueden referir al control sensorial, después de realizar el experimento, emplean la relación entre resultados ocurridos y futuros con expresiones como [Estudiante:] “que porque en esa casi no cayó entonces en esta creí que iba a caer tantas veces”.
Interpretación personal	CD4-IP	Se evidencia que, salvo en experimentos de tres en línea y Nim, los demás permitieron que los estudiantes manifestarán mayor empleo de su interpretación personal, después de realizar el experimento, para comprender los resultados ocurridos en cuanto a “la buena o mala suerte”, “ser de malas”, o “tener fe”. Estas interpretaciones personales, movilizaban las justificaciones de los estudiantes en el momento en que los datos proporcionados por el experimento eran insuficientes.

Representatividad	CD4-R	La representatividad se evidencia en los estudiantes, antes y después de realizar el experimento, en términos de cuál color ocupa la mayor cantidad de región en cada ruleta, o la fuerza aplicada al instrumento (v.g. [Estudiante:] “de pronto tirarla más duro”); también se evidencia, en la extracción de pimpones se evidencia que a mayor cantidad de pimpones de un determinado color mayor elección de este evento. Hay particularidades en las que estudiantes señalan un evento como representativo pero escogen otro para acertar; o, escogen características de los materiales concretos como el color para justificar su elección.
Disponibilidad	CD4-D	Se observa que los datos proporcionados después de realizados los experimentos son suficientes para que los estudiantes elaboren juicios sobre lo ocurrido en estos resultados y en los futuros. La cantidad de repeticiones evidencia que a partir de los intentos dados y los acertados asumen la cantidad de reproducciones faltantes para completar los aciertos. La recurrencia entre resultados previos y futuros como argumento son consecuencia de la disponibilidad de información extraída de los eventos, como en el caso de la ruleta no equiprobable (v.g. [Estudiante:] “porque rojo siempre sale cada rato, profe”).
Concepciones aleatorias	CA4	Indicadores
Anclaje	CA4-A	Luego de realizar los experimentos aleatorios, los estudiantes con los datos proporcionados en cada experimento tanto por el material concreto y por el entrevistador, puede establecer relaciones cuantitativas entre determinadas características de los materiales concretos, v.g. la cantidad de veces que aparece un color deseado en la ruleta frente a la totalidad de colores de la ruleta equiprobable y no equiprobable.
Efectos sobre el tamaño de la muestra	CA4-TM	Luego de realizar los experimentos aleatorios y proponer cálculos que aproximen la probabilidad de un evento determinado, los estudiantes generalizan ese cálculo a cualquier cantidad de repeticiones del experimento, indicando así cuantas oportunidades de activar el material concreto necesitan para completar los aciertos suficientes, v.g. la relación entre la cantidad de veces que aparece el color en el material concreto frente a todos los colores es de cuatro de ocho, por tanto necesito 3 intentos más para completar los cinco aciertos.
Efectos sobre el tiempo: probabilidad condicional	CA4-PC	Antes de realizar los experimentos aleatorios, los estudiantes determinan que el color deseado en un material concreto va a indicar que sea más probable acertar debido a la cantidad de veces que aparece en el material respecto a los otros colores, v.g., como en la ruleta no equiprobable aparece más región de color morado que región de color azul, entonces es más probable que salga el color morado.
Equiprobabilidad	CA4-E	Luego de realizar experimentos con espacio muestral no equiprobable, los estudiantes consideran que tienen la misma

Estu dian	Grandes ideas (C1)	Componentes del foco verbal de	Intuiciones (C3)
--------------	--------------------	-----------------------------------	------------------

		posibilidad de acertar respecto a la elección que tomen, v.g. [Extracción de pimpones de la urna con espacio muestral no equiprobable] como hay dos colores, blanco y rosado, es posible que salga cualquiera de los dos la misma cantidad de veces.
Predicción	CA4-P	Los estudiantes luego de realizar los intentos asignados en los experimentos, al no lograr identificar regularidades en el comportamiento de los resultados obtenidos, solicitan un intento más para poder predecir en base de este eventos futuros, v.g. ¿puedo girar la ruleta cinco veces más para saber cual color es más seguro que salga?
Espacio muestral	CA4-EM	Antes de realizar los experimentos aleatorios, los estudiantes indican la seguridad de ocurrencia de un evento según la cantidad de veces que aparezca en el material concreto en relación con la totalidad de eventos posibles. También imposibilitan la ocurrencia de determinado evento si su cantidad en relación con el total de eventos es menor, v.g. (en la extracción de pimpones con espacio muestral no equiprobable) el color blanco no va a salir porque solamente hay tres pimpones de ese color, mientras que el rosado si saldrá porque hay siete pimpones.
Apariencia o efectos visuales	CA4-EV	En experimentos aleatorios, de acuerdo a la percepción visual de los materiales concretos (región ocupada o cantidad de apariciones) los estudiantes determinan los eventos con mayor posibilidad de acertar frente a los otros posibles, v.g. (en la ruleta equiprobable) como cada color se repite cuatro veces en la ruleta, todos tienen la misma posibilidad de salir.

Tabla 13. Manifestación de los estudiantes sobre concepciones deterministas sobre probabilidad.

Fuente. Creación propia.

6.4. RESULTADOS A PARTIR DE LA HERRAMIENTA ANALÍTICA

En la tabla 14 se muestra el panorama general de las manifestaciones de los estudiantes respecto a las categorías descritas en la herramienta analítica, estas se representan según las etiquetas asignadas en las tablas 10, 11 y 12. Se resume la actividad de los participantes en las entrevistas frente a las categorías de grandes ideas de la probabilidad, foco verbal del lenguaje del azar y características de las intuiciones. En seguida, se muestra la interpretación de las manifestaciones de los estudiantes respecto a cada categoría. Posteriormente, se analizan las relaciones de estas categorías con las concepciones de los estudiantes, representadas por las etiquetas de las tablas 10, 11, 12 y 13, para comprender aquellas concepciones que emplean en el desarrollo de experimentos.

							lenguaje del azar (C2)												
	C1-A					C1- P	C1- I	C2- I	C2- S	C2- P	C2- In	C3- EP	C3- CI	C3- P	C3- C	C3- ET	C3- E	C3- G	C3- I
	C1- AI	C1- AD	C1- AC	C1- AE	C1- Aln														
E1	X	X	X			X	X		X	X	X	X	X	X	X		X		X
E2	X						X	X		X	X			X	X				
E3	X	X					X			X	X		X			X			
E4	X		X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X
E5	X	X					X			X	X	X		X	X		X	X	X
E6	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	
E7	X	X	X			X	X		X	X	X	X	X		X	X	X		X
E8	X	X					X			X	X	X	X	X	X		X	X	X

Tabla 14. Panorama general de las categorías de grandes ideas, componentes del foco verbal del lenguaje del azar y Características de la intuición, en los estudiantes

