

CONOCER REFLEXIVO CONSTRUÍDO POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA
EN UN PROCESO DE INVESTIGACIÓN FORMATIVA BASADO EN LA
MODELACIÓN MATEMÁTICA

JORGE MAURICIO SÁNCHEZ USECHE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2021

CONOCER REFLEXIVO CONSTRUÍDO POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA
EN UN PROCESO DE INVESTIGACIÓN FORMATIVA BASADO EN LA
MODELACIÓN MATEMÁTICA

JORGE MAURICIO SÁNCHEZ USECHE

Trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de Magíster en Docencia
de la Matemática

Directora
Claudia Salazar Amaya
Doctora en Educación

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2021

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
CONTEXTUALIZACIÓN Y ANTECEDENTES EMPÍRICOS DE ESTA INVESTIGACIÓN	3
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	8
PROPÓSITOS DE LA INVESTIGACIÓN	13
<i>Objetivo General</i>	13
<i>Objetivos Específicos</i>	13
ANTECEDENTES	13
<i>Antecedentes en relación con la formación de ingenieros</i>	13
<i>Antecedentes sobre la modelación matemática para la formación de sujetos críticos.</i>	18
MARCO TEÓRICO	25
<i>Principios y componentes de la formación de ingenieros</i>	25
<i>La modelación matemática como práctica para la formación crítica de la ciudadanía</i>	28
<i>La formación matemática vista desde la tripla conocer matemático, conocer reflexivo y conocer tecnológico.</i>	30
ESTRATEGIA INVESTIGATIVA	33
<i>Objeto de estudio y categorías de análisis de primer orden</i>	36
<i>Datos y su relación con el sistema categorial</i>	39
PROCESO DE ANALISIS	49
<i>Fragmento 1: f1</i>	49
<i>Fragmento 2: f2</i>	50
<i>Fragmento 3: f3</i>	52
<i>Fragmento 4: f4</i>	54
<i>Fragmento 5: f5</i>	55
<i>Fragmento 6: f6</i>	57
<i>Fragmento 7: f7</i>	58
<i>Fragmento 8: f8</i>	59
<i>Fragmento 9: f9</i>	60
<i>Fragmento 10: f10</i>	62
<i>Fragmento 11: f11</i>	63
<i>Fragmento 12: f12</i>	65
<i>Fragmento 13: f13</i>	67
<i>Fragmento 14: f14</i>	69
<i>Fragmento 15: f15</i>	71
<i>Fragmento 16: f16</i>	73
<i>Fragmento 17: f17</i>	74
<i>Fragmento 18: f18</i>	77
<i>Fragmento 19: f19</i>	79
<i>Fragmento 20: f20</i>	81
<i>Fragmento 21: f21</i>	84
<i>Fragmento 22: f22</i>	88
<i>Fragmento 23: f23</i>	89
<i>Fragmento 24: f24</i>	90
<i>Fragmento 25: f25</i>	91
RESULTADOS DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN	93
<i>Conocer reflexivo develado en la fase uno del proceso de modelación</i>	93
<i>Conocer reflexivo develado en la fase dos del proceso de modelación</i>	95
<i>Conocer reflexivo develado en la fase tres del proceso de modelación</i>	97
CONCLUSIONES	99
REFERENCIAS	104

TABLA DE FIGURAS

FIGURA 1. FASES DE LA INVESTIGACIÓN. FUENTE PROPIA	33
FIGURA 2. SISTEMA CATEGORIAL. FUENTE PROPIA	38
FIGURA 3. CARACTERÍSTICAS DEL CONOCER REFLEXIVO PRODUCTO DEL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS AMBIENTALES	102

RESUMEN

El siguiente documento presenta un acercamiento al análisis e interpretación del conocer reflexivo que emerge en dos estudiantes de Ingeniería cuando trabajan en un proceso de investigación formativa mediada por procesos de modelación matemática de un problema propio de su profesión. Esta investigación cualitativa se llevó a cabo en las siguientes fases: (a) Acercamiento al estado del conocimiento relacionado con la formación profesional de ingenieros y la modelación matemática para la formación de sujetos críticos; (b) Acopio de las fuentes documentales sobre la experiencia de modelación vivida por las estudiantes; (c) Sistematización de la información, depuración y consolidación de datos de la investigación; (d) Interpretación de los datos; (e) Consolidación de resultados y conclusiones. El sistema de categorías construido consideró el conocer reflexivo, de manera general, producto de las interacciones entre el conocer matemático, el conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa. En esta investigación se concluye que el conocer reflexivo que se desarrolla a partir de las interacciones entre conocer matemático, conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa asociada a la práctica profesional de estas estudiantes de Ingeniería Ambiental está caracterizado por: (a) El reconocimiento de una práctica situada y responsable; (b) El reconocimiento de la práctica profesional como una práctica normada; (c) El reconocimiento del papel de un abordaje interdisciplinar para los problemas propios de la ingeniería; (d) La Identificación de la relevancia de actividades relacionadas con la sistematización, matematización, algoritmación e interpretación en los procesos que se desarrollan dentro del actuar profesional de la ingeniería ambiental; (e) El reconocimiento del entorno como escenario apropiado para desarrollar procesos de investigación mediados por la modelación matemática y enfocados en afrontar problemáticas de la ingeniería ambiental; (f) El reconocimiento de la observación estructurada como herramienta para el abordaje de problemáticas ambientales; (g) el reconocimiento de la importancia de la implementación de diseños experimentales y herramientas tecnológicas para abordar problemas ambientales; y, (h) El reconocimiento de la naturaleza en todo su esplendor como elemento activo y vital para el desarrollo sostenible de la sociedad.

PALABRAS CLAVE

Modelación puntual, modelación extendida, conocer matemático, conocer tecnológico, dimensión ética y normativa, conocer reflexivo.

ABSTRACT

The following document presents an approach to the analysis and interpretation of reflective knowledge that emerges in two engineering students when they work in a formative research process mediated by mathematical modelling processes of a problem typical of their profession. This qualitative research was carried out in the following phases: (a) Approach to the state of knowledge related to the professional training of engineers and mathematical modelling for the training of critical subjects; (b) Collection of documentary sources on the modelling experience lived by the students; (c) Systematization of information, purification, and consolidation of research data; (d) Interpretation of the data; (e) Consolidation of results and conclusions. The constructed category system considered reflexive knowledge, in general, a product of the interactions between mathematical knowledge, technological knowledge and the ethical and normative dimension. In this research it is concluded that the reflexive knowledge that is developed from the interactions between mathematical knowledge, technological knowledge and the ethical and normative dimension associated with the professional practice of these Environmental Engineering students is characterized by: (a) The recognition of a situated and responsible practice; (b) The recognition of the professional practice as a regulated practice; (c) Recognition of the role of an interdisciplinary approach to engineering problems; (d) The identification of the relevance of activities related to the systematization, mathematization, algorithm and interpretation in the processes that are developed within the professional performance of environmental engineering; (e) The recognition of the environment as an appropriate scenario to develop research processes mediated by mathematical modelling and focused on addressing problems of environmental engineering; (f) The recognition of structured observation as a tool for addressing environmental problems; (g) recognition of the importance of implementing experimental designs and technological tools to address environmental problems; and, (h) The recognition of nature in all its splendour as an active and vital element for the sustainable development of society.

KEYWORDS

Punctual modeling, extended modeling, mathematical knowledge, technological knowledge, ethical and normative dimension, reflexive knowledge.

INTRODUCCIÓN

La sociedad colombiana hoy día se encuentra permeada por factores que afectan su buen desarrollo; factores como la corrupción, la desigualdad social, la delincuencia, la pobreza extrema, la falta de conciencia ambiental, el desempleo, entre otros, influyen en el desarrollo de la sociedad a tal punto que generan escenarios de violencia, inconformidad, frustración e intolerancia en sus habitantes. Esto se debe en gran medida a la formación que han recibido gobernantes, dirigentes y profesionales de las diferentes áreas, en las instituciones de educación superior, ya que es allí donde han adquirido las herramientas indispensables para asumir y construir el rumbo de la sociedad. Por tal motivo, es necesario y trascendente aportar a la comprensión de la importancia de construir en la formación de los profesionales el sentido de la responsabilidad social.

El problema de esta investigación radica en la ausencia de acciones intencionadas en las trayectorias de formación de los profesionales para educarlos en valores ciudadanos y la responsabilidad social que se le otorga a su profesión. Por mi rol como profesor de matemáticas en programas de ingeniería, este interés se ubica, en particular, en la formación de profesionales que incluye una componente de formación en matemáticas en la organización curricular. En general, en este componente matemático se evidencia una formación descontextualizada, que no considera la realidad de las prácticas profesionales de los egresados y que se aleja de fomentar procesos de reflexión en los educandos sobre aspectos críticos sociales relacionados con su profesión que permitan el desarrollo sostenible de la sociedad. Es por esto que la presente investigación pretende dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las características principales del conocer reflexivo construido por estudiantes de ingeniería cuando su aproximación al conocimiento matemático se lleva a cabo a partir de procesos de modelación matemática? Específicamente esta pregunta se responde en el marco de una experiencia de investigación formativa realizada con estudiantes de ingeniería ambiental que modelaron el comportamiento del crecimiento del árbol de mandarina arrayana, mediante la relación entre las ecuaciones diferenciales y las estructuras fractales dadas por L-sistemas.

Por lo anterior, el objetivo de la investigación es caracterizar los componentes del conocer reflexivo construido por estudiantes de ingeniería ambiental, en una experiencia de modelación matemática asociada a procesos investigativos propios de

la profesión. El desarrollo de este trabajo de investigación se centra en el análisis de datos cualitativos extraídos de fragmentos textuales del trabajo de grado desarrollado por estudiantes de la facultad de ingeniería ambiental de la universidad Santo Tomás para obtener el título de Ingeniero Ambiental, quienes establecieron relaciones entre las ecuaciones diferenciales y las estructuras fractales para estimar la cantidad de CO₂ que procesa una planta de mandarina arrayana.

El análisis de datos cualitativo se desarrolló mediante un proceso de tres fases relacionadas entre sí, iniciando con la reducción de datos, luego pasando al análisis descriptivo y posteriormente se formalizaron las interpretaciones que permitieron establecer conclusiones teóricas y explicativas desde la investigación. Para llevar a cabo el proceso de reducción de datos, el cual implica organizar, interpretar y categorizar los datos, inicialmente se definió un sistema categorial apriorístico de forma inductiva. A partir de un conjunto de palabras o conceptos claves se llevó a cabo una lectura temática, en la idea de construir una “codificación abierta” y posteriormente, se desarrolló la lectura relacional inspirada en una “codificación axial”, para terminar con una “codificación selectiva” en relación con una única categoría o macro-categoría, referida al conocer reflexivo, que integrara todas las categorías y subcategorías que se establecieron durante la investigación.

El sistema categorial apriorístico se propuso con el ánimo de analizar el conocer reflexivo que desarrollan las estudiantes cuando trabajan en un proceso de investigación formativa mediante la modelación matemática desde una perspectiva crítica. En él se establecieron categorías como el conocer matemático, conocer tecnológico, la dimensión ética y normativa. En relación con la categoría conocer matemático se establecieron subcategorías como la modelación matemática, tanto la modelación puntual como la extendida de acuerdo a los planteamientos de Skovsmose (1999); en cuanto a la categoría del conocer tecnológico se establecieron, como primera subcategoría los métodos formales y herramientas tecnológicas y, como segunda subcategoría los conocimientos específicos profesionales, éstas sustentadas en concordancia con los planteamientos de Capote, Rizo & Bravo (2016), entre otros. En la categoría dimensión ética y normativa las subcategorías que se propusieron se relacionan con las prácticas normativas y los propósitos y fines colectivos de acuerdo con lo establecido por Mantilla (2016), Cañón (2006), entre otros.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que las estudiantes construyen conocimiento reflexivo mediante la interacción del conocer matemático y el conocer tecnológico situado, es decir, en el marco de un proceso de modelación matemática de

un fenómeno relacionado con su profesión. En este proceso se evidencia el conocer reflexivo de las estudiantes al concluir que la metodología abordada por ellas para estimar la cantidad de CO₂ procesada por la planta es replicable y que el proceso de modelación les permitió identificar una alternativa para asumir de manera responsable su profesión; esto debido a que la modelación desarrollada les permitió comprender que no se requiere de la tala de la planta, como en las demás metodologías desarrolladas en otros ámbitos, en las que los investigadores deben talar la planta para poder llegar a la raíz de ésta y así realizar el análisis de la misma.

CONTEXTUALIZACIÓN Y ANTECEDENTES EMPÍRICOS DE ESTA INVESTIGACIÓN

Para contextualizar esta investigación se presenta a continuación una práctica pedagógica diseñada y desarrollada, por mí como profesor investigador, en la formación de ingenieros ambientales. En esta experiencia participaron las estudiantes que hacen parte de la población de este trabajo de grado, razón por la cual esta experiencia se constituye en un antecedente, de naturaleza empírica, para esta investigación. El interés investigativo que desarrolla esta propuesta de trabajo de grado surge en el marco de la implementación de una estrategia metodológica para la enseñanza de los modelos de crecimiento exponencial a través de la interacción entre las ecuaciones diferenciales y las estructuras fractales generadas por L-sistemas, con las estudiantes de IV semestre de la facultad de Ingeniería Ambiental de la Universidad Santo Tomás Villavicencio.

Esta estrategia metodológica fue implementada en el curso de Ecuaciones Diferenciales, identificando como profesor resultados favorables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. Uno de los núcleos fundamentales de la propuesta fue el fortalecimiento de la modelación matemática de problemas de crecimiento poblacional; de tal forma que se adoptó un modelo para el análisis del crecimiento de las plantas, en el que se relacionaron las ecuaciones diferenciales y los L-sistemas.

La propuesta se desarrolló en tres momentos. El primer momento denominado “introducción a los conceptos básicos de los L-sistemas” se caracterizó por abordar de manera elemental el concepto de fractal —describiéndolo como un concepto que fue introducido en la década de los ochenta, por el matemático polaco Benoit Mandelbrot, para designar entes muy irregulares pero auto-semejantes (Vera, 2003)—,

posteriormente se introduce el concepto de L-sistema —el cual según Orjuela, Rojas, Páez y Ramírez (2011) se define como una tripleta $L = \Sigma, W, P$ en la que Σ es un alfabeto, W es un axioma y P es un conjunto de reglas de producción—. Teniendo en cuenta lo anterior, en este momento se orientó a las estudiantes en la construcción de su propio L-sistema haciendo uso de lápiz y papel.

El segundo momento titulado “jugando con símbolos y reglas de sustitución” tenía como propósito que las estudiantes pudieran comprender el efecto que causa aplicar las reglas de sustitución sobre un objeto. Esto es, tomando como base un alfabeto =A, B, C se parte desde un objeto inicial A sobre el cual se aplicarán las reglas de sustitución establecidas. Por ejemplo, si partimos de $W=A$ y aplicamos las reglas de producción dadas por $P1: A \rightarrow BC$; $P2: B \rightarrow C$ $P3: C \rightarrow A$ donde se establece que A se sustituye por BC, que B se sustituye por C y que C se sustituye por A. Aplicando estas reglas de producción en un proceso iterativo se forma una cadena de palabras en cada iteración que determinan el L-sistema. Lo importante aquí es la forma de interpretar geoméricamente los símbolos utilizados, ya que las cadenas de palabras no tienen un significado especial (Orjuela, Rojas, Páez y Ramírez, 2011).

De esta forma, el resultado obtenido de aplicar las reglas de producción al objeto inicial se puede observar en la tabla 1, donde se muestra la generación del L-sistema en una iteración determinada.

Iteración	Generación
1	A
2	BC
3	CA
4	ABC
5	BCCA
6	CAABC
7	ABCBCCA
8	BCCACAABC
9	CAABCABCBCCA
10	ABCBCABCCAACAABC
11	BCCAACAABCCAABCABCBCCAA
12	CAABCABCBCCAABCBCBCCABCCACAABC
13	ABCBCBCCABCCACAABCBCBCCACAABCCAABCABCBCCA

Aunque esta primera sesión pretendía que el estudiante conceptualizara el significado de las reglas de producción y comprendiera la forma como éstas influyen al aplicar procesos iterativos, esta actividad también es útil para crear conjeturas, encontrar patrones, establecer sucesiones numéricas, entre otras. Posteriormente, se sugiere al grupo de estudiantes crear su propio L-sistema definiendo su propio alfabeto, su axioma inicial y sus reglas de producción.

Como el interés de esa propuesta era fomentar el trabajo con L-sistemas y los modelos de crecimiento exponencial dados por las ecuaciones diferenciales, para la segunda sesión denominada “creando ramificaciones con lápiz y papel”, se referencia a (Orjuela, Rojas, Páez, y Ramírez. 2011), quienes explican la forma de interpretar geométricamente los L-sistemas, planteando inicialmente que “*Existe una interpretación gráfica de los L-sistemas basada en el lenguaje logo o lenguaje de tortuga*” (p. 389) y además establecen que

para convertir una cadena de símbolos en una imagen fractal, hay que recorrerla de una manera particular. Para ello, a cada uno de los símbolos de la cadena se le asigna un orden que será interpretado por una tortuga hipotética que irá recorriendo el plano de un lado a otro, realizando una determinada acción, la cual dependerá del símbolo que lea (Orjuela, Rojas, Páez, y Ramírez. 2011, p. 389).

Cabe resaltar que, en el momento de realizar la programación en el lenguaje de tortuga, se estableció una codificación particular que está dada por: F, que indica dibujar una línea de una determinada longitud; f que significa recorrer la línea sin dibujarla; con el símbolo + se procede a girar con determinado ángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj; el símbolo – implica girar en sentido de las manecillas del reloj y el símbolo [] indica que se debe realizar las órdenes que están dentro y luego regresar al punto de partida.

El lenguaje de tortuga se ha utilizado en la creación de estructuras fractales como, por ejemplo, las estructuras ramificadas que permiten describir el crecimiento de las plantas, árboles, entre otras. Un ejemplo de esto se puede contemplar al utilizar el siguiente comando $FF-[-F+F]+[+F-F]$ cuyas iteraciones se obtienen mediante el uso de papel y lápiz siguiendo las órdenes que dicta cada símbolo.

En la tercera sesión, se presenta el software en línea y gratuito [Turtle Graphics Renderer](#) para el trabajo computacional de los L-sistemas, el cual es una herramienta que potencializa el proceso anterior y permite evidenciar propiedades de los L-sistemas que no se podrían establecer fácilmente mediante las cadenas de palabras o el dibujo con lápiz y papel únicamente.

Por lo tanto, se pidió a las estudiantes que experimentaran con dicho aplicativo y con ello evidenciaron propiedades que no se explican fácilmente. Este programa permite construir las imágenes de la figura 1 para cada iteración especificada

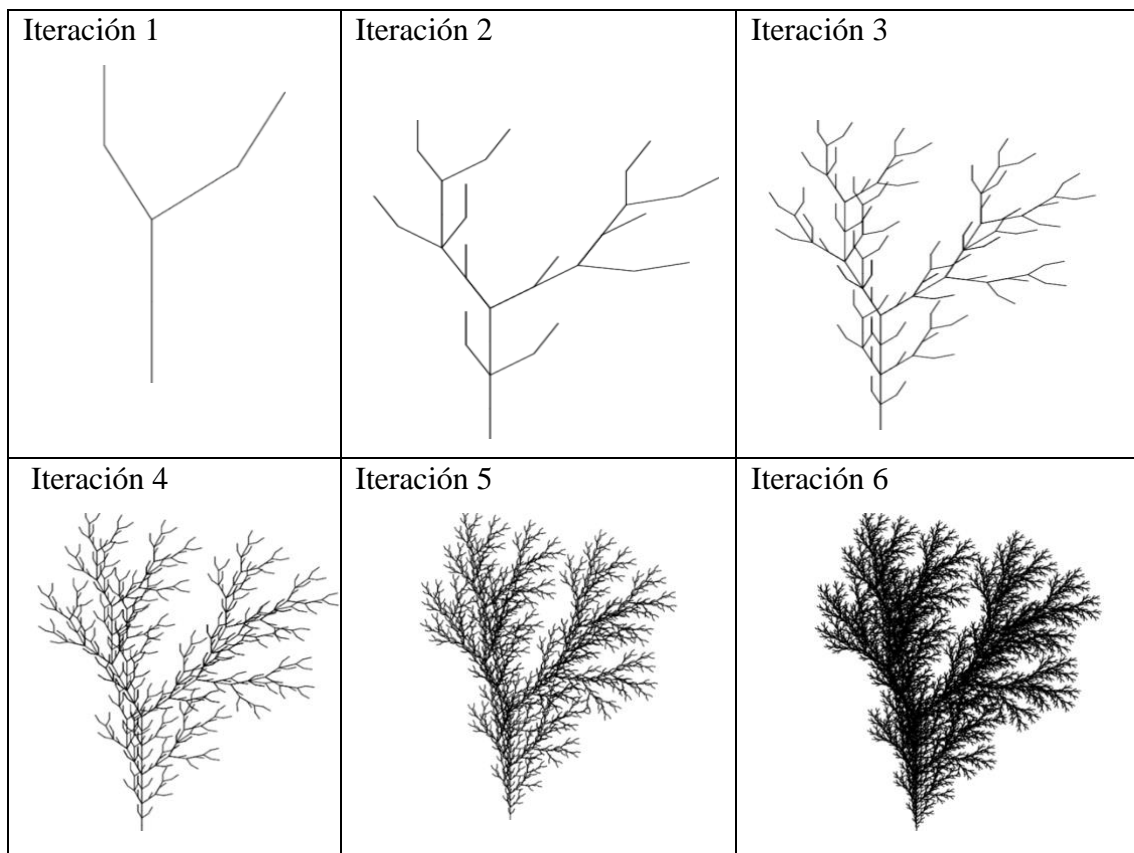


Figura 1. L-sistema hasta la iteración 6, tomado de [Turtle Graphics Renderer](#)

Para terminar el trabajo de la tercera sesión, se establece la relación que existe entre las estructuras fractales ramificadas generadas por los L-sistemas y los modelos de crecimiento exponencial que proporciona las ecuaciones diferenciales, para esto, se toma como punto de partida la ley empírica establecida por el economista inglés Malthus quien, a finales del siglo XVII, estableció que *“la razón con la que cierta población cambia, es directamente proporcional al número de habitantes que hay en dicha población en un instante de tiempo t ”*, en términos matemáticos, si $P(t)$ denota

cierta población en un instante de tiempo t , entonces esta ley empírica se puede expresar mediante la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$, donde k es una constante de proporcionalidad (Zill, 2009, pp. 20-21). La solución de esta ecuación diferencial está dada por $P(t) = ce^{kt}$, modelo exponencial que permite interpretar la forma como cambia una población en el tiempo, dependiendo de unos problemas de valor inicial dados por $P(0) = P_0$ y $P(1) = P_1$

De las consideraciones anteriores surgen las siguientes preguntas en las estudiantes que resultan desencadenantes de otras prácticas: ¿Cómo se relacionan los L-sistemas con los problemas de crecimiento exponencial?, ¿Qué significado adopta una iteración en este contexto? Estos interrogantes de las estudiantes motivaron el ejercicio investigativo y les permitieron encontrar nuevos cuestionamientos en este campo. Desde este panorama, surgió el interés particular de dos estudiantes de la facultad, quienes motivaron la creación de un semillero de investigación para darle continuidad a esta nueva forma de entender los procesos de crecimiento. Fue así como las estudiantes se interesaron en abordar una problemática ambiental y utilizando los L-sistemas como herramienta de investigación, se cuestionaron sobre la cantidad de dióxido de carbono que procesa una planta de mandarina y relacionaron los L-sistemas con las ecuaciones diferenciales para determinar el número de ramas y hojas que tiene un árbol de mandarina en un instante de tiempo t . Debido a los resultados obtenidos, en cuanto al análisis del crecimiento de los árboles, las estudiantes optaron por sistematizar su experiencia como proyecto de grado para obtener el título de Ingeniero Ambiental de la USTA (Villavicencio), en el marco del semillero de investigación, el cual se titula “*Estimación del CO₂ capturado por la biomasa aérea de la planta mandarina 'Arrayana' mediante la relación de L-sistemas y modelos matemáticos*”. Hoy en día, el trabajo de grado ya se finalizó y las estudiantes obtuvieron el título de Ingeniero Ambiental en la Universidad Santo Tomás sede Villavicencio.

