

PROBLEMA BIDIMENSIONAL DEL SOFÁ: CURVA Y REGIÓN EN MOVIMIENTO

Camilo Escobar Venegas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D. C.

2025

PROBLEMA BIDIMENSIONAL DEL SOFÁ: CURVA Y REGIÓN EN MOVIMIENTO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título
de Licenciado en Matemáticas

Camilo Escobar Venegas

Director

Dr. José Leonardo Ángel Bautista

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D. C.

2025

Resumen

El problema del sofá consiste en determinar las figuras bidimensionales rígidas de máxima área posible que pueden desplazarse en una región plana cuya frontera tiene forma de L (de ahora en adelante la nombraremos región L). Este problema ha sido abordado por diferentes matemáticos como Jhon Hammersly (1968), Joseph Gerver (1992), Dan Romik (2016) y Jineon Baek (2024) quienes empleando diferentes técnicas de modelación y optimización han llegado a proponer varios resultados.

En particular Hammersly propuso una figura con una forma similar al auricular de un teléfono fijo. Por su parte Gerver tomó como base la figura de Hammersly y halló una similar pero con un área ligeramente mayor. Por otro lado, Dan Romik concentró sus esfuerzos en hallar una familia de seis ecuaciones diferenciales que modelaran el problema. Por último, Jineon Baek empleando la figura de Gerver y las ecuaciones de Romik publicó un documento en el que argumenta por medio de una demostración (a la fecha de escritura de este documento está en revisión) que la figura de Gerver es la óptima y por ende la que soluciona el problema del sofá.

En este trabajo tratamos este problema desde dos propuestas, en la primera modelamos el movimiento de algunas figuras (rectángulos) en el interior de la región L , y en la segunda establecemos un movimiento de la región L a partir de una curva, para posteriormente emplear su frontera en la descripción y construcción de la forma de la figura utilizando el concepto de envolvente. Es importante aclarar que no pretendemos solucionar el problema del sofá en su generalidad, pero buscamos abordar algunas heurísticas para hallar las posibles figuras de máxima área que pueden moverse en el interior de la región L partiendo de algunas condiciones particulares.

De la primera propuesta que nombramos “Curva en movimiento”, logramos hallar que hay dos rectángulos (de área una unidad cuadrada) que pueden desplazarse en el interior de la región L , estos se obtuvieron como resultado del análisis de dos situaciones, en una de ellas empleamos únicamente el movimiento de translación y en la otra combinamos movimientos

de rotación y traslación. A raíz de la exploración anterior enunciamos algunos resultados, entre ellos, una forma de hallar la cota superior de John Hammersly (1968) y asimismo la demostración del teorema $L_1 \cup L_2$, el cual afirma que toda figura que esté completamente contenida en una subregión de la región L , puede moverse por ésta.

En la segunda propuesta que nombramos “Región en movimiento”, logramos establecer que cuando la región L se mueve a partir de un segmento, con una rotación y traslación definidas, la figura de máxima área que se genera a partir de las envolventes que están determinadas por la familia de curvas frontera de la región L , es un semicírculo. De manera análoga cuando movemos la región L a partir de una semicircunferencia, con una rotación y traslación particulares, hallamos que la figura de máxima área es el sofá propuesto por Jhon Hammersly en 1968.

Tabla de contenido

Introducción	8
1. Objetivos y antecedentes	11
1.1. Objetivo general	11
1.2. Objetivos específicos	11
1.3. Descripción del problema	11
1.4. Antecedentes	16
2. Marco de referencia	18
2.1. Optimización	18
2.2. Conceptos auxiliares	21
2.3. Uso de la tecnología	27
3. Desarrollo de la propuesta	29
3.1. Curva en movimiento	30
3.1.1. Problema C1: Rectángulo de máxima área	30
3.1.2. Resultados de la exploración y análisis	53
3.2. Región en movimiento	59
3.2.1. Problema C2: Movimiento de la región L con respecto a un segmento	59
3.2.2. Problema C3: Movimiento de la región L con respecto a un arco de circunferencia	77
3.3. Reflexiones finales	86
3.4. Estructura del sitio web	89
4. Conclusiones	93
Anexos	98

Índice de figuras

1.	Región L_1 en el plano cartesiano	12
2.	Región L_2 en el plano cartesiano	12
3.	Región L en el plano cartesiano	13
4.	Rectángulo en el interior de la región L	13
5.	Traslación de un semicírculo en la región L	14
6.	Traslación y rotación de un semicírculo en el interior de la región L	15
7.	Ubicación del punto (r, θ) en el plano polar	22
8.	Recta en coordenadas polares dado un punto	23
9.	Recta en coordenadas polares dados dos puntos	24
10.	Traslación de un rectángulo en la región L	31
11.	Trayectoria del punto T en la región L	32
12.	Rectángulo $ABTC$ en la región L	32
13.	Gráficas de la expresión $A(k, l)$ con $k, l \in [0, 1)$ desde dos perspectivas distintas	34
14.	Rectángulo de máxima área en la región L	35
15.	Construcción de la recta l	36
16.	Construcción del segmento FG	37
17.	Construcción del rectángulo $HIGF$	38
18.	Rectángulo $HIGF$ con $k = 0,5$ y varios valores de α	40
19.	Rectángulo $H'I'GF$	41
20.	Rectángulo de máxima área	43
21.	Rectángulo de máxima área contenido en L_1	45
22.	Límites de la región L en coordenadas polares	46
23.	Movimiento del segmento s en la región L	46
24.	Punto T sobre la semirrecta p_2	47
25.	Punto R sobre p_2 o p_1	48

26.	Gráficas del lugar geométrico del punto de intersección entre la recta l y su ortogonal que pasa por el origen	51
27.	Longitud de AO y OD	54
28.	Punto O ubicado en la coordenada (x_m, y_m)	56
29.	Traslación la figura cuando $t = 1$	57
30.	Construcción del segmento s cuya medida es k	60
31.	Región L y el segmento s en un plano cartesiano	61
32.	Imagen de la región L cuando $t = 1$	61
33.	Imagen de la región L cuando $t = 0,6$	63
34.	Envolvente generada por la familia de imágenes de la semirrecta p_2	66
35.	Envolventes generadas por las imágenes de los límites de la región L cuando la longitud del segmento s es $0,6$	67
36.	Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es 1	69
37.	Áreas de la figura SF y sus relaciones con las curvas	71
38.	Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es $1,5$	72
39.	Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es $1,8$	73
40.	Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es $0,4$	74
41.	Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es $0,01$	76
42.	Semicircunferencia C en el origen de un plano cartesiano	77
43.	Transformación de la región L con respecto a C con $t = 0$	78
44.	Transformación de la región L con respecto a C con $t = 1$	79
45.	Transformación de la región L con respecto a C con $t = 0,3$	79
46.	Curva generada por la familia de envolventes de la semirrecta p_2	82
47.	Figura SF generada cuando $r = 0,5$	83
48.	Áreas de la figura SF generada cuando $r = 0,5$	84
49.	Figura SF de máxima área que soluciona el problema C3, con $r = 2/\pi$	86
50.	Primera variante de la región, empleando semicircunferencias	88

51.	Segunda variante de la región, empleando parábolas	88
52.	Tercera variante de la región, empleando la función trigonométrica seno	89
53.	Una parte de la sección “Problema del sofá” de la página web	90
54.	Una parte de la sección “Curva en movimiento” de la página web	91
55.	Una parte de la sección “Región en movimiento” de la página web	92
A1.	Sofá propuesto por Jhon Hammersly en 1968.	98
B1.	Circunferencia C tangente a la semirrecta p_1 y la recta $y = 0$	100
B2.	Abscisas de los puntos de intersección entre la circunferencia C y la recta l	102
B3.	Semicírculo de máxima área que puede moverse por el interior de la región L	103
H1.	Intersección de la circunferencia E con la semirrecta p_1	115
L1.	Triángulo rectángulo construido a partir del argumento del arc cos $\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right)$	124

Introducción

El problema del sofá fue propuesto por el matemático austriaco-canadiense Leo Moser en 1966 (Wagner, 1976, p. 188), y consiste en determinar la figura bidimensional rígida de máxima área posible que puede moverse en el interior de una región plana (la que nombramos como región L) cuya frontera tiene forma de L y ancho constante (sin pérdida de generalidad, igual a una unidad). Como su nombre lo indica, este problema tuvo su motivación en la idea de transportar un sofá a través de un pasillo en forma de L , y se materializa al modelar tal situación en dos o tres dimensiones, para posteriormente solucionar el problema de optimización relacionado.

Uno de los primeros en abordar el problema fue John Hammersly, que en 1968 encontró una solución al estudiar un sofá con una forma similar al auricular de un teléfono fijo (es la parte que se sostiene para hablar y escuchar durante una llamada), que tiene un área aproximada de 2,2074 unidades cuadradas (ver el sofá en el [Anexo A](#)). Tiempo después y empleando la figura de Hammersly, Joseph Gerver en 1992 encontró otra compuesta por 18 secciones curvas y que tiene un área ligeramente mayor, que es de aproximadamente 2,2195 unidades cuadradas (Kallus & Romik, 2018, p. 3). El último avance relevante (que a la fecha de la escritura de este documento está en revisión) se dio a finales del año 2024, en donde el matemático surcoreano Jineon Baek (Baek, 2024) publicó un documento en el que propone una demostración en la que afirma que el sofá propuesto por Gerver (1992) es la figura de máxima área que puede moverse en el interior de la región L y por lo tanto la que soluciona el problema del sofá.

A través de este trabajo pretendemos desarrollar un proceso de exploración y análisis, intentando determinar algunas heurísticas que pueden ser empleadas para solucionar (así sea de forma parcial) el problema bajo unas condiciones iniciales. El interés de llevar a cabo este estudio está en reconocer qué herramientas matemáticas son empleadas y en cómo estructurarlas para argumentar y justificar algunos resultados. Además, de tener un primer acercamiento a las dinámicas y características de una investigación de este tipo.

En este documento estudiamos dos propuestas para construir y determinar las figuras bidimensionales de mayor área que puede moverse en el interior de la región L , considerando unas condiciones particulares. La diferencia principal entre las dos propuestas consiste en cuál objeto se va a mover, en la primera movemos una figura dentro de la región L , y en la segunda movemos la región L para determinar con el concepto de envolvente la figura que se genera. A la primera propuesta la nombraremos como “Curva en movimiento” y a la otra como “Región en movimiento”.

En la propuesta “Curva en movimiento”, asegurando la integridad de la figura y las condiciones del problema, estudiamos en primera instancia cómo se lograría un movimiento de una figura en el interior de la región L , esto a partir del movimiento específico de ciertos puntos. Posteriormente aplicamos métodos de optimización para hallar los valores óptimos, que nos permiten hallar la figura de máxima área dentro de la familia de figuras abordada.

En la propuesta “Región en movimiento”, asegurando la integridad de la figura y las condiciones del problema, partimos de mover la región L por medio de una transformación que combina rotaciones y traslaciones, posteriormente hallamos la figura generada por las curvas envolventes que están determinadas por la familia de curvas que limitan la región L . Finalmente aplicamos métodos de optimización para hallar los valores óptimos, que nos permiten hallar la figura de máxima área.

Este documento está organizado en cuatro capítulos. En el primero enunciamos los objetivos de este estudio junto con una descripción detallada del problema, definimos la región L y con el objetivo de lograr una mayor comprensión del problema, brindamos un ejemplo con un análisis intuitivo en el que trasladamos y rotamos un semicírculo en el interior de la región L . Posteriormente reportamos algunos de los resultados y enfoques empleados por otros autores en el estudio del problema o derivados.

En el segundo capítulo, describimos los elementos conceptuales y teóricos que utilizamos en el trabajo, y que sustentan los resultados obtenidos. En el tercer capítulo desarrollamos las dos propuestas por medio del análisis de tres problemas, en la propuesta “Curva en movi-

miento” abordamos el problema C1 que formulamos en la pregunta, ¿cuál es el rectángulo de mayor área posible que puede moverse a través de la región L ? Y con respecto a la propuesta “Región en movimiento” abordamos los problemas C2 y C3 que planteamos respectivamente, en los enunciados; Dado un segmento s . ¿Cuál debe ser la longitud de s para que el área de la figura determinada por las envolventes sea máxima de tal forma que puede moverse a través de la región L ? Dada una semicircunferencia C de radio cualquiera r . ¿Qué valor debe tomar r para que el área de la figura determinada por las envolventes sea máxima de tal forma que puede moverse a través de la región L ?

En el cuarto y último capítulo enunciamos los resultados obtenidos, que en síntesis son; La construcción de dos rectángulos de área una unidad cuadrada que logran moverse a través de la región L (propuesta de solución al problema C1). La demostración del teorema $L_1 \cap L_2$ con el que afirmamos que cualquier figura que esté totalmente contenida en una subregión de la región L puede moverse por ésta. Una forma de hallar la cota superior propuesta por Jhon Hammersly (1968) por medio de un problema de optimización. La prueba de que cuando la región L se mueve a partir de un segmento con una rotación y traslación específica, la figura de área máxima es un semicírculo (propuesta de solución al problema C2). La prueba de que cuando la región L se mueve a partir de una semicircunferencia con una rotación y traslación específica, la figura de área máxima es el sofá propuesto por Jhon Hammersly (1968) (propuesta de solución al problema C3). Y finalmente presentamos las conclusiones generales del desarrollo del trabajo.

Por último queremos agradecer al profesor Orlando Aya Corredor, principalmente, por su atenta lectura y las observaciones que realizó, las cuales nos permitieron complementar algunos de los resultados y mejorar la estructura y organización del documento.

1. Objetivos y antecedentes

1.1. Objetivo general

Reproducir, explorar y analizar modelos bidimensionales del problema del sofá tratando de establecer soluciones dentro de algunas familias de figuras planas.

1.2. Objetivos específicos

- Construir y estudiar un modelo bidimensional del problema del sofá para analizar su solución dentro de la familia de rectángulos, reconstruyendo el sistema teórico matemático necesario para tal fin.
- Construir y estudiar un modelo bidimensional del problema del sofá para analizar su solución por medio del enfoque “Región en movimiento”.
- Consultar algunos de los enfoques utilizados en el tratamiento de diferentes autores al problema del sofá en dos dimensiones y relacionarlos con las técnicas utilizadas en los modelos abordados en el trabajo.

1.3. Descripción del problema

El problema del sofá podemos modelarlo matemáticamente en dos o tres dimensiones. Previo a definir el problema en dos dimensiones (el que tratamos en este documento) debemos describir matemáticamente los elementos que están involucrados. En particular la región L la definimos de la siguiente manera:

Supongamos las rectas

$$p_1 : x = 1 : y \leq 1$$

$$p_2 : y = 1 : x \leq 1$$

$$p_3 : y = 0 : x \leq 0$$

$$p_4 : x = 0 : y \leq 0$$

y consideremos las siguientes regiones L_1 (Figura 1) y L_2 (Figura 2) definidas como

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \leq 1\}.$$

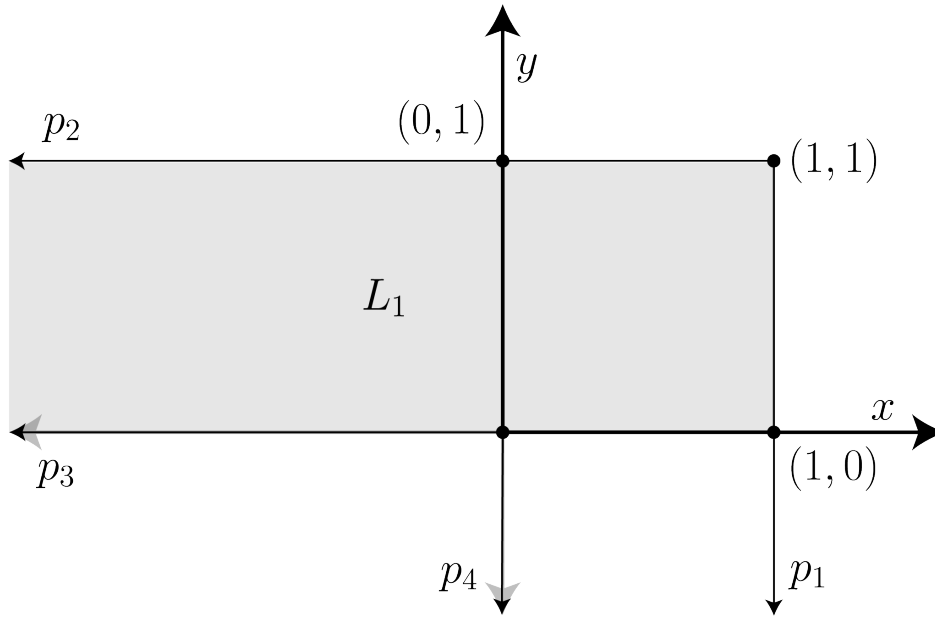


Figura 1

Región L_1 en el plano cartesiano

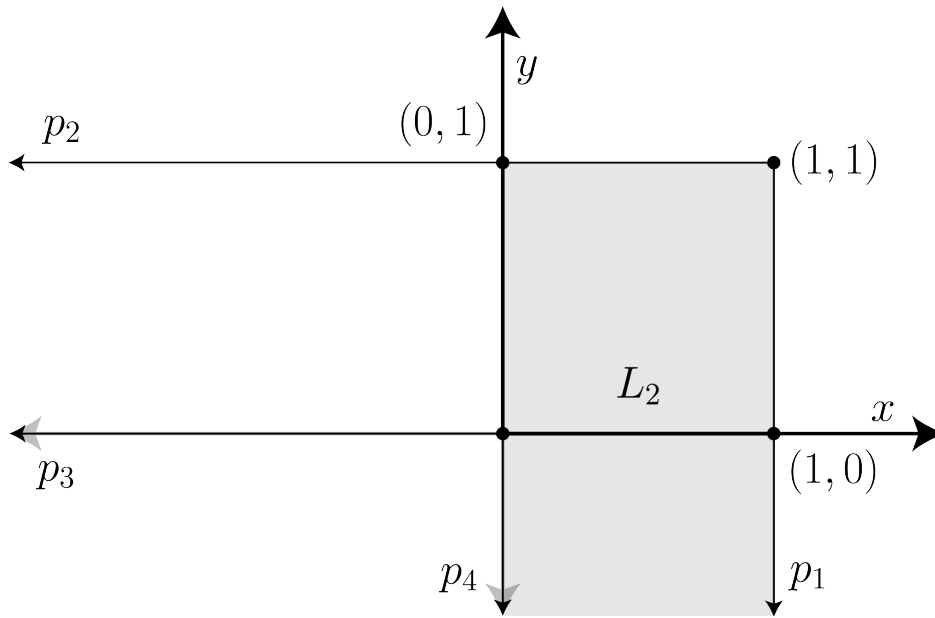


Figura 2

Región L_2 en el plano cartesiano

Así, definimos la región L (Figura 3) como

$$L = L_1 \cup L_2$$

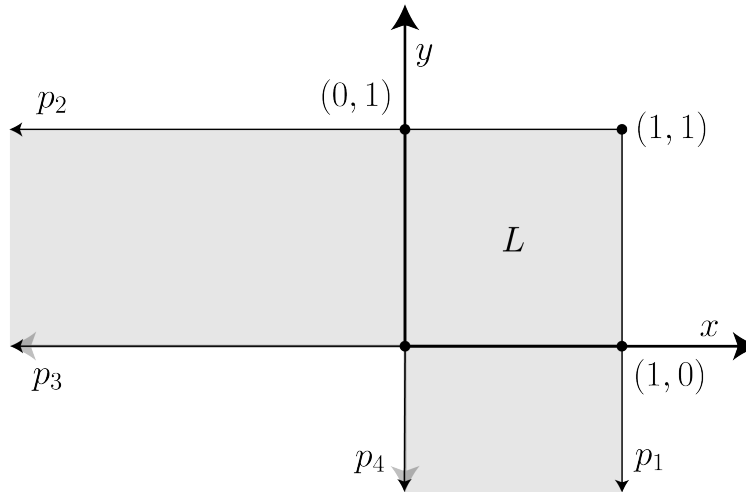


Figura 3

Región L en el plano cartesiano

A partir de esta definición, podemos reformular el problema del sofá.

Problema del sofá reformulado

¿Cuál es la figura bidimensional de mayor área posible que puede moverse en el interior de la región L ? Entendiendo moverse como pasar de L_1 a L_2 .

En la Figura 4, observamos la modelación en dos dimensiones de un rectángulo que posiblemente puede moverse en el interior de la región L .

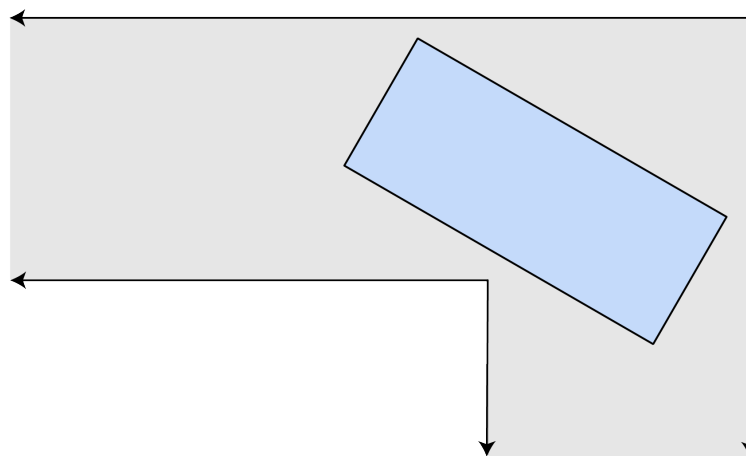


Figura 4

Rectángulo en el interior de la región L

Supongamos que el rectángulo (el que se muestra en la Figura 4) puede moverse parcialmente sobre L_1 y sobre L_2 , pero no pasar de L_1 a L_2 , entonces, según el replanteamiento

que acabamos de hacer del problema, la figura no puede moverse en la región L . Esta idea la dejaremos en claro por medio de una definición al principio del capítulo 3.

Ahora estudiemos la siguiente situación con el objetivo de tener un primer acercamiento de lo que se busca con el problema del sofá. En este ejemplo nos limitaremos en lo posible a hacer un análisis intuitivo y que estará apoyado en la representación gráfica. Supongamos que queremos construir una figura que cumpla con las siguientes características; que tenga forma de semicírculo, que ocupe la mayor área posible y que pueda moverse en la región L (de L_1 a L_2).

En un primer instante podemos pensar en únicamente trasladar la figura, sin embargo, no es evidente la posición del semicírculo de máxima área que puede moverse en la región L , pero después de un análisis más profundo llegamos a que el radio del semicírculo de máxima área es $2 - \sqrt{2} \approx 0,58$ unidades (el razonamiento para hallar este resultado se presenta en el [Anexo B](#)). En la Figura 5 se muestra una de las posibles posiciones del semicírculo.

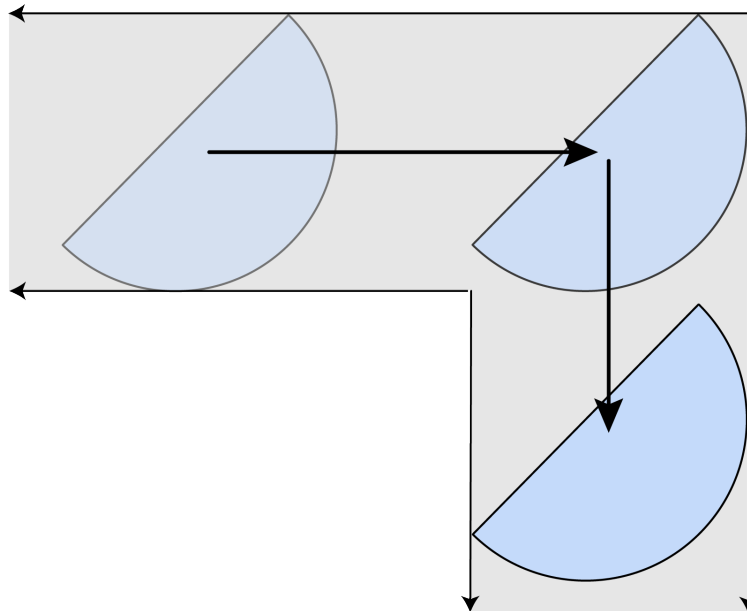


Figura 5

Traslación de un semicírculo en la región L

Pensemos en qué puede ocurrir si además de trasladar la figura, la rotamos de una

forma particular. En la Figura 6¹ podemos observar un posible movimiento, en el que el radio del semicírculo de máxima área está limitado por el ancho de la región.

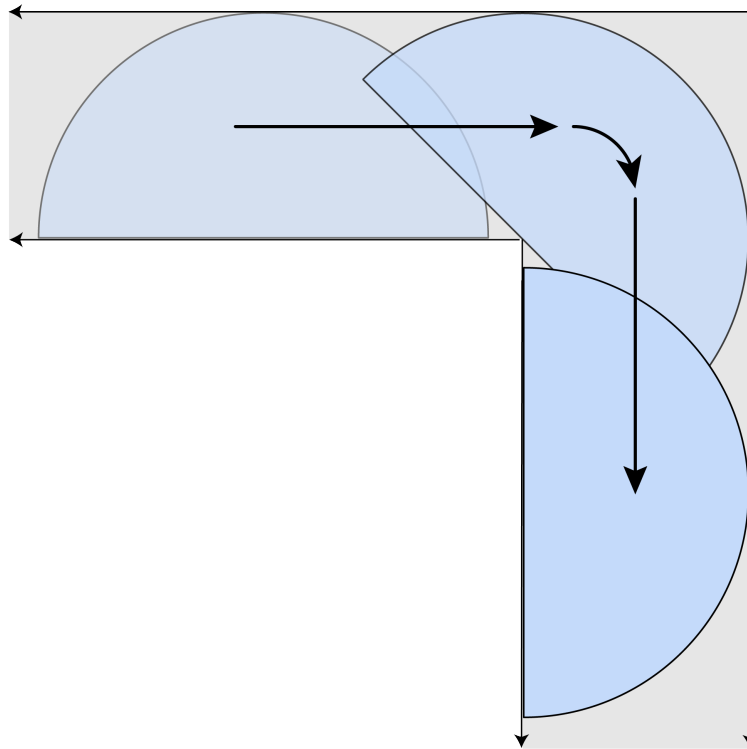


Figura 6

Traslación y rotación de un semicírculo en el interior de la región L

Con lo anterior determinamos que, en el primer caso al trasladar la figura, el radio del semicírculo de máxima área posible es $2 - \sqrt{2} \approx 0,58$ unidades, con esto determinamos que la figura tiene un área de $\pi(\sqrt{2} - 1)^2/2 \approx 0,539$ unidades cuadradas. Y en el segundo, en el que combinamos movimientos de traslación y rotación, el radio del semicírculo es el ancho de la región L , con lo que se concluye que el área de la figura es $\pi/2 \approx 1,57$ unidades cuadradas. Un aumento de área considerable, si comparamos las dos figuras.

Este breve análisis nos invita a observar que la búsqueda de una solución para el problema bidimensional del sofá no está únicamente determinada por el tipo de figura a mover, sino también por la posición y los movimientos rígidos que se apliquen a la figura en el interior de la región L . Así, podemos pensar en preguntas como ¿Cuál es la figura que

¹ Figura de máxima área que resulta del análisis del problema C2

resuelve el problema dentro de una familia de figuras (v.g. triángulos, rectángulo o círculos)? y ¿qué movimientos rígidos de la figura permiten tal solución?

1.4. Antecedentes

Con la contextualización anterior, ahora vamos a mencionar los resultados que se obtuvieron en los últimos años en torno al estudio del problema del sofá. El primero que propuso una figura fue John Hammersly en 1968, que encontró una solución al estudiar una figura con una forma similar al auricular de un teléfono fijo (ver el sofá en el [Anexo A](#)), ésta tiene un área de $\pi/2 + 2/\pi \approx 2,2074$ unidades cuadradas (la validación de este resultado se presenta en la propuesta de solución del problema C3). Tiempo después Joseph Gerver en 1992, utilizó como base la figura de John Hammersly para proponer otra compuesta por 18 secciones curvas que tiene un área mayor, de aproximadamente 2,2195 unidades cuadradas (Kallus & Romik, 2018, p. 3).

Después del sofá propuesto por Gerver no se halló otro con un área mayor, entonces la estrategia para solucionar el problema cambió, y se orientó a acotar por medio de un intervalo el área. John Hammersly con su figura dispuso una cota inferior de $\pi/2 + 2/\pi \approx 2,2074$, además, determinó una cota superior² de $2\sqrt{2} \approx 2,8284$.

En el año 2018 Yoav Kallus y Dan Romik determinaron una cota superior que redujo aún más el intervalo, la cual equivale a 2,37 (Kallus & Romik, 2018, p. 22). Con lo que el intervalo se redujo de $[2,2074, 2,8284]$ a $[2,2074, 2,37]$.

En los años posteriores se obtuvieron otros avances relacionados al problema y derivados. Philip Gibbs realizó un estudio numérico con el uso de tecnología, este consistía en hallar el área de un polígono generado por medio de una rotación específica de la región L (Gibbs, 2014, p. 2), las conclusiones de este estudio estuvieron en sintonía con los hallados por Gerver (1992).

En el año 2022 Michal Batsch publicó el artículo “A Numerical Approach for Analysing the Moving Sofa Problem” (Batsch, 2022), en el que propuso un método para generar

² Cota superior que se halla en el Capítulo 3 por medio de un problema de optimización

sofás, a partir de una ecuación que establece las condiciones necesarias para la existencia de envolventes, además, mostró que el área de éstos tenían un desfase pequeño con respecto al área del sofá óptimo. Al final el autor concluye que el método nos indica que posiblemente el sofá propuesto por Gerver (1992) sea la figura óptima que soluciona el problema del sofá.

En 2016 Nicole Song publica el artículo “A Variational Approach to the Moving Sofa Problem” (Song, 2016) en el que se enfrenta al problema por medio del cálculo de variaciones para probar que el sofá de Gerver es la figura óptima.

En el año 2016 Dan Romik, empleando las técnicas que Gerver utilizó en la construcción de su sofá; propuso una familia de seis ecuaciones diferenciales, con éstas modeló el problema del sofá y estableció una solución a una variante nombrada sofá móvil ambidiestro (Romik, 2018, p. 1).

