

**EL CONCEPTO DE ESPACIO: UNA PROPUESTA DE ESTRATEGIA PARA LA
ENSEÑANZA DE LA VARIEDAD PSEUDORIEMANNIANA EN LA FORMACIÓN
DE LICENCIADOS EN FÍSICA**

Trabajo de Grado para optar por el título de Licenciado en Física

Duvan Felipe Leguizamón Baquero

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN FÍSICA
LINEA DE PROFUNDIZACIÓN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACIÓN
FÍSICA MATEMÁTICA
2026**

**EL CONCEPTO DE ESPACIO: UNA PROPUESTA DE ESTRATEGIA PARA LA
ENSEÑANZA DE LA VARIEDAD PSEUDORIEMANNIANA EN LA FORMACIÓN
DE LICENCIADOS EN FÍSICA**

Trabajo de Grado para optar por el título de Licenciado en Física

Duvan Felipe Leguizamón Baquero

Código: 2015246032

Asesora

Sandra Bibiana Ávila Torres

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN FÍSICA
LINEA DE PROFUNDIZACIÓN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACIÓN
FÍSICA MATEMÁTICA
2026**

Nuestra lealtad es para las especies y el planeta. Nuestra obligación de sobrevivir no es solo para nosotros mismos sino también para ese cosmos, antiguo y vasto, del cual derivamos.

Carl Sagan

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mis padres, Luz Marina y Francisco, y a mis hermanos: Juan David, Luis Francisco, Carlos Andrés, Julián y Miguel Ángel. Agradezco infinitamente también a mi tía Ana Silvia y a mi prima Gisell. Cada uno, desde sus propias formas de ayudar, querer, respetar y admirar, ha sido fundamental para que yo pudiera asumir el reto de vivir la experiencia universitaria y, aún más hermoso, vivir la experiencia de la universidad pública.

Quiero expresar mi agradecimiento a mi asesora, Sandra Ávila, por su paciencia y profesionalismo. Su acompañamiento no solo se destaca por su sólido conocimiento disciplinar, sino también por su capacidad para conectar de manera genuina con los estudiantes, integrando lo académico con una orientación cercana y humana.

Índice General

INTRODUCCIÓN.....	1
CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN	4
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
OBJETIVOS:	9
Objetivo General	9
Objetivos Específicos	10
ANTECEDENTES	10
1. DISCUSION PARA LA ENSEÑANZA DE LA VARIEDAD PSEUDORIEMANNIANA	13
1.1 Discusión continua del concepto de espacio.	14
1.1.1 Condición del espacio en la mecánica clásica.....	16
1.1.2 Condición del espacio en la Relatividad	17
1.2 Alrededor de la Enseñanza de la física	20
1.2.1 Estrategia de Enseñanza.....	20
1.2.2 Aprendizaje Colaborativo	23
1.3 Fundamento matemático y la relación con el espacio.....	24
2.ACERCAMIENTO A LAS NOCIONES DE ESPACIO EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA: DIAGNÓSTICO CONCEPTUAL	31
2.1 Enfoque y método	32
2.2 Instrumentos de Recolección y Análisis	33
2.3 Población y muestra	38
3. PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA VARIEDAD PSEUDORIEMMANIANA.....	40
3.1 Descripción de la propuesta de Enseñanza	41
3.2 Descripción de las sesiones propuestas	42
CONCLUSIONES	55
REFERENCIAS	57
ANEXOS	60
Anexo 1: Resultados de pre-test.....	60
Anexo 2: Texto guía	64
Anexo 3 : Recursos	77

Lista de Tablas

Tabla 1. Preguntas del Pre-test en relación con los ejes temáticos planteados	35
Tabla 2. Categorías definidas para el análisis de las preguntas del pretest	36
Tabla 3. Estrategia de Enseñanza.	49
Tabla 4. Cuadro Comparativo para el Cambio Conceptual	53
Tabla 5. Respuestas individuales y grupales, pregunta 1.	60
Tabla 6. Respuestas individuales y grupales, pregunta 2.	60
Tabla 7. Respuestas individuales y grupales, pregunta 3.	61
Tabla 8. Respuestas individuales y grupales, pregunta 4.	62
Tabla 9. Respuestas individuales y grupales, pregunta 5.	63

INTRODUCCIÓN

La formulación de ideas que permiten a la física cumplir su objetivo de comprender y predecir fenómenos naturales implica, al menos, dos momentos fundamentales para su consolidación como ley o teoría: el teórico y el experimental. Cada uno de estos momentos involucra un conjunto de condiciones que deben satisfacerse para garantizar la validez del conocimiento construido.

En el ámbito teórico, se desarrolla un debate de carácter filosófico y epistemológico que se concreta en la formulación para modelar los fenómenos. Por su parte, el componente experimental enfrenta desafíos asociados a la obtención de datos mediante instrumentación adecuada, así como a su posterior análisis a partir de modelos matemáticos consistentes y válidos.

Si bien todo lo que precede a entablar una idea válida en el ámbito académico, trasladar estos desarrollos científicos al aula, sin importar el grado de educación, tiene su propio proceso investigativo. Proceso sustentado en la didáctica y la pedagogía, donde se buscan alcanzar objetivos de enseñanza-aprendizaje en una población determinada (Martín Sanabria, 2021).

En consecuencia, se configuraría una gran cantidad de investigaciones que involucren lo disciplinar de la física con su enseñanza. Esto se da gracias al gran debate que ha mantenido durante mucho tiempo de existencia humana, aunque para este trabajo solo se discutirán dos ideas de la física encaminadas por la mecánica clásica donde su mayor aporte fue dado por Newton y la teoría de la relatividad planteada por Einstein.

En este contexto, la presente investigación se enmarca en el campo de la didáctica de la física y tiene como propósito analizar la enseñanza del concepto de espacio a partir de una reflexión filosófica que conduce progresivamente a su estudio desde las perspectivas física y matemática. A partir de ello, En una primera etapa se establecerán las condiciones de la investigación, es decir, el planteamiento del problema y la definición de los objetivos. En este contexto, se parte de una reflexión de carácter filosófico y epistemológico en torno al concepto de espacio, la cual se articula con la enseñanza de herramientas matemáticas, en particular con el estudio de la variedad pseudoriemanniana donde se resulta en la idea de espaciotiempo.

De esta manera, se propone una relación recíproca entre ambos componentes, que permita su comprensión integrada y favorezca el aprendizaje en estudiantes de licenciatura que se encuentren en etapas previas a la inscripción de cursos de relatividad. En este contexto, surge la

necesidad de diseñar una propuesta de enseñanza de la variedad pseudoriemanniana apoyada en la problematización del concepto de espacio.

En un segundo momento la investigación se expone la fundamentación teórica, abordando tres posturas: epistemológica, enseñanza y matemática. La postura epistemológica se asume al conocimiento científico al ser una construcción humana como el caso de la física, no se limita a la validación de todas las ideas subjetivadas, sino es el proceso de discutir soluciones desde orillas opuestas que llegaran a dar respuestas a comportamientos de fenómenos físicos.

La postura de enseñanza se adapta sobre la idea del cambio conceptual, donde se entiende que el estudiante debe ser confrontado bajo ideas que le permita hacer transición a nuevos conceptos para este caso: el espacio y uso de la herramienta matemática, pero entendiendo que las concepciones previas de los estudiantes no pueden explicar situaciones o fenómenos que se le muestra.

Ahora, en la discusión y explicación disciplinar del trabajo en tres bloques fundamentales, Álgebra, Topología y Haces. Se organiza entendiendo que cada elemento matemático genera su aporte para construir la variedad pseudoriemanniana, a la par que se pueden analizar desde el uso e interpretación que tiene para la física como para el concepto de espacio.

En un segundo momento, la atención se centra en el docente en formación, con el objetivo de analizar en profundidad el desarrollo que ha alcanzado, a lo largo de cinco semestres, en torno al concepto de espacio. Para ello, se realiza una intervención mediante la aplicación de un pretest a un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, pertenecientes al curso de Geometría y Física del periodo 2023-2.

El instrumento consta de cuatro preguntas orientadas a indagar cómo los estudiantes reconocen y comprenden el concepto de espacio. Se parte del supuesto de que estos cuentan con un bagaje previo que, aunque no necesariamente explícito, incluye el conocimiento de diversas teorías físicas, lo que permite caracterizarlos como una población con cierto grado de especialización.

Finalmente, los resultados obtenidos son objeto de análisis, con el propósito de servir como insumo para la posterior construcción de la propuesta de enseñanza.

Así mismo, este apartado presenta la metodología del trabajo para dar mayor claridad sobre cómo se estructurará el proceso en torno a la construcción de la propuesta. Se plantea la implementación de la SEA, en tanto que esta permite estructurar un ciclo orientado a la

investigación, que comprende el análisis del contexto, el diseño, la implementación y, finalmente, la evaluación. No obstante, en el presente estudio el alcance se limita a las dos primeras fases: el análisis del contexto y el diseño de la estrategia.

Por último, se plantea una propuesta de enseñanza fundamentada en el enfoque de cambio conceptual como estructura general, incorporando el aprendizaje colaborativo como mediador en el desarrollo de las sesiones planificadas. En este marco, el estudiante no es concebido únicamente como un individuo que incorpora o amplía nuevos conceptos, sino como un sujeto que construye activamente su conocimiento a partir de la interacción con otros. De este modo, se adopta una perspectiva constructivista en la que el aprendizaje emerge de procesos sociales, discursivos y de negociación de significados.

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La ciencia, entendida como construcción en constante evolución, ha atravesado diversas etapas en el desarrollo del conocimiento humano. Estos cambios se encuentran ligados en parte a visiones filosóficas que, no necesariamente tienen una visión colectiva de la propia ciencia, sino que hacen parte de las interpretaciones que dan los científicos, así como a los avances experimentales de cada época. Desde este contexto, se tiene la evolución de la noción de espacio, que cambia desde la noción newtoniana hasta la propuesta por Einstein, la cual no se produjo de forma espontánea ni lineal y requirió de un proceso histórico permeado por reflexiones filosóficas y desarrollos científicos y tecnológicos, los cuales se concretaron en parte en los modelos y la matemática asociada que se usa para describir el espacio en cada teoría.

Para entender cómo el concepto de espacio se transforma progresivamente hasta la concepción de espaciotiempo introducida por Einstein; hay unos precedentes alrededor de los límites filosóficos. Ya en tiempos de Newton, surgieron críticas significativas a su propuesta; una de las más destacadas fue la discusión generada por Leibnitz, quien argumentó que el espacio no debía entenderse como algo absoluto e independiente de los objetos que lo contienen, para Leibnitz, el espacio se describiría más como un concepto relacional: el espacio existe en tanto exista un orden de los cuerpos materiales, es decir, espacio como forma de describir las relaciones entre objetos. Es por esto por lo que la postura de Newton con su espacio absoluto e independiente de objetos y eventos tiene un fuerte rechazo por parte de Leibnitz quien encuentra una dificultad para entender el espacio como un contenedor o como una sustancia.

Un poco más adelante en la historia, en el siglo XIX, estas críticas adquirieron una nueva dimensión con las reflexiones de Ernst Mach, quien cuestionó la noción newtoniana de espacio y tiempo absolutos, argumentando que eran construcciones no verificables empíricamente o a través de la experiencia. En palabras de Mach, citadas por (Cárdenas & Botero, 2009) “Newton está cayendo en una concepción metafísica por cuanto tanto el espacio como el tiempo (absolutos) son cosas del pensamiento o construcciones mentales que no se pueden producir o contrastar en la experiencia” (p.59). En este sentido, Mach propuso que la inercia de un cuerpo no debía explicarse en relación con un espacio absoluto, sino como resultado de su interacción con la masa del resto del universo.

En contraste con estos debates filosóficos se sumó un aspecto teórico importante para construir la concepción de espacio, hacia finales del siglo XIX, el desarrollo y consolidación de la teoría electromagnética consignada en el tratado de Maxwell establece una velocidad constante para la propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Esto lleva a postular la existencia de un medio elástico para la propagación de dichas ondas, el llamado éter luminífero, lo que impulsa el surgimiento de una perspectiva teórica no absolutista, dando lugar a una visión filosófica igualmente relevante, así como a un marco científico fundamental en los aspectos humanos, que una vez más lleva a cuestionar la concepción newtoniana de espacio.

En consecuencia, el planteamiento de la existencia de esta sustancia que impregna todo el espacio, el éter, tiene problemas no solo por su imposibilidad de confirmarse experimentalmente, sino también los fundamentos de la teoría electromagnética bajo esta perspectiva establecerían que hay un sistema inercial particular preferente, a saber, el éter luminífero en reposo. La persistencia en la idea del éter como medio absoluto de referencia llevó a Hendrik Lorentz, a formular las hipótesis del “tiempo local” y de la contracción de las longitudes de los cuerpos en la dirección de su movimiento a través del éter, con el propósito de explicar ciertos resultados experimentales dentro de este marco conceptual (Díaz Caballero, 2011).

A pesar de que la solución de Lorentz permitía mantener la consistencia de las ecuaciones de Maxwell, conservaba la dependencia de la existencia del éter. Y además desde este marco, las transformaciones de Galileo eran insuficientes para describir fenómenos en los cuales las velocidades se acercaban a la velocidad de la luz. Con esta base conceptual, Einstein en 1905 presenta la teoría de la relatividad especial; explicando que las transformadas de Lorentz no se deben utilizar para el movimiento respecto al éter inmóvil sino desde el movimiento relativo al sistema de referencia inercial.

Paralelo a estas posturas conceptuales se encuentra una discusión con la formalización matemática de las teorías físicas. Mientras que la mecánica clásica se fundamenta inicialmente en la geometría euclidiana y el cálculo infinitesimal para describir el espacio desde el concepto de absoluto, existe una transición hacia la física moderna que marca una distinción crucial: la Teoría de la Relatividad Especial (TER) se sustenta en una geometría plana, el espacio-tiempo de Minkowski, mientras que la Teoría de la Relatividad General (TRG) integra plenamente geometrías no euclidianas para la descripción de los fenómenos. En este contexto, fue el desarrollo de la geometría diferencial lo que permitió formalizar el espacio-tiempo como una

variedad pseudoriemanniana, proporcionando el marco matemático para describir la curvatura dinámica del espacio - tiempo.

La pertinencia de realizar este recorrido histórico radica en la necesidad de contextualizar con el fin de comprender y participar en el desarrollo del concepto de espacio, el cual resulta fundamental para definir la manera en que se interpreta el mundo y se formalizan modelos para la descripción de los fenómenos que en él ocurren desde una visión particular, como la de Einstein, por ejemplo. Asimismo, se hace necesario atender, con igual nivel de exigencia, los distintos enfoques desde los cuales puede abordarse dicho concepto ya sean el filosófico, el epistemológico o el matemático. No obstante, esta diversidad y complejidad de las perspectivas obliga a delimitar el análisis y centrarse en un solo enfoque, para el caso del presente trabajo, el matemático.

Centrar la discusión en el eje matemático es entender que, de acuerdo con Díaz y Ortega (2022, citado en (Almea Zambrano, Yantalema de la Cruz, Aguirre León, Cadena Gómez, & Lara Lascano, 2025)), gran parte del razonamiento en física depende del lenguaje formal y del rigor matemático para su formulación, evaluación y comprensión. En este marco, la noción de pseudovariedad diferencial usada en la TGR adquiere un papel fundamental, ya que proporciona una estructura matemática que permite modelar un espacio continuo más general que el espacio euclidiano.

Así, la pseudovariedad diferencial, no solo es una herramienta formal, sino que se constituye en un marco fundamental para formalizar el concepto de espacio, en el caso particular el espacio-tiempo, desde una perspectiva matemática, que dialoga directamente con las necesidades conceptuales de la física moderna. Sin embargo, esta dependencia del formalismo matemático establece algunas dificultades en la enseñanza, dado que la comprensión del concepto de espacio-tiempo en la TGR queda mediada por estructuras abstractas que no siempre son accesibles en cursos previos a los de relatividad en los programas de Licenciatura en Física o de Física.

Esta necesidad de rigor matemático se concreta en la definición de la estructura del universo, tal como lo definen (Arias Abad, Quintero Vélez, & Vélez Caicedo, 2025):

“Mathematically, this means that spacetime should be modeled by a Lorentzian manifold, which may be curved. Minkowski spacetime is just the special case where there is no curvature. Gravity can be incorporated into special relativity by replacing Minkowski spacetime by a curved Lorentzian manifold. The following table describes this correspondence. (Arias Abad, Quintero Vélez y Vélez Caicedo, 2025, p. XXV).

En este marco, el modelar el espacio como una variedad muestra que los conceptos fundamentales de la física moderna no solo requieren de un alto nivel de formalización matemática, sino que además reestructuran las nociones mismas de espacio y gravedad con la que los estudiantes han dialogado desde la física clásica.

Es así como al revisar la forma en que ciertos conceptos evolucionan en la descripción de espacio de la Relatividad especial a la Relatividad general, es posible encontrar la relación que se muestra en la siguiente tabla:

Relatividad especial	→	Relatividad general
Minkowski spacetime	→	Lorentzian manifold
Timelike straight lines	→	Timelike geodesics
Minkowski spacetime is flat	→	Curvature (Gravity)
Lorentz invariance	→	Geometric character

Nota. Adaptado de Arias Abad, Quintero Vélez, & Vélez Caicedo, 2025, p. xxv

Esta evolución hace evidente la necesidad de una transición que le permita a los estudiantes de física o de la licenciatura en física entender el significado de la variedad a partir de la forma en que se conceptualiza ahora la descripción de espacio en la TGR.

Sin embargo, la enseñanza actual de la Relatividad General y, por extensión, la comprensión del concepto de espacio muestra que una alta formalidad matemática no es, por sí sola, suficiente para el aprendizaje efectivo. Como destaca (Christensen & Moore, 2012) sobre la enseñanza de la relatividad general a nivel de pregrado, uno de los desafíos principales radica precisamente en la dificultad matemática que representa el cálculo tensorial y la geometría diferencial para estudiantes que no han encontrado antes estos lenguajes en cursos previos de matemáticas o física.

Otra evidencia que permite comprender la pertinencia de hacer uso de la variedad pseudoriemanniana en relación con el espacio-tiempo es el volumen y la diversidad de producción académica existente sobre el tema. Al realizar una búsqueda en motores especializados como Google Scholar y en plataformas editoriales de alto impacto como Springer Nature con las palabras y condicionales RELATIVITY AND MANIFOLDS AND

EDUCATION, se obtiene una cantidad considerable de artículos, libros y capítulos de investigación como los que se muestran a continuación:

El caso del *artículo from triangles to manifolds* de Shiing-Shen Chern traza desde un enfoque matemático abrirse al uso de geometrías diferentes a la geometría euclidiana. La propia geometría ha dejado de ser un análisis de figuras rígidas para pasar al estudio de las propias estructuras del espacio. Un ejemplo claro es la evolución de los sistemas de coordenadas: mientras que en un primer momento el sistema cartesiano se caracterizó por concederle a cada punto del espacio un valor fijo y global, el enfoque de las variedades propone pasar a un sistema de coordenadas locales y arbitrarias. En este nuevo esquema, el espacio-tiempo se define como una variedad (manifold) que se describe mediante un atlas de mapas o cartas. Lo fundamental ya no es el valor numérico absoluto de la coordenada, sino la métrica y las leyes de transformación que permiten que la estructura física sea independiente del sistema de etiquetas elegido.

El artículo *Generalised Manifolds as Basic Objects of General Relativity* de Joanna Luc investiga el potencial de las variedades no-Hausdorff como objetos básicos en la Teoría de la Relatividad General (TGR). Esta propuesta surge de la necesidad de representar situaciones físicas que las variedades de Hausdorff convencionales no pueden describir adecuadamente, tales como las singularidades espacio-temporales y ciertos fenómenos de indeterminismo.

Es así como en este artículo, para organizar la estructura matemática de la teoría, la autora utiliza un criterio dividido en cuatro etapas: cinemática, dinámica, razonabilidad física y empírica. En esta investigación, cobra especial relevancia la etapa cinemática, entendida como la elección del marco matemático básico o 'escenario' de la teoría. En esta fase, no se imponen restricciones físicas ni ecuaciones de campo, sino que se define el lenguaje geométrico fundamental.

La autora sostiene que, en la etapa cinemática, las variedades no-Hausdorff son candidatas válidas para el marco básico de la TGR, ya que permiten definir las nociones esenciales de la geometría diferencial (como métricas y conexiones) necesarias para plantear el problema de la evolución y distribución de la materia, ofreciendo una estructura más flexible que no colapsa ante la presencia de singularidades."

La investigación define en la etapa cinemática los espacios diferenciales como marco básico, puesto que estos generalizan a las variedades tradicionales y permiten integrar situaciones

físicas que la variedad de Hausdorff excluye, como las singularidades, al tratarlas como parte constitutiva del espacio-tiempo.

Lo anterior, muestra que no se trata de un asunto restringido a un círculo académico reducido, sino de un campo de investigación consolidado y ampliamente desarrollado dentro de la física matemática y la geometría diferencial, con presencia sostenida en la literatura científica internacional.