Después de esta experiencia práctica se desencadena la socialización de los logros del semillero de investigación FRARI “*fractales como recursos de investigación*”, el cual participó en eventos académicos como la feria de la ciencia y la tecnología USTA, Colombia- Bogotá, en el año 2016, obteniendo el puntaje más alto entre todos los grupos participantes. Por tal motivo, FRARI participó en el Encuentro Regional Orinoquia REDCOLSI de la red colombiana de semilleros de investigación, en mayo de 2017, desarrollado en Acacias (Meta) por la Universidad Nacional Abierta y a

Distancia, obteniendo un puntaje de 97 puntos y el cupo para la participación en el encuentro Nacional REDCOLSI en octubre de 2017 en Barranquilla, Atlántico, e las instalaciones de la Universidad del Atlántico.

A partir de esta experiencia empírica y en el marco de este contexto se diseña y desarrolla la presente investigación, pues es parte del interés investigativo del autor de este proyecto cuestionarse por los aportes de la formación matemática a la formación de ingenieros con responsabilidad social.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Además de la experiencia descrita en el apartado anterior de contextualización, esta investigación está motivada por el posicionamiento del autor como profesor de matemáticas frente a problemáticas sociales, identificadas en nuestro diario vivir que afectan el buen desarrollo de la sociedad. Muchas de estas situaciones son consecuencia de tensiones como la corrupción, desigualdad social, falta de conciencia ambiental, pérdida de la ética y valores ciudadanos, sobreproducción sin medición de consecuencias, ausencia de la justicia social, deforestación, entre otras.

Una de las razones por las que se presentan estos fenómenos es por la falta de responsabilidad social y pensamiento reflexivo en los actores de la sociedad, principalmente en los dirigentes, gobernantes, empresarios y profesionales de las diversas áreas del conocimiento, quienes en su mayoría han sido formados en instituciones de educación formal, con trayectorias desde la formación básica hasta la educación superior.

Por otra parte, la formación de los diferentes profesionales egresados de las universidades en Latinoamérica ha sido tema de constante reflexión y estudio en las últimas décadas; podemos dar cuenta de esto en el gran número de investigaciones que se han desarrollado en torno a los procesos educativos que se llevan a cabo en las instituciones de educación superior (Velásquez 2016; Cruz 2010; Plaza 2017). Para el caso específico de la formación en ingeniería Velásquez (2016) plantea aspectos importantes a tener en cuenta en la formación de los estudiantes: los valores, el ambiente familiar, el contexto social, la responsabilidad y la motivación tanto del estudiante como del docente.

En relación con las matemáticas, como uno de los componentes de mayor relevancia en los planes de estudio en ingeniería, Plaza (2017) plantea que las habilidades que debe desarrollar un estudiante se relacionan con la capacidad para “identificar, entender y participar en la ciencia matemática y hacer juicios bien fundamentados sobre la presencia y necesidad de esta en la vida de un individuo, su entorno y su futuro” (p. 51) y para lograr esto, se debe promover en los estudiantes de los programas de ingeniería “el pensamiento holístico, la investigación crítica, el análisis y la reflexión, el aprendizaje activo, la aplicación práctica, la autoconciencia, la empatía, la comunicación y una fuerte capacidad de escucha” (p. 51).

Al respecto de este componente de las matemáticas en los programas de formación profesional, hoy se reconoce el desarrollo de una perspectiva sociopolítica para pensar el papel de las matemáticas en la formación de los individuos, por ejemplo, Mancera, Camelo, Salazar & García (s.f), plantean que la formación matemática de los individuos debe incluir reflexiones relacionadas con las implicaciones que conlleva la utilización de conocimientos matemáticos aprendidos en su entorno social, cultural, político e ideológico y la manera en la que con estos se construyen realidades. Así mismo, Valero (2002) afirma que la formación de individuos debe desarrollar competencias democráticas para ser actores responsables en su sociedad, como se citó en Bustos, Bustos & Novoa (2013). Este planteamiento de Valero pone de presente un aspecto deseable y urgente para la formación profesional en general y la formación de ingenieros en particular.

En concordancia con lo anterior, Gonzáles (2005) expresa que la formación de profesionales competentes y comprometidos con el desarrollo social se considera un factor primordial y esencial de la educación superior, además, la formación de profesionales con un desempeño ético y responsable es una de las demandas primordiales y urgentes de las sociedades actuales para su buen desarrollo. Sumado a esto, (Gaete, 2015) afirma que la UNESCO desde 1998 tiene líneas de acción que pretenden que las universidades a nivel mundial asuman una mayor responsabilidad social, entendida esta última, como la relación que hay entre el quehacer universitario y las necesidades del entorno socio cultural y político en el cual se encuentra la institución, que incluye atención especial a la generación y transmisión del conocimiento. De igual forma, Velásquez (2016) argumenta que en la formación de ingenieros se debe introducir un componente que contenga propósitos de formación relacionados con ciertos valores y con la responsabilidad social que conlleva la profesión.

Lo anterior implica diseñar planes de estudio que promuevan la formación del sujeto y ayuden a preservar, mejorar y mantener el equilibrio de su sociedad. Para Velásquez (2016) ese equilibrio se gana en una sociedad con una formación donde interactúen los componentes sociales y humanistas en los procesos educativos. Además, este autor afirma que la interacción de estas componentes conduce a que los estudiantes logren un desarrollo tanto personal como profesional, fortaleciendo la autonomía y la capacidad de establecer objetivos éticos que permitan cumplir las exigencias que la sociedad demanda al futuro ingeniero, al mismo tiempo que permitan al profesional participar como ciudadano de la transformación social, cultural y política.

En ese sentido, Velásquez (2016) referencia una experiencia desarrollada en la UNAM que pone en juego los planteamientos anteriores para la formulación del programa de ingeniería civil. En esta experiencia duplicaron el número de asignaturas relacionadas con el área social y humanística, entre las que se destacan: el ser humano y el aprendizaje, la importancia que representa la cultura para el desarrollo personal y el éxito profesional, clases y grupos sociales en México, transformación social, la misión encomendada al ingeniero en los contextos social, económico y político; función ética, teoría de los valores, profesión y vocación, relación entre la técnica y la ética; permitiendo un cambio en la formación de los futuros ingenieros.

Por otro lado, (Gaete, 2015) precisa que las instituciones de educación superior deben responder a las demandas que el concepto de responsabilidad social universitaria implica, las cuales están relacionadas con responder efectivamente a las necesidades y problemáticas sociales de la región. En otras palabras, el quehacer universitario en la región se transforma en una componente principal de la responsabilidad social universitaria, mediante el cual se estimula a las universidades a desarrollar procesos de formación profesional enlazados arraigadamente con el contexto y la realidad local, asistiendo robustamente el desarrollo de la formación de los estudiantes con un mayor compromiso cívico-ciudadano, incursionando en la gestión del cambio de paradigma dentro de la cultura organizacional (Gaete. 2015)

Sin embargo, desafortunadamente la ingeniería en Colombia está en crisis y las causas tienen origen en la universidad, el estado y la sociedad; esto se evidencia por un lado, en los procesos formativos que se llevan a cabo en las instituciones de educación superior, los cuales están descontextualizados y en algunos casos no

responden a los intereses demandados por la sociedad o por los territorios; todo esto parece confirmar el planteamiento de (Serna & Serna. 2015) en relación con la carga de contenidos curriculares desarticulados que se evidencia en los planes de estudio de los programas universitarios de Ingeniería. Al revisar los planes de estudio de siete universidades colombianas, tres públicas y cuatro privadas de diferentes regiones del país, que tienen facultades de ingeniería, se identifica que los planes de estudio de estas universidades están organizados básicamente por unas componentes comunes que responden a la formación integral, formación en ciencias básicas, fundamentos de ingeniería, formación en idiomas y seminarios electivos que enfocan en los intereses particulares de cada estudiante. Una de las características que se observa, al revisar los planes de estudio, es que una de las componentes comunes y marcadas en cada institución consultada es la formación en ciencias básicas, en la cual, el conocimiento matemático ocupa gran parte de los ciclos de formación de un ingeniero. Lo anterior se justifica en el hecho de considerar la matemática como base y herramienta fundamental para el trabajo en conceptos propios de la ingeniería.

Ante la necesidad planteada por (Velásquez. 2016) de introducir en los planes de estudio una componente que contenga propósitos de formación relacionados con ciertos valores y con la responsabilidad social que conlleva la profesión, hoy en día el conocimiento matemático debería ser considerado desde perspectivas sociales y políticas (Skovsmose, 1999), de tal modo, el componente matemático de la formación podría contribuir con la formación en valores y la responsabilidad social universitaria.

El análisis de los planes de estudio de facultades de ingeniería en instituciones de educación superior deja el vestigio que estos planes responden a los intereses propios de las universidades, pero no apuntan a la formación íntegra de profesionales; una formación que los prepare para asumir los retos que la sociedad les exige de una manera ética, responsable y amable con las dinámicas propias del desarrollo sostenible de su entorno sociocultural, político y ambiental.

Por tal motivo, se ve la necesidad de implementar un cambio de paradigma, en cuanto a la organización de los planes de estudio de las facultades de ingeniería se refiere, que se enfoque en la formación integral de los futuros profesionales, porque hoy en día se enseña una cantidad de contenido sin sentido, que hace tanto al estudiante como al docente percibir esta práctica sin muchos aportes a la formación de un ingeniero. En mi experiencia profesional, esta problemática se ve reflejada, por ejemplo, en las producciones académicas realizadas por estudiantes de ingeniería en

una actividad titulada “proyectos de aula”, desarrollada durante un periodo académico en su trayectoria de formación. En estas producciones se evidencia que los estudiantes desarrollan su propuesta aplicando conocimientos y habilidades propias de su campo, sin medir las implicaciones de estas decisiones. No se evidencian argumentos que sustentan sus decisiones en asuntos relacionados con la responsabilidad social y la dimensión ética, política, moral que acarrea el ejercer como futuro ingeniero en la sociedad actual. Esta es una de las causas por las que hoy en día podemos encontrar, por ejemplo, ingenieros civiles que en sus proyectos de vivienda para dar solución al problema de las aguas residuales, optan por verterlas a la fuente hídrica más cercana; Ingenieros ambientales autorizando licencias en lugares con fuerte impacto ambiental; Ingenieros mecánicos diseñando y construyendo maquinaria sin tener en cuenta el impacto que esto puede generar en su entorno sociopolítico, dejando en evidencia la “ausencia de responsabilidad social”.

Por lo tanto, el problema a gran escala sugiere el planteamiento de las siguientes preguntas: ¿cómo se piensa el perfil del ingeniero?, ¿Cuál es la importancia de la dimensión ética y moral en la formación de ingenieros?, ¿Cómo se incorpora la Responsabilidad Social Universitaria (RSU) en los planes de estudio de las facultades de ingeniería?

Con base en lo anterior, surge el interés particular por aportar a este problema desde mis prácticas como profesor de matemáticas en facultades de Ingeniería y poder encontrar alternativas de prácticas con las matemáticas que se relacionen no solo con el conocimiento técnico y profesional ingenieril sino con aspectos éticos y de responsabilidad social. Por lo anterior, con fines de delimitar el alcance de esta investigación se pretende determinar las características principales de las reflexiones establecidas por estudiantes de ingeniería ambiental de la universidad Santo Tomás sede Villavicencio, cuando trabajan en un proceso de investigación formativa interactuando con los modelos de crecimiento exponencial y las estructuras fractales.

En este contexto surge la siguiente pregunta de investigación
¿Cuáles son las características principales del conocer reflexivo construido por estudiantes de ingeniería, cuando su aproximación al conocimiento matemático se lleva a partir de procesos de modelación matemática?

PROPÓSITOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo General

Caracterizar los componentes del conocer reflexivo construido por estudiantes de ingeniería ambiental, en una experiencia de modelación matemática asociada a procesos investigativos propios de la profesión.

Objetivos Específicos

- Identificar las categorías que permitan analizar la información proveniente del corpus documental de esta investigación, enmarcados en la teoría de la Educación Matemática Crítica.
- Establecer conexiones entre los análisis realizados por las estudiantes en el proceso de modelación puntual (al relacionar las ecuaciones diferenciales y los L-sistemas) y los juicios provenientes de la modelación extendida (que implican la responsabilidad social que les compete como futuras ingenieras), de tal modo que aporte a la caracterización del conocer reflexivo exhibido por las estudiantes.
- Relacionar categorías previas que ofrecen los marcos de referencias de esta investigación y categorías que posiblemente emerjan de los datos para identificar aspectos del conocer reflexivo construido por dos estudiantes de ingeniería en cada fase del proceso de modelación de un problema propio de su profesión.

ANTECEDENTES

Para ubicar este proyecto en el campo investigativo en educación, se acopiaron distintas investigaciones relacionadas con dos categorías: antecedentes relacionados con investigaciones que reportan experiencias de formación de ingenieros; y, antecedentes relacionados con la modelación matemática para la formación de sujetos críticos.

Antecedentes en relación con la formación de ingenieros

El siguiente conjunto de investigaciones han tratado la importancia de la formación matemática en las trayectorias de formación de ingenieros, las dificultades asociadas a la formación matemática en estudiantes de ingeniería, las motivaciones y desmotivaciones para aprender matemáticas por parte de los futuros ingenieros, el

papel de la modelación matemática en la formación ingenieril y las habilidades que desarrollan los estudiantes a partir de estas prácticas de modelación.

El estudio presentado por Plaza (2016) tiene como objetivo identificar específicamente, mediante estudio de caso, obstáculos presentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. La recolección de la información se da mediante una encuesta realizada a todos los estudiantes que se encontraban cursando Ecuaciones Diferenciales en los programas de ingeniería en la Unidad Central del Valle del Cauca en el segundo periodo académico de 2015, después de trabajar con actividades enfocadas en promover prácticas de modelación. La investigación realizada es de carácter cualitativo y como técnica de análisis se utiliza la teoría fundamentada. El autor manifiesta que se encontraron obstáculos de tipo epistemológico, didáctico, cognitivo y pedagógico, sociológico, comunicativo y organizacional. Afirma que la enseñanza de la modelación matemática se debe incluir en los cursos elementales de matemáticas en los programas de ingeniería, ya que esta promueve el desarrollo de la comprensión sobre las prácticas matemáticas y ayuda a que el estudiante encuentre sentido a la formación que está recibiendo.

La investigación desarrollada por Castro & Miranda (2019) tiene por objetivo analizar las motivaciones y desmotivaciones de estudiantes de ingeniería a la hora de estudiar matemáticas. Este estudio se desarrolló con ocho estudiantes de ingeniería de género masculino con edades entre 19 y 24 años, de la universidad Andrés Bello de Santiago de Chile, a quienes se les indagó sobre las experiencias que impactaron y promovieron la decisión de estudiar o no matemáticas, de esta misma manera, se les indagó por los motivos específicos de aprender conceptos matemáticos y de resolver problemas. La metodología de investigación se centra en el paradigma interpretativo ya que este estudio se enfoca en el análisis de significados, interpretaciones y comprensión de las acciones de una persona en su entorno social. Desde el enfoque de la teoría de la autodeterminación y la metateoría del dominio afectivo, los autores concluyeron que los factores que motivan y desmotivan a los estudiantes a estudiar matemáticas están relacionados con: “ser como el profesor”, “rol del profesor”, “evaluaciones”, “ser ingeniero” y “el rendimiento”. Además, si el estudiar matemáticas logra satisfacer las necesidades que las relaciones sociales, la competencia y la autonomía generan en los estudiantes, entonces, estos se motivan a estudiar matemáticas, ya que encuentran sentido y utilidad en esa ciencia.

En la investigación realizada por Acebo (2021) el objetivo es determinar la forma como la modelación matemática contribuye al desarrollo de pensamiento crítico en los estudiantes de ingeniería. Esta se desarrolla con una población de 36 estudiantes entre 18 y 21 años de edad del área de ingeniería en el curso de ecuaciones diferenciales de una institución privada en Monterrey, Nuevo León, México y emplea una metodología mixta de investigación. A los participantes de la investigación se les propone diseñar problemas relacionados con el tema de triángulos dando libertad de escoger la forma y estructura de los problemas; la información se recolecta mediante instrumentos como observaciones en clase, sesiones de trabajo colaborativo, entrevistas a estudiantes, el análisis de exámenes y tareas y la aplicación de la prueba de pensamiento crítico de Cornell. En términos generales, los autores manifiestan que es probable que los estudiantes practiquen habilidades de pensamiento crítico siempre y cuando en las aulas se fomente y fortalezca de manera consistente y sistemática, aplicando matemáticas a problemas de la vida real.

El estudio de Alonso (2017) pretende resaltar la importancia que tiene la matemática que se les enseña a estudiantes de ingeniería. El estudio se desarrolla con estudiantes de ingeniería civil, de la Universidad de Oriente en Cuba. Por medio de una metodología exploratoria, en la que se emplearon métodos cuantitativos y cualitativos para establecer los hallazgos relacionadas con el objeto del estudio, se establece que las matemáticas son una ciencia que aporta de manera significativa al desarrollo del pensamiento lógico, puesto que todo profesional de la ingeniería efectúa representaciones científicas y técnicas en términos matemáticos que le permiten evidenciar los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia. También plantean que las matemáticas son importantes en el estudio de la ingeniería, ya que este profesional toma decisiones, que pueden ser de tipo técnico o no, que implican razonar de forma organizada y esto solo se puede lograr por medio de las matemáticas.

Al respecto Villa (2019) orienta su estudio en analizar e identificar los obstáculos, así como las dificultades, reportadas en otros estudios, sobre el aprendizaje de las matemáticas de los ingenieros. La metodología de investigación es descriptiva y tiene en cuenta un corte cualitativo, por lo que se tomaron en cuenta artículos científicos, libros especializados y tesis, que reportan estudios relativos al asunto. En los resultados del estudio Villa plantea que se evidencia que el desconocimiento de temas epistemológicos asociados a las matemáticas, por parte del educador, puede llegar a generar inconvenientes en la comprensión del estudiante y

en su pensamiento matemático; además, plantea que cuando el maestro incluye conocimientos como temas de orden psicológico y ético, contribuyen positivamente en el aprendizaje del estudiante. Asimismo, identifica los obstáculos ontogenéticos en los estudiantes y los describe como aquella falta de motivación, o la ausencia de técnicas de estudio para abordar determinado tema del área de las matemáticas. Por último, se refiere a los obstáculos de tipo didáctico, los cuales provienen de los materiales con los que explica la clase el docente o los recursos que utiliza. Ahora bien, en el caso específico de la ingeniería, se identifica que muchas veces se enfrentan a bajos desempeños en el área de las matemáticas, debido a la falta de motivación y pedagógicas que motiven a los estudiantes a adquirir conocimientos en esta asignatura.

Por su parte Díaz (2018) fundamenta su investigación en establecer las estrategias acordes para el aprendizaje de las matemáticas en ingenieros, articulándose con ciencias de la ingeniería, tecnología y ciencias básicas, con el fin de potencializar sus habilidades. El instrumento es aplicado a cuatro carreras de ingeniería, encogiéndose una muestra de tres a cuatro estudiantes; igualmente el estudio se realizó por medio de una metodología cualitativa, en la que se procedió a realizar un análisis descriptivo de los contenidos. Bajo esta contextualización, se pudo evidenciar que un modelo de enseñanza que promueve el aprendizaje significativo y profundo tiene que ver con enseñar en grupos pequeños, donde se da lugar a una participación dinámica de los educandos, diseños y socialización de las actividades, lo que significa que para que la clase de matemáticas sea dinámica, esta surge más en espacios o grupos de estudiantes pequeños. Un aprendizaje realmente profundo se promueve en espacios en los que unos estudiantes aprenden de los otros, ampliando y reforzando sus propios conocimientos; lo que significa que, a mayor interacción mayor aprendizaje, siendo muy importante la socialización y el seguimiento que hace el docente a este proceso de aprendizaje.

Mediante la investigación de (Serna. 2020) se pretenden estudiar los aspectos teóricos en los que se basa la enseñanza del área de las matemáticas en la ingeniería, destacando a la vez la importancia de la modelación matemática, por cuanto ésta sirve para el fortalecimiento de la estructura mental de los ingenieros. Para llevar a cabo la investigación se tomaron treinta fuentes documentales, mediante una metodología de tipo cualitativa. Se establece que la modelación matemática tiene resultados favorables en los estudiantes de ingeniería, ya que fortalece la formación de competencias y habilidades encaminadas a la resolución de problemas. El autor

asegura que la enseñanza de las matemáticas no puede estar desligada del uso de modelos didácticos para un mejor aprendizaje; por lo tanto, para el caso de la modelación matemática, no solo se trata de tener ciertos conocimientos específicos en cuanto a técnicas matemáticas, informáticas o estadísticas, sino que es indispensable poseer competencias como claridad en los pensamientos, una buena idea de los datos, enfoque lógico, interés por realizar las actividades y capacidad para comunicarse. Por lo anterior, se concluye que es muy importante entender que el pensamiento lógico es el punto de inicio para obtener las destrezas necesarias para enfrentarse a las situaciones problemas que se les plantea. Esto da lugar a que los estudiantes usen las operaciones matemáticas de manera correcta y razonen de forma adecuada.

Beltrón (2019) plantea un estudio dirigido a establecer la concepción de competencia matemática y de modelación matemática, desde el ámbito de formación de las ingenierías; enfocado en una muestra de cursos de ingeniería de la Universidad técnica de Manabí, por medio de una metodología descriptiva. Según Beltrón luego de analizar el contexto de estos grupos se evidencia que, tanto para docentes como para alumnos, es preocupante la situación que se presenta con el aprendizaje de las matemáticas, pues en la mayoría de los casos los niveles académicos que alcanzan están por debajo de índices aceptables. Según los resultados de este estudio, las dificultades evidenciadas se deben a la falta de modelos idóneos de enseñanza, y a la falta de aplicación de la modelación matemática en las clases de matemáticas. Debido a lo anterior, Beltrón advierte que alrededor de Latinoamérica, por medio de los ministerios de educación, se viene trabajando en la formación de habilidades y competencias colectivas e individuales en estudiantes universitarios, y esencialmente en los futuros profesionales de ingeniería, pues ellos requieren tener la capacidad de poner en marcha los principales conceptos de las matemáticas, ya que éstas proporcionan recursos y mejoran el pensamiento abstracto, algorítmico y lógico para que puedan ser competentes en el desarrollo y ejercicio de la profesión.