Fuente. Creación propia

6.4.1. Grandes Ideas de la Probabilidad.

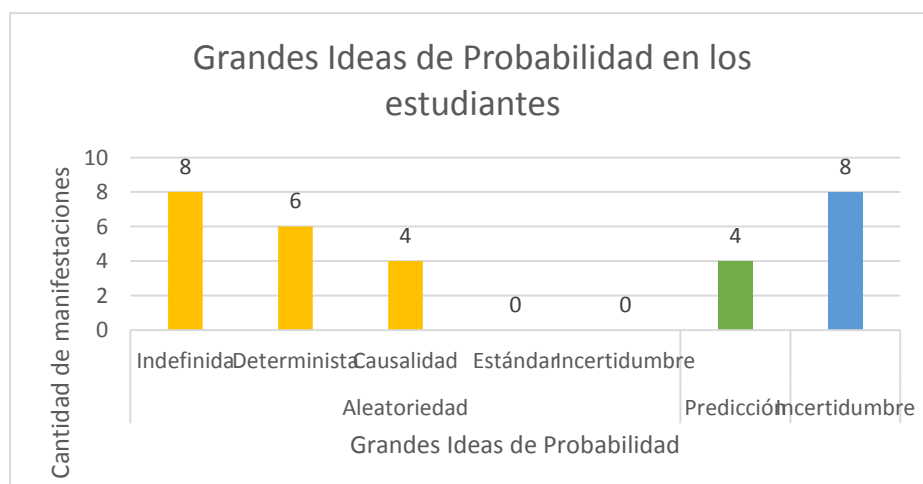


Gráfico 1. Manifestación de las grandes ideas en los estudiantes

Fuente. Creación propia

Las definiciones de aleatoriedad se evidencian después de realizarse el experimento. Del grupo de estudiantes según el Gráfico 1, los ocho estudiantes entrevistados manifiestan Aleatoriedad Indefinida. En seguida, la definición de Aleatoriedad Determinista se manifiesta en seis de ocho estudiantes, asignando causas a los resultados de los experimentos o causas relacionadas con la manipulación por parte de los estudiantes del material concreto o características representativas de los experimentos.

Cuatro estudiantes, evidencian la definición de aleatoriedad como Causalidad, en cuanto capacidad para definir posibles eventos, bajo la condicionalidad: si el evento ha ocurrido varias veces entonces volverá a ocurrir (relación entre resultados previos y eventos futuros). No se evidencian definiciones de Aleatoriedad Estándar o Aleatoriedad Incertidumbre, pues los estudiantes no diferencian eventos en distintos experimentos (cuando establecen una causa la aplican a distintos experimentos) y necesitan atribuir causas a los eventos aleatorios.

En este sentido, la concepción de aleatoriedad más común en los estudiantes es la indefinida, por cuanto que presentan dificultades para reconocer la aleatoriedad de los eventos, así como para justificar los posibles resultados que pueden obtener al escoger determinado evento del experimento, el cual manifiestan con desconcierto sobre los resultados obtenidos.

Sobre la idea de Predicción, cuatro de ocho estudiantes la evidencian antes de desarrollar el experimento, como capacidad para prever resultados con la información proporcionada por el entrevistador y el material concreto de los experimentos. Esto representa la dificultad en la elección de eventos en los experimentos que favorezca predecir cual evento es más probable frente a otros resultados. Frente a la Incertidumbre, todos los estudiantes entrevistados después de realizar los experimentos, la manifiestan como dificultades para establecer causas a los resultados obtenidos, la cual esta inversamente relacionada con concepciones más elaboradas de aleatoriedad (causalidad e incertidumbre) o el desarrollo en la habilidad d.

6.4.2. Componentes del foco verbal del lenguaje del azar.

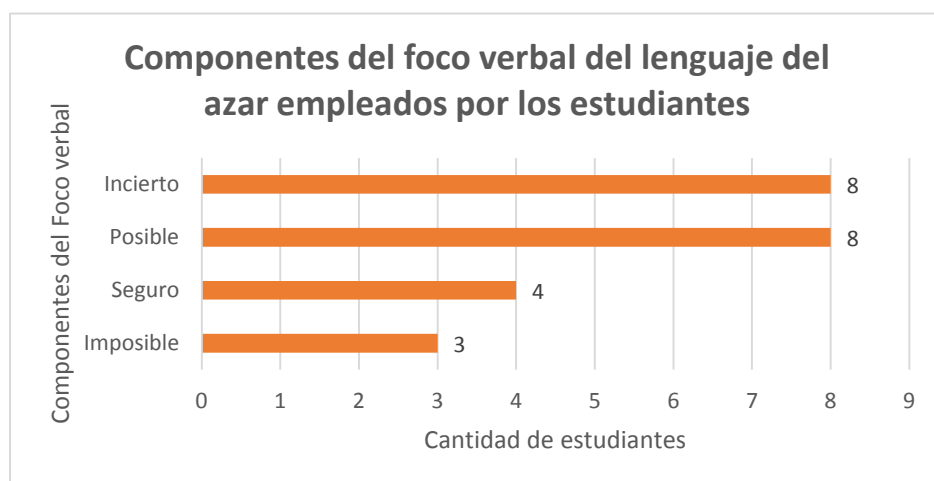


Gráfico 2. Manifestación de componentes del foco de lenguaje del azar en los estudiantes

Fuente. Creación propia

Las manifestaciones del lenguaje referidas a lo Incierto y lo Posible, se evidencian en todos los estudiantes entrevistados luego de realizarse los experimentos. Esto es evidente en las dificultades para definir causas de los resultados obtenidos en experimentos y definir cuál de los posibles eventos resultará.

Respecto al lenguaje de lo Seguro (cuatro de ocho estudiantes entrevistados) y lo Imposible (tres de ocho estudiantes), se manifiestan antes y después de realizados los experimentos, debido a la capacidad para determinar cuál evento es más evidente que ocurra o no (ambos componentes se relacionan con características representativas del material concreto o la relación entre eventos previos y futuros), al accionar alguno de los materiales concretos del instrumento de reconocimiento y guardan relación con la predicción, como capacidad para emplear información proporcionada por el entrevistador y el material concreto.

6.4.3. Razonamiento probabilístico.

6.4.3.1. Intuiciones de la probabilidad.

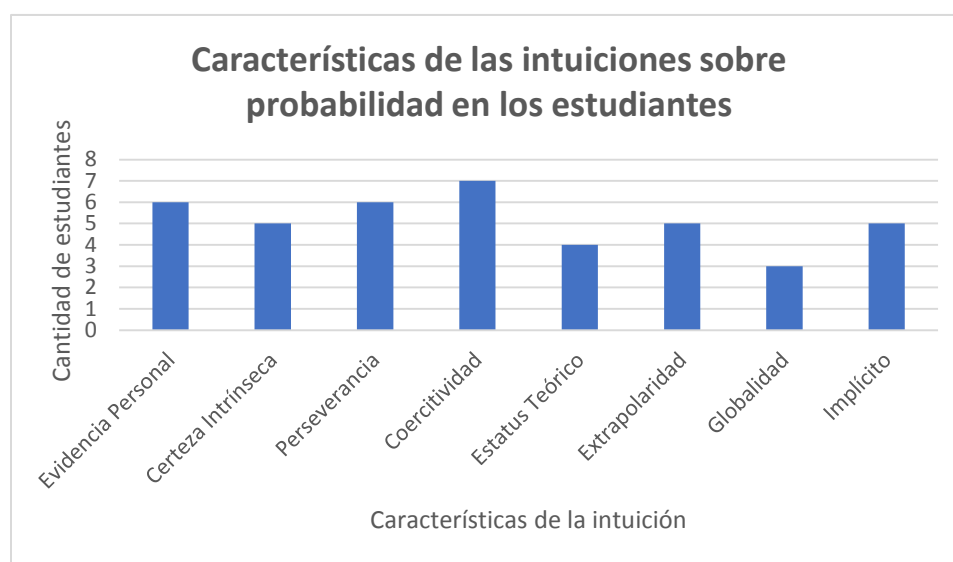


Gráfico 3. Manifestación de intuiciones de la probabilidad en los estudiantes

Fuente. Creación propia

La característica de la intuición que se manifiesta en siete de ocho estudiantes a lo largo del desarrollo de los experimentos es la Coercitividad, en cuanto la influencia de experiencias previas en la predicción de resultados y la estrecha relación que manifiestan los estudiantes entre resultados previos y eventos futuros.