El último avance (que a la fecha de la escritura de este documento está en revisión) se dio en el año 2024. El matemático Jineon Baek publicó el artículo nombrado “Optimality of Gerver’s Sofa” (Baek, 2024), en este documento propone una demostración en la que afirma que el sofá propuesto por Gerver (1992) es la figura óptima que soluciona el problema del sofá. En la demostración empleó la familia de ecuaciones diferenciales hallada por Romik (2016), algunos teoremas de la geometría diferencial y otras estrategias (que están fuera del alcance de este texto y de los conocimientos que se han construido hasta el momento) empleadas por Gerver en la construcción de su sofá.

2. Marco de referencia

En este apartado describimos los elementos conceptuales y teóricos que utilizamos en el desarrollo del trabajo de grado, así como las herramientas tecnológicas que se emplearon y que tuvieron diferentes fines, entre ellos, la exploración, redacción y difusión del trabajo. Los organizamos en tres grandes categorías las cuales son: optimización, conceptos auxiliares y uso de la tecnología.

En la categoría de optimización enunciamos algunas definiciones y teoremas que son necesarios para hallar los puntos críticos de una función real en una o varias variables, así como algunos métodos y criterios para establecer si tales puntos críticos se corresponden con máximos o mínimos en un conjunto cerrado y acotado.

En la categoría de conceptos auxiliares enunciamos algunos conceptos relacionados con la representación algebraica de algunas funciones en coordenadas polares (recta y circunferencia), de igual forma la definición y método que nos permite hallar la curva envolvente generada por una familia de curvas y por último enunciamos el cálculo del área de una región delimitada por una curva que está definida paramétricamente.

Por último, en la categoría de uso de la tecnología, describimos que herramientas se emplearon en el desarrollo del trabajo de grado en torno a la representación, exploración y redacción, de igual forma se describen las estrategias que se emplearon para difundir y visibilizar el trabajo de grado.

2.1. Optimización

Aunque la optimización de funciones de variable real³ se constituye hoy en día en una gran teoría en la que se estudian diferentes nociones, procesos y criterios de necesidad y suficiencia, en este trabajo, debido a la naturaleza del problema, únicamente nos enfocaremos en abordar algunos resultados básicos que atañen a la optimización de estas funciones definidas sobre conjuntos cerrados y acotados. Para esto partimos de la siguiente definición:

³ A veces también son llamadas funciones escalares

Definición 1. Punto crítico⁴

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar dada, un punto $x_0 \in U$ se llama *mínimo local* de f si existe una vecindad V de x_0 tal que para todos los puntos x en V , $f(x) \geq f(x_0)$.

De manera análoga, $x_0 \in U$ es un *máximo local* si existe una vecindad V de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in V$. El punto x_0 es un *punto crítico* de f si $Df(x_0) = 0$.

Un punto crítico que no es un extremo local se llama *punto silla* (Marsden et al., 1991, p. 248)

La Definición 1 establece que es un punto crítico⁵ y explicita que es un máximo, un mínimo y un punto de inflexión⁶, sin embargo, ¿toda función real tiene máximos o mínimos? Particularmente, el siguiente teorema nos permite afirmar que si una función es continua (funciones con las que se trabajará en este documento) en un conjunto cerrado y acotado ésta tendrá por lo menos un máximo y mínimo en tal conjunto.

Teorema 1. Máximo y mínimo de una función continua en un conjunto cerrado y acotado

Sea D cerrado y acotado en \mathbb{R}^n y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo en algunos puntos x_0 y x_1 de D (Marsden et al., 1991, p. 260).

Claramente este teorema garantiza la existencia de tales valores óptimos, pero no nos indica cómo encontrarlos. Existen algunos algoritmos que nos permiten hallarlos, en particular está el siguiente, que es una generalización del método presentado por Spivak (Spivak, 1992, p. 260).

Definición 2. Método para hallar el máximo y mínimo de una función continua en un conjunto cerrado y acotado

⁴ En esta definición no se consideran los puntos donde no está definida la derivada

⁵ En la definición $Df(x_0)$ se refiere a la derivada de primer orden de f

⁶ A veces también son llamados puntos silla

Sea f continua en el conjunto cerrado D . El máximo y mínimo de f en D estarán en algunos de los siguientes tres grupos:

- a) Los puntos críticos de f en D .
- b) La frontera de D .
- c) Los puntos x de D tales que f no es derivable en x .

El anterior algoritmo indica de forma implícita que si se tienen varios puntos (por ejemplo puntos críticos y puntos en la frontera) en los grupos descritos, se deben comparar sus imágenes dadas por f para definir cuál es el máximo y mínimo en el conjunto D . Así, por ejemplo si pretendemos hallar el punto máximo de una función f en un conjunto cerrado D y tenemos dos puntos x_1 y x_2 , de los cuales x_1 resulta del proceso de derivación y x_2 es un punto de la frontera de D , debemos comparar las imágenes $f(x_1)$ y $f(x_2)$, si resulta que la primera es mayor a la segunda entonces $f(x_1)$ es el valor máximo, de darse lo contrario entonces $f(x_2)$ es el máximo.

Es importante resaltar que existe un criterio que nos ayuda a definir si un punto crítico (los x_0 que cumplen que $Df(x_0) = 0$) es máximo o mínimo. Previo a enunciarlo, debemos definir el Hessiano.

Definición 3. Hessiano de f en x_0

Suponga que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, para $i, j = 1, 2, \dots, n - 1, n$ en un punto $x_0 \in U$. El Hessiano de f en x_0 es la función cuadrática definida por

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j.$$

(Marsden et al., 1991, p. 252)

Ahora enunciaremos el criterio de la segunda derivada.

Teorema 2. Criterio de la segunda derivada

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^3 (esta notación significa que las derivadas f' , f'' y $f^{(3)}$ existen y son continuas), $x_0 \in U$ es un punto crítico de f y el hessiano $Hf(x_0)$ es definitivamente positivo⁷, entonces x_0 es un mínimo relativo de f . De manera análoga, si $Hf(x_0)$ es definitivamente negativo⁸, entonces x_0 es un máximo relativo (Marsden et al., 1991, p. 253).

El anterior criterio es útil para una función de n variables. Particularmente para una función de dos variables el criterio de la segunda derivada lo podemos enunciar con el siguiente teorema.

Teorema 3. Criterio de la segunda derivada para \mathbb{R}^2

Sea $f(x, y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto U en \mathbb{R}^2 . Un punto (x_0, y_0) es un mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

(II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

(III) $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0)

(D se llama el discriminante.) Si en (II) tenemos < 0 en lugar de > 0 sin cambiar la condición (III), entonces tenemos un máximo local (estricto) (Marsden et al., 1991, p. 256).

2.2. Conceptos auxiliares

Las herramientas que se presentan en esta sección serán empleadas para hacer procesos de modelación y análisis de determinadas situaciones. Particularmente, se incluyen conceptos relacionadas con el sistema de coordenadas polar y la descripción paramétrica de algunas

⁷ Una función cuadrática $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama definitivamente positiva si $g(h) \geq 0$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ y $g(h) = 0$ sólo para $h = 0$

⁸ Una función cuadrática $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama definitivamente negativa si $g(h) \leq 0$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ y $g(h) = 0$ sólo para $h = 0$

curvas en el plano. Recalamos que no pretendemos ser exhaustivos con los temas, e invitamos a los lectores interesados a profundizar en éstos por ejemplo en libros como: *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory* (Bruce & Giblin, 1992), *Geometría analítica* (Lehmann, 1989) y *Calculus volume 2* (Herman et al., 2016).

Como lo mencionamos, en algunas situaciones trabajaremos en coordenadas polares. En este orden de ideas definimos el sistema polar.

Definición 4. Sistema Polar

Un sistema de coordenadas polar para un plano está definido a partir de un punto llamado polo (O) y un rayo llamado eje polar. A partir de estos dos objetos, a cada punto del plano se hace corresponder una pareja de números reales (r, θ) .

Así, dado un punto P de coordenadas (r, θ) , si se construye el rayo OP , la coordenada θ corresponde a la medida del ángulo que se determina con el eje polar (en sentido horario para ángulos negativos y sentido antihorario para ángulo positivos) y $|r|$ es la longitud del segmento con extremos O y P (para valores de r positivos en la dirección del rayo OP y para valores de r negativos en la dirección opuesta del rayo OP) (Figura 7).

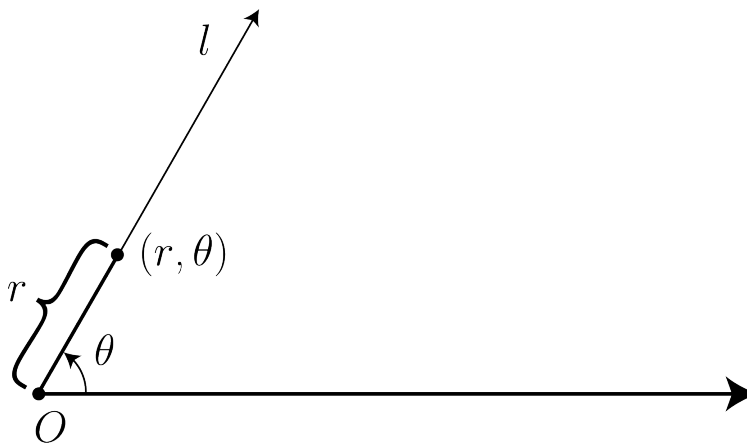


Figura 7

Ubicación del punto (r, θ) en el plano polar

Es usual que se haga coincidir el polo de un sistema polar con el origen de un sistema cartesiano y el eje polar con la parte positiva del eje real x de tal sistema cartesiano. Conociendo como se ubican los puntos en el plano polar, definimos como se representa una recta.

Definición 5. Recta en coordenadas polares

La recta que cruza el polo (O) en coordenadas polares esta dada por

$$\theta = k.$$

En donde k representa la medida del ángulo de inclinación de la recta partiendo del eje polar. Cuando la recta no pasa por el polo, pero si pasa por un punto (p, ω) y es ortogonal a la recta $\theta = \omega$ se representa como (Figura 8)

$$r(\theta) = \frac{p}{\cos(\theta - \omega)}.$$

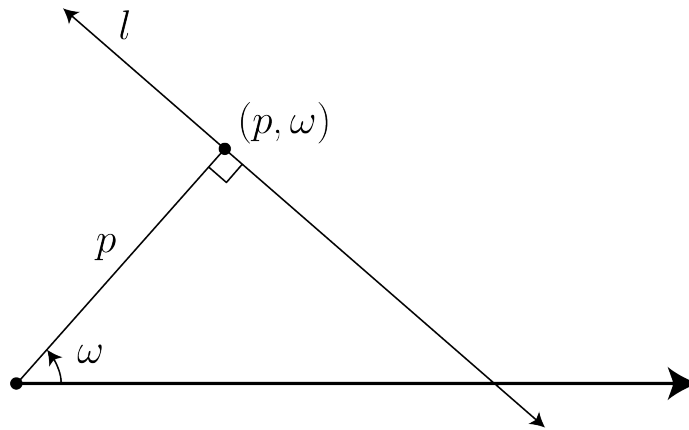


Figura 8

Recta en coordenadas polares dado un punto

En caso de tener dos puntos de coordenadas (p, ω) y (q, α) , la recta (Figura 9) que pasa por tales puntos esta dada por

$$r(\theta) = \frac{qp \sin(\omega - \alpha)}{q \sin(\theta - \alpha) + p \sin(\omega - \theta)}. \tag{1}$$

(Lehmann, 1989, p. 253)

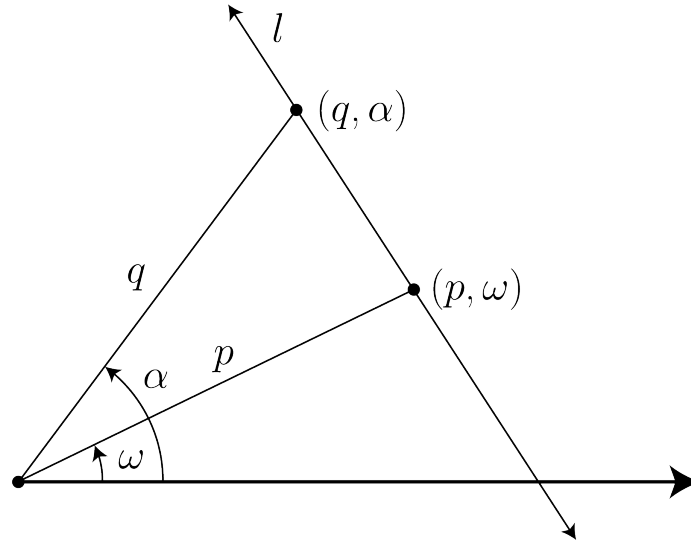


Figura 9

Recta en coordenadas polares dados dos puntos

Ahora definimos una circunferencia en coordenadas polares.

Definición 6. *Circunferencia en coordenadas polares*

Sea (c, α) el centro de una circunferencia cualquiera de radio a , entonces su ecuación está dada por

$$r^2 + c^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha) = a^2.$$

(Lehmann, 1989, p. 254)

Las anteriores definiciones nos serán de utilidad en la descripción de algunas situaciones, principalmente en los problemas de la propuesta “Curva en movimiento”. Con respecto al enfoque “Región en movimiento”, en algunas situaciones necesitamos determinar la curva envolvente que está generada por una familia de curvas, entonces incluimos su definición.

Definición 7. *Curva envolvente generada por una familia de curvas*

La envolvente, o discriminante, de la familia F es el conjunto

$$E_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{si existe } t \in \mathbb{R} \text{ con } F(t, x) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\} \quad (2)$$

Si $x \in E_F$ entonces $F(t, x) = \partial F / \partial t(t, x) = 0$. *(Bruce & Giblin, 1992, p. 76).*

Algunos autores nombran a la familia de curvas las envolventes y otros a la curva generada la envolvente, por simplicidad llamaremos envolvente a la curva generada por la familia de curvas. Podemos observar que en la Definición 7 el método para hallar la curva envolvente está implícito, entonces establecemos tal método en una definición.

Definición 8. Método para hallar la curva envolvente generada por una familia de curvas

Se tiene una curva tal que $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, en donde f_t tiene n variables que se nombran como $x_1, x_2, x_1, \dots, x_n$. Considere a t como un parámetro de f , entonces se tiene que la familia de curvas es $F(t, x_1, x_1, \dots, x_n)$.

Ahora hállese la derivada parcial de F con respecto a t , e iguale el resultado a 0. Por último establezca el sistema de ecuaciones compuesto por

$$\begin{cases} F(t, x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

en donde E_F (curva envolvente) es el conjunto de todos los puntos que satisfacen el sistema.

Apliquemos el método al siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos una familia de curvas definidas en \mathbb{R}^2 que tiene como parámetro la variable t y que está dada por

$$F(t, x, y) = 2tx - y - t^2.$$

Pretendemos hallar la curva envolvente generada por F . En un primer momento hallamos la derivada parcial de F con respecto a t , obtenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2x - 2t$$

igualamos el resultado a 0, e igualamos la función F a 0, y planteando un sistema con las dos ecuaciones, llegamos a

$$\begin{cases} 2tx - y - t^2 = 0 \\ 2x - 2t = 0 \end{cases}.$$

Los puntos que satisfacen el sistema conforman la curva envolvente, ésta la podemos escribir de dos formas, como una ecuación definida paramétricamente o una ecuación explícita en términos de x e y . En particular la forma paramétrica esta dada por

$$E_F(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

y la forma explícita por

$$y = x^2.$$

En el desarrollo de las propuestas es necesario hallar el área delimitada por las curvas que componen la figura (sofá). Como podemos observar para el caso anterior es posible hallar una forma explícita de la curva envolvente y en consecuencia podemos calcular el área con el uso de integrales para funciones en una variable; sin embargo, de no ser posible, necesitamos una herramienta que nos permita hallar el área de la superficie partiendo de su descripción paramétrica. A continuación presentamos tal herramienta, de la cual no presentaremos ninguna prueba, por la estructura del documento y porque no es de interés.

Teorema 4. Área que delimita una curva que está definida paramétricamente

Considere la curva plana que no se auto interseca⁹ definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Asumimos que $x(t)$ es diferenciable. El área bajo la curva está dada por:

$$A = \int_a^b y(t)x'(t) dt \tag{3}$$

(Herman et al., 2016, p. 557).

⁹ A veces también son llamadas funciones simples

Por último debemos aclarar la notación que empleamos a lo largo del documento para referirnos a un segmento y a su longitud; cuando queremos hacer alusión a su longitud escribimos, “longitud del segmento AB ”, y cuando queremos hablar acerca del objeto geométrico en si, escribimos “segmento AB ”. En caso de que no nos refiramos al segmento con sus extremos se aplica la misma notación.

2.3. Uso de la tecnología

La tecnología nos muestra un mundo amplio de herramientas que nos brindan entre muchas otras cosas, la posibilidad de explorar, representar, redactar y difundir información. En particular en este trabajo de grado utilizamos el software **GeoGebra** para recrear algunas simulaciones con el objetivo de explorar, conjeturar y analizar diferentes variables. Esto tuvo una influencia importante en la toma de decisiones referente a la dirección del trabajo.

Con respecto a una parte de las figuras que se muestran en el trabajo, las diseñamos con el programa **Illustrator**, con éste logramos unificar las representaciones en torno al estilo, colores y objetivo de las mismas. La otra parte de las figuras fueron diseñadas empleando los paquetes de **TikZ** y **pgfplots** que ofrece **Latex** y que nos permitieron representar gráficos en dos y tres dimensiones, en particular en este trabajo los empleamos para mostrar diferentes curvas y funciones en el plano cartesiano y polar.

Con respecto a la escritura del documento utilizamos **Latex**, se eligió este editor de texto ya que tiene múltiples ventajas con respecto a; La representación matemática de las ecuaciones, la posibilidad de enumerar las ecuaciones, la creación de hipervínculos, la enumeración de las imágenes, la creación de gráficas, la organización del texto y otras modificaciones que se le hicieron al documento en torno al formato.

Por último en el desarrollo del trabajo de grado se creó una página web en **Google Sites** con el fin de visibilizarlo. En la parte inicial de la página se relata brevemente el contexto del problema del sofá, mencionando los resultados y avances a los que han llegado otros autores. En una segunda parte se muestran los problemas que se abordaron en este trabajo, colocando como foco de atención los recursos que utilizamos en el desarrollo de estos, además se dejan

planteadas algunas preguntas que nos hicimos para llegar a tales resultados. Se puede acceder a la página por medio del link:

[Problema Bidimensional del Sofá: Curva y Región en Movimiento](#)

3. Desarrollo de la propuesta

En este apartado desarrollamos las propuestas “Curva en movimiento” y “Región en movimiento”. Sin embargo, previo a que abordemos los problemas (C1, C2 y C3) ya mencionados, tenemos que definir claramente dos ideas, la primera es qué significa que una figura pueda moverse a través de la región L , y la segunda es bajo qué condiciones y cómo vamos a mover la región L . Comenzamos enunciando la definición de movimiento de una figura de L_1 a L_2 .

Definición 9. *Movimiento de una figura de L_1 a L_2*

Sea $F = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f \text{ es una isometría}\}$ y A una región de \mathbb{R}^2 contenida en L_1 . Considerese el conjunto $F(A)$ de todas las imágenes de A por funciones f de F tal que $f(A) \subseteq L$. Se define un movimiento de A en la región L a una función continua $\phi : [0, 1] \rightarrow F(A)$ tal que $\phi(0) = A$ y $\phi(1) \subseteq L_2$.

Con esta definición pretendemos establecer dos ideas. En primer lugar que cada movimiento de la figura es continuo y no hay saltos en el proceso (no podemos “levantar” la figura) y en segundo lugar, que más allá de describir en cada instante del tiempo qué tipo de movimiento se realiza (una rotación, una translación o una composición de ambas), lo importante es que existen ciertos invariantes que hacen que se conserven las medidas de los segmentos y ángulos. Así, mover un rectángulo significa que en cada etapa del movimiento siempre se tiene un rectángulo congruente con el original. La comprobación de este hecho está en el [Anexo C](#). Ahora establecemos la definición del movimiento de la región L .

Definición 10. *Movimiento de la región L*

Se define un movimiento de la región L en el plano \mathbb{R}^2 a una función continua $\phi : [0, 1] \rightarrow T$, donde T es el conjunto de transformaciones de la forma

$$T_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

para t en $[0, 1]$ y (x, y) en la región L , tal que $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$ son funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} , $\theta(0) = 0$ y $\theta(1) = \frac{\pi}{2}$.

Con la Definición 10 establecimos que el movimiento de la región L es una composición de rotaciones y traslaciones. Con ésta se busca declarar de forma general lo que es mover la región L sobre el plano. Las funciones de translación y rotación pueden ser las que se deseen siempre y cuando sean continuas y cumplan con las condiciones establecidas para $t = 0$ y $t = 1$. De la misma manera que en la Definición 9 (movimiento de una figura de L_1 a L_2) esta transformación en todo momento conserva ángulos y distancias. La comprobación de este hecho está en el [Anexo C](#).

Hecho lo anterior, ahora procedemos a abordar las dos propuestas.

3.1. Curva en movimiento

Bajo esta aproximación partimos de definir una curva acotada (un lado del rectángulo), luego analizamos algunos puntos de tal curva (vértices u otro punto de interés) en relación con la frontera de la región L , en este proceso construimos la figura (rectángulo) teniendo en cuenta las características necesarias que posibilitan el movimiento y que satisfacen las condiciones establecidas en la Definición 9.

Formulamos el problema C1.

3.1.1. Problema C1: Rectángulo de máxima área

¿Cuál es el rectángulo de mayor área posible que puede moverse (cumpliendo con la Definición 9) a través de la región L ?

De la misma manera que en el ejemplo dado en los antecedentes, en un primer momento nos limitaremos a considerar únicamente el movimiento de translación.

Translación de un rectángulo

Consideremos la siguiente situación. Una persona decide trasladar un sofá rectangular de altura h y base w sobre un pasillo en forma de L (que es nuestra región L). Tal persona determina que va a realizar dos movimientos (ver la Figura 10). El primero teniendo en

cuenta que el sofá está situado de forma adyacente a la pared p_2 , lo mueve en la misma dirección del vector v_1 hacia la pared p_1 , cuando el sofá este en contacto con la pared p_1 , realiza el segundo movimiento trasladando el sofá en la dirección del vector v_2 .

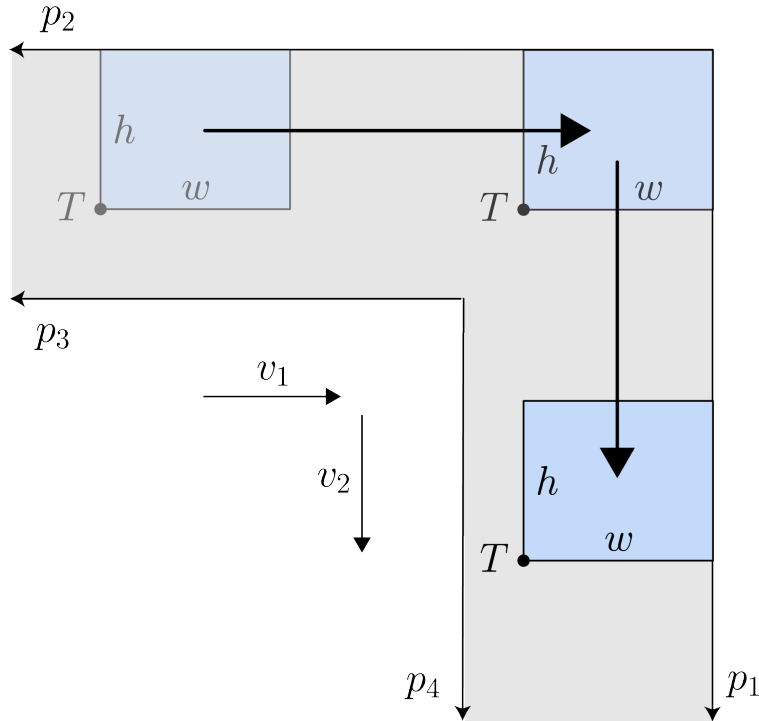


Figura 10

Traslación de un rectángulo en la región L

En la Figura 10 observamos un movimiento particular para un rectángulo particular. Sin embargo, nos da una idea de cómo generalizar la situación para considerar una amplia familia de rectángulos que pueden moverse a través de la región L cumpliendo con la Definición 9. Lo anterior lo haremos por medio del punto T .

Planteamos la trayectoria de traslación del punto T en la región L , compuesta por dos semirrectas m y n que son paralelas a p_2 y p_1 respectivamente (Figura 11).

Definimos las semirrectas m y n de la siguiente forma

$$m : y = k \text{ para } x \leq l \text{ y } n : x = l \text{ para } y \leq k$$

con k y l en el intervalo $[0, 1)$. Este intervalo nos permite garantizar la existencia de los rectángulos, independientemente de la trayectoria que tenga T , además, es abierto en 1

porque si k o l toman ese valor, la trayectoria de T coincidiría con los límites de la región L (con las semirrectas p_1 o p_2) y no se generaría algún rectángulo.

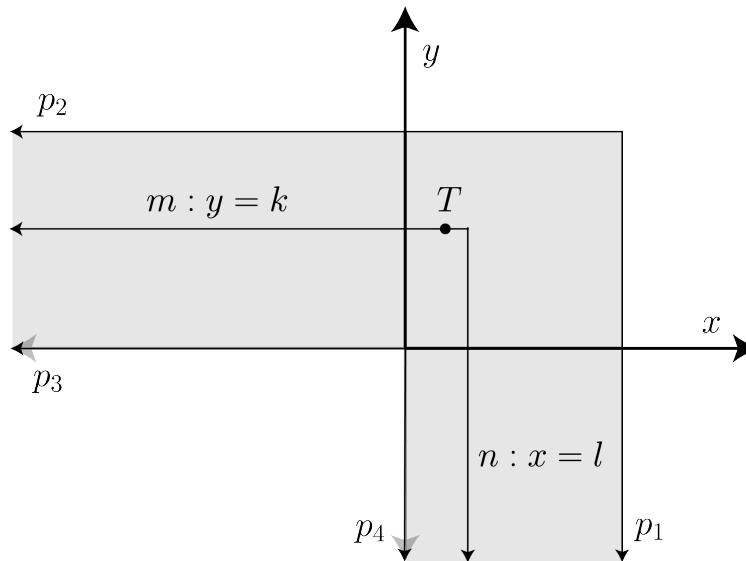


Figura 11

Trayectoria del punto T en la región L

Le damos al punto T las siguientes coordenadas (x_T, y_T) y construimos el rectángulo delimitado por las rectas $x = 1$ (recta que contiene a la semirrecta p_1), $y = 1$ (recta que contiene a la semirrecta p_2), $x = x_T$ y $y = y_T$, que tiene como vértices A , B , T y C (Figura 12).

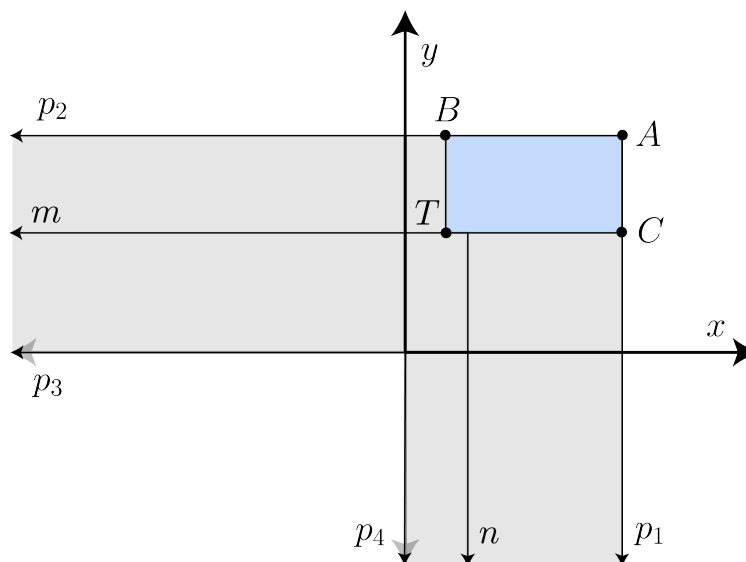


Figura 12

Rectángulo $ABTC$ en la región L

Hecho lo anterior, hallamos el área del rectángulo $ABTC$, teniendo en cuenta las coordenadas de T y su trayectoria.

La altura y base del rectángulo tienen longitudes iguales a las de los segmentos BT y TC respectivamente, con base en las coordenadas que definimos para T , y las relaciones de paralelismo entre las diferentes rectas (en específico $x = 1$ con $x = x_T$ y $y = 1$ con $y = y_T$), determinamos que la altura es $1 - y_T$ y la base es $1 - x_T$. Con esto definimos que el área del rectángulo esta dada por

$$\text{Área} : A = (1 - y_T)(1 - x_T).$$

Recordemos que el punto T se mueve por las semirrectas m y n . Ahora, observemos qué ocurre con la expresión del área cuando $T \in m$; sabemos que $y_T = k$, en este sentido la expresión del área es equivalente a

$$A = (1 - k)(1 - x_T), \quad (5)$$

y cuando $T \in n$ se tiene que $x_T = l$, y la expresión que obtenemos es

$$A = (1 - y_T)(1 - l). \quad (6)$$

Las ecuaciones 5 y 6 describen el área del rectángulo en dos momentos distintos de la trayectoria que establecimos para el punto T , al analizarlas en conjunto, para permitir el movimiento del rectángulo por el interior de la región L , debemos escoger los valores mínimos de la altura y la base, entonces de la ecuación 5 determinamos que el mínimo valor de la base es $1 - l$ y de la ecuación 6 que el mínimo valor de la altura es $1 - k$.

Con el anterior razonamiento llegamos a que las ecuaciones 5 y 6 se reducen a la misma, que esta dada por

$$A(k, l) = (1 - k)(1 - l). \quad (7)$$

Optimización

Procedemos a hallar los valores de k y l que maximizan el área del rectángulo. Como la ecuación 7 es una función continua, el Teorema 1 nos garantiza que tiene por lo menos un

máximo y mínimo en el conjunto en donde están definidas k y l que es $[0, 1) \times [0, 1)$. Previo a optimizar observemos la Figura 13 que representa la gráfica de A en el conjunto de interés, para darnos una idea de dónde están los valores máximos.