Al respecto Sharhorodska (2018) desarrolla su estudio encaminado a definir la relación simbiótica existente entre las ciencias de las matemáticas y la formación del ingeniero contemporáneo; para el desarrollo de la investigación se tuvo en cuenta el método de estudio histórico lógico, por medio del cual se hizo un análisis documental. En los resultados de este estudio se reporta que las evidencias de actividades matemáticas se registran desde los inicios de la existencia del hombre, por lo que no son ajenas a su entorno; en este sentido todo individuo es matemático por alguna

razón, pues es una ciencia que está presente en cualquier situación de la vida del ser humano. Esta conexión entre las matemáticas y las situaciones de la vida humana, traídas a la enseñanza de la ingeniería, aporta un sistema de modelos. Este sistema entendido desde dos panoramas: el primero, un sistema que está en constante evolución y por ende se adapta a la realidad; el otro, como una teoría por medio de un sistema de modelos. Sin embargo, advierte Sharhorodska que la realidad es que la matemática, aún desde el punto de vista científico, no se limita a los aspectos antes mencionados, sino que incorpora experimentos. Por ello las matemáticas son consideradas como la base fundamental para la formación académica de los ingenieros, por lo tanto, el educador debe trabajar incansablemente para que su aprendizaje se dé en los mejores ambientes, donde haya motivación de ambas partes y calidad de conocimientos.

Así mismo Marqués (2019), en su investigación, busca evaluar el desarrollo de habilidades de los estudiantes, a partir de la modelación matemática. El estudio se desarrollada por medio de la metodología cualitativa y cuantitativa, efectuando análisis de resultados y análisis de variables, de acuerdo con las necesidades de la investigación y la muestra (que corresponde a 252 estudiantes de grado undécimo del Colegio san Vicente de Paúl de la ciudad de Medellín). La población se dividió en un grupo experimental y un grupo de control. Como resultado de la investigación se afirma que la enseñanza ha venido cambiando, se requieren metodologías innovadoras y activas, y por supuesto el área de las matemáticas no ha sido ajena a ello, a pesar de ser una ciencia exacta, la misma necesita de nuevos modelos de enseñanza, que impulsen y motiven a los estudiantes a obtener conocimientos de calidad. Con relación a este estudio es claro que la mayoría de las instituciones deben cambiar los lineamientos de los currículos, para el área de las matemáticas estos deben estar orientados a que el estudiante tenga las competencias para solucionar situaciones problema y que su respuesta sea acorde a los procesos experimentados en la modelación matemática.

Antecedentes sobre la modelación matemática para la formación de sujetos críticos.

El conjunto de investigaciones que se reporta en esta categoría pretende una caracterización del conocer reflexivo desarrollado en el marco de prácticas de modelación matemática, fundamentalmente con estudiantes de educación básica.

La investigación realizada por Mancera, Perilla, & Camelo, (2017) se desarrolla en un colegio público de Bogotá con estudiantes del grado 1101, a quienes se les propuso discutir problemáticas relacionadas con: sobrepoblación mundial, embarazo en adolescentes, violencia intrafamiliar y cambio climático; el objetivo de la investigación fue caracterizar el conocer reflexivo que desarrollan los estudiantes cuando trabajan en un ambiente de modelación matemática desde un enfoque socio crítico. El desarrollo de este trabajo estuvo orientado por los planteamientos de Barbosa (2003) en relación con la modelación matemática desde una perspectiva sociocrítica, al igual que se consideraron las ideas expuestas por Skovsmose (1999; 2011) referentes a la educación matemática crítica. Los investigadores adoptaron un abordaje metodológico crítico mediante el cual hicieron un análisis preliminar por medio de los actos dialógicos y reportaron que “los estudiantes al trabajar en grupos toman posicionamientos críticos, actitudes democráticas y posturas reflexivas, soportadas en las matemáticas”.

Rojas, Salazar, & Romero (2013) reportan un par de investigaciones en las que se analiza el conocer reflexivo, de estudiantes de educación básica, desarrollado mediante prácticas de modelación que implican la variación y cambio, en situaciones relativas al medio ambiente y la salud. La primera de estas investigaciones se lleva a cabo mediante la implementación de un taller que involucra situaciones relacionadas con asuntos ambientales y de salud, a los estudiantes de grado séptimo de la institución educativa San Pedro Claver ubicada en Bogotá se les propuso participar en el “proyecto de vida saludable” el cual está encaminado en introducir a los estudiantes en procesos de modelaje; los estudiantes analizaron la rapidez de su crecimiento de acuerdo a sus medidas y a las medidas estándar publicadas en revistas de salud. A los estudiantes de grado octavo de la misma institución se les propuso un concurso de fotografía en las que se reflejaran problemáticas ambientales específicamente relacionadas con la contaminación por residuos sólidos, orientando a los estudiantes a procesos de modelado que permitan analizar cambios entre el aumento de residuos sólidos y sus posibles consecuencias. El objetivo es determinar e identificar las características de las tareas de tal manera que se fomente el estudio de la variación y se favorezca el conocimiento matemático y el conocimiento reflexivo en los estudiantes. El desarrollo de esta investigación se basa en el enfoque de Barbosa (2006) en relación con la modelación matemática desde una perspectiva sociocrítica y el enfoque de la educación matemática crítica propuesta por Skovsmose (1999). Los investigadores advierten que “las situaciones propuestas a los estudiantes no pueden ser elegidas por el profesor sin considerar las disposiciones e intenciones de cada

grupo de estudiantes”, además, conciben la modelación como una herramienta potente por medio de la cual las matemáticas ejercen su poder formativo” a tal punto que logra transformar la realidad.

La investigación abordada por Martínez (2016) adopta una metodología de estudio de caso que se relaciona con la caracterización que surge de las posiciones críticas de cuatro estudiantes de grado séptimo de la institución educativa José Manuel Restrepo del municipio de Arboletes Antioquia, a quienes se les propuso inquietudes relacionadas en contextos del comercio y el turismo. Mediante actividades de modelación matemática se caracterizaron las posiciones críticas de los estudiantes. Para la recolección de datos se tiene en cuenta elementos como entrevistas, documentos escritos y observaciones realizadas por el investigador las cuales permiten organizar, codificar y categorizar la información recolectada. El análisis de la información recolectada se realiza principalmente a la luz de la teoría de la educación matemática crítica -EMC propuesta por Skovsmose (1999) y el establecimiento de dos categorías que responden a la caracterización de las posiciones críticas de los estudiantes; por un lado está la categoría de las posiciones críticas a partir de incursión de los estudiantes en situaciones de la realidad y por otro lado se encuentra la categoría que se centra en los resultados matemáticos como alternativa para desarrollar posiciones críticas en los estudiantes. El autor reporta que las actividades de modelación propuestas a los estudiantes están aportando significativamente en los aprendizajes de estos, ya que permiten la interacción entre ellos y la interacción con personas de la comunidad ampliando los procesos académicos que se llevan a cabo en la institución y sus concepciones. Así mismo el autor establece que el estudio de situaciones a partir de la modelación es una alternativa para que los estudiantes tomen posturas críticas de acuerdo con los resultados obtenidos y las reflexiones que emergen durante la interacción con los procesos de modelación.

La investigación abordada por Vanegas & Camelo (2018) se desarrolla en torno a la creación e implementación de un ambiente de modelación matemática, relacionado con el alza en el servicio de transporte público del SITP decretado en la ciudad de Bogotá en marzo de 2017 por la alcaldía mayor de la capital. Este ambiente de modelación se desarrolla con un grupo de estudiantes de la licenciatura en educación infantil de la universidad distrital Francisco José de Caldas, con el objetivo de analizar a profundidad el modelo matemático que se ajusta a la modificación de tarifas y reflexionar sobre las posibles implicaciones para la comunidad. La recolección

de la información se da en el marco de una indagación que hicieron los estudiantes de tipo exploratoria mediante encuestas, entrevistas y actos dialógicos entre ellos. Las categorías establecidas para el análisis están relacionadas con justicia social, crítica a los modelos y dignidad humana. Los autores expresan que para la cimentación de saberes en los estudiantes, se deben fomentar el trabajo con elementos matemáticos que involucren prácticas de contextos cercanos a la realidad del estudiante en las aulas de clase, de tal forma que se permita la reflexión sobre los resultados encontrados, sus incidencias y repercusiones; así mismo los autores expresan que las matemáticas van surgiendo durante el trabajo con el modelo matemático, es decir que se adhieren a la idea de Valero (2006) planteando que lo social antecede a lo matemático y señalando que las matemáticas no son neutrales ya que éstas permiten tomar decisiones que orientan el desarrollo de la sociedad.

El estudio realizado por Rondón (2018) está orientado a diseñar e implementar estrategias para la modelación matemática, las cuales deben ser dinámicas y creativas y a su vez deben generar un impacto positivo tanto en docentes como en estudiantes. Esta investigación se lleva a cabo con una muestra de estudiantes de licenciatura en matemáticas y física de la Universidad Popular del Cesar. Inspirado en las ideas y estrategias metodológicas propuestas por Vithal, Burak y Skovsmose reconoce la importancia que tiene incluir temas políticos y sociales en el proceso de enseñanza aprendizaje de las ciencias exactas. Para recopilar la información, esta se llevó a cabo por medio de entrevistas a los educadores, directivos y por supuesto a los estudiantes, para posteriormente diseñar unas propuestas sobre estrategias de impacto y crecimiento en la institución educativa. Indican los investigadores, que durante la prueba realizada pudieron detallar que, en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, estas pueden ser conjugadas con otras áreas del conocimiento, despertando mayor interés en los estudiantes y evidenciando la intervención de esta área en los diferentes contextos de la cotidianidad.

Al respecto Sarmiento (2020) y su investigación, encaminada a cotejar la fundamentación teórica, en lo que tiene que ver con la modelación en los currículos de las instituciones colombianas, puntualiza básicamente en el papel que juegan las aplicaciones y la modelación matemática en los documentos curriculares. La investigación se realiza en una institución educativa rural, del departamento del Huila, adoptando la metodología cualitativa. Se desarrolla específicamente en el proceso de enseñanza de los meses de febrero y noviembre de 2019, haciendo uso de la reflexión, la implementación, la observación y el análisis del proceso académico. Ahora

bien, argumenta el autor, que la modelación matemática, vista desde el punto de vista crítico, significa que se deben reconstruir los modelos matemáticos, por medio del análisis de fenómenos naturales, políticos, económicos y sociales. Además, se debe realizar una selección, crítica y adaptación de los modelos que ya existen con el propósito de entender los mecanismos que usa la sociedad. Por todo lo anterior, el estudio concluye que es recomendable incluir la modelación crítica en programas que estén encaminados al mejoramiento de la práctica educativa, lo cual provocará acciones de empoderamiento, como la conformación de comunidades cooperativas entre educandos y profesores.

Sousa (2019) realiza un estudio con el propósito de identificar el uso de la modelación en los estudios realizados en Brasil y Colombia; por medio de la búsqueda de información en bancos de datos, tomando para el caso de Colombia información de Colciencias y para el caso de Brasil información en Tese de capes. El corpus del estudio fueron libros, revista e investigación recientes. El estudio se realizó mediante la metodología cualitativa, con la que analizó la información de forma paralela, tomando como muestra 18 investigaciones en total. Como resultados reporta que la modelación matemática se ha venido consolidando como un dominio de la investigación. La modelación se ha promovido en cuanto al uso, comprensión y matematización de ciertos procedimientos, ideas y prácticas matemáticas, que normalmente están presentes en la vida de los distintos grupos culturales. Señala el autor que, como aspectos relevantes a tener en cuenta, luego del análisis realizado, está el reconocimiento de importantes avances en el uso de la modelación, como un medio importante para fines críticos y sociales; así mismo esta investigación es importante ya que permite visualizar los otros alcances que tiene la modelación, teniendo en cuenta que estas competencias requieren de un enfoque cognitivo, que está encaminado a la investigación internacional.

El estudio de Quiroz (2017) tenía como propósito entender la manera como los procesos de comunicación fortalecen el aprendizaje de las matemáticas, a la hora de solucionar situaciones problema. Utilizando la teoría de la actividad, la investigación se llevó a cabo a través del estudio cualitativo de un estudio de caso, los estudiantes de tercer grado. La recolección de datos se realizó en una institución educativa de secundaria, de Montreal, Canadá. De acuerdo con la propuesta, se plantean cinco situaciones problema para suscitar una evolución de resultados, que den paso a la construcción cognitiva. El autor luego del análisis puntualiza que la teoría de la actividad le brindó herramientas para analizar correctamente los resultados, por lo que

el proceso de comunicación fue el punto de partida para que las representaciones de los estudiantes evolucionaron. Tomando como referencia el aprendizaje equitativo se pretendía que los educandos construyan conceptos similares a los que espera la sociedad de su parte. También se identificó que la comunicación no causó el mismo impacto en todos los estudiantes, para dos estudiantes, el diálogo los condujo a incorporar ideas en las primeras representaciones; en cambio en el caso de otros dos, su participación fue más limitada y prefirieron mantenerse al margen de la discusión. El estudio permite destacar la importancia de la modelación matemática como una estrategia didáctica.

La investigación realizada por Salazar, Mancera, Camelo & Perilla (2017), está encaminada a diseñar y discutir una propuesta en etapas, para la construcción de prácticas pedagógicas de modelación matemática, desde el punto de vista de la perspectiva crítica. El estudio se lleva a cabo por medio del modelo de exploración de una situación que puede ser modelada, por lo que los estudiantes proceden a realizar búsqueda de información para afianzar conocimientos. Es así como los investigadores señalan que incluir la modelación en el área de las matemáticas, se debe a unos argumentos de tipo formativo, utilidad, competencia crítica, imagen de las matemáticas y promoción de esa imagen. Ahora bien, es claro que alrededor del mundo se viene investigando sobre la modelación matemática y sus prácticas, dando la posibilidad que existan diferentes concepciones sobre lo que es entendido por modelación, un claro ejemplo está en el contexto brasileño. En ese contexto identifican la modelación como estrategia para la formación de modelos matemáticos y como estrategia de enseñanza. Finalmente señalan que la modelación matemática, desde el punto de vista crítico, tiene cuatro puntos a saber: la introducción a la perspectiva, deliberar y discutir con respecto a las problemáticas a modelar, una propuesta para el diseño de ambientes de modelación matemáticas, las problemáticas a modelar y la reflexión final.

También Camelo (2018) reporta una investigación en la que se promueven prácticas de modelación alrededor de la modificación realizada en el año 2017, por la Alcaldía de Bogotá, a las condiciones para el uso del SITP. La investigación buscaba diseñar y crear un ambiente de modelación matemática, con unos alumnos de Licenciatura en pedagogía infantil, de la Universidad Francisco José de Caldas. Lo que busca el estudio es brindar elementos para comprender el modelo matemático en el que se basó la modificación y la implicación que esto trajo para la comunidad. El ambiente propuesto a los estudiantes y la práctica de modelación se realizó por medio de una investigación exploratoria, analizando cada uno de los datos y la información

recabada. Se puede evidenciar en los resultados, que lo social se antepone a lo matemático, por lo que inicialmente el análisis se centró en la multiplicación del valor inicial del pasaje, por la cantidad de días para calcular los costos y las implicaciones de estos en la economía personal; sin embargo, también el proceso dio lugar a ideas matemáticas, como proporcionalidad, porcentaje y fracciones para identificar las variables presentes en la situación problema. El estudio concluye que las ideas matemáticas que se suscitan en el proceso de modelación matemática toman sentido en la medida que son analizadas en el mismo contexto; las cuales para el caso de este estudio tienen que ver con presentar a los usuarios el manual, para que conozcan las reglas del medio de transporte; analizar la manera como el usuario usa el transporte, para desarrollar a posterioridad campañas sobre este medio de transporte; y finalmente, el análisis de la modelación matemática, para reconocer como las ideas matemáticas se usan para desarrollar y comprender fenómenos.

Mancera (2020) fundamenta su estudio en establecer el conocer reflexivo de los alumnos que viven en contextos de vulnerabilidad social, desde el punto de vista de ambientes de modelación matemática en la perspectiva sociocrítica. El estudio se realizó con estudiantes de grado décimo de una institución pública, ubicada en la ciudad de Bogotá, desarrollada por medio de la metodología crítica; es así como a lo largo de la investigación se va comprendiendo la realidad social, económica y política de cada uno de los alumnos. En el estudio sobresale el carácter multidimensional y dinámico de la vulnerabilidad, respecto de las condiciones que llegan a reflejar la situación de malestar social, como pueden ser las prácticas de exclusión y pobreza. Para el autor una característica que identifica la necesidad social de la comunidad tiene que ver con la búsqueda de causalidad múltiple, la cual ayuda a evidenciar los contextos de deterioro de los habitantes respecto de la forma como se constituyó la localidad. Es este orden de ideas la modelación matemática se relaciona estrechamente con el desarrollo de competencias críticas, con la utilidad, la exposición de una imagen de las matemáticas y la promoción de la misma; es por eso que es tan importante el diseño de modelos matemáticos y la solución de situaciones problemas para desarrollar actitudes y competencias generales en los educandos.

Villa (2016) centra su estudio en analizar e identificar, a través de las manifestaciones escritas y orales de estudiantes, las acciones y las explicaciones de los educandos, así como su interacción y formas de participación; así el propósito de la investigación es analizar la forma como un grupo de estudiantes participan dentro de ambientes que contienen características de un contexto sociocrítico de la

modelación matemática. El estudio se realizó con 27 alumnos de quinto grado de un colegio de Medellín, por medio de la metodología cualitativa. Así las cosas, destaca el autor que, desde el punto de vista sociocrítico, los beneficios de la modelación no solo se limitan a enseñar y aprender las matemáticas, sino que se enfocan en la formación ciudadana del educando; es por eso que se sugiere el modelo sociocrítico para ver la modelación desde la educación matemática. Un resultado de la investigación es el reconocimiento al trabajo pedagógico que contienen los ambientes de aprendizaje, diseñados como un espacio oportuno para que los discentes reflexionen sobre la naturaleza y el papel que desempeñan los modelos matemáticos en la sociedad. Así, esta investigación advierte que la modelación desde esta perspectiva supone oportunidades para que los alumnos trasladen los debates de la clase, a la vida cotidiana, ayudándoles a crear conciencia sobre su papel en la sociedad y promoviendo cambios en la forma como perciben el mundo.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico de esta investigación considera tres referentes conceptuales como fundamentales: Principios y componentes de la formación de ingenieros; la modelación matemática como práctica para la formación crítica de la ciudadanía y la formación matemática vista desde la tripla conocer matemático, conocer reflexivo y conocer tecnológico.

Principios y componentes de la formación de ingenieros

El desarrollo de las sociedades depende en gran medida de los profesionales que dirigen sus diferentes sectores entre los cuales se encuentran los ingenieros; la formación de ingenieros ha sido tema de constante reflexión debido a la responsabilidad que acarrea dicha profesión para las sociedades de hoy día. Esta ha ido evolucionando con el paso de las décadas de tal manera que dicha formación responde a las exigencias que demanda la sociedad del momento. Autores como (Capote, Rizo, & Bravo. 2016) afirman que uno de los grandes retos para las sociedades es la formación de ingenieros que responda a las exigencias y necesidades del entorno en el que viven y la forma en que deben enfrentar la misma; así mismo establecen que para lograr este tipo de formación, es necesario superar el paradigma en el que prevalece la adquisición y transmisión de conocimiento y se debe asumir uno que genere nuevas formas de pensamiento y acciones acordes a las características de las sociedades contemporáneas.

Para (Capote, Rizo, & Bravo. 2016) la formación de ingenieros debe fortalecer dimensiones científico-tecnológicas y las universidades en sus procesos de enseñanza deben replantear sus currículos por unos currículos abiertos, flexibles, orientados al desarrollo de aprendizajes novedosos e innovadores que fomenten habilidades y capacidades en la toma de decisiones con responsabilidad social y encaminadas a dar solución a problemas económicos, ambientales y de desarrollo científico-tecnológico.

En esta misma línea de la formación de ingenieros, (Cañón. 2006) plantea que “el conjunto de conocimientos, experiencias y habilidades que se reconocen socialmente como ingeniería es inseparable del desarrollo de la sociedad humana” (p. 55); también plantea que “uno de los componentes importantes para abordar de manera urgente, en un proyecto de formación en ingeniería, es el diseño curricular que promueva habilidades de identificar y plantear perspectivas de crecimiento y desarrollo” (p. 63). De igual manera expone que el resultado de la formación debe llevar a la consecución de propósitos relacionados con

Contribuir a elevar la calidad de vida de la sociedad, racionalizar el aprovechamiento de los recursos aproximando las demandas de la sociedad con los criterios de productividad, preservación ambiental y desarrollo sostenible, promover el diálogo de la sociedad y el conocimiento con la naturaleza, fomentar el tratamiento racional de los problemas de la sociedad a través del uso del conocimiento y el respeto por sus saberes acumulados, estimular la formación de una comunidad académica de ingeniería que ejerza liderazgo sobre la sociedad y facilite la comunicación con otras culturas y formas de organización social (p. 63)

Siguiendo los planteamientos respecto a la formación en ingeniería, (Duque, Gauthier, Gómez, Loguerrero, & Pinilla. 1999) explican que, si se pretende que la formación en ingeniería responda a las tendencias mundiales, se requiere “entender el currículo como un todo compuesto por cursos, metodologías, profesores y materiales, y hacer una planeación integral” (p. 67). Así mismo manifiestan que las demandas del sector productivo de la sociedad están correspondidas con las competencias y habilidades que desarrollan los ingenieros, aunque algunas de éstas requieren una mejora significativa. Estas mejoras se relacionan con las “habilidades para interactuar con otros profesionales, la responsabilidad profesional y ética, y el continuo

aprendizaje [...] habilidades para innovar, investigar y desarrollar nuevas tecnologías [...] habilidades técnicas y capacidad para aplicarlas y, la educación para entender el impacto de las decisiones” (p. 70); de manera general, el sector productivo demanda una formación integral en los ingenieros.

Desde otra mirada, (Donoso & Rodríguez. 2007) plantean que los egresados de las facultades de ingeniería deben contar con conocimientos en ciencias básicas al igual que conocimientos en sus especialidades acordes a los requerimientos y demandas de los diferentes sectores de la sociedad; de igual forma exponen que estos egresados deben contar con habilidades sociales, capacidad de emprender, de innovar, de trabajar en equipo, debe ser un profesional ético con posturas críticas contribuyendo al desarrollo de la sociedad. Estos autores definen la calidad en la formación de ingenieros en el siglo XXI como “la consolidación de profesionales con conocimientos, habilidades y destrezas que se ponen al servicio de las organizaciones, del emprendimiento y del país” (p. 3)

Centrando la mirada específicamente en la formación de ingenieros ambientales, profesionales que tienen una enorme responsabilidad social debido a las problemáticas medioambientales que afectan el desarrollo de los diferentes sectores – agrícola, industrial, educativo, tecnológico, turístico, financiero, entre otros– de una sociedad, (Ibarra. 2014) expresa que “el ingeniero ambiental requiere de herramientas orientadas a la comprensión de las implicaciones de las actuaciones del ser humano” (p. 2), del impacto que generan dichas acciones al entorno sociocultural, político y ambiental, y para ello el estudio de sistemas complejos es una herramienta fundamental. Este autor expone la metodología que se está implementando para enseñar la complejidad del entorno en la formación de ingenieros ambientales, la cual tiene como base el modelamiento y la simulación de problemas ambientales, que implica el uso de las ciencias básicas como una de las herramientas para su desarrollo.

