ESPECIALIZACIÓN DE ARGUMENTOS INDUCTIVOS DE ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO AL USAR GEOGEBRA EN TAREAS DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

CRISTIAN DAVID ÁVILA RISCANEVO

JAVIER ALONSO VARELA LEÓN

Trabajo de Grado para optar por el título de

Magister en Docencia de la Matemática

CLAUDIA MARCELA VARGAS GUERRERO

Directora

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ 2024

DEDICATORIA

A nuestros padres Leonor, Melquecidec, Amalia y Arturo, por cada momento de ausencia y por el distanciamiento experimentado durante este proceso.

RESUMEN

Esta investigación surge al evidenciar los bajos niveles de argumentación de los estudiantes del colegio en el que uno de nosotros trabaja. Nuestra propuesta está situada en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Nos propusimos caracterizar la Especialización de los argumentos inductivos de estudiantes de grado décimo del colegio, es decir, un aumento en la calidad de los argumentos producidos por los estudiantes. Para alcanzar el objetivo determinamos categorías con sus respectivos niveles de especialización en relación con los elementos estructurales de un argumento inductivo basándonos en el modelo de Toulmin, emergidos cuando se abordan temas relativos a las razones trigonométricas. Bajo la estrategia metodológica de experimento de enseñanza diseñamos una secuencia de tareas en GeoGebra que promovieron la generación de argumentos inductivos. Mismos que analizamos y caracterizamos usando las categorías establecidas. Estas categorías y la secuencia de tareas diseñada son de utilidad para especializar los argumentos inductivos de los estudiantes y son insumos para el diseño de tareas de argumentación, con el fin de especializar argumentos inductivos en diferentes contenidos matemáticos y de otros niveles de escolaridad.

Palabras clave: Especialización de Argumentos, Razones Trigonométricas, Argumento inductivo, GeoGebra.

ABSTRAC

This research arises from observing low levels of argumentation among students at the school where one of us works. Our proposal is situated within the framework of the Maestría en Docencia de la Matemática at the Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). We set out to characterize the specialization of inductive arguments made by tenth-grade students at the school, aiming to improve the quality of the arguments they produce.

To achieve this objective, we defined categories with their respective levels of specialization concerning the structural elements of an inductive argument, based on Toulmin's model, which emerged when addressing topics related to trigonometric ratios. Using the methodological strategy of a teaching experiment, we designed a sequence of tasks in GeoGebra that encouraged the generation of inductive arguments. These arguments were then analyzed and characterized using the established categories.

These categories and the designed task sequence are useful for refining students' inductive arguments and serve as resources for designing argumentation tasks to enhance inductive arguments in various mathematical topics and different levels of schooling.

Keywords: Argument Specialization, Trigonometric Ratios, Inductive Argument, GeoGebra.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN 1
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 3
   - Descripción del Problema 3
   - Justificación 9
   - Revisión de Antecedentes 13
   - Objetivos 17
3. MARCO DE REFERENCIA 19
   - Argumentación 19
     - *Argumento Inductivo* *21*
     - *Especialización de los argumentos* *22*
     - *Apoyo de GeoGebra en la producción de argumentos inductivos* *26*
   - Semejanza de triángulos y razones trigonométricas 27
4. METODOLOGÍA 30
   - Población y contexto 30
   - Panorámica Investigativa 31
   - Secuencia de tareas 33
     - *Tarea 1* *34*
     - *Tarea 2* *37*
     - *Tarea 3* *42*
     - *Tarea 4:* *45*
   - Experimentación de la secuencia de tareas 49
   - Análisis Retrospectivo y Producción de Resultados. 50
5. ANÁLISIS 51
   - Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 1 51
     - *Grupo 1* *51*
     - *Grupo 2* *58*
     - *Grupo 3* *64*
     - *Síntesis Tarea 1* *69*
   - Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 2 72
     - *Grupo 1* *72*
     - *Grupo 2* *78*
     - *Grupo 3* *84*
     - *Síntesis Tarea 2* *89*
   - Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 3 91
     - *Grupo 1* *91*
     - *Grupo 2* *98*
     - *Grupo 3* *102*
     - *Síntesis Tarea 3* *105*
   - Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 4 108
     - *Grupo 1* *108*
     - *Grupo 2* *113*
     - *Grupo 3* *120*
     - *Síntesis Tarea 4* *126*
6. SÍNTESIS DE RESULTADOS 130
7. CONCLUSIONES 133
8. REFERENTES 138

ANEXOS ..... A

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1 RESULTADOS EN COMPETENCIA ARGUMENTACIÓN EN RELACIÓN CON EL PROMEDIO DE LOS COLEGIOS MARISTAS. 4
TABLA 2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS POR CONOCIMIENTOS DE ESTUDIANTES DEL COLEGIO BICENTENARIO DE LA INDEPENDENCIA IED CON EL PROMEDIO DE LOS OTROS COLEGIOS MARISTAS 7
TABLA 3 CATEGORÍAS DE ESPECIALIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE UN ARGUMENTO INDUCTIVO 25
TABLA 4 TAREA 1 PROPUESTA EN GEOGEBRA ONLINE 35
TABLA 5 TAREA 2 PROPUESTA EN GEOGEBRA ONLINE 39
TABLA 6 TAREA 3 PROPUESTA EN GEOGEBRA ONLINE 43
TABLA 7 TAREA 4 PROPUESTA EN GEOGEBRA ONLINE 47
TABLA 8 SÍNTESIS DE LOS NIVELES DE LOS ARGUMENTOS INDUCTIVOS ENCONTRADOS EN LA TAREA 1 69
TABLA 9 SÍNTESIS DE LOS NIVELES DE LOS ARGUMENTOS INDUCTIVOS ENCONTRADOS EN LA TAREA 2 89
TABLA 10 SÍNTESIS DE LOS NIVELES DE LOS ARGUMENTOS INDUCTIVOS ENCONTRADOS EN LA TAREA 3 105
TABLA 11 SÍNTESIS DE LOS NIVELES DE LOS ARGUMENTOS INDUCTIVOS ENCONTRADOS EN LA TAREA 4 127

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1 CONSTRUCCIONES REALIZADAS POR ESTUDIANTE. 6
ILUSTRACIÓN 2 ESQUEMA DE UN ARGUMENTO EN EL MODELO DE TOULMIN (2003) 21
ILUSTRACIÓN 3 CARACTERIZACIÓN DE UN ARGUMENTO INDUCTIVO EN MODELO DE TOULMIN. TOMADO DE MOLINA ET AL (2024) 22
ILUSTRACIÓN 4 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS SEMEJANTES 28
ILUSTRACIÓN 5 PLAN DE EJECUCIÓN DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA. TOMADO DE CAMARGO (2021) 32
ILUSTRACIÓN 6 ARGUMENTO INDUCTIVO ESPERADO PARA LA TAREA 1, REPRESENTADO EN EL ESQUEMA DEL MODELO DE TOULMIN 37
ILUSTRACIÓN 7 ARGUMENTO INDUCTIVO ESPERADO PARA LA TAREA 2, REPRESENTADO EN EL ESQUEMA DEL MODELO DE TOULMIN 41
ILUSTRACIÓN 8 ARGUMENTO INDUCTIVO ESPERADO PARA LA TAREA 3, REPRESENTADO EN EL ESQUEMA DEL MODELO DE TOULMIN 45
ILUSTRACIÓN 9 ARGUMENTO INDUCTIVO ESPERADO PARA LA TAREA 4, REPRESENTADO EN EL ESQUEMA DEL MODELO DE TOULMIN 49
ILUSTRACIÓN 10 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO GRUPO 1 PARA LA TAREA 1 54
ILUSTRACIÓN 11 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO GRUPO 1 PARA LA TAREA 1 56
ILUSTRACIÓN 12 ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 2 PARA LA TAREA 1 62
ILUSTRACIÓN 13 ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 3 PARA LA TAREA 1 67
ILUSTRACIÓN 14 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 1 PARA LA TAREA 2 75
ILUSTRACIÓN 15 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 1 PARA LA TAREA 2 76
ILUSTRACIÓN 16 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 2 PARA LA TAREA 2 81
ILUSTRACIÓN 17 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 2 PARA LA TAREA 2 82
ILUSTRACIÓN 18 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 3 PARA LA TAREA 2 86
ILUSTRACIÓN 19 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO3 PARA LA TAREA 2 87
ILUSTRACIÓN 20 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 1 PARA LA TAREA 3 94
ILUSTRACIÓN 21 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 1 PARA LA TAREA 3 96
ILUSTRACIÓN 22 ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 2 PARA LA TAREA 3 100
ILUSTRACIÓN 23 ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 3 PARA LA TAREA 3 104
ILUSTRACIÓN 24 APLICATIVO ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN TAREA 4 108
ILUSTRACIÓN 25 ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 1 PARA LA TAREA 4 112

ILUSTRACIÓN 26 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 2 PARA LA TAREA 4 117
ILUSTRACIÓN 27 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 2 PARA LA TAREA 4 118
ILUSTRACIÓN 28 PRIMER ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 3 PARA LA TAREA 4 123
ILUSTRACIÓN 29 SEGUNDO ARGUMENTO INDUCTIVO DEL GRUPO 3 PARA LA TAREA 4 125

1. INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Grado surge de los bajos niveles de argumentación que se evidenciaron en el Colegio Bicentenario de la Independencia IED para el año 2022, a partir de los resultados obtenidos por los estudiantes en algunas pruebas internas, en las que se evidenció que la competencia con menor desempeño era la argumentación. Nos propusimos caracterizar la Especialización de los argumentos inductivos de estudiantes grado de décimo del colegio. La investigación está situada en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), es de tipo cualitativo con un enfoque fenomenológico y aproximación hermenéutica.

El Trabajo de Grado se compone de seis capítulos. En el Capítulo 1 exponemos el planteamiento del problema, suministramos evidencias empíricas e investigativas, ultimas desde lo investigado por Manrique y Medina (2017), Galvis (2019), Trigueros et al (2014), Goizueta y Planas (2013a), Cornejo-Morales et al (2021) y Lin (2018). Presentamos la justificación, la revisión de antecedentes y los objetivos que orientan nuestro trabajo.

En el Capítulo 2 establecemos el marco de referencia, en el que incluimos elementos sobre argumentación y argumentos inductivos. Determinamos categorías que permitan identificar el Nivel de especialización de un argumento inductivo, basándonos en los elementos estructurales de un argumento inductivo en el modelo de Toulmin. También, consideramos aportes de GeoGebra para la producción de argumentos. Para finalizar explicitamos el objeto matemático que abordaremos.

En el Capítulo 3, presentamos la metodología, describiendo la población y el contexto. Puntualizando la panorámica investigativa y estableciendo el experimento de enseñanza como estrategia metodológica. Siguiente a esto, se describe la secuencia de tareas que proponemos, puntualizando la forma de realizar el registro y el análisis de las respuestas obtenidas

Para el Capítulo 4, se presenta el análisis de las tareas. Para cada grupo se hace una descripción de la aplicación y las producciones realizadas por los estudiantes. Luego analizamos los argumentos producidos considerando las categorías construidas, considerando el aporte de GeoGebra y elementos del lenguaje usado. Finalizamos cada tarea presentando una síntesis de lo registrado en todos los grupos.

En el Capítulo 5 se exponen los resultados obtenidos en relación con la especialización de los argumentos inductivos de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia propuesta.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones que surgen de la investigación realizada. Estas giran en torno a los objetivos específicos planteados, destacando aspectos más relevantes. Finalizamos el capítulo con una reflexión personal que nos deja el trabajo realizado.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo, presentamos el planteamiento del problema que orienta esta investigación. Iniciamos con la descripción del problema, exponiendo la problemática que queremos atender, aportando diferentes evidencias empíricas e investigativas, algunas concepciones teóricas preliminares y planteamos la pregunta de investigación en la que se centrará nuestro trabajo. Enseguida, presentamos la justificación de estudio, en la que relatamos la importancia, viabilidad y pertinencia de nuestra investigación. Finalmente, en la revisión de antecedentes, exponemos aquellas investigaciones que aportan significativamente a nuestro trabajo.

Descripción del Problema

Como lo indican Manrique y Medina (2017), la argumentación no es un proceso al que los estudiantes estén acostumbrados. En su experiencia como docentes, identifican que los estudiantes no suelen construir razones que les ayuden a convencerse a ellos o a sus compañeros de sus afirmaciones; por el contrario, frecuentemente responden por responder sin estar seguros de las afirmaciones que dan. Pese a la importancia de la argumentación en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en la literatura especializada (ver Justificación), los autores señalan que muchos estudiantes presentan deficiencias en este proceso.

De modo similar, Galvis (2019) menciona que sus estudiantes presentan dificultades para argumentar, ya que las acciones presentadas al solucionar tareas no se relacionan con las propuestas con Molina y Samper (2019) en el proceso de argumentar: generar enunciados orales y escritos que relacionan proposiciones particulares y generales de un objeto matemático.

Los bajos niveles de argumentación de los estudiantes, se deben a que pocas veces están inmersos en actividades que permitan la producción de argumentos. Trigueros et al (2014), Goizueta y Planas (2013a) y Cornejo- Morales et al (2021) indican que la forma tradicional de enseñar las matemáticas, en muchos casos se enfoca en la memorización de algoritmos, aplicación de fórmulas y la resolución de problemas, dejando de lado la justificación y argumentación de procedimientos y propiedades de los objetos matemáticos. Los estudiantes no están acostumbrados a argumentar, ya que en muchas ocasiones no se les proporciona actividades atractivas para incitarlos a realizar este proceso (Lin, 2018).

La problemática descrita por Manrique y Medina (2017), Galvis (2019), Trigueros et al (2014), Goizueta y Planas (2013a), Cornejo-Morales et al (2021) y Lin (2018), también está presente en el colegio Bicentenario de la Independencia IED, institución administrada por la Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza. Durante los últimos dos años, los estudiantes de grado décimo y undécimo han presentado pruebas diagnósticas en las que se evalúan, a partir de preguntas de álgebra, cálculo, estadística y geometría, las competencias de interpretación, formulación - ejecución y argumentación.

Los resultados obtenidos por los estudiantes evidencian que el puntaje es menor al promedio de los otros colegios maristas en la competencia de argumentación. Por otro lado, el promedio obtenido para el último año ha disminuido con respecto al promedio del 2021 (ver la Tabla1).

Tabla 1 Resultados en Competencia Argumentación en relación con el promedio de los Colegios Maristas.

Competencia	Promedio Colegios Maristas	Bicentenario de la Independencia.
Argumentación 2021	37.22	34.82
Argumentación 2022	46.54	30.07

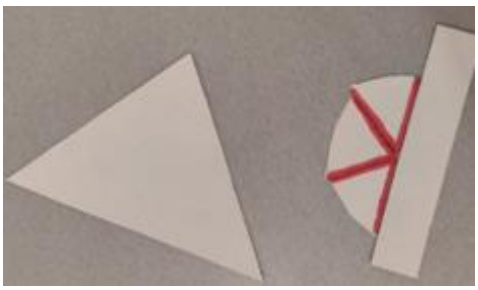
En el informe entregado por la Coordinación Nacional de Matemáticas, encargada de hacer las pruebas, se estableció que las preguntas que evaluaban esta competencia, al igual que en la prueba Saber 11°, buscaban evaluar la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias o soluciones, justificando por qué o cómo se llegó a estas.

El principal interés por practicar estas pruebas es que, dentro del contrato establecido con la Secretaría de Educación, un objetivo estratégico propuesto en la institución es mantener buenos resultados en las pruebas externas y un impacto positivo en los indicadores de acceso a la educación superior. Por tanto, tener un desempeño bajo en la competencia argumentación puede incidir de manera negativa en el alcance de ese objetivo.

Ante esta situación se generó un plan de acción, que consistió en crear espacios académicos en los que se pretendía potenciar las competencias con desempeño bajo, a partir del análisis de pruebas saber. Los profesores propusieron para el caso de la argumentación, proponer tareas en las que, para cada proceso realizado en el aula, los estudiantes debían presentar una justificación que da soporte a las acciones que propone para solucionar un problema. Pero a pesar de los esfuerzos de los profesores y la estrategia planteada, no se obtuvieron los resultados esperados. Para corroborar la deficiencia en la argumentación, decidimos aplicar una tarea que nos permitiera caracterizar los argumentos de los estudiantes.

Dimos un triángulo a 10 estudiantes y ellos en pareja tenían que hacer regletas con la medida de los lados y cuñas con la medida de los ángulos. Luego pedimos que construyeran un triángulo usando solo dos de los ángulos (cuñas). Los estudiantes hicieron la construcción solicitada y cuando se les preguntó qué sucedió con el ángulo restante del triángulo construido, concluyeron que el ángulo (cuña) que no usaron “coincidió” (es congruente) con el tercer ángulo del triángulo construido.

Luego planteamos a los estudiantes argumentar sobre este hecho. Para poder dar respuesta, los estudiantes intentan usar algunas de las definiciones y hechos geométricos estudiados en clases anteriores. Finalmente, ocho de los estudiantes hicieron la siguiente construcción y la relacionaron con los ángulos par lineal (ver Ilustración 2).



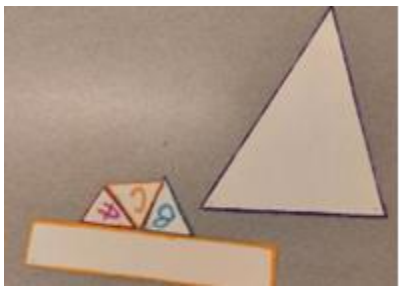


Ilustración 1 Construcciones realizadas por estudiante.

Dentro de los argumentos que presentaron los estudiantes se encuentran:

Pareja 1: "Creemos que con 2 ángulos se puede crear un triángulo y que coincida con el tercero porque vienen con medidas de un triángulo. Y esos 2 ángulos van en una medida en la cual el tercero coincide."

Pareja 2: "Si colocamos 2 ángulos distintos. Si lo sumamos. Podemos obtener el tercer ángulo. Si colocamos 2 ángulos distintos. Si los juntamos y sumamos, podemos sacar un tercer ángulo faltante. Que coincida con el ángulo del triángulo que construimos."

Pareja 3: "Hoy como nosotros, sólo usamos 2 ángulos, no importa si son iguales o no. Ya que se pueden acomodar de diferente forma y van a encajar como si hubiera utilizado el otro"

Los argumentos que presentan los estudiantes están basados en evidencias experimentables, son obtenidos a partir de la observación medición y/o experimentación (Pedemonte y Reid, 2011). Además, según Molina et al. (2024) un argumento debe constituir una aserción y las razones que las

sustentan. En consecuencia, observamos que las razones que entregan los estudiantes no son suficientemente convincentes como para sustentar la aserción.

Teniendo en cuenta lo anterior, la problemática que esta investigación atiende es el bajo nivel de argumentación de los estudiantes de grado décimo del colegio Bicentenario de la Independencia. Además, como se observa en la Tabla 2, los estudiantes presentan el promedio más bajo en la prueba de conocimientos básicos de geometría.

Tabla 2 Comparación de resultados por conocimientos de estudiantes del Colegio Bicentenario de la Independencia IED con el promedio de los otros Colegios Maristas

Conocimiento	Promedio Colegios Maristas	Bicentenario de la Independencia.
Algebra y Cálculo 2021	46.41	32.95
Álgebra y Cálculo 2022	45.18	34.70
Geometría 2021	42.53	28.35
Geometría 2022	39.59	30.06
Estadística 2021	52.62	39.09
Estadística 2022	49.68	41.89

Por tanto, al revisar los temas propuestos en los documentos institucionales para el grado décimo, elegimos un contenido relacionado con la geometría. De este modo, decidimos especializar[1] los argumentos de los estudiantes a partir del estudio de las razones trigonométricas directas desde la semejanza de triángulos.

En busca de una vía para solucionar la problemática, nos basamos en lo que propone Fiallo (2011), quien establece que el uso de Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) en el proceso de

[1] La especialización hace referencia a un aumento en la calidad de los argumentos que construyen los estudiantes. La definición se amplía en el Marco de Referencia.

enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas permite a los estudiantes tener herramientas para explorar y experimentar con objetos geométricos y numéricos, promoviendo la generación de conjeturas y, como establece Molina y Samper (2019), estas fomentan los procesos de argumentación en los estudiantes. Fiallo (2011) concluye que un factor que facilita a los estudiantes la creación de argumentos es la interacción con SGD, pues ayuda a los estudiantes a descubrir y verificar, descubrir invariantes conectar hechos geométricos y representar muchos ejemplos para un objeto geométrico. También, señala que la metodología de clase y las tareas diseñadas que promueven la discusión, impulsan a los estudiantes a justificar.

Ríos-Cuesta (2022) y Vargas y Gamboa (2013) plantean que aquellos estudiantes que interactúan con un SGD construyen principalmente, argumentos empíricos (derivados de la experimentación y visualización), mientras que los argumentos de estudiantes que usan lápiz y papel son autoritarios. Para Mariotti (2013) al usar un SGD en la solución de tareas surgen una red de significados que relacionan diferentes componentes de los objetos o procesos matemáticos. En lo que concierne a esta investigadora, el potencial de las herramientas de un SGD puede ser explotado por el profesor como una herramienta, permitiendo que los estudiantes lleguen a desarrollar los significados matemáticos propuestos en una tarea.

Los planteamientos de Ríos-Cuesta (2022) y Vargas y Gamboa (2013) ponen foco en el hecho de que los SGD son útiles para desarrollar procesos de exploración, experimentación y descubrimiento de invariantes. Al observar que los argumentos que construyeron nuestros estudiantes se basaban en aquellas características y propiedades que ellos podían observar, medir y comparar, decidimos optar por especializar argumentos inductivos porque estos tienen una fuerte relación con la experimentación. Es decir, se requiere evaluar casos, detectar invariantes a partir de

esos casos, generar expresiones generales a partir de los casos observados. Por lo cual, considéranos el uso de un SGD como GeoGebra en la posible solución de la problemática que describimos. Aprovechando el potencial de GeoGebra en la construcción de significado en relación con el objeto argumento.

Nuestro problema de investigación, que parte de la inquietud por mejorar los procesos de argumentación de los estudiantes, busca mejorar el nivel de especialización de los argumentos inductivos de los estudiantes de grado décimo, que promuevan la argumentación en torno a razones trigonométricas directas, usando GeoGebra. Para poder cumplir con lo anterior, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué nivel de especialización tienen los argumentos inductivos de los estudiantes de grado décimo del colegio Bicentenario de la Independencia IED, que surgen al desarrollar tareas mediadas con GeoGebra y enfocadas en razones trigonométricas?

Justificación

Para justificar nuestro Trabajo de Grado tomamos elementos de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el PEI de la institución en la que se desarrolló este Trabajo de Grado y de algunas investigaciones del Campo de la Educación Matemática. Estos documentos dejan ver la importancia, la pertinencia y la viabilidad de nuestra investigación. En primer lugar, exponemos la importancia de fomentar la argumentación inductiva en el aula de matemáticas; enseguida mostramos la pertinencia de nuestra investigación en la comunidad de investigadores; y finalmente presentamos la viabilidad para realizar nuestro trabajo de grado.

El MEN (1998) propone que la argumentación es importante en el aula, ya que fomenta la comunicación entre los estudiantes y el profesor. Al argumentar sobre conceptos y soluciones matemáticas, los estudiantes pueden aprender unos de otros y compartir diferentes perspectivas de

propiedades y aplicaciones de los objetos matemáticos. Lo anterior, permite establecer que para el MEN (1998) la argumentación es un proceso que debe estar presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Investigaciones sobre el tema corroboran lo dicho por el MEN. Por ejemplo, los estudios realizados por Salazar et al(2016) y por Crespo (2005) concluyen que la argumentación tiene importancia en el aula de matemáticas, pues aporta a los estudiantes elementos para reconocer diferentes formas de definir, brinda ejemplos, contraejemplos, proporciona relaciones de un concepto con otro y promueve refutaciones de este.

De manera similar, para Hänninen y Ilomäki, (2016), Schwarz et al (2010) y Lin (2018), la argumentación es un proceso que debe presentarse en el aula, dado que promueve la comprensión de conceptos matemáticos. Además, señalan que la argumentación permite a los estudiantes mejorar sus habilidades de comunicación, lo que les ayuda a presentar y justificar sus ideas de manera clara y coherente. En el mismo sentido, Solar et al (2017) destacan que la argumentación promueve una cultura del aula de matemáticas en la que la construcción del conocimiento se entiende como una actividad situada y reflexiva, en la que todos participan. Esta postura destaca la dimensión social de la argumentación, ya que implica que los estudiantes sean capaces de participar en la construcción de conocimientos matemáticos y se responsabilicen de su uso y justificación.

Los anteriores planteamientos dejan ver la importancia de la argumentación inductiva en el aula de matemáticas. Por lo tanto, realizar una investigación como la que aquí proponemos es relevante porque se sustenta en aspectos curriculares y en algunas líneas de investigación en educación matemática. En los párrafos siguientes presentamos la pertinencia de nuestra investigación, abordando algunos aspectos de la metodología a usar y de los intereses de la institución en la que se desarrollará la investigación.

Nuestro estudio es vigente porque, como pudimos rastrear en la consulta bibliográfica que hemos realizado, en la actualidad se reconoce a la tecnología digital (TD) como un apoyo innegable que permite a los estudiantes visualizar y explorar de manera interactiva representaciones de objetos geométricos, lo que facilita la comprensión, el razonamiento, la generación de conjeturas y la argumentación. En relación con lo anterior, Sandoval (2009), Fiallo (2011), Vargas y Gamboa (2013), Fiallo y Gutiérrez (2017), Cornejo-Morales et al (2021) mencionan que el uso de TD como GeoGebra, potencia la generación de argumentos. Los autores coinciden en que los estudiantes que solucionan tareas mediadas con TD se muestran más motivados a presentar justificaciones de conjeturas y a elaborar argumentos sobre propiedades de los objetos matemáticos y geométricos estudiados en clase de matemáticas. Por esta razón, nuestro trabajo de grado es pertinente, pues se centra en el uso de GeoGebra para potenciar la generación y especialización de argumentos en nuestros estudiantes.

Consideramos que en el campo de la educación matemática es necesario abordar escenarios que se centren en los campos menos explorados. Por ejemplo, Fiallo (2011) y Fiallo y Gutiérrez (2017) establecen que la cantidad de investigaciones que se pueden encontrar en torno a la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría mediada con geometría dinámica es poca, en relación con la que se ha generado en otros campos de estudio. Fiallo centra su estudio en el proceso de demostrar y propone que futuras investigaciones pueden enfocarse en otros procesos matemáticos relevantes en el aula. Aray et al (2020) establecen la necesidad de centrar el foco de estudio de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, en la comprensión y no en la memorización de fórmulas y algoritmos, permitiendo discusiones en las que los estudiantes puedan justificar características y argumentar sobre propiedades de los objetos estudiados.

También, encontramos que la calidad de los argumentos es un asunto que se ha investigado anteriormente. Aktamış y Hiğde (2015), en su estado del arte indican que se han diseñado algunos modelos de argumentación para identificar argumentos válidos y no válidos en diferentes ámbitos de la educación científica. Cervantes y Cabañas (2018) centraron su estudio en identificar y caracterizar los argumentos de sus estudiantes en formales o visuales. Los argumentos formales, para los autores, son aquellos que son soportados por elementos teóricos, mientras que los visuales hacen referencia a aquellos argumentos cuyas garantías son por lo general por hipótesis gráfica. Lin (2018) buscaba aumentar la calidad de los argumentos construidos por sus estudiantes en tareas de argumentación, para identificar la evolución adaptó los niveles de argumentación propuestos por Osborne et al (2004). Uzun y Tekerek (2023) establecieron el nivel de los argumentos de un grupo de futuros profesores de ciencias, emplearon el modelo turco de argumentación y diseñaron una rubrica que describe el nivel del argumento a partir de cuatro componentes (afirmación, evidencia, apoyo y refutación). Las anteriores investigaciones se enfocaban en fomentar la calidad de los argumentos -de tipo deductivo- construidos por estudiantes al solucionar algunas tareas. En el rastreo bibliográfico que realizamos no encontramos una investigación que se centre en la calidad de argumentos inductivos. Por lo tanto, una investigación como la nuestra es oportuna y atiende al llamado y necesidades investigativas del Campo de la Educación Matemática en cuanto busca identificar elementos que permitan determinar la calidad de argumentos inductivos.

Con respecto a la viabilidad, realizar nuestro Trabajo de Grado en el colegio Bicentenario de la Independencia IED es posible, ya que contamos con la autorización del equipo directivo del colegio. También, el colegio cuenta con 5 salas de sistemas con aproximadamente 30 computadores cada una, tres laboratorios cada uno con 20 tablets y una pizarra digital. Estos espacios pueden ser usados en la medida que se realice la reserva con anticipación. Además, el área de matemáticas tiene acceso permanente a uno de los laboratorios de la institución.

Por último, nuestro trabajo de grado se relaciona directamente con uno de los objetivos de un proyecto institucional planteado en el PEI del colegio. El Proyecto Juega y Construye la Matemática tiene como pilares recursos creados por los docentes y el apoyo de tecnologías digítales en las clases de matemáticas, propuesta que concuerda con el énfasis de la Maestría en Docencia de la Matemática cohorte 2023-1.

Revisión de Antecedentes

En este apartado presentamos una breve descripción de trabajos e investigaciones, que consideramos nos aportan elementos conceptuales y metodológicos para el desarrollo de nuestra investigación. En primer lugar, mostramos aquellos estudios relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. Enseguida, resaltamos trabajos que se centran en desarrollar procesos de argumentación, enfocándonos cuatro aspectos: el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), el modelo de Toulmin y la calidad de los argumentos inductivos.

La investigación desarrollada por López (2022) tenía como objetivo fortalecer el aprendizaje de las razones trigonométricas, mediante una estrategia didáctica llamada MatemaTIC, herramienta desarrollada con TD. En la estrategia se propuso el uso predominante del software GeoGebra, además, del aprendizaje por gamificación, guías didácticas y videos tutoriales. El autor inicialmente realizó una prueba diagnóstica para establecer los conocimientos en álgebra y geometría de los estudiantes de grado décimo, de la Institución Educativa Los Héroes (colegio del municipio de Pupiales en el Departamento de Nariño). Luego, los estudiantes debieron desarrollar cuatro actividades mediadas con TD. Finalmente, los estudiantes desarrollaron una prueba escrita para determinar el impacto de la estrategia MatemaTIC. López concluyó que el uso de GeoGebra fortalece el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, pues permite al estudiante realizar conjeturas en torno a los objetos estudiados.

El estudio presentado por López (2022), tuvo diferentes aportes a nuestro trabajo de grado. En primer lugar, nos da una pauta sobre los contenidos que se deben proponer en tareas que se centran en las razones trigonométricas. También, nos motivó a contribuir en aspectos que el autor no tiene presente en su investigación, como el proceso de argumentar y la generación de espacios en los que los estudiantes puedan discutir alrededor de los resultados obtenidos en las tareas propuestas.

Fiallo (2011) en su tesis doctoral, asumió como objetivo aportar información para mejorar la comprensión del aprendizaje de la demostración en el contexto del estudio de las razones trigonométricas, en un ambiente de geometría dinámica. Para dar cumplimiento a su objetivo diseñó, implementó y evaluó una propuesta de unidad de enseñanza de las razones trigonométricas, enfocada en habilidades de demostración usando Cabri. La unidad de enseñanza contó con 6 tareas compuesta cada una con por lo menos cinco tareas específicas. La propuesta fue implementada con 17 estudiantes de grado décimo de un colegio de Floridablanca Santander. Los estudiantes en parejas, con la orientación de un profesor (que no es el investigador), solucionaron las diferentes tareas propuestas. El investigador realizó registros de audio y video y recolectó las hojas con las soluciones que los estudiantes proponían. Para analizar los datos, Fiallo construyó esquemas de argumentación de Toulmin y los relacionó con esquemas de demostración, a partir de las transcripciones de las soluciones que dan los estudiantes a algunos problemas de conjeturación. Entre las conclusiones, Fiallo señaló que los estudiantes, en términos nuestros, especializan sus argumentos en la medida que solucionan tareas con Cabri. Pasan de argumentos inductivos a argumentos deductivos. También concluyó, que los esquemas globales de argumentación de Toulmin que diseñó permitieron identificar la conexión entre cada argumento, además de categorizarlo en inductivo y deductivo.

La investigación realizada por Fiallo (2011) aportó elementos considerables a nuestro trabajo de grado. Su marco de referencia nos brindó referentes significativos sobre argumentación matemática, geometría en el estudio de las razones trigonométricas y el uso e importancia de la geometría dinámica en clase de trigonometría, aspectos que se vuelven fundamentales en nuestro marco de referencia. Y nos permitió identificar una estrategia de análisis de argumentos como el modelo global de argumentación de Toulmin.

Lin (2018) buscó que sus estudiantes puedan construir argumentos de calidad. Para esto propone dos criterios: el primero, se relaciona con los elementos estructurales de un argumento bajo el modelo de Toulmin y el segundo, se basó en la capacidad de defender las creencias propias. Un argumento que se constituye únicamente de una afirmación presenta un nivel inferior que uno que, en su estructura tenga y soporte refutaciones (Lin, 2018). En este estudio se analizó la calidad de los argumentos, estableciendo cuatro niveles, para cuatro componentes (exactitud de la garantía, validez de las matemáticas, refutaciones, y componentes del modelo de Toulmin). Este investigador, se interesó en que los argumentos que construían sus estudiantes en algunas tareas de conjeturación se convirtieran en argumentos- de tipo deductivo- en los que la garantía fuera válida y no plausible, y en el que las matemáticas que se usaban fueran precisas y relevantes.

Uzun y Tekerek (2023) buscaban identificar el nivel de argumentación de un grupo de 30 profesores en formación de ciencias de una universidad estatal de Turquía. Como herramientas de recolección de datos usaron hojas de actividades que incluía conceptos de ciencias y matemáticas que se integraron; también, diseñaron y aplicaron una entrevista semiestructurada. Para analizar los datos, los investigadores adaptaron la Rúbrica del Modelo de Argumentación Turca. La rúbrica contemplaba cuatro componentes: Aserción; en con el contenido teórico que se presenta en la aserción, si da o no respuesta al objeto estudiado. Evidencia; que caracterizaba el origen de las

razones que sustentan la aserción. Apoyo; que analizaba la calidad conceptual del respaldo y Refutaciones; que daba respuesta a las explicaciones que se presentan en caso de haber refutaciones para soportar el argumento.

Las investigaciones de Lin (2018) y de Uzun y Tekerek (2023) nos permitieron vislumbrar algunos componentes que deben tenerse en cuenta para analizar la calidad[2] de los argumentos inductivo construidos por los estudiantes.

Acosta et al (2017) en su estudio presentan como objetivo caracterizar la influencia de una secuencia tareas, basada en el uso del software GeoGebra, sobre el aprendizaje de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Los autores diseñan y aplican la secuencia que constó de dos partes; en la primera se comprobaron los conocimientos previos y en la segunda se familiarizó a los estudiantes con los comandos de GeoGebra. Luego se aborda la temática a trabajar con actividades complementarias. Parte de las conclusiones menciona la facilidad que tiene la realización de las tareas al momento de usar GeoGebra, no obstante, se resalta la dificultad de los estudiantes al expresar las razones trigonométricas en forma de cocientes.

El trabajo de Acosta et al (2017) nos permite establecer un referente de la estructura que deben tener los enunciados de las posibles tareas, pensando en la solución a la problemática abordada en nuestro trabajo de investigación.

En segundo lugar, Vargas et al (2022) comunicaron en un cursillo, algunos factores que contribuyen al diseño de tareas que buscan la producción de argumentos. A partir de la ejemplificación de dos enunciados de tarea, estos investigadores pretendían mostrar la posibilidad de construir enunciados de tareas de argumentación que no tengan la alocución “por qué”. Dentro

[2] La calidad de un argumento alude a qué tan fuerte es argumento inductivo dentro de una comunidad de referencia. Esta definición se amplía en el Marco de Referencia.

de las conclusiones destacaron dos ideas. En la primera hacían referencia acerca de las alternativas para formular enunciados de tareas que promuevan la construcción de argumentos. Preguntar "por qué" no es suficiente, ya que puede generar que el estudiante haga una descripción. El interrogante debe acompañarse de algunas indicaciones que presenten la necesidad de explicitar que se afirma y que razones sustentan esa afirmación (Vargas et al, 2022).

En concordancia con lo anterior, Molina y Samper (2019) presentaron una relación entre el tipo de problemas abiertos de conjeturación en geometría y las clases de argumentos producidos. Para sustentar su idea expusieron la solución propuesta por estudiantes de un curso de geometría de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Los problemas propuestos involucran el objeto mediatriz de un segmento. Dentro del sustento teórico estos investigadores asumen una postura sobre problema abierto de conjeturación, argumento deductivo, argumento inductivo y argumento abductivo. El estudio se hizo a partir de un experimento de enseñanza, planearon diseñaron e implementaron una secuencia de tareas y los datos que analizaron fueron las producciones escritas de los estudiantes en las que se presentan las soluciones a tres problemas propuestos por los autores. Molina y Samper (2019) describen el tipo de argumentos que se genera en problemas de búsqueda del consecuente, problemas de búsqueda del antecedente y problemas de determinación de dependencia.

Las investigaciones de Vargas et al (2022) y Molina y Samper (2019) se convirtieron en herramienta relevante para diseñar la secuencia de tareas que proponemos. Además, nos permitieron hacer un rastreo bibliográfico para asumir una postura de tarea de argumentación.

Objetivos

Objetivo General: Caracterizar la especialización de los argumentos inductivos de los estudiantes de grado décimo del colegio Bicentenario de la Independencia IED, al momento de resolver tareas de razones trigonométricas directas mediadas con GeoGebra.

Para alcanzar el anterior objetivo nos hemos propuesto los siguientes *objetivos específicos*.

a) Diseñar un conjunto de tareas de argumentación sobre razones trigonométricas directas para grado décimo, haciendo uso del software GeoGebra, que promuevan la generación de argumentos inductivos.
b) Establecer niveles que permitan caracterizar la especialización de los argumentos inductivos de los estudiantes de grado décimo al solucionar la secuencia de tareas de argumentación sobre razones trigonométricas directas.
c) Describir y analizar los argumentos construidos por los estudiantes en el proceso de solución de la secuencia de tareas, a partir de los niveles que permiten determinan la especialización de argumentos, destacando el aporte de GeoGebra en este proceso.

3. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo presentamos tres secciones los fundamentos conceptuales que sustentan los elementos relevantes de nuestra investigación. En la primera sección, exponemos la postura que asumimos sobre argumentación y argumento inductivo. A partir de estas concepciones iniciales, presentamos la estructura funcional del Modelo de Toulmin para argumentos simples. En la segunda sección, proponemos una definición de argumento deductivo e inductivo de calidad, estableciendo para cada uno niveles que determinan el grado de especialización. Identificamos el potencial que tiene GeoGebra en la producción de argumentos y finalizamos con el concepto matemático que abordaremos.

Argumentación

Algunas de las reformas curriculares en educación matemática ponen el foco de interés en la enseñanza y aprendizaje de la argumentación matemática en diferentes grados escolares y de educación superior (Lin, 2018; Schwarz y Prusak, 2010; Uzun y Ukerek, 2023). Para Fiallo y Gutiérrez (2017), la necesidad de hablar de argumentación en matemáticas radica en la caracterización de los procesos no demostrativos que surgen en la resolución de diferentes tareas.

Algunos autores han definido argumentación matemática, en este estudio adaptamos caracterizaciones anteriores (Cornejo-Morales y Goizueta, 2019; Goizueta y Planas, 2013b; Cornejo-Morales et al., 2021). Entendemos la argumentación matemática como una actividad comunicativa y situada por medio de la cual un grupo de personas entregan razones (para otros o para sí mismos) con el fin de convencer o convencerse sobre cierta posición. El elemento central de la argumentación es el argumento y la definición que asumimos de argumento es la propuesta por Molina et al (2024):

> [Consideramos] argumento como una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La aserción se presenta de una de tres maneras: como una proposición (esto es, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; como una oración en la que se plantea una postura; o como una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las razones se pueden presentar como oraciones (sean o no proposiciones) o como acciones. El conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de una aserción conforman la justificación de la aserción. (p. 157)

La anterior definición se relaciona con lo que proponen Pedemonte (2002), Fiallo (2011), Knipping y Reid (2015) y Molina y Samper, (2019) quienes establecen las características estructurales del argumento a partir del modelo de Toulmin (2003). Para estos autores, un argumento simple presenta la siguiente estructura ternaria.

i. *Aserción (A);* la proposición, enunciado o acción que proporciona el interlocutor y de la que se puede determinar su valor de verdad
ii. *Dato (D);* información que sirve como evidencia de A
iii. *Garantía (G);* la garantía autoriza el paso entre D y A.

Toulmin (2003) establece que el dato y la garantía son elementos que sustentan la aserción. Si un interlocutor realiza una aserción y se le cuestiona sobre la veracidad de esta, puede ofrecer el dato o la información sobre la que se basa la afirmación como elemento que justifica y de esta manera disipar las dudas de la audiencia. En el caso que el dato no sea suficiente, el interlocutor se ve en la necesidad de reforzar la base sobre la cual ha elaborado la aserción, es decir, indicar la relación entre el dato y la afirmación realizada. Por lo tanto, el interlocutor debe presentar enunciados de carácter general (en algunas ocasiones hipotéticos) que actúen como puente entre el dato y la aserción, autorizando el tipo de paso entre estos elementos. Los enunciados pueden ser

reglas, principios, definiciones, inferencias, hipótesis, etc., que se denominan garantía del argumento.

El esquema ternario se puede representar así:

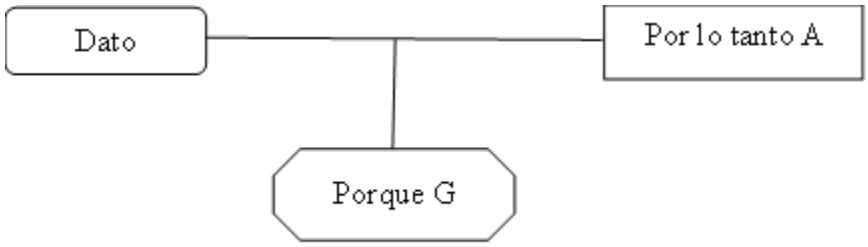


Ilustración 2 Esquema de un argumento en el Modelo De Toulmin (2003)

Además de la aserción, la garantía y el dato, Toulmin (2003) menciona elementos auxiliares que pueden estar presentes en la elaboración de un argumento (calificador, condiciones de refutador y soporte), que no se describen en este documento debido a que no se utilizan en esta indagación.

Argumento Inductivo

Diferentes investigaciones en el campo de la Educación Matemática han ratificado la relevancia del Modelo de Toulmin para caracterizar los tipos de argumentos deductivos, abductivos e inductivos (Pedemonte, 2002; Fiallo, 2011; Knipping y Reid; 2015; Hernández y Parra, 2013; Molina y Samper, 2019; Lin, 2018; Molina et al, 2024). Para esta investigación abordaremos sólo argumentos inductivos.

Molina et al. (2024) indican que en un *argumento inductivo* se cuenta con la información en calidad de dato (aceptada como verdadera), a partir de esa información se infiere un patrón de generalidad que autoriza la inferencia de una aserción, para ambos casos se trata de una inferencia plausible. El rasgo clave de este tipo de argumento es la identificación del patrón de generalidad a

partir del dato. Los investigadores indican que un argumento simple inductivo puede ser enunciado de la siguiente forma.

> Los elementos de A tienen el atributo p, *algunos* elementos de A tienen el atributo q, de *otros* elementos de A, no se sabe si tienen el atributo q, por lo tanto, al menos *otro* elemento de A también tiene el atributo q puesto que *los* elementos de A tienen el atributo q. (Molina et al., 2024; p. 162)

La *ilustración 5,* representa el esquema de un argumento inductivo en el Modelo de Toulmin, que proponen los autores a partir de la caracterización del enunciado anterior.

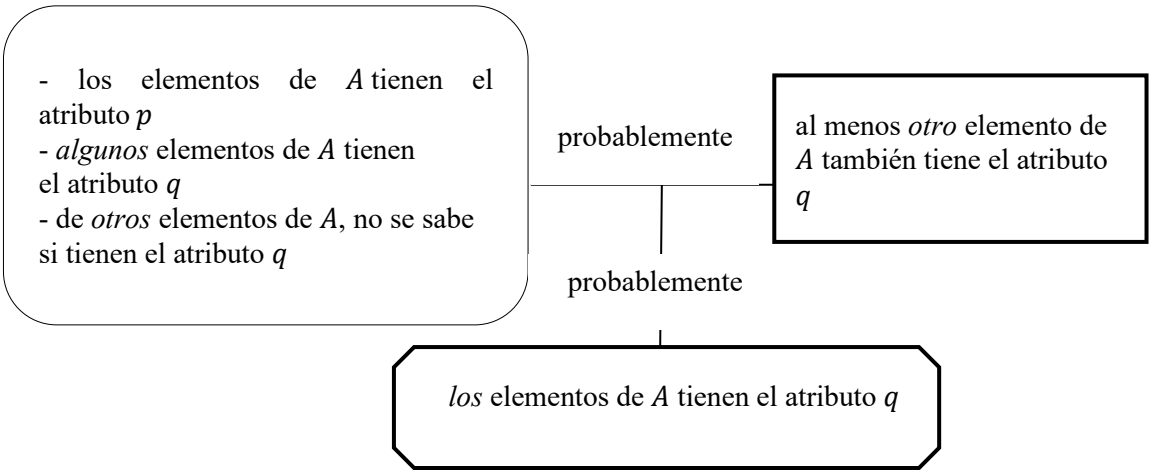


Ilustración 3 Caracterización de un argumento inductivo en Modelo de Toulmin. Tomado de Molina et al (2024)

Especialización de los argumentos

En las últimas décadas, la argumentación matemática se caracterizó por muchos investigadores como una de las actividades de mayor importancia para ser desarrollada por los estudiantes. Además, la caracterización, análisis y/o evaluación de la argumentación ha sido uno de los puntos focales que ha interesado a diversos autores (Ríos-Cuesta, 2022). Algunos representantes de la línea de estudio de Argumentación y Prueba (Osborne et al., 2004; Knipping, 2008; Lin, 2018; Cervantes y Cabañas, 2018, Uzun y Tekerek, 2023) han identificado la calidad de la argumentación como una herramienta que permite no solo caracterizar los argumentos que se emiten en una

actividad matemática, sino que también les ha permitido establecer niveles que den cuenta de la (mayor o menor) calidad de un argumento.