En este sentido, trasladar la presente discusión sobre el formalismo asociado a la TGR y la variedad pseudoriemanniana al ámbito de la formación de los futuros docentes, como es el caso de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional resulta plenamente pertinente, no solo por las consideraciones previamente expuestas, sino también porque contribuye a robustecer y articular los contenidos desarrollados en los espacios de formación disciplinar específica, particularmente en asignaturas como Geometría y Física y Relatividad, tal como se evidencia en la estructura curricular del programa (Universidad Pedagógica Nacional, s. f.). De este modo, se favorece una integración conceptual que fortalece la comprensión teórica y formal de los fundamentos geométricos y físicos que estructuran el currículo, para el abordaje de cursos de física moderna que se ofertan en la licenciatura como Relatividad, Teoría General de la Relatividad o Agujeros Negros y Cosmología.

Con base en esto, para la investigación se propuso la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera la modelación del espacio como variedad pseudoriemanniana, articulada a través de una estrategia de enseñanza, permite aportar a la comprensión epistemológica del concepto de espacio en estudiantes de la Licenciatura en Física de la UPN?

OBJETIVOS:

Objetivo General

Explorar la construcción matemática del concepto de espacio que conduce a su modelación como variedad pseudoriemanniana con el fin de fundamentar el diseño de una propuesta de enseñanza para estudiantes de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional.

Objetivos Específicos

Revisar la evolución epistemológica y matemática del concepto de espacio desde las formulaciones clásicas hasta su modelación geométrica en la relatividad que da como resultado el espacio tiempo, considerando su formalización mediante variedades diferenciales.

Identificar las limitaciones y obstáculos epistemológicos asociados a la concepción clásica del espacio absoluto, presentes en la formalización de la mecánica newtoniana.

Construir una propuesta de enseñanza basada en la reconstrucción matemática del concepto de espacio que se establezca como antecedente para el abordaje del modelo de variedad pseudoriemanniana en estudiantes de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional.

ANTECEDENTES

Por la naturaleza del trabajo, las investigaciones elegidas son encaminadas al proceso de construcción de una propuesta para la enseñanza de la variedad pseudoriemanniana desde una visión particular que, en este caso es el concepto de espacio. Para ello se tuvo en cuenta investigaciones que se enmarcaran en el aporte a la conceptualización de espacio desde diferentes puntos de vista, ya sea histórico, filosófico y pedagógico, con relación a lo desarrollado en la mecánica clásica y la TGR.

Iniciando, en un contexto filosófico se encuentra una serie de trabajos encaminados en mostrar un proceso histórico sino una discusión, donde se destaca el trabajo de (Colchero, 2021), titulado *'La conceptualización del espacio: un análisis de sus posibilidades interpretativas'*. En este estudio, el autor realiza un recorrido deductivo en tres momentos diferentes. En primer lugar, aborda la Grecia antigua, trae a colación las discusiones filosóficas sobre el espacio, postura que pasa por Platón y Aristóteles. Posteriormente, analiza la abstracción de la matemática del espacio por parte de Euclides reflejado en la Geometría proposicional.

En un segundo momento de la discusión sobre la construcción del pensamiento moderno del espacio, hace partícipe a diferentes filósofos como lo son Galileo, Descartes, Leibniz, etc., aquí el trabajo muestra la relevancia para entender que la idea de espacio que hace hincapié Einstein no se limita una cuestión de definirlo como algo curvo, sino que es una condición donde se debe analizar lo tetradimensional, lo que implica liberarse de la condición

meramente tridimensional a la par que establece en esta dirección lo que representa tener un sentido físico de esta estructura.

Continuando con la discusión filosófica en el contexto local, destaca el trabajo de grado de (Pardo Ariza, 2021), titulado *“Análisis conceptual del espacio-tiempo como elemento para la enseñanza de la teoría especial de la relatividad”*. La autora articula su investigación en tres ejes fundamentales: discusiones filosóficas, físicas y pedagógicas. Para los propósitos de la presente propuesta, los aportes de orden filosófico y pedagógico resultan de especial relevancia.

En el ámbito filosófico, el documento hace hincapié en las posturas empiristas y relacionales de pensadores como David Hume y Ernst Mach. Pardo (2021) evidencia cómo las reflexiones de estos investigadores proporcionaron a Einstein el andamiaje epistemológico necesario para estructurar la Teoría de la Relatividad Especial (TER). Este análisis subraya una premisa vital para esta investigación: el formalismo matemático sólo adquiere verdadero significado en el plano de la física cuando está precedido por una profunda deconstrucción filosófica previa.

Desde la perspectiva pedagógica, la autora advierte que la enseñanza de la relatividad en el nivel universitario frecuentemente se reduce a la mera mecanización de ecuaciones y algoritmos. Como señala en su texto: “Suele ser llevada como un producto, es decir, se ve como un resultado y se omite de esta su pasado y futuro” (Pardo, 2021, p. 36). Esta crítica legitima directamente la presente propuesta, pues justifica la urgencia de formalizar la enseñanza de la variedad pseudoriemanniana no como un ente algebraico aislado, sino arraigada firmemente en la evolución conceptual y física del espacio.

Finalmente, la pertinencia de este trabajo radica en la comprensión crítica que desarrolla en relación con la TER. El documento, al analizar la relatividad especial desde un contexto que esté más allá de la interpretación llanamente algorítmica, brinda la base epistemológica indispensable para entender cómo estas nociones no solo se mantienen, sino que mutan y se completan al generalizar el concepto de espacio en la TRG.

Ahora, en concordancia con los antecedentes anteriores, pero desde una construcción matemática, se tiene el documento titulado *“Espacio físico-geométrico: ¿una relación exclusiva de la geometría euclidiana?”*, un trabajo de grado de la Universidad Pedagógica Nacional realizado por (Arévalo, 2018): En este trabajo se desarrolla un estudio de carácter histórico-epistémico respecto a la relación entre el espacio físico y el espacio geométrico; un eje fundamental del trabajo es que se cuestiona la exclusividad de la geometría euclidiana como modelo de descripción de la realidad que preferentemente se lleva a las aulas. El autor

describe el surgimiento de las geometrías no euclidianas a partir del problema del quinto postulado y analiza el impacto en la concepción del espacio no solo desde la física, sino que además integra dimensiones socioculturales, filosóficas y científicas en ciertas etapas de la historia humana. Finalmente, se muestra cómo estas nuevas geometrías amplían las posibilidades de comprensión del espacio físico, particularmente en el contexto de la física moderna, al mostrar que no existe una única geometría válida, sino múltiples marcos teóricos con distintos alcances y aplicaciones.

Este documento aportó al presente trabajo de grado al permitir comprender la evolución de la conexión matemática entre el concepto de espacio y la geometría. Aunque en un principio se asumía una relación unívoca fundamentada exclusivamente en la geometría euclidiana, esta termina siendo solo una interpretación particular tras la demostración de las geometrías no euclidianas y su posterior aplicación en la Teoría de la Relatividad General (TRG). Asimismo, el texto permite definir que la concepción del espacio es el resultado de una relación tripartita entre geometría, física y filosofía; por consiguiente, válida y fundamenta la necesidad de profundizar en el estudio de la variedad pseudoriemanniana para lograr una comprensión integral del concepto de espacio.

1. DISCUSION PARA LA ENSEÑANZA DE LA VARIEDAD PSEUDORIEMANNIANA

En el presente capítulo, se desarrolla toda la estructura conceptual que da pie a la construcción de la propuesta de la estrategia de enseñanza. Dicha estructura se organiza en tres pilares: la epistemología, la pedagogía y la matemática.

La necesidad de establecer un referente epistemológico favorece la construcción del conocimiento mediante el uso de procedimientos propios del trabajo científico. Asimismo, orienta la manera en que se organiza el proceso investigativo y permite delimitarlo en términos de alcance y de análisis de los resultados.

Por su parte, el referente pedagógico busca comprender el proceso formativo desde una perspectiva constructivista, particularmente en relación con la formación de docentes en física. Este enfoque se articula con el desarrollo disciplinar que orienta los objetivos del Departamento de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual plantea como propósito “fomentar en el estudiante una actitud crítica, interpretativa y creativa frente a la física, que le permita adquirir un conocimiento global y profundo de esta disciplina y, a su vez, le posibilite la formulación de propuestas pedagógicas para su enseñanza en los distintos niveles y modalidades de educación” (Universidad Pedagógica Nacional, s.f.)

En consonancia con esta perspectiva formativa, en relación con la enseñanza, esta resulta fundamental para el desarrollo de un proceso integral en la construcción del aprendizaje por parte del estudiante, el cual es previamente planificado y orientado por el docente. Dicho proceso reconoce las concepciones previas de los estudiantes y se reorganiza progresivamente a partir de la experiencia pedagógica y del contraste con el conocimiento científico. En el caso particular de esta investigación, se propuso el desarrollo de una estrategia de enseñanza basada en el enfoque de cambio conceptual, entendido como un proceso mediante el cual las concepciones iniciales de los estudiantes se transforman o reorganizan cuando entran en conflicto con nuevas explicaciones científicas (Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982).

Por último, la base disciplinar la cual es eje central, donde se pretende organizar lo descrito en los anteriores párrafos para generar la propuesta que, a su vez pretende mostrar los diferentes elementos matemáticos para la enseñanza de la variedad pseudorieymaniana, desde un desarrollo contextualizado para los estudiantes de la licenciatura, no solo su definición, además se realiza la descripción de la aplicabilidad que tiene en el proceso de aprendizaje, es decir, en la medida de lo posible la forma en que se aplica en la física.

1.1 Discusión continua del concepto de espacio.

Establecer una postura epistemológica para la presente investigación resulta fundamental, ya que permite organizar la manera en que se reconoce, construye y conduce el proceso de generación de conocimiento. En este sentido, se hace necesario evitar que el conocimiento científico sea descartado de manera prematura ante la aparición de una primera dificultad lógica o conceptual en una teoría, especialmente cuando esta cuenta con una estructura teórica sólida y consolidada

Sin embargo, para la investigación es crucial comprender que el concepto de espacio en física no surge de una ruptura total con ideas previas, se va construyendo progresivamente de la mano de argumentos teóricos más refinados, que no desplazan ideas previas, al contrario, lo que hace es contextualizar ideas anteriores.

Esto demuestra que los avances científicos no siempre implican una sustitución total del conocimiento anterior, sino más bien una reformulación integradora que lo ubica en un nuevo marco conceptual más general. Para suplir esas situaciones, se enmarcará la postura de la presente investigación más aproximada a la de Imre Lakatos.

El planteamiento por Lakatos se conoce como programas de investigación científica, como menciona (Cova, Inciarte, & Prieto, 2005):

... considerada también como Unidad de Análisis Epistemológica constituida por una secuencia de teorías científicas con continuidad espacio-temporal que relaciona a sus miembros, estableciéndose versiones modificadas según un plan inicial común. Los elementos esenciales de un Programa son: el Núcleo Firme, el Cinturón Protector y las *Heurísticas*. (pp.3)

Para aclarar un poco estos conceptos, el núcleo firme es simplemente el centro del programa, posee los supuestos básicos del mismo, sin los cuales este no podría existir. A la vez que su enfoque es de orden teórico más que empírico. El núcleo está protegido contra las refutaciones con un cinturón protector de hipótesis auxiliares, con condiciones iniciales y enunciados observacionales ingeniosas, representados en condiciones especiales como lo que no puede ser una hipótesis ad hoc, o sea, no tiene una verificación o desaprobación fuera de ella. Otra condición es que las hipótesis en sí mismas no deben afectar el núcleo fuerte.

El programa de investigación tiene también una heurística, esto es, reglas metodológicas y a su vez una poderosa maquinaria para la solución de problemas que, con la ayuda de técnicas

de orden lógico-matemáticas sofisticadas, asimila las anomalías que puedan falsearla, desarrollando dos momentos, una heurística negativa y otra positiva. La primera se entiende como los elementos que configuran al cinturón protector que no se pueden modificar o rechazar y son subyacentes al programa, su núcleo firme. Para el caso de la heurística positiva, son un conjunto de sugerencias de como cambiar y desarrollar las versiones refutables del programa científico, entonces se construyen nuevas hipótesis auxiliares para seguir configurando el cinturón protector bajo la premisa de seguir mejorando técnicas matemáticas y experimentales idóneas.

Por lo tanto, a partir de lo presentado en esta sección, se puede entender el conocimiento catalogándolo como un proceso dinámico y constructivo, esto, debido que cada avance que se realice no se hace de forma aislada, sino que se tiene como bases precedentes y no tiene un punto de partida definido o explícito, lo cual indica que evoluciona continuamente. Dicho proceso moldea los fundamentos a medida que se construye, en este sentido, se debe entender que el conocimiento no se encuentra cerrado o es definitivo, sino que por el contrario está abierto a nuevas ideas, conceptos o perspectivas que pueden incluso no ser parte de las intenciones originales.

Es así como la acción misma de conocer requiere de una constante reelaboración y cada nueva propuesta contribuye a fortalecer y a transformar el conocimiento. Esta visión abierta, permite que las construcciones y aportes posteriores permitan reorientar el sentido mismo del conocimiento. Con esto se generan estructuras flexibles y organizadas para la incorporación de nuevas concepciones sin que se requiera una construcción de teorías o conceptos desde ceros.

Para el caso particular del presente trabajo de grado, el enfoque de Lakatos proporciona el marco ideal para comprender y estructurar la propia evolución teórica del concepto de espacio. En la mecánica clásica, la concepción de un espacio absoluto, inmutable y modelado por la geometría euclidiana operó como un núcleo firme. Cuando comenzaron a surgir anomalías teóricas y observacionales que desafiaban este paradigma mecanicista, por ejemplo, la constancia de la velocidad de la luz o la precesión de Mercurio, la ciencia intentó inicialmente ajustar su cinturón protector mediante hipótesis auxiliares tales como el éter, para preservar intacta la idea del espacio clásico.

Sin embargo, el progreso científico exigió la consolidación de un nuevo programa de investigación movilizado por una heurística positiva robusta. Es aquí donde la geometría diferencial y el concepto de variedad pseudoriemanniana adquieren una relevancia central. La

variedad no irrumpe como una ruptura destructiva que invalida por completo a la geometría clásica, sino que se presenta como esa nueva y poderosa maquinaria lógico-matemática que asimila las anomalías. Al modelar el universo como una variedad, el antiguo espacio euclidiano no se desecha, sino que se recontextualiza, quedando subsumido como un caso válido a escala estrictamente local dentro de un tejido global que ahora es curvo y dinámico.

En este sentido, la propuesta de enseñanza que se desarrolla en esta investigación asume este mismo principio epistemológico. Abordar la Teoría de la Relatividad General (TRG) no implica enseñar la superación de un error, sino comprender cómo la ciencia sofisticada sus métodos. La variedad pseudoriemanniana se erige conceptualmente como el andamiaje que organiza, estructura y da coherencia a las nuevas exigencias de la física moderna.

1.1.1 Condición del espacio en la mecánica clásica

Fundamental para entender la concepción del espacio a partir de la mecánica clásica es ir a la definición plasmada por Newton en *Philosophiae naturalis principia mathematica*. En el escolio dos de acuerdo con (Newton, Principios matemáticos de la filosofía natural, 1987):

El espacio absoluto, por su naturaleza y sin relación a cualquier cosa externa, siempre permanece igual e inmóvil; el relativo es cualquier cantidad o dimensión variable de este espacio, que se define por nuestros sentidos según su situación respecto a los cuerpos, espacio que el vulgo toma por el espacio inmóvil: así, una extensión espacial subterránea, aérea o celeste definida por su situación relativa a la Tierra. El espacio absoluto y el relativo son el mismo en especie y en magnitud, pero no permanecen siempre el mismo numéricamente (Newton, 1687/1987, pag 88)

Un análisis a este escolio es, a pesar de que Newton no define con rigurosidad el espacio, si considero necesario establecer las distinciones entre lo verdadero y lo absoluto, lo verdadero y lo aparente, lo matemático y lo común. Como el espacio homogéneo e indiferenciado, sus partes son imperceptibles e indistinguibles para nuestro sentido, de manera que estos tienen que ser sustituidos por medida sensibles. Estos sistemas de coordenadas, como se llaman ahora, constituyen espacios relativos. (Jammer, pag 132)

proposiciones lógicamente deducibles se deben traducir en un formalismo geométrico que en este caso constituye la geometría Euclidiana, aunque lo extrapola a una condición especial, pues de acuerdo con (Jammer, 1970), no constituyen un sistema puramente hipotético de proposiciones lógicamente deducible de axiomas y definiciones, sino que la geometría no es otra cosa que una rama particular de la mecánica. Entendiéndose que definir o construir elementos como rectas o círculos nacen de la necesidad de resolver un problema intrínsecos de la mecánica

Si bien se ha expuesto la condición bajo la cual se estructuró inicialmente la concepción clásica del espacio, es preciso profundizar en cómo este concepto se transformó al integrar nuevas herramientas matemáticas y discusiones filosóficas como es el caso del Leibniz.

El análisis de la mecánica se encaminó hacia el cálculo infinitesimal, formalizado mediante el método de fluxiones de Newton y, paralelamente, por Leibniz. No obstante, la cronología de estas publicaciones, con la descripción de Leibniz dándose a conocer en un primer momento, desencadenó una condición metodológica particular en el mundo científico que se mantiene en la actualidad. Para el caso de filosófico es la postura relacional de Leibniz, el espacio no es una entidad absoluta e independiente, sino el orden de las coexistencias; es decir, un sistema de relaciones que solo adquiere sentido y existencia a través de las posiciones relativas de los objetos materiales.

Como consecuencia de las consideraciones expuestas desde la mecánica clásica, la geometría termina constituyéndose como un cinturón protector: lejos de limitar el contexto filosófico o matemático, funciona como un puente comunicante entre ambas posturas, manteniendo intacto el objetivo de la mecánica de explicar el movimiento de los cuerpos. Asimismo, reflexionar sobre el rol de la geometría en el concepto de espacio resulta fundamental para reconocer sus verdaderas potencialidades. Es necesario dejar de concebirla como un elemento inerte o un mero soporte matemático de los fenómenos físicos, para pasar a entenderla en toda su dimensión, por ejemplo, como el entramado lógico que permite construir, modelar y extender la percepción que tiene el observador sobre la realidad física.

1.1.2 Condición del espacio en la Relatividad

Enmarcar el concepto de espacio en la discusión propiamente de la relatividad en todo su conjunto exige reconocer la complejidad inherente a cada uno de sus elementos: físico, geométrico, matemático y filosófico. Este recorrido inicia en el momento en que Einstein logra que confluya toda una discusión histórica sobre los diversos sistemas conceptuales de la mecánica clásica. Es decir, la superación de la pugna entre el espacio concebido como un escenario absoluto, inmutable y contenedor (postulado por Newton y modelado por la geometría euclidiana) y las agudas críticas de pensadores como Leibniz y Mach, quienes argumentaban desde el relacionalismo que el espacio carecía de sentido físico si se le despojaba de la interacción de la materia.

Al dar el salto hacia la Teoría de la Relatividad Especial, se analiza cómo estas nociones clásicas colapsan. Desde un punto de vista físico y filosófico, el espacio deja de ser una entidad independiente y se funde con el tiempo para garantizar la invarianza de la velocidad de la luz en

todos los marcos inerciales. Matemáticamente, el escenario euclidiano es reemplazado por el espaciotiempo plano de Minkowski. Como consecuencia directa de esta transición, resulta necesario "abandonar la intuición del espacio como un contenedor absoluto e independiente" (Pardo Ariza, 2021, p. 15), demostrando que, si bien la simultaneidad y las distancias se vuelven relativas al observador, la estructura tetradimensional en su conjunto sigue funcionando como un escenario de fondo rígido.

Ahora bien, cuando Einstein busca dar solución al dilema de la relatividad para marcos acelerados, produce una serie de acontecimientos espectaculares para el conocimiento humano. La Teoría de la Relatividad General (TRG) obliga a trascender el entendimiento de cómo se percibe y construye el espacio en espacio-tiempo, dotándolo de una geometría dinámica que se curva ante la presencia de masa y energía.

Esa misma virtud de permitir nuevas perspectivas implica directamente, para el caso de este trabajo, que hablar de la TRG sin discutir sobre el espacio (espacio-tiempo) desde lo conceptual termina reduciendo la teoría a una simple charla matemáticamente compleja que se encierra exclusivamente para los expertos del tema. Es por eso por lo que resulta fundamental ahondar en esta discusión epistemológica. Un ejemplo claro se evidencia en el planteamiento del problema: las concepciones cinemáticas de Newton y Einstein pueden seguir funcionando en sus respectivos regímenes sin ir en contra de la ciencia, a pesar de que la visión del espacio newtoniano tenga limitantes insalvables frente a la postura relativista de las grandes escalas.

Para el caso específico de la Teoría de la Relatividad General (TRG), que hace uso de la variedad pseudoriemanniana para modelar el espaciotiempo, la histórica discusión entre el relacionismo y el sustancialismo no solo se mantiene, sino que se agudiza. En este escenario, (Norton, 2011), bajo una perspectiva ontológica, reformularon la idea del "argumento del agujero" desarrollado originalmente por Einstein en 1913. Estos autores demostraron que el espaciotiempo se vuelve incompatible con el determinismo físico desde la condición del sustancialismo radical de la variedad diferencial. Al considerar que los puntos del espaciotiempo desnudo poseen una *haecceidad* (una identidad primitiva e independiente de las distancias y del campo métrico), se entra en conflicto directo con la covarianza general. Esto ocurre por el hecho de que la invariancia que permite el difeomorfismo activo, en términos matemáticos, generaría distribuciones del campo gravitatorio distintas dentro de una región vacía; desde la visión de la física, el hecho de que el punto tenga identidad propia impediría a las ecuaciones determinar una única evolución temporal.