Por otro lado, (Hernández. 2015), en su tesis de maestría en educación ambiental, establece que la educación ambiental está por encima de las concepciones teóricas y científicas que fundamentan la formación de ingenieros ambientales, ya que ésta es un proceso abierto donde aparecen nuevas interacciones entre ciencia, tecnología, conocimiento, cultura y naturaleza. Asimismo, expone que esta educación tiene la capacidad de integrar al ser humano y volverlo parte de su entorno, para que éste tenga las competencias adecuadas para transformarlo de una forma sostenible,

ya que, para este autor, los programas educativos y las prácticas docente están saturadas de conocimiento fragmentado y aislado. Además, declara que “los enfoques educativos están orientados a la creación e innovación de la tecnología para dar solución a los problemas ambientales que son generados por otra tecnología” (p. 101)

Desde otra mirada, autores como (Mantilla, 2016) exponen la necesidad del marco legal en la formación de ingenieros ambientales, adicional a la formación en ciencias básicas y en ciencias propias de la ingeniería ambiental. La formación en normatividad es de suma importancia ya que “la norma regula el actuar social de todo individuo en una comunidad; y el ingeniero ambiental como ciudadano de una sociedad, debe conocerla, obedecerla y hacer uso de ellas y de mecanismos de participación ciudadana” (p. 1) . Es decir que el ingeniero ambiental debe incorporarse como ciudadano crítico, ético y reflexivo, sensible y con sentido de responsabilidad social que utilice la normatividad para mejorar la calidad de vida de su comunidad.

Por último, centrando la mirada específicamente en la formación matemática de los ingenieros, se reconoce que las ciencias básicas y particularmente la matemática están presentes en los programas curriculares de las diferentes facultades de ingeniería, con una alta influencia en sus planes de estudio. Es así como se establece, como requisito para obtener el título de ingeniero, cursar y aprobar espacios académicos como pre-cálculo, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial y multivariado, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, estadística y probabilidad, entre otros... dando un alto grado de importancia a la modelación matemática en la formación de ingenieros.

La modelación matemática como práctica para la formación crítica de la ciudadanía

(Plaza. 2017) afirma que la modelación matemática promueve en los estudiantes el desarrollo de habilidades y capacidades para resolver problemas, estimula la reflexión y el análisis y tiene una fuerte incidencia en los métodos de investigación. Además, la modelación matemática es una herramienta fundamental en los procesos de formación de ingenieros ya que “funciona como un eficaz instrumento para el aprendizaje” (p.55)

Ahora bien, según Romo, Romo y Vélez (2012, como se citó en Plaza, 2017), es de suma importancia diseñar e implementar estrategias didácticas que involucren la modelación matemática en los programas de estudio de ingeniería para adaptarlos a

las necesidades y demandas de la realidad y el entorno, y para promover el desarrollo de pensamiento analítico, pensamiento crítico y fortalecer la relación de las matemáticas con las tecnologías actuales. (Brito, Alemán, Fraga, Para, & Arias. 2011) establecen que al abordar métodos que fomenten el trabajo con modelación matemática se promueven factores relacionados con la integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento, incrementa el interés por estudio de diversas situaciones con ayuda de las matemáticas, potencia la comprensión del conocimiento, amplía habilidades para leer, interpretar, formular y resolver problemas, favorece la implementación de herramientas tecnológicas en los procesos de formación.

En esta misma línea, (Salazar, Mancera, Camelo & Perilla. 2017) plantean la modelación matemática como “un terreno fértil para la construcción de prácticas pedagógicas que consideren el papel que juegan las matemáticas en la sociedad” (p. 1) . Por otro lado, (Salazar, Mancera, Camelo & García. 2014) muestran desafíos y posibilidades en el montaje de ambientes de aprendizaje donde se incorpora la modelación matemática desde una perspectiva crítica y reflexiva de la realidad, es decir, “desde una perspectiva sociopolítica de la educación matemática alrededor de ambientes de aprendizaje” (p. 293) Así mismo, Bustos, Bustos & Novoa (2013, citando a Biembengut & Hein [s.f]) afirman que los modelos matemáticos permiten vincular la realidad con la matemática y es la síntesis de la comprensión de la situación en estudio.

Para el desarrollo de este trabajo se utiliza la teoría de la matemática crítica propuesta por (Skovsmose.1999), como principal fuente de referencia para analizar y categorizar el conocer reflexivo mediante procesos de modelación, ya que este autor afirma que “el modelaje matemático se puede concebir como una manera potente por medio de la cual la matemática ejerce su poder formativo” (p. 112), y clasifica la modelación en dos tipos de modelaje, la modelación puntual la cual se caracteriza por el uso del lenguaje formal mediante el cual se trata de dar solución al problema que se está abordando, y la modelación extendida que se caracteriza por usar la terminología matemática para proporcionar un fundamento teórico para el desarrollo de un proceso tecnológico. En la modelación extendida la matemática es una herramienta que se encuentra implícita en el conglomerado conceptual fundamental que permite tratar las problemáticas sociales.

La formación matemática vista desde la tripla conocer matemático, conocer reflexivo y conocer tecnológico.

Por otro lado (Skovsmose.1999) plantea que la competencia democrática es una de las competencias que caracteriza a los individuos que hacen parte de una sociedad con un profundo desarrollo tecnológico, ya que esta competencia fomenta en gran medida la participación de la comunidad en asuntos relacionados con la gestión de sus dirigentes; pero infortunadamente el desarrollo tecnológico afecta significativamente la democracia de una sociedad, debido a su alto grado de influencia en los diferentes sectores como el social, económico, político, cultural, educativo, entre otros. Es aquí donde la matemática proporciona herramientas significativas, como la modelación matemática, para mitigar dicha afectación y al mismo tiempo, deja en evidencia la importancia de pensar una educación matemática crítica, una educación matemática que permita a los individuos participar en el desarrollo de su sociedad de manera asertiva, ya que como lo afirma el autor, “las matemáticas le dan forma a nuestra sociedad” (p. XV) y esto lo fundamenta expresando que “las matemáticas pueden verse como un lenguaje poderoso que permite producir nuevas invenciones de la realidad” (p. XV). Es decir, la matemática es una herramienta que permite crear nuevas perspectivas del entorno y la modelación matemática es fuente principal de dichas creaciones; esta es una de las razones por las que la educación matemática crítica debe promover el desarrollo de competencias democráticas. El autor afirma que la competencia de la educación matemática crítica que se relaciona directamente con la competencia democrática es el conocer reflexivo, además plantea que la competencia democrática envuelve el conocimiento matemático, el conocimiento tecnológico y el conocimiento reflexivo y son estos tipos de conocimientos que orientan el desarrollo sostenible de la sociedad. Skovsmose (1999) define al conocimiento matemático como la habilidad para realizar cálculos mediante algoritmos, determinar patrones, hallar conjeturas, demostrar enunciados e inventar y descubrir nuevas matemáticas; al conocer tecnológico, como la habilidad necesaria que debe tener un individuo para emplear la matemática con el fin de resolver problemas de su entorno, de su comunidad y en general para abordar situaciones con fines tecnológicos; y respecto al conocimiento reflexivo, el autor afirma que “en sí tiene que ver con la evaluación y la discusión general de lo que se puede identificar como un fin tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de lograr tal fin con las herramientas seleccionadas” (p. XVI), es decir, que el conocimiento reflexivo lleva a los individuos a cuestionarse sobre las implicaciones, efectos y secuelas que conllevan las decisiones y acciones que se instituyan para construir el rumbo de la sociedad. Por ende, el conocimiento reflexivo es una herramienta mediante la cual se

puede entender la forma como la modelación matemática influye sobre el contexto social donde se generó el problema.

Ahora bien centrando nuestra mirada en el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia, (Skovsmose & Valero. 2012) afirman que la educación matemática es un elemento indispensable en el desarrollo de la sociedad y herramienta fundamental para la consecución de los ideales democráticos de la sociedad, es decir, la educación matemática interactúa con las dinámicas sociopolíticas de una comunidad y a su vez orienta su desarrollo, por lo tanto, los autores establecen que en la relación entre educación matemática y democracia es necesario definir la dimensión política de la educación matemática y reflexionar sobre sus implicaciones y efectos en las decisiones y determinaciones que orientan la construcción y el rumbo de las sociedades. Además, exponen tres tesis que enfocan la relación entre educación matemática y democracia y estas son: la tesis de la resonancia intrínseca donde se establece que “debido a la naturaleza de las matemáticas, la educación matemática puede resguardar los intereses y valores democráticos” (p. 5), es decir que la educación matemática es un pilar en la construcción de sociedades democráticas. La tesis de la disonancia que “sugiere que la educación matemática ha establecido una negación sistemática al acceso sobre la base del género” (p. 7); y la tesis de las relaciones críticas, la cual establece que “la relación entre educación matemática y democracia es crítica” (p. 9), los autores enfatizan en esta premisa de la relación crítica expresando que la educación matemática debe orientarse y organizarse mediante factores sociales, políticos, económicos y culturales, es decir, se podría pensar en una relación crítica cíclica entre la educación matemática (EM) y la democracia, ya que la EM es un componente esencial en el desarrollo de las sociedades democráticas y sus diferentes sectores y, los diferentes sectores deber orientar y organizar la EM, surgiendo un desarrollo mutuo entre la EM y las sociedades democráticas.

Desde esta mirada, (Skovsmose & Valero. 2012) afirman que la matemática ya no se puede considerar como una ciencia neutral a los procesos de cambio que enfrentan las sociedades esto debido a que la matemática, al igual que la EM, la investigación en EM y las sociedades, están cambiando y evolucionando constantemente volviéndose cada vez más complejas y, se considera que la EM tiene la virtud, la capacidad y la responsabilidad de contribuir al desarrollo de las sociedades democráticas. Por lo anterior, los autores exponen que para el desarrollo de la EM se debe tener en cuenta procesos para la elaboración de políticas generales y

curriculares, las prácticas de la EM deben promover la escritura de textos de matemáticas, al igual que la EM debe tener en cuenta los procesos institucionales donde se gesta y se regula la EM (Valero, 1999, citado en Skovsmose & Valero, 2012).

Desde la perspectiva de la tesis de la relación crítica entre la EM y la democracia, los autores anteriores definen la democracia como “una acción política abierta que incluye colectividad” (p. 16), ya que la acción humana se caracteriza por ser social y para la democracia es indispensable que los individuos interactúen y compartan la importancia y necesidad del trabajo cooperativo en la toma de decisiones que mejoren las condiciones de vida en la comunidad; la democracia también incluye *transformación*, ya que el objetivo de las sociedades democráticas es mejorar las condiciones de vida de todos y cada uno de sus habitantes; *deliberación*, pues el ser escuchado es un derecho que tiene todo individuo en una sociedad democrática y esto permite la participación activa de los miembros de la comunidad en general que les reconoce involucrarse y comprometerse en el desarrollo de su comunidad y también una sociedad democrática debe tener *coflexión*, que en términos de los autores, la coflexión está relacionada con formas de pensamiento donde “las personas, colectivamente, dirigen su atención hacia los pensamientos y acciones de los demás de una manera consciente, esto es, las personas colectivamente, consideran los pensamientos, acciones y experiencias que viven como parte de su esfuerzo colectivo y adoptan también una posición crítica hacia su actividad” (Skovsmose & Valero, 2012, p. 16).

Así como la democracia se considera un proceso abierto, la EM matemática, considerada como una práctica social, también es un proceso abierto y de carácter crítico, es decir, tiene una naturaleza abierta la cual sugiere que se puede desarrollar de múltiples formas como lo son el humanismo, la etnomatemática, la EM crítica entre otras (Skovsmose & Valero, 2012). Por lo que los autores proponen cinco escenarios críticos desde donde se puede abordar la EM y además se puede examinar la democracia como una acción política abierta y estos son: *matemáticas interdisciplinarias*, la cual se enfoca principalmente en el contenido de la EM; *interacción en el aula*, cuyo enfoque enfatiza sobre la relación docente estudiante en el aula de clase; *Organización de la educación matemática escolar*, cuyo enfoque está determinado por el Sistema Institucional de la Educación Matemática (SIEM) que hace referencia a todos los factores y sus relaciones que estipulan el funcionamiento de la EM; *estratificación y examen*, que se refiere a todo lo relacionado con el sistema educativo nacional y este es un escenario complejo ya que infortunadamente, en el

sistema educativo actual los exámenes, la evaluación y la estratificación juegan un papel que no responden a la idea de los principios democráticos de equidad y justicia; y por último, el escenario crítico propuesto por los autores se denomina *escenario de globalización* y el “cuarto mundo”, donde utilizan una afirmación bastante descriptiva “la globalización no está basada en equidad y justicia” (p. 22) y esto se ve reflejado en la desigualdad social a la que están sometidas las diferentes sociedades. Por ejemplo, se reconoce el difícil acceso a herramientas para el desarrollo personal y democrático, como lo es la educación y especialmente la EM, difícil acceso a herramientas tecnológicas y computacionales, difícil acceso en participación política entre otras (Skovsmose & Valero, 2012), lo cual afecta considerablemente la participación de los individuos en los procesos democráticos llevados a cabo en su comunidad.

ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

El siguiente capítulo tiene como propósito presentar la ruta metodológica que se empleó para el desarrollo de este trabajo de investigación. Esta ruta inicia en los antecedentes empíricos de esta investigación y concluye con la construcción de este informe final en el que se presenta el proceso investigativo en torno al conocer reflexivo desarrollado por estudiantes en un proceso de modelación matemática. De manera sintética se presenta en el siguiente esquema:

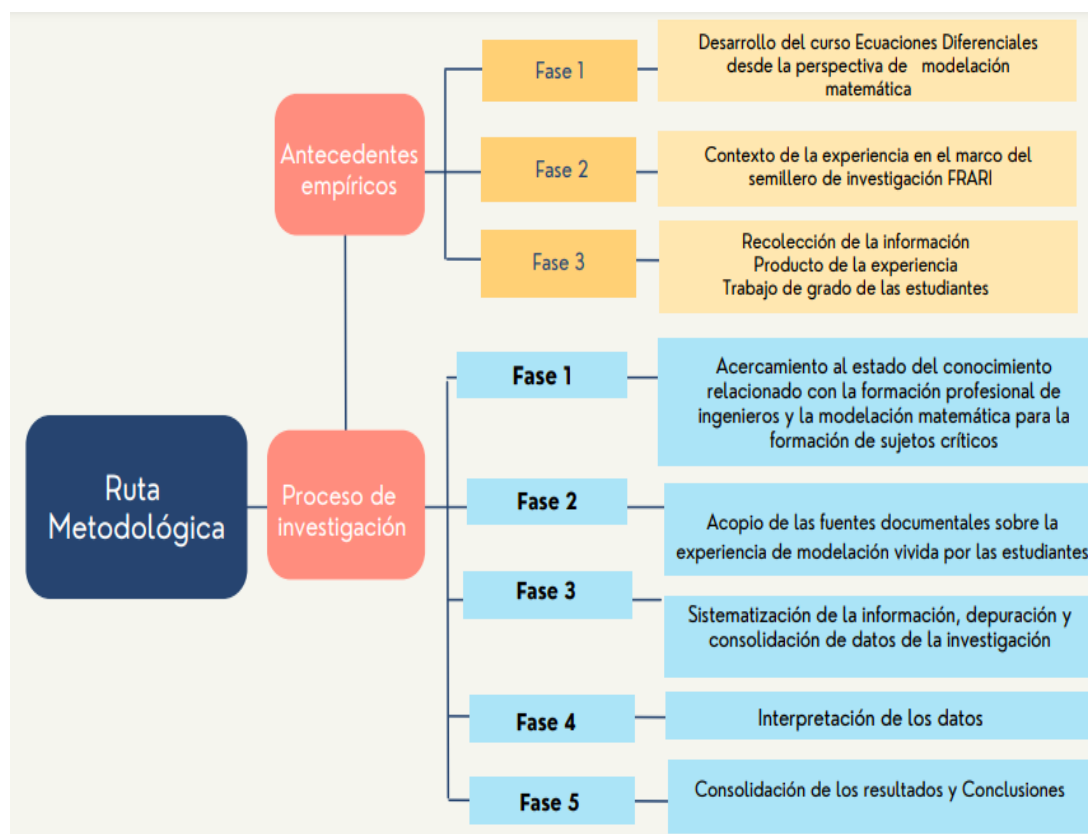


Figura 1. Fases de la investigación. Fuente propia

Esta investigación se inscribe en el paradigma cualitativo, busca la comprensión del fenómeno de investigación sin pretensiones de generalización. Específicamente pretendió comprender y caracterizar el conocer reflexivo desarrollado por estudiantes de ingeniería ambiental, en el marco de un proceso de modelación matemática. En esta investigación se asume, además, como lo afirma LeCompte (1995, como se citó en Herrera, s. f.) que

“la investigación cualitativa podría entenderse como una categoría de diseños de investigación que extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, grabaciones, transcripciones de audio y video cassettes, registros escritos de todo tipo, fotografías o películas y artefactos” (p. 4)

Es decir, la investigación cualitativa se enfoca en la interpretación de los hechos y acontecimientos registrados por medio de diversas técnicas. Para Strauss & Corbin (2002) la investigación cualitativa hace referencia a cualquier tipo de investigación que produce hallazgos a los que no se llega por medio de procesos estadísticos u otros medios de cuantificación; esta se basa en un proceso no matemático de interpretación para describir conceptos y relaciones en los datos, organizándolos en un esquema explicativo teórico.

Las fases o distintos momentos en los que se desarrolló este ejercicio investigativo fueron: (a) Acercamiento al estado del conocimiento relacionado con la formación profesional de ingenieros y la modelación matemática para la formación de sujetos críticos; (b) Acopio de las fuentes documentales sobre la experiencia de modelación vivida por las estudiantes; (c) sistematización de la información, depuración y consolidación de datos de la investigación; (d) Interpretación de los datos; (e) consolidación de resultados y conclusiones.

En la fase de acercamiento al estado de conocimiento inicialmente se realizó una búsqueda de trabajos e investigaciones publicadas en relación con la formación de estudiantes de ingeniería que pudieran considerarse antecedentes para la presente investigación. Posteriormente, se realizó una búsqueda de marcos de referencia que aportaran al desarrollo del presente trabajo. De esta manera se recogió información de los elementos teóricos que permitieron sustentar el marco de referencia y permitieron

realizar consideraciones relacionadas con el conocer reflexivo desarrollado por estudiantes de ingeniería a partir de una experiencia de modelación matemática.

La fase de acopio de fuentes documentales sobre la experiencia de modelación vivida por las estudiantes, en el marco del semillero de investigación, consistió en la búsqueda de diversos documentos en los que quedó registrada la experiencia (entre ellos el trabajo de grado de las estudiantes, las memorias de las sesiones de semilleros, notas del investigador de ese momento). Posteriormente se organizó este corpus documental con cierta jerarquía de acuerdo con los usos en el proceso de interpretación. El trabajo de grado de las estudiantes es la fuente primaria de información y los demás documentos serían una fuente secundaria que serviría al investigador en los procesos de análisis e interpretación. Acerca del trabajo de grado como fuente primaria de información se debe aclarar que la razón fundamental de esta decisión es que en este documento se sistematizó la información del proceso de un año de las estudiantes, en el marco de la experiencia del semillero de investigación.

En la fase de sistematización de la información, depuración y consolidación de datos de la investigación la primera acción fue la identificación de fragmentos extraídos de la fuente primaria de información que dieran cuenta del proceso de modelación experimentado por las estudiantes y de los distintos tipos de conocimiento y reflexión desarrollado por ellas. En esta fase, se plantearon etiquetas a cada uno de los párrafos donde las estudiantes desplegaban o precisaban una idea en particular, aquí se evidenció que varios fragmentos se clasificaban de acuerdo con las etiquetas o categorías establecidas previamente. Seguido a esto se seleccionaron fragmentos en los que se evidenciaba tanto un papel preponderante en torno al proceso de modelación vivido por las estudiantes, como posibles fragmentos con evidencias del conocer reflexivo que se iba gestando. Posteriormente, se utilizó parte del procedimiento de conceptualizar y reducir los datos propuesto por (Strauss & Corbin, 2002). Para la implementación de este procedimiento se retomó la selección de fragmentos (descrita en el párrafo anterior) y se procedió a llevar a cabo una lectura analítica de cada uno de ellos. En este proceso se identificaron, a la luz de los referentes teóricos de la educación matemática crítica y la definición teórica de conocer reflexivo, posibles correspondencias entre los elementos y enunciados identificados en estos fragmentos y los referentes teóricos. Luego con la primera correspondencia establecida se decantaron las categorías, subcategorías y algunos descriptores del sistema categorial con el que se desarrolló el análisis. Posteriormente para la reducción y depuración de los datos se eligieron los fragmentos que estaban

relacionados con el mayor número de categorías, subcategorías y descriptores del sistema categorial, lo cual permitió hacer una reducción y depuración de datos e identificar los 25 fragmentos que caracterizan el análisis.

La fase de interpretación de los datos se llevó a cabo a partir de la codificación que ya se había elaborado. Teniendo en cuenta que los procesos de codificación aportan un valioso grado de estandarización y rigor al proceso de investigación; los propósitos de los procedimientos de codificación se enfocan en construir una teoría, brindar herramientas para el análisis de un gran número de datos, proporcionar significados alternativos a los fenómenos y situaciones, promover en el investigador habilidades sistemáticas y creativas e identificar, desarrollar y relacionar conceptos básicos de la teoría (Strauss y Corbin 2002). Esta fase permitió ampliar el panorama y proponer algunos cuestionamientos sobre el significado del conocer reflexivo desarrollado por las estudiantes durante el proceso de investigación formativa. Este fue un proceso analítico por medio del cual se conceptualizaron e integraron los datos para formar una conceptualización del objeto de la investigación, que en este caso corresponde a la categoría conocer reflexivo.

Por último, se llevó a cabo la fase de consolidación de resultados y conclusiones. En esta fase se agruparon los análisis de los fragmentos teniendo en cuenta la fase de los procesos modelación matemática a la cual hacían referencia y se procedió a caracterizar tales elementos a la luz de las categorías. Con el proceso de análisis e interpretación llevado a cabo se develaron las características del conocer reflexivo que aparecían en cada fase de modelación matemática y luego se pusieron en diálogo las distintas características. Por último, se contrastaron los propósitos de la investigación y los resultados alcanzados para formular las conclusiones de este ejercicio de investigación.