En segundo puesto (seis de ocho estudiantes) se manifiesta la Perseverancia y la Evidencia Personal ligadas a la Coercitividad, pues las intuiciones sobre los resultados de los experimentos persisten aun después de realizados. La información proporcionada por el entrevistador y el material concreto, es suficiente para que los estudiantes se convenzan de la posibilidad de determinados eventos.

La Certeza Intrínseca, la Extrapolaridad y lo Implícito (cinco de ocho estudiantes) se manifiesta al usar los datos para hallar estrategias para predecir resultados, mediante la condicionalidad implícita entre eventos futuros y resultado previos. El Estatus Teórico (cuatro de ocho estudiantes entrevistados) se relaciona con la necesidad de aludir causas a eventos planteados en los experimentos y está ligado a la condicionalidad implícita entre resultados previos y eventos futuros. Finalmente, la Globalidad (tres de ocho estudiantes) se manifiesta como la capacidad de usar otros conocimientos para predecir eventos posibles.

6.4.3.2. Concepciones deterministas sobre la probabilidad.

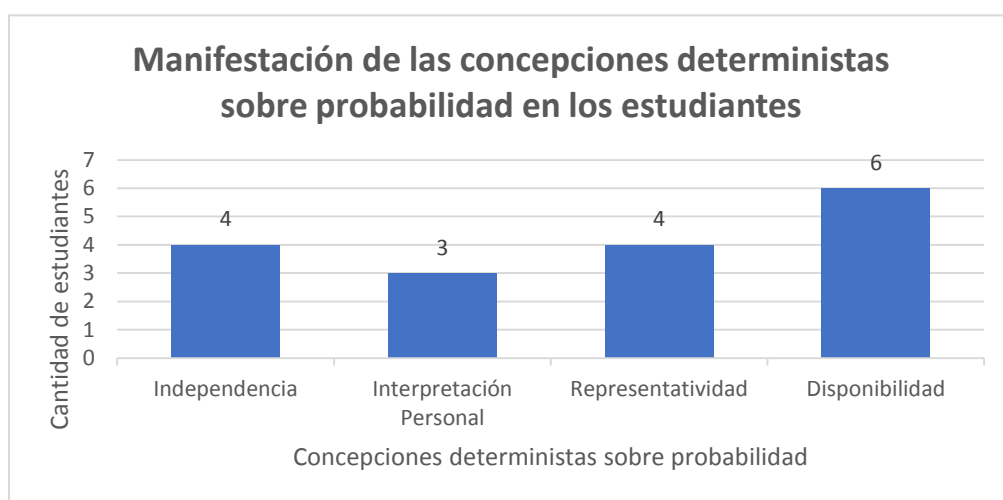


Gráfico 4. Manifestación de las concepciones deterministas de la probabilidad en los estudiantes

Fuente. Creación propia

La concepción de Disponibilidad (seis de ocho entrevistados) de la información proporcionada por: (I) las características de los materiales concretos, (II) por los resultados obtenidos en los experimentos, y (III) por la información brindada por el entrevistador, tal información se articula con las características de la intuición de la probabilidad, pues dependiendo de los datos proporcionados por el experimento, los estudiantes movilizan determinadas características de la intuición a través de manifestaciones de los componentes de lo posible y lo incierto.

La Representatividad y la Independencia se manifiestan en cuatro de ocho estudiantes a lo largo de cada experimento. La Representatividad evidencia la importancia que los estudiantes atribuyen a características representativas del material concreto. Para la Independencia, la relación de condicionalidad implícita que establecen los estudiantes entre resultados previos y eventos futuros, configuran su actividad según la información proporcionada en cada experimento.

Finalmente, se detecta la Interpretación Personal en tres de ocho estudiantes, como capacidad de atribuir características de aleatoriedad a los experimentos planteados de acuerdo con experiencias previas, con características de los materiales concretos o de los experimentos. Se evidencia una transición entre relaciones de eventos y experiencia personal hacia la necesidad de información proporcionada por el entrevistador, por los materiales concretos y el experimento.

Se destaca que las concepciones deterministas sobre probabilidad dependen directamente de los datos proporcionados en los experimentos, los cuales emplean los estudiantes para interpretar de determinada manera los eventos; así, a mayor cantidad de datos el estudiante manifiesta la concepción de Disponibilidad; entre más significativos los datos según la experiencia del estudiante se emplea la concepción de Interpretación Personal; entre más llamativos o representativos los datos el estudiante usa la concepción de

Articulación de categorías	Concepciones Deterministas (CD4)
----------------------------	----------------------------------

Representatividad; y, entre más evidente es para el estudiante relacionar los datos emplea la concepción de Independencia.

6.4.5. Estudiantes que manifiestan relaciones entre categorías.

				Independencia	Interpretación Personal	Representatividad	Disponibilidad
Alfabetización probabilística	Grandes ideas (C1)	Aleatoriedad	Indefinida				E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8
			Determinista		E1-E3-E5-E6-E7-E8		
			Causalidad			E1-E4-E6-E7	
			Estándar				
			Incertidumbre				
		Predicción	E1- E4-E6-E7		E1- E4-E6-E7	E1- E4-E6-E7	
	Incertidumbre		E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8				
	Componentes de los focos de lenguaje (C2)	Imposible				E2-E4-E6	
		Seguro	E1-E4-E6-E7		E1-E4-E6-E7	E1-E4-E6-E7	
		Posible	E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8	E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8	E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8		
Incierto			E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8				
Razonamiento Probabilístico	Intuiciones (C3)	Evidencia Personal	E1-E4-E5-E6-E7-E8			E1-E4-E5-E6-E7-E8	
		Certeza Intrínseca		E1-E3-E4-E7-E8			
		Perseverancia		E1-E2-E4-E5-E6-E8			
		Coercitividad		E1-E2-E4-E5-E6-E7-E8			
		Estatus Teórico	E3-E4-E6-E7		E3-E4-E6-E7	E3-E4-E6-E7	
		Extrapolaridad			E1-E5-E6-E7-E8		
		Globalidad		E5-E6-E8	E5-E6-E8		
Implícito	E1-E4-E5-E7-E8		E1-E4-E5-E7-E8	E1-E4-E5-E7-E8			

Tabla 15. Estudiantes que manifiestan las relaciones entre categorías
Fuente. Creación propia

La Tabla 15, presenta aquellos estudiantes que manifiestan en sus concepciones, relaciones entre las categorías de alfabetización y razonamiento probabilístico con las concepciones deterministas de probabilidad, mediante las cuales se identifican las Grandes Ideas, el lenguaje del azar y las características de la intuición. Pese a que, para cada concepción determinista sobre probabilidad, se ubica todo el conjunto de estudiantes entrevistados, no significa que los estudiantes emplean las cuatro concepciones, sino al manifestar todas las categorías relacionadas a cada concepción, el estudiante la emplea para abordar los experimentos aleatorios. En el Gráfico 5, se relacionan para la concepción determinista de independencia las manifestaciones de las categorías relacionadas.