Frente a este colapso del determinismo, que destruye la idea del espacio como sustancia independiente, la discusión exige reevaluar qué elemento del formalismo matemático encarna realmente la realidad física. La visión de la variedad como un contenedor inerte sobre el cual se vierte el campo métrico ha sido fuertemente cuestionada. Desde el sustancialismo del campo métrico, Hoefer (1996) argumenta que una variedad topológica sin métrica carece por completo de propiedades espaciotemporales tangibles, tales como las relaciones de distancia. Esta postura resuena con la maduración conceptual del propio Einstein, quien concluyó que el espaciotiempo no posee existencia autónoma, es puramente una cualidad estructural del campo gravitatorio y, si se elimina el campo métrico, no sobrevive un escenario topológico de fondo (Hoefer, 1996).

Para resolver esta tensión sin desechar la estructura matemática de la TRG, han surgido diversas contraargumentaciones y alternativas que redefinen la individuación de los puntos del espaciotiempo. Por un lado, el *esencialismo métrico* propuesto por Maudlin (1988) postula que las propiedades métricas de los puntos son inherentes a su esencia; separar a un punto de su métrica resulta en un "absurdo metafísico", lo que clausura la proliferación de mundos alternativos del argumento del agujero. En una vía similar, (Bartels, 1996) sugiere un esencialismo fundamentado en las capacidades causales de los puntos. Otras aproximaciones, como la *teoría de las contrapartidas*, niegan la identidad trans-mundana de los puntos para lograr compatibilidad con la Equivalencia de Leibniz (Butterfield, 1989).

Por otro lado, enfoques más holísticos como el *realismo de roles estructurales* (Mundy, 1992) y el *globalismo* (Perry, 2017) sostienen que los puntos no son entidades absolutas. Son, en cambio, posiciones relativas dentro de una red de isomorfismos (Mundy, 1992) o aspectos derivados de la totalidad del espaciotiempo (Perry, 2017). El uso humano de sistemas de coordenadas genera la falsa ilusión de una identidad primitiva, pero la realidad del espaciotiempo reside en su estructura relacional y global, no en sus partes aisladas.

En definitiva, esta gran cantidad de investigadores ha aportado soluciones y matices que no solo responden al dilema ontológico original, sino que han entrado a gravitar en otros aspectos críticos de la física contemporánea. El debate originado por el argumento del agujero se extiende hoy a las teorías de la gravedad cuántica y a la profunda cuestión de las libertades de gauge en teorías físicas (Norton, 2011), siendo clave conectar este dilema con planteamientos que buscan definir, en última instancia, la verdadera naturaleza geométrica de la realidad.

1.2 Alrededor de la Enseñanza de la física

Esta propuesta, para la enseñanza de la física toma como referente el constructivismo, corriente pedagógica fundamentada en el dinamismo de la realidad, esto quiere decir que la relación sujeto-aprendizaje se configura desde un reconocimiento a saberes previos en interacción con el entorno. (Trenas, 2009) señala que "El constructivismo es un término que se refiere a la idea de que las personas construyen ideas sobre el funcionamiento del mundo y, pedagógicamente construyen sus aprendizajes activamente, creando nuevas ideas o conceptos basados en conocimientos presentes y pasados." (p.4.)

Desde esta perspectiva el rol del estudiante no se asume como agente pasivo, sino que toma protagonismo en tanto este es partícipe de la construcción de su realidad. En este sentido, el conocimiento no es concebido en una relación unidireccional del maestro al estudiante, sino que hace parte del bagaje de las experiencias vividas de ambos.

1.2.1 Estrategia de Enseñanza

En el contexto de la presente investigación, los profesores en formación a quienes se dirige la propuesta han recorrido un proceso formativo estructurado de acuerdo con el enfoque curricular del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional. Dicho proceso se organiza en un ciclo de formación compuesto por cuatro momentos, en los que la formación disciplinar de soporte y la formación disciplinar específica se articulan de manera sinérgica. Este recorrido les ha permitido apropiarse de herramientas matemáticas y conceptos físicos que favorecen el análisis, la interpretación y la ampliación de diversas ideas y problemáticas que la física ha desarrollado en su propósito de comprender y explicar el universo.

En este marco, el concepto de espacio forma parte de las concepciones iniciales de los estudiantes, por lo que resulta pertinente asumirlo como punto de partida para el diseño de una estrategia de enseñanza orientada a la comprensión de la variedad pseudoriemanniana y a su posterior formalización conceptual.

Entrar en el ámbito de la enseñanza de la física, es entrar a un mundo inmenso de investigación lleno de enfoques que hacen uso de elementos epistemológicos y filosóficos. Un caso es pensar que el resultado de aprendizaje yace en la relación entre lo que se le enseña al alumno y sus propias ideas; es un caso que hace parte del constructivismo y tiene como nombre el cambio conceptual (Garritz Ruiz, 2018).

El cambio conceptual propuesto por Posner et al., Según Garritz (2018), "plantear una teoría bien articulada que describa o explique las dimensiones sustantivas del proceso por el que las

personas cambian sus conceptos centrales y organizadores, desde un conjunto de conceptos a otro, incompatible con el primero.” (p.1). Entender esta propuesta debemos ahondar desde la perspectiva epistemológica, la cual se posa en (Lakatos, 1983), postura que reconoce que el proceso científico va ligado en la medida de ir encontrando ideas que puedan potencializar conceptos previos o por el contrario las va dejando rezagadas poco a poco con un marco conceptual fuerte, que demuestre las falencias que tiene para responder a las nuevas investigaciones.

Así mismo, el cambio conceptual puesto en práctica en la intervención tiene unos parámetros epistemológicos claros. En un primer momento, se reconoce que el estudiante posee una serie de ideas previas a través de las cuales intenta comprender los nuevos fenómenos; a este proceso inicial se le denomina *asimilación*. Sin embargo, si estas ideas previas resultan ser inadecuadas o insuficientes para anclar los nuevos conceptos físicos, el estudiante debe experimentar una reestructuración cognitiva que le permita hacer la transición hacia el objetivo de aprendizaje.

Esta situación es conocida como *acomodación*, un proceso que, de acuerdo con el modelo clásico del cambio conceptual (Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982), requiere que se cumplan tres condiciones fundamentales para que el estudiante abandone su concepción previa: insatisfacción inteligible, verosímil y provecho.

El primero hace énfasis en que las personas o en este caso los estudiantes solo encuentran la necesidad de hacer un cambio conceptual cuando los conceptos que han interiorizado no son capaces de resolver problemas. La inteligibilidad radica en que el nuevo concepto es comprensible para el sujeto, se relaciona con su experiencia y es necesario para iniciar un cambio. La verosimilitud actúa en el momento en el que el estudiante está en la capacidad de representar y percibir como creíble una nueva idea. Por último, el provecho, es cuando los nuevos conceptos resuelven problemas mejor que los anteriores, es útil y genera satisfacción. De esta manera el sujeto hará el cambio conceptual. (Garritz, 2018; Moreira & Greca, 2003; Vélez, 2013).

Para finalizar, el enfoque de cambio conceptual en la presente investigación es pertinente, dado que el concepto central que se pretende abordar como es el concepto de espacio requiere la comprensión de diversos elementos fundamentados en perspectivas filosóficas y epistemológicas particulares. Asimismo, se trata de un concepto que ha presentado una notable complejidad a lo largo de la historia de la física, lo que hace necesario promover procesos de

aprendizaje que permitan a los estudiantes reorganizar y profundizar sus concepciones iniciales en torno a este.

El espacio no puede concebirse como una noción neutral ni estática; por el contrario, ha sido objeto de intensos debates a lo largo de la historia, tal como se ha mostrado en los apartados anteriores de este trabajo. En este breve recorrido histórico, el concepto pasó de ocupar un lugar apenas perceptible en la reflexión filosófica y científica, a ser entendido como una entidad absoluta e inmutable en la mecánica clásica. Posteriormente, con la teoría de la relatividad de Einstein, adquirió un carácter dinámico, estrechamente vinculado al tiempo y a la materia mediante relaciones de dependencia mutua.

La implementación del pretest permitió, en este contexto, identificar las concepciones previas que los estudiantes poseen acerca del concepto de espacio en física. Estas concepciones, en muchos casos, se encuentran fuertemente influenciadas por la experiencia cotidiana y, pese al recorrido académico de los docentes en formación, no siempre reflejan una comprensión claramente fundamentada desde la disciplina. Hacer explícitas estas ideas constituye el punto de partida para promover un proceso de reestructuración conceptual, orientado a que la comprensión del espacio se articule con los fundamentos necesarios para abordar conceptos centrales de la teoría de la relatividad. En este sentido, la transición desde la concepción clásica del espacio hacia la perspectiva relativista representa, en sí misma, una ruptura epistemológica, ya que exige cuestionar intuiciones profundamente arraigadas tanto en los estudiantes como en los futuros docentes.

También, el abordaje desde esta perspectiva de enseñanza no se limita a los aspectos superficiales de lo que deben aprender los estudiantes, sino que permite hacer una reflexión sobre cómo se puede llevar el conocimiento científico a las aulas. El tratamiento del concepto de espacio desde la perspectiva del cambio conceptual pretende además generar un cuestionamiento en el docente en formación sobre la manera en que se construyen las teorías físicas y cómo hay que establecer un marco completo para hablar de una descripción puntual del concepto contextualizado en estas teorías. La evolución de los conceptos, como el de espacio, en física le permite al estudiante y docente en formación enriquecer su aprendizaje para lograr un mejor entendimiento de teorías modernas, el despertar el interés genuino sobre aprender temas de física moderna en estudiantes de la licenciatura en física muestra que más allá del cambio en el tratamiento matemático de los fenómenos, enmarcados en unos límites específicos, se requiere de toda una forma diferente de interpretar la física a través de las teorías modernas.

1.2.2 Aprendizaje Colaborativo

En el marco del cambio conceptual como estrategia de enseñanza, es importante extender la experiencia de los estudiantes con la búsqueda de nuevas concepciones, para el caso del trabajo es el concepto de espacio y su uso para entender la variedad pseudoreimmaniana, esto se logra generando, complementando la enseñanza de estrategias dentro del aula para que el estudiante en su proceso de aprendizaje sea más fructífero. Una estrategia dentro del cambio conceptual es “Organizar la instrucción de forma que los profesores puedan pasar una parte importante de su tiempo diagnosticando los errores del pensamiento de sus estudiantes e identificando las acciones utilizadas por los mismos para resistir la acomodación” (Garritz Ruiz, 2018)

Una estrategia bajo la recomendación anterior y que mantenga el enfoque constructivista sería hacer uso del aprendizaje colaborativo, pues se entiende que “es otro de los postulados constructivistas que parte de concebir a la educación como proceso de socioconstrucción que permite conocer las diferentes perspectivas para abordar un determinado problema, desarrollar tolerancia en torno a la diversidad y pericia para reelaborar una alternativa conjunta” (Marqués, 2012).

En concordancia con lo anterior, el aprendizaje colaborativo puede precisarse desde una perspectiva más operativa y metodológica. En este sentido, lo define (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, s.f.):

“En su sentido básico, aprendizaje colaborativo (AC) se refiere a la actividad de pequeños grupos desarrollada en el salón de clase. Aunque el AC es más que el simple trabajo en equipo por parte de los estudiantes, la idea que lo sustenta es sencilla: los alumnos forman "pequeños equipos" después de haber recibido instrucciones del profesor. Dentro de cada equipo los estudiantes intercambian información y trabajan en una tarea hasta que todos sus miembros la han entendido y terminado, aprendiendo a través de la colaboración” (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, s.f.)

Así mismo, esta estrategia no solo facilita al docente la organización del curso y el diagnóstico continuo del proceso de aprendizaje, sino que también aporta mayor claridad en la consecución de los objetivos por parte del estudiante. En efecto, la interacción con otros

compañeros, bajo las mismas premisas planteadas en clase, favorece el enriquecimiento de las ideas, al permitir la confrontación y el reconocimiento de diversos puntos de vista.

Por último, entender al estudiante como un agente no pasivo, que asume protagonismo en tanto es participe de la realidad y el uso del aprendizaje colaborativo permite una mayor construcción de experiencias, ya sea desde el aprendizaje autónomo, la convivencia con pares en torno a la discusión de saberes, generando habilidades comunicativas, dando pie a transformar y complejizar su aprendizaje.

1.3 Fundamento matemático y la relación con el espacio.

La física, matemática y la geometría convergen en la exploración conjunta del espacio, proporcionando un marco conceptual para comprender no solo las leyes fundamentales, sino también la esencia misma de la realidad que habitamos. Una exploración dinámica que se encuentra acompañada por un enfoque filosófico, ya que indaga acerca de la naturaleza intrínseca del espacio, la realidad, la existencia de entidades geométricas, y la relación entre el observador y lo observado, lo cual ha impulsado investigaciones que han dado forma a la manera en que concebimos y aplicamos la geometría y la física.

Ahora, el resultado de lo anterior se acobia en un cinturón protector, en términos Lakatianos porque va encaminado hacer uso de los formalismos matemáticos robustos que impiden derrumbar las construcciones teóricas. Aunque parezca lineal el desarrollo de los formalismos matemáticos, es un sistema de bifurcaciones conectados unos a otros que se reduce a un sistema lineal, facilita la comprensión y el uso para nuevos desarrollos.

En consecuencia, el estudio de la geometría se ha abordado desde diferentes perspectivas. En primer lugar, cabe destacar el desarrollo matemático de los griegos, específicamente lo expuesto mediante postulados, definiciones y proposiciones en la obra conocida como los *Elementos* de Euclides. En el primer libro se axiomatiza toda su construcción, un hecho que ha estimulado la curiosidad humana, principalmente por la forma en la que se presentan los primeros cuatro postulados. Con respecto al quinto, este establece: “... y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos” (EUCLIDES, Vega, & Puertas Castaños, 2000)).

Los primeros cuatro postulados son totalmente intuitivos y no dejan margen a la interpretación, pues abordan operaciones elementales como la construcción de segmentos, rectas, círculos y la congruencia entre ángulos. En contraste, el quinto postulado es todo lo

contrario: resulta mucho menos evidente y parece requerir de los postulados anteriores para su justificación o interpretación.

Curiosidad que se pudo transformar en conocimiento en pleno, al poder demostrar que este postulado es independiente bajo los trabajos desarrollados por Gauss, Bolyai y Lobacheski. Estos matemáticos, en momentos separados y con mayor aportación de los dos últimos, generan geometrías que se caracterizan en trabajar bajo las condiciones de los cuatro postulados de Euclides, pero se construyen en un espacio no plano, ya sea elíptico o hiperbólico.

En el desarrollo de otras ideas que dan razón de la geometría, se destaca los planteamientos de Newton y Leibniz con la construcción del cálculo diferencial. Gracias a sus técnicas en la resolución de problemas, no solo permitió construir la geometría desde una visión infinitesimal, sino aportó en el análisis de esta en términos del entendimiento de las curvas y superficies, al punto de unirse con elementos elaborados en otras ramas de las matemáticas como la topología; todo lo anterior llegando a definir toda una rama específica llamada geometría diferencial con una gran relevancia en la física, pues en un acápite de esta geometría se encuentra un término fundamental llamado variedad diferencial, aunque globalmente puede ser compleja, es un conjunto de puntos donde la vecindad de cada punto se comporta localmente como un espacio euclidiano, lo que permite describir y relacionar estas vecindades mediante funciones diferenciables.

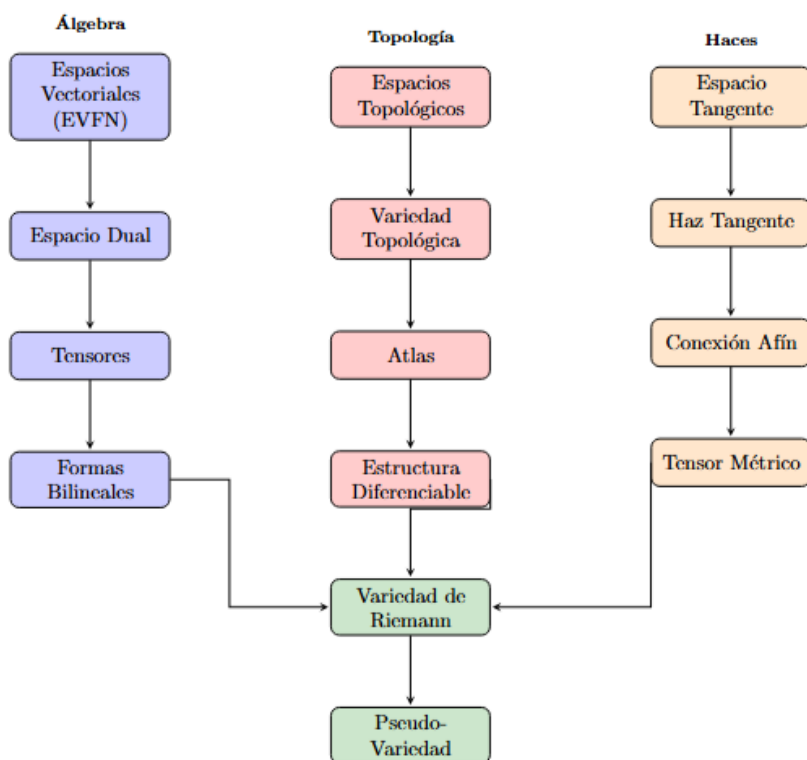
Asimismo, la adopción de estas herramientas matemáticas implica reconocer cómo se ajustan a las exigencias de la física, tanto en su dimensión fenomenológica como epistemológica. En este contexto, la discusión se articula en torno a la concepción del espaciotiempo en la Teoría General de la Relatividad. Desde la perspectiva einsteiniana, el espacio deja de concebirse como un escenario absoluto o un simple contenedor independiente de los fenómenos; por el contrario, su estructura dinámica se convierte en parte constitutiva de los propios fenómenos físicos.

Esta concepción exige analizar detalladamente cada uno de los elementos que permiten definir matemáticamente el espacio. De manera general, dicha descripción se establece inicialmente mediante un par ordenado conformado por una variedad diferencial y un tensor métrico, estructuras cuya formalización y desarrollo serán abordados en los apartados posteriores.

Es por ello por lo que, la unión de estos saberes en un solo propósito (la variedad pseudoriemanniana), requiere buscar un orden que permita alcanzar el objetivo de este trabajo. Teniendo presente lo anterior se organizan los saberes (topología, álgebra, etc), en un

orden armónico, progresivo y contextualizado de cada tema, generando una continuidad en el proceso de aprendizaje del maestro en formación. Se verá reflejado en el mapa conceptual de la Figura 1.

Figura 1 Ruta general para el aprendizaje de la pseudovariedad riemanniana. Elaboración propia



Como se observa en el mapa conceptual, hay tres bloques fundamentales que construyen el propósito disciplinar del trabajo. La organización corresponde en cómo se define la pseudovariedad de Riemann, pero solo se presentan unos elementos fundamentales, esto con el fin de mostrar en este apartado un análisis más conceptual sobre lo que estos aportan para la construcción de espacio desde una visión geométrica, física y matemática.

Antes de entrar en el análisis, es importante precisar que el propósito de este apartado es ofrecer una comprensión de cómo el concepto de espacio puede abordarse desde una perspectiva matemática. En caso de requerirse definiciones más detalladas o un desarrollo conceptual más amplio, estas se encuentran disponibles en el Anexo 2. Pues bien, el bloque correspondiente a la estructura algebraica como se evidencia en la ruta de aprendizaje (Figura 1), se organiza una secuencia de estructuras cuya finalidad no consiste solamente en introducir nuevos contenidos matemáticos, sino en mostrar cómo el concepto de espacio se enriquece mediante la incorporación de nuevas propiedades. Cada estructura responde a una limitación de la anterior y amplía la capacidad para describir los fenómenos físicos. De esta manera, transitar desde la

topología hasta la variedad pseudoriemanniana no constituye una ruptura entre disciplinas, es una evolución conceptual sustentada en la incorporación sucesiva de estructuras matemáticas cada vez más generales.

En matemáticas, el término espacio no designa un único objeto, sino una familia de estructuras definidas sobre un mismo conjunto. Dependiendo de las propiedades que se incorporen, dicho conjunto puede adquirir estructura topológica, vectorial, métrica o diferenciable.

En consecuencia, el concepto de espacio no está determinado únicamente por los elementos que lo conforman, son las relaciones matemáticas que se posibilitan establecer entre ellos. Desde esta perspectiva, la construcción del concepto de espacio puede entenderse como un proceso de enriquecimiento estructural, donde cada nueva organización permite describir propiedades que anteriormente no podían formalizarse.