Para Bridging Math Practices Math-Science Partnership Grant (2015) la calidad de un argumento matemático está condicionada por la veracidad o fuerza de la conclusión[3] presentada, dejando poco margen para la generación de refutaciones, y en el caso que surjan, el argumento debe contar con los soportes de la garantía que permitan disiparlas. Este conjunto de características nos permite definir la *especialización de los argumentos* como el aumento en la calidad de los argumentos que son construidos en una actividad de argumentación.

Por otro lado, para definir argumento inductivo de calidad, tomamos la postura de Iacaona (2018) en relación con la fuerza de un argumento producto de un proceso inductivo:

> Decir que una proposición es resultado de una inducción significa que las proposiciones de las cuales se infiere proporcionan razones que no son decisivas para aceptarla; esto es que su verdad está garantizada de una u otra forma, pero no completamente, por la verdad de las proposiciones de las cuales se infiere. En este caso no se puede excluir la posibilidad de que las proposiciones iniciales sean verdaderas y la proposición inferida sea falsa. Más bien, la verdad de las proposiciones iniciales hace más probable la verdad de la proposición inferida. A un argumento con la inferencia legítima en el sentido inductivo se le llama fuerte. El criterio inductivo de fuerza puede ser formulado como sigue: *Un argumento es fuerte si y sólo si es improbable que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa*. (pg. 67)

Lo anterior nos permite establecer que un *argumento inductivo de calidad* es aquel en el cual es altamente probable que asumiendo unas razones como verdaderas (dato), lo inferido (garantía y aserción) sea verdadero. Por lo tanto, los niveles de especialización deben permitir identificar que

[3] El autor hace referencia a la aserción del argumento, pero, dado que en este trabajo la conclusión puede la garantía y la aserción, por lo tanto, hemos ampliado esta parte de la definición.

tan relevantes y fuertes son cada uno de los elementos estructurales del argumento inductivo y cómo aportan a aumentar la probabilidad mencionada.

Lin (2018), en su estudio para determinar la especialización de los argumentos deductivos de sus estudiantes al solucionar algunas tareas, toma como base los niveles propuestos por Osborne et al (2004) y propone cuatro niveles que pueden indicar que tan especializado es el argumento a partir de cuatro componentes de análisis. Los componentes propuestos por el investigador (exactitud de la garantía, validez de la aserción, tipos de refutación, completitud de elementos del Modelo de Toulmin) se relacionan con algunos de los elementos que se presentan en esquema de un argumento completo del Modelo de Toulmin. En nuestra propuesta para especialización de argumentos inductivos incluimos los componentes *Dato*, *Casos observados, Patrón de Generalidad y Aserción*, pero los redefinimos para que fueran pertinentes para los argumentos en los que se enfoca esta investigación. Incluimos el *Patrón de Generalidad*, ya que se relaciona directamente con la garantía de un argumento y los *Casos Observados*, para garantizar el proceso inductivo en la construcción del argumento.

En primer lugar, consideramos que el dato estará especializado, si se explicitan los diferentes elementos que lo componen teniendo en cuenta la definición de argumento inductivo asumida. En esta categoría no incluimos el elemento adicional del conjunto referencial, ya que en la construcción del argumento termina estando muy ligado a la explicitación de la aserción. En segundo lugar, el grado de aceptabilidad del argumento aumentará si se puede evidenciar una cantidad considerable de ejemplos que cumplen con los atributos descritos en el dato. En un nivel inferior se encuentra la exploración de un solo caso, ya que no se cumpliría con el proceso inductivo. Al revisar únicamente dos ejemplos se estaría cumpliendo con los requisitos mínimos para realizar una inducción por lo tanto habría mayor nivel de especialidad. Si se exploran tres o más casos el nivel será mayor y se

alcanza el máximo nivel de especialidad si se enfoca la exploración en la búsqueda de contraejemplos (búsqueda de casos en los que no se cumple lo observado).

En relación con el patrón de generalidad, se debe expresar una relación de dependencia entre el conjunto referencial y atributo descubierto. Si no se expresa patrón de generalidad el nivel será mínimo, ya que el argumento inductivo estaría incompleto. En niveles de especialidad superiores se encuentran cuando se expresan proposiciones simples y/o conjunciones entre proposiciones simples en las que se explicitan el atributo definitorio y/o el adicional. Y se alcanza el máximo nivel de especialidad cuando se propone una relación de dependencia en la que el atributo descubierto depende del atributo que define el conjunto referencial. Finalmente, la aserción debe presentar de manera explícita o implícita la existencia por lo menos un elemento que cumpla que perteneciendo al conjunto referencial, también cumpla el atributo descubierto.

En la Tabla 3, presentamos una categorización construida por nosotros que permite identificar el grado de especialidad de los argumentos inductivos.

Tabla 3 Categorías de especialización de los elementos estructurales de un argumento inductivo. Elaboración propia

Componente de nivel	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Dato	No se logra identificar un conjunto referencial, ni un atributo que cumplen algunos de los elementos del conjunto.	Se reconoce un conjunto referencial, pero no se logra identificar un atributo adicional que cumplen algunos elementos del conjunto.	No se reconoce el conjunto referencial, pero se identifica el atributo adicional que cumplen algunos de los elementos del conjunto.	Se reconoce el conjunto referencial y el atributo adicional que cumplen algunos elementos del conjunto
Casos Observados	El patrón de generalidad o la aserción se propone luego de observar un solo caso.	El patrón de generalidad o la aserción se propone a partir del estudio de únicamente dos	El patrón de generalidad o la aserción se propone a partir del estudio de tres o más elementos	El patrón de generalidad o la aserción se propone a partir del estudio de 3 o más elementos del conjunto referencial,

		elementos del conjunto referencial.	del conjunto referencial.	y de la búsqueda de un contraejemplo.
Patrón de generalidad	No se propone un patrón de generalidad	Reporta el patrón de generalidad como una proposición simple.	Reporta como patrón de generalidad una conjunción conformada por el atributo que define al conjunto referencial y el atributo descubierto; o el patrón de generalidad expresa una relación en el cual el atributo que define el conjunto referencial depende del atributo descubierto.	Reporta como patrón de generalidad una relación de dependencia en el que el atributo descubierto depende del atributo que define el conjunto referencial.
Aserción	No se propone una aserción.	La aserción propuesta expone solamente la existencia un elemento que cumple el atributo definitorio del conjunto referencial, sin asignarle el atributo adicional encontrado.	La aserción asigna un atributo a un elemento del conjunto referencial que no corresponde al atributo adicional encontrado en los casos estudiados.	La aserción propuesta expone la existencia de por lo menos un elemento adicional del conjunto referencial que cumpla el atributo inferido.

Apoyo de GeoGebra en la producción de argumentos inductivos

Pihno y Moretti (2020) señalan algunos potenciales de GeoGebra. En primer lugar, hacen referencia a la posibilidad de modificar objetos manteniendo atributos específicos invariantes. La herramienta mover brinda la posibilidad de proponer tareas en las que los estudiantes puedan modificar algunos objetos presentados y a partir de la exploración de varios casos, identificar relaciones de dependencia, invariantes, atributos y características de los objetos presentados en pantalla, que pueden ser enunciados en el dato o en el patrón de generalidad al construir un argumento inductivo.

GeoGebra también permite redondear o truncar números, mostrando entre cero y quince cifras decimales. La pantalla de la computadora es un conjunto finito de puntos (pixeles) que generan

las imágenes que se presentan, este conjunto no es denso, por lo tanto, el proceso de medición puede verse afectado (Pihno y Moretti, 2020). En este sentido la herramienta redondear se vuelve útil cuando en un proceso de exploración y conjeturación se compara la medida de dos o más objetos geométricos para establecer regularidades o generalidades.

Además, GeoGebra tienen la posibilidad de mostrar únicamente algunas herramientas. Posibilidad que permite en el diseño de tareas se muestren las herramientas necesarias para que la exploración y verificación de propiedades de los objetos tenga la menor cantidad de distractores. Por ejemplo, si lo que se pretende es que visualizar como cambia la medida de uno de los lados de un triángulo cuando se mueve uno de sus vértices, hay herramientas que no son necesarias y que se convierten en distractores en la solución de la tarea.

Dentro de GeoGebra Online encontramos algunos componentes que serán de ayuda para contribuir en la construcción de argumentos por parte de los estudiantes. La versión online permite la creación de actividades con preguntas abiertas que el estudiante puede responder de manera escrita, quedando el registro de las respuestas de los estudiantes. De esta manera, cuando el estudiante lee sus respuestas se pueden presentar modificaciones en el discurso ya que el objetivo es que lo que quiera comunicar sea claro para un tercero en nuestro caso, el profesor.

Semejanza de triángulos y razones trigonométricas

En nuestra investigación se abordarán las razones trigonométricas directas desde la semejanza de triángulos. Por tanto, presentamos como se construye esta relación y exponemos las proposiciones que se abordaran en la secuencia de tareas.

Proyectando los lados del ángulo $\angle A$ de $\triangle ABC$ y trazando segmentos perpendiculares $\overline{B'C'}$ y $\overline{B''C''}$ al segmento $\overline{AB}$, se obtienen triángulos rectángulos semejantes como muestra la *Ilustración 4*. Se puede demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$, de tal modo que podemos obtener las

siguientes proporciones $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}$. Considerando a Moise y Downs (1986) las razones trigonométricas pueden verse como una extensión del concepto de semejanza de triángulos. Los valores obtenidos en las proporciones en un triángulo rectángulos no dependen de la longitud de los lados del triángulo sino de los ángulos de este, es decir, las relaciones para los lados de un triángulo rectángulo son invariantes para ángulos iguales. La anterior propiedad es la que se refleja en la definición de las razones trigonométricas.

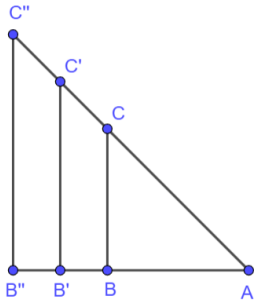


Ilustración 4 Triángulos rectángulos semejantes

Considerando el triángulo rectángulo $\measuredangle ABC$. Las razones trigonométricas directas para los ángulos agudos $\angle A$ y $\angle C$ son:

- **Seno**

  Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

  $sen\ A = \frac{BC}{AC}$

  $sen\ C = \frac{AB}{AC}$

- **Coseno**

  Es la razón entre el adyacente y la hipotenusa.

  $cos\ A = \frac{AB}{AC}$

  $cos\ C = \frac{BC}{AC}$

- **Tangente**

  Es la razón entre el opuesto y el cateto adyacente y la hipotenusa.

  $tan\ A = \frac{BC}{BA}$

  $\tan C = \frac{BA}{BC}$

Para abordar las razones trigonométricas iniciaremos con los siguientes criterios de semejanza de triángulos.

Criterio Lado - Lado - Lado: Dado ΔABC y $\Delta A'B'C'$. Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Criterio Ángulo - Ángulo: Dado ΔABC y $\Delta A'B'C'$. Si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Luego de construir la definición de las razones trigonométricas directas se trabajarán las siguientes proposiciones.

Proposición 1: Dado $\measuredangle ABC$, si $AB = CB$ entonces $\tan(m\angle A) = 1$ y $\tan(m\angle C) = 1$.

Proposición 2: Dados ΔABC y ΔDEF, si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ y $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$.

Proposición 3: Dado $\measuredangle ABC$, si $sen(m\angle A) = \cos(m\angle C)$ entonces $m\angle A + m\angle C = 90°$.

4. METODOLOGÍA

En este capítulo presentamos la metodología de investigación. Iniciamos con la descripción de la población involucrada. Luego, exponemos la naturaleza del estudio que realizamos e indicamos el enfoque, la aproximación y la estrategia investigativa. Enseguida, explicitamos la secuencia de tareas que proponemos y finalmente, dejamos ver la forma en la que se llevó a cabo el registro y análisis de los datos.

Población y contexto

Nuestra investigación se desarrolló en el colegio Bicentenario de la Independencia IED de la ciudad de Bogotá, en localidad de Bosa, con 9 estudiantes de grado décimo (14-18 años). Se desarrollaron 7 sesiones de 2 horas cada una, durante el primer semestre del 2024, en un espacio extracurricular. Para seleccionar a los participantes, se invitó a un grupo de estudiantes que se caracterizan porque al momento de solucionar diferentes tareas matemáticas tienden a expresar sus aportes, inquietudes y razonamientos en voz alta. Este aspecto es relevante para nuestra investigación ya que analizamos las expresiones discursivas que los estudiantes emiten en la solución de algunas tareas de argumentación. Los nueve estudiantes seleccionados aceptaron voluntariamente esta invitación. Durante cada sesión, ellos trabajaron en tres grupos. El grupo 1 estuvo conformado por Hany, Raul y Keith; el grupo 2 por Nidia, Tomás y Saul; y el grupo 3 por Ilenia, Carlos y Joaquín.[4].

Uno de nosotros fue profesor de matemáticas de los participantes de la investigación durante los dos años previos, lo cual nos permite caracterizar las clases de geometría en las que ellos estuvieron involucrados. En grado octavo, los estudiantes debían construir un sistema axiomático y a partir de este realizar algunas demostraciones. En ese curso también se desarrollaron actividades

[4] Seudónimos

enmarcadas en la construcción de definiciones a partir de ejemplos y no ejemplos o la identificación de características mínimas para definir un objeto geométrico. En este curso los estudiantes usaban GeoGebra esporádicamente dependiendo de la disponibilidad de las salas de informática de la institución. En grado noveno la interacción con GeoGebra aumentó; llegaron a proponer algunas conjeturas para el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, la desigualdad triangular y algunos de los criterios de congruencia de triángulos.

Con respecto a la metodología de clase de geometría, algunas eran magistrales, en otras se usaba material concreto y en otras los estudiantes exploraban construcciones realizadas por el profesor en GeoGebra. Los estudiantes dominan las herramientas de medida de ángulo, distancia, desliza y mueve; pueden construir rectas paralelas, perpendiculares, polígonos regulares, y triángulos rectángulos. Las tareas propuestas en estas clases se diseñaban para ser solucionadas en parejas, o en equipo de cuatro estudiantes.

Panorámica Investigativa

El presente trabajo investigativo es de tipo cualitativo y se enmarca en un enfoque fenomenológico. En este se intenta obtener de acciones y discursos del ser humano, descripciones, explicaciones e inferencias que se fundamentan lo suficiente para destacar la complejidad y particularidad del fenómeno de estudio, en nuestro caso, la caracterización de la especialidad de los argumentos inductivos producidos por un grupo de estudiantes de grado décimo (Camargo, 2021).

En relación con lo anterior, consideramos una aproximación hermenéutica, puesto que este tipo de aproximación busca profundizar en las acciones, interacciones y discursos de las personas objeto del estudio (Camargo, 2021). Este tipo de aproximación, para investigaciones en Educación matemática, pretende indagar en los significados construidos por los estudiantes, para nosotros,

profundizar en significados sobre argumentos inductivos que emergen durante la solución de algunas tareas mediadas con GeoGebra.

La estrategia metodológica que empleamos es un acercamiento a un *experimento de enseñanza*, que consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de tareas organizada, con el objetivo de corroborar una hipótesis sobre un aprendizaje específico. Este tipo de investigación cuenta con una serie de episodios de enseñanza en los cuales intervienen un profesor-investigador, un grupo de estudiantes y un investigador-observador. Consideramos pertinente esta estrategia ya que nos permite rastrear que tan especializados son los argumentos de nuestros estudiantes, luego de finalizar cada tarea. Además, posibilita realizar los ajustes necesarios a la secuencia de tareas que permita aceptar o rechazar la hipótesis planteada (Camargo, 2021).

La *Ilustración 5* corresponde al plan de ejecución de un experimento de enseñanza. En nuestro caso, es un acercamiento a un experimento de enseñanza, pues, aunque en las conclusiones mencionamos algunas de las modificaciones que consideramos se pueden hacer a la secuencia de tareas, nosotros no las llevamos a cabo.

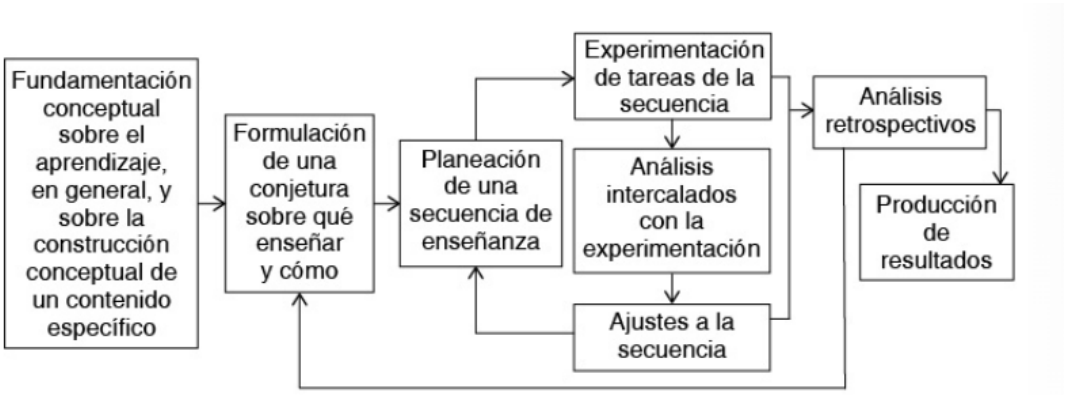


Ilustración 5 Plan de ejecución de un experimento de enseñanza. Tomado de Camargo (2021)

En el Marco de Referencia presentamos la fundamentación conceptual sobre argumento, argumento inductivo, el potencial de GeoGebra en la producción de argumentos inductivos y semejanza de triángulos y razones trigonométricas.

Asumimos como conjeturade enseñanza que es posible especializar los argumentos inductivos de un grupo de estudiantes de grado décimo por medio de una secuencia de tareas, desarrollada con GeoGebra, enfocada en la explicitación de argumentos y en cada uno de sus elementos estructurales. A continuación, explicitamos cada uno de los elementos faltantes para la ejecución de un experimento de enseñanza.

Secuencia de tareas

Como lo reportamos en Varela et al (2024), donde comunicamos resultados parciales de esta investigación, las tareas de la secuencia cuentan con cuatro fases. En cada fase buscamos que se pueden identificar alguno de los elementos estructurales de un argumento inductivo. A continuación, describimos cada una de las fases.

Fase uno (actividad de exploración): está diseñada para que los estudiantes descubran características en triángulos robustos construidos en aplicativos de GeoGebra. Se espera que puedan determinar el conjunto referencial A[5] con su correspondientemente atributo p. Además, se presentan triángulos contenidos en el conjunto referencial A, y se busca que los estudiantes identifiquen el atributo q usando las herramientas habilitadas. Se pueden abordar uno o más aplicativos y el atributo nuevo identificado se debe reportar en las casillas correspondientes.

Fase dos (actividad de recapitulación): consisten en enunciados que deben completar los estudiantes asociados a la descripción del dato y la garantía. De acuerdo con el propósito de la actividad, se fomenta que los estudiantes expresen el conjunto referencial, el atributo p, el atributo q o el patrón de generalidad usando un lenguaje cercano al lenguaje matemático.

[5] El conjunto referencial *A*, atributo *p*, atributo *q* y patrón de generalidad hacen referencia a los elementos estructurales de un argumento inductivo presentes en la definición que asumimos.

Fase tres (caso no explorado): en esta actividad se presenta triángulos que tienen el atributo p del conjunto referencial A, se espera que el estudiante exploré el aplicativo y pueda concluir que se cumple un caso más para el atributo q.

Fase cuatro (actividad de síntesis): los estudiantes deben hacer una síntesis de lo realizado en cada una de las actividades, lo anterior con el fin de crear una expresión discursiva que permita evidenciar un argumento inductivo, es decir que refleje el conjunto referencia A, el atributo p, el atributo q, el patrón de generalidad y la inferencia para otro caso.

A continuación, describimos cada una de las tareas de la secuencia además presentamos los argumentos esperados con su respectivo esquema en el modelo de Toulmin.

Tarea 1: la tarea se centra en el criterio de semejanza de triángulos lado, lado, lado. En la actividad de exploración el estudiante debe medir los lados de dos triángulos y escribir las medidas en unas casillas de entrada. Las casillas representan la razón entre los lados correspondientes de los dos triángulos. Si el estudiante introduce de manera errada los valores el aplicativo le indicará para que realice el proceso correctamente. Con esta primera actividad buscamos que el estudiante pueda identificar el conjunto referencial y su atributo definitorio (parejas de triángulos con lados correspondientes proporcionales). Enseguida, se deben explorar cinco casos en los que se presentan elementos del conjunto referencial, los estudiantes para cada caso deben hallar la medida de los ángulos y encontrar una característica en común, atributo q (los ángulos correspondientes son congruentes). Luego en la actividad de recapitulación pretendíamos que el estudiante lograra explicitar verbalmente el conjunto referencial y los atributos p y q además propusieran un patrón de generalidad (si dos triángulos tienen lados correspondientes proporcionales entonces sus ángulos correspondientes son congruentes). En el caso no explorado se presenta un elemento del conjunto referencial y se limitan las herramientas de GeoGebra de modo que no se puedan hallar medidas y se pregunta al estudiante que haga una inferencia. Finalmente, en la actividad de síntesis se solicita

al estudiante realizar un escrito en el que narre la información analizada, las propiedades descubiertas y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría. (Ver Tabla 4).

Tabla 4 Tarea 1 propuesta en GeoGebra Online

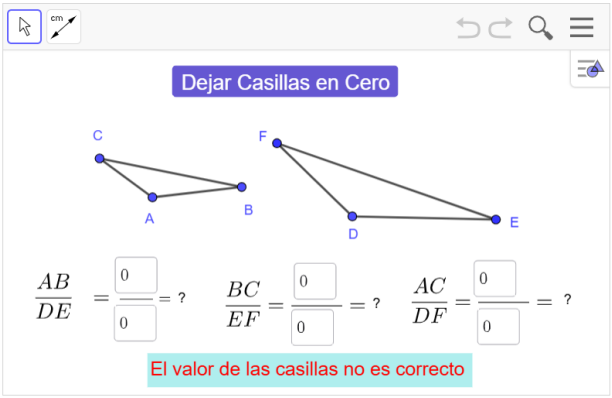
ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Realicen la siguientes acciones.

i) Utilicen la herramienta Distancia para determinar la longitud de los lados de cada triángulo.

ii) Ingresen las longitudes en las casillas correspondientes.

CASO INICIAL

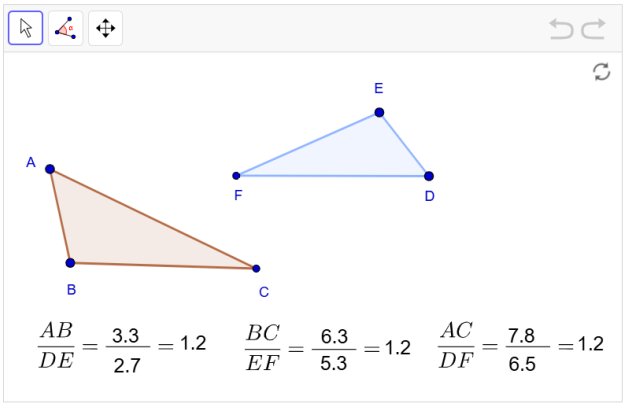


Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial**.

ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN

En los siguientes aplicativos encuentran representados el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Utilicen la herramienta Ángulo para determinar la medida de los ángulos de cada uno de los triángulos.

CASO 1



Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**.

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y en la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en las siguientes casillas.

Al explorar el caso inicial, el caso 1, 2, 3, 4, y 5, observamos que

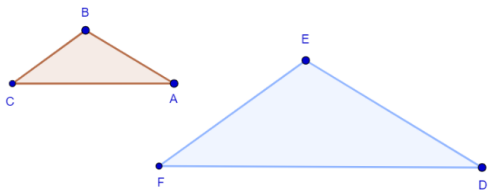
Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es

A partir de lo anterior podemos afirmar que (escribir una generalidad)

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Escriban una característica de los triángulos que puedan inferir de la información observada.

CASO FINAL



$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = 0.5$ $\frac{BC}{EF} = \frac{3.5}{7} = 0.5$ $\frac{AC}{DF} = \frac{6.3}{12.6} = 0.5$

Lo que podemos inferir es

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

El argumento inductivo que pretendemos se construya es el siguiente: Algunas parejas de triángulos en las que se cumplían que sus lados correspondientes son proporcionales, encontramos que también se cumplía que los ángulos correspondientes son congruentes. Por lo tanto, creemos que si en un par de triángulos se tiene que sus lados correspondientes son proporcionales entonces también se cumple que sus ángulos correspondientes son congruentes. Para el caso que no

exploramos, inferimos que sus ángulos son congruentes ya que cumple que sus lados correspondientes son proporcionales. En la *Ilustración 6*, representamos este argumento en el esquema de argumento simple del modelo de Toulmin.

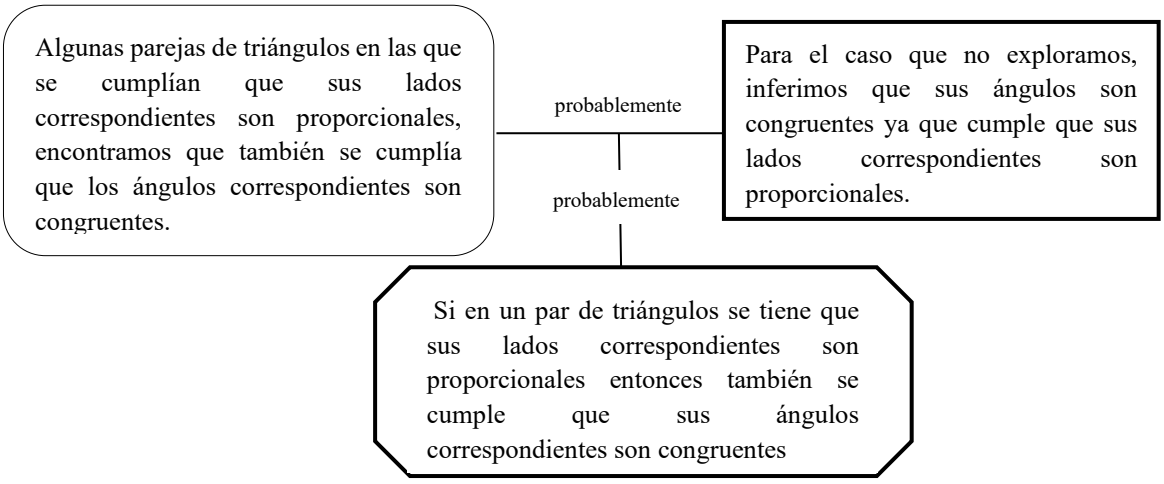


Ilustración 6 Argumento Inductivo esperado para la Tarea 1, representado en el esquema del modelo de Toulmin

Tarea 2: la tarea se centra en el criterio de semejanza de triángulos Ángulo-Ángulo y se incluye un caso de práctica, en la que el estudiante aprende a usar una herramienta que diseñamos para que construir triángulos semejantes a partir de un triángulo inicial y que se debía usar en las primeras fases. La herramienta permite construir elementos del conjunto referencial que cumplen su atributo definitorio y que se puede explorar para verificar el cumplimiento del atributo adicional. En la fase de exploración, se presenta un aplicativo en GeoGebra que solo tiene habilitadas las herramientas *Mueve*, *Crear triángulos* y *Ángulo*. Los estudiantes deben construir un triángulo y hallar la medida de los ángulos internos de los triángulos y escribir la característica que tienen los triángulos construidos por la herramienta *Crear triángulos*. Teniendo en cuenta el enunciado de la tarea y las herramientas habilitadas, esperamos que los estudiantes identifiquen la característica de que los triángulos construidos con la herramienta tienen ángulos correspondientes congruentes en relación con el triángulo inicial.

Luego, se presenta un aplicativo en el que el estudiante debe usar la herramienta *Crear triángulos*. En este, las medidas de los ángulos de los triángulos son siempre visibles. Los estudiantes deben, hallar la medida de los lados de los triángulos y ubicarlos según corresponda en las casillas de entrada ubicadas en la pantalla, en caso de ubicarlos de manera incorrecta en la pantalla aparece un anuncio que informará, para que lo realice correctamente. El aplicativo se puede reiniciar las veces necesarias para que verificaran para una cantidad de casos, que les permitiera escribir una relación que encontraron al ingresar la longitud de los lados en las casillas correspondientes. La relación que esperamos que los estudiantes escriban es que siempre que en una pareja de triángulos se cumpla que sus ángulos correspondientes son congruentes, también se cumple que sus lados correspondientes son proporcionales.

En la fase de recapitulación presentamos el caso de los triángulos ΔPQR y ΔKMJ que cumplen que tienen sus lados correspondientes congruentes. En este caso, los estudiantes no pueden explorar y deben completar una plantilla discursiva que les permita construir un argumento inductivo. El argumento esperado es el siguiente: *La herramienta crear triángulos permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que* sus ángulos correspondientes son congruentes. *En algunas de estas parejas observamos que* sus lados correspondientes son proporcionales. *Inferimos que siempre que en una pareja se cumple que* sus ángulos correspondientes sean congruentes *también se puede concluir que* sus lados correspondientes son proporcionales. *Así por ejemplo en el* ΔPQR *y* ΔKMJ *se pudo concluir* $\frac{PQ}{KM} = \frac{QR}{MJ} = \frac{PR}{KJ}$ porque se tiene que $\angle P \cong \angle K;\ \angle Q \cong \angle M;\ \angle R \cong \angle J$ (Ver Tabla 5).

Tabla 5 Tarea 2 propuesta en GeoGebra Online

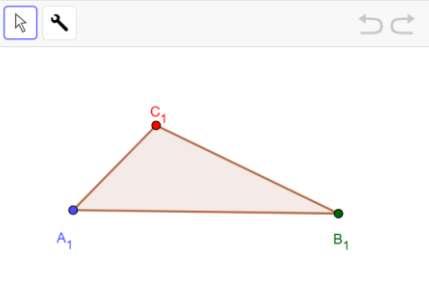
ACTIVIDAD DE PRÁCTICA

En el siguiente aplicativo encontrarán la herramienta *Crear Triángulos* que permite generar un nuevo triángulo a partir de otro triángulo ya construido. Para usar la herramienta, efectúen el siguiente procedimiento:

Seleccionen la herramienta *Crear triángulos* . Seleccionen el punto A_1 del triángulo dado. ($\triangle A_1B_1C_1$).

Ingresen un valor entre 2 y 10. Seleccionen los puntos B_1 y C_1 del $\triangle A_1B_1C_1$. Hagan clic en alguna parte de la vista gráfica, para generar un punto. El aplicativo generará un nuevo triángulo con una propiedad que deberás descubrir.

CASO DE PRÁCTICA

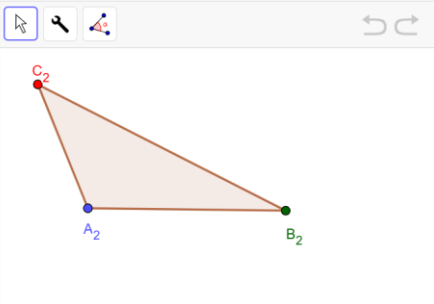


ACTIVIDAD DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encontrarán representado el $\triangle A_2B_2C_2$. Utilicen la herramienta *Crear Triángulos* para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle A_2B_2C_2$.

¿Qué característica cumplen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos?* Escriban la característica identificada en la casilla que se encuentra después del aplicativo.

CASO INICIAL



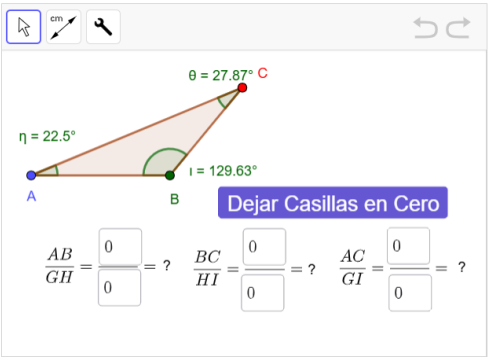
La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos* es:

ACTIVIDAD EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo se encuentra representado el $\triangle ABC$. Utilicen la herramienta Crear triángulos para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle ABC$. Descubran una nueva relación que cumplen los dos triángulos construidos utilizando las herramientas del aplicativo.

Arrastren los vértices del triángulo inicial ($\triangle ABC$) y verifiquen la relación encontrada en otros triángulos.

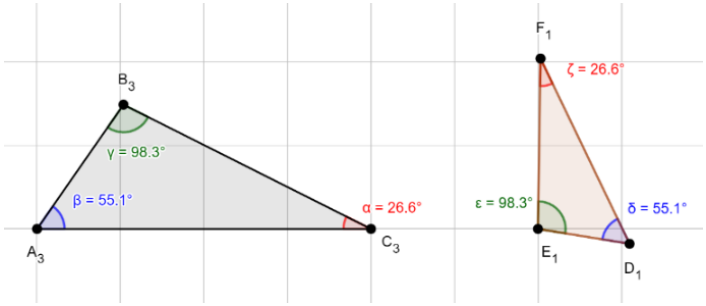
CREACIÓN DE CASOS



Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes.

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle A_3B_3C_3$ y el $\triangle D_1E_1F_1$. Escriban una característica de los triángulos que se pueda inferir de la información observada en el siguiente aplicativo.



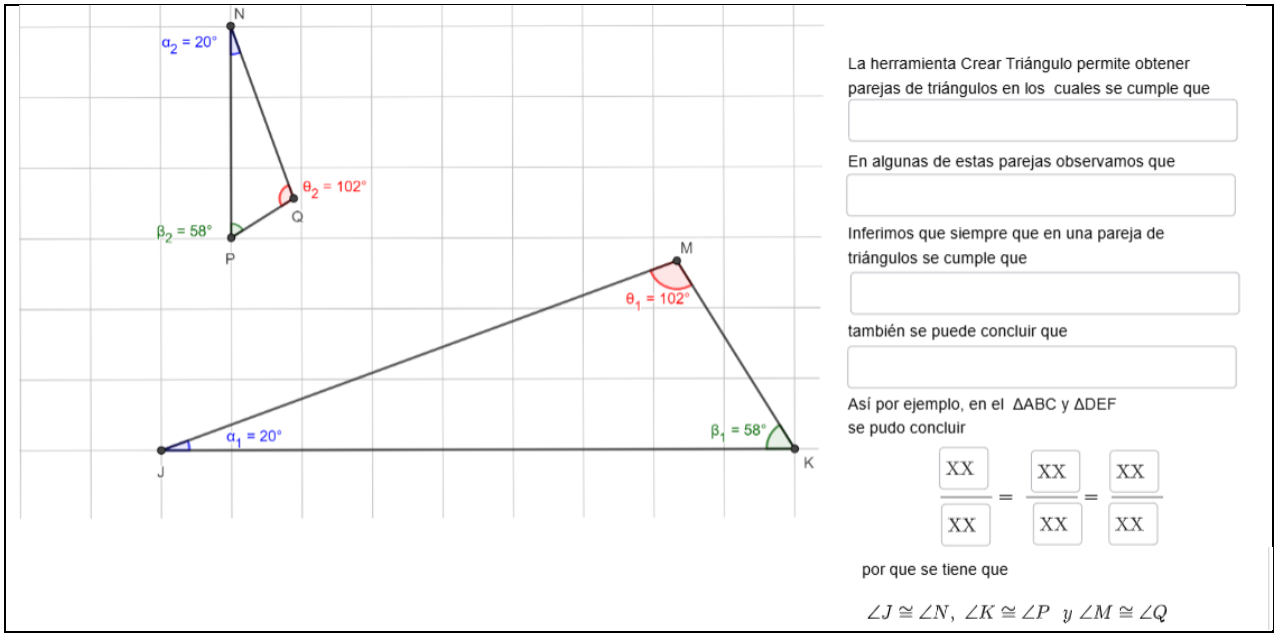
Lo que podemos inferir es

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en el siguiente aplicativo.



La *Ilustración* 7 corresponde estructura de argumento simple esperado en la Tarea 2.

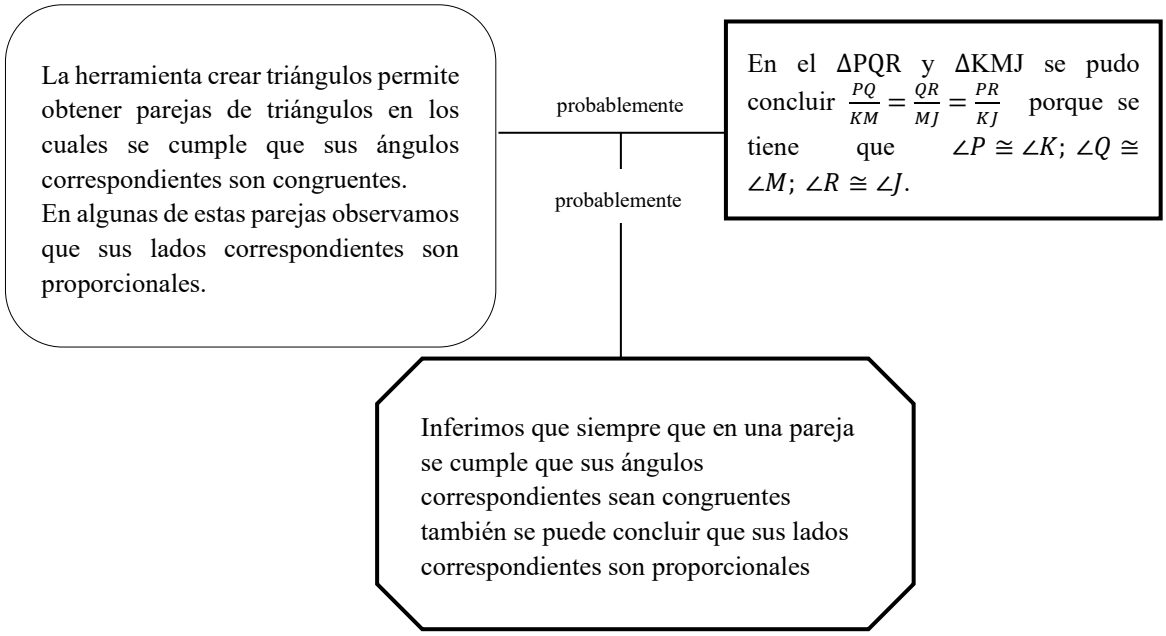


Ilustración 7 Argumento Inductivo esperado para la Tarea 2, representado en el esquema del modelo de Toulmin

Tarea 3[6]: la tarea se enfoca en la construcción de la razón tangente para un triángulo rectángulo isósceles. La primera actividad es un repaso en el que los estudiantes deben identificar las seis razones que se pueden construir con los lados de un triángulo rectángulo. En la fase de exploración se presentan dos triángulos rectángulos ($\Delta ABC \ y \ \Delta DEF$). Luego, los estudiantes a partir de la herramienta mueven, deben identificar y escribir una relación entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF} = 1$. Esperamos que los estudiantes reporten que los ángulos agudos de los triángulos median 45 cuando la condición solicitada se cumple

Enseguida en la fase de recapitulación y actividad no explorada se presenta un aplicativo en el que los estudiantes deben construir un triángulo rectángulo en el que la razón entre sus catetos fuera uno. En el aplicativo se dejan activadas únicamente las herramientas de mueve, ángulo y la herramienta crear triángulo rectángulo (diseñada por nosotros). Luego de hacer la construcción los estudiantes debían completar una plantilla discursiva en la que se reportara el argumento. Finalmente, en la fase de síntesis debían escribir un texto en el que se explique detalladamente lo realizado durante el desarrollo de la tarea. Esperamos que los estudiantes lograran reportar el siguiente argumento.

En la actividad de Descubrimiento y Exploración encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de que sus catetos son congruentes. *Luego de usar el arrastre descubrimos que los triángulos también cumplen que* la medida de sus ángulos es 45. *Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene* sus catetos congruentes *entonces cumple que* la

[6] Entre la tarea 2 y la tarea 3 los estudiantes identificaran que dados ΔABC y ΔDEF, si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ y $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$. La tarea era necesaria para poder pasar de proporciones que involucraban razones entre las medidas de los lados correspondientes de dos triángulos, a razones que involucraban solo las medidas de los lados de un solo triángulo.

medida de sus ángulos agudos será 45. *Por ejemplo, en el triángulo construido se tiene que* sus ángulos agudos miden 45 *porque* sus catetos son congruentes.

(Ver Tabla 6).

Tabla 6 Tarea 3 propuesta en GeoGebra Online

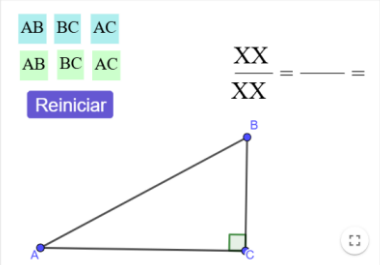
ACTIVIDAD DE REPASO

En el siguiente aplicativo se tiene representado el $\triangle ABC$. Realicen las siguiente acciones.

i) Hagan clic sobre las etiquetas de los segmentos que están de color azul celeste y verde manzana. Observen lo que ocurre con la razón presentada al lado derecho.

ii) Utilicen las etiquetas para determinar las 6 razones que se pueden establecer entre las longitudes de los diferentes lados del triángulo rectángulo.

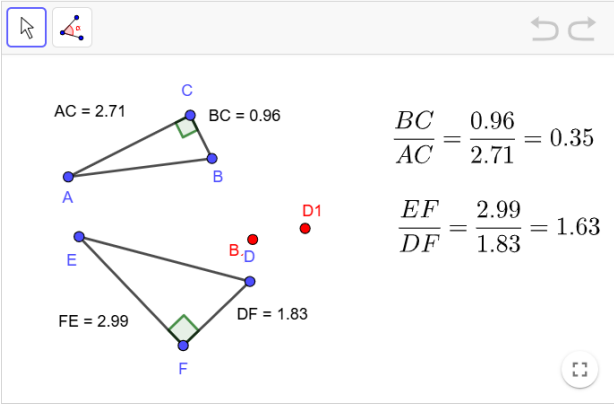
CASO DE REPASO



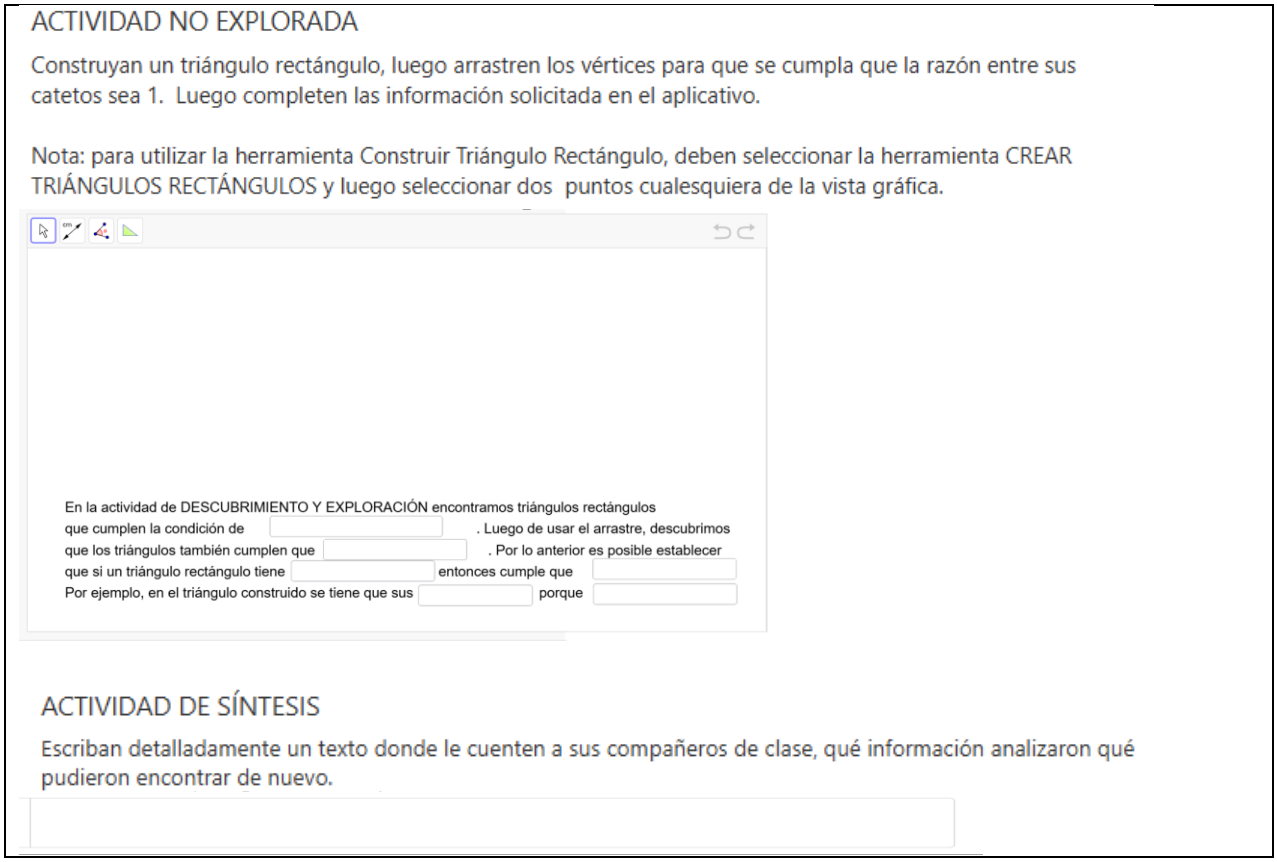
ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ rectángulos. ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que $\frac{BC}{AC}$ y $\frac{EF}{DF}$ EF/DF son iguales a 1?

EXPLORACIÓN DE CASOS



Escriban la(s) característica(s) que logran identificar para los triángulos que cumplen la condición solicitada.



En la *Ilustración* 8 se presenta el argumento esperado en esta tarea en el esquema del modelo de Toulmin.