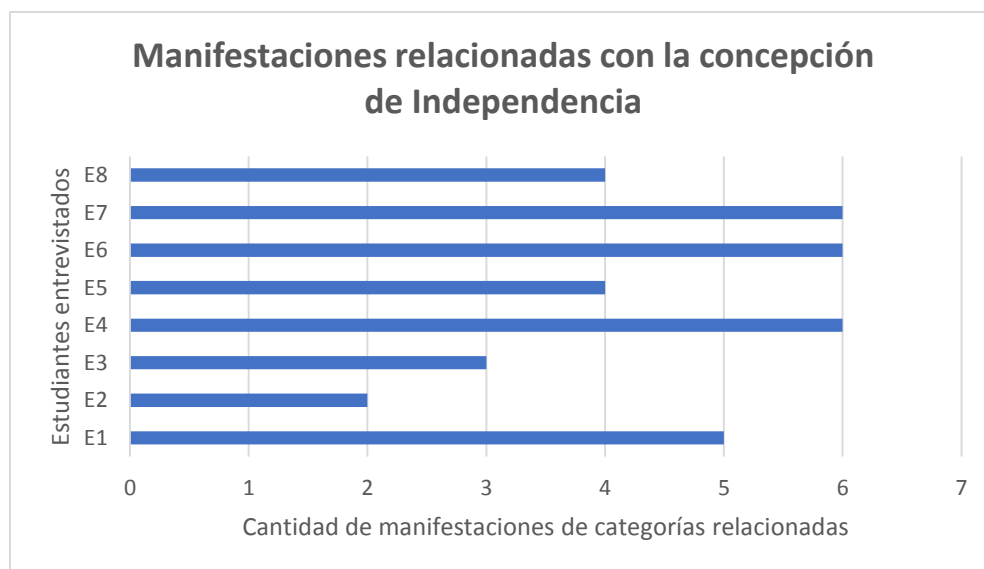


Gráfico 5. Manifestación relacionadas con la concepción de Independencia

Fuente. Creación propia

Como la independencia relaciona resultados previos y eventos futuros, los estudiantes que presentan seis de siete manifestaciones (E7, E6, E4), son aquellos que para predecir eventos futuros, a lo largo de los experimentos, emplean la relación entre datos obtenidos durante el experimento para predecir resultados futuros. El estudiante que presenta cinco de siete (E1) y cuatro de siete manifestaciones (E5 y E8), refieren resultados obtenidos inmediatamente para predecir eventos futuros cercanos. E3 y E2 (tres de siete y dos de siete manifestaciones respectivamente) manifiestan dificultad para predecir.

Esto significa que la concepción de Independencia se relaciona directamente con la capacidad para predecir un evento con los datos proporcionados en un experimento, de lo cual, la muestra de estudiantes presenta dificultades para comprender los datos y emplearlos apropiadamente en función de predecir eventos futuros.

Sobre la Interpretación Personal, el Gráfico 6 muestra que los estudiantes con ocho de nueve y siete de nueve manifestaciones identificadas en la Tabla 15 (E1, E5, E6, E8) validan los resultados a partir de la información proporcionada por el material concreto, el entrevistador, el experimento y su experiencia personal. Con esta información identifican la posibilidad de acertar un evento particular, la incertidumbre en el experimento o la imposibilidad para predecir. Para estudiantes con seis de nueve (E4 y E7) y cinco de nueve manifestaciones (E2 y E3), la validación de los resultados está ligada con su experiencia personal.



Gráfico 6. Manifestaciones relacionadas con la concepción de Interpretación personal
Fuente. Creación propia

La interpretación personal así refiere a la capacidad que tienen los estudiantes para relacionar los datos proporcionados en los experimentos con experiencias personales previas. Los estudiantes que manifiestan más categorías relacionadas con esta concepción sobre probabilidad, poseen algunas experiencias más próximas a la comprensión de la probabilidad a partir de eventos aleatorios.

Sobre la concepción de Representatividad el Gráfico 7 muestra que los estudiantes con ocho de nueve (E6), siete de nueve (E1 y E7) y seis de nueve manifestaciones (E4) emplean datos representativos según características físicas de los materiales concretos para relacionarlos con los eventos más probables. Para E5 y E8 (cinco de nueve manifestaciones), los datos representativos se relacionan con eventos que son difíciles o imposibles de predecir en cuanto a los aciertos en resultados previos; para E2 y E3 (dos de nueve y tres de nueve manifestaciones) la representatividad de los datos no es útil para predecir eventos o justificar resultados previos.



Gráfico 7. Manifestación relacionadas con la concepción de Representatividad
Fuente. Creación propia

El uso de esta concepción para comprender situaciones con características de aleatoriedad, evidencia la comprensión de los datos en cuanto a la representatividad de las características físicas (tamaño, color) o tangibles (cantidad) y manifiesta la capacidad de los estudiantes para comprender la aleatoriedad o predecir un evento a partir de datos proporcionados, así entre mayor significancia presenten los datos para el estudiante, este posee más capacidad para predecir resultados.

El Gráfico 8 muestra que E4, E6 (siete de ocho manifestaciones detectadas en la Tabla 15) y E7 (seis de ocho manifestaciones) dan importancia a la información obtenida a lo largo del experimento para asignar relaciones entre resultados previos y eventos futuros de los experimentos propuestos. E1 (cinco de ocho manifestaciones), E5 y E8 (cuatro de ocho manifestaciones) muestran que los datos disponibles en los experimentos tal como se presentan se emplean para justificar resultados y eventos futuros. E2 y E3 (dos de ocho y tres de ocho manifestaciones) manifiestan dificultad para reconocer los datos obtenidos y justificar resultados o predecir eventos futuros.

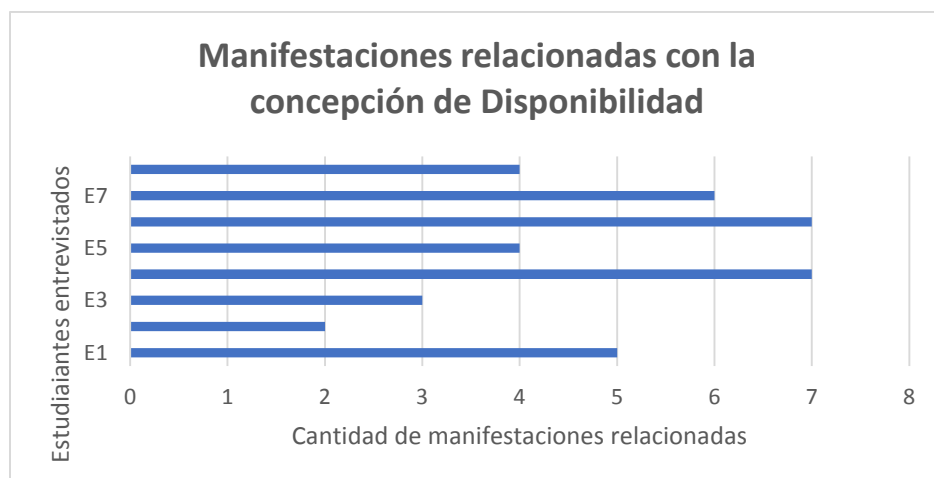


Gráfico 8. Manifestaciones relacionadas con la concepción de Disponibilidad
Fuente. Creación propia

Es importante reconocer en este punto las razones por las cuales los estudiantes no manifiestan concepciones aleatorias sobre probabilidad: según la Tabla 9, este conjunto de concepciones emplean definiciones de aleatoriedad estándar e incertidumbre, las cuales implican herramientas matemáticas para relacionar y cuantificar eventos posibles con la totalidad de eventos en un experimento aleatorio. También, Estrella et. al (2019) manifiestan que los estudiantes en este rango de edad articulan las características cualitativas con las cuantitativas de los experimentos a partir de distintos enfoques de la probabilidad como el clásico, el frecuentista o el subjetivista sustentados en el razonamiento proporcional.