Objeto de estudio y categorías de análisis de primer orden

El conocer reflexivo, objeto de estudio de esta investigación, está relacionado con la elaboración de juicios construidos por las estudiantes a partir de: (i) la modelación matemática y las implicaciones de los resultados de la modelación a la luz de las características del contexto; (ii) las posibilidades que ofrece la modelación puntual para la comprensión del fenómeno o situación y las oportunidades de llevar a cabo la modelación extendida con el fin de asumir a partir de ella una posición crítica; (iii) las líneas de acción que se pueden vislumbrar como maneras de contribuir a las

dificultades identificadas relacionadas con el fenómeno. Como macro categoría está relacionada con las categorías de primer orden que se presentan en la siguiente tabla

Conocer matemático	Conocer tecnológico	Dimensión ética y normativa
Procesos de modelación puntual y extendida.	Habilidades, conocimientos y competencias necesarias para usar herramientas tecnológicas que permitan otras formas de representación de la situación estudiada.	Propósitos y fines colectivos que impactan a la comunidad, así como aspectos normativos y legislativos.

El análisis en esta investigación está basado en las categorías y subcategorías establecidas en la relación marco de referencia-datos, dando lugar a la estructura de sistema categorial presentada en la figura 2.

La figura 2 expone, de izquierda a derecha, el objeto de estudio de este trabajo, el cual se constituye en la categoría conocer reflexivo, este conocer reflexivo, a partir de los planteamientos desarrollados en los referentes teóricos de esta investigación, basados fundamentalmente en la propuesta de (Skovsmose, 1999), establece tres subdimensiones de conocer que se relacionan entre sí: el conocer matemático, el conocer tecnológico y una dimensión ética y normativa. A partir de los planteamientos de este mismo autor, han sido generadas dos subcategorías para cada una de las categorías que tienen que ver con la diferenciación que hace entre la modelación extendida y la modelación puntual; el uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y los propósitos y fines colectivos que se construyen en el marco de una práctica profesional. Por último, en los recuadros de la derecha se proponen algunos descriptores que permiten rastrear estas categorías a lo largo de los fragmentos extraídos del corpus documental primario. Cabe resaltar que los datos también influyeron en la definición final de las categorías y subcategorías pues ampliaron mi comprensión de ellos y la posibilidad de descriptores.

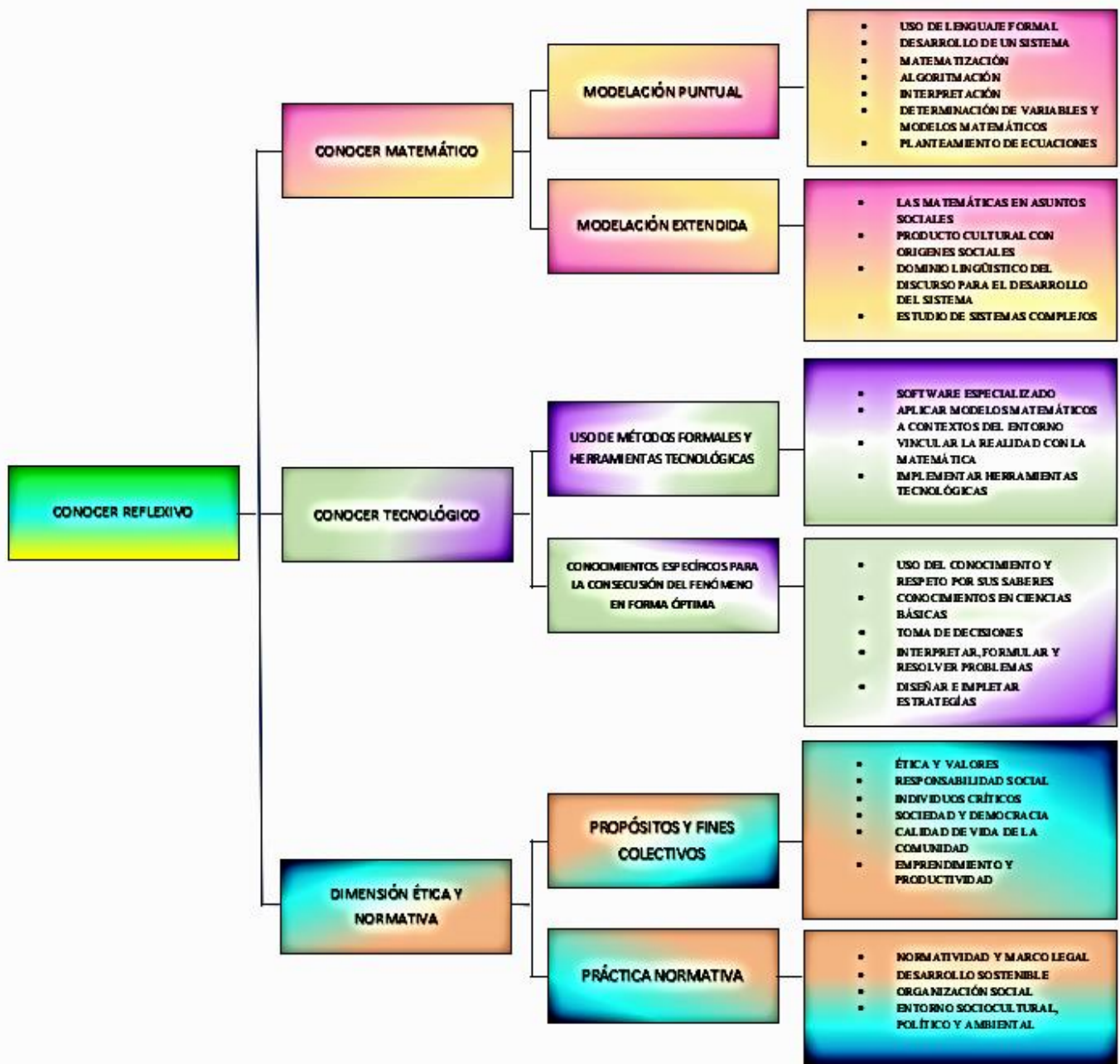


Figura 2. Sistema categorial. Fuente propia

Datos y su relación con el sistema categorial

Los datos presentados corresponden a fragmentos extraídos del documento final del trabajo de grado de Ingeniería Ambiental que se estableció como fuente primaria de información. En la siguiente tabla se presenta la primera relación establecida.

MUESTRA: FRAGMENTOS TEXTUALES DEL TRABAJO DE GRADO	TÉCNICA: ANÁLISIS DEDUCTIVO	SUBCATEGORÍAS
FRAGMENTO		PALABRAS CLAVE
<p>1: <i>El cambio climático es considerado el mayor desafío actual debido que sus efectos son de alcance mundial; las variaciones meteorológicas amenazan la producción de alimentos, el aumento del nivel del mar incrementa el riesgo de catástrofes por inundación y las emisiones de GEI han alcanzado los niveles más altos de la historia; para abordar esta problemática, los países adoptaron el Acuerdo de París para limitar el incremento de la temperatura media mundial a un nivel inferior a los 2 °C a través del objetivo 13 de desarrollo sostenible: adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos (ONU, 2019). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 19)</i></p> <p>F2: <i>Específicamente las plantas actúan como sumideros de carbono (C) gracias a su principal función vital, la fotosíntesis; proceso mediante el cual las formaciones vegetales tienen la capacidad de capturar el dióxido de carbono (CO₂) y extraer el carbono de la atmósfera; a escala mundial, los ecosistemas vegetales terrestres fijan 2.000.000 toneladas/año de C; siendo este un motivo para que los árboles puedan considerarse un mecanismo natural para reducir el CO₂ atmosférico y mitigar su incremento (Espada, 2013). Por este motivo, el presente trabajo se centra en la relación existente entre los L-sistemas (fractales) y las ecuaciones diferenciales para estimar la captura de</i></p>		<p>SUBCATEGORÍA: MODELACIÓN PUNTUAL</p> <ul style="list-style-type: none"> • USO DE LENGUAJE FORMAL • DESARROLLO DE UN SISTEMA • MATEMATIZACIÓN • ALGORITMIZACIÓN • INTERPRETACIÓN • DETERMINACIÓN DE VARIABLES Y MODELOS MATEMÁTICOS • PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES <p>SUBCATEGORÍA: MODELACIÓN EXTENDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> • LAS MATEMÁTICAS EN ASUNTOS SOCIALES • PRODUCTO CULTURAL CON ORIGENES SOCIALES • DOMINIO LINGÜÍSTICO DEL DISCURSO PARA EL DESARROLLO DEL SISTEMA • ESTUDIO DE SISTEMAS COMPLEJOS <p>SUBCATEGORÍA: USO DE MÉTODOS FORMALES Y HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS</p> <ul style="list-style-type: none"> • SOFTWARE ESPECIALIZADO • APLICAR MODELOS MATEMÁTICOS A CONTEXTOS DEL ENTORNO • VINCULAR LA REALIDAD CON LA MATEMÁTICA • IMPLEMENTAR HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS <p>SUBCATEGORÍA: CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS PARA LA CONSECUCIÓN DEL FENÓMENO EN FORMA ÓPTIMA</p> <ul style="list-style-type: none"> • USO DEL CONOCIMIENTO Y RESPETO POR SUS SABERES • CONOCIMIENTOS EN CIENCIAS BÁSICAS • TOMA DE DECISIONES • INTERPRETAR, FORMULAR Y RESOLVER PROBLEMAS

<p><i>CO₂ por parte de la biomasa aérea de la planta de mandarina “Arrayana. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 17)</i></p> <p>F3: <i>El CO₂ atmosférico se reduce y mitiga naturalmente a través de su captura por parte de los organismos autótrofos; entre ellos, las plantas; por tal motivo, surge el interés de estimar la cantidad de CO₂ capturado por una planta de mandarina “Arrayana” desde una perspectiva matemática y geométrica. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 20).</i></p> <p>F4: <i>Una manera natural de mitigar la cantidad de dióxido de carbono es a través de los árboles, ya que estos actúan como un sumidero de carbono al realizar su proceso de fotosíntesis capturando el carbono en forma de CO₂ de la atmósfera (Domínguez, 2016); teniendo en cuenta esto, los bosques son los ecosistemas terrestres que capturan más carbono y por ende, los que más disminuyen el efecto invernadero en la atmósfera debido a que son la cobertura vegetal con mayor cantidad de biomasa acumulada (Borrero, 2012). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)</i></p> <p>F5: <i>Desde años atrás, se ha tenido la estrategia potencial de reverdecer las áreas urbanas y aumentar los beneficios que las vegetaciones brindan como sumideros de carbono y su influencia sobre la calidad del aire; ya que es común que en las ciudades falten áreas verdes que permitan disfrutar de este servicio ecosistémico de captura de CO₂ y de su mecanismo de mitigación y adaptación al calentamiento global (Domínguez, 2016). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)</i></p> <p>F6: <i>La mandarina “Arrayana” fue escogida debido a que tiene una buena adaptación a diferentes condiciones climáticas y esto ha generado una</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • DISEÑAR E IMPLETAR ESTRATEGÍAS <p>SUBCATEGORÍA: PROPÓSITOS Y FINES COLECTIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • ÉTICA Y VALORES • RESPONSABILIDAD SOCIAL • INDIVIDUOS CRÍTICOS • SOCIEDAD Y DEMOCRACIA • CALIDAD DE VIDA DE LA COMUNIDAD • EMPRENDIMIENTO Y PRODUCTIVIDAD <p>SUBCATEGORÍA: PRÁCTICA NORMATIVA</p> <ul style="list-style-type: none"> • NORMATIVIDAD Y MARCO LEGAL • DESARROLLO SOSTENIBLE • ORGANIZACIÓN SOCIAL • ENTORNO SOCIOCULTURAL, POLÍTICO Y AMBIENTAL
--	--

tendencia de cultivo de los cítricos a escala mundial, siendo más productivos en condiciones tropicales cerca al Ecuador; lo cual favorece a Colombia por su ubicación, siendo este un país que aprovecha las condiciones climáticas, especialmente en Cundinamarca, Boyacá y Meta para cultivar la mandarina “Arrayana”, que por ser de origen colombiano y por su adaptación al trópico bajo, en los llanos orientales del país la citricultura depende fundamentalmente de esta especie y gracias a su variedad disponible es de fácil acceso, observación y estudio (Villalba, Herrera, & Orduz, 2013). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)

F7: Estimar la cantidad de dióxido de carbono (CO₂) capturado por parte de la biomasa aérea de una planta de mandarina “Arrayana” a partir de la relación entre L-sistemas y ecuaciones diferenciales. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 22).

F8: *Para modelar el crecimiento y la morfología de varios organismos implementando los fractales, los sistemas de Lindenmayer o también llamados L-sistemas surgieron como el conjunto de símbolos y reglas que conforman un lenguaje que permite modelar el crecimiento de las plantas; el proceso para generar un L-sistema es: (i) observar el desarrollo de los organismos que se quiera modelar, (ii) identificar los tipos de elemento que interactúan, (iii) identificar las normas de desarrollo de cada elemento y (iv) considerar características externas, influencia del entorno, competencia por sobrevivir (Campos Muñoz, 2011). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 30).*

F9: *A partir de la observación estructurada de la distribución de las ramas y hojas de una planta de mandarina “Arrayana” ubicada en el campus Loma*

Linda de la Universidad Santo Tomás de Villavicencio, se determinaron las variables del L-sistema correspondientes a esta especie: cantidad de segmentos en que se divide el tallo (N), razón en que se divide (r) y dimensión fractal (D), descritas a continuación en la Tabla 7. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 48).

Tabla 7. Variables del L-sistema de una planta de mandarina “Arrayana”.

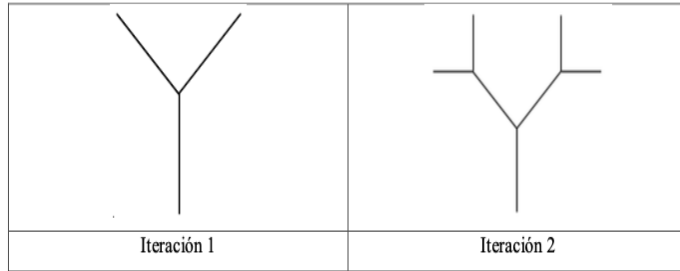
Variables del L-sistema		
N	r	D
2	$\frac{1}{N} = \frac{1}{2} = 0,5$	$D = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)}$ $D = \frac{\ln(2)}{\ln(1/0,5)}$ $D = 1$

Nota: * Valores determinados de las variables del L-sistema, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020

F10: El patrón crecimiento de la planta de mandarina “Arrayana” se estableció considerando la variable cantidad de segmentos en que se divide el tallo de acuerdo a las siguientes instrucciones que caracterizan la construcción de un L-sistema: F significa dibujar una línea hacia adelante de cierta longitud L , el signo – es un giro hacia la izquierda en determinado ángulo, el signo + es un giro hacia la derecha en determinado ángulo y finalmente, [] significa realizar lo interno y devolverse (Rubiano, 2002). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 42)

F11: El patrón de crecimiento se estableció de acuerdo con las instrucciones de los L-sistemas (Rubiano, 2002). Adicional, se consideró que la variable N (cantidad de segmentos en que se divide el tallo) es igual a 2, división correspondiente a la iteración 1 que se puede observar en la parte izquierda de la Tabla 8.

Tabla 8. Iteraciones del patrón de crecimiento de la planta.



Nota: * Iteración 1 y 2 de la planta de mandarina “Arrayana”, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020

Teniendo en cuenta lo anterior, el patrón de crecimiento de la mandarina “Arrayana” es:

$$F = F + [F] - - [F]$$

Significa: trace una línea F de determinada longitud y al final de ella, gire a la derecha $+$ y trace otra línea que quedará inclinada a la derecha, regrese al punto donde la inició $[F]$, gire a la izquierda en la misma magnitud que había girado a la derecha dos veces $- -$ para realizar la última línea inclinada a la izquierda y regrese a donde la inició; así finaliza el modelamiento del patrón de crecimiento de una planta de mandarina “Arrayana” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 49)

F12: *Los modelos de crecimiento son modelos analíticos diseñados con la finalidad de describir el crecimiento de las poblaciones y pronosticar el tamaño de la población en estudio al cabo del tiempo; estos modelos tienen en cuenta una propiedad de las poblaciones denominada tasa de crecimiento exponencial que considera parámetros demográficos básicos (nacimientos, muertes, inmigraciones y emigraciones) (Valverde, Cano, Meave, & Carabias, 2005).*

Uno de los modelos de crecimiento es el modelo matemático de crecimiento exponencial dado por las ecuaciones diferenciales que permite calcular el número de ramas y hojas con respecto a la iteración

$(X(i))$ contemplando los nacimientos y muertes de la población mediante una constante de proporcionalidad (Zill, 2009) (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 31)

F13:

Se establecieron dos condiciones iniciales de acuerdo a la observación del crecimiento del árbol de mandarina:

$$\text{Condición 1: } X(0) = 1$$

$$\text{Condición 2: } X(1) = 2$$

Representan, condición 1: para una iteración 0 se genera una rama principal y la condición 2: para la iteración 1 se generan 2 ramas a partir de la rama principal.

A partir de estas condiciones iniciales es posible determinar la cantidad de ramas y hojas en cualquier iteración hallando las constantes y reemplazando como se demuestra a continuación:

La condición 1 se reemplaza en la Ecuación 3 para encontrar el valor de la constante de integración (c):

$$x(i) = ce^{ki}$$

$$1 = ce^{k(0)}$$

$$1 = c$$

Tras hallar el valor de c , se reemplaza en la Ecuación 3 la condición 2 para encontrar el valor de la constante de proporcionalidad (k):

$$x(i) = ce^{ki}$$

$$2 = 1e^{k(1)}$$

$$\ln(2) = k$$

$$k = 0,6931471806$$

Con el valor de las constantes se formula el modelo de crecimiento exponencial que permite calcular el número de ramas y hojas de la planta por iteración: $x(i) = e^{0,6931471806(i)}$

F14: *La Gráfica 1 representa los datos registrados en la Tabla 9 y permite observar que el crecimiento en la cantidad de ramas y hojas es de tipo exponencial, este comportamiento es más notorio en la fase temprana de la planta; por este motivo, este tipo de modelo resulta particularmente apropiado para las plantas del presente estudio, las cuales no superan los 15 meses de edad. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 52)*

F15: *La Tabla 10 representa el total de iteraciones realizadas por las quince plantas de mandarina "Arrayana" sembradas (51 iteraciones), así como el*

promedio de iteraciones realizadas tanto por bloque como en general. El bloque que en promedio realizó mayor cantidad de iteraciones es el bloque B, seguido del bloque A y finalmente el bloque C, con valores de 6,6, 2 y 1,6 iteraciones, respectivamente; para un promedio general de 3,4 iteraciones. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp. 53-54)

F16: *Con la bloquización por edades hecha en el estudio, se puede observar en los promedios por bloques de la Tabla 10 que a pesar de que las plantas se encuentran en la misma fase joven, existen diferencias en el crecimiento. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 53)*

F17: *Para asignar el tiempo de crecimiento a cada iteración de la planta se realizó trabajo de campo por medio de un diseño experimental, en el que se tuvo en cuenta una bloquización y un factor de tratamiento considerando como unidad de observación 15 plantas de mandarina “Arrayana” sembradas de forma lineal, conservando una distancia de 5 m entre cada una, en el campus Loma Linda de la Universidad Santo Tomás, para garantizar las mismas condiciones de crecimiento; a las cuales se les realizaron registros periódicos del tiempo que tardan las plantas en desarrollar una iteración. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 42-43).*

F18: *Para medir los nitratos del suelo fue necesario realizar inicialmente una evaluación de la absorbancia a diferentes longitudes de onda en el equipo Spectroquant Prove 600, para posteriormente escoger la longitud de onda con la que se realizará la curva de calibración y se calcularan los nitratos de cada punto. La evaluación se realizó teniendo en cuenta la guía de “Determinación de nitratos en aguas por espectrofotometría UV” del Instituto Hidrología,*

Meteorología y Estudios Ambientales. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 45)

F19: *Con ayuda del equipo medidor de pH y humedad del suelo se midieron in situ dichos parámetros; el equipo está compuesto de dos sondas como se observa en la Figura 3, estas se introdujeron en el suelo de alrededor de las plantas sembradas hasta el nivel de sus raíces y este automáticamente indicaba el valor de pH o humedad de acuerdo a la ubicación del botón en el parámetro que se deseaba conocer. El equipo tiene incluido en el visor de lectura valores de pH y humedad desde 4 a 8 y de 1 a 10, respectivamente; en el caso del pH, 4, 5 y 6 significan acidez, 7 neutralidad y 8 alcalinidad y para la humedad, hay rangos establecidos de 0 a 100% para categorizar el suelo en seco (10-30) %, húmedo (40-70) % y muy húmedo (80-100) %. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 44)*

F20: *El CO₂ capturado por la planta de mandarina "Arrayana" se estimó a partir de la extrapolación del valor teórico de captura de CO₂ de una planta de mandarina de 15 años; dicho valor corresponde a la sumatoria de captura de CO₂ de ramas (1042,8gr), hojas y tallos (3330,8gr) y tronco (432gr) para un total de captura de CO₂ de 4.805,6gr por árbol anual (Mota, Alcaraz, Iglesias, Martínez, & Carvajal, 2011).*

Teniendo en cuenta que este valor corresponde al último año de edad de la planta; es decir, la captura de CO₂ entre sus 14 y 15 años, equivalente a 365 días, y bajo el supuesto de que una iteración se realiza cada 26,8 días; se calculó la cantidad de iteraciones generadas por la planta tanto a los 14 años (190) como a los 15 años (204) y la diferencia entre estos valores es la cantidad de iteraciones que la planta realizó

durante ese año (13 iteraciones). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 69-70)

F21: *Obtenidos los datos de las distintas variables de la planta (captura de CO₂, cantidad de ramas y hojas, iteraciones totales, crecimiento de altura total, concentración de nitratos, humedad y pH) a través de las fases anteriores, se utilizó el software SPSS Statistics 25 para analizarlos estadísticamente mediante una matriz de correlación; lo cual permitió determinar la relación entre las variables para posteriormente establecer que variables incluir en un modelo de regresión lineal en el que la variable dependiente fue la captura de CO₂ por parte de la planta de mandarina "Arrayana". (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 47)*

F22: *La matriz de correlación (Tabla 19) de los datos registrados al final del estudio (Tabla 18), permitió concluir que las variables determinadas en la caracterización del suelo (pH, humedad y concentración de nitratos), no son significativas en la estimación de la captura de CO₂ porque presentaron una correlación muy baja con esta variable; por tal motivo se descartaron del modelo de regresión lineal. Las variables incluidas inicialmente en la regresión lineal fueron tratamiento, altura total e iteraciones totales, con correlaciones baja, moderada y muy alta, respectivamente, con la captura de CO₂ (Y); sin embargo, tras evaluar el valor de Sig. del modelo de regresión lineal obtenido en el software SPSS Statistics 25 (Tabla 23); solo la variable iteraciones (X₁) es considerada relevante para el modelo, de modo que el modelo de regresión lineal ajustado es $Y = 956,630 + 8949,214X_1 + \varepsilon$ (Ecuación 9). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 79-80)*

F23: *El estudio de la captura de dióxido de carbono (CO₂) de la planta de mandarina “Arrayana” desde una perspectiva matemática y geométrica amplía el conocimiento de los servicios ecosistémicos brindados por los árboles; específicamente de su capacidad de actuar como sumidero de carbono y de ser un mecanismo de adaptación al calentamiento global, problemática de interés mundial ocasionada por el incremento de GEI en la atmósfera; entre ellos, el CO₂. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 78)*

F24: *Para estimar la cantidad de dióxido de carbono capturado por parte de una planta de mandarina “Arrayana”; el trabajo de campo fue esencial debido a que permitió encontrar la relación existente entre cada proceso iterativo y el tiempo de repetición del patrón de crecimiento y de este modo, relacionar los L-sistemas (fractales) con el modelo de crecimiento exponencial*

F25:

Tabla 2. *Normatividad legal.*

Norma	Descripción
Constitución política de Colombia 1991 “artículo 79”	Derecho a gozar de un medio ambiente sano.
Decreto 298 de 2016	Por el cual se establece la organización y funcionamiento del Sistema Nacional de Cambio Climático y se dictan otras disposiciones.
Resolución 0650 de 2010	Por la cual se adopta el Protocolo para el Monitoreo y Seguimiento de la Calidad del Aire.
Resolución 2154 de 2010	Por la cual se ajusta el Protocolo para el Monitoreo y Seguimiento de la Calidad del Aire adoptado a través de la Resolución 650 de 2010 y se adoptan otras disposiciones.
Resolución 2254 de 2017	Por la cual se adopta la norma de calidad de aire ambiente y se dictan otras disposiciones.