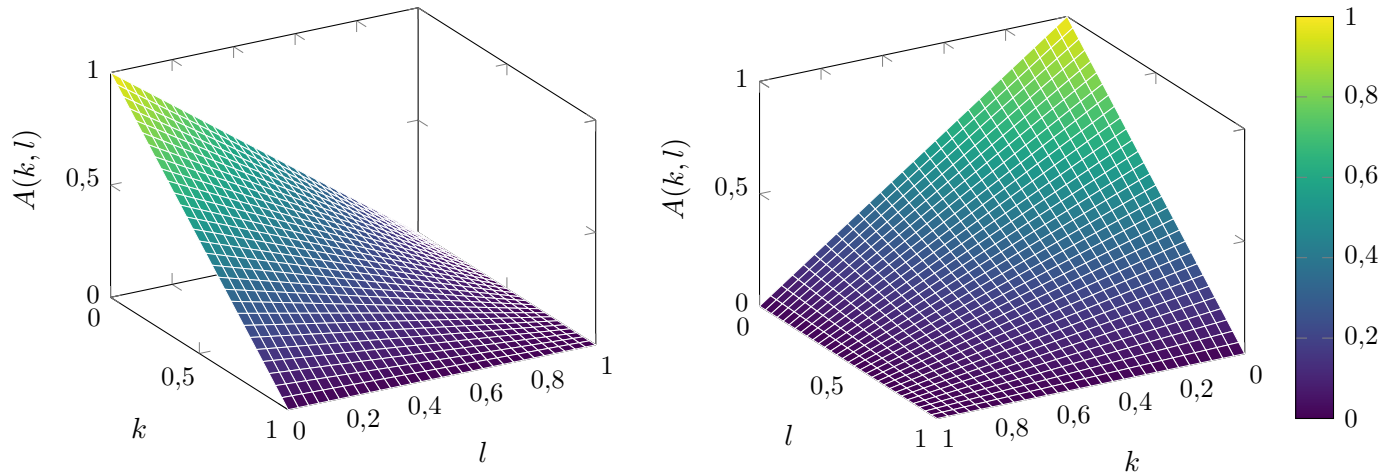


Figura 13

Gráficas de la expresión $A(k, l)$ con $k, l \in [0, 1)$ desde dos perspectivas distintas

Con base en la Figura 13 podemos conjeturar que el punto máximo se ubica en el punto $(0, 0)$. Ahora procedemos a aplicar el método establecido en la Definición 2 para hallar los puntos máximos. Partimos de calcular la derivada parcial de A con respecto a k y l , y obtenemos que

$$\frac{\partial A}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(1 - k)(1 - l) = -1 + l \quad \text{y} \quad \frac{\partial A}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}(1 - k)(1 - l) = -1 + k.$$

Después de igualar a cero las ecuaciones resultantes, determinamos que $k = 1$ y $l = 1$. Entonces en el punto $(1, 1)$ hay un punto crítico, sin embargo, dicho punto no está incluido en el conjunto definido para k y l (en este punto no se tiene algún rectángulo), entonces considerando el siguiente paso a seguir en lo establecido en el método de la Definición 2, solo nos queda evaluar la función en los puntos frontera de tal conjunto; si $k = 0$, entonces el valor máximo de

$$A = 1 - l$$

se obtiene para $l = 0$. Y si $l = 0$, entonces el valor máximo de

$$A = 1 - k$$

se obtiene para $k = 0$. Así, el valor máximo de A está dado en

$$k = 0 \text{ y } l = 0$$

y es

$$A(0, 0) = (1 - 0)(1 - 0) = 1.$$

Con lo anterior concluimos que la figura de máxima área es un cuadrado de lado uno que tiene un área de una unidad cuadrada. Por otro lado, si analizamos la situación desde una perspectiva intuitiva y realista, la persona tendría dificultades para realizar el segundo movimiento, debido a que no contaría con un punto de apoyo que le permita empujar el sofá en la segunda dirección (Figura 14).

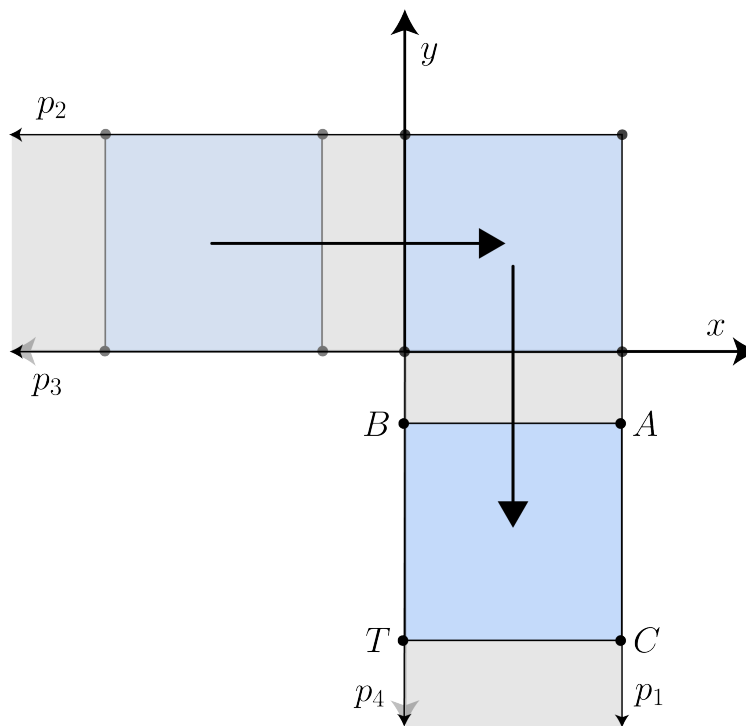


Figura 14

Rectángulo de máxima área en la región L

Traslación y rotación de un rectángulo

En el análisis anterior solo consideramos la traslación de un rectángulo. Ahora estudiaremos qué ocurre si combinamos movimientos de rotación y traslación, para esto proponemos

el estudio de dos situaciones. En la primera, tomaremos como base para la construcción de uno de los lados del rectángulo, una recta l que corta a las semirrectas p_3 y p_4 en el punto O , luego analizaremos el movimiento del rectángulo al rotar la recta l . En la segunda situación, estudiaremos los rectángulos que tienen uno de sus lados sobre una recta l que corta a las semirrectas p_1 y p_2 , tomaremos los extremos del lado sobre estas semirrectas; acá, analizamos los rectángulos que se generan al cambiar la posición de uno de los puntos de intersección de la recta l con una de las semirrectas. En ambas situaciones nos damos a la tarea de determinar el rectángulo de máxima área que puede moverse en la región L .

Situación 1

Partimos de construir la situación (Figura 15). Trazamos una recta l que pasa por el punto O y nombramos como α el ángulo formado por la recta l y la semirrecta p_4 , éste ángulo lo acotaremos en el intervalo $(0, \pi/2)$. Con la letra A denotaremos el punto de intersección entre la recta l y p_2 , y con la letra D la intersección entre l y p_1 . Luego trazamos una recta perpendicular a p_1 que pasa por D y nombramos C su intersección con p_4 , y de forma análoga trazamos una recta perpendicular a p_2 que pasa por A y nombramos B su intersección con p_3 .

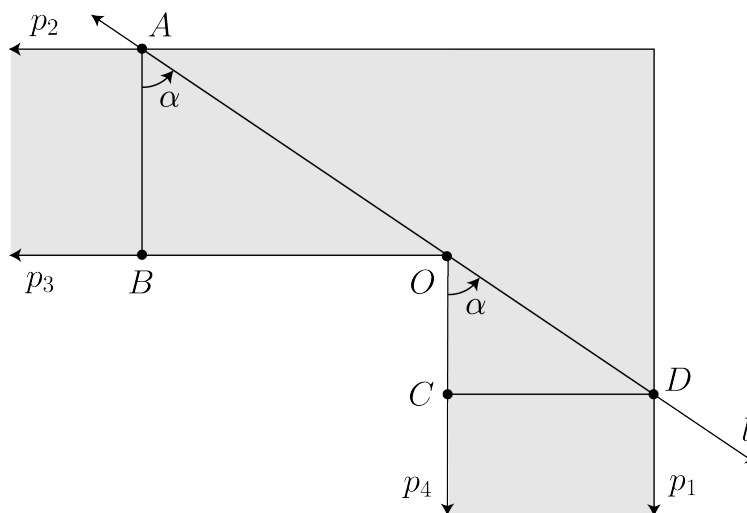


Figura 15

Construcción de la recta l

Antes de continuar debemos resaltar unos detalles en torno a la construcción. En primer

lugar, la recta l se moverá en función de la variación de α en el intervalo que determinamos, el cual se eligió para garantizar la existencia de los triángulos rectángulos ABO y OCD , que serán fundamentales en la construcción del rectángulo. En segundo lugar, el rectángulo estará contenido en la región delimitada por la recta l y las semirrectas p_1 y p_2 , además, uno de sus lados estará contenido en la recta l . Por último, en el desarrollo de esta situación emplearemos una perspectiva geométrica, en la que aprovecharemos las relaciones entre los triángulos rectángulos ya mencionados.

Para empezar trazamos un segmento FG de longitud k , tal que $k \in [0, 1]$ (intervalo que garantiza que el rectángulo esté contenido en la región L), $F \in AO$, $G \in p_2$ y la recta que contiene al segmento FG es perpendicular a l (Figura 16).

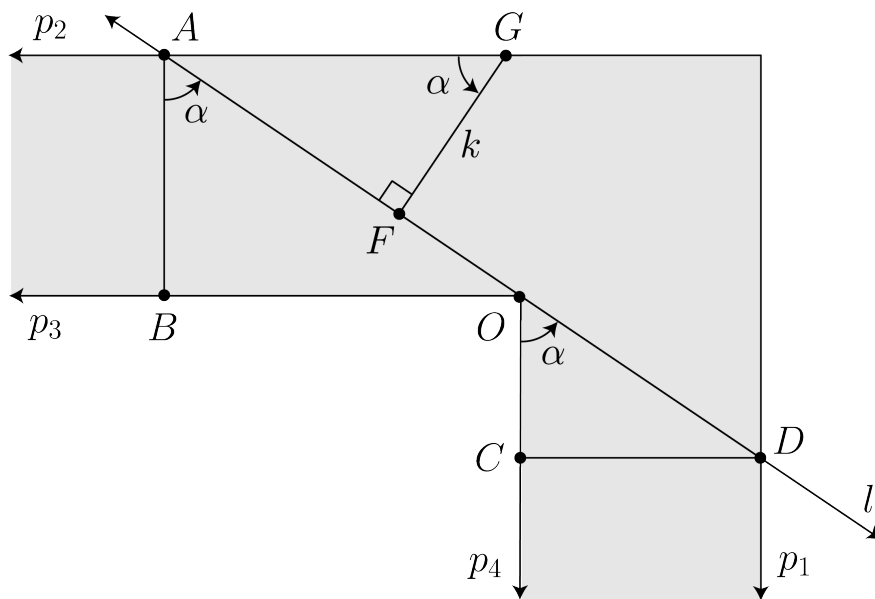


Figura 16

Construcción del segmento FG

Ahora construimos un segmento HI , tal que $HI \cong FG$, $H \in OD$, $I \in p_1$ y la recta que contiene al segmento HI es perpendicular a la recta l . Así, definimos el rectángulo $HIGF$ (Figura 17).

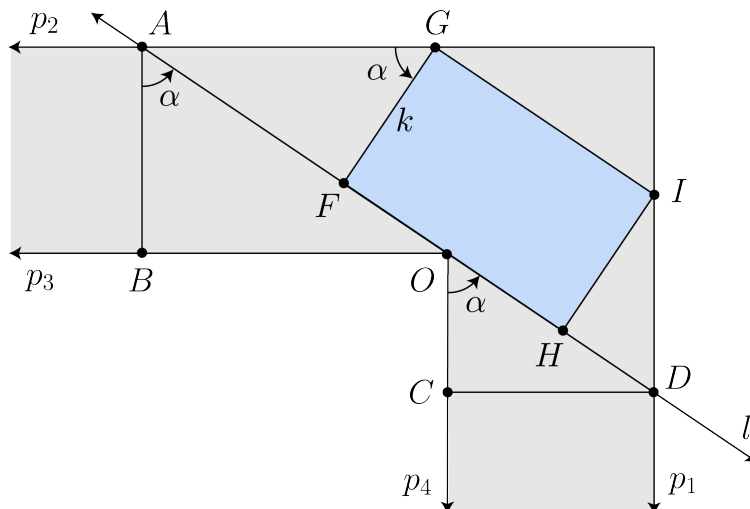


Figura 17

Construcción del rectángulo HIGF

Para hallar el área del rectángulo $HIGF$ solo nos falta encontrar la longitud del segmento FH (por construcción ya sabemos que la medida del segmento FG es k), y para lograrlo debemos previamente explicitar que como consecuencia del teorema asociado a los ángulos formados por la recta transversal a dos paralelas, el ángulo OAB es congruente con α . Además, como el ángulo GAF y α son complementarios, entonces el ángulo FGA es congruente con α , lo anterior nos será útil en lo que sigue.

Teniendo en cuenta la Figura 17, para hallar la medida del segmento FH planteamos la siguiente ecuación

$$FH = AD - AF - HD. \tag{8}$$

De esta última ecuación observamos que necesitamos hallar la longitud del segmento AD , la cual podemos encontrar por medio de las longitudes de los segmentos AO y OD que sumadas dan la de AD . Sabemos que en la región L sus paralelas están distanciadas por una unidad, por lo tanto, las longitudes de los segmentos AB y CD es de una unidad, en este sentido si empleamos el ángulo α y las razones trigonométricas seno y coseno, es posible hallar las medidas de los segmentos AO y OD . Entonces, de los triángulos OCD y ABO se tiene que

$$\sin(\alpha) = \frac{CD}{OD} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \frac{AB}{AO}$$

de donde

$$OD = \csc(\alpha) \quad \text{y} \quad AO = \sec(\alpha).$$

Por último, hallamos la longitud del segmento AD , que es

$$AD = AO + OD = \sec(\alpha) + \csc(\alpha).$$

Continuando con el análisis de la ecuación 8 únicamente nos hace falta hallar la longitud de AF y HD . Para calcular AF empleamos el triángulo rectángulo AFG , del cual se obtiene

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{k}{AF}$$

y si despejamos AF tenemos que

$$AF = \frac{k}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

ahora, como la función tangente y cotangente están relacionadas por la identidad $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$, entonces llegamos a que

$$AF = k \tan(\alpha).$$

De forma análoga hallamos la medida del segmento HD , utilizando el triángulo rectángulo IHD llegamos a

$$\tan(\alpha) = \frac{k}{HD}$$

y despejando HD , obtenemos

$$HD = k \cot(\alpha).$$

Así, FH de la ecuación 8 se puede expresar como

$$FH = \sec(\alpha) + \csc(\alpha) - k \tan(\alpha) - k \cot(\alpha)$$

o de forma equivalente

$$FH = \sec(\alpha) + \csc(\alpha) - k(\tan(\alpha) + \cot(\alpha)).$$

En este punto debemos observar que dado un valor fijo de k , existen infinitos valores para la longitud del segmento FH ; sin embargo, no para todas esas longitudes, el respectivo rectángulo puede moverse por la región L , según lo declarado en la Definición 9. Por ejemplo, en la Figura 18, para un k fijo se muestran varios rectángulos que posiblemente puedan moverse sobre la región L , en particular, el que está en la parte superior izquierda, intuitivamente podemos observar que no puede pasar de la región L_1 a L_2 .

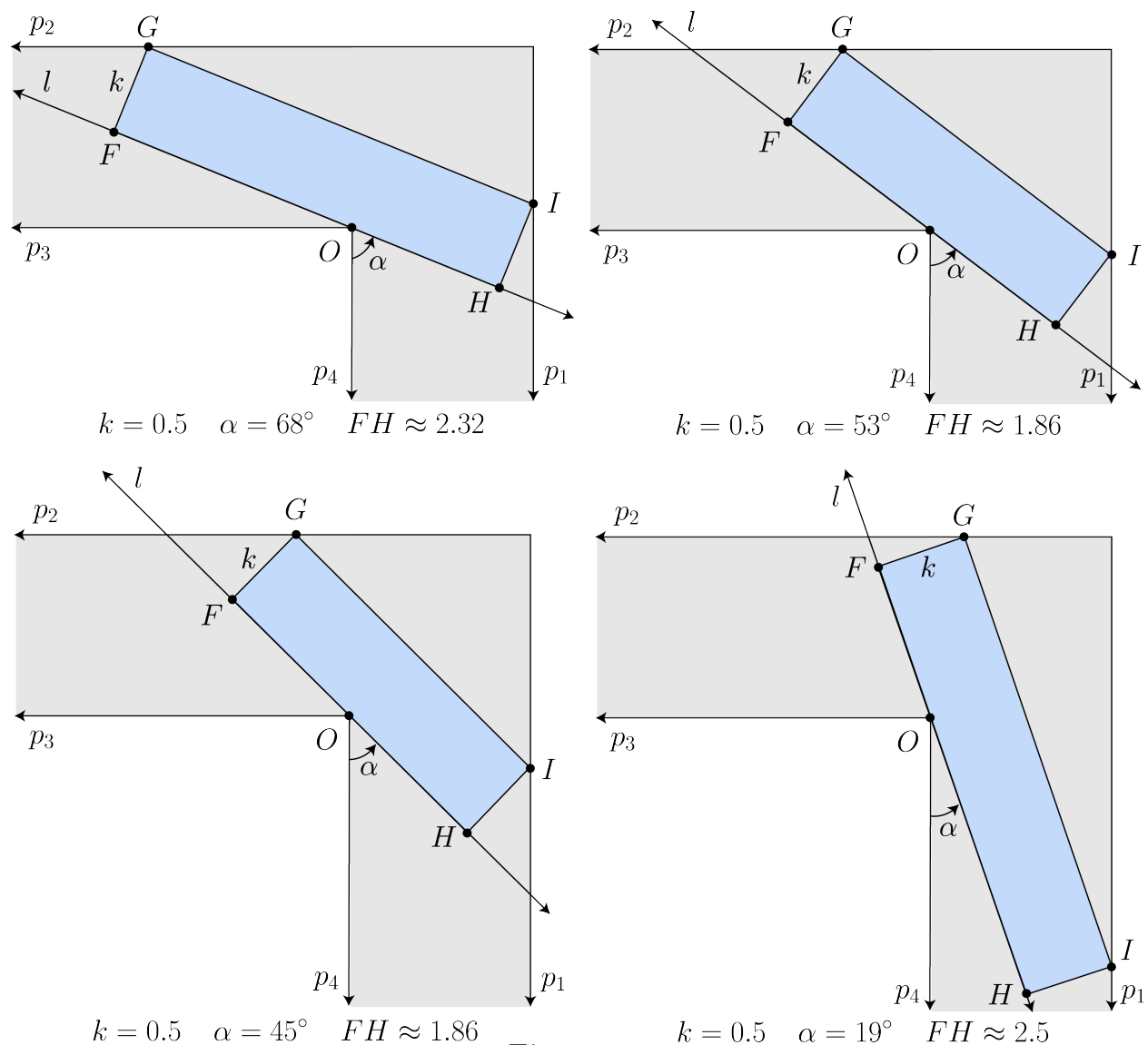


Figura 18

Rectángulo HIGF con $k = 0,5$ y varios valores de α

Así, si fijamos k debemos determinar para qué valores de FH el rectángulo podrá

moveirse por la región L . Para ello es suficiente con observar que como el movimiento depende del ángulo α , entonces, es necesario hallar la menor longitud del segmento FH (que denotaremos por z) que asegura la existencia del rectángulo y la posibilidad del movimiento indistintamente del valor del ángulo α . De esta forma se obtendrán las medidas de un rectángulo $H'I'GF$, con la longitud del segmento FG igual a k y la de $FH' = z$, que puede moverse por la región L siguiendo la idea descrita (ver Figura 19).

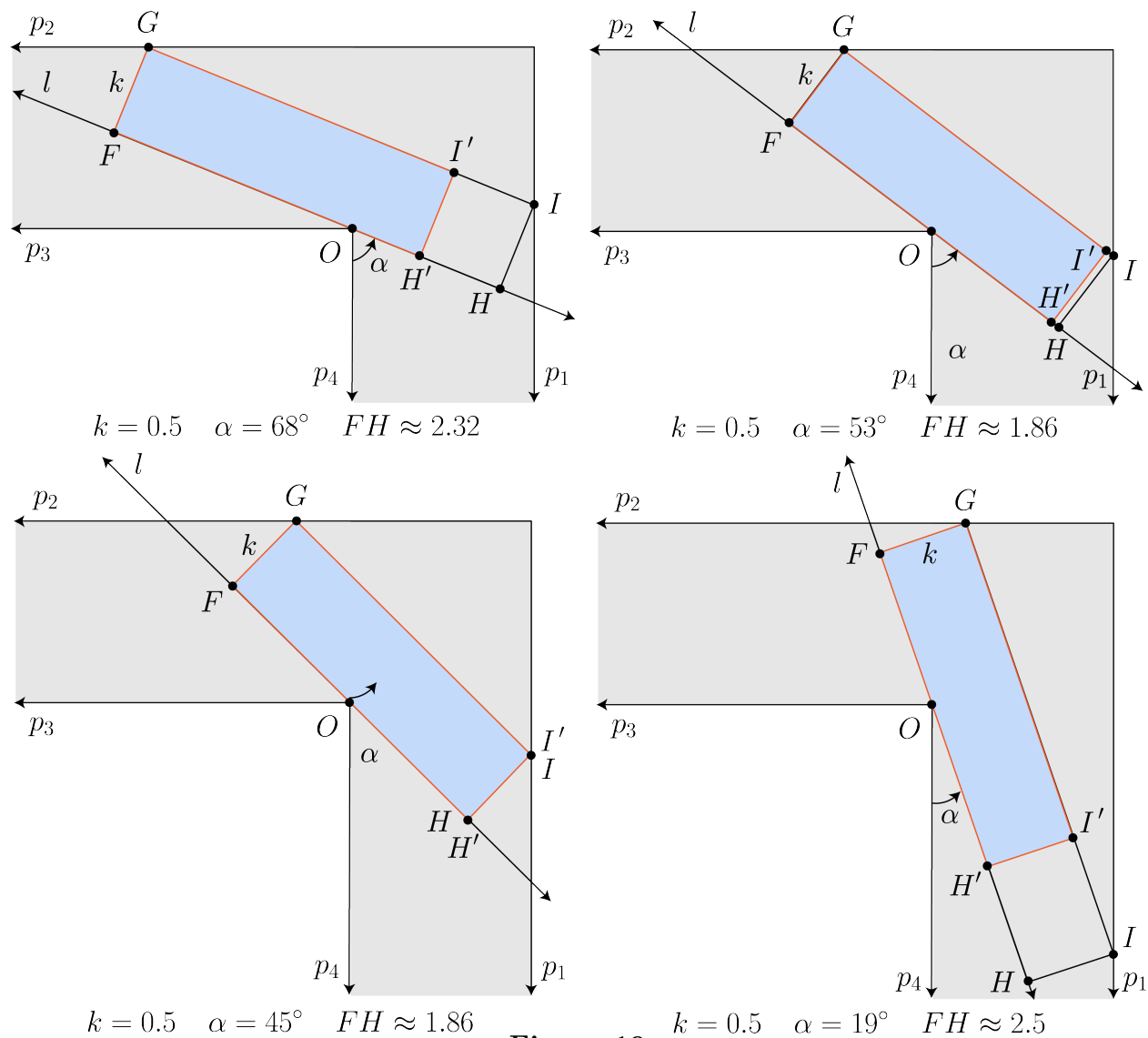


Figura 19

Rectángulo $H'I'GF$

En este orden de ideas, procedemos a optimizar la expresión de la longitud del segmento

FH con respecto a α . Teniendo en cuenta lo anterior, nos damos a la tarea de hallar la longitud mínima del segmento FH . Empezamos derivando la expresión y llegamos a

$$(FH)'(\alpha) = \sec(\alpha) \tan(\alpha) - \csc(\alpha) \cot(\alpha) - k(\sec^2(\alpha) - \csc^2(\alpha))$$

igualamos a cero $(FH)'(\alpha)$ y obtenemos que

$$0 = \sec(\alpha) \tan(\alpha) - \csc(\alpha) \cot(\alpha) - k(\sec^2(\alpha) - \csc^2(\alpha)). \quad (9)$$

Hallamos para cuáles valores de α se satisface la ecuación 9 y si son mínimos (el razonamiento para hallar este resultado se presenta en el [Anexo D](#)) y tenemos que el único valor que se ajusta a las condiciones mencionadas y al conjunto en el que estamos trabajando es $\alpha = \pi/4$.

Con lo anterior hallamos la longitud del segmento FH' , que posibilita que el rectángulo $H'I'GF$ pueda moverse en la región L , que es

$$FH' = z = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) - k\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2} - 2k.$$

Ahora estamos en capacidad de hallar el área del rectángulo $H'I'GF$. Con la medida del segmento FG que es k y la longitud del segmento FH' que es z , con lo cual

$$\text{Área : } A = zk = (2\sqrt{2} - 2k)k$$

o de forma equivalente

$$A(k) = 2\sqrt{2}k - 2k^2.$$

Optimización

Hecho lo anterior, ahora aplicamos métodos de optimización para hallar el valor de k que maximiza el área del rectángulo. Recordemos que k es un número que está en el intervalo $[0, 1]$, éste garantiza que el rectángulo esté completamente contenido en la región L .

Por la expresión de A , sabemos que es una función continua, y en virtud del Teorema 1 podemos afirmar que existen por lo menos un máximo y mínimo en el conjunto. Aplicamos

el método establecido en la Definición 2 para hallarlos. Partimos de calcular la derivada de A con el objetivo de determinar si hay puntos críticos en el conjunto, de esta forma tenemos que

$$A'(k) = 2\sqrt{2} - 4k$$

igualando a cero y despejando la variable k llegamos a $k = \sqrt{2}/2$.

Como la función A corresponde geoméricamente a una parábola que es concava hacia abajo, determinamos que el punto crítico corresponde a un máximo. Hallando el área del rectángulo obtenemos que

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2\sqrt{2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

De lo anterior se puede concluir que el rectángulo de máxima área tiene como medidas $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}/2$. Nuevamente el rectángulo de área máxima que se puede mover en la región L tiene un área de una unidad cuadrada, igual a la obtenida en el caso de traslación, aunque esta figura tiene medidas diferentes (Figura 20).

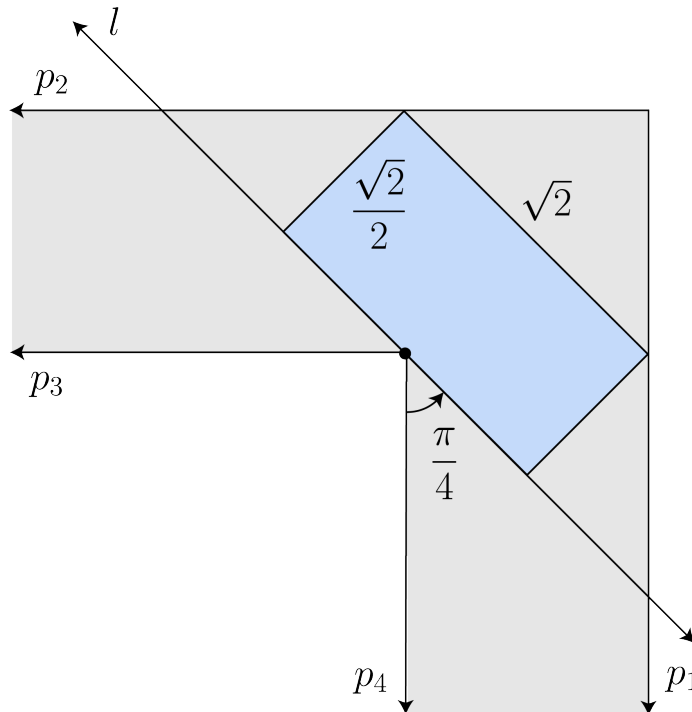


Figura 20

Rectángulo de máxima área

Con base en los resultados obtenidos podemos preguntarnos ¿Qué garantiza que ese rectángulo pueda moverse en la región L ? Para dar respuesta a esta pregunta basta con verificar que se cumplan con las condiciones establecidas en la Definición 9 (movimiento de una figura de L_1 a L_2).

Para lograrlo primero acudimos a la forma como construimos el rectángulo, en el movimiento garantizamos que el rectángulo este en el interior de la región L , y esto por medio de la ubicación de sus lados, en ésta tuvimos en cuenta los límites de la región L y el movimiento de la recta l dado por la variación del ángulo α .

Únicamente nos falta garantizar que para el inicio, la figura está contenida en la región L_1 y para el final que está contenida en L_2 . Esto lo podemos abordar empleando las medidas obtenidas $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}/2$, la primera medida la podemos hacer corresponder con la base y la segunda con la altura.

Para la primera condición vamos a probar que en el movimiento para algún ángulo α cercano a $\pi/2$, se cumple que el rectángulo está completamente contenido en L_1 . Supongamos que $\alpha = 89^\circ \approx 0,494\pi$, hallamos la longitud del segmento AO que esta determinada por

$$AO = \sec(89^\circ) \approx 57,29$$

y para AF es

$$AF = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(89^\circ) \approx 40,51.$$

De lo cual deducimos que la distancia entre el punto F y O es la diferencia entre las longitudes del segmento AO y AF que es de 16,78, esta longitud es más que suficiente para que la base del rectángulo ($\sqrt{2} \approx 1,41$) esté contenida en el segmento FO . Esto garantiza que el rectángulo esta completamente contenido en la región L_1 cuando $\alpha = 89^\circ \approx 0,494\pi$ (Figura 21). De forma análoga se comprueba que para algún ángulo cercano a 0 el rectángulo está completamente contenido en L_2 . Con lo anterior comprobamos que el rectángulo hallado puede moverse en la región L .

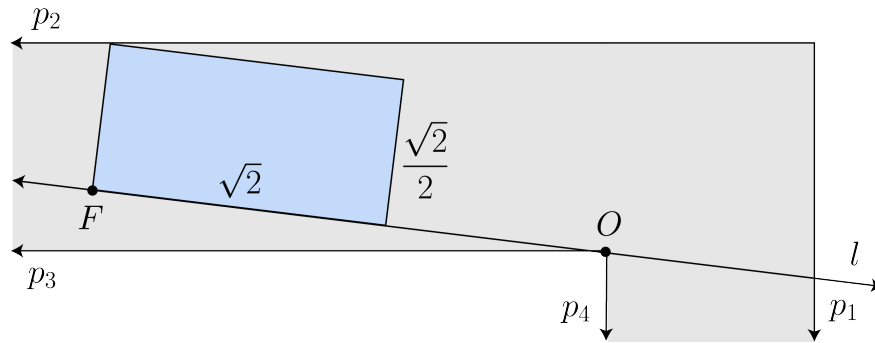


Figura 21

Rectángulo de máxima área contenido en L_1

Situación 2

En esta situación construiremos un segmento s (éste será un lado del rectángulo) de longitud d que se moverá por la región L de tal forma que sus extremos siempre pertenezcan a las semirrectas p_2 o p_1 . Luego determinamos el otro lado del rectángulo empleando el movimiento de s y las distancias de los límites de la región L a algunos puntos del segmento s .