De acuerdo con las características de la población del programa Procesos Básicos, las herramientas matemáticas que poseen no son suficientes para relacionar las características cualitativas con cuantitativas de los experimentos propuestos, también el razonamiento proporcional no se ha desarrollado, según los grados de escolaridad que tienen los participantes, por tanto las concepciones aleatorias de probabilidad son excluidas de los resultados en cuanto las condiciones del grupo.

5. CONCLUSIONES

A partir de las acciones adelantadas en este estudio, la caracterización de las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad, permitió articular la alfabetización y el razonamiento probabilístico, mediante lo propuesto por Gal (2002) respecto a las grandes ideas y los componentes del foco verbal de lenguaje del azar, junto con las características de las intuiciones sobre probabilidad de Fischbein (1975) y las concepciones, tanto deterministas como aleatorias, sobre probabilidad, propuestas por Savard (2014).

Principalmente las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes son deterministas, es decir, los estudiantes atribuyen causas a los resultados de eventos aleatorios, aun cuando no las pueden definir con la información proporcionada por el material concreto con que se efectúa el experimento, por el entrevistador y por experiencias previas con experimentos semejantes.

La detección de las causas de los eventos en los experimentos aleatorios y deterministas por parte de los estudiantes, evidencia su actuar frente a la información proporcionada por tales experimentos para comprender la aleatoriedad y la incertidumbre, así como para predecir eventos futuros sobre estos. Así se evidencia que existen transiciones temporales durante el desarrollo de los experimentos. A lo largo de cada uno de estos las intuiciones de los estudiantes sufren cambios que se manifiestan a través de los componentes del foco verbal del lenguaje, por ejemplo, del lenguaje de lo seguro a lo incierto, para ajustar sus predicciones a los resultados observados al activar el material.

En este sentido, en la etapa de inicio de cada experimento, los estudiantes obtienen información del entrevistador sobre cómo se realiza el experimento, la cual complementan con experiencias y saberes previos. En la etapa de desarrollo, obtienen información sobre los resultados obtenidos, los aciertos y desaciertos frente al experimento. En la etapa final, con dicha información modifican sus predicciones e intuiciones (salvo en los casos en que se presenta coercitividad) frente al experimento y los eventos futuros. Esta movilización de las intuiciones permite evidenciar que en esta etapa de formación de los estudiantes, existe una transición entre la concepción de la probabilidad como interpretación personal y la concepción de la probabilidad como disponibilidad.

Para el grupo de estudiantes entrevistados (entre los 9 y 12 años), la intuición sobre resultados en experimentos, se moviliza desde la capacidad de atribuir

voluntad a objetos inamovibles (animismo en los materiales concretos del instrumento de reconocimiento) y la aceptación de fuerzas superiores en el desarrollo de los eventos (creencia en Dios, en la suerte), a la utilización de datos obtenidos del material concreto, del entrevistador y del experimento, en términos de la representatividad o la independencia de tales datos. Esto pone de manifiesto que las concepciones deterministas sobre probabilidad, también se movilizan de acuerdo al tipo de experimento y las características del material que se emplee.

Según lo anterior, la atribución de causas a los eventos aleatorios por parte de los estudiantes, satisface la concepción determinista de representatividad, pues dicha atribución implica que los datos empleados por los estudiantes son llamativos en cuanto sus características físicas (v.g. color que ocupa más espacio en la ruleta no equiprobable, colores de los pimpones, figuras en cada cara de la moneda). Tal representatividad no está mediada solo por la mayor cantidad de veces que ocurra un evento en un experimento dado (v.g. activación de ruleta equiprobable y no equiprobable y extracción de pimpones), sino por la región ocupada (ruleta no equiprobable), por el color de los elementos del material concreto (regiones de la ruleta y pimpones) o por la cantidad de elementos del material concreto (extracción de pimpones no equiprobable).

A partir de los datos, se evidencia una movilización de la concepción determinista de representatividad hacia la de independencia, en cuanto que al no atribuir los eventos a fuerzas o voluntades desconocidas, sino al tratar de materializarlos a partir de lo que muestran los eventos, emplean la información más representativa para sus sentidos -características físicas del material concreto-, como justificaciones entre su experiencia previa y la predicción de eventos futuros.

Otro elemento que incide en tal movilización entre concepciones sobre probabilidad, es que la necesidad de predecir eventos, implica relacionar datos (proporcionados por el material concreto, el entrevistador y el experimento) de determinadas maneras, para dar sentido a la información obtenida y a la esperada, en cuanto conocer el evento más probable de ocurrencia luego de activado el material concreto, para lo cual los estudiantes generalizan la posibilidad de acierto, estableciendo la relación entre resultados previos y eventos futuros como herramienta de predicción.

Tal condicionalidad entre resultados obtenidos y eventos futuros, le permite a los estudiantes relacionar la experiencia a través del tiempo en relación con los intentos ejecutados en su conjunto en cierto experimento, es decir, así como los eventos aleatorios se desarrollan a través del tiempo, los estudiantes sistematizan

esta experiencia para poder determinar eventos futuros a partir de los ocurridos. Una variable que aparece aquí, radica en el carácter de las experiencias previas: así como unos estudiantes retomaban los resultados previos inmediatos de los experimentos aleatorios, había otros que retomaban experiencias de su cotidianidad anteriores al instrumento de reconocimiento, que les permitía predecir a partir de experiencias vividas en otros lugares y otras condiciones.

De esta manera, la interpretación personal se encuentra presente en los estudiantes antes de realizar el experimento, pero su efecto para comprender los eventos aleatorios va disminuyendo en una ascendente necesidad por comprenderlos desde los datos proporcionados para así dar sentido tanto a los resultados obtenidos como a los eventos futuros. Por lo cual, aparecen las concepciones de representatividad e independencia, para sustentar el manejo de los datos en cuanto información proporcionada por los experimentos desarrollados en el instrumento de reconocimiento, así, aparece la disponibilidad de los datos como última etapa de transición entre las concepciones mencionadas.

La disponibilidad, en cuanto uso de los datos disponibles y proporcionados por los eventos aleatorios, está directamente relacionada con la representatividad, así como con la independencia en cuanto la necesidad de los datos se vuelve primordial, de esta manera, los eventos son comprendidos por los estudiantes a partir de estos, ya sea desde las características de estos -representatividad- o la relación entre estos -independencia-.