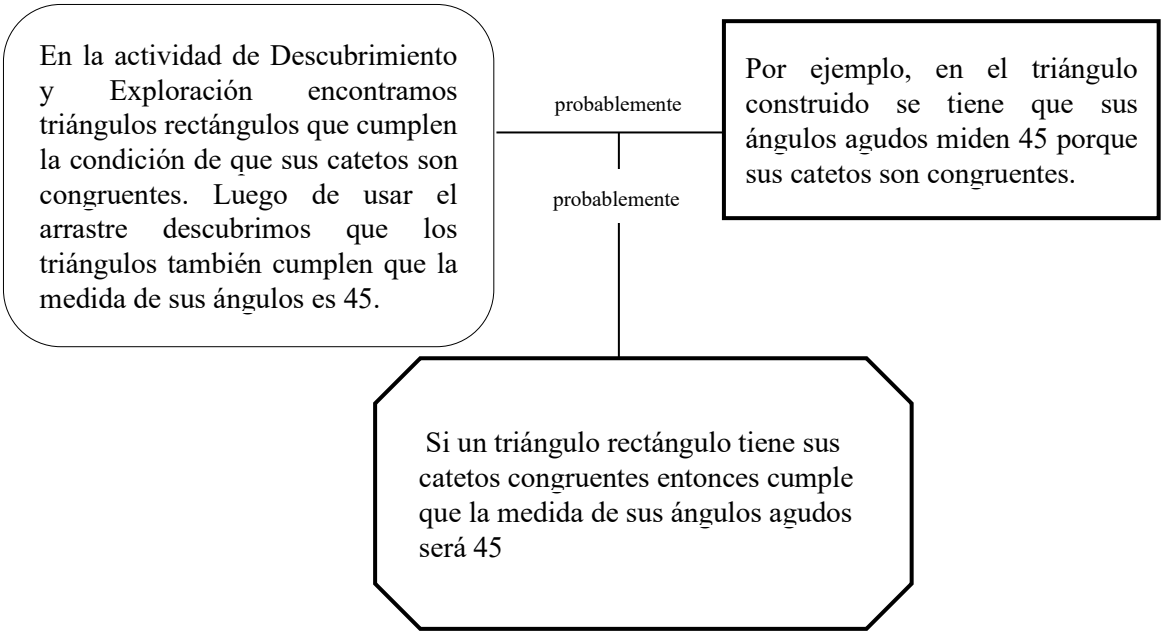


Ilustración 8 Argumento inductivo esperado para la tarea 3, representado en el esquema del modelo de Toulmin

Tarea 4: esta tarea se enfoca en que los estudiantes logren establecer la igualdad siguiente igualdad: $sen(a) = \cos(b)$, si a y b son complementarios. En primer lugar, se presenta material que los estudiantes deben observar a modo de repaso. En este se enuncian las razones trigonométricas directas para un ángulo α de un triángulo rectángulo. En la fase de descubrimiento y exploración se presenta a los estudiantes un aplicativo con dos triángulos rectángulos en los que se han resaltado la medida de uno de sus ángulos agudos. En uno de los triángulos el nombre del ángulo es α y en el otro es β. En la parte inferior del aplicativo como texto se ha fijado el valor del $sen(\alpha)$ y del $\cos(\beta)$, que cambia a medida que se modifican los ángulos de cada triángulo.

Los estudiantes deben usar la herramienta mueve y modificar los triángulos para construir dos triángulos rectángulos en los que se cumpla que $sen(\alpha) = \cos(\beta)$. Luego de explorar el aplicativo se les solicita escribir una condición que cumplan los ángulos α y β cuando se tiene que $sen(\alpha) = \cos(\beta)$. Esperamos que los estudiantes identifiquen que los ángulos α y β son complementarios, es decir, la suma de sus medidas es 90. Enseguida, deben escribir un patrón de

generalidad en el que se relacionara $sen(\alpha) = \cos(\beta)$ con la condición enunciada anteriormente. La respuesta esperada es: Si en un par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respectiva se cumple que $sen(\alpha) = \cos(\beta)$, entonces, también se cumple que α y β son complementarios. Para terminar esta fase, se pregunta a los estudiantes si consideran que la condición descubierta se cumple para cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respectivamente, en los cuales se cumple que $sen(\alpha) = \cos(\beta)$. Esperamos que basen su respuesta y justificación en los diferentes casos explorados y por lo tanto, la respuesta sea afirmativa.

Luego, para el caso no explorado se propone el siguiente problema de aplicación.

> La profesora dibuja en el tablero de clase un triángulo rectángulo ACB con ángulo recto en C, hipotenusa AB = 5.83, $m\angle BAC = 30.96$ y $m\angle ABC = 59.04$ (ver figura 1) y solicita a los estudiantes calcular la longitud del lado BC. Ana y Juan están calculando la longitud del lado BC del triángulo y al contrastar sus cálculos Juan dice que $BC = sen\,(30.96) \times 5.83$, mientras Ana dice que la forma de calcular el lado BC es $BC = cos\,(59.04) \times 5.83$. Con base en lo anterior realice las siguientes acciones

La figura corresponde con la representación gráfica de la situación; un triángulo en el que sus ángulos agudos miden 59.04 y 30.96 respectivamente. Se solicita a los estudiantes que sin hacer uso de la calculadora indiquen cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente la medida de BC. Se espera que los estudiantes indiquen que los dos estudiantes han determinado correctamente la medida de BC, ya que en ambos casos se tiene el producto de los mismos números.

Una vez reportan lo solicitado, se propone a los estudiantes escribir un argumento inductivo en el que se explicite el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo explorado y descubierto en el desarrollo de la tarea. En esta tarea se suprime la plantilla discursiva, consideramos que a partir del uso de estas en las tareas anteriores los estudiantes están en la capacidad de expresar un argumento inductivo. El argumento esperado es: *en algunas parejas de triángulos rectángulos en los que se cumple que el seno uno de uno de los ángulos agudos de un triángulo, es igual al*

coseno de uno de los ángulos agudos del otro triángulo. Se cumple también que dichos ángulos agudos son complementarios. Lo anterior nos permite establecer que, si en un par de triángulos rectángulos con cumple que el seno de uno de los ángulos de un triángulo es igual al coseno de uno de los ángulos del otro, entonces, los ángulos son complementarios. De esta manera pudimos concluir que Ana y Juan habían solucionado correctamente el problema propuesto por su profesora.

Finalmente, los estudiantes en la fase de síntesis deben hacer redactar un reporte en el que se especifique lo realizado durante el desarrollo de la tarea.

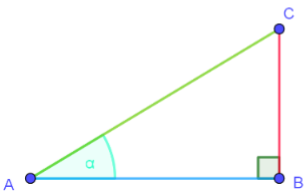
(Ver Tabla 7).

Tabla 7 Tarea 4 propuesta en GeoGebra Online

MATERIAL DE REPASO

En la siguiente imagen se muestra la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo.

Razones trigonométricas directas para el ángulo α



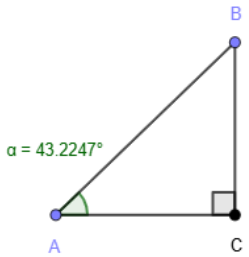
$$Sen(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

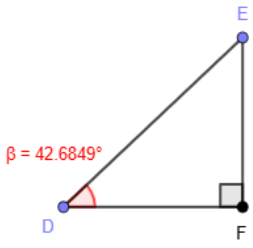
$$Cos(\alpha) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$Tan(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$$

ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran representados el $\triangle ACB$ y el $\triangle DFE$. Arrastren los puntos A, B, D y E para construir triángulos en los cuales se cumpla que sen (α) = cos (β).





sen(43.2247°) = 0.6849

cos (42.6849°) = 0.7351

¿Qué condición cumplen los ángulos α y β cuando sen (α) = cos (β)?

Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione sen (α) =cos (β) con la condición encontrada anteriormente.

Consideran que la condición se cumplen en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene que sen (α) = cos (β). ¿Cómo están seguros de su respuesta?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

La profesora dibuja en el tablero de clase un triángulo rectángulo ACB con ángulo recto en C, hipotenusa AB = 5.83, m∠BAC = 30.96° y m∠ABC = 59.04° (ver figura 1) y solicita a los estudiantes calcular la longitud del lado BC. Ana y Juan están calculando la longitud del lado BC del triángulo y al contrastar sus cálculos Juan dice que BC = sen (30.96°) · 5.83, mientras Ana dice que la forma de calcular el lado BC es BC = cos (59.04°)·5.83. Con base en lo anterior realice las siguientes acciones

Respondan la pregunta habilitada que están después de la imagen.

Figura 1

¿Sin hacer uso de la calculadora, cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente BC y por qué están seguros de su respuesta?

ARGUMENTO INDUCTIVO

Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea.

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

La *Ilustración 9* presenta el argumento inductivo esperado en el esquema ternario del modelo de Toulmin.

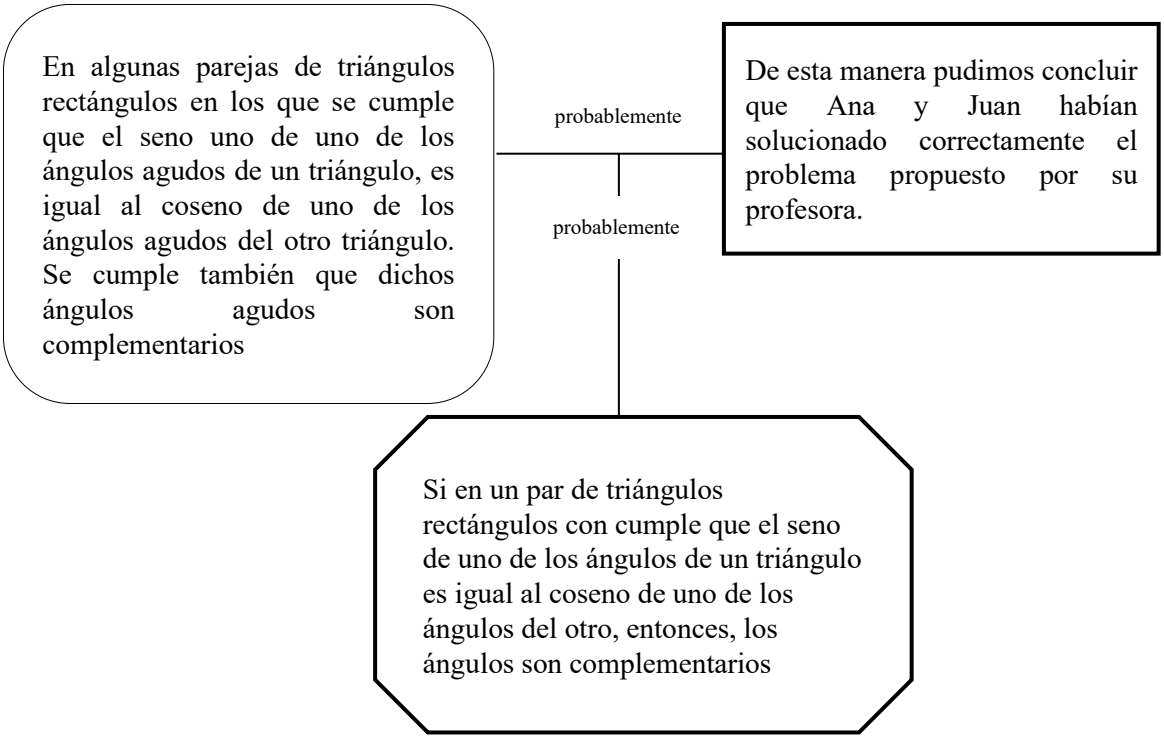


Ilustración 9 Argumento inductivo esperado para la tarea 4, representado en el esquema del modelo de Toulmin

Experimentación de la secuencia de tareas

La experimentación de la secuencia se realiza en cuatro sesiones de dos horas cada una. Cada que los estudiantes solucionan una tarea se lleva un registro de las diferentes intervenciones entre los integrantes de cada grupo. Por lo tanto, se realizó grabación de audio y video de la solución de la tarea propuesta y de la plenaria posterior. La grabación se realizó a través de la plataforma Teams qué además de hacer la grabación realiza la transcripción del audio generado en cada una de las llamadas. De modo similar, para recolectar las respuestas de los estudiantes se usa GeoGebra Online, que a partir de su interfaz permite escribir las respuestas a las diferentes preguntas y acciones que se generan durante la implementación de la secuencia. Además, el investigador no participante, llevó un diario de campo en el que registrará alguna de las acciones, discusiones, gestos, entre otros, de los estudiantes y del profesor durante el desarrollo de cada tarea. Posterior a la recolección de información, se construyeron relatos del desarrollo que cada grupo efectuó a cada tarea y a partir de

estos se analizaba el alcance de la tarea con el fin de proponer ajustes a las siguientes tareas de la secuencia.

Análisis Retrospectivo y Producción de Resultados.

A partir de la información recolectada en el desarrollo de cada tarea, en el Capítulo 5 presentamos el análisis retrospectivo. En este, identificamos los argumentos inductivos que surgieron y los elementos estructurales de este, generando el respectivo esquema ternario de acuerdo con el modelo de Toulmin. En el esquema, identificamos cada uno de los elementos de la definición que asumimos de argumento inductivo. Posteriormente, ubicamos los diferentes elementos estructurales en el nivel correspondiente a partir de las categorías de análisis expuestas en la Tabla 3, que se encuentra en el capítulo Marco de Referencia. Adicionalmente, presentamos un análisis del uso que los estudiantes hacen de GeoGebra, sus potencialidades, obstáculos, dificultades, entre otros. También, hacemos un análisis del lenguaje que usan los estudiantes en el desarrollo de la tarea. Hacemos énfasis en el origen e intención de expresiones que usan y el lenguaje matemático. Una vez se han presentado el análisis de los tres grupos, en el Capítulo 6, presentamos los resultados obtenidos e y se proponen algunas modificaciones a la secuencia.

5. ANÁLISIS

En este capítulo presentamos el análisis de las respuestas de cada grupo para cada una de las cuatro tareas propuestas para cada uno de los tres grupos.

Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 1

Grupo 1

DESCRIPCIÓN. Se inició la tarea con la actividad de descubrimiento, que presentó una pareja de triángulos semejantes, con casillas para ingresar la medida de la longitud de sus lados. Para dar respuesta a la solicitud planteada en esta actividad, los estudiantes midieron los lados de los triángulos y digitaron las medidas en las casillas de entrada. Con ayuda del aplicativo, validaron que las medidas ingresadas eran correctas y arrastraron algunos vértices, digitando nuevas medidas. En la respuesta reportada por los estudiantes, se identifica implícitamente el conjunto referencial (parejas de triángulos) y un atributo definitorio p_1.

> Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial**: *Durante el caso inicial pudimos observar que al dividir la medida de los lados de dichos triángulos su resultado va a ser el mismo* [p_1] [respuesta solicitud caso inicial – actividad de descubrimiento T1].

Posteriormente, los estudiantes pasaron a la actividad de exploración, que consistió en analizar cinco casos y en cada uno de ellos medir los ángulos de una pareja de triángulos semejantes. Al explorar el caso 1, presentaron dificultades para medir los ángulos de los triángulos expuestos, no obstante, con ayuda del profesor midieron los ángulos y arrastraron varios vértices, logrando identificar otros atributos del conjunto referencial. Lo reportado en el aplicativo para el caso 1, coincide con lo que discutieron en su momento. El atributo adicional q_1 identificado por los estudiantes es una conjunción formada por las proposiciones q_{11}, q_{12} y q_{13}.

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**: *La suma de todos los ángulos es de 180* (q_{11})*, y a pesar de los triángulos cambien su tamaño los ángulos siguen midiendo lo mismo* (q_{12})*, los ángulos de ambos triángulos miden lo mismo* (q_{13}) [q_1] [respuesta solicitud caso 1 – actividad de exploración T1].

Para el caso 2, 3, 4 y 5, lo reportado en el aplicativo es exactamente igual. Los estudiantes efectuaron la medición de los ángulos de los triángulos del caso 2 y movieron los vértices e indicaron que "Todo es igual". En los casos 3, 4 y 5, escribieron lo mismo, posiblemente, al observar que son casos similares y que están construidos bajo las mismas condiciones (triángulos con los mismos colores y vértices con las mismas etiquetas). En lo reportado, el atributo adicional q_2 está compuesto por las proposiciones q_{21}, q_{22}, q_{23} y q_{24}.

En este caso los triángulos tienen ángulos diferentes al caso anterior (q_{21})*, la suma de los ángulos el resultado sigue siendo 180* (q_{22})*, y a pesar del tamaño de los lados los ángulos continúan teniendo la misma medida* (q_{23})*. Siempre hay un vértice que no se puede mover* (q_{24}) [q_2] [respuesta solicitud caso 2, 3, 4 y 5 - actividad de exploración T1].

En la actividad de recapitulación, los estudiantes reportaron lo que descubrieron hasta el momento. En la respuesta de la solicitud 1 de esta actividad, lograron especificar el conjunto referencial, manteniendo lo establecido del atributo definitorio p_1, no obstante, puntualizaron los casos explorados y especificaron las divisiones analizadas, determinando un atributo definitorio p_2. En la solicitud 2 reportaron que las medidas de los ángulos no cambian, es decir, establecen un nuevo atributo adicional q_3.

Ellos reportaron:

Al explorar el caso inicial, el caso 1, 2, 3, 4, y 5, observamos que: *En los casos 1,2,3,4,5 observamos dos triángulos y la medida de sus lados, a diferencia del caso inicial que no nos daban las medidas de los lados si no que debíamos hallarlas, los cuales se dividen los lados AB y DE, BC y EF, AC y DF y los resultados de estas divisiones es el mismo* [p_2] [respuesta solicitud 1- actividad de recapitulación T1].

Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es: *Que la medida de todos los ángulos no cambia a pesar de que sus lados cambien su medida* [q_3] [respuesta solicitud 2 - actividad de recapitulación T1].

Respecto al apartado que solicita escribir una generalidad en la actividad de recapitulación, Joaquín se cuestionó sobre lo qué significa este término, a lo que Ilenia le comentó que deben indicar qué es lo que sucede en todos los casos.

A partir de lo anterior podemos afirmar que (escribir una generalidad): *Al dividir sus lados en cada caso sus resultados son congruentes* [respuesta solicitud 3 - actividad de recapitulación T1].

Para la actividad no explorada, se presentó dos triángulos semejantes y las razones conformadas por sus lados correspondientes, lo que corresponde con otro caso que pertenece al conjunto referencial. Al desarrollar la actividad, los estudiantes se mostraron confundidos, ya que en el aplicativo se inhabilitó todas las herramientas de GeoGebra, dejando solo los dos triángulos y las respectivas razones. En lo reportado, logran identificar el atributo definitorio p_2 para este nuevo caso; se descarta el atributo adicional al no poder medir los ángulos.

En este caso no podemos verificar que la medida de los ángulos y los lados sean las correctas pues no poseemos herramientas, a pesar de esto observamos que se continúan dividiendo sus lados y el resultado sigue siendo congruente [respuesta solicitud caso final - actividad no explorada T1].

Finalmente, en la actividad de síntesis, se solicitó a los estudiantes describir la información que analizaron y lo nuevo que descubrieron. Lo reportado resalta la posibilidad de GeoGebra para explorar varios casos. Además, se menciona los atributos encontrados hasta el momento, repitiendo lo que ya habían reportado anteriormente.

ANÁLISIS. En las respuestas de los estudiantes identificamos dos argumentos inductivos incompletos. Los atributos encontrados en lo reportado para las dos primeras actividades permiten

caracterizar el dato del primer argumento. En los casos inicial, caso 1 y 2, se establece el atributo definitorio p_1 y el atributo adicional (q_1 y q_2) en los casos 1 y 2. Presuponemos que de manera implícita determinan los casos 3, 4 y 5 como otros elementos del conjunto referencial. En este argumento, los estudiantes al decir "todo es igual" muestran que al parecer han hecho una generalización, sin embargo, no es reportada. De acuerdo con lo observado, consideramos que posiblemente lo inferido para los casos 3, 4 y 5 corresponde a la aserción. La *Ilustración* 10 sintetiza este primer argumento producido por los estudiantes.

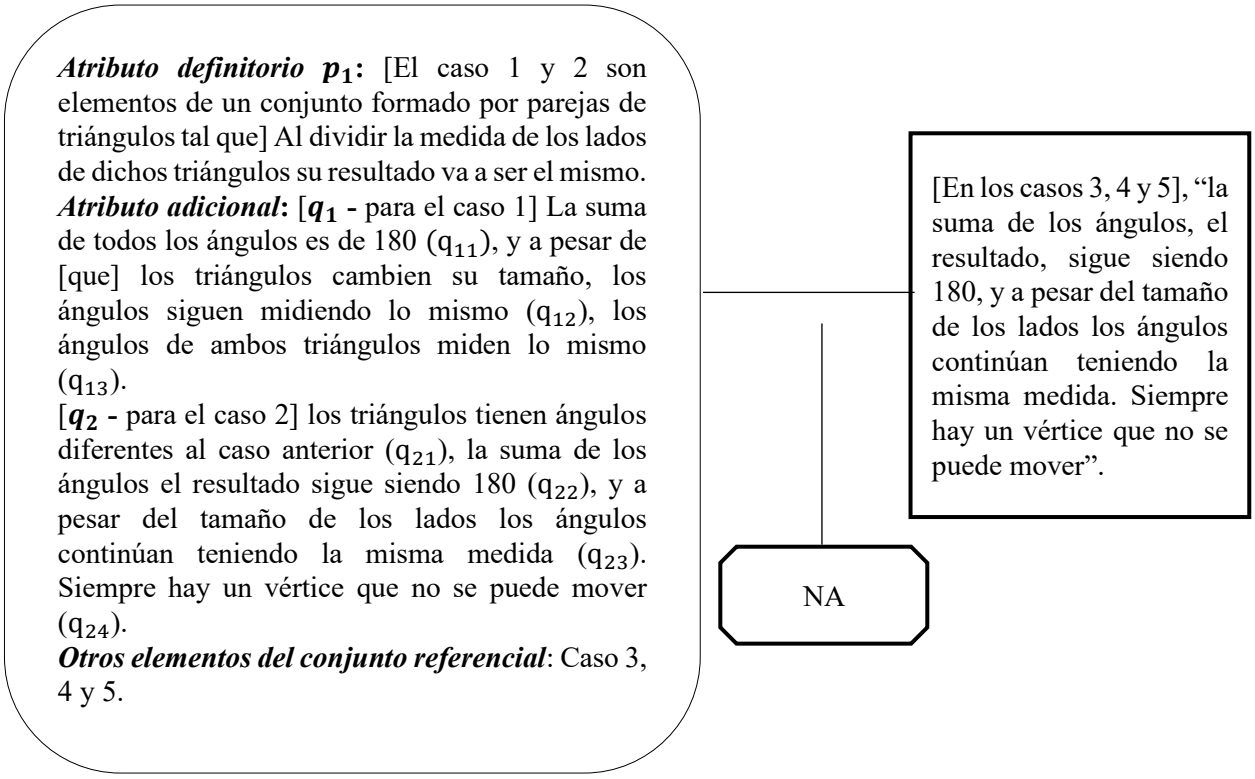


Ilustración 10 Primer Argumento inductivo Grupo 1 para la Tarea 1

En cuanto al nivel de especialización del primer argumento, se observa que lo establecido por el grupo 1 respecto a los elementos del conjunto referencial, atributo definitorio p_1 y atributo adicional (q_1 y q_2), ubica a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización del *dato*, pues, de acuerdo con el argumento esperado, se identifican parejas de triángulos en los cuales se cumple que las

razones entre los lados de dos triángulos son iguales (atributo definitorio p) y tienen ángulos con igual medida (atributo adicional q). Se resalta que para el atributo adicional q_1 y q_2, los estudiantes reportan proposiciones que corresponden a información que ya conocían sobre los triángulos (la suma de las medidas de los ángulos es 180°) o descripciones de transformaciones de los objetos que describen cambios observados en el aplicativo (los lados cambian, el tamaño cambia o los vértices se pueden mover).

Por otro lado, la inferencia de la aserción se hace a partir de explorar los casos 1 y 2, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 2 de especialización respecto a los *casos observados.* Además, al no reportarse explícitamente una generalidad, los estudiantes se ubican en un Nivel 1 de especialización del *patrón de generalidad*. Por último, en la *aserción* infieren que los casos 3, 4 y 5 cumplen el atributo q_2, por lo que se ubican en un Nivel 4 de especialización.

Respecto al segundo argumento, en la actividad de recapitulación, los estudiantes reportan lo encontrado y establecen en la solicitud 1 un atributo definitorio p_2 y en la solicitud 2 un atributo adicional q_3. En relación con lo reportado en la solicitud 3 de esta actividad, lo escrito es una proposición simple, que solo refleja el atributo definitorio p_1. En esta última solicitud, se buscaba que los estudiantes construyeran una generalidad, estableciendo una relación de dependencia entre los atributos p y q encontrados, asunto que no ocurrió. Además, en la actividad no explorada, los estudiantes identifican un elemento que pertenece al conjunto referencial, pero no efectúan alguna inferencia respecto a este caso. La *Ilustración* 11 sintetiza la expresión discursiva producida por los estudiantes.

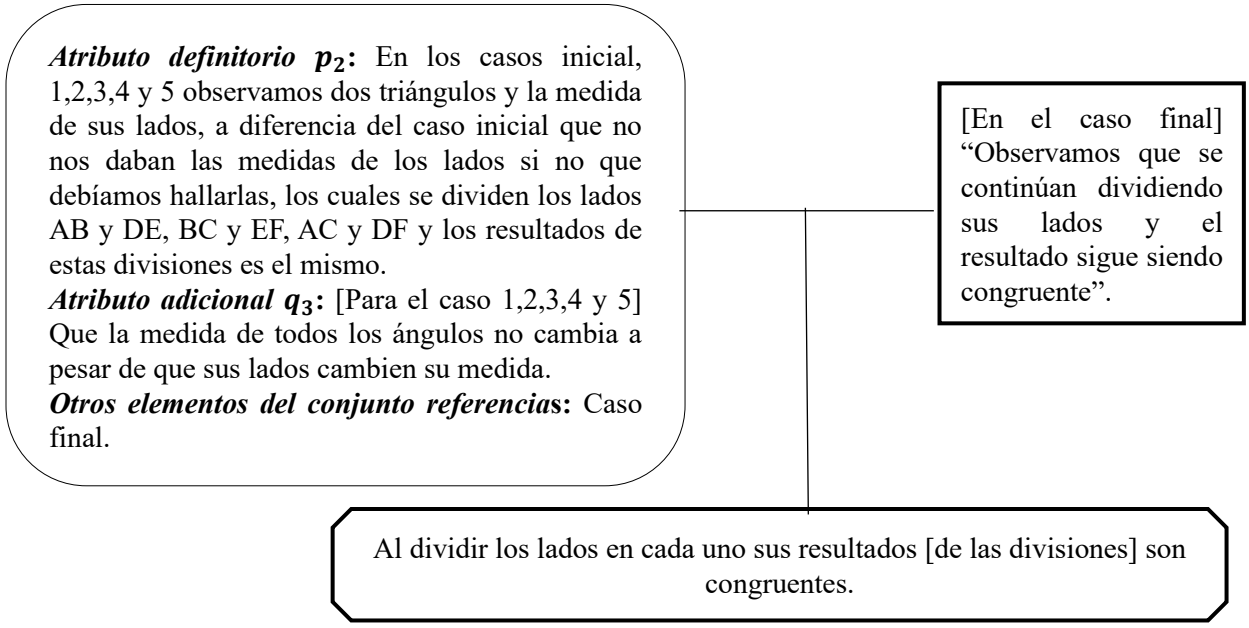


Ilustración 11 Segundo argumento inductivo Grupo 1 para la Tarea 1

Para este segundo argumento, se tiene que la categoría *dato* corresponde a un Nivel 4 de especialización, ya que se reporta la igualdad entre las divisiones de los lados y la congruencia de los ángulos correspondientes. Se observa que para el atributo adicional q_3, los estudiantes omiten algunas proposiciones que habían contemplado en el anterior argumento incompleto (q_{11}, q_{12}, q_{22} y q_{24}).

Respecto a los *Casos observados* en este argumento, los estudiantes se ubican en Nivel 2 de especialización, ya que solo exploran dos casos que se presentan en los aplicativos. En relación con el *patrón de generalidad*, al no presentarse una dependencia entre los atributos establecidos y solo enunciar una proposición simple, ubicamos a los estudiantes en el Nivel 2 de especialización en relación con esta categoría. En cuanto a la *aserción*, los estudiantes logran identificar otro elemento que cumple el atributo definitorio p_1, pero no logran inferir que este elemento cumple el atributo adicional q_3, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 2 de especialización.

Respecto al uso de GeoGebra, el arrastre permitió describir atributos que cumplían los elementos del conjunto referencial. Algunos de estos atributos eran definitorios del conjunto y otros

hacían parte de atributos adicionales. De este último grupo, están enunciados en las proposiciones q_{11}, q_{12}, q_{22} y q_{24}, que fueron descartadas para el segundo argumento, ya que se consideraron como irrelevantes.

En la actividad de exploración, los estudiantes solo analizaron los casos 1 y 2. Para los casos 3, 4 y 5 establecieron estos como "lo mismo", tal vez porque visualmente eran muy parecidos (color, nombres de los vértices, etc.), reflejando que esa cantidad de casos pueden ser innecesarios y, en su lugar, podría involucrarse una construcción en la que se priorice el uso del arrastre para generar los casos. Otra posible modificación a la tarea es, diseñar aplicativos que difieran visualmente.

En relación con la herramienta medida de ángulo, los estudiantes presentaron dificultades para medir los ángulos, así que, es pertinente recordar antes de iniciar la tarea, en qué forma se debe usar esta herramienta. En cuanto a la actividad no explorada, el inhabilitar esta herramienta incidió en que los estudiantes se mostrarán confundidos. Es necesario aclarar en los enunciados de las actividades que, se inhabilitan las herramientas, en este caso medida de ángulo, con el fin de que los estudiantes puedan establecer nueva información a partir de la información suministrada.

En lo concerniente al lenguaje usado por los estudiantes, se evidencia que en sus respuestas se refieren a las razones como "divisiones" y confunden el término de igualdad con "congruencia". Se resalta que, en la actividad de recapitulación se desconoce por parte de Joaquín el término "generalidad", lo que pudo afectar la construcción de patrón de generalidad. Para actividades como la de recapitulación, es viable utilizar plantillas discursivas que permitan a los estudiantes conocer la estructura de un argumento inductivo.

Por último, en lo reportado se evidencia que, en algunas proposiciones, el lenguaje usado por los estudiantes está determinado por el programa. Por ejemplo, cuando ellos escriben "a pesar de que los triángulos cambien su tamaño" se refieren a la transformación de los triángulos, que es una característica generada por el arrastre. Asimismo, al emplear expresiones como "siguen

midiendo lo mismo" o "siguen siendo 180", los estudiantes reportan invariantes identificadas en los triángulos durante la exploración de los aplicativos.

Grupo 2

DESCRIPCIÓN. En la actividad de descubrimiento, los estudiantes midieron los lados y digitaron sus medidas en las respectivas casillas, hallando un valor específico para las razones expuestas. Para el caso inicial, ellos reportaron en principio "que así yo mueva los dos triángulos van a dar la misma respuesta". No obstante, el profesor indagó sobre el significado de "misma respuesta", logrando que los estudiantes detallaran lo encontrado. En lo reportado se identifica un atributo definitorio p_1.

> Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial:** *A pesar de mover los triángulos los resultados de la división de 2 lados en específico van a ser iguales* $[p_1]$ [respuesta solicitud caso inicial – actividad de descubrimiento T1].

En la actividad de exploración, los estudiantes mostraron dificultades al medir los ángulos del caso 1, pero con ayuda del profesor tomaron la medida de los ángulos seleccionando los triángulos y no los vértices. Luego de medir los ángulos, determinaron que "los ángulos son iguales". Establecieron la igualdad entre la medida de los ángulos correspondientes. Lo reportado para el caso 1, determina un atributo adicional q_1.

> Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**: *La característica que nosotros vimos fue que los ángulos de ambos triángulos son iguales, en este caso el ángulo c y el f miden 24°, el d y el a miden 52°, y el b y el e miden 104°* $[q_1]$ [respuesta solicitud caso 1 – actividad de exploración T1].

Para el caso 2 de la actividad de exploración, los estudiantes midieron los ángulos de los triángulos e identificaron de inmediato que estos "miden igual". En lo reportado en este caso, se resalta la referencia que hacen al movimiento de los triángulos, que está asociado al arrastre de los vértices. Lo anterior les permite establecer un atributo adicional q_2.

> Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 2**: *así movamos los triángulos, los ángulos siempre van a ser iguales* [q_2] [respuesta solicitud caso 2 – actividad de exploración T1].

Para los casos 3 y 4, los estudiantes midieron los ángulos y establecieron nuevamente que "miden lo mismo". Reportaron que "Este punto [caso 3] tiene similitud con los dos de arriba [casos 1 y 2], en el cual todos los ángulos miden lo mismo" y "Este punto [caso 4] tiene similitud con los tres de arriba [casos 1, 2 y 3], en el cual todos los ángulos miden lo mismo". Lo manifestado para los casos 3 y 4, mantiene la idea establecida en el caso 1, por lo que no determinaron atributos adicionales diferentes al atributo adicional q_1.

Respecto al caso 5, los estudiantes describieron la misma idea de los casos anteriores. Particularmente en este caso, Saul expresa una relación de dependencia entre el valor de las razones y la congruencia de los ángulos correspondientes. Idea que se mantiene a lo largo de la tarea y es registrada parcialmente más adelante. Él comenta:

> Pensemos más allá de lo común… Ya sé qué es… Profe, es que yo, pensando más allá, me di cuenta de que gracias a que esto [señala las razones conformadas por los lados correspondientes]… Que si los resultados son iguales los ángulos van a medir lo mismo.

Para la solicitud 1 de la actividad de recapitulación, los estudiantes describieron con detalle lo observado en los casos anteriores, relacionando los atributos ya determinados.

> Al explorar el caso inicial, el caso 1, 2, 3, 4, y 5, observamos que: *Nosotros nos dimos cuenta que gracias a los resultados de las divisiones de las medidas de los lados (en ejemplo ab/de)*[referencia hacia el atributo p_1] *, los ángulos son iguales* [referencia hacia el atributo q_1]*, si movemos los triángulos los ángulos van a seguir siendo los mismos en ambos triángulos, de igual forma el resultado de la división de las medidas de los lados van a coincidir (en ejemplo ab/de=3.5 y bc/ef= 3.5 y ac/df= 3.5)* [referencia hacia el atributo p_1] [respuesta solicitud 1 – actividad de recapitulación T1].

Al abordar la solicitud 2 de la actividad de recapitulación, los estudiantes manifestaron con seguridad la igualdad entre las medidas de los ángulos correspondientes. Reportan los ángulos correspondientes con igual medida, estableciéndose el atributo adicional q_3.

> Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es: *En todos los casos vistos la medida del ángulo FED y el ángulo ABC miden lo mismo, de igual forma el ángulo BAC y el ángulo FDE miden lo mismo y el ángulo BCA y el ángulo EFD miden lo mismo* [q_3] [respuesta solicitud 2 – actividad de recapitulación T1].

Durante el desarrollo de la solicitud 3, un estudiante se cuestionó sobre el significado de generalizar, ya que no tenía claro el concepto. El profesor explicó con un ejemplo y los estudiantes asumieron que en la solicitud anterior ya habían redactado la generalidad, por lo que copiaron y pegaron lo reportado de la solicitud 2.

Enseguida, en la actividad no explorada, los estudiantes encontraron una imagen con dos triángulos semejantes y las razones conformadas entre sus lados correspondientes, para este caso las herramientas del aplicativo se habían inhabilitado. El profesor comenta que para este caso no tienen que hacer nada y pregunta "¿Qué creen que va a pasar ahí?", a lo que Nidia responde "que todos los ángulos van a coincidir en la medida" [188], lo cual corresponde con lo que reportan.

> Lo que podemos inferir es: *Los ángulos van a coincidir como en los casos anteriores.* [respuesta solicitud caso final – actividad no explorada T1].

Al finalizar, se presentó la actividad de síntesis, que solicitaba a los estudiantes reportar la información analizada y descubierta durante el desarrollo de la tarea. Lo reportado por los estudiantes menciona la relación de dependencia entre las razones conformadas por los lados correspondientes y la congruencia entre los ángulos, la cual había sido expresada anteriormente por un estudiante del grupo.

En la actividad pudimos observar cosas nuevas como lo es que gracias al resultado de las divisiones de las medidas de los lados de los triángulos se determinan los ángulos de los mismos, para esto tuvimos que analizar las medidas de los lados y las medidas de los ángulos [respuesta solicitud – actividad de síntesis T1].

ANÁLISIS. En lo reportado por los estudiantes se evidencia un argumento inductivo completo. Durante la actividad de descubrimiento se establece el atributo definitorio p_1. En lo referente al atributo adicional, este se expresa de distintas maneras, que se unifican en el atributo adicional q_3. En la actividad no explorada, los estudiantes identifican un caso que pertenece al conjunto referencial e infieren que este cumple el atributo adicional q_3.

Los estudiantes no logran reportar el patrón de generalidad en la actividad que estaba pensada para tal fin, no obstante, un estudiante lo menciona durante el caso 5 de la actividad de exploración y en la actividad de síntesis. Sumado a eso, la relación de dependencia entre los atributos encontrados es expresada en lo reportado en la solicitud 1 de la actividad de recapitulación. Se resalta que, en esta respuesta, relacionan los atributos por medio de la condicional $p_1 \rightarrow q_1 \wedge p_1$. Para este argumento, se identifican tres formas de expresar el patrón de generalidad. La *Ilustración* 12 sintetiza el argumento producido por los estudiantes.

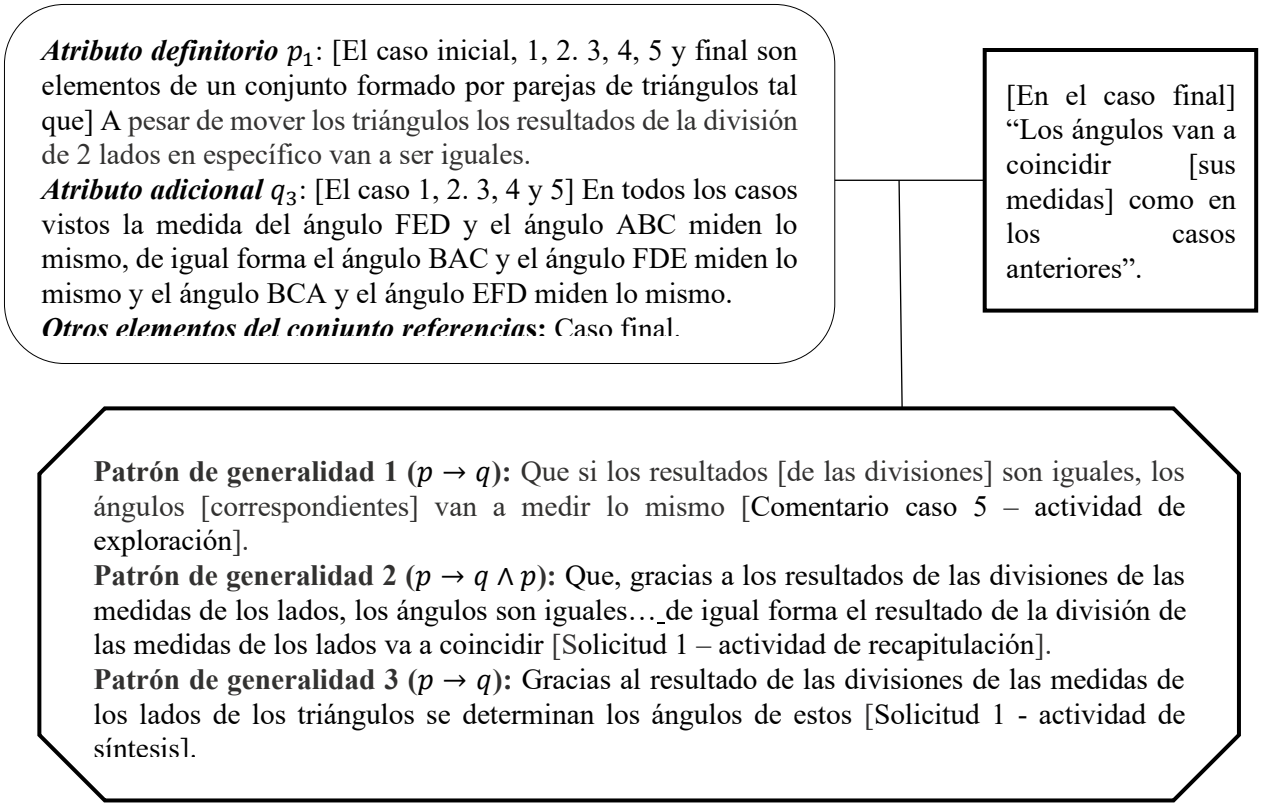


Ilustración 12 Argumento inductivo del Grupo 2 para la Tarea 1

Para el argumento construido en la tarea 2 por los estudiantes del grupo 2, se observa que, en el d*ato*, el atributo definitorio p_1 se relaciona con la igualdad del valor de las razones y el atributo adicional q_3 expresa la igualdad de la medida de los ángulos correspondientes, atributos que corresponden con el argumento esperado. No obstante, el atributo definitorio del conjunto de referencia no se expone claramente. Por lo anterior, los estudiantes se ubican en el Nivel 3 de especialización de esta categoría.

En relación con los c*asos observados*, los estudiantes se ubican en el Nivel 3, ya que analizan todos los casos presentados. Respecto al *patrón de generalidad*, en cualquiera de las tres versiones reportadas, se observa una relación de dependencia entre los atributos establecidos, por tanto, se ubican en el Nivel 4 de especialización. Al comparar las tres versiones observamos que todas reportan relaciones de dependencia, pero no por ello, proposiciones condicionales. El patrón de

generalidad 1 es un enunciado con una estructura condicional. El patrón de generalidad 2 muestra una dependencia de causa y efecto (gracias a… ocurre…). En este, la causa no una proposición, pero incluye el sujeto de la oración sobre el cual versaba la proposición p esperada (los resultados de las divisiones), mientras que el efecto si reporta conjunción entre las proposiciones p y q. Respecto al patrón de generalidad 3, también refleja una relación de causa y efecto, sin que se reporten proposiciones. En la *aserción* se ubican en el Nivel 4 de especialización, pues logran inferir que el elemento presentado en el aplicativo caso final pertenece al conjunto referencial y cumple con el atributo adicional q_3.

Con relación al uso de GeoGebra, el grupo 2 no presentó dificultades significativas en el uso de las herramientas. No obstante, en la actividad de descubrimiento el profesor motiva a los estudiantes a usar el arrastre con el fin de explorar los triángulos. Por lo anterior, en las siguientes actividades se deben resaltar la importancia de arrastrar los objetos para poder identificar los atributos que tiene el conjunto referencial. Por otra parte, la interfaz de los aplicativos ayudó a que los estudiantes identificaran y describieran la igualdad de las medidas de los ángulos, con expresiones como "la medida del ángulo FED y el ángulo ABC", como se reporta en la solicitud 2 de la actividad de recapitulación.

Finalmente, respecto al lenguaje empleado, los estudiantes utilizan el término "coincidir" para referirse a la igualdad de la medida de los ángulos. Se observa que algunas expresiones están condicionadas al uso de herramientas de los aplicativos. Por ejemplo, usan la expresión "a pesar de mover" para expresar atributos que se mantienen al arrastrar objetos en los aplicativos. Además, se observa que los condicionales establecidos por los estudiantes se expresan de dos formas: "si …" y "gracias a …".

Grupo 3

DESCRIPCIÓN. Los estudiantes midieron los lados de los triángulos presentados en la actividad de descubrimiento e ingresaron las medidas en las casillas, determinando un valor para las razones expuestas. La respuesta de esta actividad se compone del atributo definitorio p_1– versión 1.

> Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial**: *Podemos evidenciar dos triángulos rectángulos con longitudes diferentes* (p_{11}) *pero al dividir un lado del triángulo A y un lado del triángulo B* [dividir la medida de un lado del triángulo entre la correspondiente medida de lado de otro triángulo] *nos da el mismo resultado* [p_1– versión 1] [respuesta solicitud caso inicial - actividad de descubrimiento T1].

En la actividad de exploración, los estudiantes no presentaron dificultades significativas en medir los ángulos de los triángulos del caso 1 y establecieron que "tienen los mismos ángulos". El profesor cuestionó lo que identificaron, resaltando que "no son el mismo ángulo porque están en un lugar diferente del plano", logrando que determinaran que en realidad tienen "el mismo valor". Lo reportado para esta actividad, se compone del atributo adicional q_1 - versión 1 y del atributo definitorio p_2 - versión 1.

> Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**: *Los ángulos no son los mismos* [q_1 - versión 1] *ya que los triángulos son de diferente tamaño* [p_2 - versión 1], *pero el valor de sus ángulos es el mismo* [q_1 - versión 1] [respuesta solicitud caso 1 - actividad de exploración T1].

En el caso 2, los estudiantes midieron los ángulos de los triángulos y determinaron que "tienen el mismo valor". El profesor sugirió a los estudiantes que arrastraran los vértices, mostrando que los triángulos podían cambiar de tamaño. Durante la exploración y al momento reportar lo encontrado, Hany realizó la siguiente afirmación: "Si el valor de los ángulos es igual, el valor de las divisiones va a dar igual a cada una" [comentario caso 2 – actividad de exploración]. Luego, los estudiantes reportaron lo que hallaron para el caso 2, que se compone de las expresiones p_{14} y q_{13}.

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 2**: *no importa el tamaño de los triángulos el valor del ángulo es el mismo* [respuesta solicitud caso 2 - actividad de exploración T1].

Para el caso 3, 4 y 5, los estudiantes midieron los ángulos y determinaron que es "lo mismo", por lo que copiaron la respuesta del caso 2 y lo pegaron en la solicitud de los casos 3, 4 y 5. Se resalta que, durante la exploración de estos casos, Hany comenta "que los triángulos son distintos en su tamaño… como semejantes, pero el valor de los ángulos es el mismo". No obstante, no reportaron lo referente a la semejanza en las respuestas de la actividad de exploración.

En la solicitud de la actividad de recapitulación, los estudiantes se enfocaron en comentar acciones realizadas en los aplicativos; ellos reportan que "hemos explorado la forma de hallar los lados de un triángulo y sus ángulos en la aplicación". En la solicitud 2, la respuesta se enfocó en describir lo más relevante que encontraron en la actividad de exploración. Lo reportado para esta solicitud se compone del atributo definitorio p_1- versión 2 y del atributo adicional q_1 - versión 2

Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es: *hemos encontrado que todos los triángulos son semejantes* [p_1- versión 2]*y todos sus ángulos eran los mismos por ende no importaba el tamaño* [q_1 - versión 2] [respuesta solicitud 2 - actividad de recapitulación T1].

En la solicitud 3 de la actividad de recapitulación, se solicitó a los estudiantes escribir una generalidad a partir de lo encontrado anteriormente, no obstante, un integrante del grupo comentó que una generalidad es "que se cumple siempre", por lo que reportaron lo siguiente:

A partir de lo anterior podemos afirmar que (escribir una generalidad): *Todos los ángulos son los mismos.* [respuesta solicitud 2 - actividad de recapitulación T1].

En la actividad no explorada, al no tener habilitadas las herramientas, los estudiantes quedaron un poco confundidos, no obstante, al leer el enunciado y puntualizar en la palabra inferir, establecieron que debían hacer una conclusión sobre lo que observaban. Lo primero que

determinaron fue que “un triángulo es el doble que el otro”, no obstante, Hany propuso lo que escriben como respuesta en la solicitud.