Es importante mencionar que esta situación la abordaremos empleando coordenadas polares, porque facilitan la comprensión del movimiento y el cálculo de algunas operaciones. En primer lugar, empleamos la Definición 5 para determinar los límites de la región L en coordenadas polares, para lograr esto partimos de la representación cartesiana de la región L , ubicamos el polo en el origen y por último el eje polar con la parte positiva del eje real x del sistema cartesiano (Figura 22).

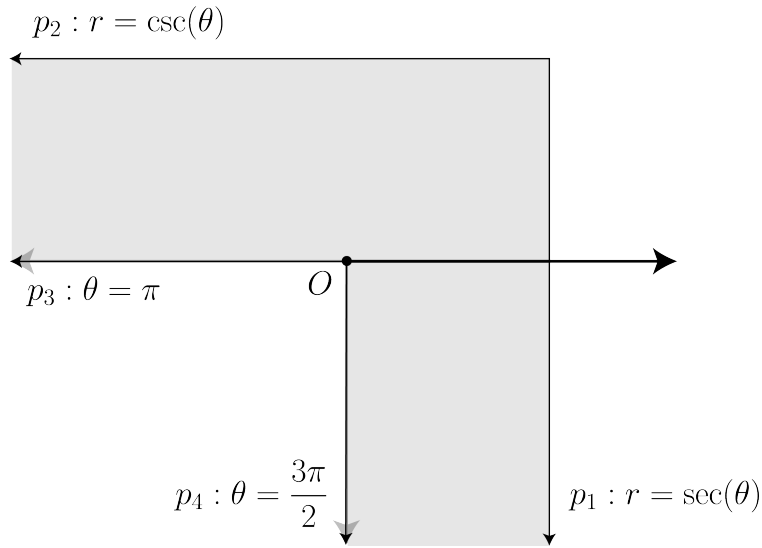


Figura 22

Límites de la región L en coordenadas polares

Como se muestra en la Figura 23, definimos los extremos de s como T y R . Por otro lado, también presentamos un rectángulo, podemos notar que si el movimiento de éste se hace depender de T , se generan dos posibles casos, pues si R pertenece a p_2 , ocurre que un lado del rectángulo tendría como máximo y único valor una unidad, pero si R pertenece a p_1 tal lado podría cambiar medida.

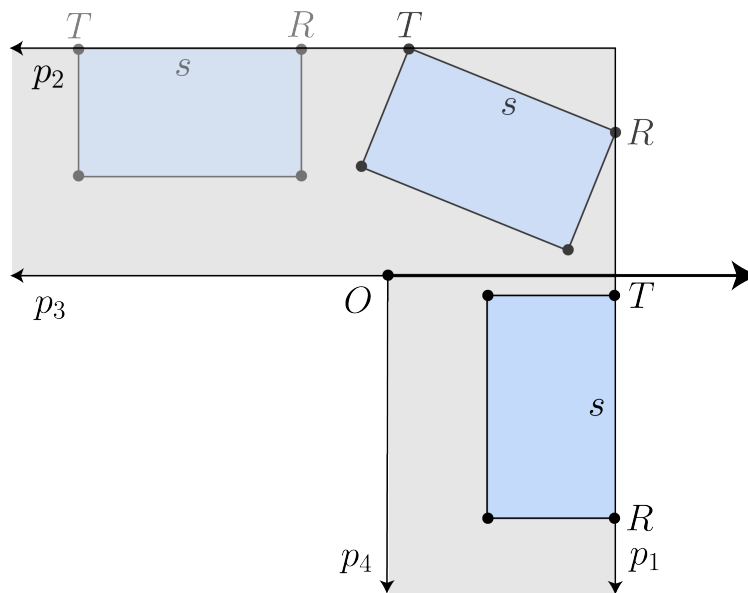


Figura 23

Movimiento del segmento s en la región L

En relación con lo anterior determinamos que debemos realizar dos análisis, uno en el que R pertenezca a p_2 y otro en el que R pertenezca a p_1 . Hecho lo anterior ahora construiremos el segmento s en función de la posición del punto T . Para esto hallaremos la expresión que determina las coordenadas de T con base en un ángulo α que estará acotado por el intervalo $[\pi/4, \pi)$ (Figura 24), escogemos este intervalo para garantizar la existencia del punto T .

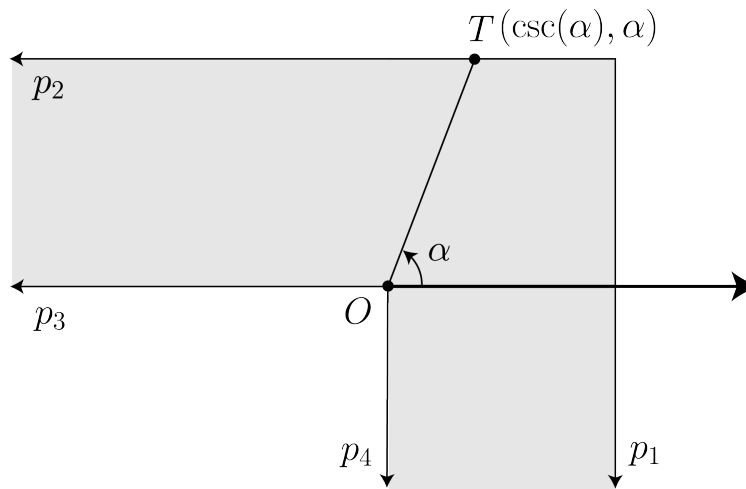


Figura 24

Punto T sobre la semirrecta p_2

Para hallar la posición del punto R , empleamos la Definición 6 para construir la circunferencia (que nombraremos E) con centro en T y radio d (recordemos que d es la medida del segmento s que tiene como extremos los puntos T y R). Obtenemos la ecuación

$$E : r^2 + \csc^2(\alpha) - 2r \csc(\alpha) \cos(\theta - \alpha) = d^2.$$

Una de las intersecciones entre la circunferencia E y la recta p_1 o p_2 será el punto R (Figura 25).

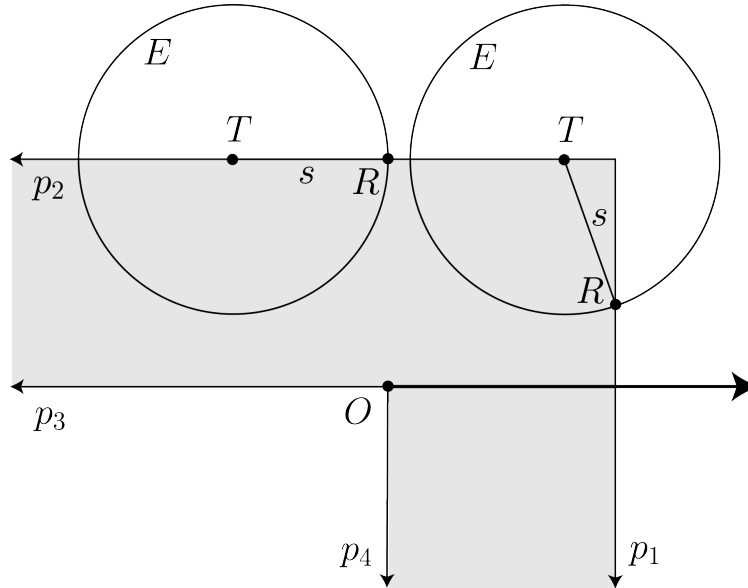


Figura 25

Punto R sobre p₂ o p₁

Es importante mencionar que si s está contenido en p_2 , no será necesario hallar la coordenada de R , debido a que la máxima longitud del otro lado del rectángulo será una unidad, entonces, el área del rectángulo estará dada por la expresión

$$\text{Área : } A = (d)(1) = d,$$

la cual por ahora, no nos brinda información relevante acerca del rectángulo de máxima área. Procedemos entonces a realizar el análisis cuando R pertenece a p_1 . Nos damos a la tarea de hallar la coordenada de R . Para empezar reemplazamos la ecuación de la recta p_1 ($r = \sec(\theta)$) en la ecuación de la circunferencia E y encontramos para cuáles ángulos se intersecan. Comenzamos reemplazando p_1 en E , obtenemos que

$$\sec^2(\theta) + \csc^2(\alpha) - 2 \sec(\theta) \csc(\alpha) \cos(\theta - \alpha) = d^2.$$

Utilizando las identidades $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$ y $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha)$ llegamos a

$$1 + \tan^2(\theta) + \csc^2(\alpha) - 2 \sec(\theta) \csc(\alpha) (\cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha)) = d^2$$

y así, empleando las identidades $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ y $\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$ y aplicando propiedad distributiva llegamos a

$$1 + \tan^2(\theta) + \csc^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - 2 \tan(\theta) = d^2. \quad (10)$$

Después de realizar un cambio de variable y solucionar la ecuación de segundo grado auxiliar (ver el proceso en el [Anexo E](#)) determinamos que los valores de θ que satisfacen la ecuación 10 son

$$\theta = \tan^{-1} \left(1 \pm \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right).$$

En este caso la intersección que garantiza que el segmento s esté en el interior de la región L está dada por la raíz negativa. Con lo anterior establecemos la posición del punto R sobre la semirrecta p_1 , considerando el ángulo mencionado y evaluándolo en la expresión de la semirrecta p_1 , tenemos que

$$R \left(\sec \left(\tan^{-1} \left(1 - \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right) \right), \tan^{-1} \left(1 - \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right) \right).$$

Con los extremos del segmento s definidos, ahora construimos el otro lado del rectángulo, por medio de la distancia del polo a la recta que contiene el segmento s y que nombraremos l . Empleamos la Definición 5 y en particular la ecuación 1 junto con las coordenadas de los puntos T y R para hallar la recta l que contiene al segmento s y llegamos a

$$l : r(\theta) = \frac{\left(1 - \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right) \cot(\alpha) - 1}{(\cot(\alpha) - 1) \sin(\theta) - \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \cos(\theta)}.$$

Como ya lo mencionamos la recta l nos será útil para hallar el otro lado del rectángulo, el cual está limitado por el punto O . Entonces, hallamos la recta ortogonal a l que pasa por el origen, ésta la obtenemos con los coeficientes que acompañan a $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ de la ecuación de la recta l , tales coeficientes en coordenadas polares actúan como la pendiente. Así, obtenemos que la recta ortogonal a l que pasa por el origen esta dada por

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{\cot(\alpha) - 1}{\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}} \right). \quad (11)$$

Con la anterior ecuación construimos una expresión m que determinará la distancia entre el origen y la recta l . Esto lo haremos hallando el punto de intersección entre la recta que describe la ecuación 11 y la ecuación de la recta l . Obtenemos que la función m está dada por

$$m(\alpha) = \begin{cases} r = -\frac{1}{d} \left[\left(1 - \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right) \cot(\alpha) - 1 \right] \\ \theta = \tan^{-1} \left(-\frac{\cot(\alpha) - 1}{\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}} \right) \end{cases} \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right).$$

Podemos observar que m esta descrita por una ecuación paramétrica, sin embargo, es posible hallar una ecuación explícita de ésta. Empezamos por despejar α de la componente θ de m , con el propósito de dejar la expresión en términos de θ (ver el proceso en el [Anexo F](#)). Obtenemos lo siguiente

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - |d \sin(\theta)|} \right).$$

De la expresión anterior tomamos $|d \sin(\theta)| = d \sin(\theta)$, al ser el valor que satisface la componente en θ de la expresión m . Ahora reemplazando en la componente r de la expresión m el valor de α que acabamos de hallar (ver el proceso en el [Anexo G](#)), llegamos a

$$m : r(\theta) = \sin(\theta) + |\cos(\theta)| - d \sin(\theta) |\cos(\theta)|$$

Para continuar con la simplificación de la expresión de m debemos acotar el ángulo α en el intervalo $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \tan^{-1}(d - 1) + \frac{\pi}{2}$ (ver la justificación en el [Anexo H](#)), tal intervalo garantiza que el punto R esté sobre la semirrecta p_1 . Reemplazando los límites del intervalo para α en la componente θ de la expresión m se obtiene que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (ver el proceso en el [Anexo I](#)).

Con lo anterior podemos definir los signos de los valores absolutos, y esto por medio del comportamiento de la función coseno en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$, que es mayor o igual a 0, con lo que podemos establecer que $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$, entonces, reemplazando este valor en la expresión explícita de m , obtenemos que

$$m : r(\theta) = \sin(\theta) + \cos(\theta) - d \sin(\theta) \cos(\theta).$$

Ahora observemos algunas representaciones de la curva m . La Figura 26 muestra un plano polar con tres gráficas de la curva m , una con el valor $d = 1$ (curva azul), otra con $d = 1,5$ (curva roja) y otra con $d = 2$ (curva verde), éstas están graficadas en el intervalo $[0, \pi/2]$.

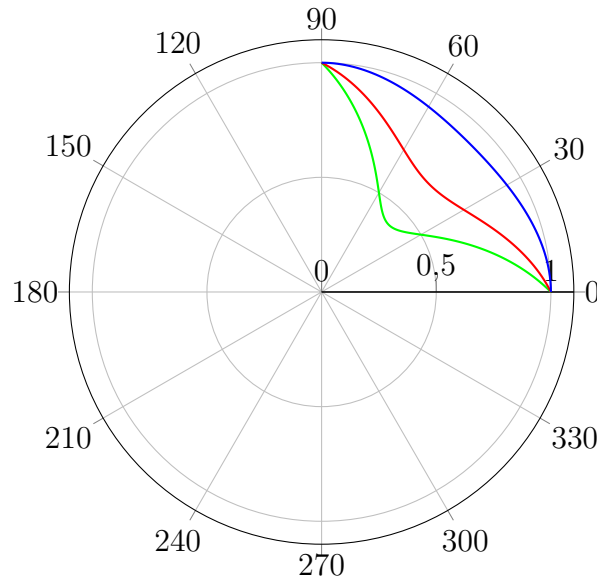


Figura 26

Gráficas del lugar geométrico del punto de intersección entre la recta l y su ortogonal que pasa por el origen

Ahora nos enfocaremos en garantizar que el rectángulo que se construya con las medidas anteriormente mencionadas, cumpla con la Definición 9. Como el ángulo α determina el movimiento de T , y en el proceso modifica solo una de las longitudes del rectángulo que está dada por la expresión m . Si empleamos el mismo razonamiento utilizado en la Situación 1 (que en síntesis establece que la longitud mínima determinada por la expresión m permite que el rectángulo que se construya pueda moverse por la región L), procedemos a hallar la longitud mínima. En este orden de ideas, optimizamos la expresión m con respecto a α . Hallamos la derivada y obtenemos que

$$r'(\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta) - d(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)),$$

igualamos a cero la anterior expresión para hallar los puntos críticos y tenemos que

$$0 = \cos(\theta) - \sin(\theta) - d(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \quad (12)$$

Ahora hallamos que valores de θ satisfacen la ecuación 12 y que correspondan a puntos críticos mínimos (ver la justificación en el [Anexo J](#)) y obtenemos que el único valor es

$$\theta = \frac{\pi}{4},$$

con lo que podemos hallar la longitud del lado que permite que el rectángulo pueda moverse en la región L . De esta forma llegamos a que

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - d \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \frac{d}{2}.$$

Hecho lo anterior, hallamos la expresión del área del rectángulo, que está dada por la longitud del segmento s que es d y la longitud que acabamos de hallar. Así, obtenemos que

$$\text{Área : } A(d) = \left(\sqrt{2} - \frac{d}{2}\right) d.$$

que es equivalente a

$$A(d) = \sqrt{2}d - \frac{d^2}{2}.$$

Optimización

Antes de optimizar debemos establecer que la variable d toma valores en el intervalo $0 \leq d \leq 2\sqrt{2}$ (este intervalo nos permite garantizar que para cualquier valor de d se genere un rectángulo, la cota superior $2\sqrt{2}$ se justifica en la siguiente sección). Por otro lado, como la expresión A no tiene alguna indeterminación y es continua para todo su dominio, el Teorema 1 nos garantiza que en el conjunto hay por lo menos un máximo y mínimo. Aplicamos el método presentado en la Definición 2 para encontrarlos. Partimos de hallar la derivada y llegamos a que

$$A'(d) = \sqrt{2} - d \quad (13)$$

Igualamos la expresión a cero y despejando la variable d obtenemos que $d = \sqrt{2}$. Como la expresión A corresponde geoméricamente a una parábola que es concava hacia abajo,

determinamos que el punto crítico hallado es un máximo. Hallamos el área del rectángulo y concluimos que

$$A(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 1.$$

Observemos que el rectángulo de máxima área que se obtuvo tiene como medidas $\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}$, y un área de una unidad cuadrada. Es de resaltar que el resultado coincide con el obtenido en la Situación 1, entonces nos preguntamos ¿es el cuadrado de lado 1 y el rectángulo de lados $\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}$ las figuras de máxima área que pueden moverse en el interior de la región L ?

3.1.2. Resultados de la exploración y análisis

Para continuar con el desarrollo de la propuesta, enunciaremos algunos de los resultados que obtuvimos con base en la exploración y análisis realizado. El primer resultado se relaciona con el hallazgo de John Hammersly, con respecto a la primera cota superior que se estableció para la constante del sofá, la cual es $2\sqrt{2}$. Ésta se puede hallar con un problema de optimización.

Cota superior de John Hammersly

En la situación 1 construimos un rectángulo a partir de una recta l que pasaba por el origen, si nos damos a la tarea de hallar el segmento de máxima longitud que puede moverse a través de la región L y que este sobre la recta l , obtenemos la cota superior de Jhon Hammersly. Para probarlo debemos recordar la longitud de algunos segmentos (ver Figura 27), en particular

$$AO = \sec(\alpha) \quad \text{y} \quad OD = \csc(\alpha).$$

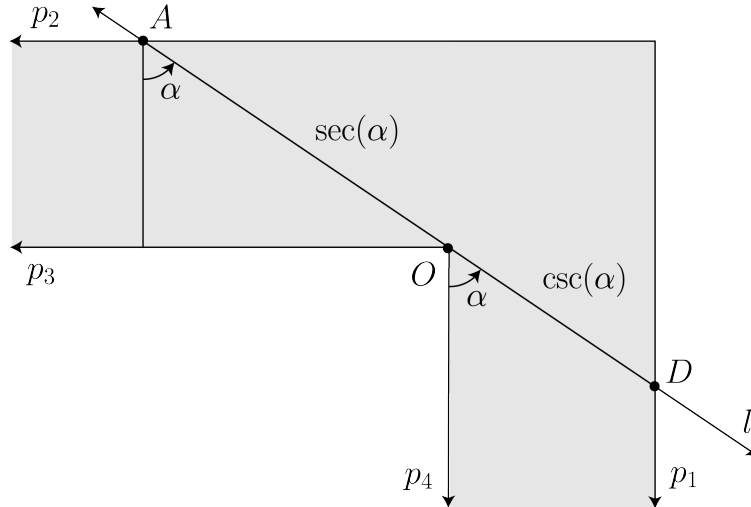


Figura 27

Longitud de AO y OD

Lo que pretendemos hacer ahora es hallar la longitud mínima del segmento AD cuando α varía entre $[0, \pi/2]$. La longitud del segmento está determinada por

$$AD = AO + OD = \sec(\alpha) + \csc(\alpha).$$

Aplicamos métodos de optimización para hallar el punto crítico, en este caso se busca un mínimo porque para valores de α cercanos a 0 o $\pi/2$ la longitud de AD incrementa en gran medida. Derivamos la expresión con respecto a α

$$(AD)' = \sec(\alpha) \tan(\alpha) - \csc(\alpha) \cot(\alpha).$$

igualamos a 0 la expresión y hallamos para que valores de α se cumple la igualdad

$$\sec(\alpha) \tan(\alpha) - \csc(\alpha) \cot(\alpha) = 0$$

dividimos a ambos lados de la igualdad por $\csc(\alpha) \cot(\alpha)$, y obtenemos que

$$\tan^3(\alpha) - 1 = 0$$

sumamos a ambos miembros 1, y llegamos a

$$\tan^3(\alpha) = 1,$$

aplicamos raíz cúbica a ambos miembros

$$\tan(\alpha) = 1$$

los valores de α que cumple la igualdad son

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como α está acotado en el intervalo $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ entonces $\alpha = \pi/4$. Por lo tanto la longitud máxima del segmento que puede moverse en la región L se halla evaluando tal valor de α en la expresión de la longitud del segmento AD . Entonces operamos y obtenemos la cota superior de Jhon Hammersly, que es

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Teorema $L_1 \cap L_2$

En la exploración observamos que cualquier figura que esté completamente contenida en la intersección entre las regiones L_1 y L_2 (que es un cuadrado de lado una unidad) cumple con lo establecido en la Definición 9, y por lo tanto puede moverse por el interior de la región L . En lo que sigue demostraremos este hecho que lo enunciamos en el teorema $L_1 \cap L_2$.

Teorema 5. $L_1 \cap L_2$

Dada una región A de \mathbb{R}^2 . Si existe $f_1 \in F$ tal que $f_1(A) \subseteq (L_1 \cap L_2)$ entonces A cumple con la Definición 9.

En resumen en la demostración, definiremos una transformación que trasladará la figura y comprobaremos por medio de algunas desigualdades que en el movimiento se cumple con las condiciones establecidas en la Definición 9.

Demostración

Sea A una figura de \mathbb{R}^2 y $y_M = b$ y $y_m = 0$ (por facilidad la escogemos con este valor particular) la componente en y máxima y mínima de $f_1(A)$ respectivamente. De igual forma sea $x_M = a$ y $x_m = 0$ la componente en x máxima y mínima de $f_1(A)$

respectivamente. Ahora ubiquemos el punto O de la región L en la coordenada $(0,0)$ (Figura 28).

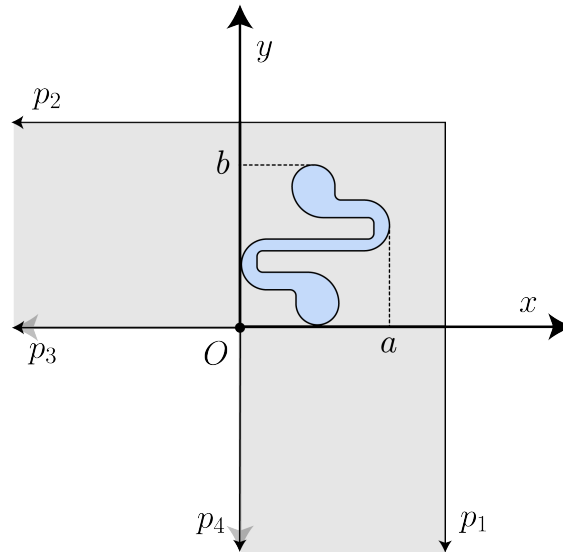


Figura 28

Punto O ubicado en la coordenada (x_m, y_m)

Definimos la siguiente función paramétrica que trasladará la figura

$$\phi(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -tb \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

Ahora comprobaremos que se cumplen las condiciones establecidas en la Definición 9, que son; la función $\phi(t)$ continua, para $t = 0$ entonces $f(A) \subset L_1$, para $t = 1$ entonces $f(A) \subset L_2$ y $\forall t \in (0,1)$ entonces $f(A) \subset L$. En primera instancia por como está definida la función $\phi(t)$ observamos que es continua. Ahora mostraremos que se cumplen las otras condiciones.

I) Si $t = 0$ entonces $f(A) \subset L_1$

Por hipótesis se tiene que $f_1(A) \subset L_1$ y $f_1(A) \subset L_2$ y como

$$\phi(0) = \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

obtenemos que $t = 0$ se relaciona con la imagen $f_1(A)$ que por hipótesis está contenida en L_1 .

II) Si $t = 1$ entonces $f(A) \subset L_2$

La función $\phi(1)$ traslada verticalmente la figura hacia abajo (tomando el plano cartesiano como referencia) (Figura 29).

$$\phi(1) = \begin{cases} x(1) = 0 \\ y(1) = -b \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

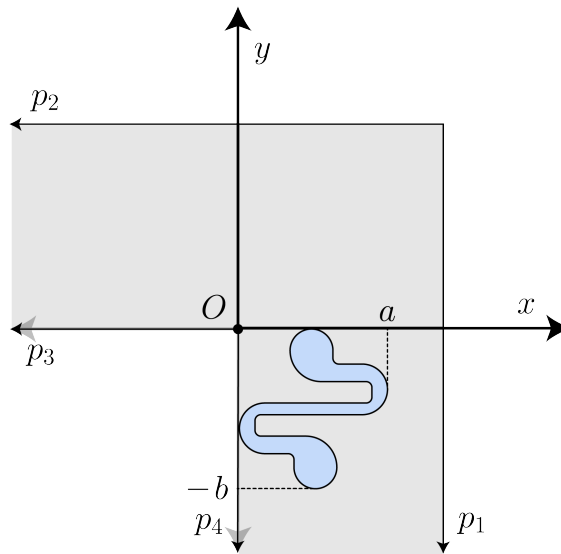


Figura 29

Traslación la figura cuando $t = 1$

Entonces se deduce que $y_M = 0$, $y_m = -b$, que son menores a la unidad

$$y_m < y_M < 1.$$

Al trasladarse únicamente de forma vertical la componente en x se mantiene

$$0 \leq x_m < x_M \leq 1,$$

y como

$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \leq 1\}$$

entonces podemos afirmar que $t = 1$ se relaciona con una imagen $f(A)$ que está contenida en L_2 .

III) $\forall t \in (0, 1)$ entonces $f(A) \subset L$

Tenemos que la traslación vertical esta dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -tb \end{cases} \quad t \in [0,1],$$

así los valores de y_m y y_M quedan como

$$y_M = b - tb \quad \text{y} \quad y_m = -tb.$$

Cuando $t = 0$ tenemos que la componente en y_M cumple que

$$0 < y_M \leq 1$$

que es equivalente a

$$0 < b \leq 1.$$

Si a esta última desigualdad le sumamos a cada uno de los miembros $-tb$ llegamos a

$$0 - tb < b - tb \leq 1 - tb.$$

De lo anterior, observamos que el primer miembro de la desigualdad es y_m y el segundo y_M . Además como $t \in [0, 1]$ se tiene $1 - tb \leq 1$, de donde se deduce

$$y_m < y_M \leq 1 - tb \leq 1.$$

Con respecto a la componente x como no se realiza ninguna traslación ésta no varía y se cumple que

$$0 \leq x_m < x_M \leq 1.$$

Recordemos que

$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \leq 1\}.$$

Considerando como se define L_2 y las desigualdades obtenidas podemos afirmar que $\forall t \in (0, 1)$ se cumple que $f(A) \subset L_2$ y por lo tanto $f(A) \subset L$.

Para finalizar esta sección, vale la pena mencionar que la propuesta “Curva en movimiento” que abordamos (particularmente para estudiar el problema de optimización en la familia de rectángulos) presenta algunas dificultades a la hora de estudiar el problema del

sofá en otras familias de figuras planas (v.g. rectángulos curvados, regiones limitadas por segmentos de rectas y circunferencias). Puntualmente, en exploraciones realizadas notamos complicaciones en la descripción del movimiento y en el manejo de las expresiones y cálculos, los cuales se volvían más extensos y complejos llegando al punto de tener que emplear otras técnicas, métodos y herramientas, algo similar ocurrió con el análisis del movimiento de otro tipo de figuras en el interior de la región L , en particular las que en su frontera tenían partes distintas a segmentos de recta.

En relación con lo anterior y tomando como base la estrategia utilizada por Michal Batsch en su documento (Batsch, 2022), en la que involucra el concepto de envolvente, planteamos la propuesta “Región en movimiento” con la que adoptamos una nueva perspectiva para solucionar el problema del sofá bajo determinadas condiciones.

3.2. Región en movimiento

Bajo éste enfoque lo que hacemos es mover la región L con respecto a una curva definida y acotada para hallar las curvas que se generan por los límites (que son las semirrectas p_1 , p_2 , p_3 y p_4) de la región L con el concepto de envolvente para determinar el área de la figura limitada por tales curvas.

Particularmente vamos a trabajar dos problemas, el primero (C2) consiste en mover la región L con respecto a un segmento y el segundo (C3) con respecto a una semicircunferencia.

3.2.1. Problema C2: Movimiento de la región L con respecto a un segmento

Dado un segmento s , ¿cuál debe ser la longitud de s para que el área de la figura determinada por las envolventes sea máxima?

Para abordar este problema partimos de definir unos cuantos elementos, la ubicación del segmento s , la transformación con la que moveremos la región L y las funciones $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$ (ver la Definición 10) que son necesarias para aplicar la transformación.

En primer lugar, ubicamos un extremo del segmento s en el origen de un plano cartesiano

y ubicamos el otro sobre la parte positiva del eje x , de esta forma la longitud del segmento s será un número real positivo k (Figura 30).

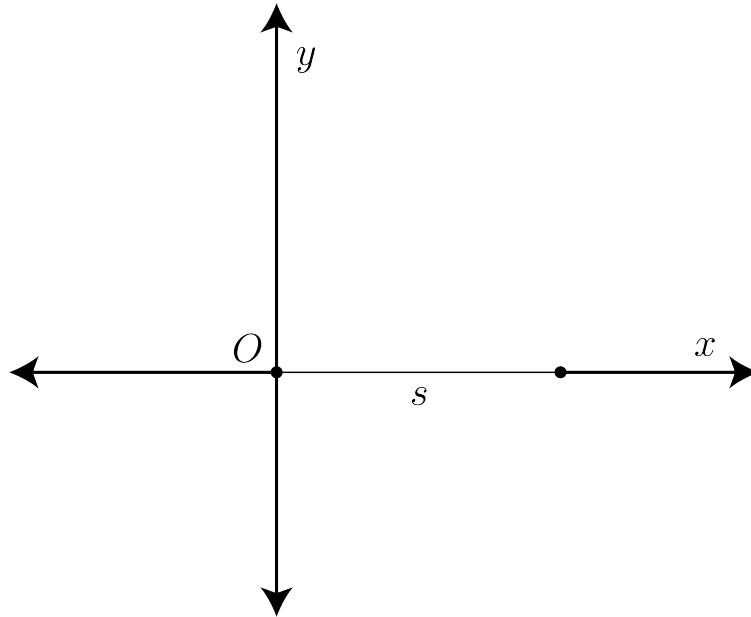


Figura 30

Construcción del segmento s cuya medida es k

Ahora, ubicamos la región L en el plano cartesiano con O en el origen del sistema (Figura 31) y determinamos la transformación que describirá su movimiento por medio de la ecuación 4.