Es así como se ponen de manifiesto las cuatro concepciones de probabilidad deterministas que emplearon los estudiantes, las cuales les permiten manifestar nociones de probabilidad, desde ciertos componentes del lenguaje de la probabilidad en experimentos aleatorios.

El uso reiterativo del lenguaje de lo incierto por parte de los estudiantes, evidencia relación con la gran idea de Incertidumbre, lo cual sustenta la movilización descrita entre concepciones, pues los estudiantes no atribuyen los resultados de los experimentos a una entidad capaz de definir los eventos futuros, lo cual denotan mediante la dificultad para predecir un resultado entre distintos eventos posibles.

La relación entre las categorías de grandes ideas, componentes del lenguaje probabilístico y concepciones deterministas sobre probabilidad, depende directamente de la comprensión de las características de la intuición dedicadas a detectar el uso de herramientas por parte de los estudiantes frente a eventos aleatorios. El papel de las características de la intuición para establecer las

concepciones de la probabilidad en el grupo de estudio mediante la herramienta analítica, es fundamental para el análisis de las manifestaciones lingüísticas presentes en los estudiantes y traducirlas en términos de concepciones.

El presente estudio señala las concepciones sobre probabilidad de estudiantes del programa de Procesos Básicos, bajo el desarrollo de la herramienta analítica emergente en el tratamiento de las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes participantes y teniendo en cuenta las características particulares del grupo. En este sentido se sintetizan los siguientes hallazgos:

- Las relaciones evidenciadas entre alfabetización probabilística (grandes ideas de probabilidad y componentes de los focos de lenguaje probabilístico) y características de la intuición permiten caracterizar, describir y ampliar las concepciones de los estudiantes sobre probabilidad. Según lo anterior, las concepciones manifestadas por los estudiantes son deterministas y se clasifican como concepciones de: interpretación personal, de independencia, de representatividad y de disponibilidad. Estas obedecen a componentes del foco verbal del lenguaje del azar, responden a grandes ideas de probabilidad y se sustentan en características de la intuición de los estudiantes al enfrentarse a experimentos aleatorios.
- Así mismo, existen transiciones entre las concepciones de los estudiantes, manifestadas mediante el uso de distintos focos de lenguaje, así como de la adaptación de las grandes ideas por parte de los estudiantes a lo largo de cada uno de los experimentos, para tratar eventos aleatorios propuestos. Dicha transición entre concepciones, obedece a cierta complejización de la percepción, comprensión y búsqueda de información en el tratamiento eventos.

Entonces, desde la articulación de las categorías trabajadas en el estudio, se puede concluir que las concepciones empleadas por los estudiantes de Procesos Básicos son deterministas, su desarrollo no es lineal, la movilización entre tales concepciones depende del uso de los datos disponibles a lo largo de los experimentos propuestos, permitiendo la transición -en los estudiantes- de asignar causas superiores sobre los eventos, a emplear información de los dispositivos empleados, del docente y de los resultados obtenidos. Así mismo, por las características de los estudiantes de aula acelerada, sus concepciones sobre probabilidad no están ligadas a herramientas matemáticas, ni cuantifican las posibilidades sobre el total de eventos, lo que favorece interpretaciones de causa y efecto sobre los eventos aleatorios. A partir de lo cual, la enseñanza de la probabilidad en primaria puede sustentarse claramente en propuestas educativas que articulen la alfabetización y el razonamiento probabilístico.

RECOMENDACIONES

Parte del desarrollo del estudio lleva a considerar elementos que pueden generar estudios que profundicen en la didáctica de la probabilidad e incluso amplíen la capacidad abarcadora de lo que se plantea aquí. A continuación se presentan las posibilidades que presenta este trabajo.

- Inicialmente se espera que las relaciones emergentes sean empleadas en estudios futuros que favorezcan la sistematización de resultados referentes a las concepciones de los estudiantes de primaria, respecto a concepciones de estudiantes de aula acelerada.
- Fortaleciendo el presente trabajo, los análisis categorizados sobre las concepciones de los estudiantes, pueden trascender de grupos de estudio de aceleración del aprendizaje a estudiantes de básica primaria en aula regular. Los hallazgos aquí identificados se pueden ampliar tanto en población como en una sistematización general sobre la transición de las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes.
- Así como se busca la comprensión sobre el uso de los componentes del foco verbal del lenguaje del azar, por parte de los estudiantes para denotar eventos aleatorios, se puede problematizar el uso de tales componentes en docentes al enseñar probabilidad en primaria.
- Validar el instrumento de reconocimiento propuesto, por parte de distintos agentes, y su pertinencia para caracterizar las concepciones sobre probabilidad de los estudiantes en primaria.

REFERENCIAS

- Angarita, M. A. O., Parra, A. B. S., & Sandoval, C. C. U. (2011). Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (34), 360-384.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., & Ariza, R. P. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 16(1), 85-97.
- Barragán, D. M., & Rivera, L. P. (2015). Razonamiento probabilístico desde el desarrollo de la intuición del azar en estudiantes de quinto de primaria. *Secuencia de actividades basada en juegos de azar*.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*, 1-17.
- Beltrán-Pellicer, P. (2017). Una propuesta sobre probabilidad en educación infantil con juegos de mesa. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(1), 53-61.
- Dividendo por Colombia. (2015). PLAN DE ESTUDIOS. Bogotá, Colombia.
- Eichler, A., & Vogel, M. (2014). "Three Approaches for Modelling Situations with Randomness". En: Chernoff, E., & Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking*. (págs. 75-99). Dordrecht, Springer Science +Business Media
- Estrella, S., Alvarado, H., Olfos, R., & Retamal, L. DESARROLLO DE LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA: TEXTOS ARGUMENTATIVOS DE ESTUDIANTES.
- Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational studies in mathematics*, 15(1), 1-24.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). "Towards probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer, Boston, MA.
- Gómez, E., de Haro, J. J. O., Bernabeu, M. D. C. B., & García, J. M. C. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (35), 75-91.

- Gómez Torres, E., Contreras, J. M., & Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 73-89.
- Godino, J., & Batanero, M. C. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Jones, G. A. (Ed.). (2006). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.
- MEN, C. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Magisterio, Bogotá.
- MEN, M. D. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN, C. (2010). *Manual Operativo*. Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media. Subdirección de Estándares y Evaluación.
- MEN, C. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos S.A.
- Mojica, J. M. L. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial* (Doctoral dissertation, Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México).
- Moreno, A., & Cardeñoso, J. M. (2014). Alfabetización Probabilística: Un reto para los profesores de secundaria. In *Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.
- Ortiz, C. V., & Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 454-478.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño* (Vol. 369). Ediciones Morata.
- Savard, A. (2014). "Developing Probabilistic Thinking: What about people's conceptions?". En: Chernoff, E., & Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking*. (págs. 283-298). Dordrecht, Springer Science +Business Media
- Van Dooren, W. (2014). "Probabilistic thinking: Analyses from a Psychological Perspective". En: Chernoff, E., & Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking*. (págs. 123-126). Dordrecht, Springer Science +Business Media
- Vásquez, C., & Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 5-23.