> Lo que podemos inferir es: *Los lados de los triángulos son semejantes si el valor de los ángulos es igual* [respuesta solicitud caso final - actividad no explorada T1].

El profesor solicitó a los estudiantes que aclararan lo que significaba “los lados de los triángulos son semejantes” y los estudiantes comentaron que “si AB divide ED, el resultado es el mismo con el BC y EF… y así” [Atributo definitorio p_1 - versión 3]. Ya para finalizar, resolvieron la actividad de síntesis, la cual consistió en reportar la información analizada y descubierta durante el desarrollo de la tarea. La respuesta en esta actividad relaciona lo que habían comentado en la actividad no explorada. Ellos reportaron:

> *La actividad que realizamos el día de hoy fue analizar los diferentes tipos de triángulos y observar sus ángulos para sacar una conclusión la cual es: los lados de los triángulos son semejantes si el valor de los ángulos es igual.* [respuesta solicitud - actividad de síntesis T1].

ANÁLISIS. En las respuestas de la Tarea 1 del Grupo 3, identificamos un argumento inductivo. En este argumento encontramos dos atributos definitorios. El primer atributo definitorio p_1 presenta tres versiones, que corresponde a tres formas que los estudiantes utilizaron para referirse a un mismo atributo relacionado con que las razones entre los lados correspondientes de los triángulos son iguales. Respecto al segundo atributo definitorio p_2 versión 1, mencionan que “los triángulos son de diferente tamaño”. Para el atributo adicional q_1 se presentan dos versiones. La versión 1 se relaciona con que los ángulos no son los mismo [están en diferente lugar del plano], pero tienen el mismo valor. La versión 2 se relaciona con que los ángulos son los mismo sin importar el tamaño de los triángulos. Los estudiantes establecen tres patrones de generalidad. El primero, Hany lo enuncia verbalmente durante el caso 2 de la actividad de exploración. El segundo se establece en la solicitud 2 de la actividad de recapitulación. El tercero se enuncia en la actividad no

explorada y de síntesis. Al final de la tarea, en la actividad no explorada, los triángulos presentados son reconocidos como un elemento que pertenece conjunto referencial, para los cuales realizan una aserción. El argumento desarrollado se sintetiza en la *Ilustración* 13.

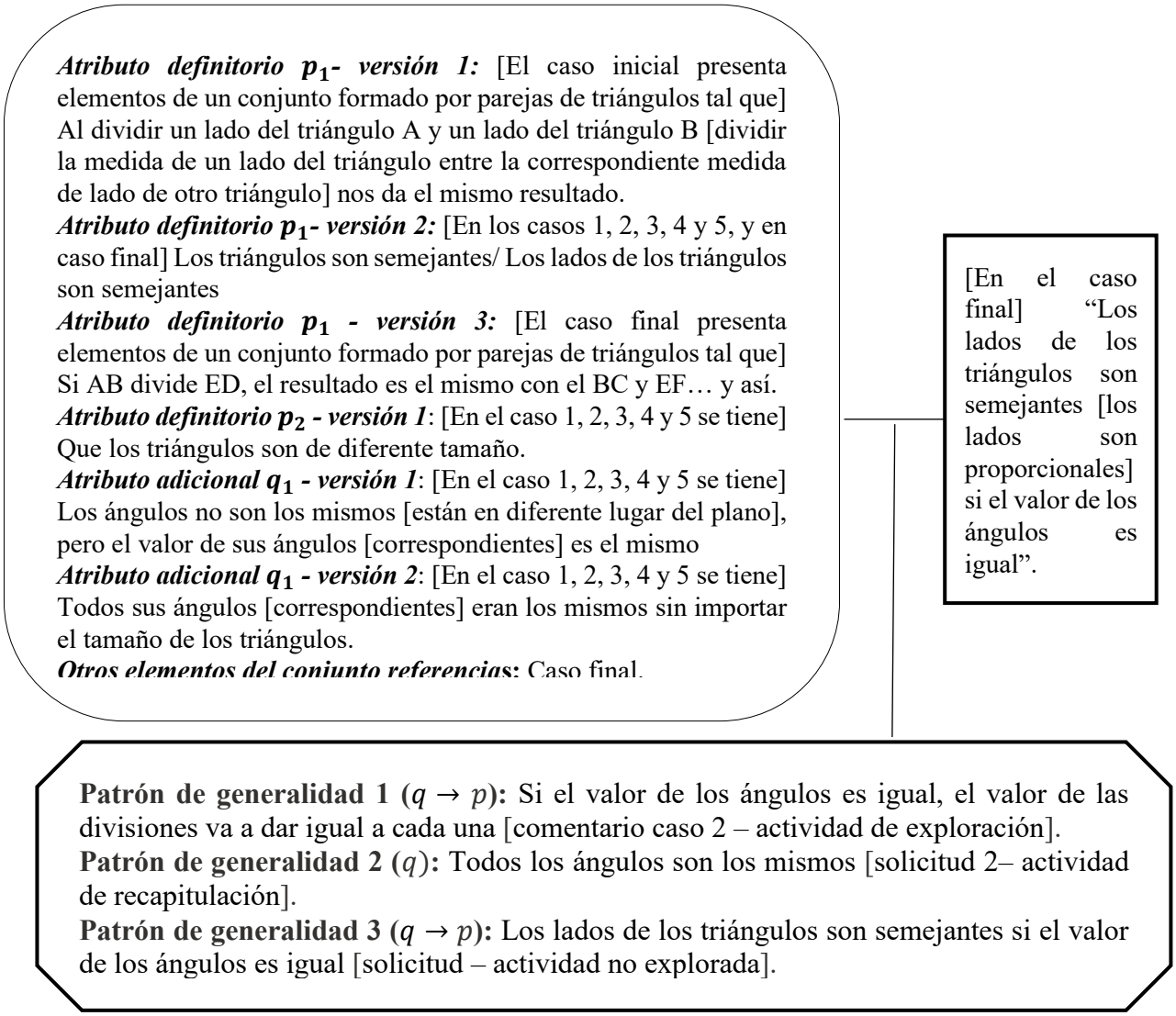


Ilustración 13 Argumento inductivo del Grupo 3 para la Tarea 1

Para este argumento, los estudiantes establecen implícitamente dos atributos definitorios p_1 y p_2. Consideramos que el atributo definitorio p_1 versión 2 es el que se tiene en cuenta para el análisis, ya que corresponde a la expresión que más usaron al responder a cada una de las solicitudes de la tarea. Respecto al atributo adicional q_1, las dos versiones corresponden con el atributo

adicional esperado, no obstante, es el atributo adicional q_1 versión 1 el que mejor encapsula lo encontrado por los estudiantes. En consecuencia, considerando el atributo definitorio p_1 versión 2 y adicional q_1 versión 1, ubicamos a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización del *dato*, pues se reconoce un conjunto referencial e identifica un atributo adicional.

Respecto a los *casos explorados*, solo analizan los cinco casos de la actividad de exploración y no se busca un contraejemplo, que contradiga el patrón de generalidad, por tanto, se encuentran en el Nivel 3 de esta categoría.

Al observar los patrones construidos, se determina que el patrón 2 es solo una proposición simple en relación con el atributo adicional q_1 versión 1. Para los patrones de generalidad 1 y 3, los estudiantes establecen una relación de dependencia, en el cual el atributo definitorio depende del atributo adicional. Ya que la estructura condicional que domina es lo reportado en los patrones de generalidad 1 y 3, se ubica a los estudiantes en el Nivel 3 de especialización de la categoría *patrón de generalidad*.

En la *aserción*, identifican un elemento adicional que pertenece al conjunto referencial, que está expuesto en el caso final de la actividad no explorada, para el cual infieren una aserción que no corresponde con el atributo adicional q_1 versión 1, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 3 de especialización.

En relación con el uso de GeoGebra, los estudiantes presentan pocas dificultades en utilizar la herramienta medida de ángulo y longitud. En lo concerniente a la herramienta mover, se evidencia que no están familiarizados en la exploración de objetos usando el arrastre, ya que, el profesor fue el que sugirió usar la herramienta para explorar más casos.

En cuanto al lenguaje empleado por los estudiantes, al igual que en la tarea 1 de los grupos 1 y 2, está determinado por el programa. Expresiones como “no importa el tamaño” manifiestan trasformaciones de los objetos que se pueden realizar usando el arrastre de puntos. El grupo utiliza

la expresión “lados de los triángulos son semejantes” para referirse a que los lados de los triángulos son proporcionales y “son los mismos ángulos” para referirse a que la medida de los ángulos correspondientes es igual. Se resalta el uso de la expresión “si____ el___” o “los lados de los triángulos son … si…” para establecer el patrón de generalidad. Finalmente, la forma que van transformando lo que escriben de acuerdo con lo que van discutiendo, deriva en varias versiones para los atributos definitorios, adicional y en las tres formas de expresar el patrón de generalidad, las tres versiones del atributo definitorio del conjunto referencial y las dos versiones del atributo adicional de los elementos de dicho conjunto. Además, el lenguaje de los estudiantes durante el desarrollo de la tarea se caracterizó por atribuir a las relaciones observadas y descubiertas, expresiones matemáticas que tenían familiarizadas pero que no siempre utilizaban adecuadamente (por ejemplo, utilizaban “lados semejantes” para referirse a las razones entre los lados correspondientes de triángulos semejantes). El surgimiento de estas expresiones se pudo presentar debido a las dinámicas propias de las clases de geometría en las que han estado inmersos. Las intervenciones que realizó el profesor solicitando a los estudiantes clarificar la interpretación que ellos daban a las expresiones usadas permitieron identificar las relaciones que habían logrado descubrir.

Síntesis Tarea 1

En la Tabla 8 recopilamos los niveles de especialización de los argumentos inductivos de cada grupo en la Tarea 1, en cada una de las categorías analizadas.

Tabla 8 Síntesis de los niveles de los argumentos inductivos encontrados en la Tarea 1

	Argumento	Dato	Casos observados	Patrón de generalidad	Aserción
G1	Primer	Nivel 4	Nivel 2	Nivel 1	Nivel 4
	Segundo	Nivel 4	Nivel 2	Nivel 1	Nivel 4
G2	Único	Nivel 3	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4

G3	Único	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 3	Nivel 3

La tarea permite en los tres grupos el surgimiento de argumentos inductivos, aunque para el Grupo 1 hemos evidenciado un argumento inductivo incompleto, ya que falta la explicitación del patrón de generalidad. Además, permitió que los estudiantes lograran explicitar los elementos que componen el *dato* del argumento inductivo. En la fase de exploración los estudiantes lograron identificar el conjunto referencial, su atributo definitorio y el atributo adicional que cumplen los elementos del conjunto, aunque el grupo 2 haya presentado dificultades para expresar el atributo definitorio se destaca que todos los grupos lograron identificar la mayoría de los elementos del dato. Por lo tanto, es conveniente que la fase de exploración se conserve en el diseño de las siguientes tareas.

La similitud en la estructura (color, forma, nombres, enunciados) de los *casos explorados* generó que los estudiantes no alcanzaran el nivel de especialización para esta categoría. En primer lugar, porque la estructura de los aplicativos propuestos no permitía que se buscaran contraejemplos pues la restricción de las herramientas realizadas no permitía el arrastre libre de los vértices de los triángulos. En segundo lugar, se logró evidenciar que los estudiantes no exploraron todos los casos, en algunos casos se remitían a dos o tres casos y para cada caso nuevo veían la necesidad de especificar nuevas características a las ya descubiertas. Como modificación para las siguientes tareas se propone que solo se presente un caso de exploración en el que se privilegie el arrastre los objetos presentados en el aplicativo.

Para proponer el *patrón de generalidad* los tres grupos presentan resultados diferentes. El grupo 1, no propone patrón de generalidad, en el desarrollo de la tarea manifestaron no conocer el significado de la palabra inferir, lo cual pudo haber generado que el reporte que hicieron en la solicitud no relacionara los atributos descubiertos. El grupo 3 reporta un patrón de generalidad en el que existe una relación de dependencia en la que el atributo definitorio *p* depende del atributo

adicional q. Es posible que esto se haya presentado debido a la estructura que tiene el patrón de generalidad y para este grupo no exista diferencia entre la relación propuesta y la esperada. En próximas tareas se puede hacer uso de plantillas en las que los estudiantes puedan identificar la relación de dependencia entre los atributos identificados en la tarea. Esta modificación también la proponemos ya que en la actividad de síntesis esperábamos que los estudiantes construyen expresiones en las que se relacionaran el dato, la garantía y la aserción y como no sucedió es necesario incluirse en próximas tareas.

Finalmente, la especificación del caso adicional permitió que los estudiantes pudieran en primer lugar, identificar uno de los elementos del dato al identificar un elemento del que se sabía que cumplía el atributo definitorio, pero no se sabía si cumplía el atributo adicional. El grupo 3 realiza el reporte de la aserción presentando un atributo adicional al descubierto. Este inconveniente puede solucionarse con la inclusión de la plantilla mencionada anteriormente.

Por otro lado, en relación con el uso de GeoGebra los tres grupos presentaron inicialmente dificultades para usar la herramienta medir ángulos. Aunque se solucionaron rápidamente en futuras tareas para las que sea necesario usar una herramienta nueva puede incluirse una pequeña descripción para facilitar su uso. También se destaca que los estudiantes en su mayoría no estaban familiarizados con la herramienta arrastre. Su uso fue direccionado únicamente en la verificación de propiedades, no se presentó búsqueda de contraejemplos. Lo anterior, puede deberse a la estructura que tenían los diferentes casos que tenían explorar, ya que no todos los vértices de los triángulos podían moverse. En las siguientes tareas, se debe tener en cuenta la inclusión de construcciones en los que se potencie el arrastre, esto puede permitir no solo que los estudiantes logren buscar contraejemplos, sino que puedan identificar la relación de dependencia entre los atributos p y q.

Para terminar, el lenguaje que usan los estudiantes está fuertemente ligado a GeoGebra, lo que implica que sus argumentos son más cercanos al artefacto que a los de la comunidad matemática.

Sus expresiones se centran en la descripción de lo observado en el aplicativo mientras interactúan con él y son comunes el uso de expresiones como “los ángulos van a coincidir”, “cuando movemos el triángulo”, “los ángulos son los mismos”. En los tres grupos se presentó que se usaban expresiones matemáticas no especializadas para referirse a propiedades similares a las exploradas en las clases de geometría en las que habían estado inmersos.

Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 2

Grupo 1

DESCRIPCIÓN. En esta sesión solo estuvieron presentes dos estudiantes, Johan y Joaquín. Se inició la tarea con la actividad de práctica, que consistió en utilizar la herramienta *Crear Triángulos*. Luego, en la actividad de descubrimiento, se les indicó crear un nuevo triángulo usando la herramienta *Crear Triángulos*, con el fin de encontrar una característica común entre los triángulos. En principio, los estudiantes presentaron dificultades para usar la herramienta, olvidaron las instrucciones que se explicitaban al inicio de la actividad inicial. La herramienta estaba diseñada para que seleccionaran vértices del triángulo en un orden específico (primero A, luego B, enseguida C y por último un punto fuera del triángulo). Acción que no siempre hicieron lo cual generó que algunos de los triángulos construidos no fueran elementos del conjunto referencial esperado. No obstante, lograron superar la dificultad y establecieron la característica solicitada. En lo reportado por los estudiantes se observa un atributo definitorio p_1.

> La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta Crear Triángulos es: *No importa el tamaño de los triángulos sus ángulos A, B y C* [en correspondencia con G, H e I] *serán los mismos* [misma medida] *en los diferentes triángulos* [p_1] [respuesta solicitud caso inicial - actividad de descubrimiento T2].

Una vez identificada la característica común entre los triángulos, continuaron solucionando la tarea. En la actividad de exploración, los estudiantes midieron los lados de dos triángulos (uno

dado y otro construido con la herramienta Crear Triángulos) e ingresaron estas medidas en casillas de entrada, logrando establecer una relación entre los triángulos. El profesor cuestionó si la relación se cumplía para más triángulos. Inmediatamente, arrastraron los vértices y comprobaron para otro triángulo creado. Al verificar que se cumplía la relación, establecieron lo siguiente, que corresponde con un atributo definitorio q_1.

> Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes: *Que, aunque movamos el triángulo inicial* [triángulo dado]*, el resultado de las divisiones de las medidas de sus lados* [correspondientes] *son congruentes* [iguales] [q_1] [respuesta solicitud creación de casos - actividad de exploración T2].

Posteriormente, en la actividad no explorada, se presentó una pareja de triángulos semejantes con las medidas de sus ángulos, y se solicitó a los estudiantes inferir una característica para los triángulos. Los estudiantes reportaron:

> Lo que podemos inferir es: *Que el ángulo C3 y F1 son iguales, E1 y B3 son iguales y que A3 y D1 son iguales.* [respuesta solicitud - actividad no explorada T2].

Al pasar a la actividad de síntesis, reportaron la información que habían encontrado, comentando lo siguiente:

> *Nosotros encontramos que podíamos elegir el tamaño del triángulo que creamos y que no importa cuánto moviéramos sus vértices los ángulos seguían midiendo lo mismo algunas veces* [p_1]*, también nos dimos cuenta de que al dividir los lados de los dos triángulos el resultado de la división era la misma* [q_1] [respuesta solicitud - actividad de síntesis T2].

Por último, para la actividad de recapitulación, se presentó una pareja de triángulos semejantes con las medidas de sus respectivos ángulos. Los estudiantes debían completar 5 campos en una plantilla discursiva considerando los triángulos presentados y lo trabajado en las actividades anteriores; en el último campo se presentaba casillas para ingresar las etiquetas de los lados de los

triángulos. El siguiente argumento es el construido por los estudiantes al completar la plantilla discursiva.

> La herramienta crear triángulo permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que *la medida de los ángulos es igual* (campo 1). En algunas de esas parejas observamos que *sus tamaños son diferentes pero sus ángulos iguales* [atributo adicional q_2] (campo 2). Inferimos que siempre que en una pareja de triángulos se cumple que *sus ángulos midan lo mismo* (campo 3), también se puede concluir que *el resultado de la división de sus lados sea la misma* (campo 4). Así, por ejemplo, en el ΔABC y ΔDEF se pudo concluir que $\frac{MK}{PQ} = \frac{JK}{NP} = \frac{JM}{NQ}$ (campo 5) porque se tiene que $\angle J \cong \angle N$, $\angle K \cong \angle P$ y $\angle M \cong \angle Q$. [respuesta solicitud - actividad de recapitulación T2].

ANÁLISIS. En la tarea 2 se reportan dos argumentos inductivos. El primer argumento es incompleto y no se evidencia un patrón de generalidad. Para este argumento, el atributo definitorio p_1 se identifica en la actividad de descubrimiento. El atributo adicional q_1 se encuentra en la actividad de exploración y la aserción se enuncia en la actividad no explorada. La *Ilustración* 14 sintetiza el argumento construido por los estudiantes.

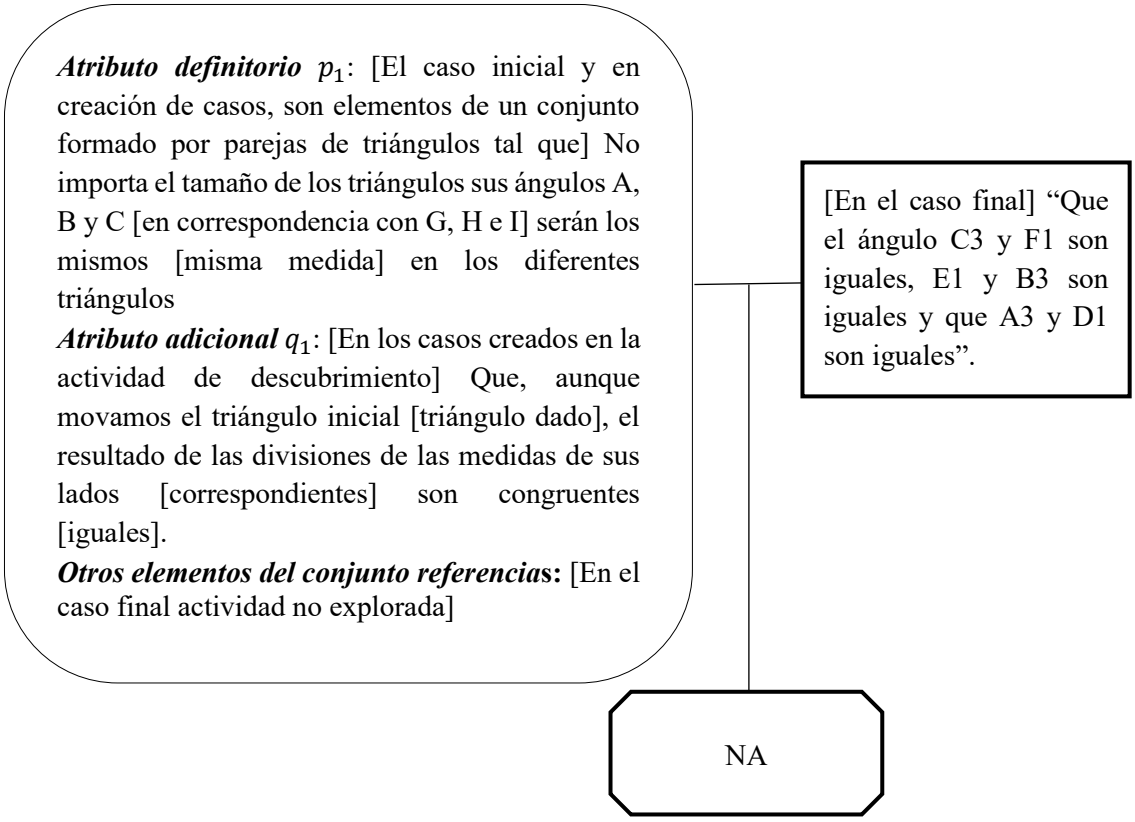


Ilustración 14 Primer argumento inductivo del Grupo 1 para la Tarea 2

En cuanto este primer argumento, se tiene que el atributo definitorio p_1 cuenta con dos condiciones. En primer lugar, se encuentra la diferencia de tamaño de los triángulos y la segunda corresponde con la igualdad de medidas de los ángulos correspondientes. En relación con el atributo adicional q_1, este hace referencia a lo esperado respecto a la igualdad de resultados de las divisiones entre lados correspondientes. Por lo anterior, los estudiantes se encuentran en el Nivel 4 de especialización del *dato*, pues establecen el atributo que define al conjunto referencia e identifican un atributo adicional del mismo.

En relación con los *casos observados*, los estudiantes solo se limitan a los casos que se pueden crear con la nueva herramienta y no buscan un contraejemplo para reafirmar el patrón de generalidad, por tal motivo se ubican en el Nivel 3 de especialización para esta categoría. Para la *aserción*, solo identifican que los triángulos pertenecen al conjunto referencial e infieren que estos

cumplen el atributo p_1, por tanto, se ubican en el Nivel 2 de especialización. Y como no se presenta un *patrón de generalidad* se ubican en un Nivel 1

El segundo argumento se encuentra en la actividad de recapitulación, donde los estudiantes completaron una plantilla discursiva que facilitaba la redacción de este. En esta plantilla, la primera oración corresponde con el atributo definitorio, la segunda con el atributo adicional, la tercera con el patrón de generalidad y la última con la aserción.

Los estudiantes debían completar 5 campos de la plantilla discursiva haciendo uso de los atributos encontrados. El atributo definitorio p_1 para los campos 1 y 3 y el atributo adicional q_1 en los campos 2 y 4. En el campo 5 debían completar las razones conformadas por las medidas de los lados correspondientes de los triángulos presentados. En los campos 1 y 3, lo reportado corresponde con el argumento esperado, sin embargo, el campo 2 reporta un atributo adicional q_2 , mientras que el campo 4 se relaciona con el atributo adicional q_1; en el campo 5 se establecen las proporciones esperadas. La *Ilustración* 15 sintetiza el argumento construido por los estudiantes.

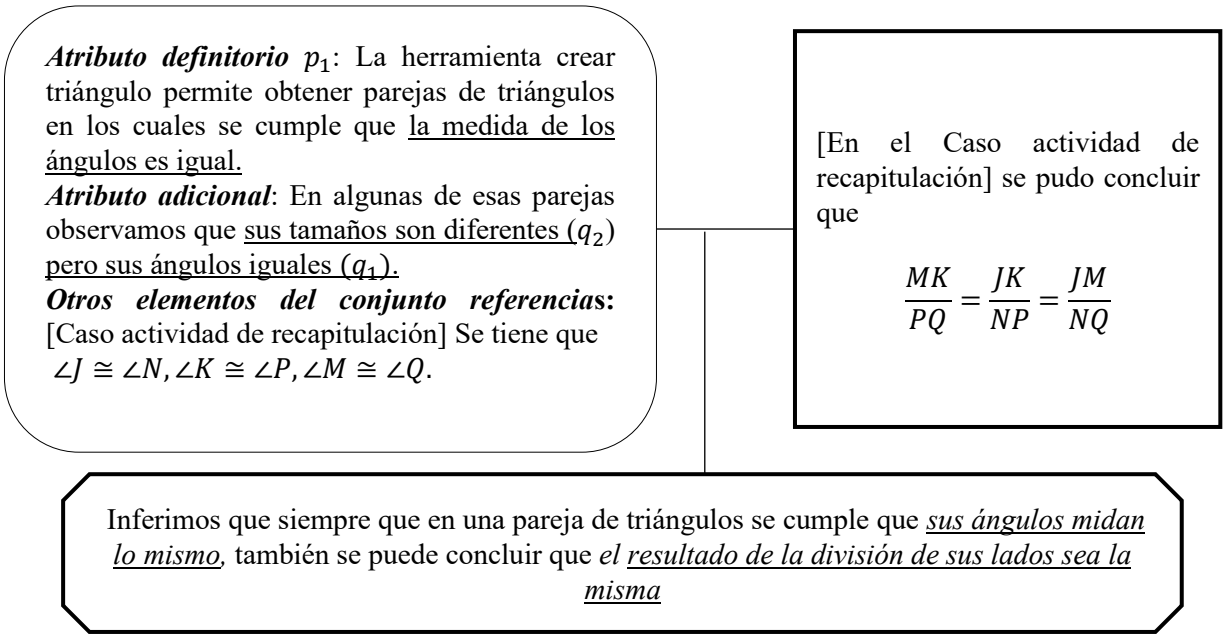


Ilustración 15 Segundo argumento inductivo del Grupo 1 para la Tarea 2

En el segundo argumento, los estudiantes se ubican en el Nivel 2 de especialización de la categoría *dato*, debido a que, el atributo definitorio p_1 se relaciona apropiadamente con la igualdad de las medidas de ángulos correspondientes, y aunque los estudiantes determinaron un atributo q_1 que corresponde con el atributo adicional esperado (razones entre los lados de dos triángulos son iguales), reportan otro atributo adicional q_2.

En los *casos observados*, los estudiantes se quedan con los casos explorados sin buscar un contraejemplo, por tanto, se ubican en el Nivel 3 de especialización de esta categoría. Respecto al *patrón de generalidad,* reconocen la relación de dependencia entre el atributo definitorio p_1 y el atributo adicional q_1, por lo que podemos ubicarlos en el Nivel 4 de especialización. Y para la *aserción*, identifican el caso presentado en la actividad de recapitulación como un elemento más del conjunto referencia y concluyen que este cumple con el atributo adicional q_1, por tanto, se encuentra en un Nivel 4 de especialización.

Con relación al uso de GeoGebra en la Tarea 2, se evidencia que la herramienta contribuyo a la identificación de los atributos definitorio y adicional. Por tanto, se resalta el potencial de programar nuevas herramientas ya que facilitan la identificación de atributos, no obstante, las indicaciones que se entregan a los estudiantes deben ser concretas y fáciles de recordar ya que, para la actividad de práctica, los estudiantes presentaron dificultades al aprender a utilizar la herramienta *Crear Triángulos* por la cantidad de pasos que se tenían que hacer para crear un triángulo. También, se destaca que este tipo de herramientas brinda la posibilidad de obtener muchos elementos del conjunto referencial, lo cual permite realizar exploraciones de más casos. Para próximas tareas, dentro de la programación de la herramienta, no se consideró la generación automática de etiquetas para los vértices en los triángulos, confundiendo a los estudiantes.

Para la actividad no explorada, los estudiantes presentaron la misma dificultad de la actividad no explorada de la Tarea 1, pues al no estar habilitadas las herramientas, solo reportaron lo que observaron. En este caso solo reportaron la congruencia de los ángulos correspondientes.

Respecto a las herramientas propias de aplicativo, la herramienta distancia y la herramienta longitud fueron usada sin inconvenientes. Para la herramienta mueve, que genera el arrastre de los objetos, esta sigue siendo fundamental para la identificación de invariantes que permiten establecer los atributos definitorios y adicionales.

En relación con el lenguaje empleado por los estudiantes, en lo reportado se observa que usan el término "congruentes" [resultados de las divisiones] para referirse a resultados iguales, aunque en menor frecuencia que la Tarea 1. También, cuando reportan alguna característica como "la medida de los ángulos es igual", omiten que es entre ángulos correspondientes, para esta expresión se refieren a que la medida de sus ángulos correspondientes es igual. Además, se mantiene que el arrastre sigue influyendo en el lenguaje empleado y se evidencia cuando reportan expresiones como "que, aunque movamos" o "no importa cuánto los moviéramos". Por último, se observa que en esta tarea los estudiantes expresan mejor sus ideas en contraste con los reportado en la tarea anterior.

Grupo 2

DESCRIPCIÓN. Se inició la Tarea 2 con la actividad de práctica, la cual tenía como fin aprender a usar la herramienta Crear Triángulos. Los estudiantes lograron usar la herramienta después de que el profesor les explicará cómo usarla. Luego, en la actividad de descubrimiento, los estudiantes tenían un triángulo y crearon otro con la nueva herramienta; luego midieron sus ángulos y observaron que los ángulos correspondientes tenían la misma medida. Además, establecieron que, el tamaño del triángulo creado estaba en función del valor que previamente debían ingresar al usar la herramienta. En lo registrado se encuentra un atributo definitorio p_1.

La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos* es: *que los ángulos de los triángulos son los mismos y también nos dimos cuenta de que el número que uno pone* [valor solicitado por la herramienta] *varía el tamaño del triángulo* [p_1] [respuesta solicitud caso inicial - actividad de descubrimiento T2].

En la actividad de exploración, los estudiantes crearon un triángulo a partir del triángulo dado con la herramienta *Crear Triángulos* y midieron los lados de estos, para luego ingresar las medidas en casillas, la cuales estaban ubicadas para formar razones compuestas por los lados correspondientes. Los estudiantes arrastraron los vértices del triángulo dado y observaron que esto alteraba el triángulo creado y consideraron que "lo mismo que habíamos encontrado en el otro" [refiriéndose a la tarea anterior]. El profesor los motivó a crear otros casos arrastrando el triángulo dado, para que luego ingresaran las medidas de los lados en las casillas establecidas con el fin de confirmar lo encontrado. En esta actividad los estudiantes establecen el atributo adicional q_1.

Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes: *Que el resultado de la división de las medidas de los lados de los triángulos coinciden en los 3 casos, los triángulos tienen los mismos ángulos* [q_1] [respuesta solicitud creación de casos - actividad de exploración T2].

En la actividad no explorada, Saul se cuestionó sobre el significado de "inferir" y con la explicación del profesor, que, por medio de un ejemplo resolvió la duda, el grupo reportó:

Lo que podemos inferir es: *Que el resultado de la división de las medidas de los lados también va a coincidir como fue en el caso anterior* [respuesta solicitud – actividad no explorada T2].

Durante la actividad de síntesis, los estudiantes retomaron los atributos encontrados hasta el momento, comentando que:

Que mientras los ángulos de los triángulos coincidan, la división de las medidas de los lados de los triángulos, van a ser iguales en los 3 casos. [respuesta solicitud – actividad no síntesis T2].

En la actividad de recapitulación los estudiantes encontraron una pareja de triángulos semejantes y una plantilla discursiva para completar. Ellos comenzaron a diligenciar los campos de acuerdo con lo que habían observado. El profesor interviene en el momento que están completando el campo que sigue después de "también se puede concluir que" y hace referencia sobre lo comentado en la actividad de exploración, respecto a lo qué es inferir. Los estudiantes regresaron a la actividad de síntesis y retomaron lo que habían escrito. El profesor los cuestionó respecto a si lo reportado en la actividad de síntesis se podía conectar con lo que estaban escribiendo, no obstante, asumieron que esa era la respuesta y copiaron lo escrito en la solicitud de esta actividad. Al finalizar esta actividad, el profesor comentó a los estudiantes que debían completar las casillas con las etiquetas de los lados de los triángulos que se observan en el aplicativo de la actividad. Lo establecido por los estudiantes en la plantilla discursiva se expone a continuación:

> La herramienta crear triángulo permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que *los ángulos y las divisiones de las medidas de los lados de los triángulos serán iguales* [atributo definitorio p_2] (campo 1). En algunas de esas parejas observamos que *los tamaños de los triángulos en los casos son diferentes* [atributo adicional q_2] (campo 2). Inferimos que siempre que en una pareja de triángulos se cumple que *los ángulos son iguales* (campo 3), también se puede concluir que mientras *los ángulos de los triángulos coincidan, la división de las medidas de los lados de los triángulos, van a ser iguales en los 3 casos* (campo 4). Así, por ejemplo, en el ΔABC y ΔDEF se pudo concluir que $\frac{PQ}{MK} = \frac{QN}{JM} = \frac{PN}{JK}$ (campo 5) porque se tiene que $\angle J \cong \angle N$, $\angle K \cong \angle P$ y $\angle M \cong \angle Q$. [respuesta solicitud - actividad de recapitulación T2].

ANÁLISIS. Se observan dos argumentos inductivos. En el primer argumento, el atributo definitorio p_1 se describe en la actividad de descubrimiento y en la actividad de exploración se

identifica el atributo adicional q_1. Para la actividad no explorada, los estudiantes establecen otro elemento que pertenece al conjunto referencial e infieren que este cumple con el atributo adicional q_1. En cuanto a la actividad de síntesis, se observa un patrón de generalidad. Los elementos del argumento inductivo anteriormente descrito se sintetizan en la *Ilustración* 16.

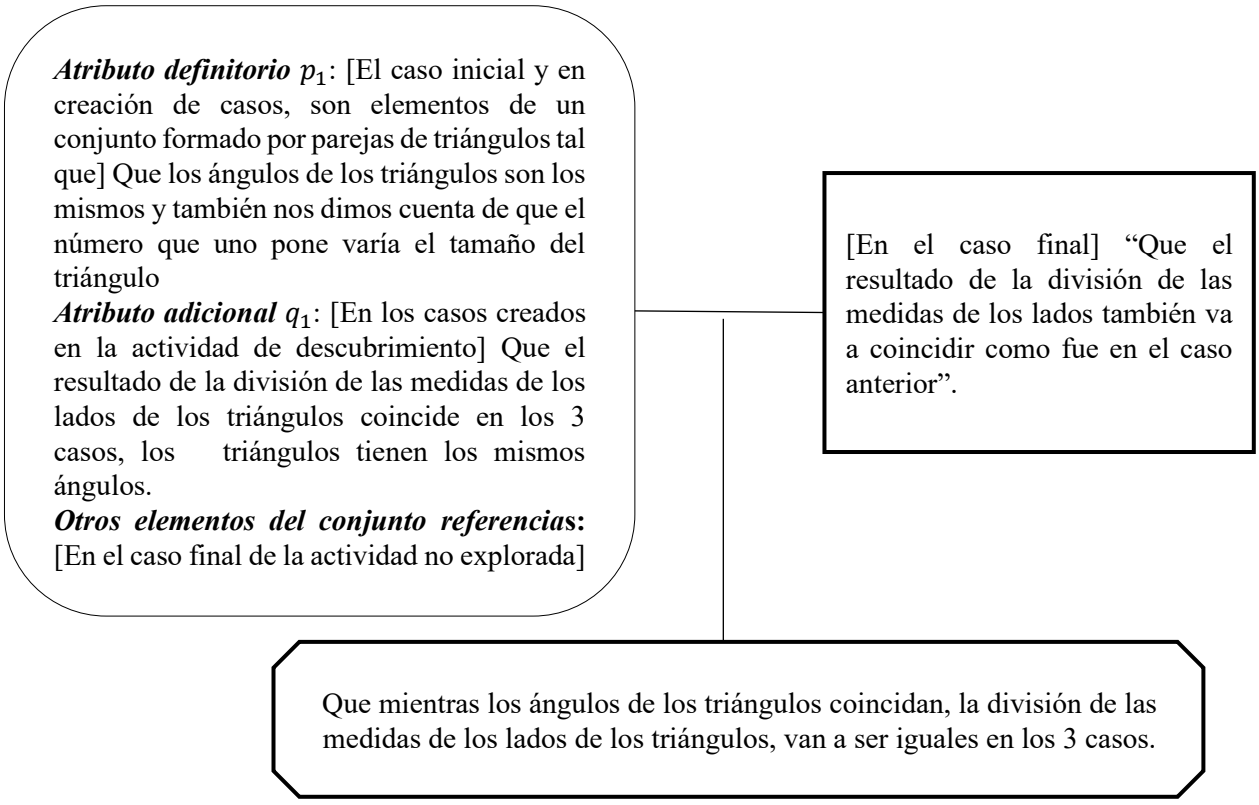


Ilustración 16 Primer argumento inductivo del Grupo 2 para la Tarea 2

Respecto a este primer argumento, se tiene que el atributo definitorio p_1 y adicional q_1 se relacionan con la igualdad de medida de los ángulos correspondientes y la igualdad de los resultados de las divisiones entre la medida de los lados correspondientes, que son los atributos esperados. Por consiguiente, ubicamos a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*.

Para los casos observados, los estudiantes solo analizan los casos creados con la herramienta *Crear Triángulos* y no se evidencia la búsqueda de un contraejemplo. Considerando lo anterior, los estudiantes se encuentran en el Nivel 3 de especialización para esta categoría. En lo respectivo al

patrón de generalidad, se evidencia que los estudiantes establecen una relación en la cual el atributo adicional depende del atributo definitorio, por tanto, los estudiantes se encuentran en el Nivel 4 de especialización. En relación con la *aserción*, los estudiantes identifican los triángulos presentados en el caso final como un elemento que pertenece al conjunto referencial, logrando inferir que estos cumplen el atributo adicional q_1, por lo que ubicamos a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización para esta categoría.

El segundo argumento se establece en la actividad de recapitulación. Su estructura se sintetiza en la *Ilustración* 17.

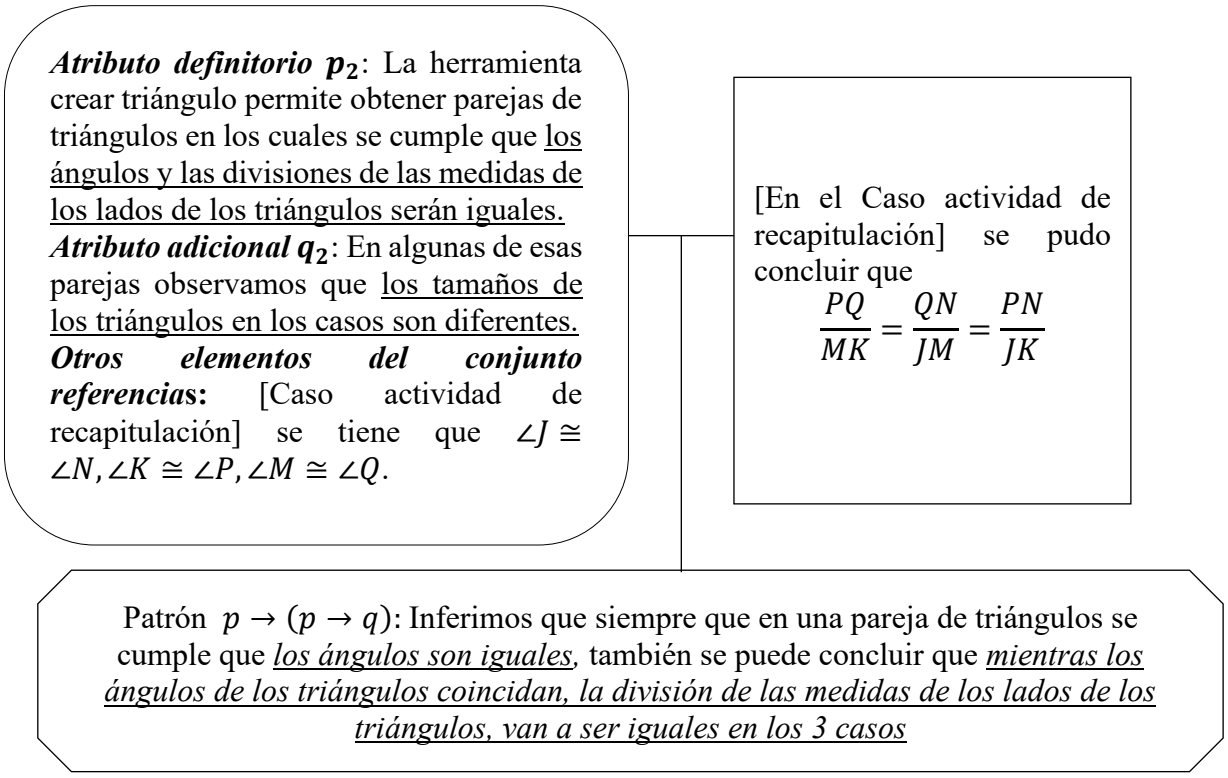


Ilustración 17 Segundo argumento inductivo del Grupo 2 para la Tarea 2

Para el segundo argumento establecido por los estudiantes del Grupo 2 en la Tarea 2, se evidencia que el atributo definitorio p_2 relacionan los atributos p_1 y q_1. En el atributo q_2 registran una característica que no corresponde con el atributo esperado. Por tanto, los estudiantes se ubican

en el Nivel 2 de especialización, de la categoría dato, ya que se reconoce el conjunto referencial pero no se reporta el atributo adicional q_1.

Para los *casos observados*, los estudiantes solo analizan un caso más, el caso presentado en la actividad de recapitulación y no buscan contraejemplos, ubicando a los estudiantes en el Nivel 3 de especialización en esta categoría. Respecto al *patrón de generalidad*, reportan en atributo definitorio p_1 en el campo 3 de la plantilla discursiva y en el campo 4 reportan un patrón de generalidad. En consecuencia, el patrón de generalidad queda de la forma $p \rightarrow (p \rightarrow q)$, lo que refleja una relación de dependencia entre el atributo definitorio y adicional, que ubica a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización. En la *aserción*, los estudiantes identifican los triángulos presentados en la actividad de recapitulación como un elemento más que pertenece al conjunto referencial y determinan que estos cumplen el atributo adicional q_1, que lo reportan en el campo 5 por medio de la igualdad de las razones construidas, por lo cual se ubican en un nivel 4.

En relación con el uso de GeoGebra, los estudiantes no presentaron dificultades en el uso de las herramientas, longitud, medida de ángulo y mueve. Para la herramienta *Crear Triángulos*, al igual que el grupo 1, se presentaron dificultades con relación a las etiquetas de los vértices presentadas por la herramienta y en la cantidad de pasos que debían hacer los estudiantes realizar para construir un triángulo nuevo. No obstante, al aprender a usar la nueva herramienta, los estudiantes lograron identificar con facilidad las características que se resaltaban en los triángulos construidos y lograron identificar los atributos contemplados para la elaboración del argumento planeado.

En relación con la relación con el lenguaje, los estudiantes usan la expresión “los ángulos son los mismos” para referirse a que las medidas de los ángulos correspondientes son iguales y la expresión “los ángulos coincidan” para ángulos correspondientes congruentes. Lo anterior refleja que falta precisión en las respuestas establecidas. Además, parte del lenguaje sigue condicionado

por los aplicativos, por ejemplo, cuando comentaron que "el número que uno pone varía el tamaño del triángulo", hacían referencia a la variación de las dimensiones de los triángulos creados que dependían de un parámetro que debían usar. Finalmente, se destaca el patrón de generalidad, ya que el mismo patrón es usado en los dos argumentos generados.

Grupo 3

DESCRIPCIÓN. En la actividad de práctica, con ayuda del profesor aprendieron a usar la herramienta Crear triángulos y crearon varios triángulos. En la actividad de descubrimiento, se les solicitó crear triángulos usando la herramienta, con el fin de identificar una característica común. Lograron determinar la característica requerida y en lo reportado se identifica un atributo p_1.

> La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos* es: *al utilizar la herramienta puede generar triángulos de diferente tamaño, pero el valor de los ángulos es el mismo* [p_1] [respuesta solicitud caso inicial - actividad de descubrimiento T2].

En la actividad de exploración crearon un triángulo a partir de un triángulo dado y midieron los lados de los dos triángulos. Ingresaron las medidas en las casillas habilitadas y establecieron que "el resultado es igual". El profesor cuestionó lo establecido por los estudiantes y los animó a mover los vértices del triángulo dado, con el fin que verificaran lo encontrado para otros casos. Lo estudiantes reportaron lo siguiente, que corresponde con el atributo adicional q_1.

> Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes: *Podemos afirmar que al cambiar el valor de los lados de los dos triángulos y al dividirlo nos dan el mismo resultado* [q_1] [respuesta solicitud creación de casos – actividad de exploración T2].

Al pasar a la actividad no explorada, los estudiantes observaron dos triángulos semejantes con las medidas de sus respectivos ángulos. Se cuestionaron sobre lo que podían inferir y consideraron que "es el mismo triángulo, pero esta volteado". Luego observaron las etiquetas de los

ángulos, que eran letras griegas, y trataron de recordar los nombres de estas, lo que terminó distrayéndolos. El profesor los dirigió a las dos actividades anteriores para que lograran determinar que tenían en común con lo solicitado en la actividad no explorada. Ellos reportaron:

> Lo que podemos inferir es: *No importa el valor de los lados de los 2 triangulo, si dividimos un lado del triángulo ABC con un lado del triángulo DEF nos dará el mismo resultado las divisiones* [respuesta solicitud – actividad no explorada T2].

En la actividad de síntesis, la cual consistió en describir lo encontrado hasta el momento. Ellos reportaron:

> *Concluimos que al tener el valor de ángulos igual en los 2 triángulos son congruentes y que el valor de los lados del triángulo no importa ya que podemos cambiarlo y nos dará el mismo resultado cuando dividimos un lado del triángulo ABC con un lado del triángulo DEF* [respuesta solicitud – actividad de síntesis T2].