El primer nivel de esta construcción corresponde a la estructura topológica, cuya finalidad consiste en establecer relaciones de continuidad, vecindad y conectividad entre los puntos del conjunto sin introducir todavía nociones de longitud, dirección o distancia. Formalmente, un espacio topológico se define como el par (X, τ) , donde X representa un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X que satisface los axiomas de una topología. Para el contexto del concepto del espacio, es pertinente en la medida que modera el obviar la idea de continuidad, obligando a discutir en un primer momento sobre la conexión física y matemática para descripción de un evento. Para esto resulta de particular interés el espacio de Hausdorff o espacio T_2 , definido por la condición de que para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que:

$$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

No obstante, la topología general descrita hasta el momento únicamente permite establecer propiedades cualitativas como la continuidad y la conectividad. Si bien es posible introducir una noción de distancia dotando al conjunto de una métrica (espacio métrico), la física requiere más que solo cuantificar separaciones: exige herramientas matemáticas para representar desplazamientos direccionales, superponer magnitudes y componer movimientos mediante operaciones rigurosas. Surge entonces la necesidad ineludible de incorporar una estructura algebraica.

Esta necesidad conduce al Espacio Vectorial Finito Normado (EVFN), definido sobre el cuerpo de los números reales. En esta estructura, los elementos adquieren un carácter lineal: pueden sumarse entre sí y multiplicarse por escalares, satisfaciendo los axiomas de un espacio vectorial. La incorporación simultánea de una norma

$$\|\mathbf{v}\|$$

permite asignar una longitud a cada vector y definir una distancia entre dos puntos mediante:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Desde la perspectiva de la física clásica, este modelo constituye la formalización matemática del espacio absoluto newtoniano, donde todos los puntos poseen la misma estructura lineal y las reglas para medir permanecen invariantes en toda la extensión del espacio.

Sin embargo, un espacio vectorial no determina la forma en que sus elementos son representados. Para expresar cualquier vector es necesario seleccionar una base:

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

constituida por vectores linealmente independientes que generan todo el espacio. Respecto a esta base, cualquier vector puede escribirse como:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

Las cantidades v^i reciben el nombre de coordenadas y dependen exclusivamente de la base elegida.

Esta observación posee un profundo significado conceptual. Tradicionalmente, la enseñanza de la geometría y de la física orienta en su mayoría presenta el espacio mediante sistemas cartesianos ortonormales, generando la idea de que la geometría depende necesariamente de ejes perpendiculares formados por vectores unitarios. Sin embargo, el álgebra lineal demuestra que un mismo espacio vectorial admite infinitas bases diferentes. Sea una segunda base:

$$\mathbf{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$$

no necesariamente ortogonal ni ortonormal. El mismo vector queda representado mediante:

$$\mathbf{v} = w^i \mathbf{f}_i$$

de manera que:

$$v^i \mathbf{e}_i = w^i \mathbf{f}_i = \mathbf{v}$$

Esta igualdad expresa uno de los principios fundamentales del álgebra lineal: el vector permanece invariante mientras que sus coordenadas cambian con la base utilizada para representarlo. En consecuencia, el sistema de coordenadas deja de entenderse como una propiedad del espacio para convertirse en una elección del observador.

Ahora, esta libertad introduce inmediatamente un nuevo problema geométrico. Si las coordenadas dependen de la representación, ¿cómo definir cantidades físicas que deban conservar el mismo significado para cualquier observador? Esta pregunta conduce naturalmente a la introducción de las formas bilineales. Sea:

$$B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

una aplicación bilineal, es decir, lineal respecto de cada uno de sus argumentos:

$$B(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$B(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Cuando esta aplicación es además simétrica y no degenerada, proporciona la estructura necesaria para definir el producto interno y, con ello, las nociones de longitud, ortogonalidad y distancia. Respecto de una base cualquiera, la forma bilineal queda completamente determinada por sus componentes:

$$g_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

de modo que:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij} u^i v^j$$

En una base ortonormal se obtiene:

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

mientras que en una base arbitraria las componentes dejan de coincidir con la matriz identidad. Esto demuestra que las coordenadas no contienen por sí mismas la información geométrica del espacio; dicha información se encuentra en la estructura métrica representada por g_{ij} .

Desde la perspectiva física, esta matriz constituye el antecedente inmediato del tensor métrico, objeto matemático que permite medir distancias independientemente del sistema de coordenadas utilizado. Sobre un espacio tangente $T_p M$, el tensor métrico se define como una forma bilineal simétrica y no degenerada:

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

cuyas componentes vienen dadas por:

$$g_{\mu\nu} = g(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu)$$

permitiendo definir el elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

El paso hacia la geometría diferencial consiste en reconocer que, para describir un universo dinámico y curvo, debemos abandonar la hipótesis de una estructura lineal global y rígida. En una variedad diferenciable M , no existe un único espacio vectorial que abarque todo el espacio; en su lugar, a cada punto p de la variedad se le asocia de manera local su propio espacio vectorial,

denominado espacio tangente $T_p\mathcal{M}$. No obstante, la información estrictamente local de estos espacios tangentes aislados es insuficiente para describir el comportamiento del espacio físico como un todo. Para conectar coherentemente el comportamiento local con la estructura global surge el haz tangente (o fibrado tangente), denotado como $T\mathcal{M}$. Esta construcción matemática unifica todos los espacios tangentes de la variedad en una sola entidad geométrica global, definiéndose formalmente como la unión disjunta de todos los espacios tangentes en cada punto de la variedad:

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p \mathcal{M}$$

En consecuencia, la variedad pseudoriemanniana no representa una ruptura con el álgebra lineal, sino la generalización natural de las estructuras previamente construidas. La topología garantiza la continuidad del espacio, el espacio vectorial proporciona la estructura lineal; las bases permiten representar los vectores mediante coordenadas; las formas bilineales introducen la métrica; y el tensor métrico extiende esta estructura a cada espacio tangente de la variedad. Así, el espacio-tiempo deja de concebirse como una geometría global rígida para entenderse como una estructura geométrica local cuya métrica depende del punto considerado. En el caso de la solución de Schwarzschild, por ejemplo, el tensor métrico adquiere la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

haciendo evidente que la geometría del espacio-tiempo depende de la distribución de masa y energía. De esta manera, la variedad pseudoriemanniana constituye la culminación del proceso de construcción del concepto de espacio desarrollado a lo largo de esta propuesta, integrando en una única estructura matemática las ideas topológicas, algebraicas, métricas y diferenciales que permiten comprender la geometría de la relatividad general.

2.ACERCAMIENTO A LAS NOCIONES DE ESPACIO EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA: DIAGNÓSTICO CONCEPTUAL

En la formación de docentes de física, el aprendizaje de teorías físicas que llevan a la construcción de conocimiento que permita consolidar conceptos clave para la enseñanza de la física, requiere de entender cómo esta construcción enriquece y vuelve complejo el conocimiento de los estudiantes de diferentes niveles educativos, lo cual depende en gran parte del proceso de las estrategias que los profesores lleven al aula (García, 2002). En este sentido, para la presente investigación, resulta fundamental y como punto de partida entender cómo los estudiantes de la licenciatura en Física comprenden el concepto de espacio desde una visión de la física y matemática. Este reconocimiento permite establecer una línea base sobre sus concepciones, identificar posibles posturas epistemológicas y analizar los avances en su proceso formativo. Asimismo, posibilita la definición de los elementos conceptuales y pedagógicos que sustentan el marco teórico de la investigación y orientan el diseño de la propuesta de enseñanza.

Particularmente se tiene que en carreras de física o de licenciatura en física los estudiantes, en este caso docentes en formación, en ocasiones ingresan a cursos avanzados con elementos conceptuales o conocimientos limitados que pueden incluso estar permeados por ideas que están alejadas de los fundamentos propios de la física, por lo cual identificar estas ideas y generar estrategias para mejorar la enseñanza, en especial de la concepción de espacio para cursos de física moderna se vuelve un tema importante (Benegas & Zavala, 2013).

Es por esto por lo que el indagar en las concepciones previas que tienen los estudiantes de la licenciatura, establece un diagnóstico inicial que permite identificar aquellas representaciones y concepciones que los docentes en formación tienen respecto al concepto de espacio, lo cual se vuelve un elemento crucial para el desarrollo de estrategias de enseñanza que sean efectivas (González, Martínez, & Solís, 2021), previo al curso de relatividad y consiguientes a este propuestos en el Plan de Licenciatura en Física.

En el presente capítulo se establece la metodología usada para el diseño del pre-test implementado, criterios de evaluación, población objetivo y resultados obtenidos.

2.1 Enfoque y método

El trabajo se desarrolló desde la Investigación Cualitativa, la cual se encamina a un interés por las experiencias, interacciones y construcciones de los participantes, en palabras de Sampieri (2014) “La investigación cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto.” (p.358).

Dicho enfoque comprende estudios en los que la recolección de datos se realiza de manera directa con los sujetos investigados, lo que se ajusta a la propuesta de enseñanza desarrollada en este trabajo. En este sentido, la información se recopila en un contexto de aprendizaje colaborativo, mediante diversos planteamientos abiertos relacionados con el concepto de espacio en la física. Esta estrategia busca, principalmente, identificar los conceptos matemáticos que permitirán una aproximación inicial a la variedad pseudoriemanniana, estructura fundamental en la construcción del espacio-tiempo dentro del marco de la TGR.

El método elegido para desarrollar la propuesta es la Secuencia de Enseñanza Aprendizaje (SEA), definida por (Méheut, 2004) como:

“Una SEA es una actividad de investigación a la vez que un producto de intervención, un paquete de unidad curricular tradicional, que incluye actividades de enseñanza-aprendizaje contrastadas mediante la investigación, y empíricamente adaptadas al razonamiento del estudiante. A veces también se incluyen las pautas de enseñanza que cubren las reacciones esperadas de los estudiantes” (p.516).

Bajo este enfoque de trabajo, se construye un diseño de la SEA desde lo enunciado por Guisasola y otros (2019), en donde se parte de dos componentes, el Indicador de Aprendizaje (el objetivo propuesto) y el Análisis Epistemológico (el fundamento de los indicadores de aprendizaje). Teniendo claridad con este punto de partida, se traza una ruta de trabajo que comprende tres momentos, un primero denominado Contexto y diseño (allí se da el contexto escolar, tipo de estudiantes, e inclusive las posibles dificultades al desarrollar la SEA), un segundo llamado Implementación (se trata de llevar a la acción lo construido en la fase previa) y un último sería la Evaluación (donde se tiene en cuenta un análisis tanto del aprendizaje logrado, como de la calidad de la secuencia).

En el contexto del presente trabajo, se toma como referente la Secuencia de Enseñanza-Aprendizaje (SEA), particularmente en lo relacionado con los indicadores de aprendizaje y el

análisis epistemológico que orienta la organización de los contenidos. No obstante, la ruta metodológica se circunscribe a los momentos correspondientes al análisis del contexto y al diseño de la propuesta didáctica. Los momentos posteriores de implementación no se desarrollan, dado que la investigación se plantea en términos de una propuesta.

Sin embargo, ello no impide realizar una valoración teórica de la secuencia construida. A partir del análisis del contexto y de la coherencia interna del diseño, es posible anticipar situaciones de aprendizaje, formular hipótesis sobre las posibles respuestas de los estudiantes e identificar dificultades conceptuales previsibles. Estas consideraciones permiten discutir el alcance potencial de la propuesta y establecer criterios preliminares de evaluación que resultan valiosos para una futura implementación en el aula.

2.2 Instrumentos de Recolección y Análisis

De acuerdo con la metodología planteada, el primer momento corresponde al análisis del contexto. Para este fin, se plantea la recolección de información mediante una técnica cualitativa pertinente: el grupo de enfoque. se define “La técnica de grupos focales es un espacio de opinión para captar el sentir, pensar y vivir de los individuos, provocando auto explicaciones para obtener datos cualitativos” (Según Buss et al.,2013, p.1)

Asimismo, “debe ser elegido como técnica de investigación cuando un determinado grupo puede reflexionar y situarse frente a un tema específico y pre-determinado por objetivos claros y centrados” (Buss et al.,2013, p.1). La idea anterior se puede configurar debido a las habilidades y conocimientos que puede llegar a tener los estudiantes de quinto semestre de la licenciatura en física.

La obtención de los datos se realizó en el contexto de la SEA (primer momento), en una sesión con la orientación del investigador, al tratarse la propuesta de enseñanza a estudiantes de la licenciatura en física de la Universidad Pedagógica y enfocando la propuesta en la enseñanza de la pseudo variedad riemanniana, se trabaja trece participantes de la licenciatura en física de la Universidad pedagógica que cursaban el curso de Geometría y Física en el semestre 2023-1, se organizaron frente a criterios que les permitieron conversar en un ambiente cómodo, en grupos de aproximadamente 3-4 personas.

Otros criterios de organización van desde intereses comunes (estudiantes del mismo programa), control en los grupos, en la configuración en cómo se responden las preguntas y su

interacción, estos últimos se reflejan de la siguiente manera: Se organizaron los grupos y en un primer momento se respondieron cinco preguntas (pretest), generadas con relación a la discusión del concepto de espacio, pero desde la perspectiva de reconocer, de manera individual, las concepciones previas y los posibles obstáculos epistemológicos arraigados en el pensamiento de los estudiantes. Dado que la intervención se estructura bajo el modelo de cambio conceptual, la identificación de este marco de referencia inicial constituye un paso indispensable para orientar el diseño y desarrollo de la propuesta de enseñanza. Después se hizo la respectiva discusión en grupo donde algún participante escribe el pensamiento del grupo. Al tener la discusión de grupo, un compañero del grupo hizo la función de vocería, expresando las ideas escritas para amenizar la discusión y al mismo tiempo los participantes puedan ser más participativos.

Cada pregunta se entrega después de responder, con el fin de usar solo los conocimientos que tiene en el momento el estudiante, con el motivo de recoger las respuestas dadas por el participante desde lo más honesto y poder conseguir más información.

Durante la implementación del *Grupo de enfoque* se plantearon cinco preguntas diseñadas en una ruta preestablecida, con opción a cambiar de acuerdo con las respuestas que se iban construyendo como se detalla en la tabla 1, a su vez el investigador encaminó las respuestas dadas en una pequeña reflexión con el propósito de ir contextualizando a la siguiente pregunta que guarda una relación.

Propuesta de redacción:

A partir de la implementación de la primera fase de la Secuencia de Enseñanza-Aprendizaje (SEA) y mediante el instrumento seleccionado, se recopiló información escrita, tanto a nivel individual como grupal, sobre las preconcepciones de los estudiantes respecto al concepto de espacio y su articulación con la física y la matemática.

Las respuestas del pre-test se recopilaron con el propósito de contrastar los ejes temáticos definidos por el investigador. Para su análisis, la información se estructuró siguiendo el diseño metodológico de la Secuencia de Enseñanza-Aprendizaje (SEA). De acuerdo con Guisasola et al. (2019), la evaluación en una SEA requiere el establecimiento de categorías de análisis, las cuales funcionan como criterios sistemáticos para clasificar las respuestas, los argumentos y los modelos explicativos de los estudiantes frente a cuestiones específicas.

El uso de estas categorías metodológicas permite medir con precisión el nivel de comprensión alcanzado e identificar posibles concepciones alternativa.

En la Tabla 1 se presenta la relación que el investigador construyó entre los ejes temáticos fundamentales para la investigación y las preguntas que se construyeron para el pre-test aplicado a los estudiantes del Grupo de enfoque. Cada eje temático pretende explorar elementos puntuales sobre el concepto de espacio en física de los estudiantes que se intervinieron y su relación con la matemática, esto con un enfoque disciplinar y epistemológico.

Tabla 1. Preguntas del Pre-test en relación con los ejes temáticos planteados

Eje temático	Pregunta del Pre-test
Entender la comprensión que tienen los participantes sobre la forma en la que configuran la física desde lo disciplinar. Esto permite evidenciar cómo el participante da relevancia a elementos teóricos, matemáticos y experimentales, donde el interés para el desarrollo del trabajo es conocer si hay un papel importante del concepto de espacio en sus respuestas.	Cuando se hace el estudio de un fenómeno físico, ¿Cuáles considera que son los elementos primordiales para poder describirlo y establecer una explicación a dicho fenómeno (puede pensarse desde la mecánica, la termodinámica, el electromagnetismo, la relatividad, la mecánica cuántica, etc.)
Bajo la premisa de haber desarrollado una intervención que enriquezca las respuestas previas de los participantes, dicha intervención destaca la relevancia de considerar el espacio como un elemento fundamental en la configuración de fenómenos físicos.	¿El espacio se presenta de manera explícita en todas las teorías de la física? ¿El espacio es el mismo, o se describe de la misma manera para las diferentes teorías en física?
Teniendo en cuenta la relación que construyen los participantes del espacio con las matemáticas, se construye esta pregunta con la finalidad de generar reflexión sobre el uso del concepto de espacio en matemáticas y en física	¿Cómo define el espacio y su relación con las matemáticas?

A partir de la reflexión de los participantes sobre el papel de las matemáticas y el concepto de espacio, es pertinente conocer el desarrollo matemático que han construido para formalizar el espacio en una estructura matemática.	De acuerdo lo expresado ¿Qué elementos matemáticos considera que son necesarios para describir el espacio y cómo se utilizan?
--	---

La anterior tabla muestra cómo en el diseño del pretest las concepciones o conocimientos aislados no son la prioridad, en parte lo que se pretende con este pretest es explorar esa articulación conceptual que se tiene alrededor de la noción de espacio desde un punto de vista disciplinar y la relación que desde allí se concibe entre física y matemática. Además, se establece una base diagnóstica para la posterior presentación de los elementos del marco teórico y de la propuesta.

Para el análisis de los resultados del Pretest, se definieron de tres categorías por pregunta, como criterios para evaluar las respuestas de cada pregunta de manera individual. Posteriormente se procedió a calcular la cantidad de respuestas clasificadas en cada categoría en relación con el total de respuestas (13):

Tabla 2. Categorías definidas para el análisis de las preguntas del pretest

Pregunta	Categorías establecidas
Pregunta 1 Cuando se hace el estudio de un fenómeno físico, ¿Cuáles considera que son los elementos primordiales para poder describirlo y establecer una explicación a dicho fenómeno (puede pensarse desde la mecánica, la termodinámica, el electromagnetismo, la relatividad, la mecánica cuántica, etc.)	Categoría A: Clasifica de manera clara y elocuente los diferentes elementos que constituyen la descripción y explicación de un fenómeno físico. Escribe ejemplos Categoría B: Reconoce elementos que permiten una explicación y descripción de dicho de un fenómeno físico de forma separada y muy general Categoría C: Establece una descripción y explicación para el estudio de un fenómeno físico a través de un ejemplo.
Pregunta 2 ¿El espacio se presenta de manera explícita en todas las teorías de la física? ¿El espacio es el mismo, o se describe de la misma manera para las diferentes teorías en física?	Categoría A: Reconoce el desarrollo conceptual del espacio según la teoría física y respalda esta idea mediante un ejemplo. Categoría B: Distingue el uso del espacio en cada teoría física a través del reconocimiento de su evolución matemática, y respalda esta afirmación con un ejemplo. Categoría C: Reconoce como varía el uso del concepto del espacio en las teorías físicas en términos generales.

Pregunta 3 ¿Cómo define el espacio y su relación con las matemáticas?	Categoría A: Entiende el espacio como una discusión filosófica y física. Donde las matemáticas son herramientas que permiten organizar dicha discusión Categoría B: Reconoce como una interdependencia entre el espacio y las matemáticas, y como consecuencia, la física surge como un producto de esta relación. Categoría C: Construye el concepto de espacio como una consecuencia del trabajo de las matemáticas.
Pregunta 4 De acuerdo lo expresado ¿Qué elementos matemáticos considera que son necesarios para describir el espacio y cómo se utilizan?	Categoría A: Reconoce los elementos matemáticos específicos para describir el espacio Categoría B: Reconoce estructuras matemáticas como el álgebra lineal y sus elementos para describir el espacio, pero no las conecta para describir el espacio. Categoría C: propone elementos o estructuras matemático sin conexión para describir el espacio Categoría D: No reconoce elementos matemáticos para describir el espacio o solo reconoce el criterio físico.

Los resultados obtenidos de la aplicación del pretest se encuentran en el Anexo 1, a continuación, se presentan de manera sintética las estadísticas en relación con las categorías establecidas:

Respecto a la primera pregunta se evidencia que el 55% se enmarca en la categoría A y un 36.4% respecto a la categoría B, lo que implica que hay un desarrollo aceptable sobre la capacidad de reconocer elementos que involucran el contexto del conocimiento de la física.

Ahora en el caso de la segunda pregunta, se abre una discusión debido al porcentaje de la categoría A (46.2%) y la categoría C (30.8 %), se entiende los estudiantes están en un desbalance con relación a la comprensión del uso del concepto de espacio en la descripción de fenómenos físicos.

Por otro lado, las categorías B y C suman un 69% de la pregunta 3, da a entender que no hay una comprensión más completa referente al concepto de espacio, al punto de solo darle un sentido bajo elementos matemáticos y no como un concepto que se abarca desde lo filosófico.

Respecto a la última pregunta del instrumento, los datos recopilados evidencian que el 66 % de las respuestas se concentran en las categorías C y D. De acuerdo con los criterios de análisis

establecidos, la Categoría C agrupa a los estudiantes que proponen elementos o estructuras matemáticas sin una conexión coherente para describir el espacio; por su parte, la Categoría D corresponde a aquellos que no reconocen elementos matemáticos para esta descripción o se limitan exclusivamente a un criterio físico.