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix}$$

donde

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2}t \quad \text{y} \quad M_x(t) = tk \quad \text{y} \quad M_y(t) = 0 \quad \text{con} \quad t \in [0, 1].$$

Es importante mencionar que la selección de las funciones $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$ se hizo con base en las características del segmento s , en particular la función $\theta(t)$ rotará la región L y las funciones $M_x(t)$ y $M_y(t)$ la trasladarán.

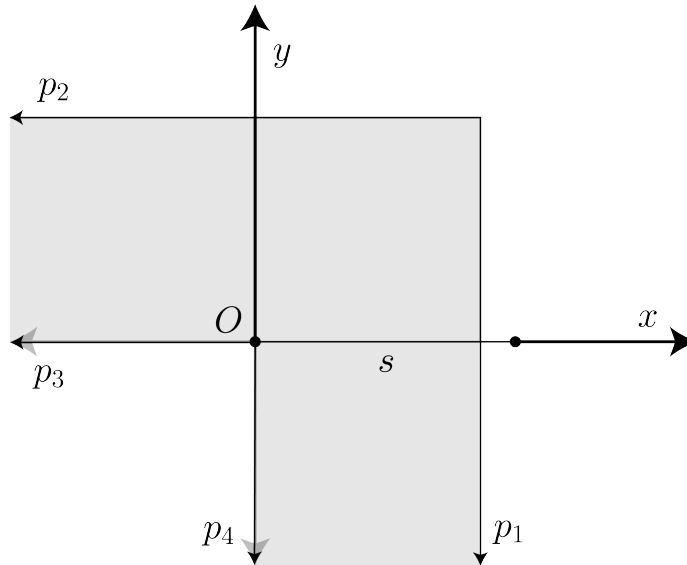


Figura 31

Región L y el segmento s en un plano cartesiano

Como resultado del movimiento, para $t = 1$, se logra rotar la región $\pi/2$ radianes de tal forma que se obtiene la imagen que se muestra en la Figura 32. Como se enunció en la Definición 10 y se comprobó en el [Anexo C](#) esta transformación es rígida, entonces las imágenes de rectas son rectas. Particularmente, analicemos como actúa la transformación T sobre las semirrectas p_1, p_2, p_3 y p_4 que determinan la región L .

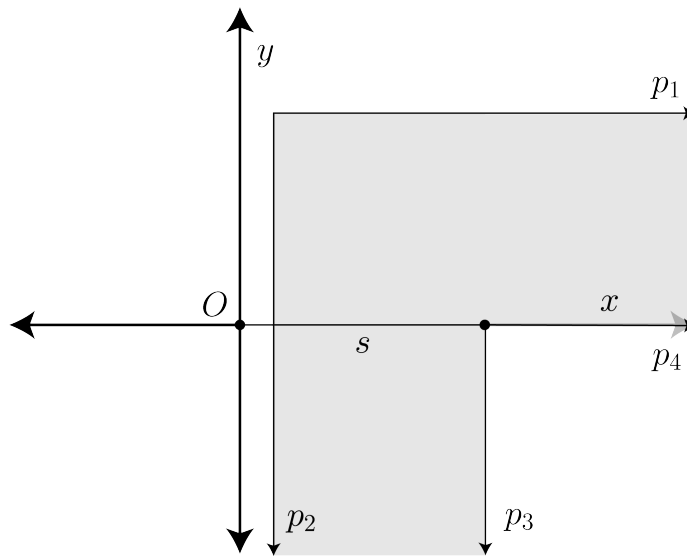


Figura 32

Imagen de la región L cuando $t = 1$

En primer lugar, al aplicar T a p_2 ($y = 1$) se obtiene

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tk \\ 0 \end{pmatrix}$$

así, en forma matricial, la ecuación de la imagen de p_2 corresponde a

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + tk \\ x \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

y al despejar x de una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra (ver el proceso en el [Anexo K](#)) obtenemos

$$y' = \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)x' - \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)tk + \sec\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Es importante analizar que si reemplazamos $t = 1$ en la ecuación explícita de p_2 ésta se indetermina, pero si evaluamos en la forma paramétrica resulta que se obtiene una semirrecta vertical de la forma $x = k - 1$ (semirrecta que no está definida cuando la variable independiente es x). Así, es importante considerar esa limitante de la ecuación explícita con respecto a la paramétrica.

De manera análoga, obtenemos las ecuaciones en forma paramétrica y explícita, de la transformación aplicada a las semirrectas p_1 , p_3 y p_4 . Para p_1 ($x = 1$) tenemos

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + tk \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

o de forma equivalente,

$$y' = -\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)x' + \cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)tk + \csc\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

para p_3 ($y = 0$) tenemos la expresión

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + tk \\ x \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

de donde surge

$$y' = \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)x' - \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)tk$$

y finalmente para p_4 ($x = 0$), llegamos a

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + tk \\ y \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

que es equivalente a

$$y' = -\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)x' + \cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)tk.$$

En la Figura 33 se muestra la región L transformada con $t = 0,6$, en donde

$$\theta(0,6) = \frac{\pi}{2}(0,6) = 54^\circ.$$

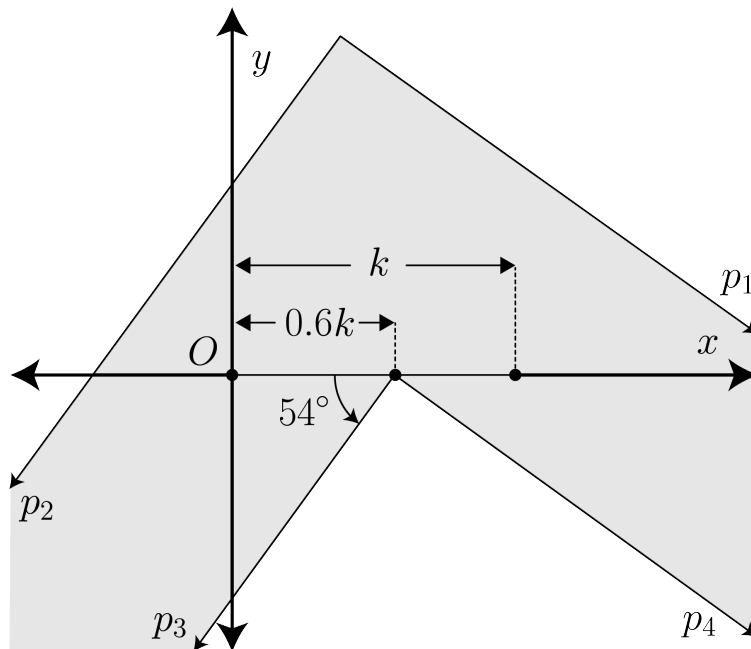


Figura 33

Imagen de la región L cuando $t = 0,6$

Envolventes generadas por el movimiento de L a partir del segmento s

El movimiento de las semirrectas p_1 , p_2 , p_3 y p_4 determinan un conjunto de curvas envolventes que delimitarán una figura, la que en teoría podría moverse en el interior de la región L . Así, tenemos que establecer quiénes son tales familias de curvas, sin embargo,

no es necesario hallar explícitamente todas las envolventes ya que podemos emplear ciertas relaciones para encontrar unas a partir de otras.

Para empezar, hallaremos la envolvente generada por la familia de imágenes de la semirrecta p_2 . Para ello empleamos el método establecido en la Definición 8. Entonces los puntos que definen la curva envolvente son aquellos que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F(t, x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} .$$

Así, en primer lugar calculamos la derivada parcial con respecto a t de p_2

$$\frac{\partial (p_2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) x - \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) tk + \sec \left(\frac{\pi}{2}t \right) \right)$$

aplicando propiedades de las derivadas parciales, obtenemos

$$\frac{\partial (p_2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) x - \frac{\partial}{\partial t} \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) tk + \frac{\partial}{\partial t} \sec \left(\frac{\pi}{2}t \right),$$

hallamos cada derivada parcial y llegamos a

$$\frac{\partial (p_2)}{\partial t} = x \sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2} - k \left(\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}t + \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \right) + \sec \left(\frac{\pi}{2}t \right) \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}.$$

Entonces el sistema de ecuaciones que describe la envolvente es

$$\begin{cases} x \sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2} - k \left(\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}t + \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \right) + \sec \left(\frac{\pi}{2}t \right) \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2} = 0 \\ \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) x - \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) tk + \sec \left(\frac{\pi}{2}t \right) - y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Para solucionar el sistema podemos despejar de la primera ecuación la variable x y reemplazarla en la otra. Así, procedemos a despejar x y obtenemos

$$x = \frac{k \left(\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}t + \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \right) - \sec \left(\frac{\pi}{2}t \right) \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}}{\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}}$$

o de forma equivalente

$$x = \frac{k \sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}t}{\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}} + \frac{k \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right)}{\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}} - \frac{\sec \left(\frac{\pi}{2}t \right) \tan \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}}{\sec^2 \left(\frac{\pi}{2}t \right) \frac{\pi}{2}}$$

y simplificando obtenemos que

$$x = tk + k \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

aplicando la identidad del seno del ángulo doble en el miembro derecho, concluimos que

$$x = tk + \frac{k}{\pi} \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Ahora, reemplazando lo hallado en la segunda ecuación del sistema, tenemos que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) \left(tk + \frac{k}{\pi} \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) - \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) tk + \sec\left(\frac{\pi}{2}t\right) - y = 0$$

expresando $\sin(\pi t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ en términos de seno y coseno llegamos a que

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \left(tk + \frac{k}{\pi} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} tk + \sec\left(\frac{\pi}{2}t\right) - y = 0$$

aplicando propiedad distributiva y simplificando obtenemos que

$$\frac{2k}{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} + \sec\left(\frac{\pi}{2}t\right) - y = 0$$

empleando la identidad $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1 - \cos(\pi t)}{2}$ y $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ concluimos que

$$\frac{2k}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(\pi t)}{2} \right) - \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} + \sec\left(\frac{\pi}{2}t\right) - y = 0$$

que es equivalente a

$$\frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - y = 0$$

finalmente despejamos y obtenemos

$$y = \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Con estas dos ecuaciones podemos determinar que la envolvente generada por el movimiento de p_2 , está dada por

$$E1(t) = \begin{cases} y = \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ x = tk + \frac{k}{\pi} \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

La Figura 34 se muestra la envolvente $E1$ cuando el segmento s tiene una longitud de 0,6.

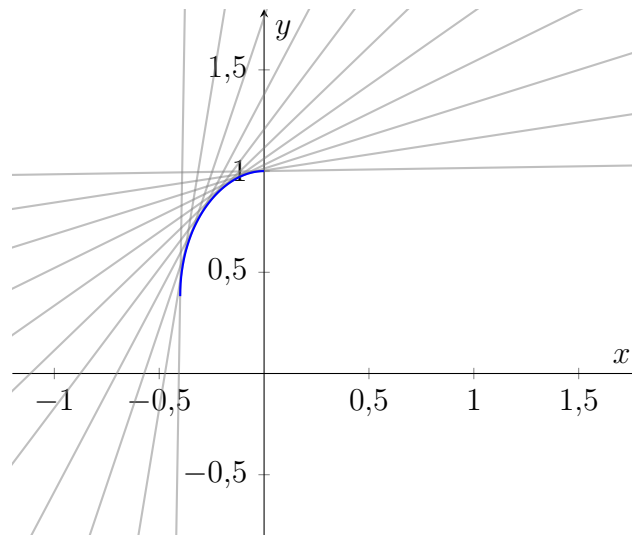


Figura 34

Envolvente generada por la familia de imágenes de la semirrecta p_2

Observemos que la envolvente generada por p_1 será simétrica a $E1$ con respecto a la recta $x = k/2$, que en el caso particular de $k = 0,6$ es $x = 0,3$. Las demás envolventes se hallarán de forma análoga siendo la curva formada por las semirrectas p_4 y p_3 el mismo segmento s . Observemos la Figura 35 en donde está la región L delimitada por las semirrectas de color naranja, la familia de curvas que están de color gris y las curvas envolventes que tienen un color azul. La figura que está delimitada por las curvas envolventes la nombraremos SF .

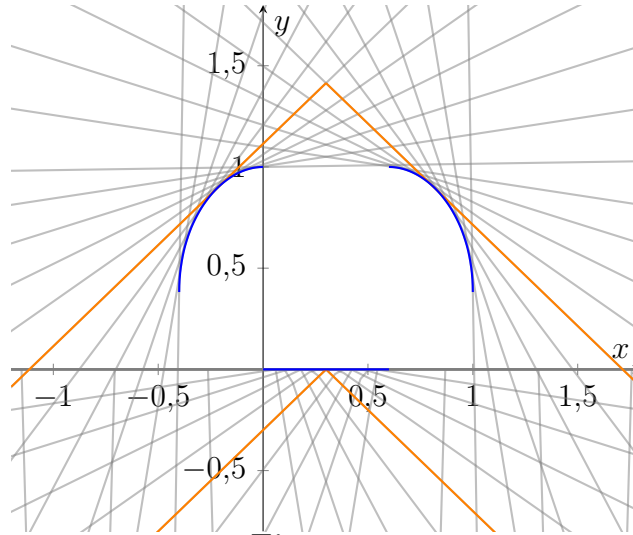


Figura 35

Envoltentes generadas por las imágenes de los límites de la región L cuando la longitud del segmento s es 0,6

Observemos que la forma de las curvas envolventes varía según la longitud del segmento s , y que inicialmente ($t = 0$) la figura está contenida en la región L_1 , entonces uno de sus lados tendrá una longitud máxima de una unidad. En la exploración que realizamos, cuando variamos el parámetro t entre cero y uno, nos percatamos de que para algunos valores de k la componente en y de $E1$ supera la unidad, impidiendo que la figura este totalmente contenida en el interior de la región L . Teniendo en cuenta lo anterior debemos acotar el intervalo de t para algunos valores de k .

Para ello, partimos de la igualdad relacionada con la componente en y de la envolvente $E1$, a saber

$$y = \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

y hallamos para qué valores de k la componente es mayor a una unidad

$$1 < \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

empleando la identidad $\cos(\pi t) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ reescribimos la expresión como

$$1 < \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

y utilizando la identidad $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ llegamos a

$$1 < \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} + \frac{2k}{\pi} \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

de donde obtenemos

$$0 < -\frac{2k}{\pi} \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1.$$

Al expresar el primer término del miembro derecho como una diferencia de cuadrados y luego factorizando la expresión resultante llegamos a

$$0 < \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1\right) \left(-\frac{2k}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1\right) + 1\right).$$

Para resolver esta desigualdad hallamos los ceros de cada factor. Para el primer factor, obtenemos que $t = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, y para el segundo

$$t = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right).$$

Observemos que la existencia de este último valor está condicionada a que se cumpla lo siguiente

$$\left| \frac{\pi}{2k} - 1 \right| \leq 1,$$

que se satisface cuando $k \geq \frac{\pi}{4}$.

Lo anterior nos indica que para $k \geq \pi/4$ la componente en y de la envolvente $E1$ tiene valores mayores a la unidad, y por lo tanto debemos acotar la variable t entre

$$\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2s} - 1 \right) \leq t \leq 1$$

y para $k < \pi/4$ el intervalo de t sigue siendo $0 \leq t \leq 1$.

Recapitulando lo que acabamos de hacer, primero definimos las curvas envolventes, después observamos que para algunos valores de k la componente en y de la curva $E1$ superaba la unidad, luego nos dimos a la tarea de determinar para qué valores de k ocurría eso. Hallamos que se daba cuando la longitud del segmento s era igual o superior a $\pi/4$,

entonces acotamos el intervalo del parámetro t , para asegurar que en todo momento la figura SF (recordemos que es la figura que estamos construyendo y que está conformada por las curvas envolventes) está totalmente contenida en la región L , por último determinamos que cuando la longitud del segmento s es menor a $\pi/4$, los lados están siempre contenidos en la región L para cualquier valor de t . En este orden de ideas analizamos el área de figura cuando la longitud de s es mayor o igual que $\pi/4$.

Longitud de s mayor o igual a $\pi/4$

La Figura 36 muestra la figura SF cuando la longitud del segmento s es 1. El área que determinan la curva $E1$ y la generada por p_2 están de color azul, llevan el mismo color porque son equivalentes, en este sentido podemos simplificar los cálculos considerando el doble de alguna de las dos; por otro lado, tenemos el área que está comprendida entre las de color azul, que es un rectángulo que tiene un color verde.

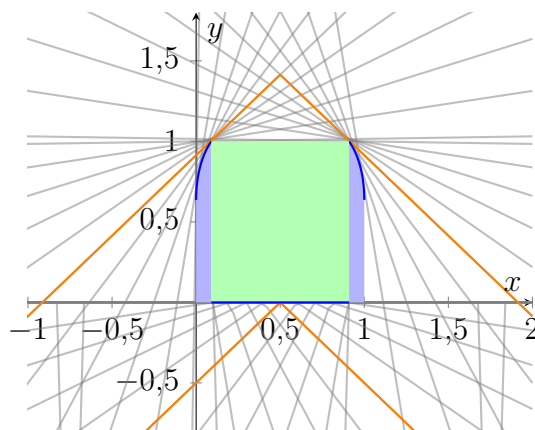


Figura 36

Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es 1

En primer lugar nos damos a la tarea de hallar el área de la región (en azul) delimitada por la envolvente $E1$ teniendo en cuenta el intervalo definido para t , que es

$$\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right) \leq t \leq 1; \tag{14}$$

para ello empleamos el Teorema 4 que nos permite hallar el área delimitada por una curva definida paramétricamente, obtenemos la siguiente integral

$$\text{Área} = A(k) = \int_{\frac{2}{\pi} \arccos^{-1}\left(\frac{\pi}{2k}-1\right)}^1 \frac{d}{dt} \left(tk + \frac{s}{\pi} \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \left(\frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) dt.$$

Como primer paso hallamos la derivada de la componente en x de la curva

$$\frac{d}{dt} \left(tk + \frac{k}{\pi} \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) = k + \frac{k}{\pi} \cos(\pi t)\pi - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\frac{\pi}{2} = k + k \cos(\pi t) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

ahora multiplicamos el resultado que acabamos de hallar por la componente en y de $E1$

$$\left(k + k \cos(\pi t) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \left(\frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right)$$

y simplificando obtenemos que

$$\frac{k^2}{\pi} + \frac{k}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{k^2}{\pi} \cos^2(\pi t) + \frac{3}{2}k \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos(\pi t) - \frac{\pi}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

aplicamos la integral

$$\int_{\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi}{2k}-1\right)}^1 \left[\frac{k^2}{\pi} + \frac{k}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{k^2}{\pi} \cos^2(\pi t) + \frac{3}{2}k \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos(\pi t) - \frac{\pi}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] dt$$

la cual da como resultado

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{\pi}t + \frac{k}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{k^2}{\pi} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi t) \right) + \frac{3}{2}k \left(\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{3\pi} \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) \right) \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) \right) \Bigg|_{\frac{k}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi}{2k}-1\right)}^1 \end{aligned}$$

evaluando los límites de integración y aplicando valor absoluto al resultado (se debe hacer esto debido a que el valor de la integral en algunas ocasiones es un número negativo) llegamos a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{k^2 + 4k}{2\pi} - \frac{\pi}{4} - \cos^{-1}\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right) \left(\frac{k^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{5k + 2}{2\pi} \right) \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k} + \frac{1}{6\pi k^3} (\pi(4k - \pi))^{\frac{3}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k} \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \left(\frac{2k^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right)^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} + \frac{1}{2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Ahora, para hallar el área de la región de color verde (ver Figura 36), que es un rectángulo, necesitamos saber cuál es la longitud de su base, para lo cual planteamos el siguiente razonamiento; observemos la Figura 37 en la que se presentan las curvas generadas por la transformación de los límites de la región L , en específico, centremonos en la curva de color azul que es la envolvente generada por las imágenes de la semirrecta p_2 ; los límites

de esta curva están definidos para el intervalo que hallamos para t en la expresión 14, a saber $t = 1$ y $t = w$ (w es uno de los límites del intervalo de parámetro t). Nos interesa la componente en x del punto $E1(w)$ que en el gráfico es v , ya que esta distancia nos permitirá hallar la longitud de la base del rectángulo, en este sentido, si aprovechamos la simetría que hay entre $E1$ y la curva generada por p_2 , determinamos que la base del rectángulo es $k - 2v$, siendo v la componente en x del punto $E1(w)$.

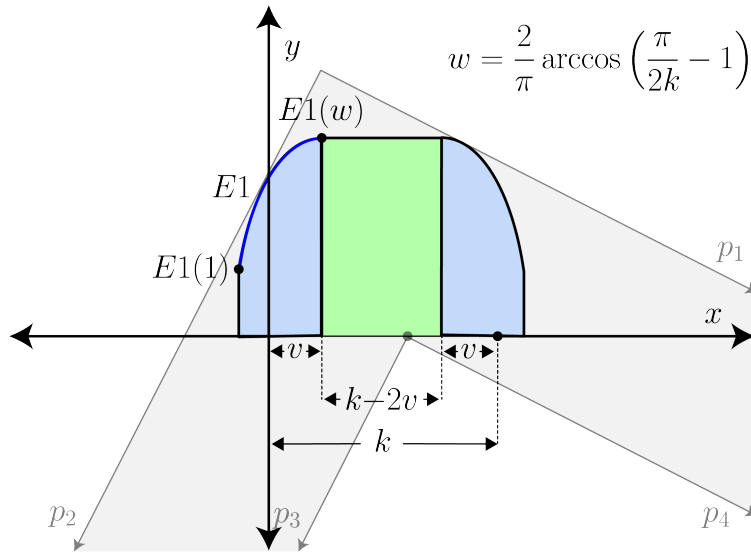


Figura 37

Áreas de la figura SF y sus relaciones con las curvas

En ese orden de ideas procedemos a hallar el valor de v de la siguiente forma; evaluamos $t = w$ en la componente en x de $E1$

$$v = x(w) = k \left(\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) + \frac{k}{\pi} \sin \left(\pi \left(\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) \right). \quad (15)$$

de donde (ver el proceso en el [Anexo L](#))

$$v = \frac{2k}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi(4k - \pi)}.$$

Ahora hallamos la longitud de la base del rectángulo

$$k - 2v = k - 2 \left(\frac{2k}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi(4k - \pi)} \right)$$

o de forma equivalente

$$k - 2v = k - \frac{4k}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) - \frac{2}{\pi} \sqrt{4\pi k - \pi^2}.$$

De esta forma, el área de la región generada por el movimiento de L queda determinada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \text{Área : } A(k) &= k - \frac{4k}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) - \frac{2}{\pi} \sqrt{4\pi k - \pi^2} \\ &+ 2 \left| \frac{k^2 + 4k}{2\pi} - \frac{\pi}{4} - \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \left(\frac{k^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5k + 2}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k} + \frac{1}{6\pi k^3} (\pi(4k - \pi))^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k} \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \left(\frac{2k^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right)^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} + \frac{1}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

Optimización

Si quisieramos optimizar esta función, la ecuación resultante de la derivada sería compleja, probablemente en el proceso tengamos que emplear métodos numéricos y algoritmos de computarizados para hallar el valor óptimo de k . Sin embargo, en esta ocasión lo haremos de forma gráfica, observando el área de las figuras SF que se obtienen cuando la longitud del segmento s es mayor o igual a $\pi/4$.

Observemos la Figura 38 y Figura 39.

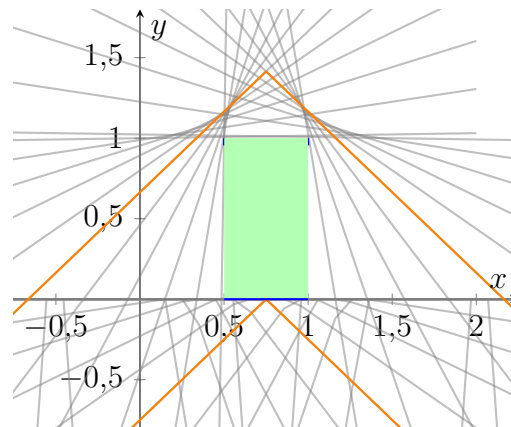


Figura 38

Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es 1,5

En la Figura 39 se puede observar que las curvas azules que son las envolventes están posicionadas de una forma particular, y sabemos que la figura está limitada por la recta

$y = 1$, en este sentido esas curvas se ignoran en el cálculo del área y no hace parte de la figura SF (esto de igual manera se analizó cuando acotamos la variable t para algunos valores de k).

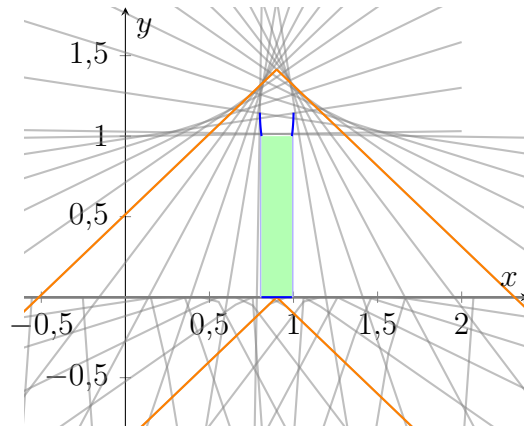


Figura 39

Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es 1,8

Entre más grande sea la longitud del segmento s , el área de la figura se reduce, con lo que podemos asumir que el área máxima se obtiene cuando k tiene el menor valor posible, en este caso $k = \pi/4$. Entonces hallamos el área de la figura para ese valor.

$$\begin{aligned}
 A\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 1\right) - \frac{2}{\pi} \sqrt{4\pi\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi^2} + 2 \left| \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi} - \frac{\pi}{4} \right. \\
 &- \arccos\left(\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 1\right) \left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{\pi\left(4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi\right)}}{2\pi} + \frac{1}{6\pi\left(\frac{\pi}{4}\right)^3} \left(\pi\left(4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi\right) \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{\pi\left(4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi\right)}}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 1 \right) \left(\frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 1 \right)^2 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{2} \right) \right|
 \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos que el área es $A(\pi/4) \approx 1,1598$ unidades cuadradas. Hasta ahora sabemos que el área máxima es superior a 1, pero aún nos falta estudiar la situación cuando la longitud del segmento s es menor a $\pi/4$.

Longitud de s menor a $\pi/4$

En la Figura 40 se muestra la figura SF cuando la longitud del segmento s es 0,4.

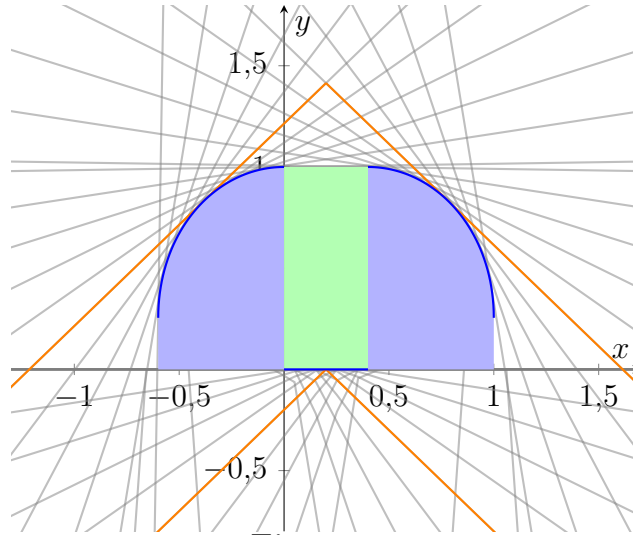


Figura 40

Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es 0,4

Dado que para este caso no debemos acotar la variable t , entonces hallamos el área que comprende la envolvente $E1$ con 0 y 1 ($0 \leq t \leq 1$) como los límites de integración. Así, el área queda expresada como

$$\int_0^1 \left[\frac{k^2}{\pi} + \frac{k}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{k^2}{\pi} \cos^2(\pi t) + \frac{3}{2}k \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos(\pi t) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] dt$$

que es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{\pi}t + \frac{k}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{k^2}{\pi} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi t) \right) + \frac{3}{2}k \left(\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{3\pi} \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) \right) \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

evaluamos los límites de integración y obtenemos que el área de la región azul es (consideramos el valor absoluto ya que para algunos valores de k el valor de la integral es un número negativo)

$$2 \left| \frac{k^2}{2\pi} + 2\frac{k}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right|.$$

La figura que encierra el área de color verde es un rectángulo, en donde coinciden la longitud de la base y del segmento s , con lo que el área de la región de color verde es $1(k) = k$. Hecho lo anterior ahora estamos en la capacidad de construir la expresión que describe el

área, que esta dada por

$$\text{Área : } A(k) = k + 2 \left| \frac{k^2}{2\pi} + 2\frac{k}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right|$$

Debido a que el argumento del valor absoluto da valores menores que cero para el intervalo que estamos analizando, consideramos el valor negativo, con lo que obtenemos

$$A(k) = k - 2 \left(\frac{k^2}{2\pi} + 2\frac{k}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right)$$

que es equivalente a

$$A(k) = -\frac{k^2}{\pi} + \left(1 - \frac{4}{\pi}\right)k - \frac{1}{2}\pi.$$

Optimización

Para conocer cuál longitud del segmento s maximiza el área de la figura SF , aplicamos métodos de optimización, teniendo en cuenta que la variable k está entre

$$0 \leq k < \pi/4,$$

como la expresión A es un polinomio podemos asegurar en virtud del Teorema 1 que existe un mínimo y máximo en el conjunto en el que estamos trabajando. Aplicamos el método establecido en la Definición 2. En primer lugar derivamos la expresión con respecto a k

$$A'(k) = -\frac{2k}{\pi} + 1 - \frac{4}{\pi}$$

igualamos a 0 y despejamos la variable k

$$0 = -\frac{2k}{\pi} + 1 - \frac{4}{\pi}$$

de donde

$$k = \frac{\pi}{2} - 2 \approx -0,429,$$

sin embargo, este valor de k no está en el intervalo en el que estamos trabajando, por lo tanto evaluamos la expresión en el límite de éste, que es $k = 0$

$$A(0) = -\frac{0^2}{\pi} + \left(1 - \frac{4}{\pi}\right)0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que la figura SF de área máxima se obtiene cuando la longitud del segmento s es igual a 0 y ésta equivale a $\pi/2$. Si pensamos en el movimiento que hace la región L para ese valor de k nos percatamos de que únicamente rota en torno a el punto O (Figura 41).