Finalmente pasaron a la actividad de recapitulación, la cual consistió en completar 5 campos de una plantilla discursiva utilizando los atributos encontrados en las actividades anteriores. Los estudiantes leen la plantilla y consideran que la respuesta para el primer campo es "el ángulo sea igual", no obstante, después de reconsiderar lo escrito, establecen que los ángulos son congruentes. Utilizando lo anterior, completan el segundo campo, para luego completar la actividad:

> La herramienta crear triángulo permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que LOS ÁNGULOS SON CONGRUENTES (campo 1). En algunas de esas parejas observamos que TIENEN EL MISMA MEDIDA DEL ANGULO (campo 2). Inferimos que siempre que en una pareja de triángulos se cumple que AL DIVIDIR AB CON GH VAN A DAR EL MISMO RESULTADO DE LAS DEMAS DIVISIONES (campo 3), también se puede concluir que *LOS ANGULOS SON LOS MISMOS* (campo 4). Así, por ejemplo, en el ΔABC y ΔDEF se pudo concluir que $\frac{JK}{NP} = \frac{JM}{NQ} = \frac{MK}{PQ}$ (campo 5) porque se tiene que$\angle J \cong \angle N$, $\angle K \cong \angle P$ y $\angle M \cong \angle Q$. [respuesta solicitud - actividad de recapitulación T2].

ANÁLISIS. En lo desarrollado de la Tarea 2 se observan dos argumentos inductivos, uno de ellos incompleto. Para el primer argumento, en la actividad de descubrimiento se establece el atributo definitorio p_1 y en la actividad de exploración el atributo adicional q_1. En la actividad no explorada, los estudiantes hacen una aserción para el caso presentado. No se evidencia patrón de generalidad construido por los estudiantes en alguna de las demás actividades desarrolladas. El argumento construido se sintetiza en la *Ilustración* 18.

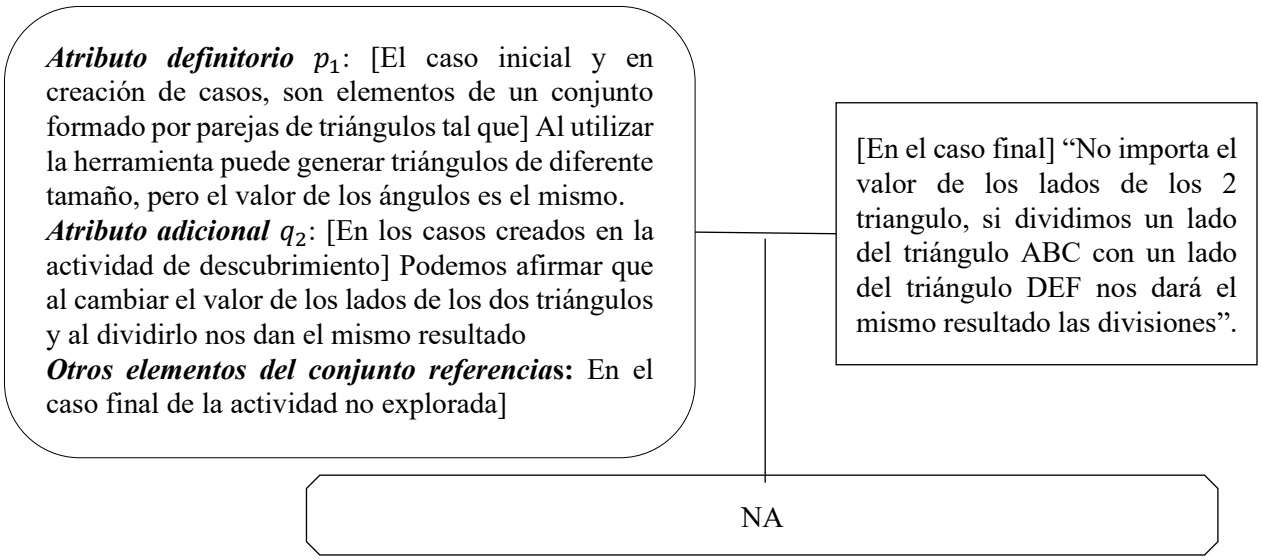


Ilustración 18 Primer argumento inductivo del Grupo 3 para la Tarea 2

Para este argumento, se evidencia que el atributo definitorio p_1 corresponde con la igualdad de las medidas de los ángulos correspondientes y el atributo adicional q_1 con la igualdad de las divisiones de la medida de los lados correspondientes. En ambos casos los atributos establecidos se alinean con atributos del argumento esperado para esta tarea, por tanto, ubicamos a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*.

En los *casos observados*, los estudiantes establecen la aserción solo considerando los casos generados con la herramienta *Crear Triángulo* y no se evidencia la búsqueda de un contraejemplo, por tal motivo se ubican en el Nivel 3 de especialización para esta categoría. Respecto a la *aserción*, los estudiantes consideran que los triángulos presentados en la actividad no explorada cumplen el

atributo adicional q_1, por tanto, se encuentran en el Nivel 4 de especialización para esta categoría. Debido a que no se propone un *patrón de generalidad*, los estudiantes se ubican en el Nivel 1.

El segundo argumento se determina en la actividad de recapitulación. Para esta actividad, los estudiantes diligenciaron 5 campos de una plantilla discursiva. En el campo 1 y 2 se reportó el atributo definitorio q_1, reflejando que para este argumento el atributo definitorio y adicional es el mismo. Respecto al campo 3, este se pensó pensado para el atributo definitorio, pero se completó con el atributo adicional q_1 y el campo 4 que relacionaba el atributo adicional se completó con el atributo definitorio q_1. Se completa el campo 5, determinando las razones conformadas por las medidas los lados de los triángulos. La *Ilustración* 19 sintetiza el argumento construido.

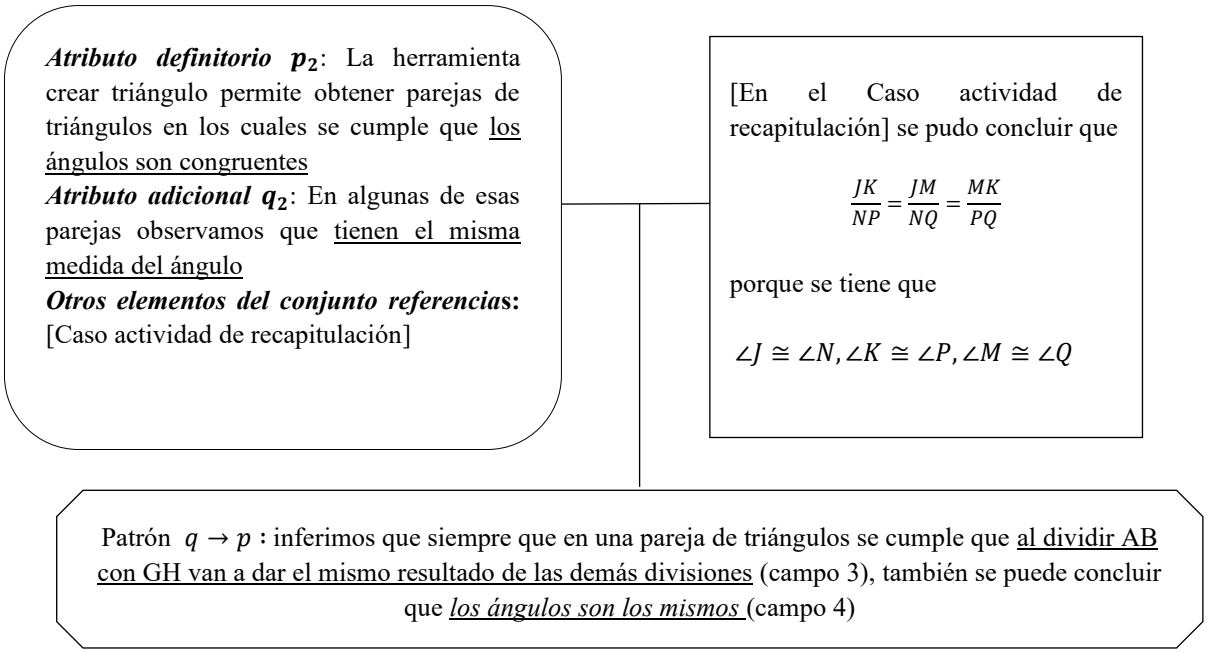


Ilustración 19 Segundo argumento inductivo del Grupo3 para la Tarea 2

Respecto al segundo argumento, los estudiantes se encuentran en el Nivel 2 de especialización del *dato*, ya que, aunque en las actividades anteriores identificaron el atributo definitorio y adicional esperado, para este argumento no reportaron el atributo adicional q_1. En los *casos observados*, consideran los triángulos expuestos en la actividad de recapitulación como un

caso más y no se evidencia la búsqueda de un contraejemplo, por tanto, se encuentran en el Nivel 3 de especialización para esta categoría.

En lo respectivo al *patrón de generalidad*, los estudiantes establecen que el atributo definitorio p_1 depende del atributo adicional q_1, lo que corresponde con un Nivel 3 de especialización. En la *aserción*, se reconoce los triángulos de la actividad de recapitulación como un elemento más que pertenece al conjunto referencial, logrando establecer la igualdad de las razones entre la medida de los lados correspondientes, lo que corresponde con el atributo adicional q_1, ubicando a los estudiantes en un Nivel 4 de especialización.

En relación con GeoGebra, se evidencia que los estudiantes usan las herramientas, longitud, medida de ángulo y mueve con mayor habilidad. Respecto a la herramienta Crear Triángulo, se evidencia las mismas dificultades que los grupos 1 y 2. De igual forma se evidencia el aporte de la nueva herramienta usada para identificar los atributos definitorio y adicional. En este grupo se observa una situación particular, ya que, en la actividad no explorada al presentarse las etiquetas de los nombres de los ángulos, los estudiantes se entretienen, lo que interfiere en el desarrollo de la tarea. Se aconseja eliminar cualquier etiqueta de los objetos geométricos que puedan ser focos de distracción.

Para el lenguaje empleado en esta tarea, se observa que los estudiantes usan expresiones que describen características de los objetos que no corresponden plenamente con el discurso matemático. Por ejemplo, al hablar de la medida de los ángulos ellos comentan “valor de ángulos”. Aunque falta especificar que se está hablando de medidas, lo comentado por ellos muestra que los estudiantes diferencian entre la medida de los ángulos y los ángulos, en comparación con la tarea anterior. Además, al usar expresiones “al cambiar el valor” se evidencia la influencia del software en lenguaje usado por los estudiantes.

Síntesis Tarea 2

Luego de analizar las respuestas de los tres grupos de estudiantes, en la Tabla 9 se presentan los niveles de los argumentos inductivos construidos por los estudiantes en cada una de las categorías analizadas.

Tabla 9 Síntesis de los niveles de los argumentos inductivos encontrados en la Tarea 2

	Argumento	Dato	Casos observados	Patrón de generalidad	Aserción
G1	Primer	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2
	Segundo	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
G2	Primer	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
	Segundo	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
G3	Primer	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 4
	Segundo	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 3	Nivel 4

En los tres grupos surgieron dos argumentos. El primero, mientras iban desarrollando la tarea y el segundo al completar la plantilla discursiva. Se observa que el *dato* en los tres grupos durante el desarrollo de la actividad tiene un Nivel 4, pero al momento de plasmar esa información en la plantilla los estudiantes omiten información o incluyen información irrelevante. En el caso del *patrón de generalidad,* dos grupos de estudiantes en el desarrollo de la tarea no enuncian una relación de dependencia entre el atributo definitorio y el atributo adicional encontrado, pero al completar la plantilla todos los grupos alcanzan el nivel máximo en esta categoría. Por lo tanto, la plantilla discursiva es un elemento que se debe mantener en las siguientes tareas, permitió que los estudiantes identificaran la relación de dependencia deseada. También la estructura de la plantilla debe mejorarse para evitar que se omita información relevante del *dato.*

La existencia del caso adicional no explorado permite que los estudiantes apliquen la inferencia realizada en el patrón de generalidad. Se observa que logran enunciar la aserción en su

máximo nivel en todos los argumentos menos el primer argumento del Grupo 1. La plantilla discursiva cuestiona al estudiante sobre un caso no explorado y le permite hacer afirmaciones sobre este. Por lo anterior, consideramos que un elemento que permite orientar al estudiante en la construcción de argumentos inductivos de calidad es la plantilla discursiva.

La herramienta construida por nosotros permitió que los estudiantes obtuvieran elementos del conjunto referencial, por lo tanto, podían explorar gran cantidad de casos. Evidenciamos que la estructura de la tarea no favorecía el alcance del nivel máximo en los casos observados. Para solucionar este inconveniente se puede cuestionar al estudiante sobre la existencia de contraejemplos, permitiendo de este modo que se alcance el Nivel 4 en esta categoría.

También evidenciamos que las instrucciones para usar la herramienta *Crear triángulos* generaron confusión en los tres grupos. Las instrucciones no se podían visualizar al tiempo que los estudiantes hacían las construcciones, lo que generó la confusión.

Los estudiantes hacen uso de la herramienta *mueve* para arrastrar los vértices de los triángulos y de este modo explorar más casos. En esta tarea para cada caso nuevo debían ingresar manualmente las magnitudes solicitadas, acción que generaba que los estudiantes revisaran tres o cuatro casos. Para tareas posteriores los atributos que queremos resaltar deben aparecer en pantalla permitiendo al estudiante observar y explorar una cantidad mayor de casos con solo arrastrar un objeto geométrico. Por otro lado, evidenciamos que presentaron menores dificultades al usar herramientas como *medida de ángulo, distancia.*

El lenguaje que los estudiantes usan en el desarrollo de la tarea presenta algunas modificaciones en relación con la Tarea 1. Se mantiene el uso de expresiones matemáticas conocidas para hacer referirse a atributos que se asemejan al uso que hacen de estas en otro contexto. Por ejemplo, algunos estudiantes usan la palabra congruencia para hacer referencia a la proporcionalidad entre las razones presentadas en pantalla. También, usan expresiones que están influenciadas por lo

observado en la pantalla *"*se mueven los puntos", "los triángulos cambian", "la forma de los triángulos".

Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 3

Grupo 1

DESCRIPCIÓN. Se inició la Tarea 3 con la actividad de repaso, que presentó un triángulo rectángulo y botones asociados a los lados de este. Al hacer clic en los botones, el aplicativo publicaba la razón que se puede construir con la medida de los lados seleccionados. En la actividad, los estudiantes lograron determinar sin inconvenientes las razones que se conforman con los lados de un triángulo rectángulo.

Luego, los estudiantes pasaron a la actividad de descubrimiento y exploración. En esta actividad se presentaron el $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle DFE$, además las razones $\frac{BC}{AC}$ y $\frac{EF}{DF}$ con su respectivo valor, que variaba en función de las medidas de los lados de los triángulos. Adicionalmente, en el aplicativo estaban activas las herramientas de mover, medida de ángulo y longitud, con el objetivo de que los estudiantes exploraran los triángulos y contestaran la pregunta: ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que BC/AC y EF/DF son iguales a 1? Para responder la pregunta, los estudiantes midieron los ángulos de los triángulos, sin embargo, no tenían claro lo que debían hacer después. El profesor sugirió cambiar el valor de las razones a 1, por lo que arrastraron los vértices de los triángulos para que el cociente entre las medidas de los catetos presentara este valor, lo anterior para los dos triángulos. Analizaron los ángulos agudos de cada triángulo y se percataron de que la suma daba aproximadamente $90°$. Inmediatamente, analizaron las razones y determinaron que sus respectivos valores eran iguales a 1, ya que los catetos eran congruentes. En algunas razones observaron que, el valor del antecedente difería del consecuente en décimas, no obstante, consideraron que, por la aproximación generada en el

aplicativo, el valor de la razón siempre era 1. Concerniente a lo reportado por los estudiantes, se observa un atributo definitorio p_1, un atributo adicional q_1 y un patrón de generalidad.

> En este caso como en todos los casos los ángulos agudos de dichos triángulos la suma de estos es igual a 90° [p_1], por esto su ángulo recto también mide 90°, la medida de los lados BC/AC es congruente y la medida de los lados EF/DF no es congruente, a pesar de esto el resultado es el mismo [q_1], la relación entre los ángulos agudos es que aproximadamente miden 45° cuando el resultado de la condición es uno [patrón de generalidad 1] [respuesta solicitud - actividad de descubrimiento y exploración T3].

Posteriormente, los estudiantes abordaron la actividad no explorada, donde usaron la nueva herramienta *Construir Triángulo Rectángulo*. Esta estaba programada para crear triángulos rectángulos seleccionando dos puntos de la vista gráfica del aplicativo. En esta actividad se debía crear un triángulo, luego arrastrar los vértices hasta que la razón entre sus catetos sea igual a 1, seguidamente completar la información de una plantilla discusiva.

La plantilla discursiva de la actividad no explorada se componía de 4 oraciones y 6 campos para completar. En la primera oración se definía el conjunto referencial y se debía completar con el atributo definitorio [campo 1]. La segunda oración tenía el propósito de establecer el atributo adicional [campo 2]. La tercera oración establecía el patrón de generalidad, por tanto, los campos a completar estaban asociados a los atributos definitorio y adicional [campo 3 y 4]. La última oración permitía establecer que el triángulo construido en la actividad es un elemento más que cumple el atributo definitorio y adicional [campo 5 y 6].

Los estudiantes crearon un triángulo rectángulo usando la nueva herramienta sin dificultad. El profesor preguntó "¿Cómo están seguros de que la razón entre los catetos es igual a 1?". Al darse cuenta de que no podían responder la pregunta, midieron los lados del triángulo usando la herramienta longitud y midieron los ángulos usando la herramienta medida de ángulo, luego completaron la plantilla discursiva. Lo reportado en esta actividad se presenta a continuación:

En la actividad de DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de *que sus catetos miden aproximadamente lo mismo o en algunos casos son congruentes* (campo 1) [atributo definitorio p_2]. Luego de usar el arrastre, descubrimos que los triángulos también cumplen que *sus ángulos agudos son aproximadamente de 45°* (campo 2) [atributo adicional q_2]. Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene *catetos congruentes* (campo 3) [atributo definitorio p_2] entonces cumple que *sus ángulos son aproximadamente 45°* (campo 4) [atributo adicional q_2]. Por ejemplo, en el triángulo construido se tienen que *sus ángulos miden aproximadamente 45°* (campo 5) [atributo adicional q_2] porque *sus catetos son aproximadamente congruentes* (campo 6) [atributo definitorio p_2] [respuesta solicitud - actividad no explorada T3].

Finalmente, los estudiantes desarrollan la actividad de síntesis, en la cual brindan como respuesta lo enunciado a continuación:

> Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron y qué pudieron encontrar de nuevo: *Debido a que los ángulos de dichos triángulos rectángulos miden aproximadamente lo mismo (45°) se puede concluir que sus lados al aproximarlos son iguales* [respuesta solicitud - actividad de síntesis T3].

ANÁLISIS. Para las actividades de la Tarea 3 del grupo 1 se evidencian dos argumentos. En el primer argumento, el atributo definitorio p_1, el atributo adicional q_1 y el patrón de generalidad, se proponen en la actividad de descubrimiento y exploración. Consideramos que posiblemente la aserción para este argumento se realiza en la actividad de síntesis, ya que, en lo registrado, los estudiantes hacen mención a "dichos triángulos", que asumimos como los casos creados y los que se puedan crear en la actividad de descubrimiento y exploración. La *Ilustración* 20 sintetiza este primer argumento.

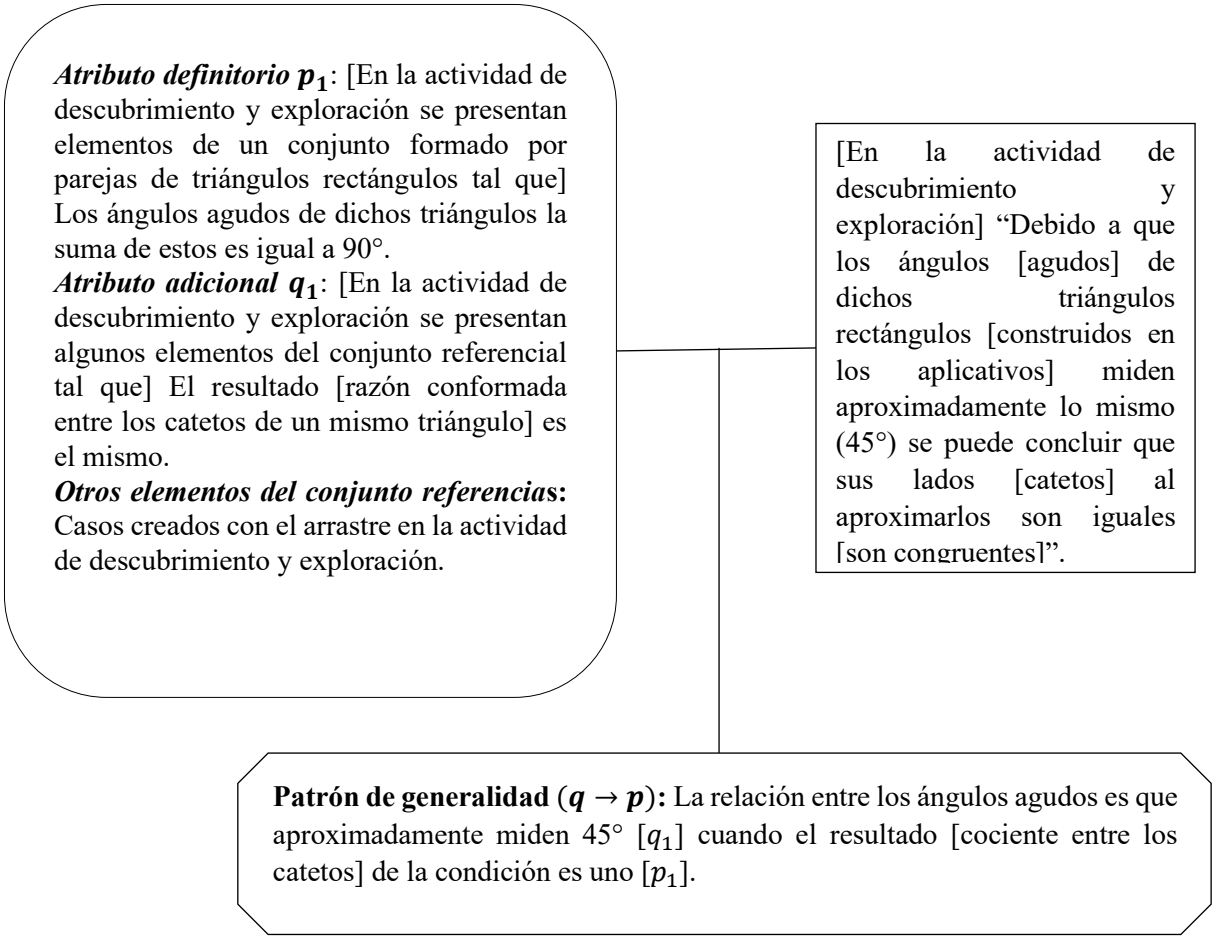


Ilustración 20 Primer argumento inductivo del Grupo 1 para la Tarea 3

En este primer argumento se tiene que los estudiantes se ubican en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*, ya que determinan los atributos definitorio y adicional para el conjunto referencial. El atributo definitorio p_1 es la suma de la medida de los ángulos es 90°, que es un atributo definitorio esperado. Además, el atributo adicional q_1 expresa que el resultado de la división de la medida de los catetos de un mismo triángulo es igual a 1, que también es un atributo adicional esperado. En lo concerniente a los *casos observados*, se ubican en el Nivel 3 de especialización, puesto que, para la construcción del patrón de generalidad, solo exploran los casos creados por el arrastre y no se evidencia la búsqueda de un contraejemplo.

Se resalta que, para esta tarea, los atributos esperados satisfacen una relación de dependencia bicondicional, en consecuencia, los atributos pueden asumir el papel definitorio o adicional. Sin embargo, al momento de expresar el patrón de generalidad, este debe corresponder con lo que reportan los estudiantes como atributos definitorio y adicional. Respecto al *patrón de generalidad* de este primer argumento, los estudiantes determinan que el atributo definitorio p_1 depende del atributo adicional q_1. Por consiguiente, el atributo adicional q_1 lo consideran antecedente y el atributo definitorio p_1 consecuente, relación de dependencia que los ubica en el Nivel 3 de especialización para esta categoría.

Consideramos que lo reportado en la actividad de síntesis corresponde con la *aserción* para el argumento, ya que la conclusión que hacen es para los triángulos construidos en la actividad de descubrimiento y exploración. Por lo anterior, ubicamos a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización de esta categoría, pues determinan que los triángulos creados y los que posiblemente se creen cumplen el atributo definitorio p_1, asimismo concluyen que estos también cumplen el atributo adicional q_1.

El segundo argumento se observa en la actividad no explorada. Los estudiantes registraron en la plantilla discursiva un atributo definitorio p_2 en los campos 1, 3 y 6, mientras que en los campos 2, 4 y 5 un atributo definitorio q_2. Los campos 1 y 2 conforman el dato del argumento, los campos 3 y 4 establecen el patrón de generalidad y los campos 5 y 6 hacen parte de la aserción. El argumento construido se sintetiza en la *Ilustración* 21.

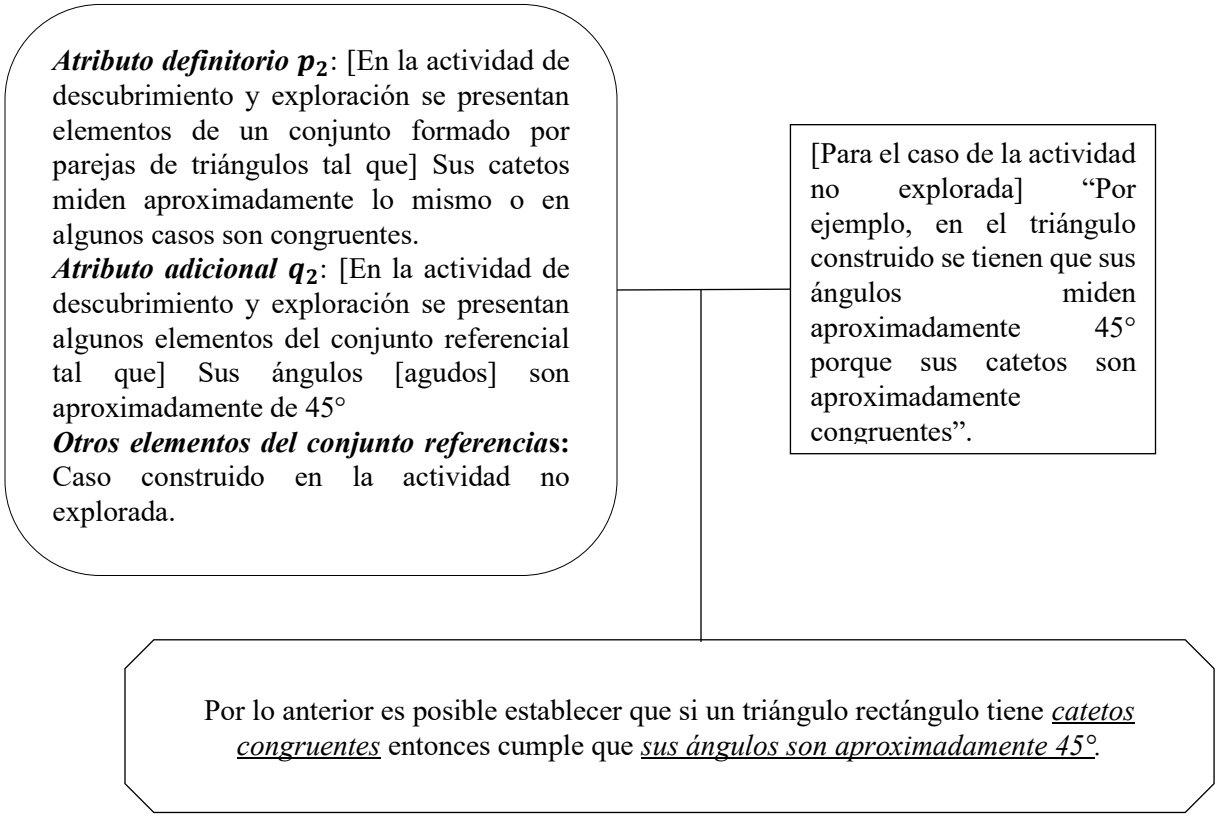


Ilustración 21 Segundo argumento inductivo del Grupo 1 para la Tarea 3

Referente al segundo argumento, el atributo definitorio p_2 está relacionado con la congruencia de los catetos del triángulo y el atributo adicional q_2 con que la medida de los ángulos es aproximadamente 45°, que son atributos esperados. Por lo anterior ubicamos a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*.

En los *casos observados*, los estudiantes no buscan un contraejemplo para los casos creados en la actividad no explorada, por lo que se ubican en el Nivel 3 de especialización. En relación con el *patrón de generalidad*, se evidencia que determinan adecuadamente la relación de dependencia entre el atributo definitorio p_2 y adicional q_2, por tal motivo se ubican en el Nivel 4 de especialización. En la *aserción*, reconocen el caso creado en la actividad no explorada como un elemento más del conjunto referencial, el cual cumple el atributo adicional q_2, por lo anterior se encuentran el Nivel 4 de especialización para esta categoría.

En relación con GeoGebra, se tiene que los estudiantes hacen uso adecuado de las herramientas, especialmente de la herramienta *Construir Triángulo Rectángulo.* Se evidencia que la nueva herramienta contribuye en crear elementos del conjunto referencial. Además, se observa que, al simplificar los pasos para la construcción de triángulos, se optimiza en el tiempo, que es utilizado para explorar las propiedades de los triángulos.

Creemos que los estudiantes, al tener más destreza en el uso del software, no se detienen a leer los enunciados de las actividades y pasan directamente explorar los aplicativos. Lo anterior se refleja en el momento que se muestran desorientados en la actividad de descubrimiento y exploración, cuando midieron los ángulos y buscaron la orientación del profesor. Una posible modificación para evitar esta dificultad es programar en la interfaz gráfica de los aplicativos, mensajes alusivos a lo solicitado en los enunciados de las actividades, con el fin de recordar las acciones que se deben realizar.

En lo concerniente al lenguaje, se presenta que los estudiantes siguen usando el término "congruentes" para referirse a la igualdad entre medidas. Adicionalmente, en el primer argumento construido, aluden a lados de los triángulos y no a los catetos, situación que se corrige en el segundo argumento. En los argumentos muchas veces se menciona que "sus ángulos son…", omitiéndose que se está analizando las medidas de los ángulos agudos.

En lo respectivo al patrón de generalidad del primer argumento, se tiene que, el atributo definitorio depende del atributo adicional, situación que no se había presentado en las tareas anteriores. Se destaca que, para esta tarea, el lenguaje está menos determinado por el programa, ya que se evidencia menor uso de expresiones que describen movimiento o trasformación de los objetos, como por ejemplo "tamaño" o "siguen midiendo".

Finalmente, todos los campos de la plantilla discursiva se completaron con la información esperada, lo que muestra el potencial que tienen este tipo de actividades para fortalecer el lenguaje y la construcción de argumentos inductivos dentro de una expresión discursiva expositiva.

Grupo 2

DESCRIPCIÓN. En la actividad de descubrimiento y exploración, al medir los ángulos, los estudiantes presentaron dificultades, ya que intentaron seleccionar el polígono, sin embargo, al ser una construcción realizada por medio de segmentos, no lograron medir los ángulos con este método y optaron por usar el método de medir los ángulos seleccionando los vértices. Midieron los ángulos y no entendieron parte del enunciado de la actividad. Le preguntaron al profesor lo que tenían que hacer y este respondió "¿Qué tiene que hacer para cambiar la razón?". Los estudiantes se percataron que tenían que mover los vértices de los triángulos para que el valor de las razones sea igual a 1. Luego el profesor les preguntó "¿Qué hicieron en la actividad anterior?", evidenciando que no habían terminado la actividad de repaso, por tanto, indicó resolver esta actividad. Realizaron la actividad de repaso y regresaron a la actividad de descubrimiento y exploración.

Otra vez en la actividad de descubrimiento y exploración, el profesor preguntó "¿Qué relación encontraron en los ángulos cuando se cumple la condición? (el valor de la razón conformada por la medida de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a 1)". En principio, los estudiantes respondieron que "Los ángulos son iguales" y rectificaron comentando "Los ángulos son congruentes". Advirtieron que los ángulos no miden lo mismo, pero que las medidas se aproximan a 45°. Después pasaron a explorar las razones y movieron los vértices, con el fin de que el antecedente y el consecuente de la razón presentaran el mismo valor, lo anterior para confirmar que la medida de los ángulos también era igual a 45°. Los estudiantes reportaron que:

Que mientras los ángulos se acerquen mas a 45, las razones van a ser más exactas a 1, y cuando miden 45 exactos la división también exacta [respuesta solicitud - actividad de descubrimiento y exploración T3].

En la actividad no explorada, iniciaron creando varios triángulos usando la nueva herramienta sin dificultad, después eliminaron todos los triángulos y dejaron solo uno. Midieron los lados y los ángulos del triángulo creado, arrastraron los vértices hasta que las medidas de los ángulos agudos fue aproximadamente 45 °. Nicol leyó la primera oración de la plantilla discursiva y preguntó "¿Cómo así cuál condición?". El profesor sugirió a los estudiantes revisar lo escrito en la solicitud de la actividad de descubrimiento y exploración, al revisar lo registrado preguntó "¿Qué pasa con la medida de los lados?". Los estudiantes respondieron que "son iguales y su resultado es 1", luego completaron los demás campos. Ellos reportaron que:

> En la actividad de DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de *que dos lados son iguales* (campo 1) [atributo definitorio p_1]. Luego de usar el arrastre, descubrimos que los triángulos también cumplen que *2 ángulos miden 45* (campo 2) [atributo adicional q_1]. Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene *dos lados iguales* (campo 3) [atributo definitorio p_1] entonces cumple que *si los ángulos son iguales a 45 los lados también van a ser iguales entonces la razón sería igual a 1* (campo 4) [Patrón de generalidad]. Por ejemplo, en el triángulo construido se tienen que *ángulos miden 45* (campo 5) [atributo adicional q_1] porque *sus lados son iguales* (campo 6) [atributo definitorio p_1] [respuesta solicitud - actividad no explorada T3].

Por último, los estudiantes realizaron la actividad de síntesis, reportando que:

> Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo: *pudimos descubrir que cuando un triángulo rectángulo tiene 2 lados iguales el resultado de la razón va a dar 1 y sus ángulos agudos miden 45, de igual manera si la razón de un triángulo da 1, dos de sus lados son iguales y sus ángulos miden 45* [respuesta solicitud - actividad de síntesis T3].

ANÁLISIS. En lo desarrollado por el Grupo 2 se evidencia un argumento inductivo, Los estudiantes determinan que el atributo definitorio p_1 se relaciona con la "igualdad de los lados", es decir, la igualdad de la medida de los catetos del triángulo rectángulo, que se reporta en el campo 1 de la plantilla discursiva. En relación con el atributo q_1, establecen que "los dos ángulos son iguales", queriendo aludir a que la medida de los dos ángulos agudos es igual, este atributo adicional q_1 se referencia en el campo 2 de la plantilla discursiva.

Con los campos 3 y 4 debían construir el patrón de generalidad, no obstante, en el campo 3 registran el atributo definitorio p_1 y en el campo 4 escriben un patrón de generalidad. Este último es el que tomaremos para el análisis, pues es una construcción propia del grupo. Para los campos 5 y 6 de la plantilla realizan la aserción para otro elemento más del conjunto referencial, completando esta con el atributo definitorio p_1 y atributo adicional q_1 respectivamente. El argumento se sintetiza en la *Ilustración* 22.

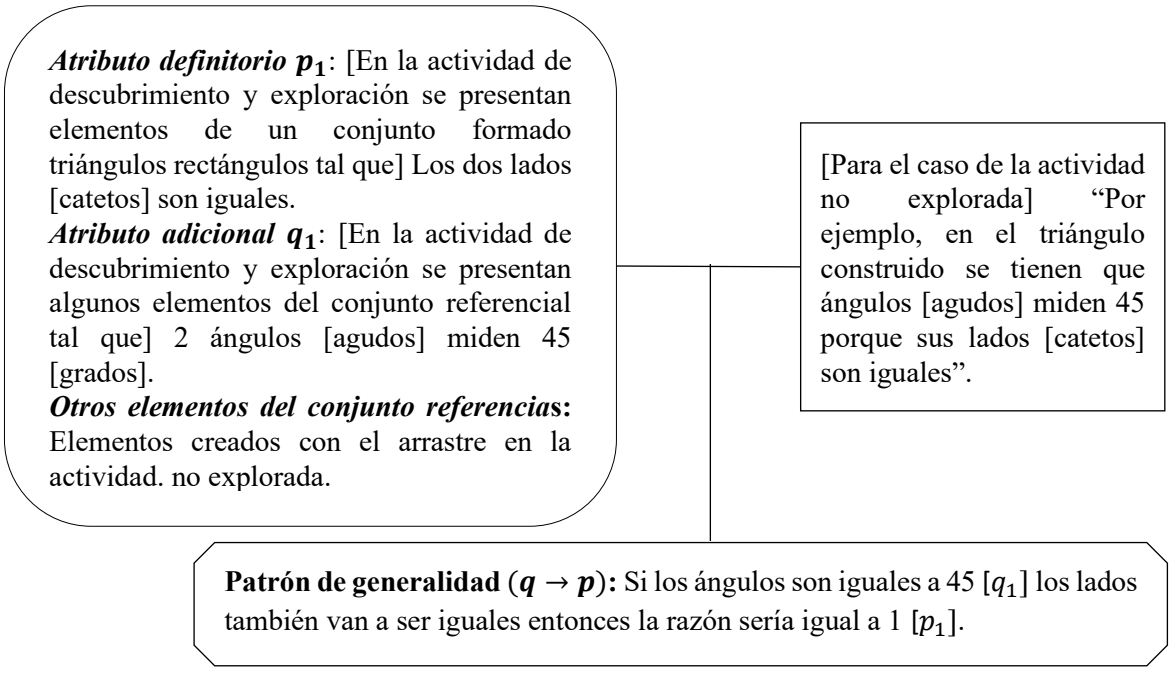


Ilustración 22 Argumento inductivo del Grupo 2 para la Tarea 3

En el argumento construido, los estudiantes identifican un atributo definitorio p_1 y adicional q_1, los cuales corresponden con lo esperado para este argumento. Por lo anterior se encuentran en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*. En los *casos observados*, construyen el patrón de generalidad, considerando solo los elementos del conjunto referencial construidos con la nueva herramienta y no se observa la búsqueda de un contraejemplo, por tanto, se encuentran en el Nivel 3 de especialización.

En lo referente al *patrón de generalidad*, se observa que los estudiantes establecen que el atributo definitorio p_1 depende del atributo adicional q_1, por lo tanto, se ubican en el Nivel 3 de especialización para esta categoría. Para la *aserción*, logran determinar que, los elementos construidos con la herramienta *Construir Triángulo Rectángulo* pertenecen al conjunto referencial y que estos cumplen el atributo adicional q_1, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización de esta categoría.

En relación con GeoGebra, se observa que los estudiantes presentan dificultades leves en el uso de las herramientas longitud, medida de ángulos y arrastre. La herramienta *Construir Triángulo Rectángulo* fue de gran ayuda para establecer el conjunto referencial y poder identificar el atributo definitorio y adicional. Esta nueva herramienta programada, ayudó a los estudiantes a crear y explorar varios casos, no obstante, se limitada al momento de buscar contraejemplos.

Una característica importante de los aplicativos de esta tarea fue trabajar con medidas de ángulos y lados, lo que se deriva en trabajar con valores continuos. Lo anterior dificulta a los estudiantes a determinar valores exactos y lleva a identificar los atributos haciendo aproximaciones. Por tanto, es relevante aclarar a los estudiantes, el redondeo y la aproximación que se programan en los aplicativos, con el fin de que puedan identificar más fácilmente los atributos del conjunto referencial.

En el lenguaje usado, se observa que, en algunas ocasiones, se omite la unidad de medida para los ángulos. Adicionalmente, se refieren a los catetos congruentes como “lados iguales”. Se resalta que, para esta tarea, el lenguaje empleado está enfocado en describir las características encontradas, usando expresiones como “se acerquen más”, lo que refleja la influencia del software en el lenguaje empleado.

Por último, la plantilla discursiva fue bien asimilada por los estudiantes, ya que solo un campo se completó con una respuesta no esperada, pero que se relaciona con el argumento construido. Se observa que los estudiantes no presentaron dificultades significativas en completar la plantilla, considerándose está de gran ayuda para mostrar una posible forma de escribir un argumento inductivo.

Grupo 3

DESCRIPCIÓN. Se inició la Tarea 3 con la actividad de repaso, la cual consistía en encontrar las razones directas que se pueden construir con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Los estudiantes determinaron las razones sin mayor dificultad, luego el profesor preguntó “¿Y las razones cómo se conforman?”, a lo que respondieron “con los lados de triángulo”. Inmediatamente, iniciaron con la actividad de descubrimiento y exploración. Para esta actividad debían responder la siguiente pregunta:

> ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que BC/AC y EF/DF son iguales a 1?

En principio, el profesor sugirió cambiar el valor de las razones a 1, motivando a los estudiantes a arrastrar los vértices hasta que se cumpliera la condición. Se percataron de que el valor de las razones daba 1, en el momento en que el antecedente y el consecuente eran iguales o tenían un valor aproximado. El profesor realizó la pregunta establecida anteriormente y los estudiantes comenzaron a describir varias relaciones que observaron, reportando lo siguiente:

2 puntos que conforman el triángulo tienen en común un ángulo recto por ende los otros dos son agudos y esos ángulos son congruentes ya que tiene la misma medida (45) [respuesta solicitud - actividad de descubrimiento y exploración T3].

Establecida la característica solicitada, los estudiantes pasaron a la actividad de descubrimiento y exploración. En esta actividad utilizaron la herramienta *Construir Triángulo Rectángulo*, construyeron 2 triángulos y midieron los lados de estos. Consideraron que la hipotenusa debía medir 1. El profesor rectificó a los estudiantes y comentó que la razón entre los catetos debía ser igual a 1, no los catetos. Arrastraron nuevamente los vértices para que la medida de los catetos correspondientes sea igual, el profesor intervino y comentó que el enunciado indicaba construir un sólo triángulo rectángulo.

Borraron todo y construyeron un triángulo rectángulo. Keinner comentó: "para que la razón sea igual a 1, los lados deben ser iguales". Arrastraron los vértices hasta que los catetos fueron congruentes y midieron los ángulos agudos. Leyeron la plantilla e iniciaron a completar los campos faltantes, registrando que los ángulos agudos tienen el mismo valor y que la suma de los ángulos internos es 180. El profesor leyó y comentó que la suma de los ángulos internos es 180 en todos los triángulos. Insinuó revisar la actividad de descubrimiento y exploración, para escribir algo que se cumpla solo para los triángulos analizados. Hany comentó que, para los triángulos analizados "los catetos son iguales, esto da 45 [refiriéndose a los ángulos]". Los estudiantes completaron la plantilla utilizando lo comentado por Hany, reportando lo siguiente:

> En la actividad de DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de *dos lados del triángulo son iguales* (campo 1) [atributo definitorio p_1]. Luego de usar el arrastre, descubrimos que los triángulos también cumplen que *la medida de los ángulos son iguales* (campo 2) [atributo adicional q_1]. Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene *dos lados iguales* (campo 3) [atributo definitorio p_1] entonces cumple que *sus ángulos agudos tienen la misma medida* (campo 4) [atributo adicional q_1]. Por ejemplo, en el triángulo construido se tiene que *dos*

ángulos agudos tienen el mismo valor (campo 5) [atributo adicional q_1] porque *los 2 catetos tienen el mismo valor* (campo 6) [atributo definitorio p_1] [respuesta solicitud - actividad no explorada T3].

Luego los estudiantes abordaron la actividad de síntesis y reportaron:

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo: *Descubrimos que al tener los dos catetos con el mismo valor los 2 ángulos agudos tendrán la misma medida (45) y al sumarlo con el ángulo recto nos da 180* [respuesta solicitud - actividad de síntesis T3].

ANÁLISIS. En esta tarea se reporta un argumento inductivo que se sintetiza en la *Ilustración* 23.

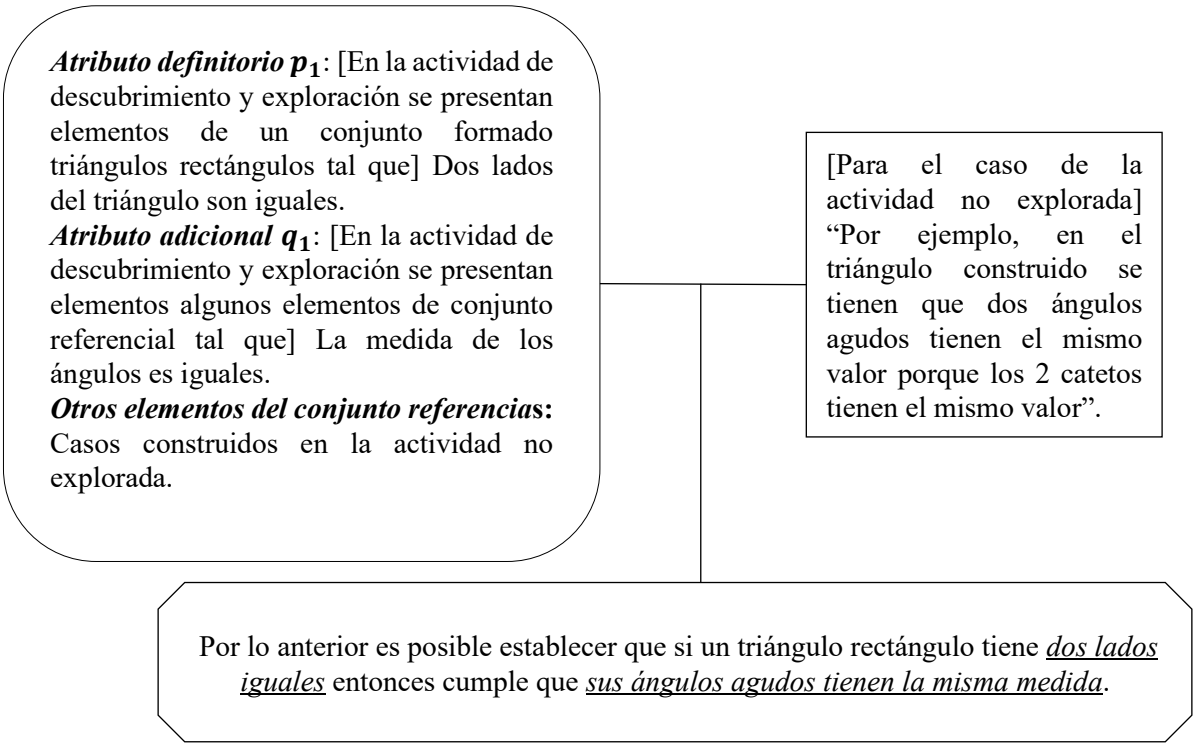


Ilustración 23 Argumento inductivo del Grupo 3 para la Tarea 3

Se evidencia que los estudiantes se ubican en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*, pues el atributo definitorio p_1 y adicional q_1 corresponde con los atributos esperados, en este caso se describe la igualdad de los lados y ángulos en los triángulos rectángulos. Respecto a los *casos observados*, los estudiantes solo analizan los elementos del conjunto referencial presentados

o creados con la herramienta *Construir Triángulo Rectángulo* y no se evidencia la búsqueda de contraejemplos. Por lo anterior para esta categoría, se ubican en el Nivel 3 de especialización.