Esta distribución porcentual evidencia una dificultad latente para vincular el concepto de espacio con una estructura matemática formal. Los resultados sugieren que, si bien los estudiantes cuentan con un bagaje de herramientas matemáticas propias de la licenciatura, existe un reto pedagógico al momento de contextualizar y articular dichas herramientas para modelar el espacio físico.

Teniendo en cuenta lo anterior, se identifican algunas condiciones que permiten evidenciar dificultades en los estudiantes que participaron en la discusión. Una de ellas radica en el escaso acercamiento al contexto filosófico del concepto de espacio y su relación con la física, lo que conduce a una comprensión distorsionada del papel de las matemáticas, al asumirlas como una estructura inherente y no como una construcción que modela el espacio.

Otra dificultad se relaciona con la descripción específica de los elementos matemáticos necesarios para caracterizar el espacio. En este sentido, se tiende a omitir procesos fundamentales, como la introducción explícita de la métrica, dado que durante la formación en temas como la mecánica newtoniana se adopta de manera implícita una métrica euclidiana, por considerarse la más operativa y efectiva en ese contexto.

2.3 Población y muestra

La presente investigación tiene como población objetivo a docentes en formación de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, principalmente aquellos que se encuentran en quinto semestre, previo al curso de relatividad ofertado en sexto semestre y al Tópico complementario en el ciclo de profundización de relatividad general.

La descripción de la población en específico para el momento de la intervención comienza con tener en cuenta que solo eran 13 personas que oscilaban entre los 20 a 23 años y su mayoría eran hombres, donde se evidenciaron que correspondían a diferentes semestres, puesto que habían estudiantes que al momento de discutir las preguntas hacían referencia de estar cursando el curso de Geometría y Física o estar cursando la asignatura al mismo tiempo que la asignatura de relatividad correspondiente al sexto semestre, esto dado a la oportunidad de no

tener prerequisites u obligatoriedad de haber aprobado. Cabe aclarar que se espera tener el conocimiento que el curso de Geometría y Física expone para entrar al curso de Relatividad.

Finalmente, dada la organización curricular de la Licenciatura en Física, la propuesta está dirigida a estudiantes de quinto semestre en adelante. Esta delimitación se sustenta en la información recopilada durante la intervención, desarrollada desde la perspectiva de grupo de enfoque, en la que se indagó indirectamente por la trayectoria académica de los participantes. A partir de ello, se identificó que los estudiantes habían cursado asignaturas del área de Formación Disciplinar de Soporte, tales como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial y Álgebra Lineal. Asimismo, contaban con formación en el área de Formación Disciplinar Específica, incluyendo Mecánica I y II, Mecánica de Ondas, Termodinámica y Electromagnetismo I y II. Esta formación previa constituye una base fundamental para abordar los contenidos matemáticos y físicos requeridos para la comprensión de la variedad pseudoriemanniana y su aplicación en el marco de la teoría general de la relatividad

3. PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA VARIEDAD PSEUDORIEMMANIANA

La estrategia de enseñanza se fundamenta en los pilares epistemológicos, pedagógicos y disciplinares detallados en los capítulos anteriores. Estos parámetros no solo permiten interpretar con rigor los resultados del pre-test, sino que actúan como ejes conductores para consolidar la tríada filosófica, epistemológica y matemática del concepto de espacio.

Esta consolidación se logra al someter las concepciones iniciales de los estudiantes a la dinámica del cambio conceptual, mediante el enfrentamiento con hitos de la historia de la ciencia y la interacción dialógica entre compañeros, se promueve una insatisfacción con los modelos intuitivos previos. Este proceso permite que el estudiante reconozca la necesidad de estructuras matemáticas más complejas, facilitando que la noción de variedad pseudoriemanniana emerja como una explicación productiva para describir el espacio físico.

Retomando las conclusiones del pre-test como la no apropiación clara sobre una postura en la relación del espacio como idea matemática y física, al punto de describir que la idea física es resultado de lo matemático. Así mismo se evidencia que los elementos que ayudan a describir el espacio matemático se obvian, puesto que no hay una interpretación de por qué sirven. Estos ejemplos de los resultados dan pie para entender que no hay apropiación del concepto de espacio desde lo filosófico, matemático y físico.

El uso del cambio conceptual como estrategia de enseñanza, junto con el aprendizaje colaborativo, ambos enmarcados en el enfoque constructivista, resulta pertinente para contextualizar de manera más amplia el concepto de espacio en términos de espacio-tiempo con la variedad pseudoriemanniana en los estudiantes de la Licenciatura. Esta propuesta está dirigida, en particular, a aquellos que cursan la asignatura de Geometría y Física. De este modo, se busca favorecer la construcción de comprensiones más profundas y articuladas sobre la naturaleza matemática y física del espacio.

La formación docente no inicia desde una comprensión neutra, sino que se configura a partir de diversas concepciones que orientan la manera en que el futuro profesor entiende y organiza el conocimiento pedagógico. Estas ideas iniciales van más allá de su grado de precisión, cumplen un papel fundamental en la construcción de su saber profesional. En este contexto, la literatura especializada ha mostrado que la efectividad docente no puede explicarse mediante variables aisladas, dado que responde a una interacción compleja entre distintos factores. En

particular, se han identificado como dimensiones relevantes la trayectoria profesional del docente, su formación y conocimiento especializado, así como sus prácticas pedagógicas en el aula (Burroughs, 2019).

Desde esta perspectiva, la incorporación de múltiples enfoques de permite problematizar dichas dimensiones y evitar visiones reduccionistas sobre la enseñanza. Esto resulta especialmente relevante si se considera que la evidencia empírica no es concluyente respecto al impacto de variables como la experiencia o el nivel educativo del docente en el rendimiento estudiantil. En contraste, las prácticas concretas de enseñanza en especial aquellas vinculadas con la selección y organización del contenido, así como con el uso del tiempo en el aula, muestran una relación más consistente con los procesos de aprendizaje (Burroughs, 2019).

En este sentido, el análisis crítico de la experiencia docente, el conocimiento profesional y las prácticas pedagógicas favorece el desarrollo de una postura reflexiva en el docente en formación, permitiéndole fundamentar sus decisiones pedagógicas con mayor solidez. Como resultado, se fortalece su capacidad para diseñar e implementar propuestas de enseñanza más coherentes, en las que la generación de oportunidades de aprendizaje se convierte en un eje central de su práctica profesional (Burroughs, 2019).

3.1 Descripción de la propuesta de Enseñanza

A continuación, se describe la propuesta construida como producto de esta investigación de la cual se tienen las actividades diseñadas en dos momentos específicos. El primero estará enmarcado en el aprendizaje colaborativo y consistirá en el desarrollo de un plan de trabajo organizado en módulos, distribuidos en dos sesiones. Cada módulo incluye los temas a abordar, así como preguntas orientadoras alineadas con la estrategia de cambio conceptual, cuyo propósito es generar insatisfacción conceptual frente a las concepciones previas de los estudiantes.

Asimismo, cada módulo contempla objetivos de aprendizaje claramente definidos, los recursos necesarios para el estudio como lecturas, videos y textos especializados, finalmente, los indicadores de logro esperados. De esta manera, se busca estructurar un proceso formativo que promueva la construcción colectiva del conocimiento y favorezca la resignificación del concepto de espacio de Newton hasta el espacio-tiempo de la TGR.

En un segundo momento, desarrollado de manera simultánea, pero con carácter individual, los estudiantes completarán un cuadro comparativo concebido como un instrumento de evaluación continua. Este formato permitirá valorar la evolución de sus concepciones a medida que avancen en los módulos.

El cuadro está estructurado a partir de las cuatro condiciones del cambio conceptual propuestas por George J. Posner y colaboradores: insatisfacción, inteligibilidad, verosimilitud y fructificación. Para cada una de estas dimensiones, los estudiantes responderán una serie de preguntas orientadoras que permitirán identificar la transformación progresiva de sus ideas iniciales. De esta manera, el instrumento facilitará el seguimiento del proceso de reconstrucción conceptual en relación con la noción de espacio y su articulación con la variedad pseudoriemanniana.

Para la situación de insatisfacción, se pretende que el profesor sea el que proponga la pregunta, la anomalía que logre mover los cimientos conceptuales previos, y que las respuestas que se esperan en ese momento sean desde la concepción o idea que tiene en ese instante el estudiante. En el caso de lo inteligible, se pretende formular una situación particular del concepto a enseñar para que el estudiante entienda el nuevo concepto sin necesidad de apropiarlo. En un tercer momento, lo verosímil es clarificación de conceptos involucrados. Para ello se plantea unas preguntas que inviten a la reflexión y pueda hacer uso de ellos con el fin de generar una representación interna.

La situación fructífera o provechosa ya se hace el intento de resolver problemas propios del concepto aplicando los conocimientos previamente adquiridos. por último, se va a hacer una autoevaluación sobre que aprendió en el proceso, esto da claridad y oportunidad de consolidar una evaluación continua y en términos de la investigación se puede hacer uso como pret-est.

3.2 Descripción de las sesiones propuestas

A continuación, se detallará la secuencia de las sesiones construidas para la introducción de los conceptos y las actividades producto de la investigación realizada.

Sesión 1

De acuerdo con la ruta de aprendizaje establecida para la propuesta de enseñanza, la intervención se fundamenta en el modelo de cambio conceptual. Para lograr una transición profunda desde el paradigma clásico hacia el relativista, las sesiones se han estructurado en

fases estratégicas que guían al estudiante desde la explicitación de sus ideas previas hasta la asimilación y acomodación de la nueva maquinaria matemática.

Momento 1: Reconocimiento de ideas previas e insatisfacción conceptual. El primer momento de la sesión 1 tiene como propósito generar una ruptura cognitiva en los estudiantes. Para ello, organizados en grupos de tres a cuatro integrantes, se les presentará dos problemas fisicomatemáticos deliberadamente diseñado para cuestionar sus concepciones iniciales: el transporte paralelo sobre una esfera y el sistema de coordenadas como un elemento excluyente del concepto de espacio.

La situación plantea una flecha ubicada inicialmente en un punto A, como se muestra en la ilustración 1. A continuación, esta se desplaza hasta el punto B, luego al punto C y, finalmente, regresa al punto A, manteniendo en todo momento su orientación mediante traslación, es decir, sin experimentar ninguna rotación local. Sin embargo, al completar el recorrido, se observa que la dirección final de la flecha no coincide con su orientación inicial. Esta aparente contradicción dará lugar a la pregunta central de la actividad: ¿hacia dónde apunta la lanza cuando regresas al punto A

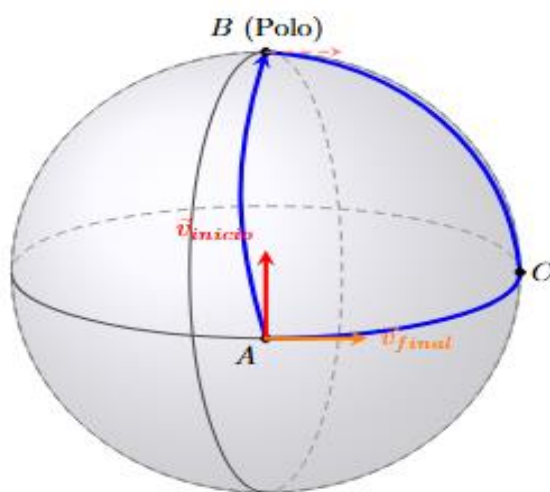


Ilustración 1. Transporte Paralelo en una Esfera. Nótese que $v_i \neq v_f$ debido a la curvatura intrínseca. Nota: Fuente Propia.

El propósito es que los estudiantes aborden esta situación utilizando su conocimiento base, constituido por el álgebra lineal clásica y la geometría euclidiana. Se les empuja en este ejercicio

hacia un callejón sin salida, donde evidencien por sí mismos que los espacios vectoriales planos y las transformaciones lineales estándar son inherentemente insuficientes para reflejar la realidad física de un entorno no inercial. Esta experiencia práctica detona la insatisfacción necesaria frente a sus conceptos previos, demostrando que el formalismo matemático clásico es incapaz de albergar los fenómenos gravitacionales.

Ahora el, la Primera Ley de Newton. Para lograrlo, se espera que el estudiante analice un escenario físico simple donde un asteroide se mueve en el espacio profundo en una trayectoria perfectamente rectilínea y con velocidad constante. Al pedirle que describa este movimiento libre de fuerzas ($\sum F = 0$) desde un sistema inercial cartesiano (x, y), se anticipa que el estudiante deduzca sin dificultad que la aceleración es nula en ambos ejes ($a_x = 0$ y $a_y = 0$), confirmando su preconcepto de que la física newtoniana funciona a la perfección y se cumple trivialmente que $F = m \cdot a = 0$.

El conflicto cognitivo que se espera detonar ocurre al cambiar el sistema de referencia. Se le propone al estudiante imaginar una estación de radar que observa al mismo asteroide, utilizando únicamente coordenadas polares para medir la distancia radial (r) y el ángulo de barrido (Θ). A medida que el asteroide pasa volando en línea recta, la distancia r disminuye, alcanza un punto mínimo y vuelve a aumentar. Lo que se busca en esta fase del ejercicio es que el estudiante, al aplicar mecánicamente sus conocimientos de cálculo para hallar la segunda derivada de la distancia radial $\frac{d^2r}{dt^2}$, se enfrente al desconcertante resultado de obtener un valor distinto de cero. Si el estudiante aplica la forma clásica de la ley de Newton, se verá forzado a concluir erróneamente que existe una "fuerza" misteriosa actuando en la dirección radial, a pesar de la premisa inicial de que el asteroide está libre de interacciones.

Para mediar en la superación de este obstáculo, se espera que el docente utilice herramientas visuales que revelen que el error conceptual radica en ignorar la geometría del sistema de medición. Mientras que en el sistema cartesiano los vectores espaciales (i, j) son inmutables, en el sistema polar los vectores directores (e_r, e_θ) giran y cambian de dirección constantemente. El siguiente diagrama se propone para ilustrar visualmente cómo esta rotación de los vectores base a lo largo de la trayectoria rectilínea genera una ilusión de aceleración:

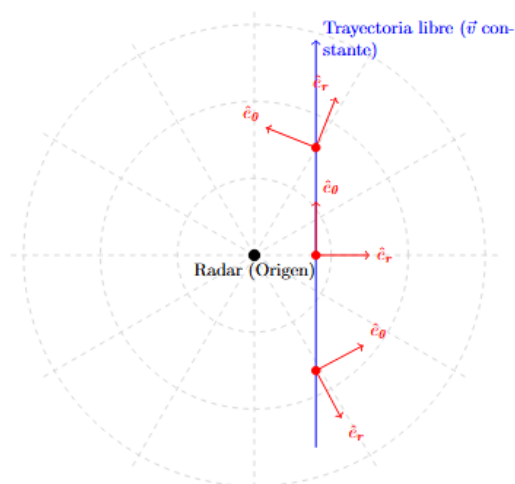


Ilustración 2. Cambio de coordenadas. Nota: Fuente Propia

A partir del cálculo multivariable, el estudiante descubrirá el modelamiento matemático guiado por el docente que la aparente "fuerza" que causa esta aceleración no es una fuerza real, sino un factor de corrección geométrica formalizado en el lenguaje tensorial como el Símbolo de Christoffel ($\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$). Esta resignificación permite generalizar la ley de inercia a su expresión covariante. Cognitivamente, esto prepara al estudiante para el desarrollo del tensor en el marco de la variedad pseudoriemanniana.

Momento 2: El debate ontológico del espacio para comprender la magnitud de esta limitación matemática, la sesión transita hacia un segundo momento enfocado en la raíz del problema: la conceptualización filosófica del espacio. Antes de introducir formalmente las herramientas de la geometría pseudoriemanniana (resumidas en la Figura 1), resulta oportuno explorar la transición histórica desde Newton hasta Einstein.

Los mismos grupos de trabajo dialogarán en torno a dos preguntas orientadoras: ¿cómo se reconoce ontológicamente al espacio desde la filosofía? y ¿cómo se refleja dicha noción en las teorías físicas? Para nutrir este debate, se dispondrá de documentos y videos de apoyo, mientras el docente interviene en los grupos para problematizar y focalizar la conversación. En este espacio, se ampliará rigurosamente la histórica tensión entre el sustancialismo (la visión mecanicista de Newton de un espacio contenedor absoluto e independiente de la materia) y el relacionalismo (la concepción de Leibniz y Mach de un espacio definido puramente por las relaciones materiales).

El punto álgido de la discusión buscará que los estudiantes analicen cómo la Teoría de la Relatividad General (TRG) agudiza este debate, obligando a abandonar el espacio euclidiano de fondo para adoptar un espaciotiempo dinámico que actúa y es actuado por la materia. Finalmente, un relator por equipo socializará las conclusiones y cuestionamientos alcanzados, consolidando la justificación teórica de por qué es pertinente evolucionar más allá del álgebra que describe una geometría plana.

Momento 3: Tras el debate ontológico que derriba la noción del espacio absoluto y rígido, el tercer momento busca dotar de sentido a la alternativa geométrica. Para que la transición hacia el nuevo paradigma sea exitosa, la idea de un espacio curvo debe presentarse de manera que resulte inteligible y plausible frente a los esquemas cognitivos del estudiante, sin recurrir aún a un formalismo matemático que no poseen.

El docente retoma la anomalía del transporte paralelo (Momento 1) para cambiar la forma en que los estudiantes piensan el escenario físico. Se introduce cualitativamente el concepto central de una variedad: un espacio que, a escala estrictamente local, es indistinguible de un plano euclidiano, pero que a escala global posee una estructura curva. La plausibilidad de este nuevo concepto se alcanza al reflexionar sobre la historia de la física: los estudiantes se acercan a que la mecánica de Newton y el álgebra lineal clásica funcionaron durante siglos precisamente porque la experiencia humana se desarrolla en una condición local del universo, donde el espacio parece plano. El modelo se vuelve verosímil cuando reconocen que el error de la lanza no fue un fallo operativo, sino un error de categoría: intentaron imponer una cuadrícula vectorial rígida y global sobre un espacio que exige ser entendido y transitado de forma local.

Momento 4: El cierre del ciclo de cambio conceptual en esta primera sesión exige comprobar si el modelo de variedad es productivo, es decir, si permite deducir lógicamente nuevos comportamientos del espacio físico que el paradigma newtoniano no contempla.

A los grupos se les planteará un ejercicio mental puramente geométrico: Si nuestro universo funciona bajo esta nueva concepción del espacio, ¿qué ocurre si trazamos un triángulo inmenso uniendo tres puntos lejanos mediante las trayectorias más rectas posibles?". Apoyándose en la analogía de la esfera trabajada previamente, se espera que los estudiantes lleguen a que la suma de los ángulos internos no será 180 grados. Esta es la demostración de productividad: el nuevo modelo ontológico les permite predecir fenómenos geométricos imposibles en el paradigma

clásico, confirmando que la geometría del espacio está intrínsecamente ligada a la física que contiene.

Sin embargo, el objetivo final de este momento es utilizar el éxito cualitativo para generar una profunda insatisfacción metodológica. Al pedirles que intenten medir ese triángulo, cuantificar el exceso angular, o incluso definir matemáticamente qué es una "línea recta" si ya no pueden usar las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, los estudiantes chocarán con una pared. Descubrirán que la idea de variedad tiene sentido físico, pero carecen por completo de las herramientas para operarla.

Esta frustración programada es el cierre idóneo de la sesión: se espera que los estudiantes concluyan por sí mismos que para que esta nueva noción de espacio sea útil, es necesario construir un andamiaje matemático que permita definir rigurosamente esos parches locales y conectarlos entre sí. Se establece así el umbral perfecto que justifica y hace necesaria la segunda sesión de la secuencia: la transición hacia la topología, la formalización del haz tangente y la definición del tensor métrico para estructurar la variedad pseudoriemanniana.

Sesión 2

Esta segunda intervención tiene como propósito formalizar los conceptos matemáticos que permiten operar en espacios no euclidianos. Tras la insatisfacción metodológica de la Sesión 1, el estudiante se encuentra en una disposición activa para asimilar herramientas de la topología y el cálculo tensorial, reconociéndolas no como abstracciones vacías, sino como soluciones a problemas físicos concretos.

Momento 1: La formalización topológica (Atlas y Cartas). El primer momento busca transformar la noción intuitiva de parches locales en la definición matemática de variedad topológica. Los estudiantes, trabajando con material guía, deben construir la definición de una variedad M como un espacio de Hausdorff de base numerable que es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

El docente guiará la discusión para que los grupos comprendan que la física local se captura a través de cartas coordenadas, y que la estructura global del espacio se mantiene coherente mediante un atlas que se entiende como un conjunto de cartas cuyas funciones de transición son suaves. En este punto, la nueva idea se vuelve inteligible es que, el estudiante

entiende que no necesita una cuadrícula global; le basta con saber cómo pegar matemáticamente sus mediciones locales para describir la esfera completa.

Momento 2: (El Haz Tangente). Una vez definido la variedad, surge la necesidad de formalizar los objetos que habitan en él. Se retoma la crisis algebraica de la sesión anterior: ¿por qué no podemos sumar vectores en puntos distintos? El docente introduce el concepto de espacio tangente (T_pM) como el plano vectorial adosado a cada punto de la variedad.