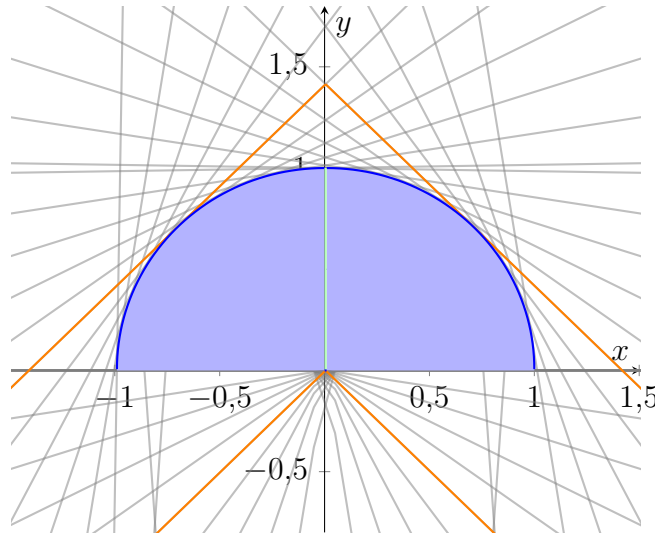


Figura 41

Figura SF generada cuando la longitud del segmento s es 0,01

Observando la Figura 41 podemos conjeturar que algunas de las envolventes son arcos de circunferencia, empleamos la ecuación paramétrica de $E1$ para comprobarlo.

Recordemos que la envolvente $E1$ esta definida de la siguiente forma

$$E1(t) = \begin{cases} y = \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ x = tk + \frac{k}{\pi} \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

el valor de k en el que se obtiene la figura de área máxima es $k = 0$, entonces la ecuación de $E1$ queda como

$$E1(t) = \begin{cases} y = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ x = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

y esta expresión describe paramétricamente una semicircunferencia, pues

$$\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^2 = 1$$

y de una manera equivalente

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1.$$

Con lo anterior comprobamos que la figura SF corresponde a un semicírculo que tiene un radio de una unidad.

3.2.2. Problema C3: Movimiento de la región L con respecto a un arco de circunferencia

En la sección anterior movimos la región L tomando como base un segmento de recta sobre el eje x . Ahora podemos pensar en mover la región partiendo de una curva diferente. Particularmente, en esta sección analizaremos el movimiento de la región L con respecto a una semicircunferencia y determinaremos la figura de máxima área que se genera a partir de las envolventes, variando datos como el radio. El problema lo enunciamos de la siguiente manera.

Dada una semicircunferencia C con un radio cualquiera r . ¿Qué valor debe tomar r para que el área de la figura conformada por las envolventes sea máxima?

Para poder abordar este problema ubiquemos convenientemente el centro de la semicircunferencia C en el origen de un plano cartesiano (Figura 42).

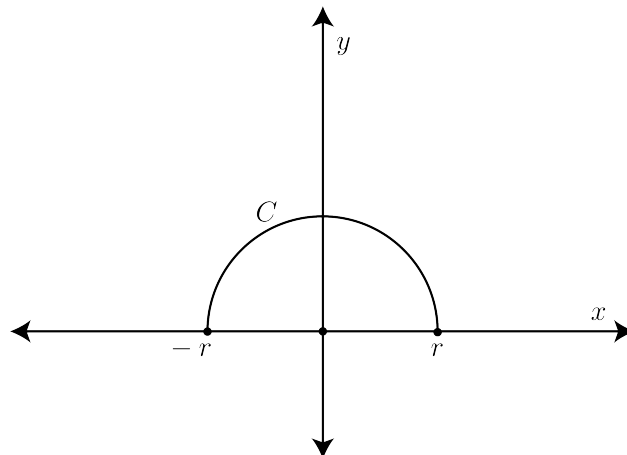


Figura 42

Semicircunferencia C en el origen de un plano cartesiano

La ecuación que describe a C está dada por

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Ahora ubicamos la región L en el plano cartesiano con O en el punto $(r, 0)$ (Figura 43) y determinamos la transformación que describirá su movimiento por medio de la ecuación 4 establecida en la Definición 10, a saber

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix}$$

donde

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin^{-1}(2t-1) \quad \text{y} \quad M_x(t) = -r(2t-1) \quad \text{y} \quad M_y(t) = r\sqrt{1 - (2t-1)^2} \quad \text{con} \quad t \in [0, 1].$$

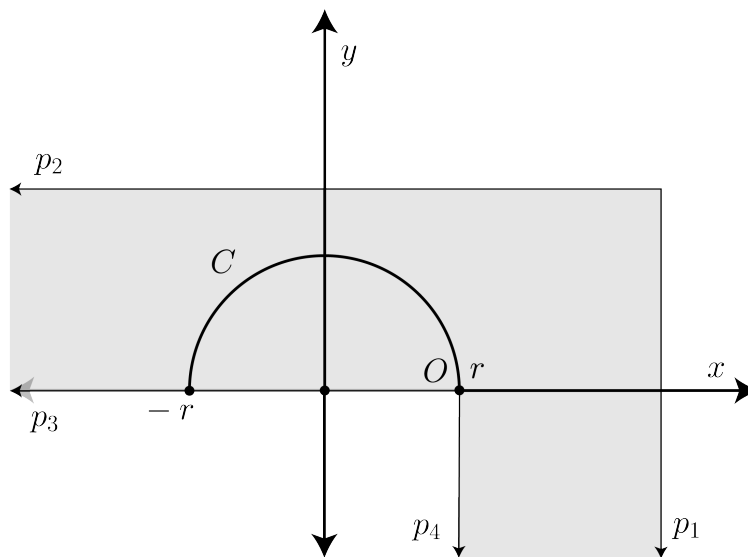


Figura 43

Transformación de la región L con respecto a C con $t = 0$

Esta transformación la definimos de tal forma que al concluir el movimiento, es decir cuando $t = 1$, la imagen de la región L determina una rotación de $\pi/2$ con respecto a la original (Figura 44). Es de resaltar que la función $\theta(t)$ la construimos garantizando que durante todo el movimiento las semirrectas p_3 y p_4 contengan respectivamente a los puntos $(-r, 0)$ y $(r, 0)$, esto se logró por medio de una relación entre la longitud de curva de la

semicircunferencia C y la posición del punto O . En cuanto a las funciones de traslación $M_x(t)$ y $M_y(t)$ se construyeron con base en las coordenadas del punto O (ver el proceso en el Anexo M) (ver Figura 45).

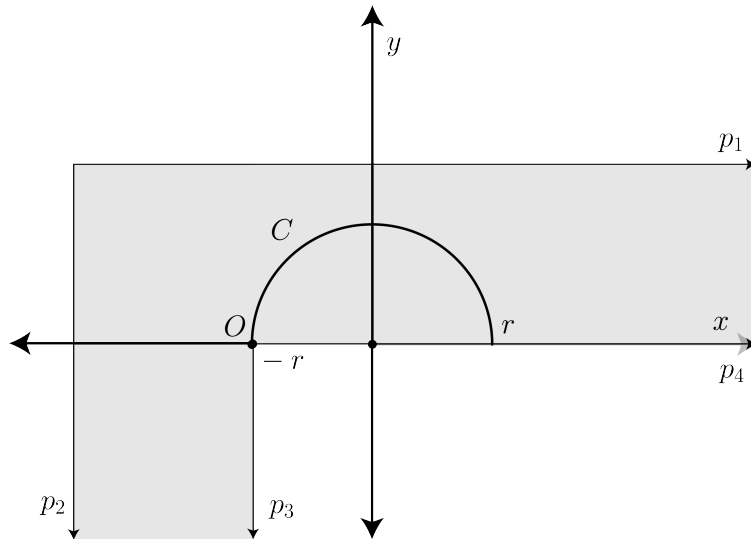


Figura 44

Transformación de la región L con respecto a C con $t = 1$

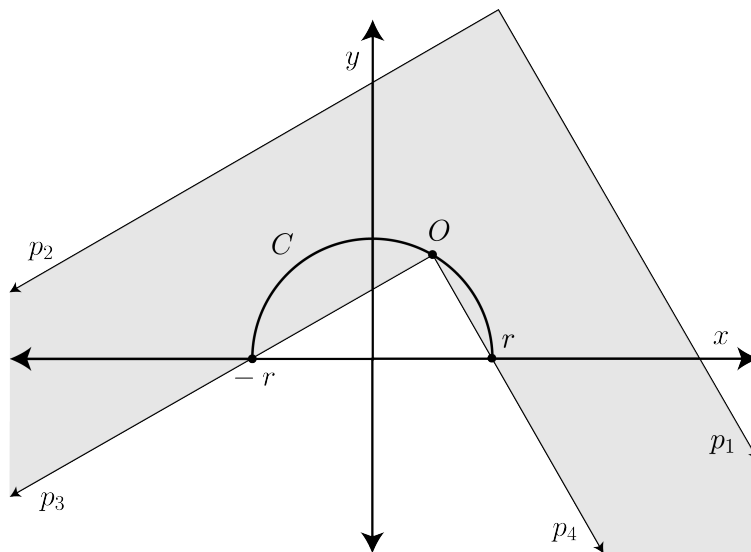


Figura 45

Transformación de la región L con respecto a C con $t = 0,3$

En lo que sigue, manejaremos las expresiones de las funciones $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$ con su nombre para no generar ecuaciones extensas. Cuando sea necesario, tales funciones se

reemplazarán por su respectivo valor. Así, veamos como actua la transformación sobre las semirrectas p_1, p_2, p_3 y p_4 .

En un primer momento hallamos la transformación de la semirrecta p_2 ($y = 1$), que esta dada por

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta(t)) - \sin(\theta(t)) + M_x(t) \\ x \sin(\theta(t)) + \cos(\theta(t)) + M_y(t) \end{pmatrix}$$

y al despejar x de una de las ecuaciones y remplazarla en la otra obtenemos (ver el proceso en el [Anexo N](#))

$$y' = x' \tan(\theta(t)) + \sin(\theta(t)) \tan(\theta(t)) - \tan(\theta(t))M_x(t) + \cos(\theta(t)) + M_y(t).$$

De manera análoga, obtenemos las ecuaciones en forma paramétrica y explícita, de la transformación aplicada a las semirrectas p_1, p_3 y p_4 . Para p_1 ($x = 1$) tenemos

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) - y \sin(\theta(t)) + M_x(t) \\ \sin(\theta(t)) + y \cos(\theta(t)) + M_y(t) \end{pmatrix}$$

o de forma equivalente

$$y' = -x' \cot(\theta(t)) + \cos(\theta(t)) \cot(\theta(t)) + \cot(\theta(t))M_x(t) + \sin(\theta(t)) + M_y(t),$$

para p_3 ($y = 0$) tenemos la expresión

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta(t)) + M_x(t) \\ x \sin(\theta(t)) + M_y(t) \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$y' = x' \tan(\theta(t)) - \tan(\theta(t))M_x(t) + M_y(t)$$

y finalmente para p_4 ($x = 0$), llegamos a

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \sin(\theta(t)) + M_x(t) \\ y \cos(\theta(t)) + M_y(t) \end{pmatrix}$$

que es equivalente a

$$y' = -x' \cot(\theta(t)) + \cot(\theta(t))M_x(t) + M_y(t).$$

Envolventes generadas por el movimiento de la región L con respecto a la semicircunferencia C

El movimiento de las semirrectas genera una familia de curvas que a su vez delimitan unas curvas envolventes que hacen parte de la figura que en teoría pasa a través de la región L . Como en el problema anterior no hace falta hallarlas todas, ya que podemos emplear ciertas relaciones de simetría que nos permiten hallar unas a partir de otras.

Para comenzar hallamos la envolvente generada por la familia de curvas de la semirrecta p_2 . Para lograrlo empleamos el método establecido en la Definición 8. En ese orden de ideas, los puntos que definen la curva, son aquellos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F(t, x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}.$$

Así, en primer lugar hallamos la derivada parcial con respecto a t de p_2 , es decir

$$\frac{\partial (p_2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (x \tan(\theta(t)) + \sin(\theta(t)) \tan(\theta(t)) - \tan(\theta(t))M_x(t) + \cos(\theta(t)) + M_y(t))$$

y llegamos a que

$$\frac{\partial (p_2)}{\partial t} = x \sec^2(\theta(t))\theta'(t) + \sin(\theta(t)) \sec^2(\theta(t))\theta'(t) - \sec^2(\theta)M_x(t)\theta'(t) - \tan(\theta(t))M'_x(t) + M'_y(t).$$

Entonces el sistema de ecuaciones que describe la curva envolvente es

$$\begin{cases} x \sec^2(\theta(t))\theta'(t) + \sin(\theta(t)) \sec^2(\theta(t))\theta'(t) - \sec^2(\theta)M_x(t)\theta'(t) - \tan(\theta(t))M'_x(t) + M'_y(t) = 0 \\ x \tan(\theta(t)) + \sin(\theta(t)) \tan(\theta(t)) - \tan(\theta(t))M_x(t) + \cos(\theta(t)) + M_y(t) - y = 0 \end{cases}$$

con $t \in [0, 1]$.

Para solucionar el sistema podemos despejar de una de las ecuaciones la variable x y reemplazarla en la otra. Así, obtenemos

$$x = -\sin(\theta(t)) + M_x(t) + \frac{\sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\theta'(t)} M_x(t) - \frac{\cos^2(\theta(t))}{\theta'(t)} M_y(t),$$

y reemplazando lo hallado en la segunda ecuación del sistema llegamos a

$$y = \cos(\theta(t)) + M_y(t) - \frac{\sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\theta'(t)} M_y(t) + \frac{\sin^2(\theta(t))}{\theta'(t)} M_x(t).$$

Con estas dos ecuaciones determinamos que la envolvente generada por las imágenes de la semirrecta p_2 esta dada por

$$E1(t) = \begin{cases} y = \cos(\theta(t)) + M_y(t) - \frac{\sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\theta'(t)} M_y(t) + \frac{\sin^2(\theta(t))}{\theta'(t)} M_x(t) \\ x = -\sin(\theta(t)) + M_x(t) + \frac{\sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\theta'(t)} M_x(t) - \frac{\cos^2(\theta(t))}{\theta'(t)} M_y(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

La siguiente Figura 46 muestra la curva $E1$ cuando $r = 0,5$.

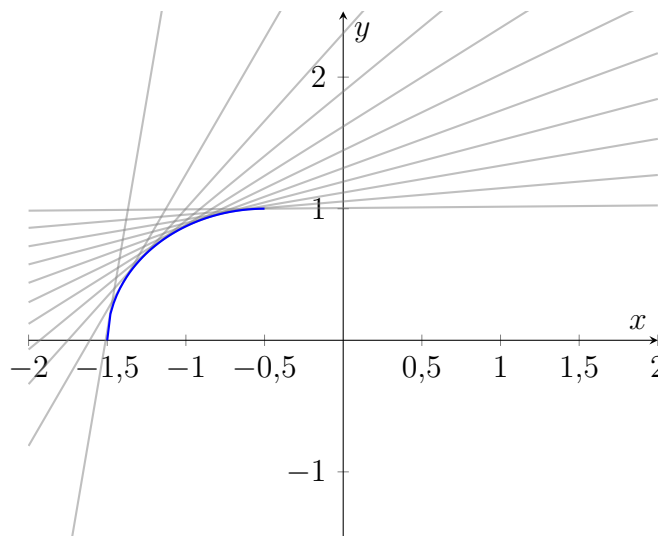


Figura 46

Curva generada por la familia de envolventes de la semirrecta p_2

Por su parte, la envolvente generada por las imágenes de la recta p_1 será simétrica a $E1$ con respecto a la recta $x = 0$. Las demás envolventes se hallarán de forma análoga, siendo la formada por las imágenes de p_4 y p_3 la misma semicircunferencia C . Observemos la Figura 47 en la que presentamos la imagen de la región L cuando $t = 0,5$, donde de color naranja están representadas las imágenes de las semirrectas que conforman la región L , de color gris las familias de curvas generadas y de color azul las envolventes. De forma análoga a lo hecho en el problema anterior nombraremos con las letras SF a la figura demilitada por las envolventes.

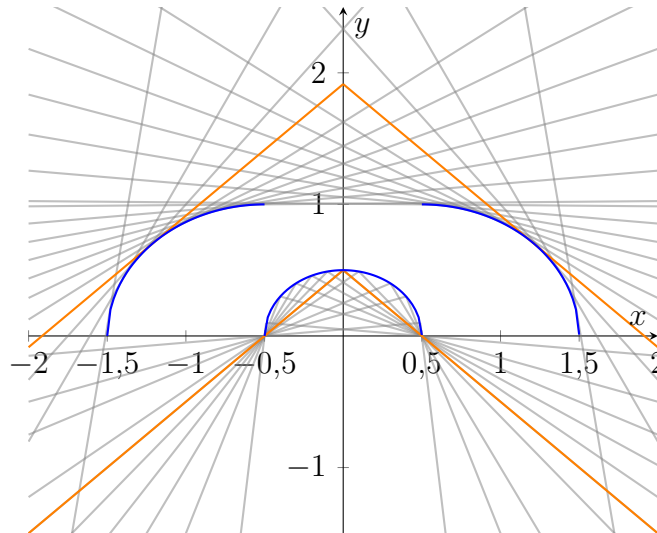


Figura 47

Figura SF generada cuando $r = 0,5$

Teniendo como base la descripción de las curvas que limitan la figura, vamos a determinar los límites de integración para calcular su área. Aunque podemos calcular tal área empleando métodos paramétricos (como se realizó en el problema C2), en este caso la descripción de las curvas que delimitan la región permite calcular el área de la misma empleando integrales usuales.

Observando la Figura 47 conjeturamos que las envolventes $E1$ y su simétrica son arcos de circunferencia, para comprobarlo operamos las componentes en x y y de las envolventes con las funciones definidas para $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$, para la envolvente $E1$ obtenemos que

$$E1(t) = \begin{cases} y = \sqrt{1-t} \\ x = -\sqrt{t} - r \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

y si despejamos el parámetro t de alguna de las ecuaciones y lo reemplazamos en la otra, llegamos a

$$y^2 + (x + r)^2 = 1.$$

Ecuación que corresponde a una circunferencia de radio una unidad con centro en el punto $(0, -r)$. Pero, como lo mencionamos, las envolventes son arcos de circunferencia, entonces debemos saber para cuál intervalo de x esta definida la ecuación, esto lo haremos

empleando el intervalo definido para t y la componente en x de la ecuación paramétrica. Así, para $t = 1$ llegamos a

$$x = -\sqrt{1} - r$$

que es igual a

$$x = -1 - r$$

y para $t = 0$

$$x = -\sqrt{0} - r$$

que es equivalente a $x = -r$.

Y la curva $E1$ queda definida como

$$y^2 + (x + r)^2 = 1 \quad \text{con } x \in [-1 - r, -r].$$

Con base en lo anterior estamos ahora en capacidad de hallar el área de la figura SF . Observemos la Figura 48, en ésta presentamos de color azul el área de la región que delimitan las envolventes $E1$ y su simétrica, y de color verde el área de la región comprendida entre la recta $y = 1$ y la semicircunferencia C . Recordemos que por la simetría descrita podemos simplificar los cálculos considerando el doble del área que encierra la curva $E1$.

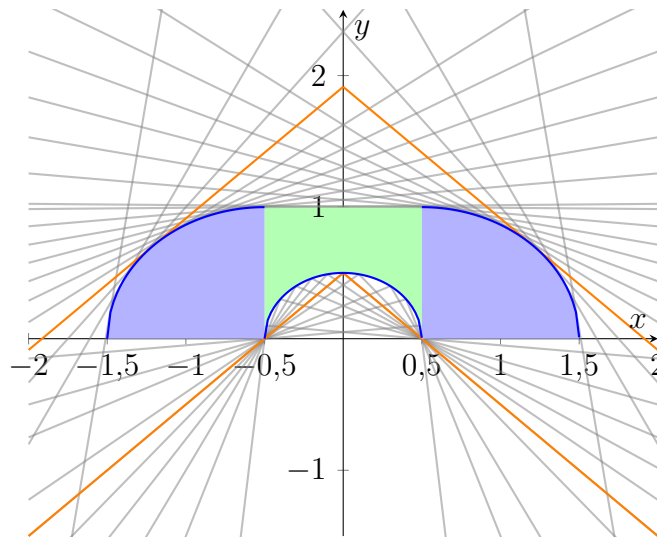


Figura 48

Áreas de la figura SF generada cuando $r = 0,5$

Tomando como referencia lo planteado, establecemos que el área de la figura SF esta dada por

$$\text{Área : } A(r) = 2r - \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx + 2 \int_{-1-r}^{-r} \sqrt{1 - (x+r)^2} dx.$$

El término $2r$ corresponde al área del rectángulo que circunscribe el área verde y que tiene una altura de una unidad y una base de $2r$ unidades, y la primera integral es el área que determina la semicircunferencia C que se le resta el área de tal rectángulo, por último se suma el doble del área determinada por la envolvente $E1$. Sin embargo, ya que comprobamos que algunas curvas corresponden a arcos de circunferencia podemos evitar el cálculo de las integrales y en su lugar emplear la ecuación que nos permite hallar el área de un círculo (Área : $A = \pi r^2$) y tomar la parte que se necesite, en el caso de la primera integral tomamos la mitad y en el caso de la segunda tomamos la cuarta parte. Entonces determinamos que

$$A = 2r - \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi}{2}$$

y reorganizando la expresión, obtenemos que

$$A(r) = -\frac{\pi r^2}{2} + 2r + \frac{\pi}{2}.$$

Optimización

Antes de aplicar cualquier método de optimización a la expresión del área, aseguremonos de que existen valores extremos en el intervalo en el que estamos trabajando. La función A es un polinomio y por ende una función continua, por lo tanto afirmamos en virtud del Teorema 1 que existe un mínimo y máximo. Aplicamos el método establecido en la Definición 2. Como primer paso derivando la expresión con respecto a r , llegamos a

$$A'(r) = -\pi r + 2$$

igualamos a cero la expresión y determinamos que hay un punto crítico en $r = 2/\pi$, la función al ser un polinomio de segundo grado, que describe una parábola, que es concava hacia abajo tiene un máximo, entonces establecemos que el valor de r corresponde con un

máximo. Ahora hallamos el área, de la siguiente manera

$$A\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{\pi}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 + 4}{2\pi} \approx 2,2074.$$

Si comparamos las medidas que describen el sofá de Jhon Hammersly (ver el sofá en el Anexo A) con las que se acaban de obtener, nos percatamos de que son las mismas. Así, entonces acabamos de describir una forma de hallar el sofá de Jhon Hammersly empleando una traslación y rotación particular (Figura 49).

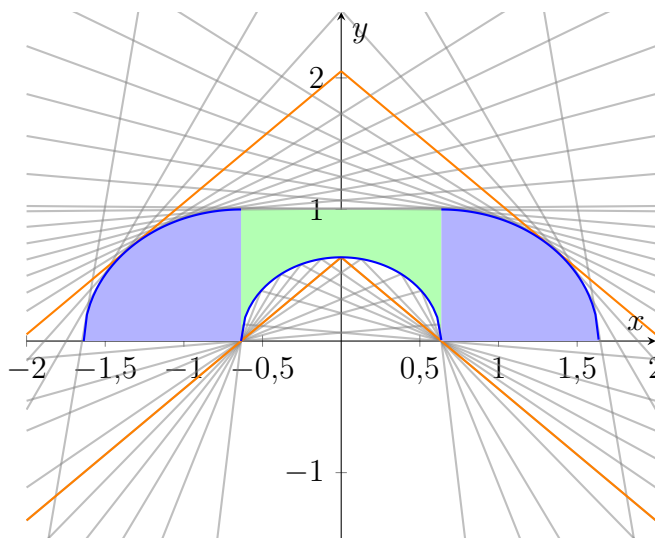


Figura 49

Figura SF de máxima área que soluciona el problema C3, con $r = 2/\pi$

3.3. Reflexiones finales

Recapitemos lo que acabamos de hacer en la propuesta de “Curva en movimiento” y “Región en movimiento”. En la primera logramos hallar dos sofás con forma rectangular que en teoría pueden moverse por el interior de la región L , estos cuentan con la misma área pero con diferentes medidas. Ahora podemos preguntarnos, ¿son estos dos rectángulos los de máxima área que pueden moverse en el interior de la región L ? Por otro lado, pensemos en una variante del problema, por ejemplo abordando otras familias de figuras como triángulos, pentágonos, elipses o combinaciones entre éstas y nos podemos preguntar, ¿cuáles serán las medidas que determinan la figura de máxima área que puede moverse por el interior de la región L ?

En cuanto a la segunda propuesta logramos hallar dos sofás (determinados por las curvas envolventes) que en teoría pueden moverse por el interior de la región L , uno cuando la región se mueve con respecto a un segmento, y el otro cuando se mueve con respecto a una semicircunferencia, con una rotación y traslación particulares. Si quisieramos variar el problema, observemos que los elementos que podemos modificar en son varios, entre ellos, la curva con respecto a la cual se movera la región L , la función $\theta(t)$ (que determina el ángulo de rotación) y la misma forma de la región.

Por ejemplo, pensemos en el problema que surge de modificar el primer elemento, que es variar la curva con respecto a la cual se movera la región L . En un estudio derivado del problema podemos plantear lo siguiente: Supongamos que tenemos una función $\theta(t)$ fija (por ejemplo $\theta(t) = \pi t/2$), y la curva con respecto a la que se va a mover la región L es un segmento de parábola (u otra curva simple del plano), y nos preguntamos, ¿qué características debe tener la curva para qué la figura conformada por las curvas envolventes tenga la máxima área posible?

Los problemas derivados no paran ahí, pensemos ahora en el segundo elemento, en el que centramos la atención sobre la función $\theta(t)$ y en específico pretendemos modificar la forma en la que cambia el ángulo a lo largo del movimiento, siempre que para $t = 1$ la imagen de la región L halla rotado $\pi/2$ radianes con respecto a la original. Entonces podemos preguntarnos, ¿cuál función $\theta(t)$ permite hallar la figura de máxima área al mover la región L a partir de una curva dada?

Ahora pensemos en el tercer elemento, en el que se propone como región un pasillo curvado. En particular nosotros proponemos tres regiones, y nos preguntamos en todas ellas, ¿cuál es la figura de máxima área que puede moverse por la región?

1- En la primera los límites de la región son dos semirrectas y dos semicircunferencias (Figura 51).

2- En la segunda los límites de la región son dos parábolas, en particular $y_1 = -0,5x^2 + 1$ y $y_2 = -x^2$ (Figura 51).

3- En la tercera los límites de la región son las curvas $y_1 = \text{sen}(x) + 1$ y $y_2 = \text{sen}(x)$

(Figura 52).

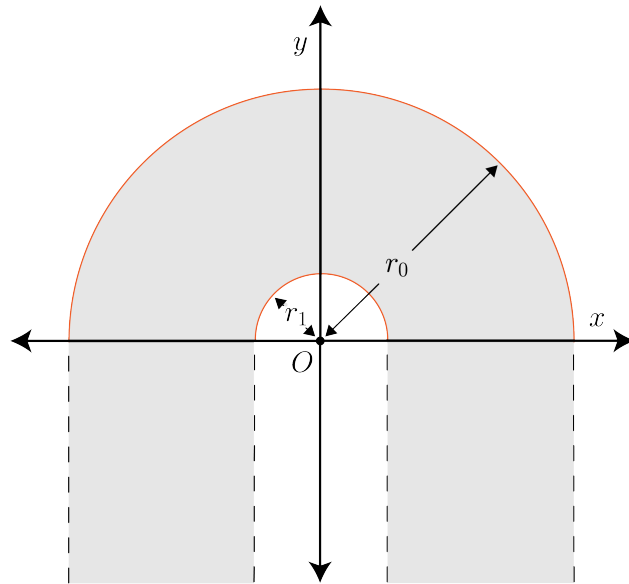


Figura 50

Primera variante de la región, empleando semicircunferencias

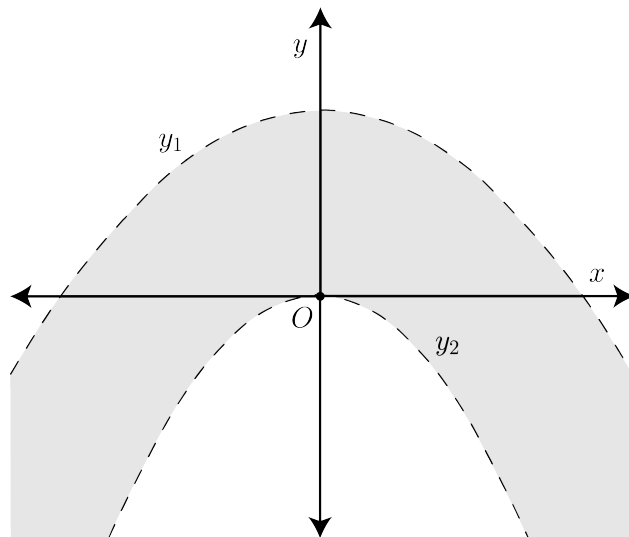


Figura 51

Segunda variante de la región, empleando parábolas

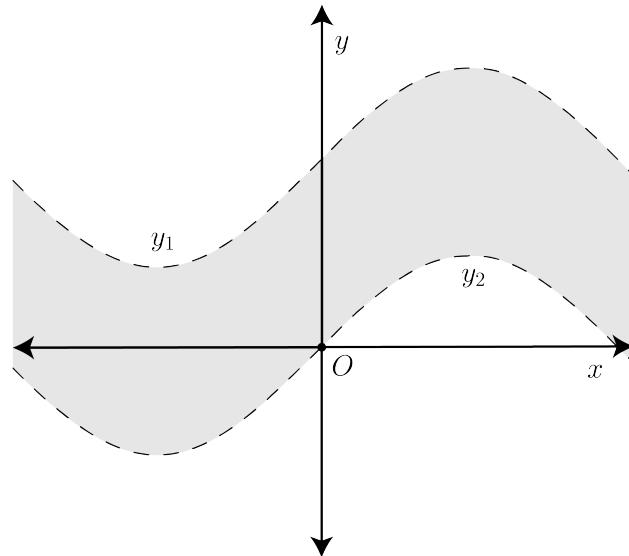


Figura 52

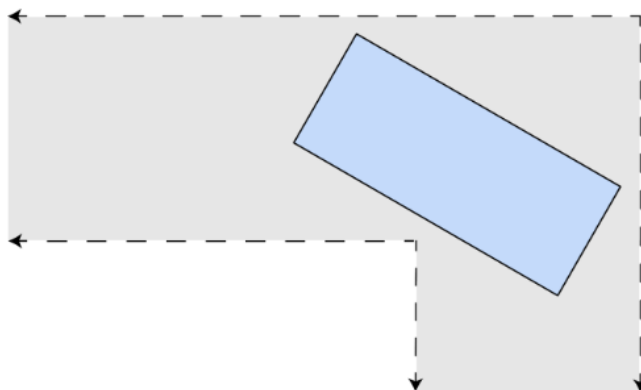
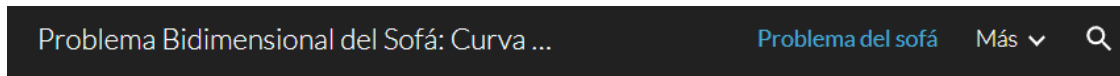
Tercera variante de la región, empleando la función trigonométrica seno

3.4. Estructura del sitio web

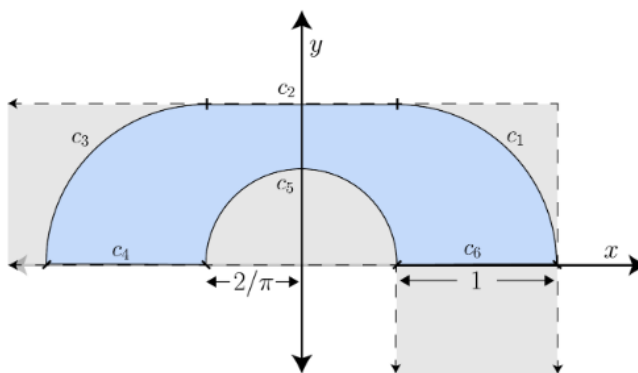
En este último apartado describiremos, grosso modo, la estructura de la página web en la que mostramos el problema del sofá junto con algunas de las estrategias y recursos que utilizamos en el desarrollo del trabajo para abordar los problemas propuestos. La página esta dividida en tres pestañas, a saber, “Problema del sofá”, “Curva en movimiento” y “Región en movimiento”. Se puede acceder a la página por medio del link: [Problema Bidimensional del Sofá: Curva y Región en Movimiento](#).