Para el *patrón de generalidad*, los estudiantes determinan adecuadamente que el atributo adicional q_1 depende del atributo definitorio p_1, por tanto, se ubican en el Nivel 4 de especialización para de esta categoría. En la *aserción* tienen Nivel 4 de especialización, debido a que concluyen que los casos creados en la actividad no explorada cumplen el atributo adicional q_1.

En relación con GeoGebra, los estudiantes presentan dificultades al medir los ángulos, consideramos que se debe al poco uso del software. Se resalta el usó de la herramienta *Construir Triángulo Rectángulo*, pues facilitó la exploración de los elementos que pertenecen al conjunto referencial, en este caso triángulos rectángulos.

El lenguaje utilizado por Grupo 3, es similar al de los grupos anteriores. En algunas ocasiones se habla de catetos y en otras de lados iguales. Además, se observa que las herramientas del programa no influyen de forma significativa para centren sus expresiones en las propiedades de los triángulos.

En lo referente al uso de la plantilla discursiva, los estudiantes completan todos los campos de forma correcta con la información que se consideraba previamente. La plantilla es una herramienta que permite organizar los atributos identificados y orienta los estudiantes respecto a la construcción de un argumento inductivo.

Síntesis Tarea 3

En la Tabla 10 exponemos los argumentos inductivos construidos por cada grupo en la Tarea 3 y sus respectivos niveles de especialización para las categorías.

Tabla 10 Síntesis de los niveles de los argumentos inductivos encontrados en la Tarea 3

	Argumento	Dato	Casos observados	Patrón de generalidad	Aserción
G1	Primero	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 3	Nivel 4
	Segundo	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
G2	Único	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 3	Nivel 4

G3	Único	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4

Esta tarea favorece la construcción de argumentos inductivos en los tres grupos. La tarea logra que estructuren argumentos esperados, generando los estudiantes se ubique en los niveles 3 o 4 de especialización.

En la actividad de descubrimiento y exploración, los estudiantes determinaron los elementos que componen el *dato*, estableciendo el atributo definitorio y el atributo adicional. En el segundo argumento del Grupo 1 y en los argumentos de los Grupos 2 y 3, el atributo definitorio se relaciona con la congruencia de los catetos en los triángulos ACB y DFE, no obstante, en el primer argumento del Grupo 1, esta característica se relaciona con el atributo adicional. De forma similar, para el primer argumento del Grupo 1 la característica de la congruencia de los ángulos agudos en los triángulos ACB y DFE corresponde con el atributo definitorio, esta característica se reporta como atributo adicional en los demás argumentos. Aunque lo anterior se tenía previsto por la relación bicondicional que tienen los atributos abordados en esta tarea, se evidencia la relevancia que tiene la fase de exploración para establecer los elementos que componen el dato de un argumento inductivo.

En la Tarea 3, los *casos observados* para construir el patrón de generalidad o establecer la aserción se analizaron en la actividad de descubrimiento y exploración, y en la actividad no explorada. En la primera actividad, el arrastre permitió a los estudiantes establecer varios casos del conjunto referencial y en la segunda se crearon elementos que pertenecen a este. Sin embargo, las actividades no facilitan a los estudiantes la búsqueda de contraejemplos, por ende, una posible modificación es añadir en estas actividades una solicitud que permita buscar contraejemplos, con el fin de poder consolidar el patrón de generalidad o la aserción y así incrementar el nivel de especialización de los argumentos.

El *patrón de generalidad* en el segundo argumento del Grupo 1 y en el argumento del Grupo 3 corresponden con lo esperado y son relaciones de dependencia que se construyen con la plantilla discursiva, por tanto, tienen Nivel 4 de especialización. Mientras que el primer argumento del Grupo 1 y el argumento del Grupo 2, los patrones de generalidad no corresponden con el esperado. Para estos dos últimos argumentos, los patrones de generalidad comparten la misma estructura condicional, donde el atributo definitorio depende del atributo adicional. Lo anterior refleja que los estudiantes no identifican antecedente y consecuente al construir un patrón de generalidad, por consiguiente, es necesario incluir en las actividades elementos que permitan a los estudiantes identificar la relación de dependencia entre los atributos.

Todos los argumentos se ubican en el Nivel 4 de especialización en la *aserción*. Esto refleja que los estudiantes enuncian el atributo q_1 a partir de características establecidas (atributo definitorio p_1) teniendo presente alguna generalidad identificada. El único grupo que realiza una aserción fuera de la actividad no explorada es el Grupo 1. En vista de lo anterior, una posible modificación es incluir alguna solicitud que permita a los estudiantes realizar una aserción en la actividad de descubrimiento y exploración.

En lo respectivo a GeoGebra, los estudiantes no presentan dificultades significativas en el uso de las herramientas y tal vez estas dificultades se presentan por el limitado uso del software. La herramienta *Construir Triángulos Rectángulo* aportó bastante en la creación de casos para que formularan la aserción, además fue bien asimilada por los estudiantes. En las actividades se analizaron medidas de ángulos y el valor de las razones conformadas por la medida de los catetos de un mismo triángulo rectángulo, que son cantidades continuas que dificultan identificar relaciones. Aunque se trabajaron aproximaciones y se trucaron valores en los aplicativos, se presentaron mayores dificultades que las previstas en establecer las relaciones. Una posible modificación en los

aplicativos es agregar deslizadores asociados a las cantidades trabajadas para que los estudiantes puedan determinar más fácilmente los valores requeridos.

Respecto al lenguaje empleado por los estudiantes, se destaca que hacen referencia sobre los lados y no sobre los catetos, además no discriminan entre medida de ángulos y ángulos. El lenguaje empleado esta menos determinado por el programa en comparación con las tareas anteriores, pues se enfocan más en las propiedades de los objetos que en describir lo que se observa en los aplicativos. En lo correspondiente a la plantilla discursiva, se evidencia que permite aumentar el Nivel de especialización de los argumentos y contribuye como ejemplo para el desarrollo de expresiones discursivas expositivas que presentan dato, garantía y aserción.

Análisis de las respuestas de los estudiantes para la Tarea 4

Grupo 1

DESCRIPCIÓN. Se inició la Tarea 4 observando el material de repaso. Este presentó una ilustración exponiendo las razones trigonométricas directas de un triángulo rectángulo. Posteriormente, pasaron a la actividad de descubrimiento y exploración. En esta actividad se presentaron el $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle DFE$, con los valores de $sen(\alpha)$ para el primero triángulo y $cos(\beta)$ para el segundo triángulo, como se muestra en la *Ilustración* 24.

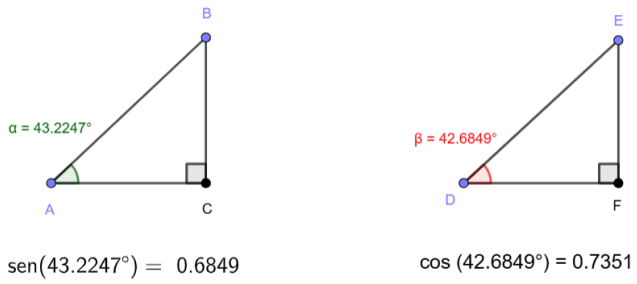


Ilustración 24 Aplicativo Actividad de Exploración Tarea 4

Los estudiantes debían arrastrar los puntos B y E, luego, exponer la condición que satisfacen α y β cuando se cumpliera que $sen(\alpha) = cos(\beta)$ [solicitud 1]. Además, construir un patrón de

generalidad [solicitud 2] y explicar si la condición se cumple con cualquier par de triángulos rectángulos [solicitud 3].

Arrastraron los puntos hasta que α fue igual a β, no obstante, leyeron nuevamente el enunciado de la actividad, determinando que se debe cumplir que $sen(\alpha) = cos(\beta)$ y no $\alpha = \beta$. Arrastraron de nuevo los puntos y cuando el resultado de $sen(\alpha)$ fue aproximado al resultado de $cos(\beta)$, determinaron que "los ángulos son aproximados". Arrastraron nuevamente los puntos y notaron que lo establecido no se cumplía para otros casos. Por tanto, buscaron otras relaciones, indicando que "son triángulos que tienen tres lados" o "que tienen un ángulo recto".

El profesor sugirió a los estudiantes buscar relaciones como "uno es el doble del otro…". En ese momento, Johan comentó "los dos dan 90", sus compañeros se mostraron escépticos, por lo que decidieron construir nuevos casos. Al analizar los casos, confirmaron lo comentado por Johan, haciendo la aclaración que la suma de la medida de los dos ángulos es aproximadamente noventa. En la solicitud 1, que corresponde con la condición de que satisfacen α y β, ellos reportaron que "Concluimos que si $sen(\alpha) = cos(\beta)$, la suma de los ángulos α y β es aproximadamente 90°" [comentario 1]. Sin embargo, el profesor comentó que lo reportado está asociado al patrón de generalidad y que debe ir más adelante. Por tanto, los estudiantes modificaron lo registrado, reportando el atributo adicional q_1.

> ¿Qué condición cumplen α y β cuando $sen(\alpha) = cos(\beta)$ La suma de los ángulos (α) y (β) es = a 90° [q_1] [respuesta solicitud 1 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

Luego resuelven la solicitud 2, en la que debían reportar el patrón de generalidad. Los estudiantes registraron el patrón anteriormente escrito, sin embargo, el profesor comentó que se debe especificar en dónde se cumple la condición, buscando que no se confunda con una relación trigonométrica para funciones en variable real. Por lo anterior, modificaron lo escrito reportando:

Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione $sen(\alpha) = cos(\beta)$ con la condición encontrada anteriormente: *Concluimos que si el sen(α) de un ángulo de un triángulo rectángulo es = cos(β) de otro ángulo de un triángulo rectángulo entonces, la suma de los ángulos (α) y (β) es aproximadamente 90°* [respuesta solicitud 2 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

Después de escribir el patrón de generalidad, resuelven la solicitud 3 registrando lo siguiente:

Consideran que la condición se cumple en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene $sen(\alpha) = cos(\beta)$. ¿Cómo están seguros de su respuesta? *Al hacer la prueba con ángulos de distintas medidas demuestra que la suma de sus ángulos es aproximadamente 90° por esto estamos seguros de que esta condición se cumple en todos los casos* [respuesta solicitud 3 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

Luego de escribir su respuesta, iniciaron con la actividad de aplicación, en la que se presentó una situación problema en donde dos estudiantes hallan el valor de un mismo cateto en un triángulo rectángulo aplicando dos métodos diferentes. El primer método usa la razón seno y el segundo la razón coseno. Se indica al grupo justificar cuál método es el correcto, argumentando por qué están seguros de la respuesta. Los estudiantes leyeron el problema y se decantaron por resolver lo solicitado aplicando razones trigonométricas, generando una ecuación. Despejando la incógnita, confirman que los dos estudiantes tienen la respuesta correcta, reportando que:

¿Sin hacer uso de la calculadora, cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente BC y por qué están seguros de su respuesta? *Los dos han calculado correctamente. porque Juan allá el sen (30,96) que es igual al ((CO)/(H)), como juan no tiene el cateto opuesto la hipotensa pasa a dividir. Lo mismo con el cálculo de Ana, pero en cos (59,04)* [respuesta - actividad de aplicación T4].

Luego, los estudiantes pasaron a la actividad argumentativa. En esta actividad se solicitó escribir un argumento inductivo utilizando lo encontrado en las actividades anteriores. En la construcción del argumento, preguntaron al profesor sobre los elementos correspondientes al dato, obteniendo que se compone del conjunto referencial, atributo definitorio y atributo adicional. Los estudiantes reportan-:

> Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea*: DATO: Nuestro conjunto referencial son los triángulos rectángulos, nuestro primer atributo es que sen de alfa y cos de B sean iguales, el segundo atributo es que la suma de sus ángulos sea 90°. Se pueden hallar el sen y el cos en un mismo triangulo rectángulo* [respuesta - actividad argumentativo T4].

Finalmente, los estudiantes desarrollan la actividad de síntesis, que solicita describir lo que encontraron y analizaron de forma general. Registrando que:

> Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo: *Nosotros pudimos encontrar que un argumento inductivo tiene tres partes el cual es son: el dato, la generalidad y la aserción y con esto mismo pudimos analizar que en un triángulo rectángulo o en dos triángulos rectángulos se puede hallar el seno y el coseno y la suma de estos dos daría 90°* [respuesta - actividad síntesis T4].

ANÁLISIS. El Grupo 1 logra construir un argumento inductivo. En este, el atributo definitorio p_1 se establece en la actividad de descubrimiento y exploración. El atributo adicional q_1 se registra en la solicitud 1 de esta actividad. En comentario 1 [patrón de generalidad 1] y en la solicitud 2 [patrón de generalidad 2] se proponen versiones complementarias del mismo patrón de generalidad. Consideramos que en la solicitud 3 se hace la aserción, ya que, los estudiantes concluyen que el atributo adicional q_1 se cumple en todos los casos, haciendo alusión a los casos construidos en la actividad. La ilustración sintetiza este primer argumento construido. (Ver *Ilustración* 25).

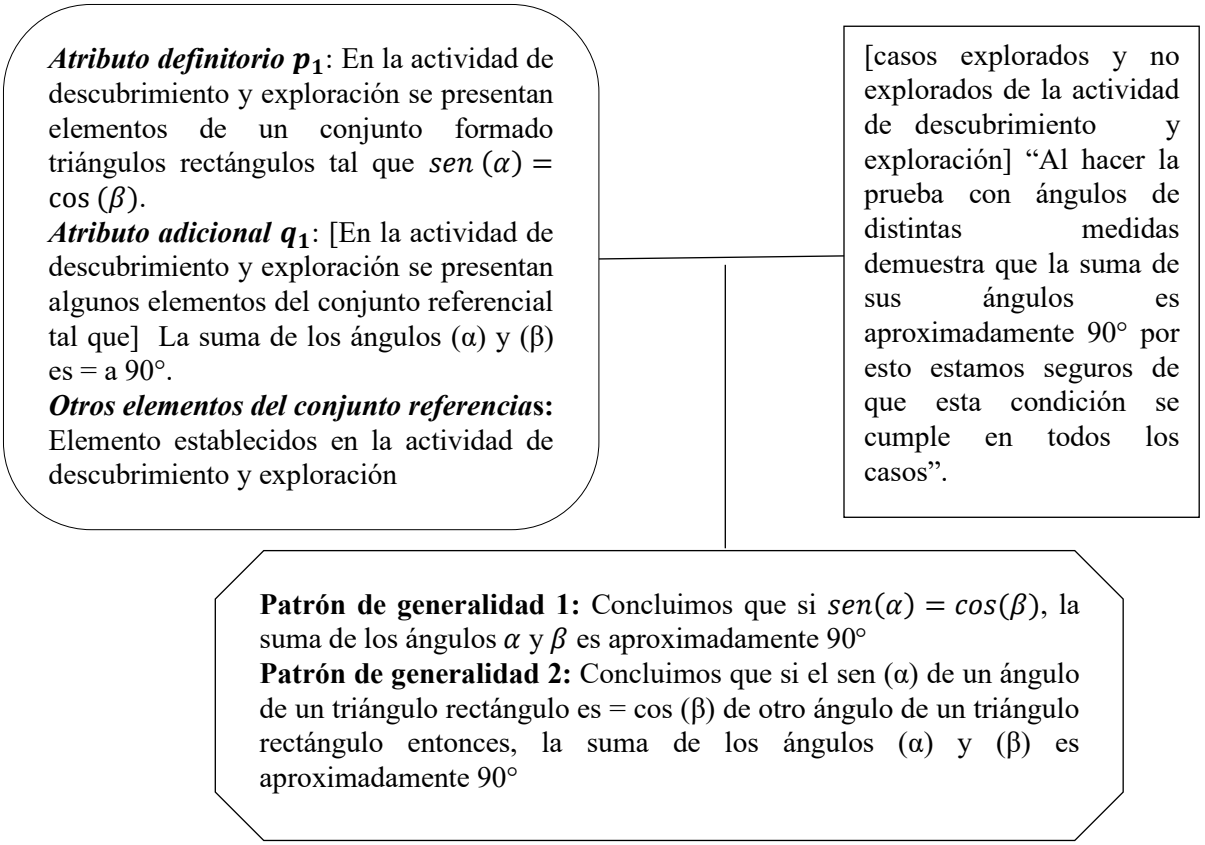


Ilustración 25 Argumento inductivo del Grupo 1 para la Tarea 4

Los estudiantes se encuentran en el Nivel 4 de la categoría *dato*, pues se reconocen el conjunto referencial como parejas de triángulos rectángulos, en los cuales $sen(\alpha) = cos(\beta)$, y determinan que algunos elementos de este conjunto cumplen con el atributo adicional q_1, que corresponde con que la suma de α y β es igual a 90°. Para los *casos observados*, los estudiantes no buscan contraejemplos para construir el patrón de generalidad, por tanto, se ubican en el Nivel 3 de especialización de esta categoría.

En cuanto al *patrón de generalidad*, se proponen 2 versiones que expresan la misma relación de dependencia entre el atributo definitorio p_1 y del atributo adicional q_1, no obstante, el patrón expresado en la solicitud 2, es más específico. Por lo anterior, en esta categoría se ubican en el Nivel 4 de especialización. En lo referente a la *aserción*, identifican que los triángulos creados en la

actividad de descubrimiento y exploración pertenecen al conjunto referencial y estos satisfacen el atributo adicional q_1, por lo cual se ubican en el Nivel 4 de especialización.

Se esperaba que los estudiantes registraran un argumento inductivo completo en la actividad argumentativa, no obstante, solo se evidencia lo respectivo a la categoría del *dato.* En lo reportado en esta actividad, los estudiantes especifican el conjunto referencial, el atributo definitorio y el atributo adicional, que corresponden con lo establecido en el argumento anteriormente analizado.

En relación con GeoGebra, se observa que los estudiantes presentaron dificultades en obtener valores exactos en los resultados de $sen\ (\alpha)$ y $\cos\ (\beta)$, por el arrastre sutil que debían hacer de los vértices de los triángulos. Ya que no lograron obtener la igualdad entre el $sen\ (\alpha)$ y $\cos\ (\beta)$, trabajaron con aproximaciones. Se puede modificar el aplicativo, programando los valores para redondearlos o trucarlos con otras formas a la que se tienen en software, con el fin de obtener más fácilmente los resultados deseados.

Para el lenguaje empleado, se evidencia que los estudiantes no son específicos en sus respuestas, por ejemplo, en el patrón de generalidad 1, omiten que están construyendo el patrón de generalidad basados en una relación que se presenta en triángulos rectángulos. Además, que utilizan de forma incorrecta, símbolos matemáticos en medio de oraciones, como en el caso del patrón de generalidad 2. En la actividad argumentativa, identifican el conjunto referencial, el atributo definitorio y el atributo adicional, pero no logran redactar una expresión discursiva expositiva que exprese un argumento inductivo.

Grupo 2

DESCRIPCIÓN. Los estudiantes iniciaron la Tarea 4 revisando el material de repaso. Luego, se situaron en la actividad de descubrimiento y exploración, que presentó el $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle DFE$, con sus correspondientes valores de $sen(\alpha)$ y $cos(\beta)$. En esta última, dieron respuesta a tres solicitudes.

Para la solicitud 1, los estudiantes determinaron que debían arrastrar los puntos B y E para que el resultado $sen(\alpha)$ sea aproximado al resultado de $cos(\beta)$. Arrastraron los puntos hasta cumplirse que $sen(\alpha) \approx cos(\beta)$, en este momento el profesor preguntó "¿Qué condición cumplen los ángulos para qué pasé eso?", generando que buscaran una condición. Lograron establecer que "Uno tiene que ser más grande que el otro" [refiriéndose a los ángulos]. El profesor aclaró que para buscar una condición deben indagar relaciones como "si uno es el doble del otro", ya que se está trabajando con números, aconsejando usar la calculadora.

Buscaron algunas relaciones usando calculadora, dividiendo las medidas de los ángulos. Al momento del profesor percatarse, sugirió usar operaciones básicas y Saul comentó que "uno es de 50 y otro de 40 y dan 90", lo que llevó al profesor en ahondar en lo establecido por Saul, logrando aclarar que estaba refiriéndose a α y β. Para confirmar lo encontrado exploran más casos y reportan:

> ¿Qué condición cumplen α y β y cuando $sen(\alpha) = cos(\beta)$? *Que al sumar los ángulos α y β el resultado es 90°* [respuesta solicitud 1 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

En la solicitud 2, los estudiantes preguntaron al profesor "¿Cómo es el patrón de generalidad?", él comenta que es una expresión de la forma "Sí…entonces". Escriben el patrón de generalidad: "Si el resultado del $sen(\alpha)$ es igual al resultado del $cos(\beta)$ entonces la suma de los ángulos va a ser de 90°". Cuando se lo mostraron al profesor, este comentó que "deben ser más específicos, ya que las funciones trigonométricas no solo se aplican en triángulos, sino que se aplican en cualquier otro lado". Considerando lo comentado por el profesor, reportan que:

> Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione $sen(\alpha) = cos(\beta)$ con la condición encontrada anteriormente: *Sí el resultado del sen(α) del triángulo rectángulo ABC es igual al resultado del cos(β) del triángulo rectángulo DEF entonces la suma de estos ángulos va a ser 90°* [respuesta solicitud 2 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

Al pasar a la solicitud 3, los estudiantes no la consideraron de mayor importancia, respondiendo:

> Consideran que la condición se cumple en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene $sen(\alpha) = cos(\beta)$. ¿Cómo están seguros de su respuesta? *Es probable, debido a que lo comprobamos en varios casos* [respuesta solicitud 3 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

Posteriormente, los estudiantes pasaron a la actividad de aplicación, que presentó una situación problema. En esta situación, dos estudiantes discuten dos métodos para calcular el cateto BC de un triángulo rectángulo ACB, en el primer método se usa la razón seno y en el segundo la razón coseno. Los estudiantes respondieron la pregunta:

> ¿Sin hacer uso de la calculadora, cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente BC y por qué están seguros de su respuesta?

Para responder, usaron las definiciones de las razones trigonométricas del seno y coseno, despejaron BC y establecieron que los dos métodos son correctos, concluyendo que los dos estudiantes tienen la razón. Le comentaron al profesor su respuesta y este les respondió que no debían usar calculadora. Ellos comentaron que usaron las fórmulas. En seguida, cuando estaban escribiendo la respuesta, Nicol reparó que la medida de los ángulos sumaba 90, por tal motivo, el problema se relacionaba con lo trabajado en la actividad anterior. Ellos responden que:

> *Ambos lo calcularon de manera correcta ya que ambos usaron formulas correctas teniendo en cuenta que sen(α)=cos(β) (ya que la suma de los ángulos es igual a 90° por lo cual sus resultados son iguales* [respuesta - actividad de aplicación T4].

Enseguida desarrollan la argumentativa, que solicitó a los estudiantes construir un argumento inductivo. Iniciaron con la redacción de este, y preguntaron al profesor "¿Cómo se empieza un argumento inductivo?". El profesor comentó que pensaran como si hablaran con otra persona sobre lo que descubrieron, que lo pensaran como la actividad de síntesis. Escribieron que "si tenemos un triángulo rectángulo en el cual la suma de dos de sus ángulos es igual o aproximadamente a 90° entonces podemos inferir que $sen\ (\alpha) = \cos\ (\beta)$", el profesor comentó a los estudiantes que lo dado

era $sen\ (\alpha) = \cos\ (\beta)$ y lo inferido los ángulos es igual o aproximadamente a 90°. Los estudiantes copiaron lo que habían escrito y lo pegaron en la actividad de síntesis.

Modificaron lo que escribieron para construir el argumento y al presentarlo al profesor, este les comentó que no se evidenciaba aserción, por lo cual, los estudiantes completaron otra parte del argumento. Tenían claro que faltaba el dato, por lo que preguntaron cómo debían reportar esta parte del argumento inductivo. El profesor comentó que describieran lo que trabajaron en la actividad de descubrimiento y exploración. Para el argumento redactado, el profesor resalta que en la parte del dato solo reportaron el atributo definitorio, por lo que los estudiantes agregaron el atributo adicional. A continuación, se plasma lo reportado en el argumento inductivo, que refleja el atributo definitorio p_2, el atributo adicional q_2, el patrón de generalidad y la aserción. Además, se presenta lo reportado en la actividad de síntesis.

Ellos reportaron como argumento que:

> Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea: *Al explorar dos triángulos en los cuales sen(α) = cos(β)* [p_2] *descubrimos que el resultado de dos de sus ángulos es igual o aproximado a 90°* [q_2]*, por lo que descubrimos que si tenemos un triángulo rectángulo en el cual sen(α) = cos(β) entonces podemos inferir que la suma de dos de sus ángulos es igual o aproximada a 90°* [patrón de generalidad]*, por lo cual es probable que en otros casos en los que sen(α) = cos(β)* [p_2] *la suma de dos sus ángulos será igual a 90° también* [q_2] [respuesta solicitud - actividad de argumento T4].
>
> Finalmente, en la actividad de síntesis enuncian:
>
> Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo: *encontramos que si tenemos un triángulo rectángulo en el cual sen(α) = cos(β) entonces podemos inferir que la suma de dos de sus ángulos es igual o aproximada a 90°* [respuesta - actividad de síntesis T4].

ANÁLISIS. En la Tarea 4, se construyen dos argumentos inductivos. En el primero, el atributo definitorio p_1 se considera como la condición que cumplen los triángulos rectángulos de la actividad de descubrimiento y exploración. Para la solicitud 1 de la misma actividad, se establece el atributo adicional q_1; la solicitud 2 expone el patrón de generalidad, y en la actividad de aplicación se proporciona la aserción. La *Ilustración* 26 presenta este primer argumento construido.

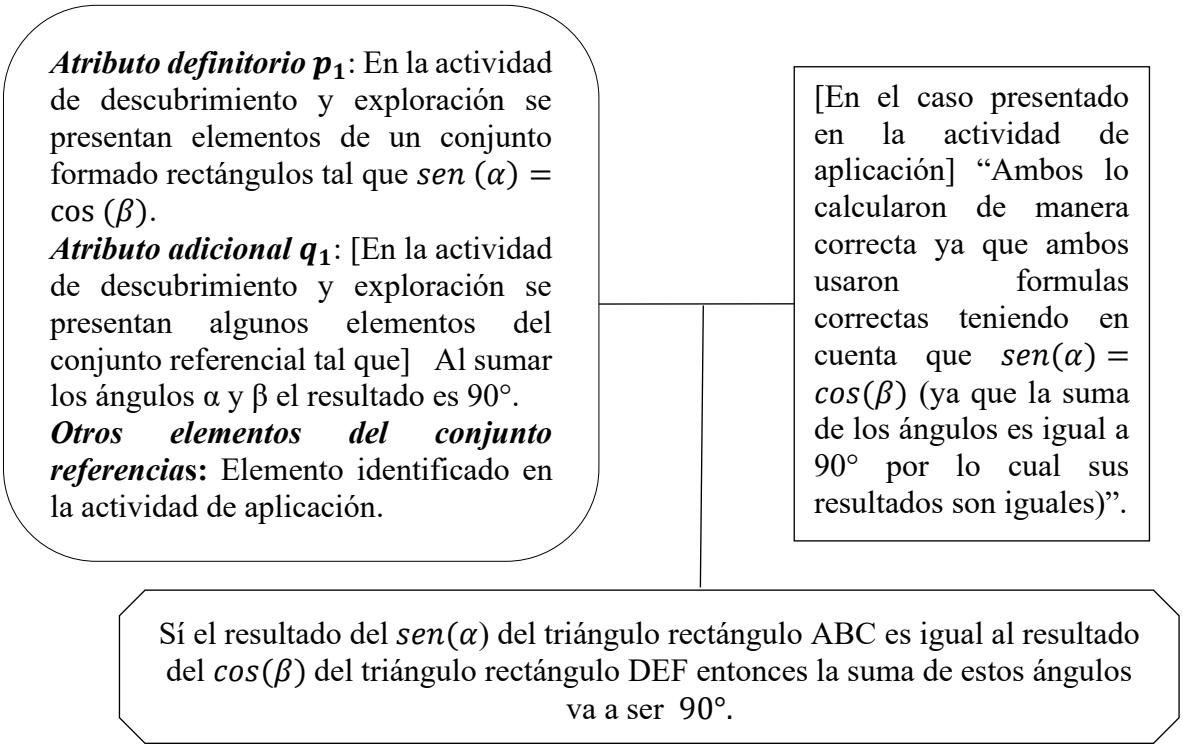


Ilustración 26 Primer argumento inductivo del Grupo 2 para la Tarea 4

Este argumento el atributo definitorio p_1 es la condición $sen(\alpha) = cos(\beta)$, establecida por los estudiantes. El atributo adicional q_1 esperado es que la suma α y β es 90°. Por tanto, los estudiantes se encuentran en el Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*, ya que reconocen el conjunto referencial y el atributo adicional para algunos elementos del conjunto. En lo respectivo a los *casos observados,* el patrón de generalidad se construye solo con la exploración de los casos construidos en la actividad de descubrimiento y exploración, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 3 de especialización para esta categoría.

El *patrón de generalidad* expone que el atributo adicional q_1 depende del atributo definitorio q_1. Por lo anterior, se ubican en el Nivel 4 de especialización para esta categoría. En relación con la *aserción*, se identifica que elemento presentado en la actividad de aplicación cumple el atributo definitorio p_1 ya que este cumple con el atributo adicional q_1. Por el anterior motivo, se ubican en el Nivel 3 de especialización.

En segundo argumento propuesto, lo correspondiente al *dato* se reporta en el primer parte del párrafo de la actividad argumentativa, el patrón de generalidad se encuentra entre las comas y en la parte final se establece la aserción. Los atributos definitorios p_2 y adicional q_2 se relacionan con los atributos del primer argumento, no obstante, los etiquetamos diferente para facilitar el análisis del segundo argumento. La *Ilustración* 27 sintetiza este argumento construido.

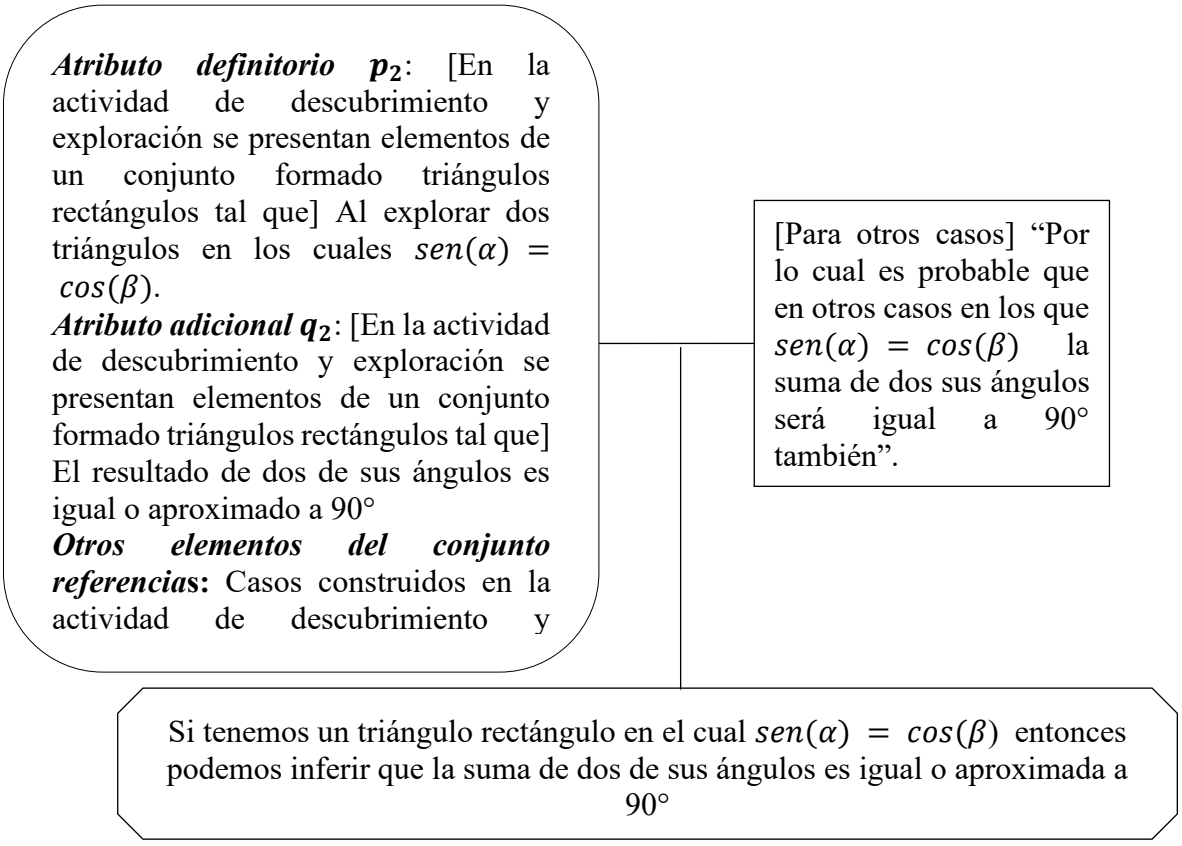


Ilustración 27 Segundo argumento inductivo del Grupo 2 para la Tarea 4

Los estudiantes identifican el conjunto referencial y determinan que algunos elementos que pertenecen a este cumplen con el atributo adicional q_1, por tanto, los tienen un Nivel 4 de especialización para la categoría $dato$. En relación con los *casos observados*, los estudiantes solo consideran los casos analizados en la actividad de descubrimiento y exploración, y no se evidencia la búsqueda de contraejemplos. Por lo anterior se ubican en el Nivel 3 de especialización para esta categoría.

También, determinan que el atributo adicional q_2 depende del atributo definitorio p_2, relación de dependencia que corresponde con el Nivel 4 de especialización de la categoría *patrón de generalidad*. En cuanto a la *aserción*, los estudiantes consideran que los elementos que cumplen el atributo adicional p_2, probablemente satisfacen el atributo adicional q_2, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización de esta categoría, ya que se concluye que más elementos del conjunto referencial tienen el atributo adicional.

En relación con GeoGebra, los estudiantes presentaron dificultades con la herramienta arrastre, al mover los puntos B y D para poder establecer que $sen(\alpha) = cos(\beta)$. Lo anterior, por el arrastre sutil que debían hacer de los puntos para obtener la igualdad. Una modificación para este tipo de tareas puede ser, programar deslizadores que arrastren los puntos, asociando a estos deslizadores valores discretos. Además, los estudiantes dividieron, multiplicaron las medidas de los ángulos, sin embargo, estas operaciones se realizaron fuera del aplicativo. Otra posible modificación es, habilitar un recuadro con una calculadora para que puedan hacer operaciones más rápido.

En cuanto al lenguaje, en lo registrado por los estudiantes, en algunas ocasiones, no hacen referencia a la medida de los ángulos, ellos se refieren solo a los ángulos. Al hacer el reporte de los atributos que cumplen los ángulos, se resalta que se está trabajando con aproximaciones y no con valores específicos. Ellos tienen claro la estructura condicional del patrón de generalidad, pero presentan dificultades en determinar las características del antecedente y el consecuente. Se resalta

su intención de escribir las respuestas de forma concreta, por esta razón buscan validar continuamente lo escrito con el profesor.

Por último, se construye una expresión discursiva expositiva que refleja el conjunto referencial, el atributo definitorio p_2 y adicional q_2. Se expresa adecuadamente en el patrón de generalidad la relación de dependencia entre los atributos. También se realiza una aserción, que corresponde apropiadamente con la posibilidad de que elementos que pertenecen al conjunto referencial cumplan el atributo adicional. En este grupo se observa una expresión discursiva expositiva que contiene los elementos de un argumento y que es construida por los estudiantes.

Grupo 3

DESCRIPCIÓN. Los integrantes del Grupo 3 iniciaron la Tarea 4 revisando el material de repaso. Luego pasaron a la actividad de descubrimiento y exploración, que presentó el $\measuredangle ACB$ con el $sen(\alpha)$, y el $\measuredangle DFE$ con el $cos(\beta)$. Los estudiantes arrastraron los puntos de los triángulos, obteniendo dificultades para que $sen(\alpha)$ sea igual a $cos(\beta)$, logrando solo determinar una aproximación.

Iniciaron con la solicitud 1, que indicaba describir la condición que cumple α y β para que se cumpla que $sen(\alpha) = cos(\beta)$. En principio proponen que la condición es que los ángulos son menores de 50°. Al evidenciar lo anterior, el profesor preguntó sobre lo encontrado y sugirió arrastrar los puntos para que un ángulo quedara de 70° y el otro 20°, obteniendo un contraejemplo para la relación encontrada. El profesor comentó que buscaran una relación numérica, comentando "¿Uno es doble del otro? ¿Multiplicados pasa algo?". Después que probaron con varias operaciones en la calculadora, los estudiantes se percataron que la suma de los dos ángulos es noventa grados, reportando el atributo adicional q_1:

> ¿Qué condición cumplen α y β y cuando $sen(\alpha) = cos(\beta)$?: *al sumar los dos ángulos nos da 90* [respuesta solicitud 1 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

En la solicitud 2, el profesor recordó a los estudiantes que el patrón de generalidad es una expresión de la forma "si …entonces". Los estudiantes escribieron como primer patrón de generalidad que "si sen y cos ya están determinados para que los ángulos tengan un valor alguno de los dos dichos complementara al otro la suma de los 2 da 90" [versión 1]. Luego, el profesor cuestionó el patrón construido, comentando que en lo registrado no se observa que los resultados sean iguales. Por lo anterior, Hany propone el siguiente patrón de generalidad: "Si el resultado de sen y cos es igual entonces la suma de estos ángulos dará 90" [versión 2]. El profesor comenta que hace falta incluir los objetos geométricos y que la condición debe estar ligada a los triángulos rectángulos, además muestra que el $sen(120)$ es igual al $cos(30)$, y que para este caso los ángulos no suman 90. Lo reportado es:

> Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione $sen(\alpha) = cos(\beta)$ con la condición encontrada anteriormente: *Si en un triángulo rectángulo el resultado de sen y cos es igual, entonces la suma de los ángulos nos dará 90* [versión 3] [respuesta solicitud 2 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

En la solicitud 3, los estudiantes no prestan relevancia a lo solicitado, ya que evidencian que en comparación con los demás grupos estaban rezagados y reportan la primera idea construida.

> Consideran que la condición se cumple en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene $sen(\alpha) = cos(\beta)$. ¿Cómo están seguros de su respuesta? *No estamos del todo seguros ya que en algunos casos nos puede dar más halla de 90* [respuesta solicitud 3 - actividad de descubrimiento y exploración T4].

Posteriormente, abordaron la actividad de aplicación, analizaron el problema y concluyeron que los dos estudiantes están en lo correcto. Para confirmar la respuesta se remontaron al material de repaso y aplicaron las razones trigonométricas del seno y coseno para el triángulo dado, registrando el procedimiento en una hoja (se comenta en el registro de vídeo) y haciendo los cálculos en una calculadora, reportando:

Los dos están bien ya que las razones trigonométricas que utilizan para hallar el valor BC son correctas [respuesta solicitud - actividad de aplicación T4].

Después de la actividad de aplicación, los estudiantes leyeron la actividad argumentativa, en la cual se debía reportar un argumento inductivo considerando lo trabajado en las anteriores actividades. Iniciaron con la construcción del argumento señalando los elementos que componen este, referenciando el dato con su correspondiente atributo definitorio p_2, atributo adicional q_2 y terminado con el patrón de generalidad. Para el último momento, el grupo socializa sobre la evaluación que tienen para la siguiente sesión de clase, por lo que se distraen respecto a lo que están escribiendo. Para esta actividad ellos reportan:

> Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea: *Dato: triangulo rectángulo, atributo1: sen(a) = cos(B)* [p_2], *atributo2: ángulos* [q_2]. *Si en un triángulo rectángulo no cumple que tenga un ángulo recto entonces por esto la suma de los ángulos de sen(a) cos(B)* [patrón de generalidad 1] *no se podrían sumar para dar nuestra garantía que al sumarlos de 90* [respuesta solicitud – actividad argumentativa T4].

Por último, los estudiantes abordaron la actividad de síntesis. Para dar respuesta a la solicitud, se basaron en lo reportado en la actividad de descubrimiento y exploración.

> Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo: *Nosotros al explorar estas actividades encontramos que si en un triángulo rectángulo el resultado de sen y cos es igual entonces la suma de los ángulos nos dará 90* [patrón de generalidad 2] [respuesta solicitud – actividad de síntesis T4].

ANÁLISIS. El Grupo 3 construye 2 argumentos inductivos, el primero es completo y el segundo incompleto. Para el primer argumento, el atributo definitorio p_1 se establece implícitamente en la solicitud de la actividad de descubrimiento y exploración. El atributo adicional q_1 y el patrón de generalidad se registran en la solicitud 1 y 2 correspondientemente de esta misma actividad. Para el patrón de generalidad se identifican tres versiones; la versión 1 es el primer patrón de generalidad

construido, la versión 2 es la modificación de la versión 1 y la versión 3 es la registrada en la solicitud 2. En la solicitud 3 consideramos que se establece la aserción para este argumento, aunque los estudiantes no expresan literalmente que un elemento más del conjunto referencial cumple con el atributo adicional q_1, mencionan "no estamos del todo seguros ya que en algunos casos", lo que nos permite inferir que para algunos casos consideran que estos si satisfacen el atributo adicional q_1. La *Ilustración* 28 sintetiza el argumento construido.

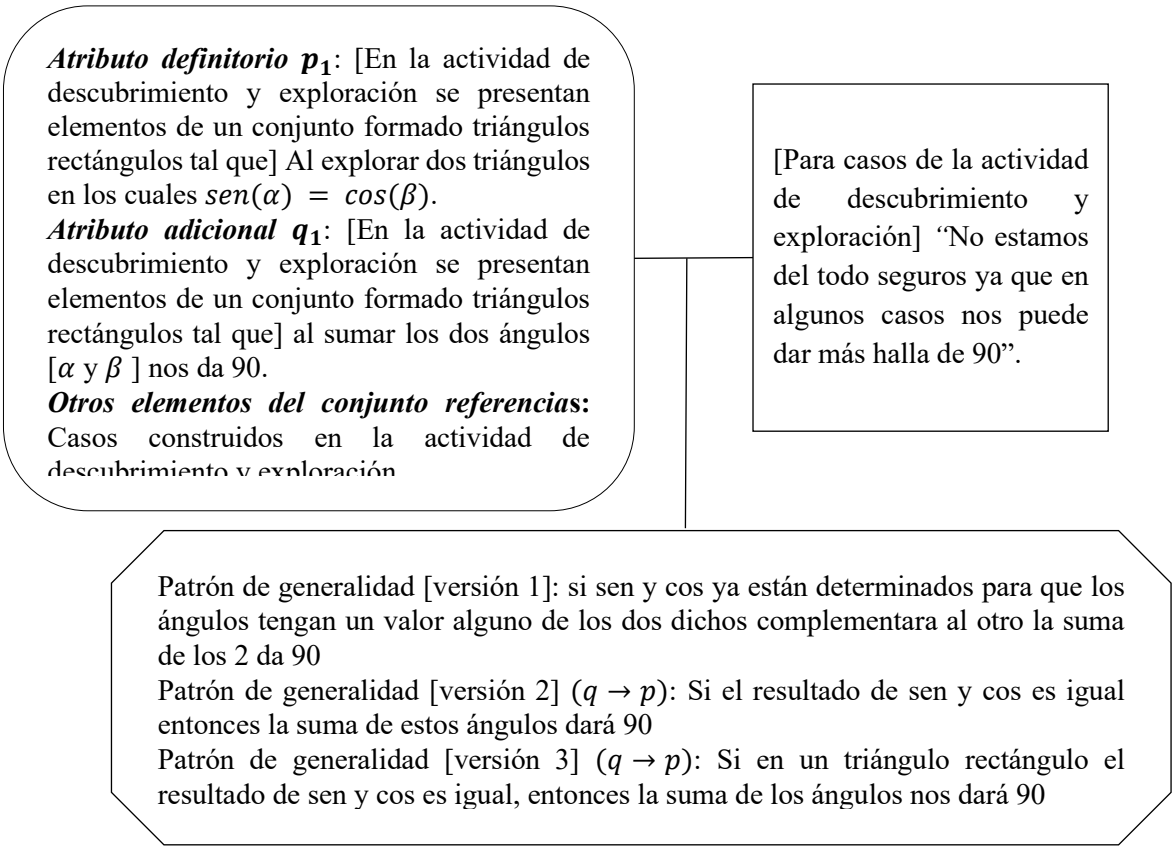


Ilustración 28 Primer argumento inductivo del Grupo 3 para la Tarea 4

Los estudiantes se ubican en el Nivel 4 de la categoría *dato*, ya que logran identificar que los triángulos obtenidos al arrastrar los puntos B y E cumplen que $sen(\alpha) = cos(\beta)$ pertenecen al conjunto referencial. También que algunos de estos elementos tienen el atributo adicional q_1. En los *casos observados*, se tiene que para construir el patrón de generalidad no consideran un contraejemplo, por consiguiente, se ubican en el Nivel 3 de especialización de esta categoría.

Para la construcción de *patrón de generalidad*, en la versión 1 los estudiantes intentan elaborar una relación de dependencia entre los atributos, sin embargo, describen solo el atributo definitorio p_1. En las versiones 2 y 3, los patrones de generalidad expresan que el atributo adicional depende del atributo definitorio y ya que esta relación de dependencia se mantiene a lo largo de la tarea, consideramos esta relación para el análisis del argumento, lo que ubica a los estudiantes en el Nivel 4 de especialización. Se resalta que la diferencia entre la versión 2 y 3, radica en que el patrón de generalidad de la versión 3 es más descriptivo y específico.