Se formaliza la idea de que los vectores no flotan en el espacio, sino que pertenecen a un punto específico. La unión de todos estos espacios locales define el Haz Tangente (TM). Esta fase es crucial para la plausibilidad del modelo, ya que explica de forma técnica por qué el álgebra lineal clásica fallaba: no era que los vectores no se pudieran sumar, sino que se intentaban sumar objetos de espacios vectoriales distintos.

Momento 3: La métrica y la naturaleza Pseudoriemanniana. Para que la variedad adquiriera significado físico, es necesario introducir una regla de medición dinámica. Apoyándose en el rigor analítico para la enseñanza de la Relatividad General propuesto por autores como Arias Abad, Quintero y Vélez (2025) de la Universidad Nacional, se presenta el tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

El debate se centra en el giro físico fundamental: a diferencia de la geometría euclidiana, en la relatividad la métrica posee una signatura lorentziana, distinguiendo el tiempo del espacio y garantizando la causalidad. Los estudiantes analizan cómo los componentes de $g_{\mu\nu}$ se convierten en funciones de la posición, representando la deformación del escenario.

Momento 4: Institucionalización y el regreso a la anomalía (Curvatura y Conexión). Como cierre de la secuencia y prueba de productividad, los estudiantes deben utilizar este nuevo lenguaje para resolver matemáticamente el problema de la flecha que rotó en la esfera (Momento 1, Sesión 1).

Se introduce la necesidad de la conexión afín (símbolos de Christoffel) para poder comparar vectores en puntos diferentes mediante el transporte paralelo. El éxito del cambio conceptual se evidencia cuando el estudiante, haciendo uso del formalismo tensorial, demuestra que la variación del vector no es un error de medida, sino una consecuencia directa de la derivada covariante en una variedad con curvatura. Con esto, la variedad pseudoriemanniana se consolida

como el modelo definitivo: una estructura donde la geometría le dice a la materia cómo moverse, y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse.

Tabla 3. Estrategia de Enseñanza.

PLAN DE TRABAJO: Enseñanza de la variedad pseudoriemanniana				
Título: Variedad pseudoriemanniana				
Objetivo: Entender la variedad pseudoriemanniana desde una construcción previa de saberes				
Módulo	Objetivos específicos	Actividades	Recursos	Indicadores esperados
Modulo 1 Algebra lineal.	Demuestre matemáticamente que las herramientas del Espacio Vectorial Finito Normado (EVFN) y el álgebra lineal global son insuficientes para describir el movimiento	Actividad 1.1 Organizarse en grupos de 3 a 4 para estudiar un tema en específico como algebra lineal Actividad 2.2 Conversación de los grupos con el profesor Actividad 2.3 Socialización en grupos con estudiantes con diferente tema de estudio. Actividad 2.4 Ejercicios por parte del profesor	Recurso 1.1 Texto (Anexo 2) Recurso 1.2 Texto (Anexo 2)	Conocimientos Diferencia posturas filosóficas sobre el espacio Habilidades y destrezas Pensamiento critico Valores y actitudes Observador

Modulo 2 Concepto de espacio	Reconocer el concepto de espacio en el contexto Newton-Einstein como un criterio filosófico que se aplica a la física	Actividad 2.1 Lecturas en grupos de 3 a 4 estudiantes para responder a las siguientes preguntas: ¿cómo se reconoce al espacio desde la visión de Newton y Einstein, teniendo en cuenta el componente de la filosofía y epistemología? y ¿cómo se refleja en las teorías físicas? Actividad 2.2 Conversación de los grupos con el profesor Actividad 2.3 Socialización de ideas de los grupos con el	Recurso 2.1 Video (Anexo 2) Recurso 2.2 Texto (Anexo 2)	Conocimientos Habilidades y destrezas Manejo de Lógica

		resto de los compañeros		
Modulo 3 Topología	Reconocer el concepto de espacio topológico y sus diferentes tipos en especial a los generados por el axioma de separación	Actividad 3.1 Organizarse en grupos de 3 a 4 para estudiar la definición de topología y el uso en la variedad topologica Actividad 3.2 Presentan en el tablero una topología particular Actividad 3.3 Ejercicios por parte del profesor	Recurso 3.1 Texto (Anexo 2)	Conocimientos Contextualiza saberes con otras ramas de las matemáticas Habilidades y destrezas Comprende diversas situaciones de un mismo tema
Modulo 4 Haz tangente:	Reconocer la conexión entre espacios tangentes, el tensor y las variedades diferenciales. Entiende al tensor métrico como una generalización	Actividad 4.1 Organizarse en grupos de 3 a 4 para estudiar un tema en específico como puede ser teóricas lorenzians o variedades de riemman	Recurso 4.1 Texto (Anexo 2) Recurso 4.2 Texto (Anexo 2)	Conocimientos Hacer operaciones con tensores Habilidades y destrezas Conecta saberes Manejo de

	del concepto de métrica	Actividad 4.2 Conversación de los grupos con el profesor Actividad 4.3 Socialización en grupos con estudiantes con diferente tema de estudio Actividad 4.4 Ejercicios por parte del profesor		Valores y actitudes
Modulo 5 Variedad pseudoriemanniana	Reconocer el uso del tema en la física	Actividad 5.1 Organizarse en grupos de 3 a 4 para estudiar un tema de variedad Riemmaniana Actividad 5.2 Conversación de los grupos con el profesor	Recurso 5.1 Texto (Anexo 2) Recurso 5.2 internet	Conocimientos Entiende el uso de la variedad

Tabla 4. Cuadro Comparativo para el Cambio Conceptual

Etapa	Actividad	Espacio para el estudiante	Momento de discusión
1. Preguntas incitadoras - Responde las siguientes preguntas que buscan generar dudas o conflictos con tus ideas previas: -	¿cómo se reconoce al espacio desde la visión de Newton y Einstein desde la filosofía?	Mis respuestas e ideas previas:	Modulo 1:
	- ¿cómo se refleja en las teorías físicas?	Mis respuestas e ideas previas:	Modulo 2:
	¿Por qué la continuidad en matemáticas no siempre necesita de derivadas ni funciones suaves?	Mis respuestas e ideas previas:	Modulo 3:
	¿Qué diferencia esencial hay entre una matriz simétrica común y un tensor métrico?	Mis respuestas e ideas previas:	Modulo 4:
	¿Por qué el espacio-tiempo de la relatividad general no puede representarse simplemente con una geometría euclidiana tradicional?	Mis respuestas e ideas previas:	Modulo 5:
2. Presentación de un problema a resolver - Lee el siguiente problema: -	Suponga que queremos describir el comportamiento de partículas en un entorno donde el espacio está curvado y tiene una métrica dependiente de la posición. ¿Cómo deberíamos modelar ese espacio y qué herramientas matemáticas necesitaríamos?	Mi interpretación inicial del problema:	Modulo 1:
		Mi interpretación inicial del problema:	Modulo 2:
		Mi interpretación inicial del problema:	Modulo 3:
		Mi interpretación inicial del problema.	Modulo 4:
		Mi interpretación inicial del problema:	Modulo 5:
3. Clarificación de conceptos	- Posturas epistemológicas entre el espacio clásico y moderno. Sus diferencias	Mis claridades y dudas sobre conceptos y	Modulo 1:

- Aclara tus conocimientos sobre los conceptos involucrados: -		ecuaciones:	
	- Elemento, conjunto, subconjunto - Relaciones de pertenencia e inclusión - Producto cartesiano	Mis claridades y dudas sobre conceptos y ecuaciones:	Modulo 2:
	- Espacio como conjunto y espacio topológico	Mis claridades y dudas sobre conceptos y ecuaciones:	Modulo 3:
	- Variedad y coordenadas locales - Tensor métrico y distancias en espacios	Mis claridades y dudas sobre conceptos y ecuaciones:	Modulo 4:
	- Variedad pseudoriemanniana (espacio-tiempo en relatividad general)	Mis claridades y dudas sobre conceptos y ecuaciones:	Modulo 5:
4. Resolución del problema - Usando los conceptos discutidos, intenta resolver el problema: -	- ¿Cómo defines localmente el espacio en términos matemáticos? - ¿Qué papel cumplen los tensores en esta descripción? - ¿Cómo se describe la curvatura y cómo se relaciona con la métrica?	Mi resolución del problema:	Modulo 5:
5. Reflexión: ¿Comprendí? Reflexiona sobre tu propio proceso de aprendizaje:	- ¿Qué nuevas comprensiones he alcanzado sobre el concepto de espacio con relación a los trabajos de Newton y Einstein? - ¿Qué relaciones encontré entre topología y geometría diferencial? - ¿Qué dudas sigo teniendo?	Mi autoevaluación:	Modulo 1:
		Mi autoevaluación:	Modulo 2:
		Mi autoevaluación:	Modulo 3:
		Mi autoevaluación:	Modulo 4:
		Mi autoevaluación:	Modulo 5:

CONCLUSIONES

Un aspecto transversal a toda esta investigación es la complejidad intrínseca del concepto de espacio, el cual exige una aproximación multidimensional. Quedarse con una postura aislada, omitiendo el contexto filosófico, epistemológico, geométrico o mecánico, limita severamente la transición cognitiva necesaria para comprender en plenitud las teorías como la propia mecánica de Newton hasta la Teoría de la Relatividad General.

Esta afirmación se valida empíricamente a partir de la implementación del instrumento diagnóstico (pre-test), donde se evidenció una profunda fragmentación epistémica en los estudiantes respecto a la ontología del espacio. Si bien los futuros licenciados poseen fluidez operativa en la mecánica clásica, presentan serias dificultades para sostener argumentaciones propias y para vincular el formalismo matemático con la realidad física. Esta carencia interpretativa, que arrastra sesgos de la concepción de espacio absoluto newtoniano, demuestra que la mera aprobación de las asignaturas de fundamentación no garantiza la aprehensión de la naturaleza dinámica del espacio; los estudiantes tienden a entender los fenómenos casi exclusivamente desde el formalismo operativo. Esta limitación trasciende su rol como alumnos e impacta directamente su futura labor docente: si no desarrollan la capacidad de problematizar sus propios saberes, difícilmente podrán generar rupturas didácticas en sus futuras aulas.

Para dar respuesta a esta necesidad de trascender el cálculo operativo, el análisis documental de la evolución geométrica del espacio permitió identificar y estructurar los elementos matemáticos fundamentales, como la topología, el haz tangente y el tensor métrico, que definen la variedad pseudoriemanniana. Como hallazgo derivado de esta reconstrucción, se identificó un vacío significativo en el ciclo de fundamentación de la licenciatura: la transición hacia la física moderna exige un dominio de la Teoría de Conjuntos y la Topología básica, elementos que no siempre se abordan con la profundidad requerida. Evidenciar estas desconexiones estructurales sentó las bases disciplinares indispensables para el diseño de nuestra propuesta de enseñanza. Sobre este andamiaje matemático, se logró construir una propuesta de enseñanza alternativa que funciona como antecedente metodológico. La estrategia con la integración de la epistemología de Lakatos y el modelo de Cambio Conceptual es altamente pertinente para la física superior. Se concluye que, para lograr una verdadera asimilación de geometrías no euclidianas, no se debe evitar el conflicto con las concepciones previas de los estudiantes, sino provocarlas de manera estructurada para generar insatisfacción con el modelo clásico. Para que este proceso tenga éxito,

es indispensable que la intervención didáctica esté anclada simultáneamente a la rigurosidad matemática y a la validación conceptual.

Finalmente, este recorrido conduce que, desde la visión del investigador, la cual radica en la de un maestro en formación, se entiende la complejidad de conectar en una sinergia los ejes formativos de la licenciatura como lo son la formación disciplinar específica y la enseñanza de las ciencias y su dimensión cultural, exactamente con la didáctica. Se entiende esto último como una ciencia que busca comprender cómo el ser humano asimila el conocimiento, a la par que organiza los saberes a través de herramientas contextualizadas para guiar el proceso de aprendizaje de aquello que se pretende enseñar.

Es claro que las teorías físicas ya existen y poseen una estructura lógica y matemática consolidada. Sin embargo, llevarlas al aula exige del docente un trabajo de adaptación continua. El propósito de esta articulación de la didáctica y lo disciplinar es encontrar un punto medio en las clases de la licenciatura, es buscar dotar al maestro en formación de habilidades que le permitan discernir con claridad cómo piensan sus alumnos y qué obstáculos cognitivos enfrentan. De esta manera, el futuro profesor deja de ser un simple conocedor de un tema, para convertirse en un verdadero promotor del pensamiento científico y crítico.

Si aterrizamos esta propuesta a la enseñanza de la relatividad, el desafío adquiere un tinte especial. Al ser una rama fundamental de la física moderna, implica una alta complejidad conceptual que choca directamente con el sentido común y la intuición clásica del estudiante. En este contexto, la investigación en didáctica de la física deja de ser un asunto secundario frente al rigor disciplinar para convertirse en indispensable en lo profesional.

REFERENCIAS

- Almea Zambrano, L. J., Yantalema de la Cruz, B. K., Aguirre León, C. E., Cadena Gómez, M. N., & Lara Lascano, C. J. (2025). Análisis de la relación entre la física y la matemática en la resolución de problemas en estudiantes de bachillerato: una revisión sistemática. *ASCE Magazine*, 4(3), 35-54. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=10268976>
- Arévalo, J. G. (2018). Espacio físico - geométrico : ¿una relación exclusiva de la geometría euclidiana? [Trabajo de grado]. Bogotá: Repositorio Universidad Pedagógica Nacional. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12209/11154>
- Arias Abad, C., Quintero Vélez, A., & Vélez Caicedo, J. D. (2025). *General Relativity*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Centro Editorial de la Facultad de Ciencias.
- Bartels, A. (1996). Modern Essentialism and the Problem of Individuation of Spacetime Point. *Erkenntnis*, 45(1), 25-43.
- Benegas, J., & Zavala, G. (2013). Evaluación del Aprendizaje en Física. En J. Benegas, M. C. Pérez, & J. Otero (Edits.), *El Aprendizaje Activo de la Física Básica* (págs. 179-192). Andavira Editora.
- Burroughs, N. G. (2019). *Teaching for excellence and equity: Analyzing teacher characteristics, behaviors and student outcomes with TIMSS*. Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-030-1615>
- Buss Thofehn, M. L. (2013). Grupo focal: unatécnica de recogida de datos en investigaciones cualitativas. *Index de enfermería*, 22, 75-78. Obtenido de <https://dx.doi.org/10.4321/S1132-12962013000100016>
- Butterfield, J. (1989). The Hole Truth. *The British Journal for the Philosophy of Scienc*, 40(1), 1-28.
- Cárdenas, L., & Botero, C. (2009). Leibniz, Mach y Einstein:Tres objeciones al espacio absoluto de Newton. *Discusiones Filosóficas*, 10(15), 51 - 68. Obtenido de <https://revistasoj.s.ucaldas.edu.co/index.php/discusionesfilosoficas/article/view/661>
- Christensen, N., & Moore, T. A. (Junio de 2012). Teaching general relativity to undergraduates. *Physics Today*, 65(6), 41-47. doi:10.1063/PT.3.1605
- Colchero, J. A. (2021). La conceptualización del espacio: un análisis de sus. *Revista de Humanidades*, 129-149. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8451557.pdf>
- Cova, A., Inciarte, A., & Prieto, M. (2005). Lakatos y los programas de investigación científica. Una opción para la organización investigativa. *Omnia*, 11(3), 83-108. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73711304>
- Cruz, Y. J., Salas, J. F., & Duque, R. F. (2016). *Notas de geometria diferencial y aplicaciones a la fisica*. Bogotá: Universidad Colegio mayor de Cundinamarca.
- Díaz Caballero, J. R. (2011). La duda creativa y las revoluciones científica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(3), 3033-3045. doi:<https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000300003>
- d'Inverno, R. (1992). *Introducing Einstein's relativity*. Clarendon Press.
- EUCLIDES, Vega, L., & Puertas Castaños, M. L. (2000). *Elementos.Libros I-IV*. Madrid: EDITORIAL GREDOS.
- Física, L. e. (25 de Enero de 2024). *Facultad de Ciencia y Tecnología*. Obtenido de <http://cienciaytecnologia.upn.edu.co/licenciatura-en-fisica/>
- García, F. (2002). Concepciones de los alumnos y conocimiento escolar. Un estudio en el ámbito del medio urbano. *Enseñanza de las ciencias sociales: revista de investigación*, 17(1), 17-25.

- Garritz Ruiz, A. (2018). Veinte años de la teoría del cambio conceptual. *Educación Química*, 123-126. doi:<https://doi.org/10.22201/fq.18708404e.2001.3.66337>
- Gomez Ruiz, F. (febrero de 2017). *Geometria Diferencial y Geometría de Riemann*. Malaga, España: UMA editorial.
- González, M. D., Martínez, C. A., & Solís, E. (2021). Diseño y validación de un cuestionario sobre el espacio en textos escolares de física y el uso que de los mismos hace el profesorado. En F. Cañada, & P. Reis (Edits.), *XI Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias: Aportaciones de la educación científica para un mundo sostenible* (págs. 234 - 238). Lisboa: Revista Enseñanza de las Ciencias.
- Guisasola, J. Z.-B. (2019). Una propuesta de diseño, evaluación y rediseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje en Física introductoria. *Revista de Ciències de l'Educació*, 11(2), 109-122. doi:<https://doi.org/10.17345/ute.2019.2>
- Hoefer, C. (1996). The Metaphysics of Space-Time Substantivalism. *The Journal of Philosophy*, 93(1), 5-27.
- Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. (s.f.). *Qué es Aprendizaje Colaborativo*. Recuperado el 29 de Enero de 2026, de Técnicas Didácticas: [https://sitios.itesm.mx/va/dide2/tecnicas_didacticas/ac/qes.htm](https://sitios.itesm.mx/va/dide2/tecnicas_didacticas/ac/qes.htm)
- Jammer, M. (1970). *Historia del Espacio*.
- Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Alianza Editorial. Obtenido de <https://epistemologiaufro.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/10/lakatos.pdf>
- Marqués, P. (2012). aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de Educación*, 58(1), 55-74. Obtenido de <https://rieoei.org/rie/article/view/2868/3812>
- Martín Sanabria, E. A. (2021). Investigación en Didáctica de las Ciencias y ejercicio profesional docente: Una relación esquivada. *Revista Bio-grafía. Escritos sobre la Biología y su enseñanza*(Número Extraordinario), 6.
- Méheut, M. &. (2004). Teaching-learning sequences: aims and tools for science education research. Méheut, M. & Psillos, D. (2004). *Teaching-learning seInternational Journal of Science Education*, 515-535. doi:10.1080/09500690310001614762
- Moreira, M. A., & Greca, I. M. (2003). Cambio conceptual: análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. *Ciência & Educação (Bauru)*, 9(2), 192-204. doi:<https://doi.org/10.1590/S1516-73132003000200010>
- Moreno Olivos, T. (2011). Didáctica de la Educación Superior: nuevos desafíos en el siglo XXI. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, 50(2), 26-54. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/3333/333327290003.pdf>
- Moreno, I. (2004). La utilización de medios y recursos didácticos en el aula. *Departamento de Didáctica y Organización Escola*, 1-14. Obtenido de Recuperado de <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf>
- Mundy, B. (1992). Space-Time and Isomorphism. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1, 515-527.
- Newton, I. (1987). *Principios matemáticos de la filosofía natural*. (E. Rada, Trad.) Alianza Editorial. Obtenido de https://www.mercaba.es/britania/principios_de_fisica_de_newton.pdf
- Newton, I. (2004). *Principios matemáticos de la filosofía natural*. (E. Rada, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.
- Norton, J. D. (2011). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Recuperado el 25 de Abril de 2026, de The Hole Argument: <https://plato.stanford.edu/entries/spacetime-holearg/>

- Pardo Ariza, L. S. (2021). *Análisis conceptual del espacio-tiempo como elemento para la enseñanza de la teoría especial de la relatividad*. Bogotá D.C: Universidad Pedagógica Nacional, Licenciatura en Física.
- Paty, M. (enero de 2006). EINSTEIN Y EL ROL DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FÍSICA. *Praxis Filosófica*(22), 5-27. Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=209019320001>
- Perry, Z. R. (2017). How to Be a Substantialist Without Getting Shifty About It. *Philosophical Issues*, 27, 223-249.
- Posada, Y. C. (2012). Prolemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría especial de la relatividad con respecto a los maestros en formación de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. Medellín: Repositorio Universidad de Antioquia.
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 221-227. doi:10.1002/sce.3730660207
- Rubiano O, G. N. (2017). *Topología General [un primer curso]* (3 ed.). Bogotá, D.C: Editorial Proeditor Ltda.
- Trenas, F. R. (2009). Fabiola Romero Trenas. *Revista digital para profesionales de la enseñanza*. Obtenido de <https://matematicasiesoja.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/01/el-aprendizaje-significativo.pdf>
- Universidad Pedagógica Nacional. (2023). *Programa analítico: Geometría y física (Código: 1443273)*,. (D. d. Facultad de Ciencia y Tecnología, Productor) Recuperado el 7 de Abril de 2025, de https://cienciaytecnologia.upn.edu.co/wp-content/uploads/2023/10/PROGRAMA-ANALITICO_GEOMETRIA-Y-FISICA-1443273.pdf
- Universidad Pedagógica Nacional. (s.f.). *Licenciatura en Física. Facultad de Ciencia y Tecnología*. Recuperado el 20 de 04 de 2025, de <https://cienciaytecnologia.upn.edu.co/licenciatura-en-fisica/>

ANEXOS

Anexo 1: Resultados de pre-test

Tabla 5. Respuestas individuales y grupales, pregunta 1.