Nota: * Descripción de la normatividad que aplica para el proyecto, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2019.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 40)

PROCESO DE ANALISIS

En este capítulo se lleva a cabo el proceso de análisis de los fragmentos elegidos como datos para dar cuenta del conocer reflexivo desarrollado por las estudiantes. La elección de los fragmentos permite analizar el proceso de modelación matemática experimentado por las estudiantes y el surgimiento de conocer reflexivo en cada fase del proceso. Para este proceso de análisis se usaron las categorías y subcategorías propuestas en el capítulo anterior de estrategia metodológica.

Fragmento 1: f1

El cambio climático es considerado el mayor desafío actual debido que sus efectos son de alcance mundial; las variaciones meteorológicas amenazan la producción de alimentos, el aumento del nivel del mar incrementa el riesgo de catástrofes por inundación y las emisiones de GEI han alcanzado los niveles más altos de la historia; para abordar esta problemática, los países adoptaron el Acuerdo de París para limitar el incremento de la temperatura media mundial a un nivel inferior a los 2 °C a través del objetivo 13 de desarrollo sostenible: adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos (ONU, 2019) (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 19).

En este apartado se reconocen elementos vinculados a la categoría dimensión ética y normativa y a la categoría conocer tecnológico. Estas categorías relacionan las subcategorías propósitos y fines colectivos y práctica normativa y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, respectivamente.

Por un lado, las estudiantes enfocan la mirada en una problemática social que en los últimos años se ha convertido en un asunto de talla mundial, que ha llamado la atención de los diferentes actores de la sociedad por las implicaciones que este trae, lo que permite señalar que existen elementos que se relacionan con las subcategorías propósitos y fines colectivos (categoría dimensión ética y normativa) cuando las estudiantes manifiestan que “*El cambio climático es considerado el mayor desafío actual debido que sus efectos son de alcance mundial; las variaciones meteorológicas amenazan la producción de alimentos, el aumento del nivel del mar incrementa el riesgo de catástrofes por inundación y las emisiones de GEI han alcanzado los niveles más altos de la historia*” De acuerdo a lo anterior expuesto, se evidencia una reflexión caracterizada por el sentido de la responsabilidad social debido a la preocupación que

muestran las estudiantes por una problemática de corte mundial relacionada con el cambio climático, ya que como lo afirma (Skovsmose 1999), “el conocimiento reflexivo se relaciona con la competencia necesaria para reaccionar como ciudadanos críticos en la sociedad de hoy en día” (p. 111). Por otro lado, las estudiantes refieren un convenio, que han adoptado diferentes comunidades, para afrontar la problemática del calentamiento global y las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI), lo que muestra aspectos legislativos y de normatividad. Esto se evidencia cuando declaran que *“para abordar esta problemática, los países adoptaron el Acuerdo de París para limitar el incremento de la temperatura media mundial a un nivel inferior a los 2 °C a través del objetivo 13 de desarrollo sostenible: adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos (ONU, 2019)”* lo que refleja una reflexión que se caracteriza por aspectos legislativos que han sido desarrollados por la comunidad internacional para mitigar el cambio climático, además las estudiantes reconocen que su práctica como ingenieras es una práctica normada en el marco de una comunidad –Acuerdo de París– que se compromete con el cambio climático, lo que permite evidenciar, según los planteamientos de (Skovsmose 1999), que el conocer reflexivo también se refiere a normas y valores (p. 110) (esto se relaciona con la categoría dimensión ética y normativa y las subcategorías propósitos, fines colectivos y práctica normativa). Las estudiantes también reconocen las diferentes acciones llevadas a cabo por la Organización de las Naciones Unidas, especialmente prácticas normativas relacionadas con el incremento de CO₂ atmosférico; lo anterior se refuerza cuando las estudiantes en el texto aseveran que “el CO₂ es el gas de efecto invernadero más abundante debido a que representa alrededor de 2/3 de todos los tipos de GEI (ONU, 2019)”. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 19)

Fragmento 2: f2

Específicamente las plantas actúan como sumideros de carbono (C) gracias a su principal función vital, la fotosíntesis; proceso mediante el cual las formaciones vegetales tienen la capacidad de capturar el dióxido de carbono (CO₂) y extraer el carbono de la atmósfera; a escala mundial, los ecosistemas vegetales terrestres fijan 2.000.000 toneladas/año de C; siendo este un motivo para que los árboles puedan considerarse un mecanismo natural para reducir el CO₂ atmosférico y mitigar su incremento (Espada, 2013). Por este motivo, el presente trabajo se centra en la relación existente entre los L-sistemas (fractales) y las ecuaciones diferenciales para estimar la captura de CO₂ por

parte de la biomasa aérea de la planta de mandarina "Arrayana. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 17)

En este fragmento se identifican elementos concernientes con la categoría dimensión ética y normativa y la subcategoría propósitos y fines colectivos y la categoría conocer tecnológico con la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

En el texto las estudiantes expresan las acciones y formas de reducir las emisiones de CO₂ con el ánimo de mejorar la calidad de vida de la comunidad; esto se puede evidenciar en la afirmación "a escala mundial, los ecosistemas vegetales terrestres fijan 2.000.000 toneladas/año de C; siendo este un motivo para que los árboles puedan considerarse un mecanismo natural para reducir el CO₂ atmosférico y mitigar su incremento". Lo anterior se relaciona con la categoría dimensión ética y normativa con la subcategoría propósitos y fines colectivos y se ratifican en otros fragmentos del trabajo de grado en los que las estudiantes resaltan que "Una de las principales preocupaciones actuales de las entidades gubernamentales es el cambio acelerado de la temperatura global" (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 17) y también manifiestan que "el incremento anual absoluto de CO₂ fue de 2,21ppm/año y que este incremento ha sido 100 veces mayor que la última edad de hielo" (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 17), es decir, en estos fragmentos se evidencia una preocupación hacia una problemática social que afecta, no solamente a la humanidad sino a todos los ecosistemas en general, es una problemática que no discrimina. Las características principales de las reflexiones, realizadas por las estudiantes, que se presentadas en el fragmento anterior se relacionan con el conocimiento sobre las plantas como sumidero de carbono (conocer tecnológico) y la intención de aportar mecanismos para mitigar el incremento de CO₂ atmosférico (dimensión ética). Mediante esta relación las estudiantes reflexionaron sobre los árboles como mecanismo natural y eficiente para afrontar la problemática del incremento de CO₂. Esto se reafirma cuando (Skovsmose 1999) plantea que "el conocer reflexivo tiene que ver con la evaluación y discusión general de lo que se puede identificar como un fin tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de lograr tal fin con las herramientas seleccionadas (p. XVI)

Reconociendo esta problemática y estos fines y propósitos colectivos las estudiantes desarrollan su indagación en relación con los niveles de CO₂ en la atmosfera, esto se evidencia en la afirmación "Por este motivo, el presente trabajo se

centra en la relación existente entre los L-sistemas (fractales) y las ecuaciones diferenciales para estimar la captura de CO₂ por parte de la biomasa aérea de la planta de mandarina Arrayana” (lo anterior se relaciona con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima). Este acto refleja responsabilidad social en las estudiantes y por ende una reflexión en torno a los propósitos y fines colectivos en una comunidad, ya que esta indagación les permitió, a partir del desarrollo del trabajo, “comprender la forma en que los organismos autótrofos contribuyen en la disminución de la presencia de CO₂ en la atmósfera” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 17), es así como se evidencia desarrollo de conocimiento reflexivo por parte de las estudiantes ya que, en palabras de (Skovsmose 1999), el conocer reflexivo hace referencia a la capacidad necesaria para tomar una posición justificada en una discusión sobre asuntos tecnológicos (p. XV). De acuerdo a este planteamiento, en este fragmento se percibe que las estudiantes optan por centrar la investigación y tomar una posición justificada soportada en la relación existente entre los L-sistemas (fractales) y las ecuaciones diferenciales para estimar la captura de CO₂ por parte de la biomasa aérea de la planta de mandarina “Arrayana

Fragmento 3: f3

El CO₂ atmosférico se reduce y mitiga naturalmente a través de su captura por parte de los organismos autótrofos; entre ellos, las plantas; por tal motivo, surge el interés de estimar la cantidad de CO₂ capturado por una planta de mandarina “Arrayana” desde una perspectiva matemática y geométrica.
(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 20).

En este fragmento se identifican elementos relacionados con la categoría conocer matemático y conocer tecnológico y las subcategorías modelación puntual y conocimientos específicos para la consecución del fenómeno en forma óptima.

En concordancia con el propósito establecido por las estudiantes para su trabajo de grado declarado en el fragmento 1, en este fragmento las estudiantes exponen un conocimiento tecnológico específico que permitió enfrentar la problemática, esto se evidencia en la afirmación “El CO₂ atmosférico se reduce y mitiga naturalmente a través de su captura por parte de los organismos autótrofos; entre ellos, las plantas” (Esto se relaciona con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la consecución del fenómeno en forma óptima) específicamente la mandarina arrayana ya que en el campus universitario

contaban con un acceso directo a las plantas para la recolección de información, considerando además que es un árbol muy cultivado en la región por su buena adaptación a diferentes condiciones ambientales y climáticas, que cuenta con variedad de especies y cumple unas funciones ecosistémicas en cuanto a la absorción de CO₂ atmosférico, esto se ratifica cuando en el informe escrito las estudiantes articulan que *“el árbol de mandarina “Arrayana” fue escogido como objeto de estudio, ya que es importante reconocer sus funciones ecosistémicas debido a que un árbol de esta especie (raíz, ramas, hojas, tallos, frutos y tronco) absorbe 31.101 g CO₂ y asimila 8.482 g C anualmente”*. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23).

Además, en este fragmento se evidencia que las estudiantes reconocen la utilidad de la matemática en asuntos relacionados principalmente con acciones propias del quehacer profesional del ingeniero ambiental, al expresar que “por tal motivo, surge el interés de estimar la cantidad de CO₂ capturado por una planta de mandarina “Arrayana” desde una perspectiva matemática y geométrica”. Esto se relaciona con la categoría conocer matemático y conocer tecnológico y las subcategorías modelación puntual y conocimientos específicos para la consecución del fenómeno en forma óptima. Posteriormente este interés se especifica en un proceso de modelación puntual donde abordaron el fenómeno del incremento del CO₂ en la atmósfera. Con el ánimo de aportar al conocimiento de la estimación de la captura de CO₂, las estudiantes desarrollan una propuesta metodológica alternativa y novedosa en la que relacionan los L-sistemas con las ecuaciones diferenciales, esto se evidencia en la siguiente declaración *“El presente trabajo relaciona los L-sistemas como modelo de simulación y las ecuaciones diferenciales como herramienta para establecer modelos analíticos de crecimiento exponencial, con la finalidad de desarrollar una metodología que a través de la descripción del crecimiento de las plantas permita estimar su captura de CO₂.”* (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 20). Cabe señalar que las estudiantes manifiestan que son escasas las evidencias que muestren que a partir de la relación entre L-sistemas y modelos matemáticos de crecimiento exponencial, se pueda estimar la cantidad de CO₂ capturado por una planta, motivo por el cual surgió el interés de llevar a cabo dicho trabajo tomando como bandera la modelación matemática, señalando que, *“esta investigación resulta innovadora dado que pretende dar a conocer cómo con el estudio de los fenómenos naturales desde una perspectiva matemática y geométrica, se puede estimar la cantidad de CO₂ capturado por la biomasa aérea de una planta vascular de mandarina “Arrayana” para cualquier etapa*

de su vida; a través de la relación entre los L-sistemas (fractales) y los modelos matemáticos” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)

La característica de la reflexión presentada en este fragmento está relacionada con el conocimiento matemático de las estudiantes, al igual que con el conocimiento propio de su profesión, ya que mediante esta relación determinaron que por medio de la implementación de la matemática podrían abordar el problema de la estimación del CO₂ procesado por una planta de mandarina arrayana. Esto en términos de (Skovsmose 1999) se traduce en conocer reflexivo ya que parte de la reflexión elaborada por las estudiantes, trata las herramientas matemáticas empleadas para lograr la estimación del CO₂ procesado por la planta, esto es, *“Con referencia a lo que puede significar el conocer reflexivo en el salón de clase, hemos encontrado que partes de tales reflexiones tratan las herramientas matemáticas empleadas para lograr dichos objetivos, otras partes abordan las relaciones entre las herramientas y los objetivos tecnológicos, otras tienen que ver con las consecuencias de perseguir esos fines con las herramientas seleccionadas y finalmente tiene que ponerse en el foco las reflexiones mismas”* (Skovsmose 1999, p. 136)

Fragmento 4: f4

Una manera natural de mitigar la cantidad de dióxido de carbono es a través de los árboles, ya que estos actúan como un sumidero de carbono al realizar su proceso de fotosíntesis capturando el carbono en forma de CO₂ de la atmósfera (Domínguez, 2016); teniendo en cuenta esto, los bosques son los ecosistemas terrestres que capturan más carbono y por ende, los que más disminuyen el efecto invernadero en la atmósfera debido a que son la cobertura vegetal con mayor cantidad de biomasa acumulada (Borrero, 2012). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)

En este fragmento se evidencia elementos concernientes con las categorías conocer tecnológico y dimensión ética y normativa y las subcategorías conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima y propósitos y fines colectivos.

En el segmento relacionado anteriormente, las estudiantes buscan elementos que permitan el alcance del propósito planteado en F1, quienes identifican y relacionan los árboles como un componente que mitiga las emisiones de CO₂ de forma natural, dejando así en evidencia el uso de conocimientos específicos de su profesión al

establecer los árboles como elementos que contribuyen a la consecución del propósito establecido en F1 (esto se relaciona con la categoría dimensión ética y normativa y la subcategoría propósitos y fines colectivos), al igual que se identifican intenciones de aportar a un problema de índole social, al afirmar que *“Una manera natural de mitigar la cantidad de dióxido de carbono es a través de los árboles, ya que estos actúan como un sumidero de carbono al realizar su proceso de fotosíntesis capturando el carbono en forma de CO₂ de la atmósfera (Domínguez, 2016)”*; así mismo se evidencia nuevamente conocimientos específicos de su profesión al justificar el potencial que tienen los árboles en cuanto al procesamiento de CO₂ cuando enuncian que *“los bosques son los ecosistemas terrestres que capturan más carbono, por ende, los que más disminuyen el efecto invernadero en la atmósfera debido a que son la cobertura vegetal con mayor cantidad de biomasa acumulada (Borrero, 2012)”*; y todo lo anterior con el ánimo de mejorar la calidad de vida de la comunidad (esto se relaciona con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma optima)

En el fragmento relacionado se identifica una reflexión que se caracteriza por la relación entre el conocimiento propio de la ingeniería ambiental y la responsabilidad social que muestran las estudiantes al enfocarse en la mitigación de la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera. Proponiendo como herramienta principal los bosques (que en este caso es un ecosistema) para la solución del problema, debido a que el saber profesional les permite reconocer que son los ecosistemas terrestres que capturan más carbono. Esto es una evidencia de conocer reflexivo, ya que la reflexión realizada contempla la relación entre la herramienta seleccionada –los bosques– y el objetivo tecnológico –mitigar la cantidad de dióxido de carbono– como lo plantea (Skovsmose 1999, p.136) *“Con referencia a lo que puede significar el conocer reflexivo en el salón de clase, hemos encontrado que partes de tales reflexiones tratan las herramientas matemáticas empleadas para lograr dichos objetivos, otras partes abordan las relaciones entre las herramientas y los objetivos tecnológicos, otras tienen que ver con las consecuencias de perseguir esos fines con las herramientas seleccionadas y finalmente tiene que ponerse en el foco las reflexiones mismas”*

Fragmento 5: f5

Desde años atrás, se ha tenido la estrategia potencial de reverdecer las áreas urbanas y aumentar los beneficios que las vegetaciones brindan como

sumideros de carbono y su influencia sobre la calidad del aire; ya que es común que en las ciudades falten áreas verdes que permitan disfrutar de este servicio ecosistémico de captura de CO₂ y de su mecanismo de mitigación y adaptación al calentamiento global (Domínguez, 2016). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)

En este fragmento se pueden identificar elementos relacionados con la categoría dimensión ética y normativa y la categoría conocer tecnológico, las cuales se corresponden con la subcategoría propósitos y fines colectivos, y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, respectivamente.

En este segmento las estudiantes resaltan y destacan intenciones favorables para el mejoramiento de la calidad del aire en las comunidades, lo cual indica que existen elementos relacionados con la categoría dimensión ética y normativa y la subcategoría propósitos y fines colectivos. Al exponer que “Desde años atrás, se ha tenido la estrategia potencial de reverdecer las áreas urbanas y aumentar los beneficios que las vegetaciones brindan como sumideros de carbono y su influencia sobre la calidad del aire”, se evidencia una reflexión caracterizada por la responsabilidad tanto social como profesional de la ingeniería ambiental y como ciudadano crítico de la comunidad en el marco de una problemática global, ya que como plantea Skovsmose (1999) “el conocer reflexivo se relaciona con la competencia general necesaria para reaccionar como ciudadanos críticos en la sociedad de hoy en día” (p. 111). De igual forma las estudiantes dejan en evidencia la ausencia de políticas públicas y ambientales relacionadas con la calidad del aire en entornos poblados, es decir, acentúan las pocas iniciativas colectivas para afrontar una problemática que afecta la salud pública, esto se considera cuando en el texto afirman que “ya que es común que en las ciudades falten áreas verdes que permitan disfrutar de este servicio ecosistémico de captura de CO₂ y de su mecanismo de mitigación y adaptación al calentamiento global” (Domínguez, 2016) (lo anterior se relaciona con la categoría dimensión ética y normativa y con la subcategoría propósitos y fines colectivos).

Cabe resaltar que las estudiantes reconocen que últimamente la comunidad internacional ha estado cuestionando sobre el calentamiento global, el efecto invernadero, sus causas y consecuencias, pues en las últimas décadas, este asunto ha sido irrelevante a las comunidades y por ende los aspectos legislativos y

normativos que regulan las emisiones de CO₂ atmosférico no han sido suficiente. Aquí se evidencia una reflexión que se caracteriza por la responsabilidad social de las estudiantes como futuras ingenieras ambientales al reconocer falta de acciones legislativas en las ciudades para lograr mitigar el cambio climático y de esta manera lograr una mejor calidad de vida en los habitantes de cierta comunidad.

Fragmento 6: f6

La mandarina “Arrayana” fue escogida debido a que tiene una buena adaptación a diferentes condiciones climáticas y esto ha generado una tendencia de cultivo de los cítricos a escala mundial, siendo más productivos en condiciones tropicales cerca al Ecuador; lo cual favorece a Colombia por su ubicación, siendo este un país que aprovecha las condiciones climáticas, especialmente en Cundinamarca, Boyacá y Meta para cultivar la mandarina “Arrayana”, que por ser de origen colombiano y por su adaptación al trópico bajo, en los llanos orientales del país la citricultura depende fundamentalmente de esta especie y gracias a su variedad disponible es de fácil acceso, observación y estudio (Villalba, Herrera, & Orduz, 2013). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 23)

En este texto se pueden identificar elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico y la categoría dimensión ética y normativa, las cuales se corresponden con la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima y la subcategoría propósitos y fines colectivos respectivamente.

Para abordar la problemática de la captura de CO₂, las estudiantes exponen conocimiento tecnológico específico de su profesión que les permitió decidir la especie de planta que se analizaría, esta decisión la tomaron de acuerdo a las características de la planta, de esto podemos dar cuenta cuando expresan que “ La mandarina “Arrayana” fue escogida debido a que tiene una buena adaptación a diferentes condiciones climáticas y esto ha generado una tendencia de cultivo de los cítricos a escala mundial, siendo más productivos en condiciones tropicales cerca al Ecuador” (aquí se evidencian elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima), así mismo, las estudiantes reconocen la utilidad de dicha planta para la comunidad, lo que permite reconocer elementos de la categoría dimensión ética y la subcategoría propósitos y fines colectivos, esto se evidencia cuando expresan que “lo

cual favorece a Colombia por su ubicación, siendo este un país que aprovecha las condiciones climáticas, especialmente en Cundinamarca, Boyacá y Meta para cultivar la mandarina “Arrayana”, que por ser de origen colombiano y por su adaptación al trópico bajo, en los llanos orientales del país la citricultura depende fundamentalmente de esta especie y gracias a su variedad disponible es de fácil acceso, observación y estudio”. La característica principal de la reflexión elaborada por las estudiantes en este fragmento está relacionada por el conocimiento propio de la ingeniería ambiental, al igual que por el conocimiento del entorno que las rodea y sus beneficios, es decir que las estudiantes encuentran en esta planta un atractivo, no solamente para su estudio en torno al procesamiento de CO₂, sino que también para su cultivo en las diferentes regiones del país, al igual que para tenerla en cuenta con propósitos investigativos de interés de comunidades científicas, empresariales, gubernamentales, entre otros.

Fragmento 7: f7

Estimar la cantidad de dióxido de carbono (CO₂) capturado por parte de la biomasa aérea de una planta de mandarina “Arrayana” a partir de la relación entre L-sistemas y ecuaciones diferenciales. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 22).