En lo referente a la *aserción*, consideramos que los estudiantes, aunque no de manera explícita, establecen que existen elementos del conjunto referencial que cumplen el atributo adicional q_1. Por lo anterior los ubicamos en el Nivel 4 de especialización para esta categoría.

El segundo argumento se encuentra en la actividad argumentativa y en la actividad de síntesis. Para este argumento los estudiantes establecen en la actividad argumentativa el atributo definitorio p_2, el atributo adicional q_2 y un patrón de generalidad [patrón de generalidad 1]. En la actividad de síntesis se evidencia otro patrón de generalidad [patrón de generalidad]. En ninguna de las dos actividades se evidencia alguna aserción. La *Ilustración* 29 sintetiza el segundo argumento.

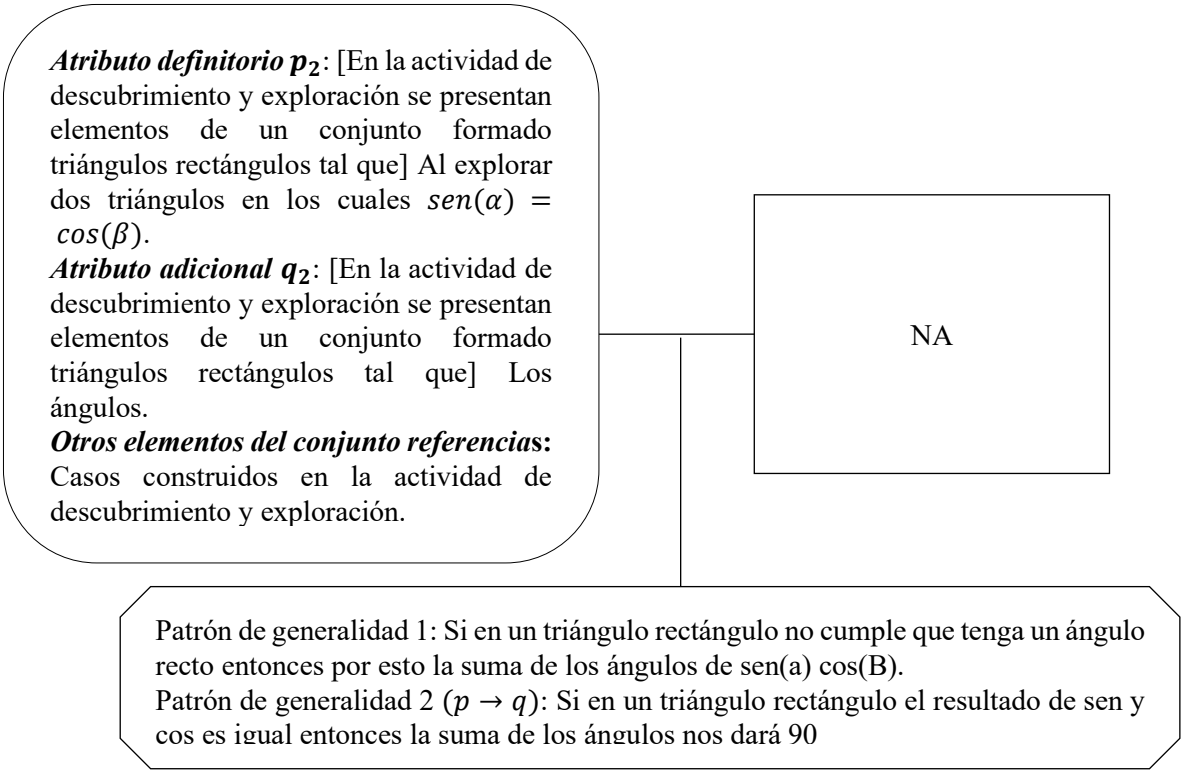


Ilustración 29 Segundo argumento inductivo del Grupo 3 para la Tarea 4

Este argumento tiene Nivel 4 de especialización de la categoría *dato*, pues se identifica el atributo definitorio p_2, que corresponde con $sen(\alpha) = cos(\beta)$. Además, aunque el atributo adicional p_2 no reporta la característica adicional de los elementos del conjunto referencial, solo menciona los ángulos, consideramos que se refieren a que la suma de α y β, que es lo menciona en los patrones de generalidad. En relación con los *casos observados*, presentan un Nivel 4 de especialización, pues el patrón de generalidad se propone considerando los casos creados en la actividad de descubrimiento y exploración, y con el posible contraejemplo considerado.

También se identifican dos patrones de generalidad. En el patrón de generalidad 1, se intenta proponer una relación condicional entre los atributos encontrados. Sin embargo, esta relación se propone expresando la negación antecedente y el consecuente, además la redacción del patrón de generalidad es confusa, lo que no permite hacer un análisis más profundo. En segundo patrón de generalidad 2 expresa que el atributo adicional depende del atributo definitorio, por consiguiente,

ubicamos al grupo en el Nivel 4 de especialización de la categoría *patrón de generalidad.* En la *aserción* no se evidencia que enuncien un caso más del que puedan inferir el atributo adicional, lo que ubica al grupo en el Nivel 1 de especialización en esta categoría.

En lo respectivo al usó de GeoGebra, se observa que los estudiantes presentan dificultades al momento de arrastrar los puntos B y D para obtener que $sen(\alpha) = cos(\beta)$, trabajando solo con valores aproximados. La forma de subsanar esta dificultad se plantea en análisis de la Tarea 4 para el Grupo 2, que propone la creación de deslizadores vinculados a los puntos con el fin de no obtener aproximaciones sino valores específicos para $sen(\alpha)$ y $cos(\beta)$.

En el lenguaje usado para esta tarea, se evidencia que de igual forma que en los grupos anteriores, en algunas ocasiones los estudiantes no se refieren a la medida de los ángulos sino a los ángulos. Por ejemplo, en las tres versiones del patrón de generalidad del primer argumento, ellos reportan "la suma de los ángulos nos dará 90", no especificando que es la suma de la medida de los ángulos dará 90. Otra característica del lenguaje usado es no expresar las unidades en los ángulos y no enunciar los ángulos en el seno y coseno.

En el atributo adicional q_1 los estudiantes utilizan la expresión "al sumar" que refleja la operación que están haciendo con los valores que están expuestos en el aplicativo de la actividad de la descubrimiento y exploración. Lo anterior refleja que el software sigue influenciando el lenguaje en este grupo, aunque en menor medida que las tareas anteriores. Finalmente se resalta que los estudiantes enuncian componentes de un argumento inductivo en la actividad argumentativa, no obstante, se esperaba una expresión discursiva expositiva que manifestara estos componentes.

Síntesis Tarea 4

La Tabla 11 muestra los niveles de especialización para las categorías de los argumentos inductivos construidos por los grupos.

Tabla 11 Síntesis de los niveles de los argumentos inductivos encontrados en la Tarea 4

	Argumento	Dato	Casos observados	Patrón de generalidad	Aserción
G1	Único	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
G2	Primer	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
	Segundo	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 4
G3	Primer	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 3
	Segundo	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 1

La Tarea 4 favorece la producción de argumento en los 3 grupos. En las categorías de *patrón de generalidad* de *dato* todos los argumentos tienen Nivel 4 de especialización, en los *casos observados* todos los argumentos tienen Nivel 3 y en la *aserción* se presentan diferentes niveles. Los argumentos obtenidos en la Tarea 4 permiten considerar la viabilidad de seguir este tipo actividades ya que ayudan a los estudiantes a construir expresiones discursivas expositivas que presenten los componentes de un argumento inductivo.

En el enunciado de la actividad de descubrimiento y exploración se expone la característica que deben establecer los grupos en los triángulos rectángulos ACB y DFE como atributo definitorio, la cual es que $sen(\alpha) = \cos(\beta)$. Esta característica fue bien interpretada por los estudiantes como el atributo definitorio que cumple los elementos del conjunto referencial, pues expresa adecuadamente en todos los argumentos, destacándose explicita en los argumentos de la actividad argumentativa de los grupos 2 y 3. Así mismo, se identifica en esta actividad por parte de todos los grupos que el atributo adicional corresponde con la que la suma de α más β es igual a 90°.

Todos los grupos consideraron los elementos identificados en la actividad de descubrimiento y exploración para la construcción de los patrones de generalidad, no obstante, se mantienen la dificultad de buscar contraejemplos. Lo mencionado previamente, muestra la necesidad de incluir

en este tipo de actividades alguna solicitud que ayude a los estudiantes explorar contraejemplos para validar la veracidad de patrón de generalidad.

Los estudiantes proponen diversos patrones de generalidad, resaltándose que los grupos tienen presente la estructura condicional de estos, lo que converge en que todos los argumentos presentan Nivel 4 de especialización en la categoría. Cabe resaltar que la mediación del profesor respondiendo dudas, contribuye en la mejora de las expresiones usadas por los estudiantes y aporta que estos se ubiquen en el mayor nivel. En el Grupo 3 se registra un patrón de generalidad inusual. Creemos que este tipo de registros se deben a diferentes factores, por ejemplo, distracciones, como para este caso en donde los estudiantes se encontraban angustiados por una avaluación que debían presentar en la siguiente sesión de clase.

Para la solicitud 3 de la actividad de descubrimiento y exploración se esperaba que los estudiantes concluyeran que era posible encontrar dos triángulos que cumplieran con las condiciones establecidas en los atributos definitivo y adicional, además que justificaran su respuesta con lo explorado en el aplicativo. Sin embargo, no profundizaron en esta solicitud y presentaron respuestas sin ahondar en lo planteado. Tal vez lo anterior se debe a que para esta solicitud no se presentaron triángulos que refuercen lo solicitado. Una posible modificación es incluir alguna ilustración o aplicativo que pueda reforzar lo solicitado y permita a los estudiantes generar alguna conclusión más fácilmente. Además, la modificación propuesta puede incluirse en la actividad argumentativa.

En relación con GeoGebra, los grupos presentaron inconvenientes para obtener $sen(\alpha) = cos(\beta)$, además las aproximaciones que determinaron dificultaron encontrar rápidamente el atributo adicional. Particularmente en esta tarea se tenía que operar valores para encontrar el atributo adicional y que estas operaciones se realizaron fuera del aplicativo, lo que aumenta la dificultad para identificar este atributo. Como se mencionó en el análisis de la tarea en los grupos, las

modificaciones están relacionadas con programar deslizadores asociados a las medidas de los ángulos y ubicar una calculadora en la interfaz gráfica para que puedan hacer las operaciones.

En las expresiones usadas por los grupos se evidencia el impacto que tiene el software en el discurso de los estudiantes, por ejemplo, al usar la expresión "al explorar dos triángulos" se manifiesta la interacción que realizaron con triángulos por medio de arrastre, además de explicitar la cantidad de triángulos que se presentaba en la interfaz gráfica del aplicativo. Finalmente, en el lenguaje utilizado en la tarea, se evidencia la influencia de las platillas discursivas usadas en las tareas anteriores, especialmente en el Grupo 2. Aunque los Grupos 1 y 3 no logran redactar una expresión discursiva expositiva que enuncie los componentes de un argumento inductivo, si lo explicitan, también que en los patrones construidos por estos grupos da muestra de cómo poco apoco van estructurando este tipo de discurso.

6. SÍNTESIS DE RESULTADOS

En este apartado presentamos los principales hallazgos, luego de analizar las respuestas de cada uno de los grupos al solucionar la secuencia de tareas propuesta.

En el desarrollo de la secuencia los tres grupos identificaban fácilmente el conjunto referencial, el atributo definitorio y el atributo adicional que cumplían algunos elementos del conjunto. En cada tarea, cada grupo tenía por lo menos un argumento con Nivel 4 de especialización del *dato.* En la Tarea 2, se incluyó una plantilla discursiva como apoyo en la construcción del argumento inductivo. Los argumentos de los tres grupos reportados en la plantilla tenían Nivel 2 de especialidad; consideramos que esta situación se generó, en primer lugar, por ser la primera vez que los estudiantes se acercaban a una estructura similar y, en segundo lugar, porque las expresiones que se usaron en los enunciados de las tareas y en los enunciados de las plantillas no tenían la suficiente claridad para los estudiantes. En la Tarea 4, los estudiantes tenían que reportar un argumento inductivo sin ayuda de plantillas. Los tres grupos lograron reportar argumentos con Nivel 4 de especialidad en el *dato.*

En relación con la cantidad de *casos observados*, ningún grupo alcanza el máximo nivel. Esto se debe a que la estructura de las tareas no permitía alcanzar en Nivel 4 de especialidad. La inclusión del arrastre en las tareas permitía que los estudiantes pudieran explorar una cantidad ejemplos considerables, pero no se incluyeron cuestionamientos o actividades que llevaran a los estudiantes a buscar contraejemplos.

Los Grupos 1 y 3 presentaron un aumento en la especialización del *patrón de generalidad* en el desarrollo de la secuencia. En la Tarea 1, establecer la relación de dependencia entre los atributos definitorio y adicional les generaba dificultades. Reportaban proposiciones simples,

identificaban de manera errada la dependencia o simplemente no reportaban garantía para el argumento. Cuando se incluyó la plantilla discursiva observamos que, aunque en el desarrollo de la tarea no hacían alusión a un patrón de generalidad, en la plantilla podían explicitar un patrón de Nivel 4, en el que el atributo adicional depende del atributo definitorio. Cuando se retiró la plantilla discursiva en la Tarea 4, los dos grupos construyeron argumentos inductivos con máximo nivel en esta categoría.

En contraste, el Grupo 2 mantuvo un Nivel 4 a lo largo de la secuencia. Únicamente en la Tarea 3 obtuvo Nivel 3 en esta categoría, ya que establecieron que el atributo adicional dependía del atributo definitorio. Pero aquellas tareas en las que no tenían que hacer uso de la plantilla discursiva obtenían el nivel máximo de especialidad.

En el caso de la *aserción* los tres grupos tuvieron avances diferentes. El Grupo 1, construyó sólo un argumento con nivel diferente del máximo para esta categoría. En la Tarea 2, infirieron que el elemento adicional cumplía únicamente el atributo definitorio. El Grupo 2, en todos los argumentos que construyeron, infirieron que en el elemento no explorado del conjunto referencial también se cumplía el atributo adicional. Y el Grupo 3 en las Tarea 1 y Tarea 4 para el caso no explorado realiza una inferencia de un atributo diferente al adicional encontrado en el dato, por lo que se ubican en un Nivel 3 de especialidad. Con el apoyo de la plantilla discursiva en la Tarea 2 y 3 alcanzan el máximo nivel. En el momento de reportar el argumento inductivo en la Tarea 4 los estudiantes no presentan aserción, es decir, no construyen un argumento.

Además, logramos evidenciar que a medida que los estudiantes hacían uso de las herramientas de GeoGebra, se animaban a buscar más relaciones y procedían a generar mayor cantidad de conjeturas, lo que favorecía la construcción del *dato*, *el patrón de generalidad* y la *aserción*. También, el lenguaje que usaban en el desarrollo de la secuencia se alejaba de lo observado en la pantalla y empezaba a involucrar expresiones que se acercaban a las relaciones geométricas

encontradas. El uso de las plantillas discursivas permitió en algunas ocasiones que los estudiantes se acercaran a construir un argumento inductivo. En el momento en que se retiran las plantillas los argumentos que se enuncian no alcanzan el máximo nivel de especialización. Si bien la secuencia de tareas estaba enfocada en la producción de argumentos inductivos, el acercamiento que realizan los estudiantes es un poco superficial, lo cual incide en la calidad de sus argumentos.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones de nuestro Trabajo de Grado, que se derivan del análisis realizado a lo largo de la investigación. Cada una de esta en relación de los objetivos planteados, destacando aspectos más relevantes. Por último, exponemos una reflexión personal del trabajo realizado.

El objetivo general de nuestro trabajo de grado fue caracterizar la especialización de los argumentos de los estudiantes de grado décimo del colegio Bicentenario de la Independencia IED, al momento de resolver tareas de razones trigonométricas directas mediadas con GeoGebra. Objetivo que logramos cumplir satisfactoriamente como consecuencia de efectuar los objetivos específicos.

El primer objetivo específico abarco el diseñó de una secuencia de tareas de argumentación sobre razones trigonométricas directas. Estas tareas se desarrollaron haciendo uso del software GeoGebra y promovieron la generación de argumentos inductivos en los estudiantes. Las tareas propuestas abordaron las razones trigonométricas directas y son material base para el diseño de tareas de argumentación en otras temáticas. Consideramos que la secuencia de tareas permite especializar los argumentos inductivos de los estudiantes ya que les brinda cada uno de los pasos de un proceso inductivo. Como modificación de la secuencia propuesta, se deben incluir actividades que permitan la especialización del argumento en relación con la cantidad de casos que se observan para proponer el patrón de generalidad, generando en los estudiantes la inquietud por buscar contraejemplos.

Plantear las tareas por fases facilitó el desarrollo de los aplicativos en las actividades. En cada fase los estudiantes se enfocaban en uno de los elementos estructurales de un argumento inductivo (dato, aserción y patrón de generalidad), propuesta que consideramos propicia la

construcción de argumentos inductivos. Propusimos algunas modificaciones a la secuencia, en capítulo de Análisis, con el fin de optimizar el alcance de cada tarea y de esta manera generar la especialización de cada una de las categorías analizadas.

Se destaca el aporte de GeoGebra Online, interfaz que no solo permitía el desarrollo de las tareas y en el registro de las respuestas. También, cuando los estudiantes respondían cada una de las solicitudes el profesor podía ver en tiempo real lo que escribían permitiendo que solicitara a los estudiantes clarificar expresiones usadas, generar cuestionamientos para que pudieran encontrar propiedades, hacer correcciones y proponer contraejemplos para algunas de las propiedades descubiertas, entre otras. Además, esta extensión de GeoGebra permitió que los estudiantes tuvieran la opción de modificar sus respuestas a medida que exploraban los aplicativos programados y discutían en grupo sobre las respuestas que reportarían, lo que favoreció en algunos casos respuestas más especializadas.

Otro elemento para resaltar son las herramientas básicas (mover, longitud, ángulo) del software, ya que se usaron durante el desarrollo de toda la secuencia. Además, que la barra de herramientas se pudiera editar permitió que habilitáramos las herramientas necesarias evitando distracciones. Destacamos que la opción de programar nuevas herramientas y objetos auxiliares nos ayudó no solo a que los triángulos que exploran los estudiantes pertenecieran al conjunto referencial, sino a indicar errores en el procedimiento y a facilitar la identificación de atributos en cada tarea. Consideramos que las instrucciones de uso de las herramientas deben ser claras, concisas y concretas. Tener indicaciones extensas puede generar que la herramienta se use incorrectamente como sucedió en la Tarea 2.

El usó de las herramientas básicas y en especial las herramientas programadas en conjunto con la programación de los aplicativos fueron relevantes para que los estudiantes construyeran los

elementos estructurales de un argumento inductivo y así propiciar la generación de argumentos inductivos.

El segundo objetivo específico consistió en establecer niveles que permitieran caracterizar la especialización de los argumentos inductivos. Inicialmente, definimos la especialización de argumento y argumento inductivo de calidad, que usamos como base para construir las categorías de especialización de los elementos estructurales de un argumento inductivo, con sus respectivos Niveles de especialización. Al analizar los argumentos de los estudiantes se destaca que, en algunos casos, las categorías no eran suficientes para establecer el grado de especialización de algunos argumentos, situación que generó modificaciones a cada nivel. Los niveles de especialización que reportamos en Varela et al (2024), se modificaron ya que lo reportado por los estudiantes difería mucho con lo propuesto por nosotros. Por ejemplo, en la primera versión no tuvimos en cuenta que los estudiantes podían reportar como patrón de generalidad una relación de dependencia en la que el atributo definitorio dependiera del atributo adicional. Tampoco tuvimos en cuenta la cantidad mínima de casos que se debían explorar para poder realizar una inducción.

Las categorías construidas de *dato*, *casos observados*, *patrón de generalidad* y *aserción*, permitieron caracterizar el nivel de especialización de los argumentos de los estudiantes a partir de la estructura funcional del Modelo de Toulmin (2003) teniendo en cuenta los requerimientos mínimos para hacer una inducción. También, resaltamos que el uso de las categorías en el análisis de resultados tuvo dos etapas. En primer lugar, la modificación en la medida que observábamos la soluciones que daban los estudiantes a las tareas. Los niveles fueron modificándose en la medida que encontrábamos argumentos que no podíamos caracterizar dentro algún nivel especifico. Luego analizar la segunda tarea su uso y aplicación fue sencillo, pudimos caracterizar todos los argumentos inductivos de los estudiantes.

No obstante, recomendamos incluir otras categorías como el lenguaje usado por los estudiantes en la construcción del argumento inductivo, ya que permite poner el foco en un elemento característico de la explicitación de expresiones discursivas. Evidenciamos que los estudiantes usaban expresiones matemáticas para referirse a propiedades parecidas, por ejemplo, la palabra congruencia fue usada no solo para hablar de igualdad de medidas de lados y ángulos, sino para referirse a algunas razones proporcionales.

Los argumentos analizados se caracterizaron usando los Niveles de especialización en cada una de las categorías. Las categorías que presentaron mayor Nivel de especialización durante las tareas fueron *dato* y *aserción*. El *patrón de generalidad* fue la categoría que presentó más variación de niveles. El Nivel 3 de especialización fue el que predomino en la categoría de *aserción*, ya que como lo mencionamos en el análisis, los aplicativos no facilitaban la búsqueda de contraejemplos. Evidenciamos que el uso de las plantillas discursivas permitió en algunos grupos especializar el patrón de generalidad y la aserción. Consideramos que el uso recurrente de esta herramienta permite la construcción de argumentos inductivos especializados, siempre que el lenguaje usado sea claro para el estudiante. Es importante tener en cuenta que el lenguaje usado en las plantillas discursivas y en los enunciados de las tareas debe ser lo suficientemente claro para los estudiantes. Observamos que el uso de la palabra inferir y/o concluir no siempre permitía que el estudiante reportara el patrón de generalidad o la aserción. Las instrucciones demasiado extensas generan confusiones y llevan a que los estudiantes se concentren en elementos o características no solicitadas.

Las categorías construidas con sus respectivos niveles permiten identificar características de los argumentos inductivos. Además, las categorías y la secuencia de tareas son insumos para el diseño de tareas de argumentación con el fin de especializar argumentos inductivos en diferentes contenidos matemáticos y de otros niveles de escolaridad.

La idea de especializar argumentos inductivos puede extenderse a argumentos deductivos y a otros procesos matemáticos, por ejemplo, considerar la idea de especializar la representación o la comunicación matemática puede ser elementos de estudio para mejorar el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, a modo de reflexión personal, consideramos que la caracterización y especialización de argumentos debe transcender la clase de matemáticas y aplicarse a otros ámbitos escolares. Para nosotros fue realmente significativo esta investigación y esperamos que aporte a futuros proyectos.

8. REFERENTES

Acosta, M., Arias, J., Sáez, F. R. (2017). *Potencialidades del software GeoGebra en la enseñanza de la matemática: estudio de caso de su aplicación en la trigonometría*. Roca: Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma, *13*(4), 401-415.

Aktamış, H., & Hiğde, E. (2015). *Assessment of Argumentation Models Used in Science Education*. Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1(35), 136-172. https://doi.org/10.21764/efd.01738

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., S. Navarrete (2020). *La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario*. *Rehuso,* *5*(2), 62-69. Recuperado de https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684

Bridging Math Practices Math-Science Partnership Grant (2015). *Student work sample argumentation resource packet*. University of Connecticut. Recuperado de https://bridges.education.uconn.edu

Camargo, L. U. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Universidad de Antioquia.

Cervantes, J., & Cabañas, G. (2018). *Argumentos formales y visuales en argumentaciones colectivas. Educación Matemática*, *30*(1), 148-168. https://doi.org.10.24844/EM3001.06

Comunidad Hermanos Maristas de la Enseñanza (2019). *Proyecto Educativo Institucional – Colegio Bicentenario de la Independencia.* Bogotá, Colombia.

Comunidad Hermanos Maristas de la Enseñanza. (2022). Informe de Prueba Marista de Matemática Colombia. Bogotá, Colombia.Comunidad Hermanos Maristas de la Enseñanza (2021.).

Proyecto Educativo Institucional – Colegio Bicentenario de la Independencia. Bogotá, Colombia.

Cornejo Morales, C., Goizueta, M., & Alsina, Á. (2021). *La Situación Argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil*. PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2021, vol. 15, núm. 3, p. 159-185.

Crespo, Cecilia (2005). *La importancia de la argumentación matemática en el aula*. *Premisa, 24*, pp. 23-29. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/23130/1/Crespo2005La.pdf

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España. Recupedado de https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=936657

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017*): Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course*. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145-167. Recuperado de https://www.uv.es/angel.gutierrez/textos.html

Galvis, Y. M. (2019). *Euclidea propone y tú argumentas. Esquemas de argumentación y génesis instrumental*. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/11527.

Goizueta, M., & Planas, N. (2013a). *El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores*. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/230543561.pdf

Goizueta, M., & Planas, N. (2013b). *Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. Vol. 31, no. 1. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285704

Hänninen, R., & Ilomäki, L. (2016). *Developing argumentation skills in mathematics through computer-supported collaborative learning*. *Educational Technology Research and Development,* *64*(4), 671-690. Recuperado de file:///C:/Users/JAVAR/Downloads/Vogel%20et%20al%20(2017)%20archive%20version.pdf

Hernández, H., & Parra, R. (2013). *Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza*. Innovación educativa (México, DF), 13(63), 61-73. Recuperado en 02 de diciembre de 2024, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000300005&lng=es&tlng=es.

Iacaona, A. (2018). *La argumentación*. Universidad Autónoma de México.

ICFES. (sf). Reporte del examen SABER 11° por aplicación 2022-4. Establecimientos Educativos. Bogotá, Colombia.

ICFES. (2022). *Guía de orientación grado 11° Matemáticas.* ICFES. Bogotá, Colombia.

Knipping, C. (2008). *A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. ZDM*, *40*(3), 427-441. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y

Knipping, C., & Reid, D. (2015). *Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions*. In: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (eds) Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Lin, P. (2018). *The Development of Students' Mathematical Argumentation in a Primary Classroom*. Educação & Realidade, 43(3), 1171–1192. https://doi.org/10.1590/2175-623676887

López, I. (2022). *Fortalecimiento para el aprendizaje de las razones trigonométricas, mediante una estrategia didáctica denominada MatemaTIC para los estudiantes del grado decimo de la Institución Educativa Los Héroes del municipio de Pupiales (Nariño).* Universidad de Cartagena. Recuperado de https://repositorio.unicartagena.edu.co/handle/11227/15976

Manrique, V. E. & Medina, I. J. (2017). *Tareas digitales: recurso didáctico para favorecer la argumentación.* Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/9456.

Mariotti, M. A. (2013). *Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS*. ZDM, 45, 441-452. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares - Matemáticas.* Bogotá Colombia.

Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Addison Wesley Iberoamericana S.A

Molina, O., & Samper, C. (2019). *Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(63), pp. 109-134. Recuperado de https://www.redalyc.org/journal/2912/291265267008/

Molina, O., Camargo, L., Vargas, C., Samper, C., & Perry, P. (2024). Una propuesta para la formación de profesores de matemáticas: el caso de la argumentación matemática. RIME, 1(1), 151-185. https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013356

Osborne, J., Erduran, S., & Simon, S. (2004). *Mejora de la calidad de la argumentación en la ciencia escolar. Revista de investigación en la enseñanza de las ciencias*, *41*(10), 994-1020.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques* (Tesis doctoral). Université Joaquín Fourier - Grenoble I, Grenoble, Francia.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, *76*, 281-303.

Pinho, J., & Moretti, M. (2020). *Using Dynamical Geometry Softwares in the study of Plane Geometry: potentialities and limitations*. Acta Scientiae, 22(5), 25-43. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5870

Ríos-Cuesta, W. (2022). Garantías de los argumentos en clase de matemáticas mediados por el uso de software vs lápiz y papel. En Sgreccia, Natalia (Ed.), *Memorias de las Segundas Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática* (pp. 249-262). Rosario, Argentina: Editorial Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/30717/1/R%C3%ADos-Cuesta2022Garant%C3%ADas.pdf

Salazar, J., Contreras, Y., & Jaimes, S. (2016) Semiótica: Un recurso fundamental en los procesos de argumentación matemática escrita. *Revista Eco.Mat, 7*, [20-32]. Recuperado de https://doi.org/10.22463/17948231.1016

Sandoval, I. (2009). *La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. Educación Matemática, 21*(1), pp. 5-27 . Recupedado de http://funes.uniandes.edu.co/13184/

Schwarz, B. B., Hershkowitz, R. & Prusak, N. (2010). *Argumentation and Mathematics*. En C. Howe and K. Littleton (Eds.), Educational Dialogues: Understanding and Promoting Productive Interaction (pp. 115-141). Routledge. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/273143587_Argumentation_and_mathematics

Solar, H., Goizueta, M.,& Rojas, F. (2017). *La argumentación en el aula de matemáticas*. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 78, 49-56.

Toulmin, S. (2003). *Los usos de la argumentación*. Traducción de Morras y Pineda. Barcelona. Ed. Península. 1ª ed. 2007. ISBN 978-84-8307-765-8. Recuperado de https://www.libreriaproteo.com/libro/ver/410982-los-usos-de-la-argumentacion.html

Trigueros, M., Saorín, J. L., & Blanco, M. J. (2014). *Using an argumentation-based computer-supported collaborative learning environment to improve mathematical performance*. Computers & Education, 78, 63-72. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.05.005

Uzun, E., & Tekerek, B. (2023). *The levels of arguments developed by preservice teachers through science and mathematics integration*. International Journal of Education Technology & Scientific Researches, 8(21). http://dx.doi.org/10.35826/ijetsar.562

Varela, J., Ávila, C. & Vargas, C. (2024). Especialización de los argumentos de estudiantes de grado décimo al usar GeoGebra en tareas de razones trigonométricas. En P. Perry (ed.), Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 26, 225-232. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vargas, G. & Gamboa, R. (2013). *La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele*. *Uniciencia, 27*(1), 95-118. Recuperado de https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4945

Vargas, C., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2022). Tareas de argumentación: ¿por qué un "por qué" no es necesario ni suficiente? *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones,* 25, 101-113. http://funes.uniandes.edu.co/30595/1/2022Pr-Vargas%26Tareas.pdf

ANEXOS

Anexo A: Tarea 1 – Grupo 1

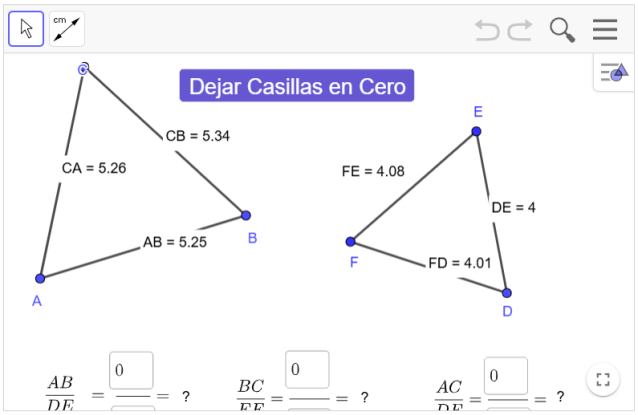
ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Realicen la siguientes acciones.

i) Utilicen la herramienta Distancia para determinar la longitud de los lados de cada triángulo.

ii) Ingresen las longitudes en las casillas correspondientes.

CASO INICIAL



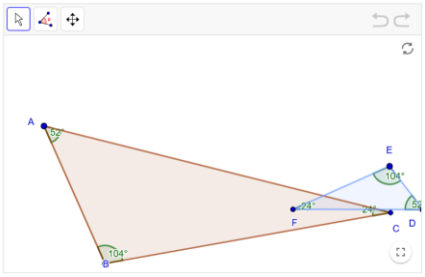
Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial**.

Durante el caso inicial pudimos observar que al dividir la medida de los lados de dichos triángulos su resultado va a ser el mismo.

ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN

En los siguientes aplicativos encuentran representados el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Utilicen la herramienta Ángulo para determinar la medida de los ángulos de cada uno de los triángulos.

CASO 1



Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**.

La suma de todos los ángulos es de 180, y a pesar de los triángulos cambien su tamaño los ángulos siguen midiendo lo mismo, los ángulos de ambos triángulos miden lo mismo.

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 2**.

En este caso los triángulos tienen ángulos diferentes al caso anterior, la suma de los ángulos el resultado sigue siendo 180, y a pesar del tamaño de los lados los ángulos continúan teniendo la misma medida. Siempre hay un vértice que no se puede mover.

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 3.**

En este caso los triángulos tienen ángulos diferentes al caso anterior, la suma de los ángulos el resultado sigue siendo 180, y a pesar del tamaño de los lados los ángulos continúan teniendo la misma medida. Siempre hay un vértice que no se puede mover.

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 4**

En este caso los triángulos tienen ángulos diferentes al caso anterior, la suma de los ángulos el resultado sigue siendo 180, y a pesar del tamaño de los lados los ángulos continúan teniendo la misma medida. Siempre hay un vértice que no se puede mover.

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 5**

En este caso los triángulos tienen ángulos diferentes al caso anterior, la suma de los ángulos el resultado sigue siendo 180, y a pesar del tamaño de los lados los ángulos continúan teniendo la misma medida. Siempre hay un vértice que no se puede mover.

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y en la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en las siguientes casillas.

Al explorar el caso inicial, el caso 1, 2, 3, 4, y 5, observamos que

En los casos 1,2,3,4,5 observamos dos triángulos y la medida de sus lados, a diferencia del caso inicial que no nos daban las medidas de los lados si no que debíamos hallarlas, los cuales se dividen los lados AB y DE, BC y EF, AC y DF y los resultados de estas divisiones es el mismo.

Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es

Que la medida de todos los ángulos no cambian a pesar de que sus lados cambien su medida.

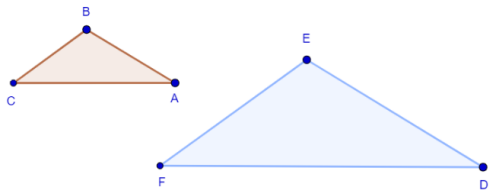
A partir de lo anterior podemos afirmar que (escribir una generalidad)

Al dividir sus lados en cada caso sus resultados son congruentes.

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Escriban una característica de los triángulos que puedan inferir de la información observada.

CASO FINAL



$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = 0.5$ $\frac{BC}{EF} = \frac{3.5}{7} = 0.5$ $\frac{AC}{DF} = \frac{6.3}{12.6} = 0.5$

Lo que podemos inferir es

En este caso no podemos verificar que la medida de los ángulos y los lados sean las correctas pues no poseemos herramientas, a pesar de esto observamos que se continúan dividiendo sus lados y el resultado sigue siendo congruente.

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

Esta aplicación llamada geogebra contiene distintas herramientas que nos permiten explorar entre los diferentes casos, esta nos facilita medir los ángulos, lados y hallar la diferencia de los lados, logramos identificar que aunque cambie la medida de los lados sus ángulos siguen siendo los mismos y el consciente de la diferencia de los lados es congruente.

Activar W
Ve a Config

Anexo B: Tarea 1 – Grupo 2

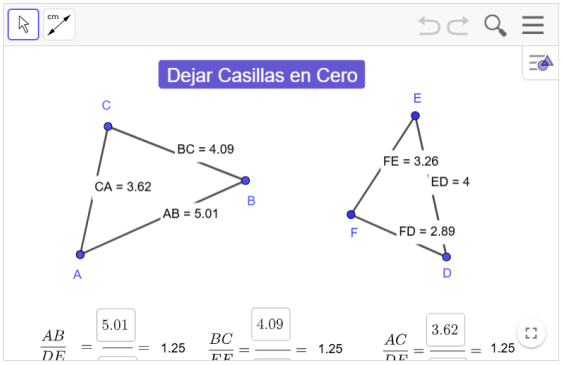
ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Realicen la siguientes acciones.

i) Utilicen la herramienta Distancia para determinar la longitud de los lados de cada triángulo.

ii) Ingresen las longitudes en las casillas correspondientes.

CASO INICIAL



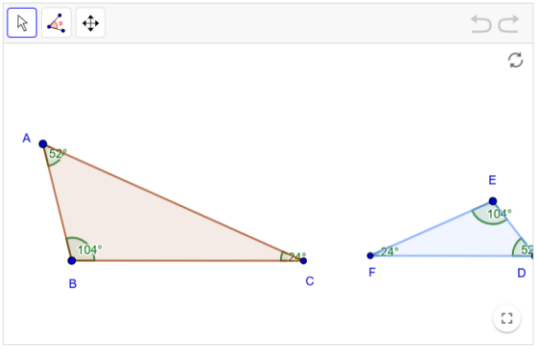
Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial**.

Aa π A pesar de mover los triángulos los resultados de la división de 2 lados en especifico van a ser iguales

ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN

En los siguientes aplicativos encuentran representados el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Utilicen la herramienta Ángulo para determinar la medida de los ángulos de cada uno de los triángulos.

CASO 1



Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**.

Aa π La característica que nosotros vimos fue que los ángulos de ambos triángulos son iguales, en este caso el ángulo c y el f miden 24°, el d y el a miden 52°, y el b y el e miden 104°

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 2**.

Aa π así movamos los triángulos, los ángulos siempre van a ser iguales

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 3.**

Aa π Este punto tiene similitud con los dos de arriba, en el cual todos los ángulos miden lo mismo

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 4**

Este punto tiene similitud con los tres de arriba, en el cual todos los ángulos miden lo mismo

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 5**

que los lados y los ángulos son iguales en los puntos de arr

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y en la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en las siguientes casillas.

Al explorar el caso inicial, el caso 1, 2, 3, 4, y 5, observamos que

Nosotros nos dimos cuenta que gracias a los resultados de las divisiones de las medidas de los lados (en ejemplo ab/de), los ángulos son iguales, si movemos los triángulos los ángulos van a seguir siendo los mismos en ambos triángulos, de igual forma el resultado de la división de las medidas de los lados van a coincidir (en ejemplo ab/de=3.5 y bc/ef= 3.5 y ac/df= 3.5)

Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es

en todos los casos vistos la medida del ángulo FED y el ángulo ABC miden lo mismo, de igual forma el ángulo BAC y el ángulo FDE miden lo mismo y el ángulo BCA y el ángulo EFD miden lo mismo

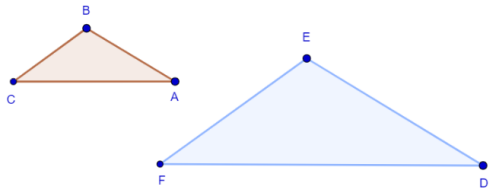
A partir de lo anterior podemos afirmar que (escribir una generalidad)

en todos los casos vistos la medida del ángulo FED y el ángulo ABC miden lo mismo, de igual forma el ángulo BAC y el ángulo FDE miden lo mismo y el ángulo BCA y el ángulo EFD miden lo mismo

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Escriban una característica de los triángulos que puedan inferir de la información observada.

CASO FINAL



$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = 0.5$ $\frac{BC}{EF} = \frac{3.5}{7} = 0.5$ $\frac{AC}{DF} = \frac{6.3}{12.6} = 0.5$

Lo que podemos inferir es

los ángulos van a coincidir como en los casos anteriores

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

en la actividad pudimos observar cosas nuevas como lo es que gracias al resultado de las divisiones de las medidas de los lados de los triángulos se determinan los ángulos de los mismos, para esto tuvimos que analizar las medidas de los lados y las medidas de los ángulos n

Act
Ve a

Anexo C: Tarea 1 – Grupo 3

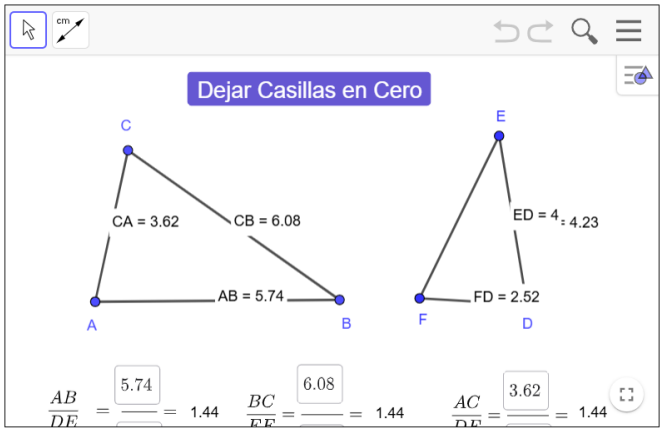
ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Realicen la siguientes acciones.

i) Utilicen la herramienta Distancia para determinar la longitud de los lados de cada triángulo.

ii) Ingresen las longitudes en las casillas correspondientes.

CASO INICIAL



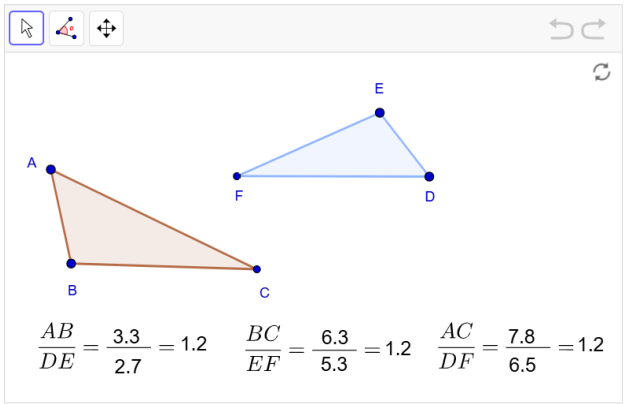
Escriban la característica que logran identificar para el **caso inicial**.

podemos evidenciar dos triangulos rectangulos con longitudes diferentes pero al dividir un lado del triangulo A y un lado del triangulo B nos da el mismo resultado

ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN

En los siguientes aplicativos encuentran representados el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Utilicen la herramienta Ángulo para determinar la medida de los ángulos de cada uno de los triángulos.

CASO 1



Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 1**.

los angulos no son los mismos ya que los triangulos son de diferente tamaño pero el valor de sus angulos es el mismo

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 2**.

no importa el tamaño de los triangulos el valor del angulo es el mismo

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 3.**

no importa el tamaño de los triangulos el valor del angulo es el mismo

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 4**

no importa el tamaño de los triangulos el valor del angulo es el mismo

Escriban una característica que lograron encontrar al medir los ángulos para el **caso 5**

no importa el tamaño de los triangulos el valor del angulo es el mismo

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y en la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en las siguientes casillas.

Al explorar el caso inicial, el caso 1, 2, 3, 4, y 5, observamos que

hemos explorado la forma de hallar los lados de un triangulo y sus angulos en la aplicacion

Una característica común que logramos encontrar en los casos 1, 2, 3, 4, y 5 es

hemos ecntrado que todos los triangulos son semejantes y todo sus sus angulos eran los mismos por ende no importaba el tamaño

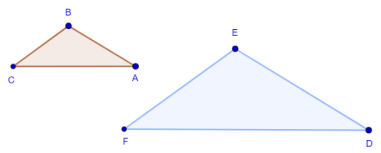
A partir de lo anterior podemos afirmar que (escribir una generalidad)

todos los angulos son los mismos

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$. Escriban una característica de los triángulos que puedan inferir de la información observada.

CASO FINAL



$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = 0.5$ $\frac{BC}{EF} = \frac{3.5}{7} = 0.5$ $\frac{AC}{DF} = \frac{6.3}{12.6} = 0.5$

Lo que podemos inferir es

los lados de los triangulos son semejantes si el valor de los angulos son iguales

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

la actividad que realizamos el dia de hoy fue analizar los diferentes tipos de triangulos y obsevar sus angulos para sacar una conclucion la cual es:los lados de los triangulos son semejantes si el valor de los angulos son iguales.

Activar
Ve a Confi

Anexo D: Tarea 2 – Grupo 1

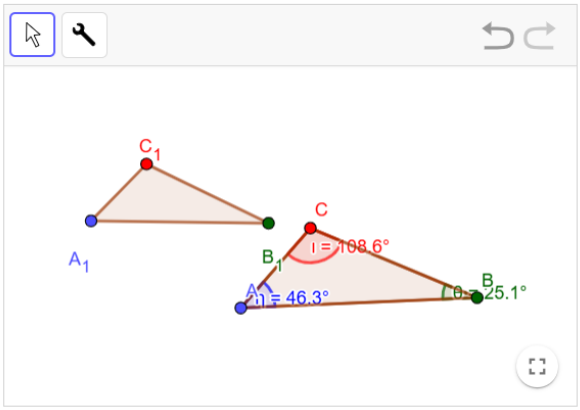
ACTIVIDAD DE PRÁCTICA

En el siguiente aplicativo encontrarán la herramienta *Crear Triángulos* que permite generar un nuevo triángulo a partir de otro triángulo ya construido. Para usar la herramienta, efectúen el siguiente procedimiento:

Seleccionen la herramienta *Crear triángulos* . Seleccionen el punto A_1 del triángulo dado. ($\triangle A_1B_1C_1$).

Ingresen un valor entre 2 y 10. Seleccionen los puntos B_1 y C_1 del $\triangle A_1B_1C_1$. Hagan clic en alguna parte de la vista gráfica, para generar un punto. El aplicativo generará un nuevo triángulo con una propiedad que deberás descubrir.

CASO DE PRÁCTICA

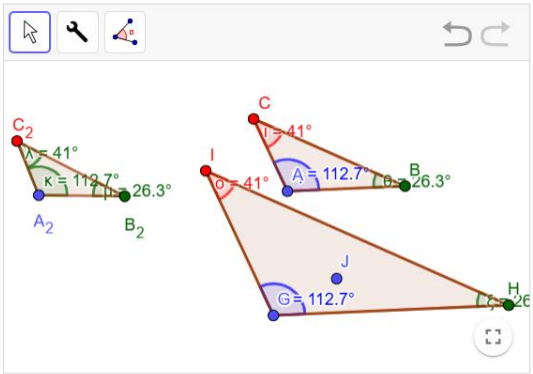


ACTIVIDAD DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encontrarán representado el $\triangle A_2B_2C_2$. Utilicen la herramienta *Crear Triángulos* para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle A_2B_2C_2$.

¿Qué característica cumplen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos?* Escriban la característica identificada en la casilla que se encuentra después del aplicativo.