Anexo 1. Respuestas de miembros del grupo de estudio a la prueba de caracterización de inicio de año

Encuentra y colorea dos días de la semana. manzana Lunes Miércoles José Colorea el dibujo que empieza con la letra A - a Colorea el dibujo que empieza con la letra E - e Busca el nombre de cada dibujo y enciérrolo con tu lápiz. oso sol elefante alacrán iguana oruga	Encuentra y colorea dos días de la semana. manzana Lunes Miércoles José Colorea el dibujo que empieza con la letra A - a Colorea el dibujo que empieza con la letra E - e Busca el nombre de cada dibujo y enciérrolo con tu lápiz. oso sol elefante alacrán iguana oruga
Encuentra y colorea dos días de la semana. manzana Lunes Miércoles José Colorea el dibujo que empieza con la letra A - a Colorea el dibujo que empieza con la letra E - e Busca el nombre de cada dibujo y enciérrolo con tu lápiz. oso sol elefante alacrán iguana oruga	Encuentra y colorea dos días de la semana. manzana Lunes Miércoles José Colorea el dibujo que empieza con la letra A - a Colorea el dibujo que empieza con la letra E - e Busca el nombre de cada dibujo y enciérrolo con tu lápiz. oso sol elefante alacrán iguana oruga

Anexo 2. Correcciones del instrumento de reconocimiento

El instrumento de reconocimiento retoma los aspectos de: (1) lenguaje del azar (Ortiz y Alsina, 2017) que emplean los estudiantes al abordar situaciones aleatorias o no deterministas; (2) características generales de las intuiciones que los estudiantes manifiestan sobre el azar (Fischbein, 1987); (3) habilidades que tienen los estudiantes sobre experimentos relacionados con la aleatoriedad, la predicción e incertidumbre, esta últimas vistas como grandes ideas de la alfabetización probabilística (Gal, 2005), como parte de los elementos del estudio, teniendo en cuenta la tabla 6 del diseño del instrumento de reconocimiento.

Luego de realizar las entrevistas a los estudiantes del grupo de estudio, se evidencia que esta relación entre experimentos, grandes ideas, lenguaje del azar y características generales de la intuición no responden precisamente a dicha organización, pues las características de la intuición y las grandes ideas de probabilidad, son manifestados por los estudiantes en distintos experimentos a aquellos presentados previamente. Por tanto, se articulan las categorías de acuerdo a las concepciones deterministas sobre probabilidad (Savard, 2014). Recuperando tales concepciones, se reestructura la categorización de experimentos sustentadas en la articulación de estas en función ya no de los experimentos sino de las concepciones sobre probabilidad. De esta manera, a continuación se presenta una categorización más pertinente para la estructuración del instrumento:

Elementos cognitivos de Alfabetización Probabilística Gal (2002)		Lenguaje del azar			
		Imposible	Posible	Seguro	Incierto
Grandes ideas de Probabilidad	Aleatoriedad	D	IP	IP	D
	Predicción	R	R	D-R	I-IP
	Incertidumbre		D		R-I- IP
Concepciones: (IP): Interpretación personal- (R): Representatividad- (I): Independencia- (D): Disponibilidad. Savard (2014)					

Tabla 16. Modificación de la categorización de los experimentos.

Fuente. Creación propia, basada en Gal (2002), Savard (2014).

Esta nueva organización de las concepciones sobre probabilidad (Savard, 2014), considera los experimentos independientemente de su carácter aleatorio, ligado al objetivo de explorar estos aspectos mediante el instrumento, y favorece la

detección de las concepciones de los estudiantes, al articular las características de las intuiciones en función de las concepciones detectadas en el estudio.

Bajo estas categorías los experimentos en el diagnóstico no se modifican ni en su carácter ni en su organización, pues estas corresponden a los aspectos mencionados, y, además, gracias a que hay de tipo aleatorio y determinista favorece la caracterización de las capacidades de los estudiantes para diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas.

En este sentido, se presentan a continuación las preguntas orientadoras para cada experimento, con modificaciones, ya sea debido a errores de redacción o por su carácter reiterativo, lo que reduce los aportes a los objetivos del instrumento, pues, en su estructura semi abierta, genera distintas posibilidades en las respuestas.

ACTIVACIÓN DE RULETA (Versión inicial)	Versión ajustada
Etapas de inicio.	
• Si giramos la ruleta (imagen I) ¿cuál color será más probable que salga? (señalado en la ruleta) ¿Por qué?	• Cuando giremos la ruleta ¿cuál color saldrá? ¿por qué?
• Ahora escoge un color de la ruleta. Si tienes 5 intentos para que el color que elegiste salga ¿Crees que el color que escogiste saldrá en alguno de los intentos? ¿Por qué?	• Escoge un color de la ruleta. Con 5 intentos, ¿crees que ese color saldrá?
• ¿Crees que 5 intentos son suficientes para que salga el color que escogiste?	• ¿Son suficientes los intentos?
Etapas de desarrollo	
• -Ahora gira la ruleta.	
Etapas final	• ¿Por qué acertaste/ no acertaste?
• (Dependiendo de los resultados)	• ¿fueron suficientes los intentos? ¿necesitarías más? ¿cuántos? ¿por qué?
• -¿Por qué crees que acertaste/ no acertaste?	• ¿Con cuál color siempre ganarías? ¿por qué?
EXTRACCIÓN DE PIMPONES DE LA URNA	
Etapas de inicio Se explica el juego: En la caja -muestra la caja vacía- voy a poner esta cantidad de pimpones -señala los pimpones sobre la mesa-, usted escoge uno de los colores de los pimpones, luego tiene cinco intentos para acertar el color que sacará -extrae de la urna- de la caja.	Etapas de inicio Se explica el juego: En la caja -muestra la caja vacía- voy a poner esta cantidad de pimpones -señala los pimpones sobre la mesa-, usted escoge uno de los colores de los pimpones, luego tiene cinco intentos para acertar el color que sacará -extrae de la urna- de la caja.
• Si sacas uno de los pimpones ¿cuál crees que salga “de primeras”? ¿Por qué?	• ¿Cuál pimpón sacarás de primeras? ¿por qué?
• Ahora escoge un color de pimpón. Te voy a dar	• Escoge un color de pimpón. ¿Cinco intentos

5 intentos para que ese pimpón salga. ¿Crees que el pimpón -escogido- saldrá en alguno de los intentos? ¿Por qué?	serán suficientes para que saques ese pimpón? ¿por qué?
¿Crees que 5 intentos son suficientes para que salga el color que escogiste?	Se elimina [SE]
Etapas de desarrollo Los estudiantes realizan cinco extracciones sin reemplazamiento de pimpones.	
Etapas finales	
1 o 2 aciertos: ¿por qué te salieron tan pocos pimpones del mismo color?	¿por qué te salieron tan pocos pimpones del mismo color?
¿necesitas más intentos para sacar todos los pimpones del color que escogiste? ¿cuántos?	¿necesitas más intentos para sacar todos los pimpones? ¿cuántos?
3 o 4 aciertos: ¿qué hiciste para que te salieran tantos pimpones del mismo color?	¿cómo lograste sacar tantos pimpones?
¿te hacen falta intentos para sacar todos los pimpones del mismo color? ¿cuántos?	¿cuántos intentos necesitas para sacar todos los pimpones?
5 aciertos: ¿cómo lograste sacar todos los pimpones?	¿cómo lograste sacar todos los pimpones?
¿Qué te ayudó a ganar?	¿por qué ganaste?
Fase 2 (NO EQUIPROBABLES):	
Etapas de inicio ¿de cuáles pimpones hay mayor cantidad?	¿Cuál color de pimpón saldrá más veces?
¿Cuál pimpón es más seguro que salga en los cinco intentos?	Escoge un color de pimpón. ¿Con cinco intentos es suficiente para que salga el color que escogiste? ¿por qué?
Ahora escoge un color de pimpón. Te voy a dar 5 intentos para que ese pimpón salga. ¿Crees que el pimpón -escogido- salga en alguno de los intentos? ¿Por qué?	[SE]
¿Crees que 5 intentos son suficientes para que salga el color que escogiste?	[SE]
Etapas de desarrollo Los estudiantes realizan cinco extracciones sin reemplazamiento de pimpones.	
Etapas finales Dependiendo de los resultados:	
1 o 2 aciertos: ¿por qué te salieron tan pocos pimpones del mismo color?	¿por qué te salieron tan pocos pimpones del mismo color?
¿necesitas más intentos para sacar todos los pimpones del color que escogiste? ¿cuántos?	¿cuántos intentos necesitas para sacar todos los pimpones del color que escogiste?
3 o 4 aciertos: ¿qué hiciste para que te salieran tantos	¿qué hiciste para que te salieran tantos pimpones del mismo color?