En el análisis de este fragmento, el cual corresponde al objetivo general relacionado en la investigación que desarrollaron y reportaron las estudiantes ante la facultad de ingeniería ambiental de la universidad Santo Tomás, se resaltan elementos relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se identifican elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima

Lo anteriormente afirmado se justifica, por una lado, porque mediante conceptos y procesos matemáticos las estudiantes establecieron relaciones en la planta de mandarina que ayudaron a encontrar características de esta, lo cual justifica la implementación de elementos con la categoría conocer matemático y la subcategoría modelación puntual, como se muestra en la afirmación “a partir de la relación entre L-sistemas y ecuaciones diferenciales” y, por otro lado, de la relación establecida entre los conceptos de L-sistemas y ecuaciones diferenciales, la pretensión de las estudiantes es obtener respuesta a un fenómeno natural de su realidad, lo que implica el uso de la subcategoría modelación extendida, esto se

reafirma con la afirmación “Estimar la cantidad de dióxido de carbono (CO₂) capturado por parte de la biomasa aérea de una planta de mandarina Arrayana”. Ahora analizando la intencionalidad y el alcance de la investigación realizada por los estudiantes, se deduce que la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima es fundamental para lograr la meta, ya que se pretende dar respuesta a un cuestionamiento propio de la ingeniería donde el uso de conocimientos específicos es relevante. De acuerdo con Skovsmose (1999), identificamos en estos fragmentos una reflexión que se caracteriza por el conocimiento matemático, debido a que se emplean conceptos propios de la matemática –ecuaciones diferenciales y fractales– como conocimiento específico de las estudiantes en torno al crecimiento de las plantas. lo cual se traduce en conocimiento reflexivo. Recordemos que para Skovsmose “... *lo que puede significar el conocer reflexivo en el salón de clase, ... partes de tales reflexiones tratan las herramientas matemáticas empleadas para lograr dichos objetivos, otras partes abordan las relaciones entre las herramientas y los objetivos tecnológicos, otras tienen que ver con las consecuencias de perseguir esos fines con las herramientas seleccionadas...*” (p.136),

Fragmento 8: f8

Para modelar el crecimiento y la morfología de varios organismos implementando los fractales, los sistemas de Lindenmayer o también llamados L- sistemas surgieron como el conjunto de símbolos y reglas que conforman un lenguaje que permite modelar el crecimiento de las plantas; el proceso para generar un L-sistema es: (i) observar el desarrollo de los organismos que se quiera modelar, (ii) identificar los tipos de elemento que interactúan, (iii) identificar las normas de desarrollo de cada elemento y (iv) considerar características externas, influencia del entorno, competencia por sobrevivir (Campos Muñoz, 2011). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 30).

En este párrafo se identifican elementos relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida. De igual forma se detectan componentes concernientes con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima

Para lograr el objetivo de investigación propuesto que se relacionó en **F7**, las estudiantes acudieron al uso de símbolos y reglas que permiten realizar una

descripción detallada del crecimiento de la planta, esto claramente se relaciona con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y extendida ya que se implementan conceptos propios de la matemática, mediante la ejecución de procesos bien definidos y algoritmos, para desentrañar características de fenómenos naturales, de situaciones de la realidad, que son de gran importancia para la comunidad en general, esto se ratifica cuando las estudiantes expresan que *“Para modelar el crecimiento y la morfología de varios organismos implementando los fractales, los sistemas de Lindenmayer o también llamados L- sistemas surgieron como el conjunto de símbolos y reglas que conforman un lenguaje que permite modelar el crecimiento de las plantas”*

En el siguiente enunciado se registra el uso de un lenguaje formal que permite desarrollar un sistema que vincula la matemática con la realidad mediante el uso de métodos formales, es decir que la categoría conocer tecnológico es fundamental ya que para seguir el proceso de generar el L-sistema que describe el crecimiento de la planta, es necesario el uso de conocimientos específicos de la ingeniería. Esto se evidencia cuando las estudiantes señalan que *“el proceso para generar un L-sistema es: (i) observar el desarrollo de los organismos que se quiera modelar, (ii) identificar los tipos de elemento que interactúan, (iii) identificar las normas de desarrollo de cada elemento y (iv) considerar características externas, influencia del entorno, competencia por sobrevivir (Campos Muñoz, 2011)”*. El análisis descrito arriba se refuerza cuando las estudiantes argumentan que *“Los L-sistemas se caracterizan por ser una técnica basada en la reescritura o la recursividad de los procesos; dado que modela objetos de naturaleza compleja mediante reglas de reescritura o de producción, reemplazando repetidamente “partes” de un objeto inicial simple, llamado axioma; como resultado de la cadena de caracteres que se generan, se obtiene una representación gráfica (Bedoya González, 2016).”* (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 30). Lo que refleja una reflexión que se caracteriza por el conocimiento tanto matemático, ya que se emplea un conjunto de símbolos y reglas que describen el crecimiento de las plantas –L-sistemas– como por el conocimiento específico de las estudiantes en torno al crecimiento de las plantas para generar el L-sistema que describe el crecimiento de la planta de mandarina arrayana, esto se traduce en conocimiento reflexivo.

Fragmento 9: f9

A partir de la observación estructurada de la distribución de las ramas y hojas de una planta de mandarina “Arrayana” ubicada en el campus Loma Linda de la Universidad Santo Tomás de Villavicencio, se determinaron las variables del

L-sistema correspondientes a esta especie: cantidad de segmentos en que se divide el tallo (N), razón en que se divide (r) y dimensión fractal (D), descritas a continuación en la Tabla 7. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 48).

Tabla 7. Variables del L-sistema de una planta de mandarina "Arrayana".

Variables del L-sistema		
N	r	D
2	$\frac{1}{N} = \frac{1}{2} = 0,5$	$D = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)}$ $D = \frac{\ln(2)}{\ln(1/0,5)}$ $D = 1$

*Nota: * Valores determinados de las variables del L-sistema, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020*

En este aparte se evidencian elementos relacionados con las categorías conocer matemático con las subcategorías modelación puntual y modelación extendida y la categoría conocer tecnológico con las subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

La observación estructurada como fuente para la obtención de datos en un proceso investigativo es una herramienta primordial que fue utilizada para establecer las variables que determinan el crecimiento de la planta, esto indica que las estudiantes mediante trabajo de campo, haciendo y registrando mediciones, identificando patrones y regularidades y analizando las características principales de la planta, lograron establecer particularidades de esta, donde definieron las siguientes variables: cantidad de segmentos en que se divide el tallo ($N = 2$), lo que indica que las estudiantes observaron que la cantidad de ramas en las que se divide el tallo de la planta es igual a dos; para determinar la razón en que se divide (r) y dimensión fractal (D), emplearon fórmulas y modelos establecidos por (Rubiano 2002) para estos fines

Es así como se evidencia que la modelación puntual, la cual conlleva al empleo de fórmulas para determinar una cantidad, la modelación extendida comprendida como la interpretación de los cálculos realizados en el contexto del crecimiento de la planta, el uso de métodos formales y herramientas tecnológicas tales como la observación, recolección, registro y análisis de datos, juegan un papel preponderante en este proceso de investigación formativa. De lo anterior se identifica una reflexión que tiene características relacionadas el conocimiento matemático de las estudiantes y los conocimientos particulares de la ingeniería, ya que se utilizaron conceptos y modelos propios de las matemáticas previamente establecidos como lo es el de la dimensión fractal y la razón en la que se divide el tallo de la planta en estudio, al igual

que se emplearon conocimientos de la ingeniería ambiental al relacionar al relacionar las variables del L-sistema con las particularidades de la planta de mandarina arrayana y en términos de (Skovsmose 1999), lo anterior es un reflejo de conocer reflexivo.

Fragmento 10: f10

El patrón crecimiento de la planta de mandarina “Arrayana” se estableció considerando la variable cantidad de segmentos en que se divide el tallo de acuerdo a las siguientes instrucciones que caracterizan la construcción de un L-sistema: F significa dibujar una línea hacia adelante de cierta longitud L, el signo – es un giro hacia la izquierda en determinado ángulo, el signo + es un giro hacia la derecha en determinado ángulo y finalmente, [] significa realizar lo interno y devolverse (Rubiano, 2002). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 42).

En el análisis sobre este enunciado se atienden elementos relacionados con la categoría conocer matemático y sus subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

Para establecer el patrón de crecimiento de la planta, las estudiantes observaron y determinaron la forma como la planta distribuía sus ramificaciones para de esta manera plantear el modelo que responde a la estructura de la planta observada, esto se evidencia al afirmar que “El patrón crecimiento de la planta de mandarina “Arrayana” se estableció considerando la variable cantidad de segmentos en que se divide el tallo”, luego, mediante la implementación del lenguaje de los L-sistemas las estudiantes matematizan y modelan un fenómeno natural y esto evidencia elementos de la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida.

La observación estructurada de la planta responde a procesos de la categoría conocimiento tecnológico ya que requiere el registro de datos en instrumentos diseñados para tal fin, como notas, bases de datos, tablas, entre otros, lo que involucra uso de métodos formales y herramientas tecnológicas; así mismo, el estudio, la interpretación y el análisis de estos instrumentos, con el ánimo de identificar patrones y regularidades propios del crecimiento de la planta, requiere de conocimientos específicos de la ingeniería para la obtención del fenómeno en forma óptima. Es así como se evidencia una reflexión caracterizada por el conocimiento

matemático de las estudiantes y los conocimientos específicos de la ingeniería ambiental ya que mediante los L-sistemas modelan el patrón de crecimiento de la planta de mandarina mediante procesos propios de la investigación formativa; lo anterior se traduce en conocer reflexivo de acuerdo con los planteamientos de (Skovsmose 1999, p. 136).

Fragmento 11: f11

El patrón de crecimiento se estableció de acuerdo con las instrucciones de los L-sistemas (Rubiano, 2002). Adicional, se consideró que la variable N (cantidad de segmentos en que se divide el tallo) es igual a 2, división correspondiente a la iteración 1 que se puede observar en la parte izquierda de la Tabla 8.

Teniendo en cuenta lo anterior, el patrón de crecimiento de la mandarina

“Arrayana” es: $F = F + [F] - - [F]$

Significa: trace una línea F de determinada longitud y al final de ella, gire a la derecha + y trace otra línea que quedará inclinada a la derecha, regrese al punto donde la inició $[F]$, gire a la izquierda en la misma magnitud que había girado a la derecha dos veces - - para realizar la última línea inclinada a la izquierda y regrese a donde la inició; así finaliza el modelamiento del patrón de crecimiento de una planta de mandarina “Arrayana” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 49).

En este párrafo se identifican elementos relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida. De igual forma se detectan componentes concernientes con la categoría conocer tecnológico con la subcategoría uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima

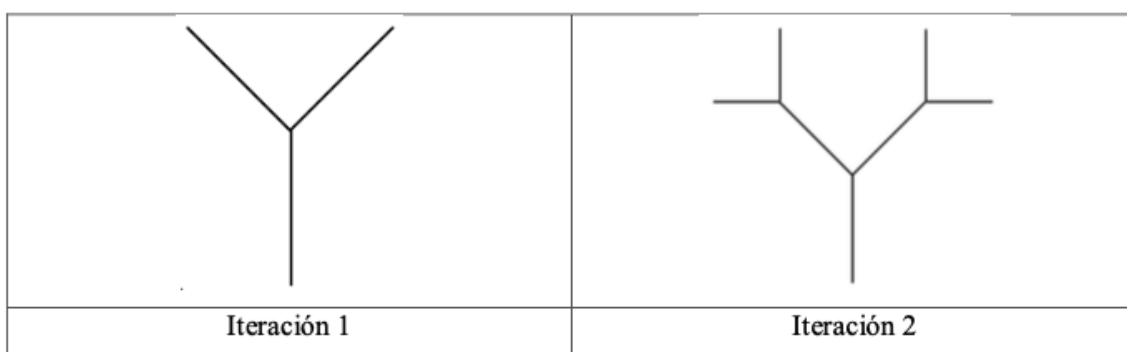
De acuerdo a lo anterior y a las observaciones y cálculos realizados, las estudiantes definieron el patrón de crecimiento así: $F = F + [F] - - [F]$ donde a cada símbolo se le signó su significado, y utilizando herramientas computacionales obtuvieron como resultado la imagen de la tabla 8, donde se ilustran las dos primeras iteraciones de la planta en estudio, reflejando así, la implementación de software especializado para aplicar modelos a contextos del entorno vinculando la realidad con

la matemática para dar frente a una problemática social que ha estado en aumento y se ha vuelto de carácter urgente para las sociedades; lo que muestra elementos relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual, modelación extendida; de igual forma se identifican elementos concernientes a la categoría conocer tecnológico y las subcategorías uso de métodos formales, herramientas tecnológicas y conocimientos específicos para la consecución del fenómeno en forma óptima.

De acuerdo a los planteamientos de (Skovsmose 1999, p.127) “las reflexiones pueden tener que ver con la evaluación de (posibles) soluciones a problemas tecnológicos (que involucran las matemáticas)”, las estudiantes desarrollan conocer reflexivo cuando definen las variables del L-sistema y establecen el patrón de crecimiento al relacionar técnicas formales, como la implementación de símbolos y reglas –L-sistemas– con técnicas intuitivas mediante las cuales establecen que la cantidad de segmentos en las que se divide el tallo de la planta de mandarina arrayana es $N=2$ –observación estructurada–

Así mismo y en concordancia con los planteamientos de (Skovsmose, 1999) se identifica una reflexión que se caracteriza por procesos de modelación tanto puntual como extendida, mediante los cuales, las estudiantes logran determinar el patrón de crecimiento de la planta de acuerdo al L-sistema que la describe, es decir, el conocer matemático y el conocer tecnológico en su máximo esplendor con miras hacia el mejoramiento de la calidad de vida de la comunidad.

Tabla 8. Iteraciones del patrón de crecimiento de la planta.



Nota: * Iteración 1 y 2 de la planta de mandarina “Arrayana”, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 49)

Fragmento 12: f12

Los modelos de crecimiento son modelos analíticos diseñados con la finalidad de describir el crecimiento de las poblaciones y pronosticar el tamaño de la población en estudio al cabo del tiempo; estos modelos tienen en cuenta una propiedad de las poblaciones denominada tasa de crecimiento exponencial que considera parámetros demográficos básicos (nacimientos, muertes, inmigraciones y emigraciones) (Valverde, Cano, Meave, & Carabias, 2005). Uno de los modelos de crecimiento es el modelo matemático de crecimiento exponencial dado por las ecuaciones diferenciales que permite calcular el número de ramas y hojas con respecto a la iteración ($X(i)$) contemplando los nacimientos y muertes de la población mediante una constante de proporcionalidad (Zill, 2009) (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 31)

La categoría conocer matemático, con las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, y la categoría conocer tecnológico, con la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, tienen una gran incidencia en este párrafo. En primer lugar, se identifica una reflexión caracterizada por el uso de conocimientos específicos de la ingeniería y conceptos propios de la matemática, específicamente la modelación matemática, cuando las estudiantes articulan que *“Los modelos de crecimiento son modelos analíticos diseñados con la finalidad de describir el crecimiento de las poblaciones y pronosticar el tamaño de la población en estudio al cabo del tiempo; estos modelos tienen en cuenta una propiedad de las poblaciones denominada tasa de crecimiento exponencial que considera parámetros demográficos básicos (nacimientos, muertes, inmigraciones y emigraciones) (Valverde, Cano, Meave, & Carabias, 2005).”* (esto se relaciona con las categorías conocer matemático y conocer tecnológico). Lo anterior indica que las estudiantes recurren a herramientas puramente matemáticas, como son los modelos matemáticos, “modelación puntual”, para justificar la implementación de estos en el desarrollo de la investigación, en segundo lugar, se identifica una reflexión caracterizada por la modelación puntual y los conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima cuando en el párrafo las estudiantes manifiestan que *“Uno de los modelos de crecimiento es el modelo matemático de crecimiento exponencial dado por las ecuaciones diferenciales que permite calcular el número de ramas y hojas con respecto a la iteración ($X(i)$) contemplando los nacimientos y muertes de la población mediante una constante de proporcionalidad (Zill, 2009)”*. En esta última parte del párrafo se percibe que las estudiantes identifican

un modelo, dado por las ecuaciones diferenciales, que les permite determinar el número de ramas y hojas que tiene el árbol en cualquier iteración mediante la definición de variables y constantes, lo que en términos de (Skovsmose 1999) se traduce en conocer reflexivo debido a que las estudiantes establecen el modelo matemático apropiado que les permite calcular el número de ramas y hojas que tiene la planta en cualquier iteración.

Esto se reafirma teniendo en cuenta que las estudiantes exponen el modelo y la solución del modelo de la siguiente manera “A continuación, se describe la solución del modelo matemático por medio del método de separación de variables: $X(i + \Delta i) = X(i) + N - M$. Sea, X la cantidad de ramas y hojas que hay en determinada iteración i , N nacimientos y M muertes de ramas y hojas.” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 31). Para la solución de la ecuación diferencial, las estudiantes utilizan conceptos básicos y conocimientos previos de las matemáticas para relacionarlos con fenómenos sociales y ambientales y calcular el número de ramas y hojas que desarrolla la planta en cualquier iteración, como se muestra a continuación:

$$N = NX(i)\Delta i$$

$$M = MX(i)\Delta i$$

$$X(i + \Delta i) = X(i) + NX(i)\Delta i - MX(i)\Delta i$$

$$X(i + \Delta i) = X(i) + (N - M) X(i)\Delta i$$

$$X(i + \Delta i) - X(i) = (N - M) X(i)\Delta i$$

$$*K = (N - M)$$

$$\frac{X(i + \Delta i) - X(i)}{\Delta i} = kX(i)$$

$$\lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{X(i + \Delta i) - X(i)}{\Delta i} = kX(i)$$

$$P'(i) = kX(i)$$

$$\frac{dX}{di} = kX \rightarrow \frac{dX}{X} = k di$$

$$\ln(X) = ki + c$$

$$X(i) = ce^{k(i)}$$

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 31)

Las estudiantes especifican el significado de cada uno de los símbolos que hacen parte del modelo matemático representado por la ecuación diferencial para matematizar y asignar un significado a cada símbolo que interviene en la ecuación, lo cual indica que la modelación puntual es el principal componente para el presente desarrollo y, al analizar la solución presentada por las estudiantes en el trabajo, se evidencia el uso de herramientas como la sustitución, la factorización, las propiedades de la igualdad, la derivada, la integral indefinida, la técnica de separación de variables para determinar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, esto significa que las estudiantes utilizaron diversos conocimientos matemáticos que relacionaron con el conocer específico de su profesión para desentrañar aspectos y

características de la función solución de la ecuación diferencial como lo son la constante de proporcionalidad k y la constante de integración c .

Fragmento 13: f13

Se establecieron dos condiciones iniciales de acuerdo a la observación del crecimiento del árbol de mandarina:

$$\text{Condición 1: } X(0) = 1$$

$$\text{Condición 2: } X(1) = 2$$

Representan, condición 1: para una iteración 0 se genera una rama principal y la condición 2: para la iteración 1 se generan 2 ramas a partir de la rama principal.

A partir de estas condiciones iniciales es posible determinar la cantidad de ramas y hojas en cualquier iteración hallando las constantes y reemplazando como se demuestra a continuación:

La condición 1 se reemplaza en la Ecuación 3 para encontrar el valor de la constante de integración (c):

$$x(i) = ce^{k(i)}$$

$$1 = ce^{k(0)}$$

$$1 = c$$

Tras hallar el valor de c , se reemplaza en la Ecuación 3 la condición 2 para encontrar el valor de la constante de proporcionalidad (k):

$$x(i) = ce^{k(i)}$$

$$2 = 1e^{k(1)}$$

$$\ln(2) = k$$

$$k = 0,6931471806$$

Con el valor de las constantes se formula el modelo de crecimiento exponencial que permite calcular el número de ramas y hojas de la planta por iteración: $x(i) = e^{0,6931471806(i)}$

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 50)

En este enunciado se evidencian elementos relacionados con la categoría conocer matemático con las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que también se relacionan elementos referidos a la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

Para justificar lo expuesto arriba, las estudiantes definen las condiciones iniciales que permiten determinar la solución particular de la ecuación diferencial,

mediante los resultados obtenidos en **F12**, es decir, las estudiantes hacen la relación entre las ecuaciones diferenciales y los L-sistemas, lo que permite deducir que hubo una reflexión caracterizada por la modelación puntual, ya que en términos de (Skovsmose, 1999) quien plantea que “el contraste entre técnicas formales e intuitivas puede hacer ver la formalización como una de las muchas formas posibles de manejar un problema y esta experiencia es muy importante cuando se desarrolla conocer reflexivo” (p.132), esto se reafirma cuando exponen que “Se establecieron dos condiciones iniciales de acuerdo a la observación del crecimiento del árbol de mandarina:

Condición 1: $X(0) = 1$

Condición 2: $X(1) = 2$

Representan, condición 1: para una iteración 0 se genera una rama principal y la condición 2: para la iteración 1 se generan 2 ramas a partir de la rama principal”.

Seguidamente, para establecer la función que modela el crecimiento de la planta, tanto en su forma geométrica como en el número de ramas y hojas que va desarrollando en cualquier iteración, las estudiantes emplean, por un lado, herramientas tecnológicas y por otro lado elementos de la matemática como la regla de sustitución para sistemas de ecuaciones, propiedades de la igualdad, propiedades de los exponentes y los logaritmos, entre otros. Esto es evidencia de elementos de la modelación puntual como se muestra cuando las estudiantes especifican el proceso que realizaron para determinar el valor de la constante de integración c y la constante de proporcionalidad k , en **F13**.

Estas constantes fueron calculadas definiendo condiciones iniciales provenientes de la observación estructurada que realizaron sobre el crecimiento de la planta, donde encontraron que para una iteración 0 se genera una rama principal, es decir que $X(0) = 1$, al igual que para la iteración 1 se generan dos ramas de la rama principal, es decir $X(1) = 2$, que al aplicarlas a la función solución de la ecuación diferencial encontraron que $X(i) = e^{0.6931471806(i)}$ y de esta manera obtuvieron la solución particular de la función solución de la ecuación diferencial que modela el crecimiento de la planta de mandarina arrayana con la que determinaron el número de ramas y hojas en el árbol en cualquier iteración i . Lo anterior evidencia una reflexión caracterizada por procesos de modelación tanto puntual como extendida, ya que se puede ver conceptos de la matemática relacionados con asuntos ambientales. Esto se justifica cuando (Skovsmose 1999, p.131) plantea que “las reflexiones podrían

referirse a la confiabilidad de la solución en un contexto específico...” y para finalizar este proceso de modelación, las estudiantes optan por hacer pruebas del modelo obtenido con el ánimo de contrastarlo con la realidad.

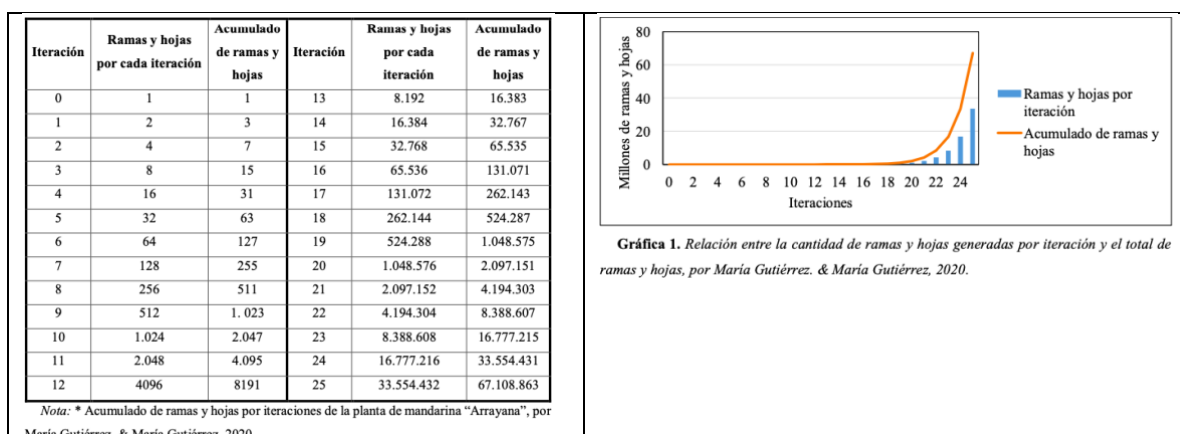
Fragmento 14: f14

La Gráfica 1 representa los datos registrados en la Tabla 9 y permite observar que el crecimiento en la cantidad de ramas y hojas es de tipo exponencial, este comportamiento es más notorio en la fase temprana de la planta; por este motivo, este tipo de modelo resulta particularmente apropiado para las plantas del presente estudio, las cuales no superan los 15 meses de edad. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 52)

El análisis de este apartado evidencia componentes relacionados con las categorías conocer matemático con sus subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se reconocen elementos respectivos con la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocer específico para la obtención del fenómeno en forma óptima.