CASO INICIAL



La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos* es:

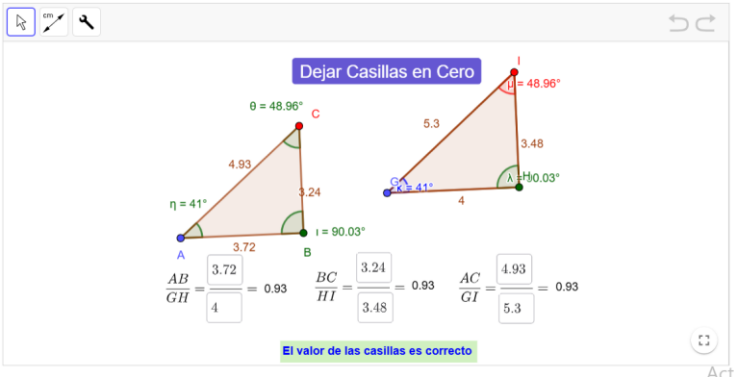
Aa π No importa el tamaño de los triángulos sus ángulos A,B y C serán los mismos en los diferentes triángulos

ACTIVIDAD EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo se encuentra representado el $\triangle ABC$. Utilicen la herramienta Crear triángulos para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle ABC$. Descubran una nueva relación que cumplen los dos triángulos construidos utilizando las herramientas del aplicativo.

Arrastren los vértices del triángulo inicial ($\triangle ABC$) y verifiquen la relación encontrada en otros triángulos.

CREACIÓN DE CASOS

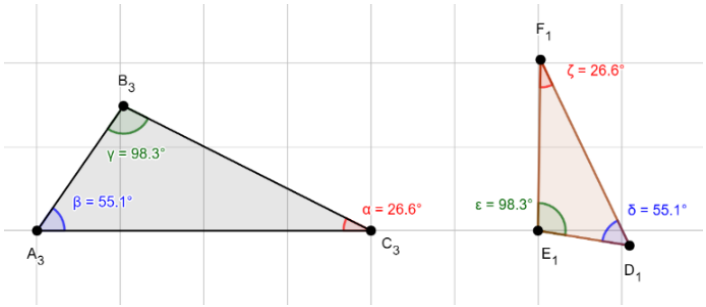


Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes.

Aa π Que aunque movamos el triangulo inicial, el resultado de las divisiones de las medidas de sus lados son congruentes

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle A_3B_3C_3$ y el $\triangle D_1E_1F_1$. Escriban una característica de los triángulos que se pueda inferir de la información observada en el siguiente aplicativo.



Lo que podemos inferir es

Aa π Que el angulo C3 y F1 son iguales,E1 y B3 son iguales y que A3 y D1 son iguales

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

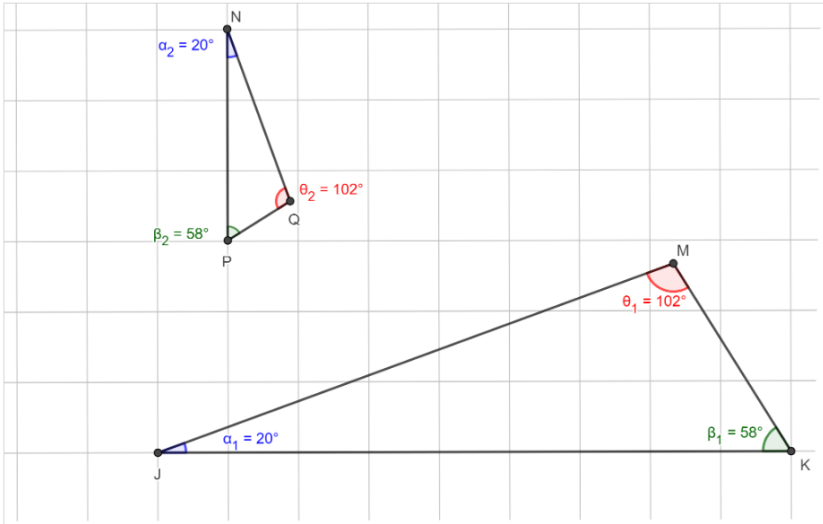
Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

Aa π

Nosotros encontramos que podíamos elegir el tamaño del triangulo que creamos y que no importa cuanto moviéramos sus vértices los ángulos seguían midiendo lo mismo algunas veces, también nos dimos cuenta que al dividir los lados de los dos triángulos el resultado de la división era la misma

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en el siguiente aplicativo.



La herramienta Crear Triángulo permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que

la medida de sus angulos es igual

En algunas de estas parejas observamos que

sus tamaños son diferentes pero sus angulos i

Inferimos que siempre que en una pareja de triángulos se cumple que

Siempre que sus angulos midan lo mismo

también se puede concluir que

El resultado de la division de sus lados sea la

Así por ejemplo, en el ΔABC y ΔDEF se pudo concluir

$$\frac{MK}{PQ} = \frac{JK}{NP} = \frac{JM}{NQ}$$

Las proporciones son correctas

por que se tiene que

$$\angle J \cong \angle N,\ \angle K \cong \angle P \ \ y\ \angle M \cong \angle Q$$

Anexo E: Tarea 2 – Grupo 2

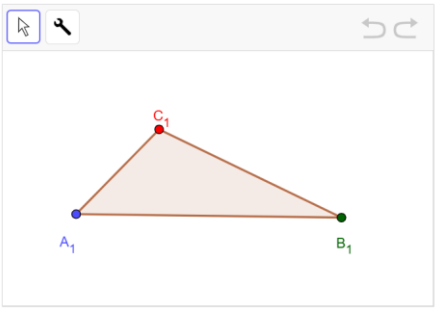
ACTIVIDAD DE PRÁCTICA

En el siguiente aplicativo encontrarán la herramienta *Crear Triángulos* que permite generar un nuevo triángulo a partir de otro triángulo ya construido. Para usar la herramienta, efectúen el siguiente procedimiento:

Seleccionen la herramienta *Crear triángulos* . Seleccionen el punto A_1 del triángulo dado. ($\triangle A_1B_1C_1$).

Ingresen un valor entre 2 y 10. Seleccionen los puntos B_1 y C_1 del $\triangle A_1B_1C_1$. Hagan clic en alguna parte de la vista gráfica, para generar un punto. El aplicativo generará un nuevo triángulo con una propiedad que deberás descubrir.

CASO DE PRÁCTICA

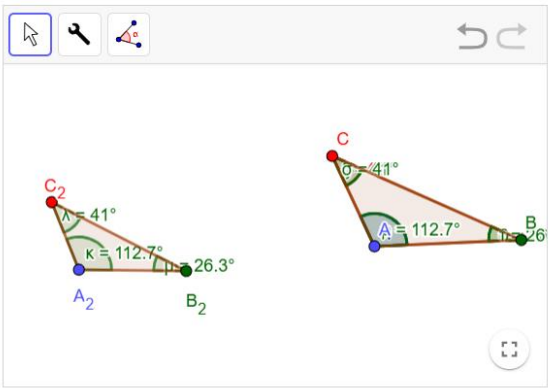


ACTIVIDAD DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encontrarán representado el $\triangle A_2B_2C_2$. Utilicen la herramienta *Crear Triángulos* para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle A_2B_2C_2$.

¿Qué característica cumplen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos?* Escriban la característica identificada en la casilla que se encuentra después del aplicativo.

CASO INICIAL



La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos* es:

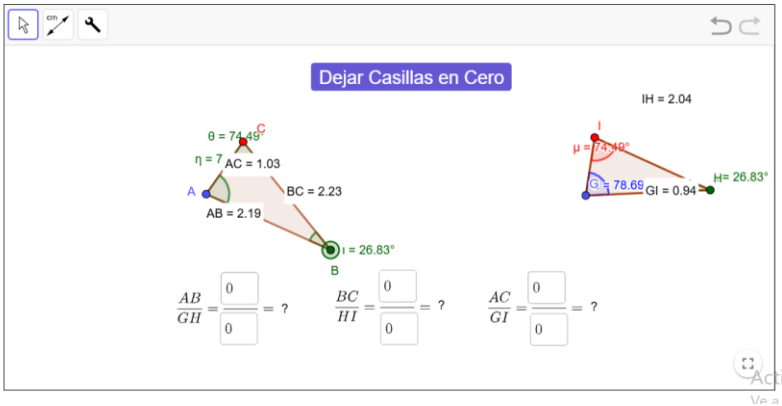
Aa π que los ángulos de los triángulos son los mismos y también nos dimos cuenta que el numero que uno pone varia el tamaño del triangulo

ACTIVIDAD EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo se encuentra representado el $\triangle ABC$. Utilicen la herramienta Crear triángulos para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle ABC$. Descubran una nueva relación que cumplen los dos triángulos construidos utilizando las herramientas del aplicativo.

Arrastren los vértices del triángulo inicial ($\triangle ABC$) y verifiquen la relación encontrada en otros triángulos.

CREACIÓN DE CASOS

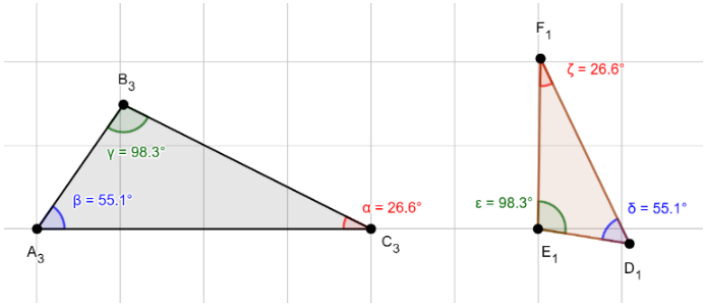


Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes.

Aa π que el resultado de la división de las medidas de los lados de los triángulos coinciden en los 3 casos, los triángulos tienen los mismos ángulos

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle A_3B_3C_3$ y el $\triangle D_1E_1F_1$. Escriban una característica de los triángulos que se pueda inferir de la información observada en el siguiente aplicativo.



Lo que podemos inferir es

Aa π que el resultado de la división de las medidas de los lados también va a coincidir como fue en el caso anterior

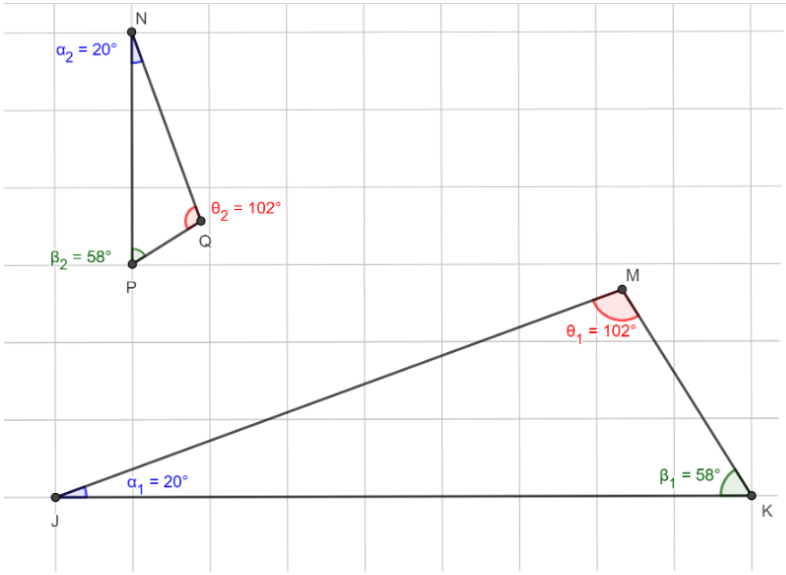
ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

Aa π que mientras los ángulos de los triángulos coincidan, la división de las medidas de los lados de los triángulos, van a ser iguales en los 3 casos

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en el siguiente aplicativo.



La herramienta Crear Triángulo permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que

los angulos y las divisiones de las medidas de

En algunas de estas parejas observamos que

que los tamaños de los triangulos en los casos

Inferimos que siempre que en una pareja de triángulos se cumple que

los angulos son iguales

también se puede concluir que

que mientras los ángulos de los triángulos coi

Así por ejemplo, en el ΔABC y ΔDEF se pudo concluir

$$\frac{MK}{PQ} = \frac{JM}{QN} = \frac{JK}{PN}$$

Las proporciones son correctas

por que se tiene que

$\angle J \cong \angle N,\ \angle K \cong \angle P \ \ y\ \angle M \cong \angle Q$

Anexo F: Tarea 2 – Grupo 3

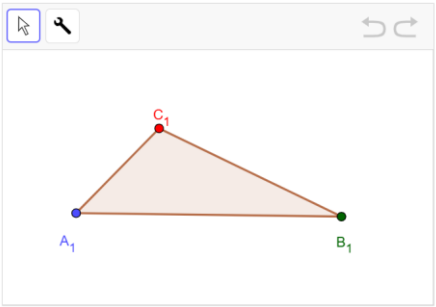
ACTIVIDAD DE PRÁCTICA

En el siguiente aplicativo encontrarán la herramienta *Crear Triángulos* que permite generar un nuevo triángulo a partir de otro triángulo ya construido. Para usar la herramienta, efectúen el siguiente procedimiento:

Seleccionen la herramienta *Crear triángulos* . Seleccionen el punto A_1 del triángulo dado. ($\triangle A_1B_1C_1$).

Ingresen un valor entre 2 y 10. Seleccionen los puntos B_1 y C_1 del $\triangle A_1B_1C_1$. Hagan clic en alguna parte de la vista gráfica, para generar un punto. El aplicativo generará un nuevo triángulo con una propiedad que deberás descubrir.

CASO DE PRÁCTICA

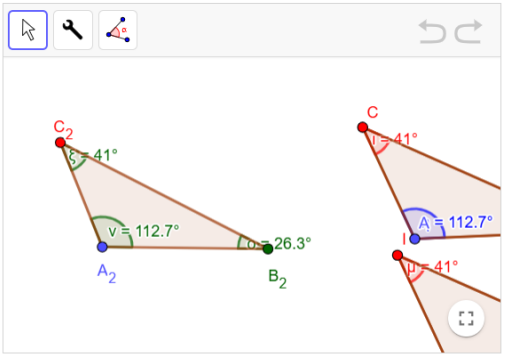


ACTIVIDAD DESCUBRIMIENTO

En el siguiente aplicativo encontrarán representado el $\triangle A_2B_2C_2$. Utilicen la herramienta *Crear Triángulos* para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle A_2B_2C_2$.

¿Qué característica cumplen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos?* Escriban la característica identificada en la casilla que se encuentra después del aplicativo.

CASO INICIAL



La característica que tienen los triángulos generados por la herramienta *Crear Triángulos* es:

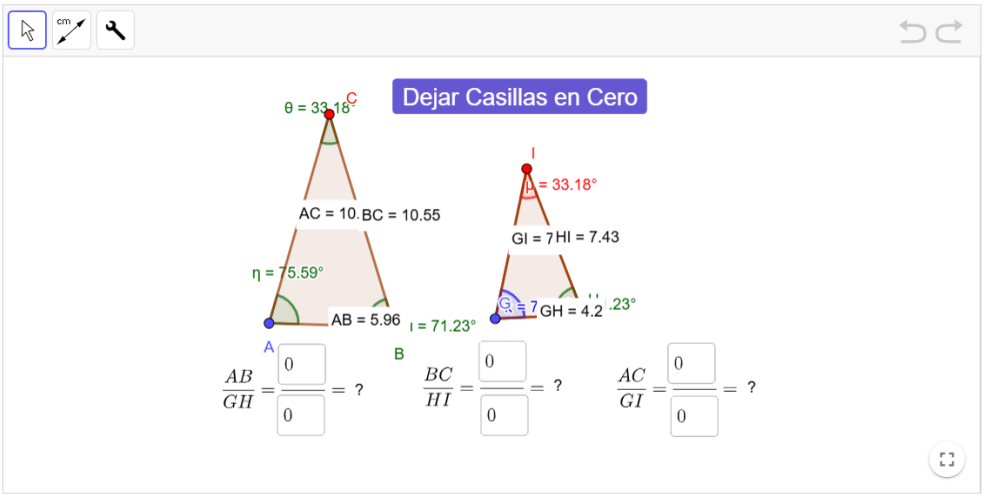
al utilizar la herramienta puede generar triángulos de diferente tamaño pero el valor de los ángulos es el mismo

ACTIVIDAD EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo se encuentra representado el $\triangle ABC$. Utilicen la herramienta Crear triángulos para construir un nuevo triángulo ($\triangle GHI$) a partir del $\triangle ABC$. Descubran una nueva relación que cumplen los dos triángulos construidos utilizando las herramientas del aplicativo.

Arrastren los vértices del triángulo inicial ($\triangle ABC$) y verifiquen la relación encontrada en otros triángulos.

CREACIÓN DE CASOS



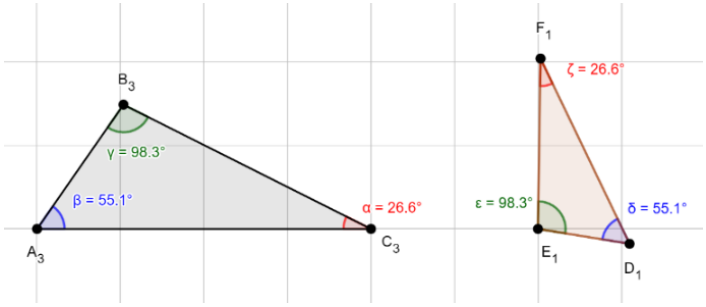
Escriban la relación que lograron encontrar al ingresar la longitud de los segmentos en las casillas correspondientes.

podemos afirmar que al cambiar el valor de los lados de los dos triángulos y al dividirlo nos dan el mismo resultado

M

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

A continuación, se encuentra representado el $\triangle A_3B_3C_3$ y el $\triangle D_1E_1F_1$. Escriban una característica de los triángulos que se pueda inferir de la información observada en el siguiente aplicativo.



Lo que podemos inferir es

Aa π no importa el valor de los lados de los 2 triangulo, si dividimos un lado del triangulo ABC con un lado del triangulo DEF nos dará el mismo resultado las divisiones

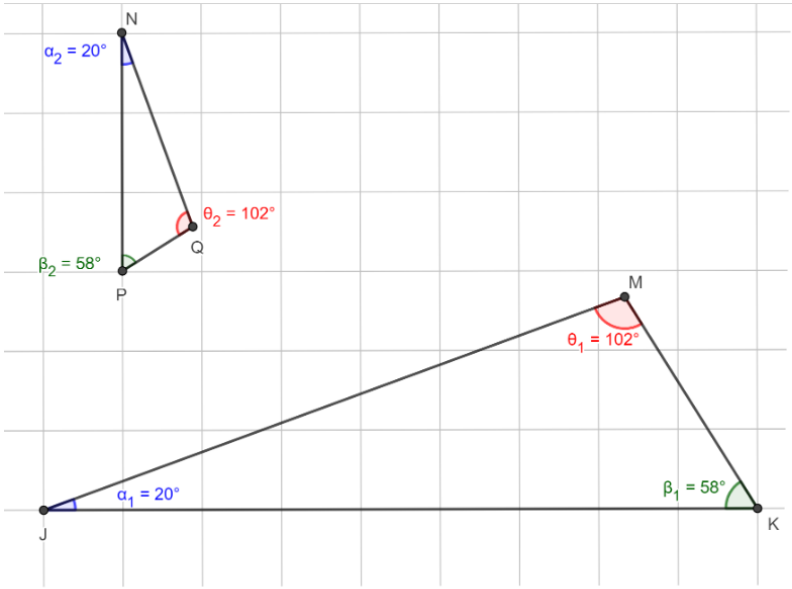
ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron, qué pudieron encontrar de nuevo y para qué es útil lo encontrado en el contexto de la geometría.

Aa π concluimos que al tener los el valor de ángulos igual en los 2 triángulos son congruentes y que el valor de los lados del triangulo no importa ya que podemos cambiarlo y nos dará el mismo resultado cuando dividimos un lado del triangulo ABC con un lado del triangulo DEF

ACTIVIDAD DE RECAPITULACIÓN

De acuerdo con lo encontrado en la ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO y la ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN, completen la información solicitada en el siguiente aplicativo.



La herramienta Crear Triángulo permite obtener parejas de triángulos en los cuales se cumple que

LOS ANGULOS SON CONGRUENTES

En algunas de estas parejas observamos que

TIENEN EL MISMA MEDIDA DEL ANGU

Inferimos que siempre que en una pareja de triángulos se cumple que

AL DIVIDIR AB CON GH VAN DAR EL M

también se puede concluir que

LOS ANGULOS SON IGUALES

Así por ejemplo, en el ΔABC y ΔDEF se pudo concluir

$$\frac{JK}{NP} = \frac{JM}{NK} = \frac{MK}{PQ}$$

por que se tiene que

$\angle J \cong \angle N,\ \angle K \cong \angle P\ \ y\ \angle M \cong \angle Q$

N

Anexo G: Tarea 3 – Grupo 1

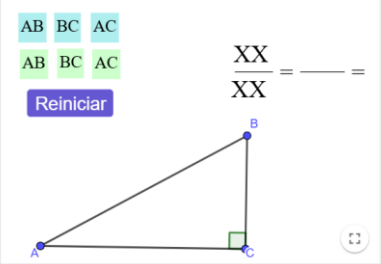
ACTIVIDAD DE REPASO

En el siguiente aplicativo se tiene representado el $\triangle ABC$. Realicen las siguiente acciones.

i) Hagan clic sobre las etiquetas de los segmentos que están de color azul celeste y verde manzana. Observen lo que ocurre con la razón presentada al lado derecho.

ii) Utilicen las etiquetas para determinar las 6 razones que se pueden establecer entre las longitudes de los diferentes lados del triángulo rectángulo.

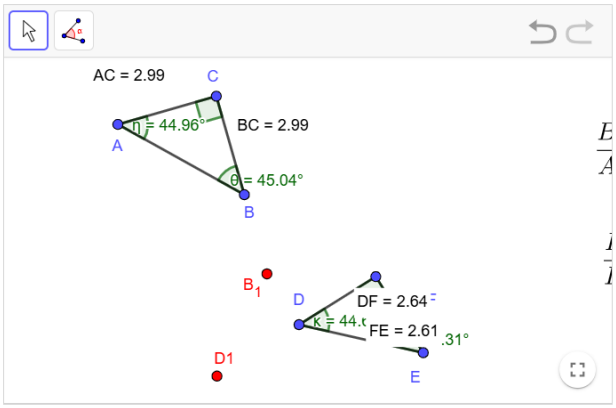
CASO DE REPASO



ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ rectángulos. ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que $\frac{BC}{AC}$ y $\frac{EF}{DF}$ EF/DF son iguales a 1?

EXPLORACIÓN DE CASOS



Escriban la(s) característica(s) que logran identificar para los triángulos que cumplen la condición solicitada.

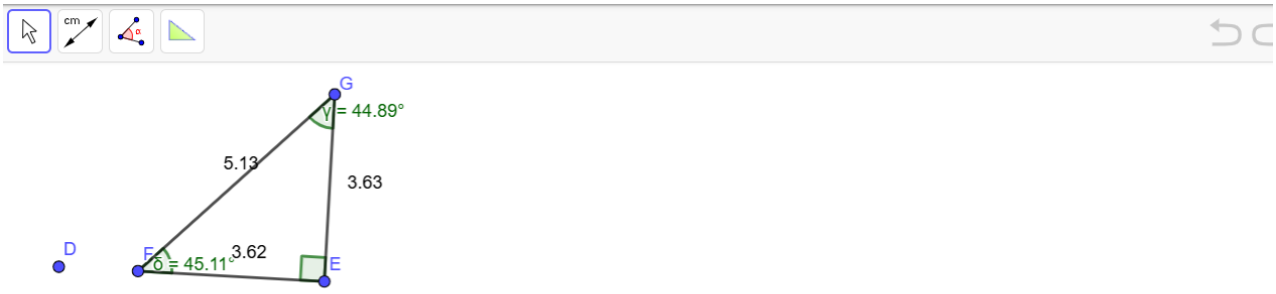
Aa π

En este caso como en todos los casos los ángulos agudos de dichos triángulos la suma de estos es igual a 90°, por esto su ángulo recto también mide 90°, la medida de los lados BC/AC es congruente y la medida de los lados EF/DF no es congruente, a pesar de esto el resultado es el mismo, la relación entre los ángulos agudos es que aproximadamente miden 45° cuando el resultado de la condición es uno.

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

Construyan un triángulo rectángulo, luego arrastren los vértices para que se cumpla que la razón entre sus catetos sea 1. Luego completen las información solicitada en el aplicativo.

Nota: para utilizar la herramienta Construir Triángulo Rectángulo, deben seleccionar la herramienta CREAR TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS y luego seleccionar dos puntos cualesquiera de la vista gráfica.



En la actividad de DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de [que sus catetos miden aproximadamente lo] . Luego de usar el arrastre, descubrimos que los triángulos también cumplen que [sus ángulos agudos son apróximada] . Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene [tiene catetos congruentes] entonces cumple que [sus ángulos son aproximadamente 4] Por ejemplo, en el triángulo construido se tiene que sus [ángulos miden aproximadam] porque [sus catetos son aproximadamente c]

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

Aa π Debido a que los ángulos de dichos triángulos rectángulos miden aproximadamente lo mismo (45°) se puede concluir que sus lados al aproximarlos son iguales.....

Activar
Ve a Confi

Anexo H: Tarea 3 – Grupo 2

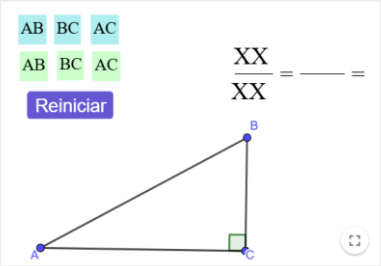
ACTIVIDAD DE REPASO

En el siguiente aplicativo se tiene representado el $\triangle ABC$. Realicen las siguiente acciones.

i) Hagan clic sobre las etiquetas de los segmentos que están de color azul celeste y verde manzana. Observen lo que ocurre con la razón presentada al lado derecho.

ii) Utilicen las etiquetas para determinar las 6 razones que se pueden establecer entre las longitudes de los diferentes lados del triángulo rectángulo.

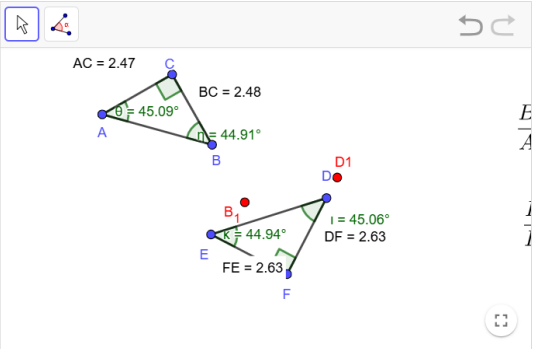
CASO DE REPASO



ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ rectángulos. ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que $\frac{BC}{AC}$ y $\frac{EF}{DF}$ EF/DF son iguales a 1?

EXPLORACIÓN DE CASOS



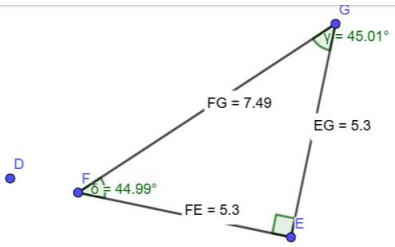
Escriban la(s) característica(s) que logran identificar para los triángulos que cumplen la condición solicitada.

Aa π que mientras los ángulos se acerquen mas a 45, las razones van a ser mas exactas a 1, y cuando miden 45 exactos la división también exacta

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

Construyan un triángulo rectángulo, luego arrastren los vértices para que se cumpla que la razón entre sus catetos sea 1. Luego completen las información solicitada en el aplicativo.

Nota: para utilizar la herramienta Construir Triángulo Rectángulo, deben seleccionar la herramienta CREAR TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS y luego seleccionar dos puntos cualesquiera de la vista gráfica.



En la actividad de DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de [que dos lados son iguales]. Luego de usar el arrastre, descubrimos que los triángulos también cumplen que [si 2 angulos miden 45 la razon va a] . Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene [dos lados iguales] entonces cumple que [si los angulos son iguales a 45 los la] Por ejemplo, en el triángulo construido se tiene que sus [angulos miden 45] porque [sus lados son iguales]

Q

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

Aa π pudimos descubrir que cuando un triangulo rectángulo tiene 2 lados iguales el resultado de la razón va a dar 1 y sus ángulos aagudos miden 45, de igual manera si la razón de un triangulo da 1, dos de sus lados son iguales y sus ángulos miden 45

Activar
Ve a Confi

Anexo I: Tarea 3 – Grupo 3

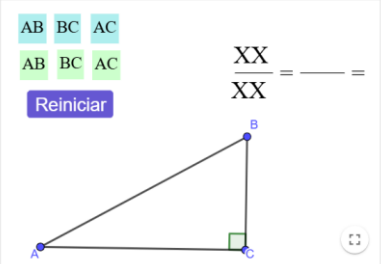
ACTIVIDAD DE REPASO

En el siguiente aplicativo se tiene representado el $\triangle ABC$. Realicen las siguiente acciones.

i) Hagan clic sobre las etiquetas de los segmentos que están de color azul celeste y verde manzana. Observen lo que ocurre con la razón presentada al lado derecho.

ii) Utilicen las etiquetas para determinar las 6 razones que se pueden establecer entre las longitudes de los diferentes lados del triángulo rectángulo.

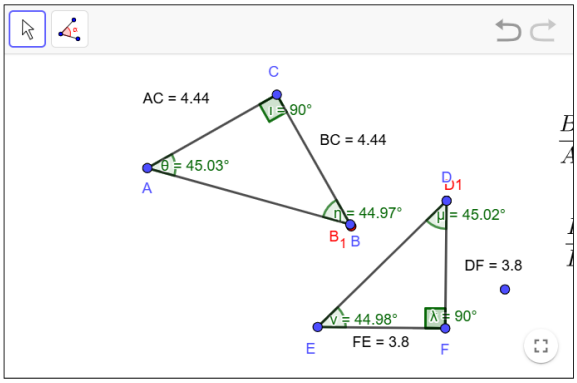
CASO DE REPASO



ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ rectángulos. ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos agudos de los triángulos y la condición de que $\frac{BC}{AC}$ y $\frac{EF}{DF}$ EF/DF son iguales a 1?

EXPLORACIÓN DE CASOS



Escriban la(s) característica(s) que logran identificar para los triángulos que cumplen la condición solicitada.

Escriban la(s) característica(s) que logran identificar para los triángulos que cumplen la condición solicitada.

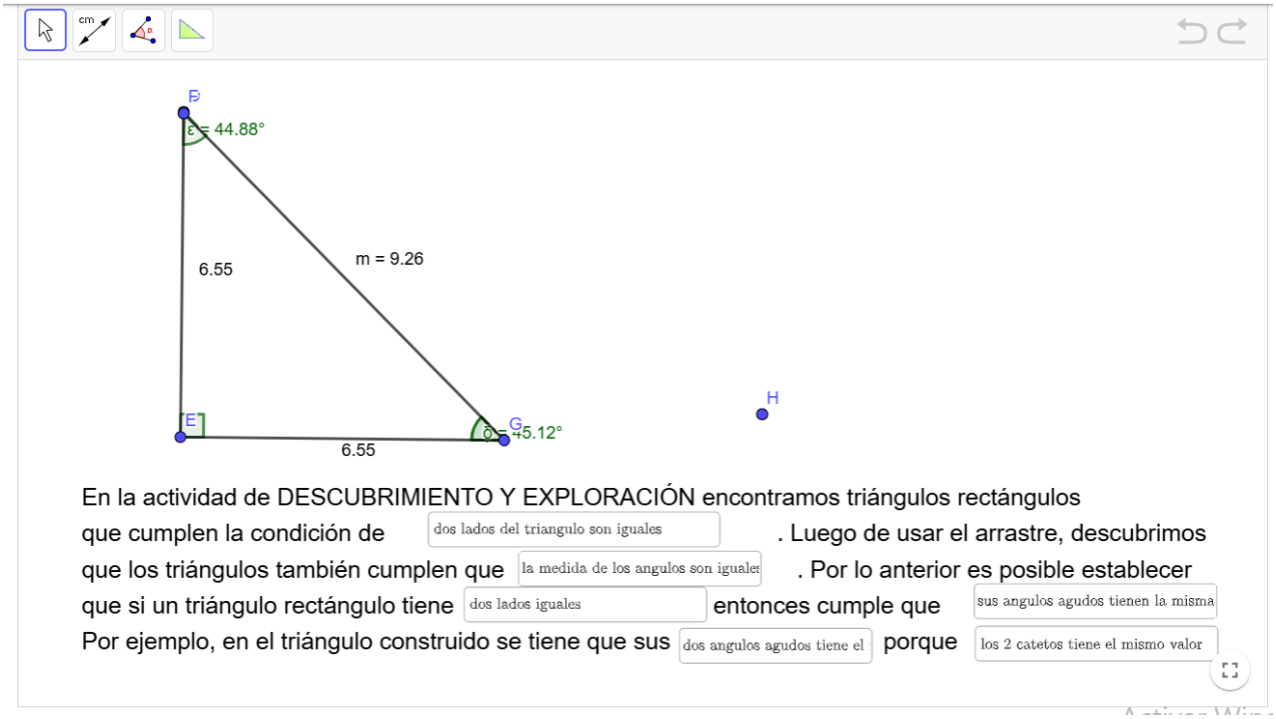
Aa π 2 puntos que conforman el triangulo tiene en común un angulo recto por ende los otros dos son agudos y esos ángulos son congruentes ya que tiene la misma medida (45)

R

ACTIVIDAD NO EXPLORADA

Construyan un triángulo rectángulo, luego arrastren los vértices para que se cumpla que la razón entre sus catetos sea 1. Luego completen las información solicitada en el aplicativo.

Nota: para utilizar la herramienta Construir Triángulo Rectángulo, deben seleccionar la herramienta CREAR TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS y luego seleccionar dos puntos cualesquiera de la vista gráfica.



En la actividad de DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN encontramos triángulos rectángulos que cumplen la condición de dos lados del triangulo son iguales . Luego de usar el arrastre, descubrimos que los triángulos también cumplen que la medida de los angulos son iguales . Por lo anterior es posible establecer que si un triángulo rectángulo tiene dos lados iguales entonces cumple que sus angulos agudos tienen la misma Por ejemplo, en el triángulo construido se tiene que sus dos angulos agudos tiene el porque los 2 catetos tiene el mismo valor

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

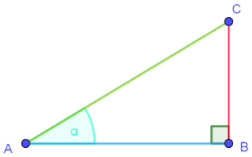
descubrimos que al tener los dos catetos con el mismo valor los 2 ángulos agudos tendrá la misma medida (45) y al sumarlo con el angulo recto nos da 180

Anexo J: Tarea 4 – Grupo 1

MATERIAL DE REPASO

En la siguiente imagen se muestra la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo.

Razones trigonométricas directas para el ángulo α



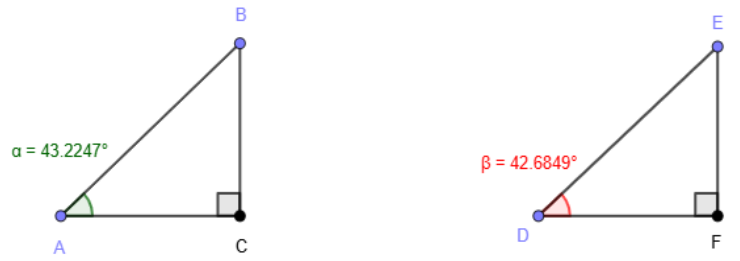
$$Sen(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

$$Cos(\alpha) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$Tan(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$$

ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran representados el $\triangle ACB$ y el $\triangle DFE$. Arrastren los puntos A, B, D y E para construir triángulos en los cuales se cumpla que sen (α) = cos (β).



sen(43.2247°) = 0.6849

cos (42.6849°) = 0.7351

¿Qué condición cumplen los ángulos α y β cuando sen (α) = cos (β)?

Aa π

La suma de los ángulos (α) y (β) es = a 90°

Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione sen (α) =cos (β) con la condición encontrada anteriormente.

Aa π

Concluimos que si el sen(α) de un ángulo de un triángulo rectángulo es = cos(β) de otro angulo de un triángulo rectángulo entonces, la suma de los ángulos (α) y (β) es aproximadamente 90°

Consideran que la condición se cumplen en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene que sen (α) = cos (β). ¿Cómo están seguros de su respuesta?

Aa π

Al hacer la prueba con ángulos de distintas medidas demuestra que la suma de sus ángulos es aproximadamente 90° por esto estamos seguros de que esta condición se cumple en todos los casos

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

La profesora dibuja en el tablero de clase un triángulo rectángulo ACB con ángulo recto en C, hipotenusa AB = 5.83, m∠BAC = 30.96° y m∠ABC = 59.04° (ver figura 1) y solicita a los estudiantes calcular la longitud del lado BC. Ana y Juan están calculando la longitud del lado BC del triángulo y al contrastar sus cálculos Juan dice que BC = sen (30.96°) · 5.83, mientras Ana dice que la forma de calcular el lado BC es BC = cos (59.04°)·5.83. Con base en lo anterior realice las siguientes acciones

Respondan la pregunta habilitada que están después de la imagen.

¿Sin hacer uso de la calculadora, cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente BC y por qué están seguros de su respuesta?

Aa π

Los dos han calculado correctamente. porque Juan allá el sen (30,96) que es igual al $\frac{CO}{H}$, como juan no tiene el cateto opuesto la hipotenusa p

T

ARGUMENTO INDUCTIVO

Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea.

Aa π DATO: Nuestro conjunto referencial son los triángulos rectan, nuestro primer atributo es que sen de alfa y cos de B sean iguales, el segundo atributo es que la suma de sus ángulos sea 90°. Se pueden allár el sen y el cos en un mismo triangulo rectángulo.

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

Aa π Nosotros pudimos encontrar que un argumento inductivo tiene tres partes el cual es son:el dato,la generalidad y la asercion y con esto mismo pudimos analizar que en un triangulo rectangulo o en dos triangulos rectangulos se puede hallar el seno y el coseno y la suma de estos dos daria 90°

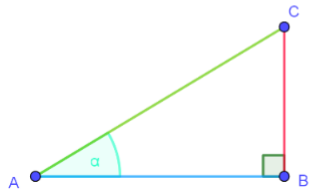
Activar
Ve a Con

Anexo K: Tarea 4 – Grupo 2

MATERIAL DE REPASO

En la siguiente imagen se muestra la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo.

Razones trigonométricas directas para el ángulo α



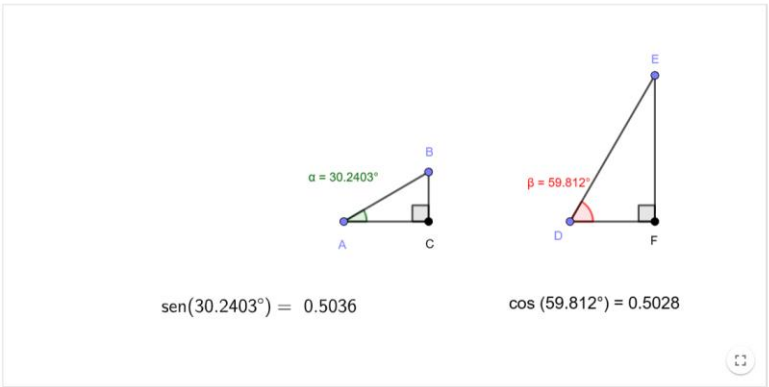
$$Sen(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

$$Cos(\alpha) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$Tan(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$$

ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran representados el $\triangle ACB$ y el $\triangle DFE$. Arrastren los puntos A, B, D y E para construir triángulos en los cuales se cumpla que sen (α) = cos (β).



¿Qué condición cumplen los ángulos α y β cuando sen (α) = cos (β)?

Aa π que al sumar los ángulos α y β el resultado es 90°

Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione sen (α) =cos (β) con la condición encontrada anteriormente.

Aa π si el resultado del sen(α) del triangulo rectángulo ABC es igual al resultado del cos(β) del triangulo rectángulo DEF entonces la suma de estos ángulos va a ser 90°

Consideran que la condición se cumplen en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene que sen (α) = cos (β). ¿Cómo están seguros de su respuesta?

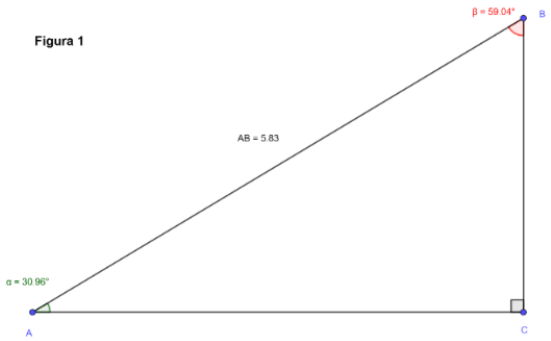
Aa π es probable, debido a que lo comprobamos en varios casos

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

La profesora dibuja en el tablero de clase un triángulo rectángulo ACB con ángulo recto en C, hipotenusa AB = 5.83, m∠BAC = 30.96° y m∠ABC = 59.04° (ver figura 1) y solicita a los estudiantes calcular la longitud del lado BC. Ana y Juan están calculando la longitud del lado BC del triángulo y al contrastar sus cálculos Juan dice que BC = sen (30.96°) · 5.83, mientras Ana dice que la forma de calcular el lado BC es BC = cos (59.04°)·5.83. Con base en lo anterior realice las siguientes acciones

Respondan la pregunta habilitada que están después de la imagen.

Figura 1



¿Sin hacer uso de la calculadora, cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente BC y por qué están seguros de su respuesta?

Aa π ambos lo calcularon de manera correcta ya que ambos usaron formulas correctas teniendo en cuenta que sen(α)=cos(β) (ya que la suma de los ángulos es igual a 90°) por lo cual sus resultados son iguales

ARGUMENTO INDUCTIVO

Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea.

Aa π al explorar dos triángulos en los cuales sen(α) = cos(β) descubrimos que el resultado de dos de sus ángulos es igual o aproximado a 90° por lo que descubrimos que si tenemos un triangulo rectángulo en el cual sen(α) = cos(β) entonces podemos inferir que la suma de dos de sus ángulos es igual o aproximada a 90°, por lo cual es probable que en otros casos en los que sen(α) = cos(β) la suma de dos sus ángulos sera igual a 90° también

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

Aa π encontramos que si tenemos un triangulo rectángulo en el cual sen(α) = cos(β) entonces podemos inferir que la suma de dos de sus ángulos es igual o aproximada a 90°

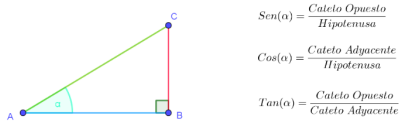
Activar
Ve a Confi

Anexo L: Tarea 4 – Grupo 3

MATERIAL DE REPASO

En la siguiente imagen se muestra la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo.

Razones trigonométricas directas para el ángulo α



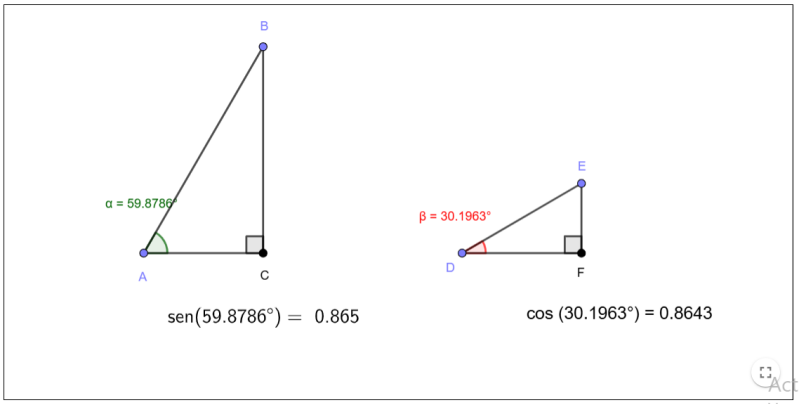
$$Sen(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

$$Cos(\alpha) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$Tan(\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$$

ACTIVIDAD DE DESCUBRIMIENTO Y EXPLORACIÓN

En el siguiente aplicativo encuentran representados el $\triangle ACB$ y el $\triangle DFE$. Arrastren los puntos A, B, D y E para construir triángulos en los cuales se cumpla que sen (α) = cos (β).



¿Qué condición cumplen los ángulos α y β cuando sen (α) = cos (β)?

Aa π al sumar los dos angulos nos da 90

Escriban un patrón de generalidad en el que se relacione sen (α) =cos (β) con la condición encontrada anteriormente.

Aa π si en un triangulo rectángulo el resultado de sen y cos es igual entonces la suma de los ángulos nos dará 90

Consideran que la condición se cumplen en cualquier par de triángulos rectángulos con ángulos agudos α y β respetivamente y en los cuales se tiene que sen (α) = cos (β). ¿Cómo están seguros de su respuesta?

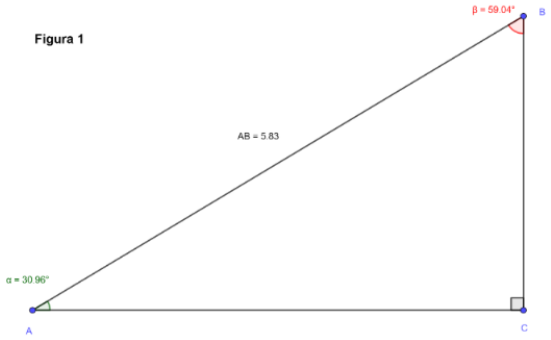
Aa π no estamos del todo seguros ya que en algunos caso nos puede dar mas halla de 90

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

La profesora dibuja en el tablero de clase un triángulo rectángulo ACB con ángulo recto en C, hipotenusa AB = 5.83, m∠BAC = 30.96° y m∠ABC = 59.04° (ver figura 1) y solicita a los estudiantes calcular la longitud del lado BC. Ana y Juan están calculando la longitud del lado BC del triángulo y al contrastar sus cálculos Juan dice que BC = sen (30.96°) · 5.83, mientras Ana dice que la forma de calcular el lado BC es BC = cos (59.04°)·5.83. Con base en lo anterior realice las siguientes acciones

Respondan la pregunta habilitada que están después de la imagen.

Figura 1



¿Sin hacer uso de la calculadora, cuál de los dos estudiantes ha calculado correctamente BC y por qué están seguros de su respuesta?

Aa π los dos están bien ya que las razones trigonométrica que utilizan para hallar el valor BC son correctas

ARGUMENTO INDUCTIVO

Escriban un argumento inductivo en donde se pueda evidenciar el dato, el patrón de generalidad y la aserción a partir de lo trabajado en esta tarea.

Aa π dato : triangulo rectángulo
atributo1: sen(a) = cos(B)
atributo2: ángulos
si en un triangulo rectángulo no cumple que tenga un ángulo recto entonces por esto la suma de los ángulos de sen(a) cos(B) no se podrían sumar para dar nuestra garantía que al sumarlos de 90

ACTIVIDAD DE SÍNTESIS

Escriban detalladamente un texto donde le cuenten a sus compañeros de clase, qué información analizaron qué pudieron encontrar de nuevo.

Aa π nosotros al explorar estas actividades encontramos que si en un triangulo rectángulo el resultado de sen y cos es igual entonces la suma de los ángulos nos dará 90

Activar
Ve a Con

X