Es importante mencionar que cada recurso que mostramos en la página lo empleamos como una herramienta para modelar, visualizar y analizar posibles soluciones al problema particular; sin embargo, nuestro propósito no consiste en compartir los recursos y describir allí los resultados logrados, sino en proponer un escenario en donde los recursos estén acompañados de algunas de las preguntas que nos hicimos y permitieron el desarrollo de las propuestas.

En la pestaña “Problema del sofá” damos un breve contexto del problema del sofá y además enunciamos los avances y resultados obtenidos por la comunidad académica hasta el momento (Figura 53).



Uno de los primeros en abordar el problema fue John Hammersly, quien en 1968 encontró una solución al estudiar un sofá con una forma similar a un auricular de un teléfono fijo (es la parte que se sostiene para hablar y escuchar durante una llamada), que tiene un área aproximada de 2.2074 unidades cuadradas.



ⓘ

Figura 53

Una parte de la sección “Problema del sofá” de la página web

En la pestaña de “Curva en movimiento” enunciamos el problema C1 y mostramos varios recursos; unas imágenes, unos videos y unas construcciones en GeoGebra, en particular éstos últimos se utilizaron en el desarrollo de la propuesta y nos permitieron explorar y evidenciar algunos de los resultados, tales construcciones están diseñadas para que el usuario pueda interactuar con ellas y hacer un ejercicio similar al que hicimos en el tratamiento de los problemas, esto lo acompañamos por medio de algunas preguntas que creemos lo llevarán

a la solución del problema de una forma intuitiva (Figura 54).

☰ Problema Bidimensional del Sofá: Curva y R... 🔍

En este caso los extremos de uno de los lados del rectángulo pertenecen a dos o uno de los límites de la región.

Mueve el punto T sobre la semirrecta.

Área: 0.96

$s = 1.2$

Altura = 0.8

Modifica las medidas del rectángulo por medio de los deslizadores. Si la medida s es igual a 1 y la altura es igual a 0.5 ¿la figura puede moverse en el interior de la región L? ¿Qué área tiene? Haz el mismo ejercicio con s igual a 1.7 y altura 0.6.

Explora con varias medidas y conjetura acerca de las medidas que nos permiten hallar el rectángulo de mayor área, ¿cuáles son esas medidas? ¿qué área tiene el rectángulo?

i

Figura 54

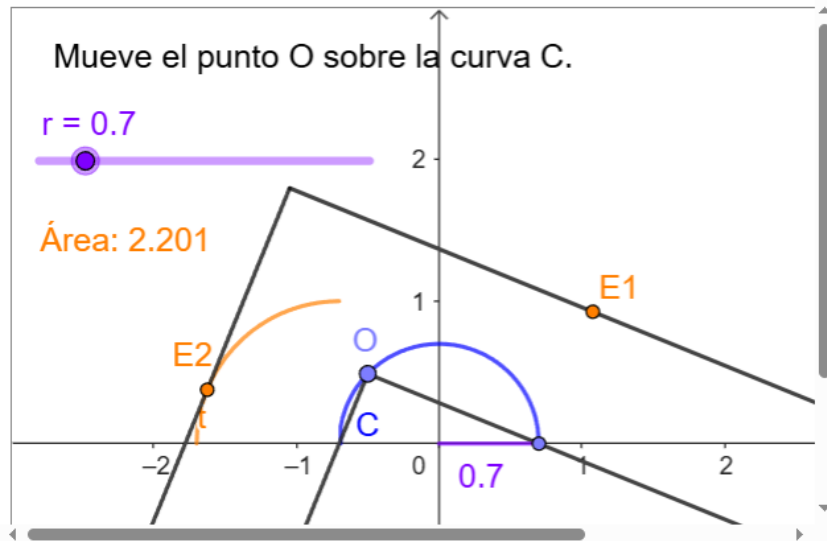
Una parte de la sección “Curva en movimiento” de la página web

En la pestaña de “Región en movimiento” al igual que en la anterior enunciamos los problemas C2 y C3 y presentamos las construcciones diseñadas en GeoGebra junto con algunas de las preguntas que nos hicimos en el desarrollo de los problemas planteados (Figura 55).

☰ Problema Bidimensional del Sofá: Curva y ... 🔍

Ahora pensemos en que ocurre si cambias la curva a partir de la cual se va a mover la región L, en particular planteamos el siguiente problema. Dada media circunferencia C con un radio cualquiera r . ¿Qué valor debe tomar r para que el área de la figura conformada por las envolventes sea máxima?

Observemos la siguiente construcción.



En esta construcción podemos hacer variar el radio de la circunferencia por medio de un deslizador. Si el radio es igual a 1, ¿cuánto vale el área de la figura? Explora con varios valores del radio la forma de la figura y su área y conjetura cuál puede ser la figura de mayor área que puede moverse por el interior de la región L.

Figura 55

Una parte de la sección “Región en movimiento” de la página web

4. Conclusiones

En este apartado describimos algunas de las conclusiones que hemos obtenido como fruto del desarrollo de este trabajo. Particularmente, las organizamos en tres categorías, a saber: El conocimiento matemático, las herramientas tecnológicas y los aportes a la formación como profesor de matemáticas. En paralelo relataremos los resultados que obtuvimos en el trabajo y además mencionaremos las herramientas que empleamos para el desarrollo del mismo.

Conocimiento matemático

Con respecto a esta categoría identificamos dos propuestas para abordar los problemas planteado. En primer lugar, surgió de manera natural la propuesta “Curva en movimiento” en la que nos enfocamos en estudiar el movimiento de una figura en el interior de la región L . Para ello, partimos de definir qué significa que una figura se pueda mover en el interior de L (Definición 9 “Movimiento de una figura de L_1 a L_2 ”) y abordamos el problema de determinar el rectángulo de mayor área posible que puede moverse en L (problema C1). Al respecto, logramos concluir que hay dos rectángulos de área máxima, uno de ellos es un cuadrado de lado uno y el otro un rectángulo con lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}/2$, sin embargo el problema queda abierto porque no logramos establecer ninguna prueba de que estos fueran los rectángulos de máxima área o los únicos de área una unidad cuadrada que pueden moverse por el interior de la región L .

En segundo lugar, dada la complejidad de la propuesta “Curva en movimiento” para estudiar el movimiento de figuras cuya frontera fueran curvas, surgió (tomando como base la estrategia utilizada por Michal Batsch) la propuesta “Región en movimiento”, en la que en lugar de mover la figura en la región L , se mueve la región L para establecer la forma de la figura que en teoría podría moverse en el interior de la región L . De manera análoga a lo hecho con la primera propuesta, se partió de definir el movimiento de L con base en una transformación (Definición 10 “Movimiento de la región L ”) y observamos que al mover la región L con respecto a un segmento (problema C2), para luego definir las curvas envolventes

y optimizar, llegamos a que la figura de máxima área posible que puede moverse en el interior de L es un semicírculo de radio una unidad, por otro lado, cuando movimos la región L con respecto a una semicircunferencia (problema C3) se evidenció que la figura de máxima área que puede moverse en el interior de L es el sofá propuesto por el matemático Jhon Hammersly en 1968.

Por otro lado, en el proceso de exploración de las dos propuestas, contemplamos la opción de modificar elementos de los problemas, en particular hicimos preguntas que llevan a explorar otras familias de figuras planas y variantes del problema (modificar la forma de la región o las funciones descritas en la transformación), lo cual se constituye en insumos para futuros trabajos.

En la mitad del capítulo 3 enunciamos algunos de los resultados que observamos en la propuesta de “Curva en movimiento”, y que obtuvimos a raíz de la exploración y conjeturación, en particular, comprobamos que por medio de un problema de optimización se puede obtener la cota superior propuesta por Jhon Hammersly (1968), y que toda figura que pertenezca a la intersección entre las regiones L_1 y L_2 puede moverse por la región L (cumpliendo con las condiciones establecidas en la Definición 9 “Movimiento de una figura de L_1 a L_2 ”).

Finalmente observamos que para el análisis de las dos propuestas se utilizaron elementos del cálculo diferencial básico en coordenadas cartesianas, polares y en formas paramétricas, además de algunos elementos de la geometría que permitieron, por un lado profundizar en las propuestas y por otro revisar tales conceptos, con el objetivo de sustentar y soportar los resultados que presentamos.

Herramientas tecnológicas

Con respecto a las herramientas utilizadas en el desarrollo del trabajo, destacamos las que tuvieron relación con la exploración, redacción, representación y difusión del trabajo. Por un lado, en la exploración empleamos el software de GeoGebra, el cual nos ayudó a conjeturar, construir y comprobar de forma numérica y geométrica algunos de los resultados

que obtuvimos en los tres problemas.

En la redacción empleamos el editor de texto TeXworks que incluye Latex. Este nos permitió, entre otras muchas cosas, dar un mismo formato a las diferentes ecuaciones, representar algunas de las figuras (esto por medio de los paquetes TikZ y pgfplots que ofrece Latex) y organizar y modificar el documento en general.

En la representación de la mayoría de las figuras utilizamos el software Illustrator, con el cual buscamos manejar un diseño homogéneo y uniforme. Por otro lado, con respecto a la difusión del trabajo, utilizamos Google Sites para crear una página web en la que describimos brevemente en que consiste el problema del sofá y en la que presentamos algunas de las construcciones que utilizamos en los procesos de exploración, además, las acompañamos con algunas preguntas que nos formulamos en el marco del desarrollo del trabajo.

Aportes a la formación como profesor de matemáticas

Acerca de los aportes formativos que me brindó este estudio, se relacionan las habilidades investigativas que se vinculan con la búsqueda y estudio de antecedentes en fuentes especializadas sobre los avances y resultados que se han obtenido hasta el momento en el problema del sofá, de igual forma aquellas que se relacionan con la construcción de un marco de referencia, para lo cual fue necesario estudiar y profundizar a nivel conceptual el uso de herramientas matemáticas apropiadas, tomando como fuente textos formales de cálculo y geometría que permitieran fundamentar los resultados.

Por otro lado, se hizo una consulta sobre el uso de algunas aplicaciones digitales que sirvieran para organizar, crear recursos y dar formato al documento. Se realizó un primer acercamiento al uso de Latex como editor de textos científicos, se fortalecieron competencias en el uso de GeoGebra e Illustrator para realizar construcciones geométricas y manejar las imágenes que allí se pueden crear, por otro lado, se logró un aprendizaje inicial sobre el uso de Google Sites para publicar y difundir información.

En relación con mi formación matemática, fue necesario revisar y consolidar conocimientos sobre definiciones y teoremas que permitieran justificar los constructos elaborados.

Además, observar cómo las matemáticas pueden ser empleadas para analizar modelos de problemas reales y conocer una de las posibles aproximaciones que se puede realizar a un problema de este tipo.

En relación con mi formación como docente de matemáticas, tuve la oportunidad de construir una propuesta de estudio (del tema en cuestión) en la que las ideas se concatenaran, fueran coherentes y logaran exhibir un propósito. Además, el desarrollo del trabajo me permitió observar que una parte fundamental en el estudio de un tema consiste en establecer de forma clara y contextualizada preguntas que promuevan el desarrollo conceptual y el cumplimiento de los objetivos. Finalmente, la construcción conceptual propuesta permitió recordar e identificar nuevos significados asociados a los objetos de estudio que no se limitan a los algoritmos establecidos, sino que permiten una mayor comprensión del tema.

Referencias

- Baek, J. (2024). Optimality of Gerver's Sofa. <https://arxiv.org/abs/2411.19826v1>.
- Batsch, M. (2022). A Numerical Approach for Analysing the Moving Sofa Problem. *Symmetry*, 14(7).
- Bruce, J. W., & Giblin, P. J. (1992). *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. Cambridge University Press.
- Gibbs, P. (2014). A computational study of sofas and cars. *Computer Science*, 2, 1-5.
- Herman, E., Strang, G., Radulovich, W., Rutter, E. A., Smith, D., Messer, K. R., & McCune, D. (2016). *Calculus Volume 2*. OpenStax.
- Kallus, Y., & Romik, D. (2018). Improved upper bounds in the moving sofa problem. *Advances in Mathematics*, 340, 960-982.
- Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica* (R. García Díaz, Trad.) [Obra original publicada como *Analytic Geometry*]. Editorial Limusa.
- Marsden, J. E., Tromba, A. J., & Mateos, M. L. (1991). *Cálculo vectorial* (Vol. 1). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Romik, D. (2018). Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem. *Experimental Mathematics*, 27(3), 316-330. <https://doi.org/10.1080/10586458.2017.1325781>
- Song, N. (2016). A Variational Approach to the Moving Sofa Problem. *arXiv preprint*.
- Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal* (2.^a ed.). Reverté.
- Wagner, N. R. (1976). The sofa problem. *The American Mathematical Monthly*, 83(3), 188-189.

Anexo A

Sofá de Jhon Hammersly

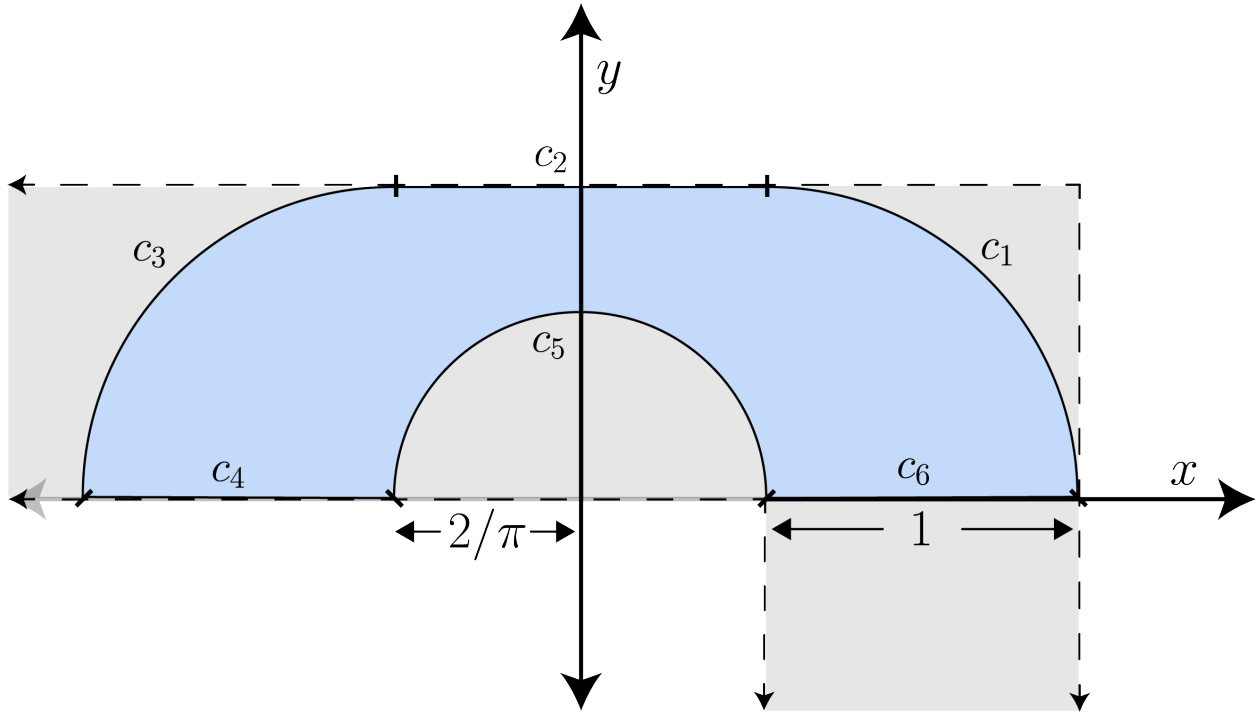


Figura A1

Sofá propuesto por Jhon Hammersly en 1968.

En la Figura A1 podemos observar el sofá de Jhon Hammersly (región de color azul), y la región L (color gris) que contiene al sofá. Para esta ubicación que tiene el sofá en el plano cartesiano, su frontera se compone de seis curvas, que son:

$$c_1 : y = \sqrt{1 - \left(x - \frac{2}{\pi}\right)^2} : \frac{2}{\pi} \leq x \leq \frac{2}{\pi} + 1$$

$$c_2 : y = 1 : |x| < \frac{2}{\pi}$$

$$c_3 : y = \sqrt{1 - \left(x + \frac{2}{\pi}\right)^2} : -\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \leq x \leq -\frac{2}{\pi}$$

$$c_4 : y = 0 : -\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) < x < -\frac{2}{\pi}$$

$$c_5 : y = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - x^2} : |x| \leq \frac{2}{\pi}$$

$$c_6 : y = 0 : \frac{2}{\pi} < x < 1 + \frac{2}{\pi}$$

Analizamos las curvas a partir de sus expresiones algebraicas y podemos afirmar que c_1 , c_3 y c_5 corresponden a arcos de circunferencia, y las restantes a segmentos de rectas constantes.

Anexo B

Semicírculo de máxima área que puede trasladarse en la región L

Existen varias formas de abordar este problema, en este documento optamos por emplear el Teorema 5 ($L_1 \cap L_2$) que demostramos en el Capítulo 3. El razonamiento que utilizaremos se resume en que vamos a construir una circunferencia C de radio r de tal forma que la semirrecta p_1 y la recta $y = 0$ sean tangentes a C . Luego utilizaremos algunas intersecciones entre C y los límites de la región L para garantizar que el semicírculo que construiremos a partir de C este contenido en la subregión $L_1 \cap L_2$ (que es un cuadrado de lado una unidad). Finalmente aplicaremos el Teorema 5 para afirmar que el semicírculo puede moverse por la región L .

Partimos de ubicar la región L en un plano cartesiano con el punto O en el origen. Luego trazamos la recta $y = -x + 1$, sobre ésta consideraremos un punto T que será el centro de la circunferencia C con la cual construiremos el semicírculo. La distancia entre el punto T y la semirrecta p_1 será el radio de la circunferencia C . Podemos observar que por construcción la semirrecta p_1 y la recta $y = 0$ son tangentes a C (Figura B1).

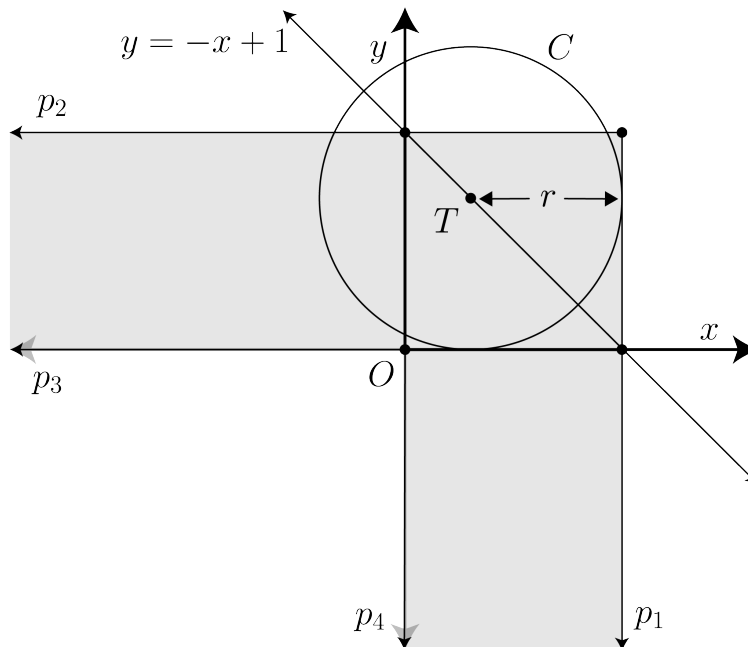


Figura B1

Circunferencia C tangente a la semirrecta p_1 y la recta $y = 0$

Con base en la representación deducimos que las coordenadas de T son $(1 - r, r)$ y que la ecuación de la circunferencia C esta dada por

$$(x - (1 - r))^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Ahora hallaremos las intersecciones de C con la semirrecta p_2 ($y = 1$), para ubicar uno de los extremos del diámetro del semicírculo sobre p_2 . De la ecuación anterior, restando a ambos miembros de la igualdad $(1 - r)^2$ obtenemos

$$(x - (1 - r))^2 = r^2 - (1 - r)^2$$

ahora aplicamos raíz cuadrada y concluimos que

$$x - (1 - r) = \pm \sqrt{r^2 - (1 - r)^2}$$

y sumando $(1 - r)$ tenemos que

$$x = \pm \sqrt{r^2 - (1 - r)^2} + (1 - r)$$

por último desarrollamos el argumento del radical, lo simplificamos y llegamos a

$$x = \pm \sqrt{2r - 1} + (1 - r).$$

El valor que genera la intersección de interés es el que esta dado por la raíz positiva. Debemos aclarar que la existencia de estos puntos esta condicionada a que

$$2r - 1 \geq 0,$$

si hallamos para que valores de r se satisface la desigualdad obtenemos que

$$r \geq \frac{1}{2}.$$

Sabemos que si $r \geq 1/2$ entonces C interseca a p_2 en un punto I_1 que tiene como abscisa $\sqrt{2r - 1} + (1 - r)$. Ahora lo que buscamos es que el diámetro del semicírculo este contenido en $L_1 \cap L_2$, para lograr esto primero tomamos como uno de sus extremos el punto

I_1 , luego trazamos una recta l que pasa por el punto T y el punto I_1 . Podemos emplear la simetría con respecto al punto T (el centro de la circunferencia C) de las intersecciones entre l y C para hallar el punto I_2 .

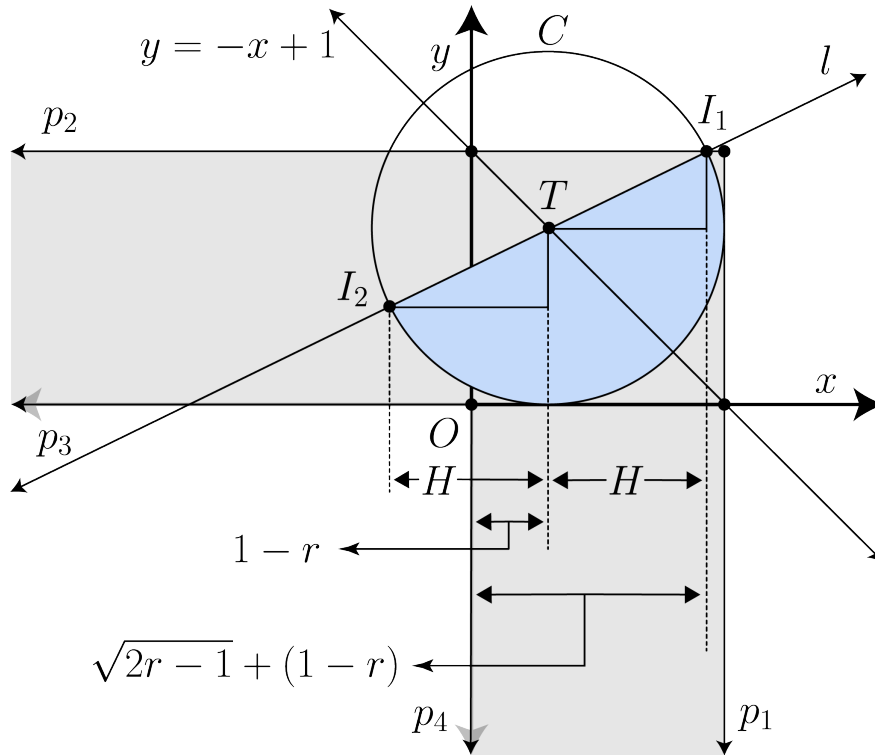


Figura B2

Abscisas de los puntos de intersección entre la circunferencia C y la recta l

Teniendo en cuenta la Figura B2, observamos que

$$H = \sqrt{2r - 1} + (1 - r) - (1 - r)$$

simplificando obtenemos que

$$H = \sqrt{2r - 1},$$

entonces la abscisa del punto I_2 es la coordenada en x del punto T menos la distancia H , a saber, $1 - r - H$. Así, si reemplazamos el valor de H obtenemos

$$1 - r - \sqrt{2r - 1}.$$

Ahora que ya tenemos los puntos extremos (I_1 y I_2) del diámetro del semicírculo que pretendemos construir, observamos que el punto I_2 puede estar en el interior o exterior de

$L_1 \cap L_2$, entonces analizaremos su componente en x para asegurar que este en el interior y que el semicírculo tenga la máxima área posible. Si la componente en x de I_2 cumple que $1 - r - \sqrt{2r - 1} < 0$ el semicírculo que se forma a partir de C no puede trasladarse en la región L (de L_1 a L_2), y si $1 - r - \sqrt{2r - 1} > 0$ si puede moverse sobre L ; sin embargo, el semicírculo podría tener un radio mayor y por ende un área mayor, entonces hallamos para cuales valores de r se cumple que $1 - r - \sqrt{2r - 1} = 0$, para garantizar que los extremos del diámetro estén en contacto con los límites de la región $L_1 \cap L_2$ y que el semicírculo tenga la mayor área posible (Figura B3).

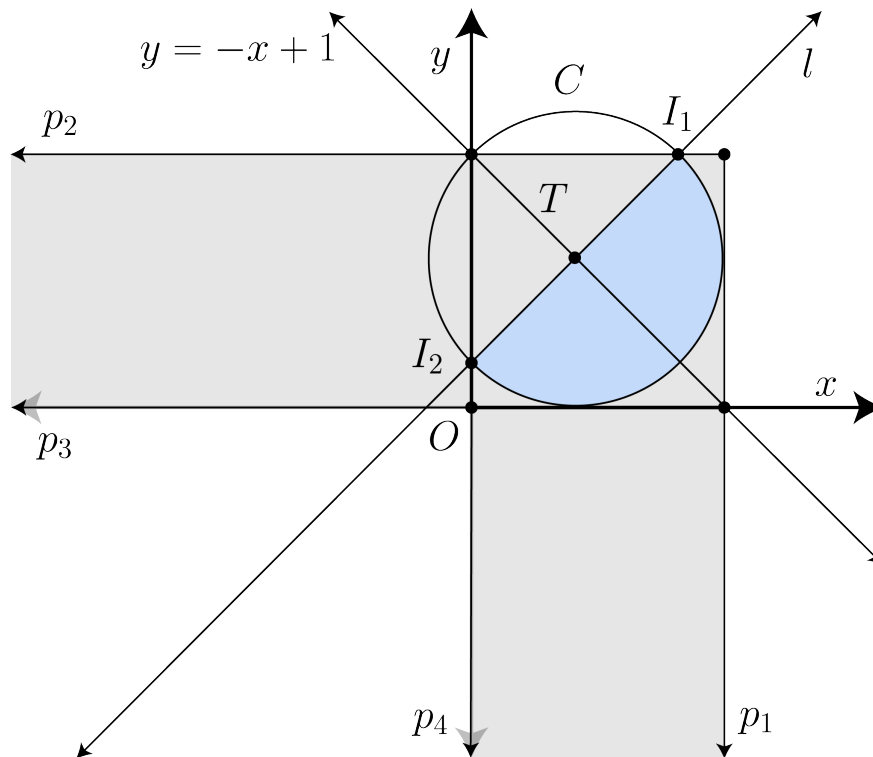


Figura B3

Semicírculo de máxima área que puede moverse por el interior de la región L

Partimos de la ecuación

$$1 - r - \sqrt{2r - 1} = 0$$

restando $(1 - r)$ a ambos miembros obtenemos

$$-\sqrt{2r - 1} = -(1 - r)$$

ahora elevamos los miembros al cuadrado y llegamos a

$$2r - 1 = (1 - r)^2$$

y desarrollamos el binomio al cuadrado y concluimos

$$2r - 1 = 1 - 2r + r^2,$$

por último reorganizamos la expresión y tenemos que

$$r^2 - 4r + 2 = 0. \tag{B1}$$

Ahora, hallamos para cuáles valores de r se satisface la ecuación B1 con la fórmula

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

reemplazamos los respectivos coeficientes y obtenemos

$$r_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

operando el radical llegamos a

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

finalmente obtenemos que

$$r_1 = 2 + \sqrt{2} \quad r_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

El valor de interés y que garantiza que el semicírculo este contenido en $L_1 \cap L_2$ es r_2 .