Individual
Se debe tener en cuenta variables físicas que describan un fenómeno natural lo mas exacto y preciso posible, determinar causas y efectos para preecir el comportamiento de diccho fenomeno natural.
Inicialmente se debe hacer un paso a seguir o un metodo científico para la correcta observación y posterior descripcion del fenomeno
Saber si el fenomeno es continuo o discreto. Poder relacionarlo con un fenomeo cotidiano. Analizar sus aplicaciones. Rrevisar el contexto del fenomeno, es decir, si cuantico o un sistema relativista.
.Primero se tiene en cuenta el "objeto", "hecho o situacion". Le atribuimos al "objeto" o "hecho" ciertas propiedades "medibles" lo que comunmente llamamos magnitudes. para descirbir y modelar se tiene que hacer analisis ya sea inductivo y deductivo y llegar a las relaciones matematicas que pueden predecir u explicar los fenomenos. Igualmente no hy que dejar de lao el analisis filosofco.
Condiciones iniciales del sistema, condiciones del medio y aquello que se puede observar, generalmente la formalización matemática es útil para analizar las variables a considerar segun la rama fisica que este estudiando (si es un fenmen visto desde la mecanica clasica u otra rama)
El sistema que se estudia puede ser relacionado a diversas variables cuantificables que lo describen, una mayor cantidad permite un estudio más amplio de fenómeno pues está sujeto a más consideraciones, a partir de ello se hace un análisis poniendo al fenómeno en un marco de referencia.
Elementos. cuestionmientto ¿cómo? ¿cua es el objeto a anaizar?. establecer punto de referencia. Plasmar en diagramas el fenomeno. Tratar deentender lo que está sucediendo. Modelar por medio de hipotesis.
Analizar principlmente el fenomeno que se nos presente, a partir de estos tener hipotesis y una idea mucho más clara para poder cuestinarla y dar explicación logica.
Considerando que la observacion del fenomeno es un elemento basico para entender su comoportamiento y llegar a una explicacion por otra parte los antecedentes y herramientas establecidas en perspectiva son apoyo fundamental a dar cuenta de explicación a este fenomeno , sino a la postulación de las variables a considerar e interpretacion de ellas dentro del fenomeno.
Alguno de los elelmentos importantes seria tener un contexto teorico del contexto principal de dicho fenomeno. Tener una observacion como principal elemento, recopilarlo datos y tendencias de el-
Grupal
El sistema que se estudia puede ser relacionado a diversas variables cuantificables que lo describen, una mayor cantidad permite un estudio más amplio de fenómeno pues está sujeto a más consideraciones, a partir de ello se hace un aálisis poniendo al fenómeno en un marco de referencia.
Razonamiento alrededor del fenómeno.Realizar diagramas (Marco de referencia). Establecerhipotesis.Cuesionar y dar una explicación logica. Sistema de unidades.
Es un concepto fundamental; se interpreta de acuerdo a su teoria y contexto.El espacio es el mismo concepto. El espacio se interpreta de diferentes maneras debido al concepto historico.

Tabla 6. Respuestas individuales y grupales, pregunta 2.

Individual
El espacio tiene distintas formas de expresaarse, por lo tanto, no es el mismo para todas las teoria físicas, sienndo un ejemplo el espacio de la mecanica cuántica, siendo un espacio vectorial complejo.
El espacio como objeto de estudio se analiza de distintas formas,sin emargo, el objetivo es el mismo determinar y defeinir una descripcion del espacio para generalizar la manera en que oservamos y registramos nuestras oservaciones,

A veces son un poco diferentes unas de otras ya que algunas veces las teorías o leyes de una como por ejemplo la mecánica clásica no sirven a la hora de pasar a la mecánica cuántica.
sí, pues independientemente de la teoría, la región que se estudia (campo) pertenece al mismo espacio, solo que a diferentes escalas y así mismo, se analizan otros fenómenos ejemplo: siempre analizamos el espacio donde suceden varios hechos y lo analizamos de diferentes posturas e intereses "Campo gravitacional" "Campo magnético", "campo eléctrico"
No siempre se presenta de manera explícita, en termodinámica, la explicación de los fenómenos no siempre se necesita de un punto de referencia, ni el tiempo, a menos que un problema en específico lo indique. El espacio no es el mismo y la descripción de este puede variar que la teoría a teoría, ya sea la mecánica clásica o la relatividad.
No, cada rama de la física presenta el mundo de distinta manera, el espacio de cada una se forma a partir de las consideraciones y las reglas de cada teoría, un ejemplo de ello es la mecánica clásica que no considera aspectos que otra no por lo que su espacio no contempla por ejemplo partículas microscópicas o el punto de referencia, cada rama "amolda el espacio" en su formalización asignando reglas y principios.
No, en cuántica se usa el espacio de Hilbert, en clásica se usa el espacio de Euclides
No, considero que se puede llegar a dividir en dos: clásica y moderna
Los objetos siempre están interactuando de manera explícita con el espacio El espacio no se describe de la misma forma en todas las ramas de la física ya que el concepto puede definirse de manera diferente
no el espacio no se representa en todas las teorías de la misma manera debido por ejemplo a coordenadas y a su mezcla espacio- tiempo
Cada teoría física es explícita desde su perspectiva, son diferentes evidentemente una de la otra, a pesar de que algunas guardan cierto grado de similitud pero son "ideas" o "hipótesis" de algo que está allá afuera "fenómeno".
diferente, en la mecánica cuántica se utiliza un espacio no euclidiano a la vez que se utilizan números complejos mientras que en la mecánica clásica se usa un espacio euclidiano, (vectorial o escalar real)
El espacio lo podemos representar como un concepto fundamental en todas las teorías de la física. este concepto varía dependiendo de las teorías de la física. Se describe diferente dependiendo de la teoría y el contexto físico en el que se aplique
No
Grupal
Es un concepto fundamental; se interpreta de acuerdo a su teoría y contexto. El espacio es el mismo concepto El espacio se interpreta de diferentes maneras debido al concepto histórico
En todas las teorías existe el mismo espacio pero varía dependiendo de lo que se quiera observar, es un mismo espacio pero tiene diferentes interpretaciones dependiendo de las contemplaciones
Difiere, en algunos campos de la física se utiliza un espacio euclideo y en otros, un espacio de Hilbert (no euclidiano)

Tabla 7. Respuestas individuales y grupales, pregunta 3.

Individual
Una forma que se puede relacionar es con la mecánica cuántica y el uso del espacio vectorial complejo y su uso para describir estados por medio de números reales y/o complejos.
El espacio es un punto específico que usamos para referirnos a un punto en específico donde los objetos ocupan un lugar
El espacio se podría definir como una región determinada la cual se puede ser interpretada y descrita de distintas formas dependiendo de la rama de la física, a su vez se puede relacionar con las matemáticas y la geometría por medio de las figuras euclidianas.
yo describo que el espacio se trabaja sobre una región determinada y las matemáticas se aplican sobre él para buscar definir una interpretación, pues la matemática es una herramienta que nos ayuda a describir fenómenos siendo en general el espacio una abstracción por convención "Campo gravitacional" "Campo magnético", "campo eléctrico"
El espacio es un concepto una "idea" que viene por entender alrededor y que la formalizamos por medio de las matemáticas con geometría.

El espacio es el imaginario en el que se desarrollan los fenómenos y se formaliza mediante la matemática por lo que termina siendo una mera abstracción del mundo real.
los espacios están definidos por la relación de 2 vectores o más, que son ortogonales u ortonormales entre sí
Por medio de axiomas (ejemplo: espacio euclidiano)
El espacio es algo que describe la ubicación y orientación. dimensión donde los objetos existen y se mueven En matemáticas se puede describir en términos de geometría (descripción y análisis del espacio) que es la que estudia las propiedades y relaciones de las figuras en el espacio
En el espacio de Hilbert se tiene en cuenta el producto interno y externo y estas dos definen en el que se operen
El espacio es algo en el que interactuamos, en el podemos representar dimensionalmente y darle valor enésimo a esa dimensionalidad, para tratarlos a partir de la geometría pasando por la aritmética, álgebra y posteriormente por el cálculo avanzado. con la intención de dar cuenta de ciertas "características", problemas o situaciones que se presentan en cada uno y como pasar de una a otra para llevarlo de forma al modelo de espacio que tomemos.
Por lo general el espacio suele ser aquel donde se da una representación matemática a los entes físicos o interacciones, para luego realizar operaciones entre estos-
El espacio es un punto ordenado con respecto a algo se relaciona el espacio con las matemáticas con con descartes el cual proyecta un plano con dos ejes y permite ese razonamiento espacial
Grupal
Se define a través de los axiomas y su relación con las matemáticas está estrechamente relacionada con la sociedad, la cual construye herramientas para caracterizar fenómenos
El espacio es un concepto que crea una región en la que se estudian los fenómenos y se formalizan con la matemática, es entonces una abstracción del mundo real
Punto ordenado en el espacio Dimensión donde los objetos existen Relación con la geometría ya que estudia las propiedades con figuras geométricas.

Tabla 8. Respuestas individuales y grupales, pregunta 4.

Individual
Los elementos son coordenadas el cual se ubican de forma dimensional en los diferentes planos ...
La geometría del espacio Los axiomas de euclides, ya que se cumpla o no con todos, el producto por escalar y la condición de dos números o vectores. Las coordenadas dependientes e independientes.
Considero en general todas las ramas de las matemáticas y se utilizan relacionándolas entre ellas y dándole forma física
Los puntos: una identidad básica y se utilizan para describir posición de los objetos en el espacio, coordenadas en matemáticas Vectores: se utilizan para describir la dirección de los objetos y magnitud de los movimientos en el espacio Algunos elementos más sería la geometría y el álgebra lineal como elementos matemáticos necesarios.
todos los elementos matemáticos se pueden expresarse medio de sumas y restas y estos son los elementos importantes para describir el espacio
Todo lo que engloba el álgebra.
.Axiomas -- (En qué conjunto de axiomas voy a trabajar)(Teoría matemática) ,Dimensiones , Punto de referencia . de acuerdo a los criterios anteriores puede tomar un punto en el espacio (Vectores, matrices, puntos,etc)
Todas las operaciones matemáticas, ya que el conjunto de algunas pueden describir rotaciones en el espacio movimiento, velocidad, aceleración, etc en el mismo
Necesitamos un marco de referencia que este caso sería las coordenadas
con la matemática podemos definir un plano coordinado objeto de estudio, el cual será definido en un intervalo específico para cada región del espacio y así podríamos a través de la matemática describir una región del espacio en específico.
En física clásica el espacio se describe por medio de un campo vectorial
Tener muy en claro las operaciones básicas y el álgebra, vectores y demás
Grupal
El marco de referencia son coordenadas que se ubican de forma dimensional .

Dos elementos importantes son los puntos y vectores, ya que son magnitudes que nos ayudan con la posición y dirección de los objetos en el espacio
Punto de referencia Número de dimensiones del plano coordenado Axiomas Tipo de coordenadas
Elementos matemáticos como matrices, vectores, escalares, etc. y se utilizan a través del álgebra lineal

Tabla 9. Respuestas individuales y grupales, pregunta 5.

Individual
Pues dependiendo que tema exacto sea, se debe considerar el espacio en el que está y cuales condiciones cumple este para concretar una definición.
La enseñanza de la física está basada en función de como percibimos el ambiente que nos rodea, el espacio es un concepto que todos relacionamos, es decir, se genera interés de este objeto de estudio. Al estar directamente relacionado con el sujeto la enseñanza del concepto se hará más familiar para el estudiante se puede implementar para explicar otros conceptos como volumen, gravedad, relatividad, cuántica, entre otros.
Aunque parezca obvio, el concepto de espacio es muy abstracto y se puede tratar a través de la imaginación, pues nos afecta en todo momento, así mismo es importante tratarlo
El espacio en la enseñanza de la física. puede ayudar al estudiante a la abstracción y la lógica, y esto puede permitirle usar el concepto para análisis físicos matemáticos, donde el punto de vista de física clásica hasta un pre relatividad
Como algo abstracto, una herramienta que nos permite darle características imaginarias al mundo real para explicarlo mediante la matemática, el espacio podría llevarse al aula como la forma en la que las ciencias piensan el mundo real para lograr cuantificarlo.
Por medio analogías, experimento y tratando de relacionarlo con el "espacio" en el cual vivimos este concepto se puede utilizar para enseñar principios fundamentales de esta ciencia.
Esta se podría relacionar en la idea del espacio físico
se podría usar en el análisis de algún fenómeno, para poder tener un análisis matemático más preciso.
de manera didáctica y creatividad desde lo que "nos hace humanos" captando "realidad" es decir con nuestros sentidos
La utilización de experimentos centrales y abstracciones de los diferentes espacios, por medio de prácticas experimentales.
el concepto si o si se tiene que utilizar en la enseñanza de la física y sería mejor relacionar con el contexto social como la ubicación de la casa, colegio etc.
Grupal
Por medio de analogías, experimentos tanto mentales, como tangibles que relacionen el espacio en el que vivimos con aquellos que hacen por parte del mundo de las ideas
Se puede presentar como una herramienta que permite la abstracción y la cuantificación, facilitando el pensamiento lógico sobre fenómenos del mundo real
Es un concepto primordial en la enseñanza de la física y se puede relacionar con el contexto social para llegar a un mejor entendimiento

Anexo 2: Texto guía

Este texto tiene como propósito presentar de manera detallada y con un formalismo accesible, pero sin perder la rigurosidad propia del discurso matemático, una recopilación y análisis de los elementos fundamentales necesarios para abordar el estudio de la pseudovariedad riemanniana desde una base conceptual previa. No pretende equipararse con tratados especializados ni con publicaciones sometidas a revisión por pares, sino ofrecer una estructura coherente que facilite la comprensión progresiva del tema, especialmente en contextos de formación académica. Se entiende que hay temas que no se presentan por sobrecarga, pero se pueden ir estudiando los elementos necesarios a la par que avanzan con el tema, esto es el caso de la teoría de conjuntos.

También es válido mencionar un concepto relevante utilizado en los elementos presentados, dicho concepto es la generalización la definición de función conocido como *morfismo*, este entra en una rama de la matemática llamada teoría de categorías.

Un *morfismo* es una función entre dos estructuras algebraicas que preserva las operaciones entre ellas. La noción de morfismo es fundamental en diversas ramas de la matemática. Esto se entiende de manera intuitiva con la descripción de los conjuntos, donde los elementos de un conjunto se relacionan bajo unas condiciones especiales con otro conjunto de elementos, estos se aclarasen a mayor detalle con las herramientas matemáticas a trabajar. Así mismo, se clasifican estas condiciones con nombres diferentes dependiendo la herramienta matemática, un ejemplo, está el homomorfismo para espacios topológicos donde hay aplicaciones continuas.

Otra consideración importante para trabajar los morfismos es su representación en la literatura, esto con el fin de comenzar a interactuar con un manejo claro de la escritura o simbología durante el trabajo, debido que es sumamente útil porque guarda similitud conceptual y su uso es constante cuando se trata de formalizar una definición matemática.

Se entiende que uno de los conjuntos se conoce como dominio y el conjunto que se relaciona bajo una función es el codominio o imagen, y se ve reflejado de la siguiente forma:

$$f: X \rightarrow Y$$

Donde f es una función que conecta los dos conjuntos y $(:)$ significa “tal que”, el símbolo $\rightarrow$ denota la dirección en la que los elementos se unen, dando al conjunto de salida como dominio y al de llegada codominio. Otra forma de escribir esta conexión es:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

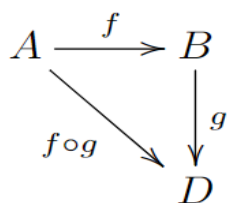
Otro elemento para tener en cuenta por el momento es la composición de conjuntos a través de las funciones

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Esto interpreta que el codominio de f es el mismo dominio de g (es decir Y), entonces esto permite escribir como:

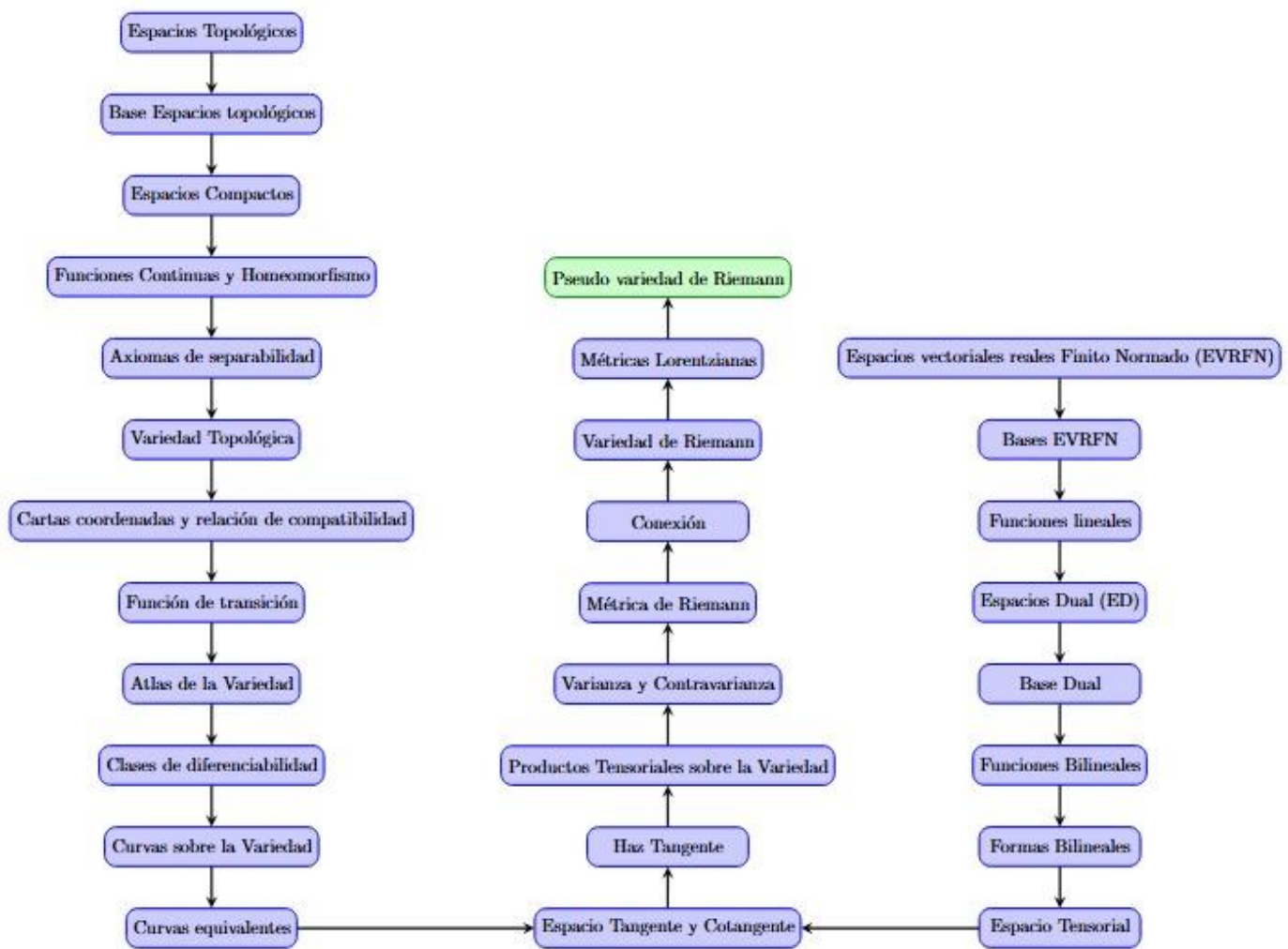
$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

Otra forma de visualizarlo y que es más común y se usará durante el trabajo es:



Haciendo las aclaraciones pertinentes, empezamos con mostrar la ruta que se debe llevar para el estudio de la pseudovariedad de riemann.

Ilustración 2. Ruta de aprendizaje de la variedad pseudoriemanniana. Elaboración propia



Espacio topológico

Entablar una descripción de la topología en un primer paso es con el fin de contextualizar la definición de una variedad diferencial que se hablará en otro apartado.

Se define, que una topología para un conjunto X (no vacío) es una familia

$$\tau = \{U_i; i \in I\}, U \subseteq X$$

Tal que:

$$\emptyset \in \tau, X \in \tau$$

El conjunto vacío y el mismo conjunto X pertenecen a τ .

$$\bigcap_{i \in J} U_i \in \tau \text{ para cada } J \text{ subconjunto de } I (J \subseteq I)$$

La intersección de cualquier colección finita de τ , es un conjunto de τ .

$$\bigcup_{i \in J} U_i \in \tau \text{ para cada } J \subseteq I$$

Toda unión de conjuntos de τ es un conjunto de τ

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y el par (X, τ) es un *espacio Topológico*. Los elementos X son los puntos del espacio.