pimpones del mismo color?	
¿te hacen falta intentos para sacar todos los pimpones del mismo color? ¿cuántos?	¿Cuántos intentos necesitas para sacar todos los pimpones que escogiste?
5 aciertos: ¿cómo lograste sacar todos los pimpones? ¿Qué te ayudó a ganar?	¿Por qué ganaste?
MONEDAS	
Etapas de inicio Se indican los lados de la moneda de acuerdo a las imágenes grabadas en la moneda. ¿Cuál es el lado que es más seguro que salga al lanzar la moneda?	
¿Importa cómo lanzas la moneda para que caiga en el lado que buscas?	Cuando lances la moneda ¿cuál lado saldrá más veces?
Luego se explica a los estudiantes que se apuestan cinco canicas que habrá en la mesa, y quien acierte en el lado gana la apuesta. Así mismo, se señala que en caso de empate se realiza un tercer lanzamiento para definir el ganador.	¿hay que lanzar de alguna manera la moneda para que aciertes?
Situación acierto en la predicción: “ganar”	¿con cuál lado es más probable que ganes las canicas? ¿por qué?
¿por qué estabas seguro de que ganarías la apuesta?	¿cómo evitar que empatemos?
¿cómo atinaste al resultado?	¿cómo asegurarte de ganar?
Etapas de desarrollo Los estudiantes y el docente realizan dos lanzamientos de moneda, en caso de empate realizan un tercer lanzamiento.	
Etapas final Dependiendo de los resultados Situación acierto en la predicción: “ganar”:	
¿por qué estabas seguro de que ganarías la apuesta?	¿por qué sabías que ganabas?
¿cómo atinaste al resultado?	¿cómo acertaste?
Situación desacierto en la predicción: “perder” ¿qué ocurrió para que perdieras?	¿por qué perdiste?
¿qué debiste hacer para ganar?	¿qué debiste hacer para ganar?
SITUACIONES NO ALEATORIAS	
TRES EN LÍNEA	
Etapas de inicio	
¿puede asegurar que alguien tiene más posibilidad de ganar?	¿Quién tiene más posibilidad de ganar? ¿por qué?
¿cuál es la mejor estrategia para ganar?	¿cuál es la mejor estrategia para ganar?

	¿por qué?
Etapa de desarrollo Los estudiantes y el docente ubican las fichas en el esquema de juego hasta agotar las fichas o ubicar tres en línea.	[SE]
Etapa final Dependiendo de los resultados: Situación de empate	¿sabías que íbamos a empatar? ¿por qué?
¿se podía saber que había empate antes de terminar el juego?	¿cómo evitar el empate?
¿qué se puede para evitar el empate?	
Pierde el estudiante ¿pudiste saber antes de que terminara el juego que habías perdido?	¿sabías que ibas a perder? ¿por qué?
¿qué debiste hacer para no perder?	¿cómo podías evitar perder?
Gana el estudiante ¿pudiste saber antes de que terminara el juego que ibas a ganar? ¿qué hiciste para ganar?	¿sabías que ibas a ganar? ¿por qué? ¿por qué ganaste?
El juego Nim	
Etapa de inicio	
¿se puede saber quién va a ganar el juego?	¿puedes saber quién va a ganar? ¿por qué?
¿cuál es la mejor estrategia para ganar?	¿cuál es tú estrategia para ganar?
Etapa de desarrollo Los estudiantes y el docente retiran fichas para hacer que el contrincante tome la última ficha.	
Etapa final Dependiendo de los resultados: Gana el estudiante ¿pudiste saber antes de terminar el juego quien iba a ganar?	¿sabías que ganabas antes de acabar el juego? ¿por qué?
¿cuál fue tu estrategia para ganar el juego? ¿por qué funcionó tu estrategia?	¿cuál fue tu estrategia para ganar el juego?
Pierde el estudiante ¿pudiste saber antes de terminar el juego quien iba a ganar?	¿sabías que perdías antes de terminar el juego? ¿por qué?
¿qué pudiste hacer para lograr ganar el juego? ¿por qué no funcionó tu estrategia?	¿qué debías hacer para ganar?

Anexo 3. Consideraciones éticas

De acuerdo con los principios establecidos en el Reporte Belmont (1978) y en la Resolución 0008493 de Octubre 4 de 1993: y debido a que esta investigación se consideró como Investigación sin riesgo y en cumplimiento con los aspectos mencionados con el Artículo 6 de la presente Resolución, este estudio se realiza conforme los siguientes criterio:

- Se ajustará a los principios científicos y éticos que la justifican.
- Se realizará solo cuando el conocimiento que se pretende producir no pueda obtenerse por otro medio idóneo.
- Deberá prevalecer la seguridad de los beneficiarios y expresar claramente los riesgos (mínimos), los cuales no deben, en ningún momento, contradecir el Artículo 11 de la Resolución.
- Contará con el Consentimiento Informado y por escrito del sujeto de investigación o su representante legal con las excepciones dispuestas en la presente resolución.
- Se llevará a cabo cuando se obtenga la autorización: del representante legal de la institución investigadora y de la institución donde se realice la investigación; el Consentimiento Informado de los participantes.

Bogotá, D.C.

18 de marzo de 2019

Consentimiento informado

Como parte de las estrategias implementadas para el mejoramiento académico e institucional del Programa Procesos Básicos, y, como parte del trabajo de grado para acceder al título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, yo Juan Carlos Martínez Suárez, docente a cargo del programa Procesos Básicos, por medio de este consentimiento informado, solicito permiso para hacer partícipe a su hijo(a), y emplear las producciones de este para el análisis y desarrollo del proyecto de investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de procesos básicos, cuyo objetivo es el de proponer herramientas y estrategias de enseñanza de la probabilidad en estos cursos ya que el programa como tal no contempla este campo de conocimiento.

Agradezco de antemano su colaboración y participación en este trabajo.

Yo _____ padre, madre o acudiente del estudiante _____, identificado con _____ de _____, autorizo al docente Juan Carlos Martínez, director a cargo del Programa Procesos Básicos, para hacer partícipe al estudiante y registrar y emplear las producciones de este, como herramientas de análisis y evidencias, para el trabajo de grado previamente descrito.