Establecemos que

$$r = 2 - \sqrt{2} \approx 0,58.$$

Por lo tanto el área del semicírculo es

$$A = \frac{\pi(2 - \sqrt{2})^2}{2} \approx 0,53$$

y como en la construcción aseguramos que el semicírculo esté contenido en $L_1 \cap L_2$, en virtud del Teorema 5 podemos asegurar que se puede mover en la región L .

Anexo C

Las transformaciones establecidas en las Definiciones 9 y 10 son rígidas

Para comprobar que una transformación es rígida basta con mostrar que para cualquier par de puntos x_1, x_2 se cumple que,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|,$$

y que para cualquier terna de puntos los ángulos se conservan.

En nuestro caso, como estamos trabajando en la geometría clásica basada en una métrica euclidiana sobre \mathbb{R} , basta con comprobar que las distancias entre cualquier par de puntos se conservan para confirmar que una transformación es rígida, ya que se puede deducir que los ángulos también se conservan, y esto por medio de la aplicación de criterios de congruencia a los triángulos que se pueden construir por cualquier terna de puntos y sus imágenes.

Prueba de la transformación establecida en la Definición 9

Como en la Definición 9 se establece que f es una isometría, entonces deducimos que para cualquier par de puntos x_1 y x_2 se cumple que $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$. Con lo que se comprueba que la transformación que se establece en la Definición 9 es rígida.

Prueba de la transformación establecida en la Definición 10

Sean A y B dos puntos con coordenadas (x_1, x_2) y (x_3, x_4) respectivamente. Les aplicamos la transformación establecida en la ecuación 4, para el punto (x_1, x_2) tenemos

$$T_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix}$$

y para el punto (x_3, x_4) obtenemos que

$$T_t \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix}.$$

Ahora comprobaremos que las distancias entre los puntos y sus imágenes se conservan al aplicar la transformación, es decir, queremos verificar que

$$\left| T_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - T_t \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right|, \quad (C1)$$

comenzemos por el segundo miembro de la ecuación C1, así, al restar los vectores tenemos

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix} \right|$$

empleando la métrica euclidiana para hallar la magnitud del vector llegamos a

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}.$$

Por otro lado, partiendo del primer miembro de la ecuación C1 y reemplazando las respectivas transformaciones obtenemos

$$\left| \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix} \right) \right|$$

multiplicando la matriz por los vectores llegamos a

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta(t)) - x_2 \sin(\theta(t)) \\ x_1 \sin(\theta(t)) + x_2 \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_3 \cos(\theta(t)) - x_4 \sin(\theta(t)) \\ x_3 \sin(\theta(t)) + x_4 \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \right|$$

y procedemos a restar los vectores y concluimos

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta(t)) - x_2 \sin(\theta(t)) - x_3 \cos(\theta(t)) + x_4 \sin(\theta(t)) \\ x_1 \sin(\theta(t)) + x_2 \cos(\theta(t)) - x_3 \sin(\theta(t)) - x_4 \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \right|$$

agrupando de forma conveniente tenemos que

$$\left| \begin{pmatrix} (x_1 - x_3) \cos(\theta(t)) - (x_2 - x_4) \sin(\theta(t)) \\ (x_1 - x_3) \sin(\theta(t)) + (x_2 - x_4) \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \right|,$$

y hallando la magnitud del vector obtenemos que

$$\sqrt{[(x_1 - x_3) \cos(\theta(t)) - (x_2 - x_4) \sin(\theta(t))]^2 + [(x_1 - x_3) \sin(\theta(t)) + (x_2 - x_4) \cos(\theta(t))]^2}$$

desarrollando los binomios al cuadrado y reduciendo términos semejantes llegamos a

$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))) + (x_2 - x_4)^2(\sin^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t)))}$$

finalmente aplicando la identidad trigonométrica fundamental concluimos que

$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2},$$

observamos que las expresiones obtenidas de los dos miembros son iguales, lo que comprueba que la transformación que se establece en la Definición 10 es rígida.

Anexo D

Valores de α que satisfacen la ecuación 9

En este apartado presentamos el proceso para obtener los valores de α que satisfacen la ecuación 9

$$0 = \sec(\alpha) \tan(\alpha) - \csc(\alpha) \cot(\alpha) - k(\sec^2(\alpha) - \csc^2(\alpha)).$$

Empezamos expresando las razones trigonométricas en términos de senos y cosenos y llegamos a

$$0 = \frac{\sen(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} - \frac{\cos(\alpha)}{\sen^2(\alpha)} - k \left(\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{1}{\sen^2(\alpha)} \right)$$

ahora, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $\cos^2(\alpha) \sen^2(\alpha)$, concluimos que

$$0 = \sen^3(\alpha) - \cos^3(\alpha) - k(\sen^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)).$$

En los términos del miembro derecho de la igualdad anterior, podemos observar una diferencia de cubos y una de cuadrados, empleando los productos notables asociados, tenemos

$$0 = (\sen(\alpha) - \cos(\alpha)) (\sen^2(\alpha) + \sen(\alpha) \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)) - k(\sen(\alpha) - \cos(\alpha)) (\sen(\alpha) + \cos(\alpha))$$

factorizando el término $(\sen(\alpha) - \cos(\alpha))$ y aplicando la identidad fundamental de la trigonometría llegamos a

$$0 = (\sen(\alpha) - \cos(\alpha)) (1 + \sen(\alpha) \cos(\alpha) - k(\sen(\alpha) + \cos(\alpha)))$$

Ahora igualamos cada factor a 0. Del primer factor tenemos que

$$\sen(\alpha) - \cos(\alpha) = 0$$

o de forma equivalente

$$\sen(\alpha) = \cos(\alpha);$$

analizando tal expresión determinamos que ésta se satisface cuando

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

y como $\alpha \in (0, \pi/2)$, entonces el único valor que consideraremos es $\alpha = \pi/4$.

Del segundo factor tenemos que

$$0 = 1 + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) - k(\operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)),$$

y despejando k llegamos a

$$k = \frac{1 + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)}$$

para cualquier valor de α en $(0, \pi/2)$ se tiene que $k \geq 1$, valores de k los cuales impiden que el rectángulo que se construya este totalmente contenido en la región L , con lo que estos puntos críticos deben descartarse.

Por último vamos a comprobar que el punto crítico $\alpha = \pi/4$ es un mínimo. Para lograrlo empleamos el criterio de la segunda derivada. Hallando $(FH)''$ obtenemos que

$$\begin{aligned} (FH)''(\alpha) &= \sec(\alpha) \tan^2(\alpha) + \sec^3(\alpha) + \csc(\alpha) \cot^2(\alpha) + \csc^3(\alpha) \\ &\quad - k(2 \sec^2(\alpha) \tan(\alpha) + 2 \csc^2(\alpha) \cot(\alpha)) \end{aligned}$$

evaluando el punto crítico llegamos a que

$$\begin{aligned} (FH)''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sec^3\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) \cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc^3\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad - k\left(2 \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{3/2} + 2^{5/2} - 8k \end{aligned}$$

Expresión que es menor que cero cuando

$$k < \frac{2^{3/2} + 2^{5/2}}{8} \approx 1,0606,$$

así, obtenemos que para todo el intervalo que definimos para k que es $[0, 1]$, se obtiene en $\alpha = \pi/4$ un punto crítico que es mínimo.

Anexo E**Soluciones de la ecuación 10**

En este apartado se muestra la forma en la que solucionamos la ecuación 10

$$1 + \tan^2(\theta) + \csc^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - 2 \tan(\theta) = d^2$$

para la variable θ .

Partimos aplicando el cambio de variable $x = \tan(\theta)$ a la expresión y obtenemos que

$$1 + x^2 + \csc^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - 2x = d^2$$

y reorganizando la expresión llegamos a

$$x^2 - 2x + \csc^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - d^2 + 1 = 0.$$

Observamos que la ecuación resultante es una ecuación cuadrática. Aplicamos la fórmula general para hallar las raíces o ceros, así, planteamos que

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

reemplazando los respectivos coeficientes, obtenemos

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(\csc^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - d^2 + 1)}}{2(1)}$$

operando la expresión, llegamos a

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(\csc^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - d^2 + 1)}}{2},$$

utilizando la identidad $\csc^2(\alpha) = 1 + \cot^2(\alpha)$ para expresar cosecante de una forma equivalente tenemos que

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - (1 + \cot^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) - d^2 + 1)}$$

expresando $\cot^2(\alpha) - 2 \cot(\alpha) + 1 = (\cot(\alpha) - 1)^2$ y simplificando la expresión, llegamos a

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}.$$

Ahora deshacemos el cambio de variable y tenemos que

$$\tan(\theta) = 1 \pm \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}$$

por último, despejando θ , concluimos

$$\theta = \tan^{-1} \left(1 \pm \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right).$$

Anexo F**Ecuación 11 en términos de θ**

En este apartado describimos el proceso realizado para despejar α de la expresión

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{\cot(\alpha) - 1}{\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}} \right).$$

Como primer paso, aplicando tangente a ambos lados de la igualdad, llegamos a

$$\tan(\theta) = -\frac{\cot(\alpha) - 1}{\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}}$$

multiplicando a ambos lados por $\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}$, obtenemos que

$$\tan(\theta)\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} = -(\cot(\alpha) - 1)$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, concluimos que

$$\tan^2(\theta) \left(d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2 \right) = (\cot(\alpha) - 1)^2$$

ahora, aplicando propiedad distributiva en el primer miembro, se llega a

$$\tan^2(\theta)d^2 - \tan^2(\theta)(\cot(\alpha) - 1)^2 = (\cot(\alpha) - 1)^2.$$

Observemos que hay un factor común entre un término del primer y segundo miembro, procedemos a factorizarlo y despejarlo; se obtiene que

$$(\cot(\alpha) - 1)^2 = \frac{\tan^2(\theta)d^2}{\tan^2(\theta) + 1}$$

aplicando raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad, llegamos a

$$|(\cot(\alpha) - 1)| = \sqrt{\frac{\tan^2(\theta)d^2}{\tan^2(\theta) + 1}}$$

aplicando propiedades de los radicales y utilizando la identidad $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$ en el argumento del radical obtenemos que

$$|\cot(\alpha) - 1| = \left| \frac{d \tan(\theta)}{\sec(\theta)} \right|$$

en el intervalo definido para α que es $[\pi/4, \pi]$, ocurre que $\cot(\alpha) - 1 \leq 0$ con lo que consideramos $|\cot(\alpha) - 1| = -\cot(\alpha) + 1$ y llegamos a

$$-\cot(\alpha) + 1 = \left| \frac{d \tan(\theta)}{\sec(\theta)} \right|$$

despejando α concluimos que

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - |d \sin(\theta)|} \right).$$

Anexo G

Expresión explícita de m

En este apartado pretendemos presentar la forma en la que obtuvimos la expresión explícita de m . Partimos enunciando la expresión de α hallada y la componente r de m , entonces

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - d \sin(\theta)} \right)$$

y

$$r = -\frac{1}{d} \left[\left(1 - \sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2} \right) \cot(\alpha) - 1 \right].$$

Empezamos reemplazando el valor de α en la expresión de r , obtenemos

$$r = -\frac{1}{d} \left[\left(1 - \sqrt{d^2 - \left(\cot \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - d \sin(\theta)} \right) \right) - 1 \right)^2} \right) \cot \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{1 - d \sin(\theta)} \right) \right) - 1 \right],$$

y evaluando las funciones y sus inversas, concluimos que

$$r = -\frac{1}{d} \left[\left(1 - \sqrt{d^2 - (1 - d \sin(\theta) - 1)^2} \right) (1 - d \sin(\theta)) - 1 \right]$$

simplificando y empleando la identidad $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ en el radical, llegamos a

$$r = -\frac{1}{d} [(1 - d|\cos(\theta)|)(1 - d \sin(\theta)) - 1]$$

multiplicando los binomios, obtenemos que

$$r = -\frac{1}{d} [1 - d \sin(\theta) - d|\cos(\theta)| + d^2 \sin(\theta)|\cos(\theta)| - 1]$$

por último, sumando términos semejantes y distribuyendo el factor $-1/d$ llegamos a

$$r = \sin(\theta) + |\cos(\theta)| - d \sin(\theta)|\cos(\theta)|.$$

Anexo H

Intervalo de α para cuando T pertenece a p_2 y R a p_1

En este apartado se muestra la forma en la que acotamos el ángulo α para cuando T pertenece a p_2 y R a p_1 . Lo que pretendemos hacer a continuación es hallar el ángulo que se forma entre el rayo conformado por el origen y la posición del punto T cuando la circunferencia E es tangente a p_1 , y el rayo cuyo vertice es el origen y que pasa por el punto T cuando éste pertenece a $p_1 \cap p_2$.

Inicialmente estudiemos la situación presentada en la Figura H1. En ésta se presentan las condiciones geométricas que se dan cuando la recta que contiene a la semirrecta p_1 es tangente a la circunferencia E , es importante resaltar que en el movimiento éste es el primer momento en el que R pertenece a p_1 , de igual forma en este instante R pertenece a p_2 , sin embargo, lo que nos interesa es que $R \in p_1$.

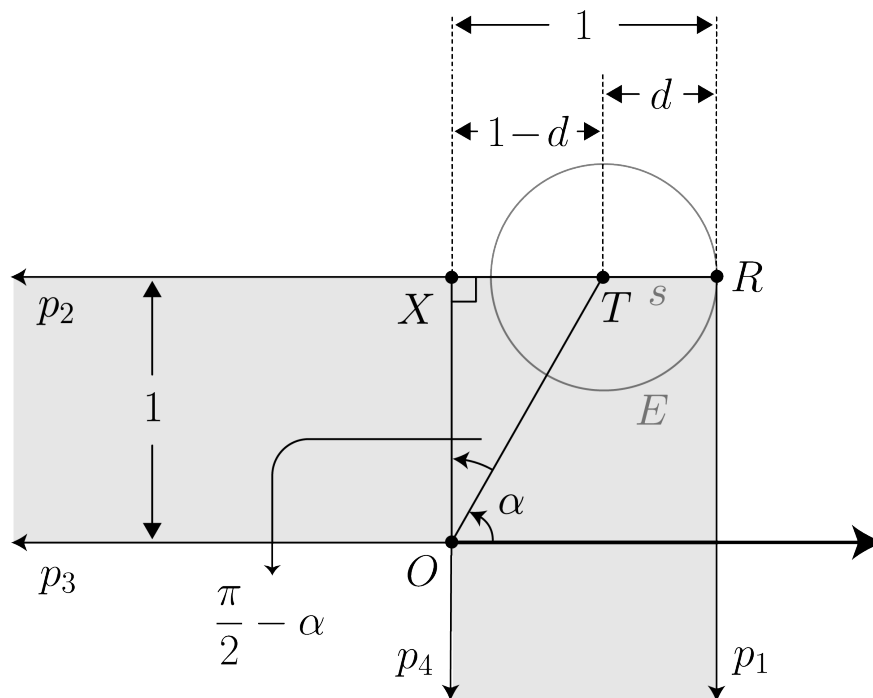


Figura H1

Intersección de la circunferencia E con la semirrecta p_1

Según la Figura H1 la distancia entre el punto T y la semirrecta p_1 es d (que es el

radio de E o la longitud del segmento s). Por otro lado, en la construcción del segmento s acotamos el ángulo α de la siguiente manera

$$\pi/4 \leq \alpha < \pi.$$

Ahora modificaremos la cota superior de tal intervalo para garantizar la intersección de E con p_1 . Con respecto a la cota inferior ésta se mantiene constante independientemente del valor de d . Partimos de hallar la tangente del ángulo que tiene como vértice el punto O del triángulo rectángulo TXO

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - d$$

y aplicando la función inversa de la tangente a ambos lados llegamos a

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \tan^{-1}(1 - d)$$

restando $\pi/2$ y luego multiplicando a ambos lados de la igualdad por -1 , obtenemos que

$$\alpha = -\tan^{-1}(1 - d) + \frac{\pi}{2}.$$

Como la inversa de la tangente es una función impar, cumple que

$$-\tan^{-1}(1 - d) = \tan^{-1}(d - 1)$$

reemplazando este valor en la expresión concluimos que

$$\alpha = \tan^{-1}(d - 1) + \frac{\pi}{2}.$$

Entonces el intervalo en el que podemos garantizar que la circunferencia E interseca la semirrecta p_1 es

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \tan^{-1}(d - 1) + \frac{\pi}{2}.$$

Anexo I

Intervalo de θ

En este apartado presentamos el proceso con el cual determinamos en cuál intervalo está definido θ . Partimos de enunciar la componente en θ de m y de recordar el intervalo en el que está definido α . Así, tenemos que

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{\cot(\alpha) - 1}{\sqrt{d^2 - (\cot(\alpha) - 1)^2}} \right)$$

y

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \tan^{-1}(d - 1) + \frac{\pi}{2}.$$

Evaluando el límite inferior del intervalo definido para α , llegamos a

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1}{\sqrt{d^2 - \left(\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\right)^2}} \right)$$

y operando obtenemos que

$$\theta = \tan^{-1}(0) = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora procedemos a evaluar en la expresión de θ el límite superior de α , reemplazando el valor tenemos que

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{\cot(\tan^{-1}(d - 1) + \frac{\pi}{2}) - 1}{\sqrt{d^2 - (\cot(\tan^{-1}(d - 1) + \frac{\pi}{2}) - 1)^2}} \right)$$

y evaluando llegamos a

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d}{0} \right).$$

Observamos que esto último corresponde a una indeterminación, y la función tangente se indetermina para los ángulos

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Con lo anterior sabemos que tenemos dos posibles intervalos para θ

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2},$$

el intervalo que nos interesa y que garantiza que la distancia entre el origen y la recta l sea menor o igual a 1 es $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Anexo J**Soluciones de la ecuación 12**

En este apartado presentamos el proceso para hallar los valores de θ que satisfacen la ecuación 12

$$0 = \cos(\theta) - \sin(\theta) - d(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)).$$

Comenzamos expresando dos términos del miembro derecho como una diferencia de cuadrados y obtenemos

$$0 = \cos(\theta) - \sin(\theta) - d(\cos(\theta) - \sin(\theta))(\cos(\theta) + \sin(\theta))$$

y factorizando $(\cos(\theta) - \sin(\theta))$, obtenemos que

$$0 = (\cos(\theta) - \sin(\theta)) [1 - d(\cos(\theta) + \sin(\theta))].$$

Ahora igualamos cada factor a 0. Del primero tenemos que

$$\cos(\theta) - \sin(\theta) = 0$$

que de forma equivalente es

$$\cos(\theta) = \sin(\theta),$$

analizando tal expresión determinamos que ésta se satisface cuando

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Y como $0 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces el único valor que consideraremos será $\theta = \pi/4$. Del segundo factor obtenemos

$$1 - d(\cos(\theta) + \sin(\theta)) = 0$$

expresando seno en términos de coseno tenemos

$$1 - d\left(\cos(\theta) + \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}\right) = 0$$

aplicamos propiedad distributiva y obtenemos que

$$1 - d\cos(\theta) - d\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = 0$$

sumando a ambos lados de la igualdad $d\sqrt{1 - d\cos^2(\theta)}$ llegamos a

$$1 - d\cos(\theta) = d\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$$

elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado obtenemos que

$$(1 - d\cos(\theta))^2 = d^2(1 - \cos^2(\theta))$$

desarrollando el binomio al cuadrado y aplicando propiedad distributiva tenemos que

$$1 - 2d\cos(\theta) + d^2\cos^2(\theta) = d^2 - d^2\cos^2(\theta).$$

Aplicamos el cambio de variable $x = \cos(\theta)$ y la igualdad cambia a

$$1 - 2dx + d^2x^2 = d^2 - d^2x^2$$

y reorganizando la expresión llegamos a

$$2d^2x^2 - 2dx - d^2 + 1 = 0.$$

Observamos que la ecuación resultante es una ecuación cuadrática. Aplicamos la fórmula general para hallar las raíces o ceros, así, planteamos que

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

reemplazando los respectivos coeficientes, obtenemos

$$x_{1,2} = \frac{-(-2d) \pm \sqrt{(-2d)^2 - 4(2d^2)(-d^2 + 1)}}{2(2d^2)}$$

operamos y tenemos que

$$x_{1,2} = \frac{2d \pm \sqrt{4d^2 - 8d^2(-d^2 + 1)}}{4d^2}$$

factorizando el argumento del radical llegamos a

$$x_{1,2} = \frac{2d \pm \sqrt{(4d^2)(1 - 2(-d^2 + 1))}}{4d^2}$$

simplificamos y obtenemos que

$$x_{1,2} = \frac{2d \pm 2d\sqrt{1 - 2(-d^2 + 1)}}{4d^2}$$

o de forma equivalente

$$x_{1,2} = \frac{1}{2d} \pm \frac{\sqrt{2d^2 - 1}}{2d}.$$

Ahora deshacemos el cambio de variable y llegamos a

$$\cos(\theta_{1,2}) = \frac{1}{2d} \pm \frac{\sqrt{2d^2 - 1}}{2d}$$

despejando θ tenemos que

$$\theta_{1,2} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2d} \pm \frac{\sqrt{2d^2 - 1}}{2d} \right)$$

Observemos que la existencia de estas raíces está condicionada a que

$$2d^2 - 1 \geq 0$$

despejando la variable d obtenemos que

$$d \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Antes de continuar con el análisis es importante mencionar estos puntos críticos no existen para todo valor de d , porque en algunos casos, la distancia que determina la expresión m es mayor a la unidad, lo cual imposibilita que el rectángulo esté completamente contenido en la región L . Por último empleamos el criterio de la segunda derivada para determinar si los puntos críticos corresponden a mínimos o máximos. Hallando $r''(\theta)$ obtenemos

$$r''(\theta) = -\sin(\theta) - \cos(\theta) - d[2\cos(\theta)(-\sin(\theta)) - (2\sin(\theta)\cos(\theta))]$$

empleando la identidad del seno del ángulo doble llegamos a

$$r''(\theta) = -\sin(\theta) - \cos(\theta) - d[-\sin(2\theta) - \sin(2\theta)]$$

sumando términos semejantes concluimos que

$$r''(\theta) = -\sin(\theta) - \cos(\theta) + 2d \sin(2\theta)$$

Evaluamos el primer punto crítico, $\theta = \pi/4$, y llegamos a que

$$r''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2d \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + 2d,$$

expresión que es mayor a cero cuando $d > \sqrt{2}/2$, con lo que afirmamos que es un mínimo.

Evaluamos el punto crítico $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2d} + \frac{\sqrt{2d^2-1}}{2d}\right)$ en r'' y llegamos a que

$$\begin{aligned} r''\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2d} + \frac{\sqrt{2d^2-1}}{2d}\right)\right) &= -\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2d} + \frac{\sqrt{2d^2-1}}{2d}\right)\right) - \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2d} + \frac{\sqrt{2d^2-1}}{2d}\right)\right) \\ &\quad + 2d \sin\left(2 \cos^{-1}\left(\frac{1}{2d} + \frac{\sqrt{2d^2-1}}{2d}\right)\right) \end{aligned}$$

valor que es menor a cero para $d > \sqrt{2}/2$ con lo que se determina que es un máximo. El proceso es análogo con la raíz θ_2 .

Anexo K

Expresión explícita de la transformación aplicada a la semirrecta p_2

En este apartado mostraremos el proceso para hallar la ecuación explícita de la transformación de la semirrecta p_2 . Partimos de enunciar la forma matricial de la imagen de la semirrecta p_2

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + tk \\ x \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

de donde

$$x' = x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + tk \quad y \quad y' = x \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Despejando x en la expresión de x' llegamos a que

$$x = \frac{x' + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - tk}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)},$$

reemplazando el valor de x hallado en y' obtenemos que

$$y' = \frac{x' + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - tk}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

y distribuyendo el término $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ se tiene que

$$y' = \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) x' - \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) tk + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Por último, empleando la identidad $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y simplificando concluimos que

$$y' = \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) x' - \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right) tk + \sec\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Anexo L

Simplificación de la expresión 15

En este apartado presentamos el proceso de simplificación realizado a la expresión 15

$$v = x(w) = k \left(\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) + \frac{k}{\pi} \sin \left(\pi \left(\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) \right).$$

Empezamos por simplificar la expresión y obtenemos que

$$v = x(w) = \frac{2k}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) + \frac{k}{\pi} \sin \left(2 \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) - \sin \left(\arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right)$$

empleando la identidad del seno del ángulo doble llegamos a

$$v = x(w) = \frac{2k}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) + \frac{k}{\pi} 2 \sin \left(\arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) \cos \left(\arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right) - \sin \left(\arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right).$$

Ahora utilizando la definición de las razones trigonométricas, planteamos el siguiente triángulo rectángulo para hallar el término (ver Figura L1)

$$\sin \left(\arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right) \right).$$

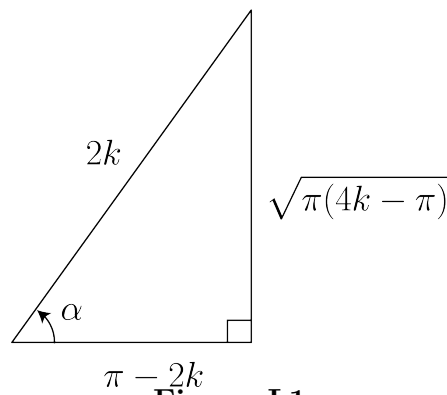


Figura L1

Triángulo rectángulo construido a partir del argumento del $\arccos \left(\frac{\pi}{2k} - 1 \right)$

Se puede comprobar que a partir del argumento del $\arccos\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right)$ se hallan dos de los lados del triángulo y con el teorema de Pitágoras se calcula el faltante. Con base en el triángulo presentado, evaluamos la razón trigonométrica seno y llegamos a

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\arccos\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right)\right) = \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k}.$$

Reemplazamos lo hallado y llegamos a que

$$v = x(w) = \frac{2k}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right) + \frac{k}{\pi} 2 \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k} \left(\frac{\pi}{2k} - 1\right) - \frac{\sqrt{\pi(4k - \pi)}}{2k}$$

simplificando concluimos que

$$v = \frac{2k}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi}{2k} - 1\right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi(4k - \pi)}.$$

Anexo M

Funciones $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$ para el problemas C3

En este apartado se muestra como se llegaron a cada una de las funciones $\theta(t)$, $M_x(t)$ y $M_y(t)$ de tal forma que las semirrectas p_3 y p_4 contengan respectivamente a los puntos $(-r, 0)$ y $(r, 0)$.

Partimos de la función $M_x(t)$, para ésta debemos hallar un expresión de tal forma que el punto O se desplace de r a $-r$, podemos observar que la expresión

$$M_x(t) = -r(2t - 1)$$

cumple con el requerimiento, ya que para $t = 0$ se tiene que $M_x(0) = r$ y para $t = 1$ que $M_x(1) = -r$.

Para hallar $M_y(t)$ basta con evaluar en la expresión que determina la semicircunferencia C el valor de $M_x(t)$, con lo cual

$$M_y(t) = \sqrt{r^2 - (-r(2t - 1))^2} = r\sqrt{1 - (2t - 1)^2}.$$

Por último, para $\theta(t)$ se observó mediante una exploración que si se relaciona la longitud de arco que recorre el punto O sobre la semicircunferencia C y su diámetro que es $2r$ se logra que las semirrectas en cuestión pasen por los puntos mencionados. Entonces planteamos la longitud de curva como

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Y sabemos que la función que describe la semicircunferencia C es

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

hallamos $f'(x)$ y obtenemos que

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Es de aclarar que los límites de integración son el recorrido horizontal del punto O sobre C , es decir, el cambio de las abscisas. Entonces el límite superior es r y el inferior es la

traslación horizontal que está determinada por $M_x(t) = -r(2t - 1)$. Con lo que planteamos que

$$\int_{-r(2t-1)}^r \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right]^2} dx.$$

Operamos el argumento del radical y llegamos a

$$\int_{-r(2t-1)}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

sumando los términos del radical tenemos que

$$\int_{-r(2t-1)}^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable para resolver la integral

$$x = r \operatorname{sen}(\theta)$$

de donde

$$dx = r \cos(\theta) d\theta.$$

Con lo que la integral cambia a

$$\int \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - (r \operatorname{sen}(\theta))^2}} r \cos(\theta) d\theta$$

simplificando llegamos a

$$r \int \sqrt{\frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta$$

y concluimos que

$$r \int 1 d\theta = r\theta.$$

Deshacemos el cambio de variable y tenemos que

$$r \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) \Big|_{-r(2t-1)}^r$$

evaluando los límites de integración obtenemos que

$$r \left[\operatorname{sen}^{-1}(1) - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{-r(2t-1)}{r} \right) \right]$$

y simplificando llegamos a

$$r \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(-(2t - 1)) \right].$$

La anterior expresión determina la longitud de arco que recorre el punto O sobre la semicircunferencia C . Ahora como la función arcoseno es impar cumple que

$$-\sin^{-1}(-(2t - 1)) = \sin^{-1}((2t - 1)),$$

entonces la expresión es equivalente a

$$r \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(2t - 1) \right].$$

Por último para relacionar la longitud de arco con el diámetro de la semicircunferencia C , dividimos el valor hallado entre $2r$ y concluimos que

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin^{-1}(2t - 1).$$

Anexo N

Expresión explícita de la imagen de la semirrecta p_2

En este apartado presentamos el proceso para hallar la expresión explícita de la imagen de la semirrecta p_2 . Partimos de enunciar la forma matricial

$$T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta(t)) - \sin(\theta(t)) + M_x(t) \\ x \sin(\theta(t)) + \cos(\theta(t)) + M_y(t) \end{pmatrix},$$

de esta podemos saber que

$$x' = x \cos(\theta(t)) - \sin(\theta(t)) + M_x(t)$$

y

$$y' = x \sin(\theta(t)) + \cos(\theta(t)) + M_y(t).$$

Despejando x de x' obtenemos que

$$x = \frac{x' + \sin(\theta(t)) - M_x(t)}{\cos(\theta(t))}$$

reemplazando el valor hallado en y' tenemos que

$$y' = \frac{x' + \sin(\theta(t)) - M_x(t)}{\cos(\theta(t))} \sin(\theta(t)) + \cos(\theta(t)) + M_y(t),$$

simplificando llegamos a

$$y' = x' \tan(\theta(t)) + \sin(\theta(t)) \tan(\theta(t)) - \tan(\theta(t)) M_x(t) + \cos(\theta(t)) + M_y(t).$$