El tema en específico a estudiar es el espacio de Hausdorff, es un espacio topológico particular que nace de añadir otras condiciones con el fin de estudiar como los abiertos están distribuidos por el espacio. Se estudiaron bajo la denominación de axiomas de separación T_k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$, mostrando el grado en que los puntos y conjuntos pueden separarse por medio de conjuntos abiertos (Rubiano O, 2017).

Se define el espacio de Hausdorff o T_2 :

$x \in U$ e $y \in V$ donde U y V son conjuntos abiertos

$$U \cap V = \emptyset$$

En otras palabras, en un espacio de Hausdorff, para cualquier par de puntos distintos, siempre es posible encontrar conjuntos abiertos disjuntos que contengan cada uno de esos puntos. Así mismo para abarcar de forma más completa la variedad Pseudoriemanniana, en términos matemáticos, se debe hacer el estudio de otros elementos de la topología en relación con el espacio de Hausdorff como el espacio métrico, porque este permite construir bolas pequeñas que no se solapen y así garantiza una continuidad y separabilidad. Otros términos como la compacidad se deben estudiar y, permite definir si un subconjunto de un abierto es acotado y cerrado, fundamentando un teorema importante cuando se esté hablando de las variedades: Una función continua y biyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff, es un homeomorfismo. (Muñoz.J, 2003)

La importancia de este espacio radica en que puede seguir definiendo más espacios topológicos y unas condiciones importantes, pero resulta simplemente acumulativo por ende solo se mencionan: Espacio conexo, métrico, compacto o criterios como vecindad, punto interior, punto exterior y demás (Rubiano O, 2017).

Variedad topológica

De acuerdo con (Cruz, Salas, & Duque, 2016) “Cualquier sistema mecánico de Física puede ser representado geoméricamente a través de una variedad diferenciable” (p.42). Otra situación con respecto a las variedades que menciona Gomez(2017):

“Después de los espacios euclídeos R^n parece natural estudiar los espacios que son localmente euclídeos (las variedades topológicas) y especialmente aquellos en los que los

"trozos" de espacios euclídeos están pegados con cierto grado de suavidad (las variedades diferenciables). Estos espacios surgieron por una parte como generalización natural de las curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ "(p.15)

Para definir la variedad diferencial se debe tener una fundamentación sobre topología, ya que es un tipo de espacio topológico con condiciones muy bien definidas. Entonces podemos construir la definición de variedad topológica con las siguientes consideraciones:

Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio topológico, $p \in \mathcal{M}$, talque $p \in U$, para un abierto $U \subset \mathcal{M}$, y (U, φ) una carta local $\mathcal{M}$ a $\mathbb{R}^n$. Con respecto a U , alrededor de p , definido por:

$$\varphi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

$$p \mapsto x = \varphi(p)$$

Con $\varphi(p) = x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ para $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, y V abierto de $(\mathbb{R}^n, d)$, bajo la topología inducida por la métrica euclidiana

Una variedad $\mathcal{M}$, se dice que es n -dimensional, si $\mathcal{M}$ tiene n dimensiones en cada uno de sus puntos. Para ello hay un p que pertenece a $\mathcal{M}$

Una *carta local* es un espacio topológico $\mathcal{M}$ es un par (U, φ) en donde U es un abierto de $\mathcal{M}$ y φ es un homeomorfismo de U sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Al número n se le llama la dimensión de la carta local (U, φ)

Una familia de cartas locales de $\mathcal{M}$, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ sea un recubrimiento de $\mathcal{M}$ se llama *atlas* de $\mathcal{M}$, y se dice que un atlas de $\mathcal{M}$ tiene dimensión n si todas las cartas del atlas tienen la misma dimensión n .

Se llama *variedad topológica* de dimensión n a todo espacio Hausdorff $\mathcal{M}$ cuya topología tenga base numerable de abiertos y que admite un atlas de dimensión n .

Espacio tangente es la generalización del plano tangente, se define:

Un vector tangente a $\mathcal{M}$ en p es un vector tangente a una curva α en el punto p . El conjunto de todos los vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en p se denomina el espacio tangente a $\mathcal{M}$ en p y se denota por $T_p \mathcal{M}$.

Una definición formal de vector tangente

Sea $p \in \mathcal{M}$ y consideremos (U, ϕ) una carta local alrededor de p con funciones coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dada una función $f \in C^\infty(p)$, la derivada parcial de f con respecto a x_i en el punto p es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\rho) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}(\phi(\rho))$$

donde $(u_1, \dots, u_n)$ son las coordenadas cartesianas naturales de $\mathbb{R}^n$.

Sea (U, ϕ) una carta local y consideremos un punto $p \in U$. Entonces podemos construir la aplicación

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_\rho : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_\rho (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Espacio Dual o Cotangente

Un covector tangente a una variedad $\mathcal{M}$ en un punto p es una forma lineal sobre $T_p \mathcal{M}$. El conjunto de tales covectores constituye el espacio vectorial dual del espacio tangente y se denomina espacio cotangente a $\mathcal{M}$ en p , denotándose, como es habitual, por $(T_p \mathcal{M})^*$ o $T_p^* \mathcal{M}$.

La definición matemática es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i$$

df es una 1-forma diferencial en la variedad $\mathcal{M}$. Esta expresión, $\{dx^i\}$ representa una base del espacio cotangente $T_p^* \mathcal{M}$ en el punto p , mientras que los coeficientes $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ son las derivadas parciales de la función f respecto a las coordenadas locales x^i ¹.

¹ Las definiciones presentadas se retomaron de los documentos Cruz, Y. J., Salas, J. F., & Duque, R. F. (2016). *Notas de geometría diferencial y aplicaciones a la física y* Gómez Ruiz, F. (2015). *Geometría diferencial y geometría de Riemann* (1ª ed.).

Todos estos criterios constituyen la explicación de una variedad diferencial, van a permitir ampliar el concepto de espacio en términos físicos desde la visión clásica o la relatividad donde es un espacio continuo y agujeros, donde varía sus dimensiones y su curvatura. Así mismo están los elementos vectores y covectores que son los que se mueven por dicho espacio.

Haz tangente

El haz tangente es una construcción matemática fundamental que permite conectar la información local con la estructura global de una variedad diferencial.

Hablar de lo local, se refiere a cómo una variedad se construye a partir de cartas locales o coordenadas, donde en cada vecindad pequeña del espacio la geometría se comporta como si fuera el espacio euclidiano (localmente euclídea). Este es uno de los pilares de las variedades diferenciales: aunque el espacio global puede tener una topología compleja o curvatura, en torno a cada punto se comporta como $\mathbb{R}^n$

Por su parte, lo global hace referencia a la estructura completa de la variedad. La información local, como los espacios tangentes en cada punto, por sí sola no basta para describir el comportamiento del espacio como un todo.

El haz tangente, se trata de una estructura que junta todos los espacios tangentes $T_p\mathcal{M}$ de una variedad $\mathcal{M}$ en una sola entidad. La definición concreta, el haz tangente $T\mathcal{M}$ es la sumatoria de las uniones de todos los espacios tangentes en cada punto de la variedad, es decir:

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p \mathcal{M}$$

Formas bilineales o Funcionales bilineales

Para comprender las formas bilineales se tiene que retroceder un paso y entender primero que se encuentra en el contexto del álgebra lineal y se fundamenta en las funciones bilineales, siendo un criterio más general, a su vez esta idea se desarrolla en otras ramas de las matemáticas. Ahora, es preciso recordar la definición de función lineal.

Una función lineal es una aplicación matemática entre dos espacios vectoriales que preserva la estructura de esos espacios. Formalmente, sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbf{K}$ y $\mathbf{W}$ un espacio vectorial sobre el mismo campo. Una función $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es lineal si satisface dos propiedades fundamentales:

Aditividad:

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

La aditividad implica que, si tomas dos elementos u y v en el conjunto V , la imagen de la suma de esos elementos bajo la función f es igual a la suma de las imágenes individuales de u y v bajo f .

Homogeneidad:

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

La homogeneidad implica que, si tomas un elemento u en el conjunto V y lo multiplicas por un escalar α , la imagen de ese escalar múltiplo de u bajo la función f es igual al escalar multiplicado por la imagen de u bajo f .

De este modo se puede analizar con mayor claridad la definición de formas bilineales o ya en un término de formas multilineales, entonces:

Una forma bilineal es una función multilineal de $V \times V \rightarrow K$

$$f: V \times V \rightarrow K$$

$$(u, v) \mapsto f(u, v)$$

Donde V es un K -espacio vectorial, tal que:

$$f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v) \quad \forall u, u', v \in V$$

$$f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v) \quad \forall u, v \in V \text{ y } \forall \alpha \in K$$

$$f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v') \quad \forall u, v, v' \in V$$

$$f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v) \quad \forall u, v \in V \text{ y } \forall \alpha \in K$$

Otras propiedades de la forma bilineal se describen en su simetría y antisimetría. Para el caso de la simetría se da cuando:

$$f(u, v) = f(v, u)$$

Antisimétrico cuando:

$$f(u, v) = -f(v, u)$$

Por último, se resalta cómo se describe los elementos matemáticos, pues un buen manejo de la simbología facilita la idea que acobia. Cuando se habla de **K**-espacio, se entiende que el espacio vectorial puede estar en el campo de los números reales o complejos.

También el criterio de la tupla (,), en el momento que se lee que el producto cartesiano del espacio vectorial en sí mismo una vez (pueden ser infinitas), y se mantiene en un espacio vectorial, se puede describir en 2- tupla para la operación de funciones lineales que, no solo son las descritas previamente, otro caso sería:

$$f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(v', u) + f(u', v')$$

Tensor métrico

El proceso de entender lo que es un tensor implica reconocer unas definiciones. Un tensor es un objeto invariante bajo cambios de coordenadas y cuyas componentes cambian de manera específica bajo dichos cambios de coordenadas. Un tensor es un mapeo multilinear de un conjunto de espacios vectoriales que devuelve a un campo escalar. Un tensor es una colección de vectores y covectores combinados usando el producto tensorial.

Darles una contextualización a las últimas dos definiciones de las formas bilineales da para avanzar sobre el entendimiento del tensor. Al organizar esta situación se tiene definiciones como *grados contravariantes* en relación con el número de variables del espacio dual (V^*) del espacio vectorial V , cuando se trata de variables del espacio vectorial se conoce como covariantes. El número de variables de V^* y V son llamados *grados del tensor*. Una descripción de lo anterior sería $V^* \times V$, se entiende una función multilinear es del tipo (1,1), una vez contra variante y una vez covariante.

Para describir que son tensores y no otra aplicación de las formas bilineales como es el caso del producto interno o producto vectorial, donde los dos nacen del dominio que efectúa un producto cartesiano entre espacios vectoriales llevándolos a un campo **K** (campo escalar) o un vector respectivamente. Para el caso del producto tensorial su dominio como los anteriores nacen de un producto cartesiano entre espacios vectoriales, pero su imagen es un espacio vectorial que combina los espacios vectoriales, se define:

$$\begin{aligned} \mu: V_1 \times V_2 &\rightarrow V_1 \otimes V_2 \\ (u, v) &\mapsto \mu(u, v) = v \otimes u \end{aligned}$$

Los elementos $v \otimes w \in V \otimes W$ son tensor.

Una forma de generalizar el producto tensorial es:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\mu} & V \otimes W \\
 & \searrow \psi & \downarrow \Phi \\
 & & U
 \end{array}$$

Se conoce como producto tensorial universal. Lo que implica que una forma de llegar desde el dominio $(V \times W)$ a un espacio vectorial sin pasar por el producto tensorial. Debe existir una relación que cumpla con $\phi \circ \mu = \psi$

Propiedades de los tensores

Producto entre un tensor y un vector

$$(v \otimes u) \cdot w = v \cdot (u \otimes w)$$

Distributivita:

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha v \otimes \mu + \beta w \otimes r) = \alpha(v \otimes \mu) + \beta(w \otimes r)$$

Distributivita en el producto punto con un vector

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha v \otimes \mu + \beta w \otimes r) \cdot s = \alpha(v \otimes (\mu \cdot s)) + \beta(w \otimes (r \cdot s))$$

Ahora, definir el tensor métrico, se organiza sobre el trabajo anterior, pues la definición de tensor solo queda en términos de rango 2, es decir, de rango $(2,0)$ cuando sea 2-contravariante, $(0, 2)$ si es 2-covariante, $(1, 1)$ cuando sea 1-contravariante, 1-covariante, claramente se puede dejar en términos generales, pero es más frecuente trabajar de esta manera.

El tensor métrico cumple con las siguientes propiedades:

$$\mathbf{g}(u, v) \geq 0,$$

$$\mathbf{g}(u, v) = \mathbf{g}(v, u) = u \cdot v.$$

Adicionalmente podemos pedir que la métrica sea no degenerada, es decir que si $\mathbf{g}(u, v) = 0$ para todo $u \in V$, $u = 0$, entonces $v = 0$. El criterio de simetría genera:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \mathbf{g}_{\nu\mu}$$

$$g^{uv} = g^{vu}$$

$$g^\mu_\nu = g^\nu_\mu$$

Otras propiedades del tensor métrico:

Permite subir y bajar índices

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$$

$$g^{uv} A_\nu = A^\mu$$

Contrae índices

$$g_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = A$$

el producto de los tensores es el delta Kroneccker

$$g_{ua} g^{ab} = \delta^b_u$$

La dimensión del espacio en que se esté trabajando es igual a la traza del tensor métrico

Variedad pseudoriemanniana

El contexto que recae hablar sobre la variedad Pseudoriemanniana es simplemente para evidenciar como los elementos que configuran una variedad diferencial como lo es el espacio tangente $T_p \mathcal{M}$ se transforma en la estructura de un tensor de la siguiente forma:

$$g : T_p \mathcal{M} \otimes T_p \mathcal{M} \rightarrow R$$

el cual puede ser expandido en términos de $dx^\mu \otimes dx^\nu$ sobre una carta (U, ϕ) en $\mathcal{M}$ como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu$$

al seguir con la debida demostración se llega a la definición de métrica como distancia cuadrática infinitesimal

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

El centro de este trabajo se ve reflejado en unas pocas líneas si no se entiende el trasfondo que allí guarda. Un proceso que despliega un análisis de diversos campos de la matemática que tienen la capacidad de aportar de manera independiente y su vez conectarse en cierto grado para

formalizar una idea magnífica que da luz a la comprensión de conceptos físicos de teorías modernas como la relatividad.

Una primera relación entre los elementos necesarios para configurar la variedad pseudoriemanniana es el reconocimiento de la simbología y la organización de los objetos matemáticos que interactúan. En este sentido, el estudio de la teoría de conjuntos es fundamental, ya que permite entender operaciones como el producto cartesiano, esencial para organizar en tuplas elementos provenientes de distintos conjuntos. Por otro lado, la teoría de categorías aporta una visión más profunda mediante el concepto de morfismo, que organiza y relaciona diversas estructuras algebraicas de forma coherente.

Otro elemento vital es el estudio de los espacios topológicos. De manera más precisa, resulta crucial comprender el concepto de espacio de Hausdorff, una propiedad importante para describir espacios físicos tanto en teorías clásicas como relativistas, en los que se requiere continuidad. Esto se basa en nociones como métrica, separación, vecindad, compacidad, entre otras, que permiten caracterizar el comportamiento local y global del espacio.

En esta línea, se introduce el concepto de variedad topológica, entendida como un espacio que, siendo localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, permite generalizar la noción de continuidad y vecindad a contextos geoméricamente más complejos. Para garantizar propiedades adecuadas de separación y manejo local de la estructura, se exige que la variedad sea Hausdorff y admita una base de entornos que permitan construir atlas de cartas locales. Manteniendo esta idea se puede dar criterios de suavidad entre cartas contiguas originando una variedad diferencial.

Por último, se tiene el tensor métrico. Para entender su funcionamiento y su relación con la variedad, es necesario extender el estudio del álgebra lineal cuando se habla de transformación lineal, puesto que se entenderá que el tensor es una aplicación que actúa entre diferentes espacios vectoriales como sea el caso queda como resultado otro espacio vectorial, estos actúan sobre un campo escalar.

Para lograr esta condición se hace el estudio de las formas bilineales, las cuales dan cuenta como se conserva bajo transformación bilinealmente dos espacios vectoriales. Con este primer acercamiento se puede entender la generalización del tensor métrico, se entiende que es un tensor de grado dos, es decir es la operación entre dos espacios vectoriales que al tener la propiedad de simetría (no degenerado), se puede hacer uso como del tensor como si fuese de tipo mixto – 1-veces covariante y 1-veces contravariante), 2-veces covariante o 2-contravariante.

Ahora, la conexión directa con la variedad Pseudoriemanniana radica en que los espacios tangente y cotangente que se configuran en la variedad se puede extrapolar con los espacios vectoriales contravariantes y covariantes respectivamente, es decir, el tensor actúa sobre los puntos que arman la variedad, dotando de noción intrínseca de distancia y curvatura.

Conexión entre la matemática y la física

El desarrollo de la variedad pseudoriemanniana permite extender el concepto de espacio en términos de dimensiones, suavidad y curvatura. hace entender que el espacio es algo dinámico que se debe presentar mayor importancia al momento de configurar o establecer elementos físicos como puede ser el movimiento o los campos de las diversas teorías físicas.

Un ejemplo de cómo se puede utilizar la variedad pseudoriemanniana para calcular

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = + dx^2 + dy^2$$

Este corresponde a un espacio Euclideo en 2 dimensiones, donde calcular distancias solo depende de las dimensiones espaciales.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = - dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

La distancia que mide corresponde a un plano de Minkowski, es decir, con más de 3 dimensiones donde la cuarta en términos físicos hace referencia lo que lo dota de unas características particulares que se tendrán que estudiar en un curso de relatividad para mayor precisión conceptual.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Corresponde al espacio de Schwarzschild, correspondiente a la teoría de la Relatividad general, se entiende que tiene 3 dimensiones espaciales y una temporal. Tiene la capacidad de explicar un agujero negro (sin rotación), generando una relación entre la masa del agujero negro, la constante gravitacional y el radio. Tiene una implicación directa y más clara en como genera curvatura del espacio si r se aproxima a $G \cdot M$.

Por otra parte, aunque no deja de ser un tratado matemático con la física, si aporta con la discusión filosófica y epistemológica de concebir el espacio, puesto que da mayor robustez al debate y avances a nuevos problemas que surgen en la física, un ejemplo es el uso en la teoría de la relatividad.

Conforme a ello, la discusión trasciende a la enseñanza en términos de oportunidad extender para habilidades lógico-matemático porque durante el desarrollo del trabajo, no solo se evidencia una serie de elementos matemáticos complejos, pero efectivos que llegan a reflejarse como intuitivos.

Anexo 3 : Recursos

Recurso 1

Video

Urbel. (2018, 13 de diciembre). *Urbel: espacio desde una perspectiva filosófica* [Video].

YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=G7WlNaLy7w4>

Recurso 1.1

Texto

Cárdenas Castañeda, L., y Botero Flórez, C. D. (2009). Leibniz, Mach y Einstein: Tres objeciones al espacio absoluto de Newton. *Discusiones Filosóficas*, 10(15), 51–68. Recuperado a partir de <https://revistasoj.s.ucaldas.edu.co/index.php/discusionesfilosoficas/article/view/661>

Recurso 2

Teoría de conjuntos

Muñoz Quevedo, J. M. (2012). *Introducción a la teoría de conjuntos* (4.ª ed.). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/79986/Introducción%20a%20la%20Teoría%20de%20Conjuntos%209789587011685.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

Recurso 2.1

Álgebra lineal

Gerber, H. (1989). *Elementary Linear Algebra*. Brooks/Cole

Sánchez C., R. E., & Velasco M., A. (1994). *Curso básico de álgebra lineal* (5ª ed.). Bogotá: Comex Trillas.

Recurso 3

Topología

Neira Uribe, C. (2011). *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/79976/Topolog%C3%ada%20General%209789587194425.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

Rubiano O., G. N. (2010). *Topología general: un primer curso* (3ª ed.). Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Facultad de Ciencias

Muñoz Quevedo, J. M. (2003). *Topología básica*. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Recursos 4

Variedad diferencial

Cruz Bonilla, Y. J., Duque Salas, R. F., & Salas Rodríguez, J. F. (2016). *Notas de geometría diferencial y aplicaciones a la física*. Bogotá: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Programa de Ciencias Básicas.

- Vélez Uribe, F. (2017). *Introducción a los tensores* (1ª ed.). Bogotá: Coarcas Editores S.A.S.
- Gómez Ruiz, F. (2015). *Geometría diferencial y geometría de Riemann* (1ª ed.). Málaga: Universidad de Málaga, Servicio de Publicaciones.
- Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1* (3.ª ed.). Houston, TX: Publish or Perish, Inc.
- Schutz, BF (1980). *Métodos geométricos de la física matemática*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bustamante, M., & Kordaß, J.-B. (2021). Espacios de métricas riemannianas (SNAP-2017-010-ES). Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
<https://publications.mfo.de/bitstream/handle/mfo/4124/snapshot-2017-010-ES.pdf?sequence=1&isAllowed=y>