En este párrafo las estudiantes expresan que emplearon herramientas tecnológicas para llevar a cabo los registros de la observación como lo son las tablas y las gráficas, es decir, que las estudiantes muestran representaciones de la función solución tablas y gráficas lo que les permite profundizar más sobre el modelo y hacer abstracciones de este; estas abstracciones ayudaron a entender el comportamiento del crecimiento de la planta y realizar reflexiones en torno al fenómeno en estudio. Esto se reafirma cuando las estudiantes señalan que “La Gráfica 1 representa los datos registrados en la Tabla 9 y permite observar que el crecimiento en la cantidad de ramas y hojas es de tipo exponencial”. Aquí se evidencian elementos relacionados con las categorías conocer tecnológico y conocer matemático ya que, mediante el uso de herramientas tecnológicas, tablas y gráficas, los conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, la modelación puntual y la modelación extendida las estudiantes forjaron una reflexión caracterizada por el crecimiento exponencial de la planta que mostraba la gráfica. De acuerdo con (Skovsmose, 1999, p.127) “reflexionar implica tomar distancia de sus propuestas y mirar las soluciones sugeridas” de igual forma este autor establece que “las reflexiones podrían referirse a la confiabilidad de la solución en un contexto específico. Aún si los cálculos son correctos y la eficacia de la técnica se establece puede no darse el caso de que los

resultados sean confiables” (p. 131). Establecer que el crecimiento en la cantidad de ramas y hojas es de tipo exponencial se logró mediante el modelo matemático obtenido al resolver la ecuación diferencial, es así como lograron determinar la cantidad de ramas y hojas que desarrolla la planta en las iteraciones 1 a 25 registrando dichos valores en una tabla diseñada para tal fin, la cual generó la gráfica que se muestra a continuación.



(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 51)

Ahora, el conocer tecnológico se evidencia en el párrafo cuando las estudiantes precisan particularidades del crecimiento de la planta, mostrando así que los conocimientos específicos de la ingeniería ayudaron a relacionar y entender la pertinencia del modelo en la búsqueda de su finalidad, esto se puntualiza cuando las estudiantes manifiestan que *“este comportamiento es más notorio en la fase temprana de la planta; por este motivo, este tipo de modelo resulta particularmente apropiado para las plantas del presente estudio, las cuales no superan los 15 meses de edad”*

Uno de los grandes interrogantes que enfrentaron las estudiantes está relacionado con la equivalencia tiempo-iteración, es decir, determinar a cuánto tiempo equivale una iteración en la planta de mandarina. Para dar respuesta, las estudiantes realizaron un diseño experimental haciéndole seguimiento a 15 plantas de mandarina arrayana que ellas sembraron en la sede Loma Linda de la Universidad Santo Tomás de la ciudad de Villavicencio, las cuales fueron divididas en 3 bloques de 5 plantas cada bloque de acuerdo con la edad de cada una. Durante trece semanas registraron el aumento de iteraciones y la longitud de las 15 plantas, esto se hizo en formatos de seguimiento diseñados para tal fin, con el propósito de divisar características que permitan determinar el tiempo que tarda una planta en realizar una iteración. Adicional a lo anterior, las estudiantes aplicaron tratamientos con abonos en los diferentes

bloques de plantas, también emplearon herramientas tecnológicas para medir tanto concentración de nitratos como la humedad; posteriormente emplearon software especializado para apoyar el proceso de investigación. Los procesos mencionados llevan a la implementación de técnicas y métodos formales para la recolección de datos empleando tanto el conocer matemático como el conocer tecnológico.

Fragmento 15: f15

La Tabla 10 representa el total de iteraciones realizadas por las quince plantas de mandarina “Arrayana” sembradas (51 iteraciones), así como el promedio de iteraciones realizadas tanto por bloque como en general. El bloque que en promedio realizó mayor cantidad de iteraciones es el bloque B, seguido del bloque A y finalmente el bloque C, con valores de 6,6, 2 y 1,6 iteraciones, respectivamente; para un promedio general de 3,4 iteraciones. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 53-54)

Tabla 10. Promedio de iteraciones por bloque.

Bloque	A					B					C					Total
N° Planta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Iteraciones totales generadas	0	1	1	7	1	9	5	10	0	9	4	2	0	2	0	51
Promedio de iteraciones	2					6,6					1,6					Promedio
																3,4

*Nota: * Iteraciones totales generadas con su respectivo promedio por bloque, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.*

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 53-54)

En este articulado se evidencian componentes relacionados con las categorías conocer matemático con sus subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se reconocen elementos respectivos con la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocer específico para la obtención del fenómeno en forma óptima.

La implementación de tablas para el registro diario del crecimiento de las plantas de mandarina, evidencia que las estudiantes se apoyaron en herramientas tecnológicas que facilitaron el análisis del fenómeno en exploración, (aquí se evidencian elementos relacionados con las categorías conocer matemático y conocer tecnológico) es decir, que mediante estas herramientas, las estudiantes relacionaron la información recolectada para establecer regularidades y patrones que caracterizaron dicho crecimiento, esto se justifica cuando las estudiantes afirman que “La Tabla 10

representa el total de iteraciones realizadas por las quince plantas de mandarina “Arrayana” sembradas (51 iteraciones), así como también relacionaron el promedio de iteraciones realizadas tanto por bloque como en general”. Por lo anterior y de acuerdo a las ideas expuestas por (Skovsmose, 1999), quien argumenta que “las reflexiones... tienen que ver con la evaluación de posibles soluciones a problemas tecnológicos (que involucran las matemáticas)” (p. 127), se puede afirmar que las estudiantes realizaron reflexiones caracterizadas por procesos de observación estructurada al recoger y sistematizar la información proveniente del desarrollo de las plantas de mandarina arrayana, al igual que se caracteriza por procesos de modelación matemática al calcular en promedio el número de iteraciones realizado por las plantas y también, se relaciona con conocimientos propios de la ingeniería cuando correspondieron los cálculos efectuados con el número de iteraciones realizadas por las plantas en estudio.

Ahora, la modelación puntual se explicita cuando las estudiantes utilizan conceptos matemáticos, como lo es el concepto de promedio aritmético, luego, emplean este concepto para determinar en promedio, el bloque de plantas que tuvo mayor cantidad de iteraciones, hecho que permite identificar elementos de la modelación extendida porque las estudiantes llevan las matemáticas a asuntos sociales. Esto se reafirma con la siguiente frase que exponen las estudiantes: “El bloque que en promedio realizó mayor cantidad de iteraciones es el bloque B, seguido del bloque A y finalmente el bloque C, con valores de 6,6, 2 y 1,6 iteraciones, respectivamente; para un promedio general de 3,4 iteraciones”.

De igual forma proceden para asignar una cantidad de tiempo a la iteración empleando conocimientos matemáticos, como lo es el promedio aritmético, el análisis de tablas y gráficos, así como también emplearon conocimientos propios de la ingeniería para relacionarlos con fenómenos de la realidad, como se muestra a continuación en el siguiente apartado “*Partiendo de que cada semana tiene siete días, las trece semanas de toma de datos corresponden a 91 días y en promedio, durante este tiempo las plantas realizaron 3,4 iteraciones; es decir que una iteración se realiza cada 26,8 días*” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 53). Además se evidencia que las estudiantes después de desarrollar el diseño experimental, –observación estructurada, toma y análisis de información recolectada– realizan abstracciones del comportamiento de las iteraciones con la finalidad de encontrar patrones que permitan establecer regularidades y propiedades sobre el crecimiento de las plantas, es decir, aquí se puede apreciar el uso del conocer matemático y el conocer tecnológico ya que

se trata de interpretar patrones, utilizar algoritmos preestablecidos, reconocer fórmulas y modelos que permiten determinar y encontrar relaciones en el crecimiento de la planta, esto les permitió afirmar que una iteración tarda 26,8 días, y lo consiguieron al efectuar la división entre el número de días de toma de datos y el número de iteraciones realizadas en promedio durante ese periodo de tiempo en el que se desarrolló el diseño experimental.

Fragmento 16: f16

Con la bloquización por edades hecha en el estudio, se puede observar en los promedios por bloques de la Tabla 10 que a pesar de que las plantas se encuentran en la misma fase joven, existen diferencias en el crecimiento.
(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 53)

El análisis de este apartado evidencia componentes relacionados con las categorías conocer matemático con sus subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se reconocen elementos respectivos con la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocer específico para la obtención del fenómeno en forma óptima.

El proceso llevado a cabo durante el desarrollo del diseño experimental permitió a las estudiantes hacer reflexiones con características relacionadas con el crecimiento de las plantas, ya que encontraron grandes diferencias en cada una de estas, es decir, realizaron comparaciones, abstracciones y juicios de valor que caracterizan dicho crecimiento estableciendo particularidades en cada uno de los bloques en que se dividió el conjunto de plantas de acuerdo con los registros realizados. Esto en términos de (Skovsmose, 1999) hace referencia al conocer reflexivo ya que “las reflexiones pueden tener todavía que ver con la evaluación de posibles soluciones a problemas tecnológicos”. Las diferencias las caracterizaron mediante el número de ramas, hojas e iteraciones que desarrolló cada planta en las trece semanas, estos registros fueron consignados en formatos y tablas diseñadas para esa finalidad como se muestra en la siguiente imagen.

Tabla 11. *Acumulado de ramas y hojas por planta.*

N° Planta	Iteraciones totales	Acumulado de ramas y hojas	N° Planta	Iteraciones totales	Acumulado de ramas y hojas
1	16	131.071	9	11	4.095
2	14	32.767	10	23	16.777.215
3	18	524.287	11	12	8.191
4	22	8.388.607	12	12	8.191
5	16	131.071	13	7	255
6	21	4.194.303	14	9	1.023
7	17	262.143	15	9	1.023
8	22	8.388.607			

Nota: * Acumulado de ramas y hojas de las quince plantas de mandarina “Arrayana”, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 56)

En la tabla anteriormente relacionada se evidencia que para cada planta registraron tanto el número de iteraciones como el número acumulado de ramas y hojas a lo largo del diseño experimental, aquí se distingue la implementación de procesos de razonamiento asociados al análisis e interpretación de tablas y gráficos, uso de algoritmos, fórmulas y modelos que, en los términos de (Skovsmose, 1999) se asocian a procesos de modelación puntual y extendida ya que se utiliza la matemática en asuntos sociales; de igual forma, el conocer tecnológico también juega un papel importante ya que se vio la necesidad de implementar herramientas tecnológicas a la hora de utilizar modelos matemáticos para establecer vínculos entre la matemática y la realidad mediante el uso de conocimientos tanto matemáticos como específicos de la ingeniería. De acuerdo con (Skovsmose, 1999) quien afirma que “las reflexiones pueden tener todavía que ver con la evaluación de posibles soluciones a problemas tecnológicos” se evidencia que las características principales de las reflexiones elaboradas por las estudiantes en este apartado se relacionan con el conocimiento matemático necesario para abordar situaciones que requieren procesos de modelación y, con el conocimiento de su quehacer profesional para el uso e implementación de métodos formales y herramientas tecnológicas, conocimientos específicos de la ingeniería y procesos relacionados con la investigación formativa.

Fragmento 17: f17

Para asignar el tiempo de crecimiento a cada iteración de la planta se realizó trabajo de campo por medio de un diseño experimental, en el que se tuvo en cuenta una bloquización y un factor de tratamiento considerando como unidad de observación 15 plantas de mandarina “Arrayana” sembradas de forma lineal, conservando una distancia de 5 m entre cada una, en el campus Loma Linda de la Universidad Santo Tomás, para garantizar las mismas condiciones de

crecimiento; a las cuales se les realizaron registros periódicos del tiempo que tardan las plantas en desarrollar una iteración. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 42-43).

En este fragmento se evidencian elementos relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se identifican elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico y las subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas, y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima

En el párrafo relacionado, se percibe que las estudiantes emplearon estrategias para la toma de datos en el desarrollo del diseño experimental con la bloquización, división en 3 bloques de 5 plantas cada uno, de acuerdo con las edades de cada una de estas, como lo manifiestan las investigadoras “Para la bloquización, las plantas sembradas fueron distribuidas en tres bloques de acuerdo con su edad inicial conformados por 5 plantas cada uno, como se muestra en la Tabla 3”.

Tabla 3. Distribución en bloques de las 15 plantas sembradas.

Bloque	Edad inicial	N° de Plantas
A	1 año	1, 2, 3, 4, 5
B	Seis meses	6, 7, 8, 9, 10
C	Dos meses	11, 12, 13, 14, 15

Nota: * Asignación de números a las plantas por bloques, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2019.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 43)

Lo anterior permite distinguir elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico ya que se implementa el uso de métodos formales y herramientas tecnológicas para la interpretación y análisis del asunto en cuestión. Con la misma finalidad, emplearon tratamientos con abono triple 15 para identificar diferencias en el crecimiento de las plantas de acuerdo con la cantidad de abono aplicado, donde se reconoce el uso de conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima. Aquí se evidencia una reflexión caracterizada por los resultados obtenidos durante el desarrollo del diseño experimental que realizaron las estudiantes con las 15 plantas de mandarina arrayana.

Esto se reafirma cuando las estudiantes advierten que “*Las cantidades de triple 15 aplicadas en los tratamientos del 1 al 4, fueron 30gr, 35gr, 40gr y 45gr, respectivamente. El placebo se realizó para garantizar la efectividad del tratamiento;*

por ende, a las plantas 1, 9, 13 y 20 no se le agregó ninguna cantidad de abono”.
(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 43)

Tabla 4. Asignación aleatoria del factor de tratamiento por bloques.

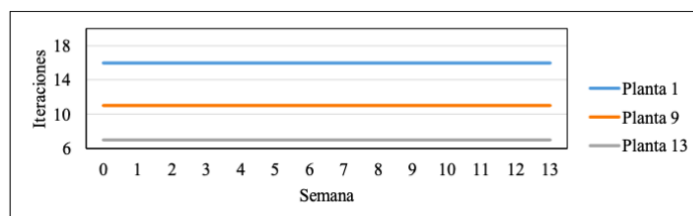
Factor: Abono					
Bloque	Placebo	Tratamiento 1	Tratamiento 2	Tratamiento 3	Tratamiento 4
A	1	5	3	4	2
B	9	10	7	8	6
C	13	14	11	15	12

Nota: * Distribución del factor de tratamiento en las plantas, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2019.

Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 43)

De igual forma se identifican elementos de la modelación puntual en la toma de datos, de la modelación extendida al interpretar dichos datos en torno a un fenómeno natural como es el desarrollo de la planta para asignar el tiempo de crecimiento a la iteración y además se evidencian elementos del uso de herramientas tecnológicas para el diseño de gráficas y el registro de datos en tablas; esto permitió a las estudiantes realizar reflexiones en torno a las diferencias en el número de iteraciones que presentó cada planta debido al tratamiento aplicado. Es decir que se emplea las matemáticas en asuntos sociales. Esto se puede evidenciar con la siguiente afirmación: “A partir del diseño experimental del trabajo se pudo concluir que las plantas placebo (1, 9 y 13), cada una de bloques diferentes, no generaron iteraciones durante el estudio (Gráfica 6); mientras que las demás, independiente del tratamiento aplicado, manifestaron aumento en su cantidad de iteraciones. Es importante resaltar que el bloque B, correspondiente a las plantas 6-10 y de edad intermedia, fue el que evidenció mayor efecto de todos los tratamientos; ya que todas sus plantas tuvieron un aumento en sus iteraciones, superior al de las plantas de los bloques A y C”.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 78)



Gráfica 6. Registro semanal de las iteraciones en las plantas placebo, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 78)

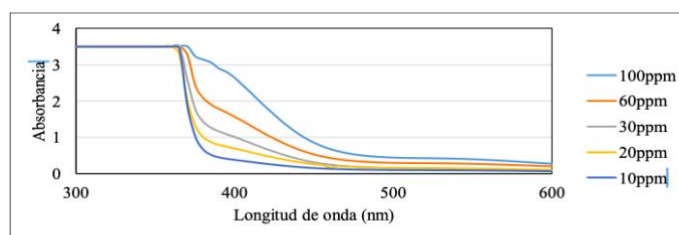
Fragmento 18: f18

Para medir los nitratos del suelo fue necesario realizar inicialmente una evaluación de la absorbancia a diferentes longitudes de onda en el equipo Spectroquant Prove 600, para posteriormente escoger la longitud de onda con la que se realizará la curva de calibración y se calcularan los nitratos de cada punto. La evaluación se realizó teniendo en cuenta la guía de “Determinación de nitratos en aguas por espectrofotometría UV” del Instituto Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 45)

El análisis de este apartado evidencia componentes relacionados con las categorías conocer matemático con sus subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se reconocen elementos respectivos con la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocer específico para la obtención del fenómeno en forma óptima.

El uso de equipos especializados, como el Spectroquant prove 600, para evaluar la absorbancia a diferentes longitudes de onda y así medir la concentración de nitratos en el suelo, es claro ejemplo del uso de herramientas tecnológicas y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, esto se valida con el enunciado “Para medir los nitratos del suelo fue necesario realizar inicialmente una evaluación de la absorbancia a diferentes longitudes de onda en el equipo Spectroquant Prove 600”.

Los conocimientos propios de la ingeniería juegan un papel importante al igual que el análisis de gráficas, ya que estos les orientó a la hora de reflexionar sobre la longitud de onda apropiada para la medición de nitratos, es decir aquí se refleja la modelación puntual, modelación extendida, uso de herramientas tecnológicas y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima. Esto se justifica con el enunciado “*En la Gráfica 14 se evidencia que, a mayor concentración de la solución, mayor es el valor de absorbancia; todas las soluciones a una longitud de onda de 300nm a 360nm no manifiestan variaciones en la absorbancia y es en 365nm donde se generan cambios significativos que indican que de ese valor en adelante se podrá definir el espectro de onda en el que los nitratos reflejan mayor absorbancia*”. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 66)



Gráfica 14. Evaluación de la absorbancia a diferentes longitudes de onda, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 66)

Otro factor para resaltar es que las estudiantes se orientan por estudios realizados previamente para evaluar los resultados obtenidos, esto indica que las estudiantes muestran respeto hacia el conocimiento al igual que muestran respeto por sus saberes y los utilizan para dar solución al problema, es decir, emplean conocimientos propios de la ingeniería, esto se ve reflejado cuando expresan que “La evaluación se realizó teniendo en cuenta la guía de “Determinación de nitratos en aguas por espectrofotometría UV” del Instituto Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales”.

Con relación al modelo que permite determinar la concentración de nitratos, inicialmente las estudiantes, mediante el uso de herramientas tecnológicas como el espectrofotómetro, realizaron lecturas de absorbancia y las registraron en una tabla de datos donde definieron variables tanto la dependiente, que define la absorbancia, como la independiente, que determina concentraciones de soluciones de trabajo, es decir que tanto el conocer matemático como el conocer tecnológico tienen gran incidencia en este proceso de modelación, como se muestra en la siguiente imagen.

Tabla 13. Absorbancias registradas para cada solución de trabajo.

Concentración de soluciones de trabajo (ppm) (X)	100	60	30	20	10
Absorbancia (Y)	3,056	1,906	1,265	0,866	0,518

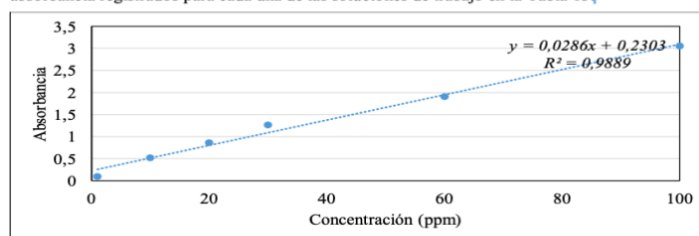
Nota: * Absorbancias de las soluciones de trabajo registradas a 385nm, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 67)

Posteriormente, las estudiantes registraron estos datos en un plano cartesiano para representar gráficamente dicho fenómeno y poder establecer así, una ecuación mediante la línea de tendencia de dichos datos, dicha gráfica que se denomina la gráfica de calibración de nitratos se presenta adelante. Este hecho refleja el manejo de la modelación puntual, modelación extendida, uso de conocimientos específicos para

la obtención del fenómeno en forma óptima y la implementación de herramientas tecnológicas ya que, por un lado, se determinaron variables y se establecieron relaciones entre estas, dotándolas de significado en el contexto de la ingeniería y, por otro lado, se empleó software especializado para la representación gráfica de la relación que existe entre dichas variables. Es así como las estudiantes realizaron reflexiones, en torno a los datos y la gráfica que los representa, que las condujo a generar la línea de tendencia y determinar un modelo lineal que se ajuste a dichos datos, como lo afirman en el siguiente enunciado “A la Gráfica 15 se le generó la línea de tendencia de acuerdo con los valores de absorbancia graficados y su respectiva ecuación: $Y = 0,0286X + 0,2303$ Ecuación 6. Ecuación de la línea de tendencia”. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 67)

La Gráfica 15 correspondiente a la curva de calibración de nitratos, representa los valores de absorbancia registrados para cada una de las soluciones de trabajo en la Tabla 13.



Gráfica 15. Curva de calibración de nitratos, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 67)

Con la ecuación de la línea de tendencia, utilizando propiedades de los números reales, propiedades de la igualdad y el concepto de función inversa, las estudiantes determinaron la ecuación que les permite calcular la concentración de nitratos, que era el propósito en este proceso, como lo afirman en la siguiente declaración “A partir de la Ecuación 6, fue posible despejar la variable X que finalmente permitirá calcular las concentraciones de nitratos de las muestras, de la siguiente forma: $X = \frac{Y-0,2303}{0,0286}$.

Ecuación 7. Ecuación para calcular la concentración de nitratos”. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 68). Lo anterior refleja el uso de las matemáticas en asuntos sociales, lo que permite también identificar elementos de la modelación extendida.

Fragmento 19: f19

Con ayuda del equipo medidor de pH y humedad del suelo se midieron in situ dichos parámetros; el equipo está compuesto de dos sondas como se observa en la Figura 3, estas se introdujeron en el suelo de alrededor de las plantas sembradas hasta el nivel de sus raíces y este automáticamente indicaba el

valor de pH o humedad de acuerdo con la ubicación del botón en el parámetro que se deseaba conocer. El equipo tiene incluido en el visor de lectura valores de pH y humedad desde 4 a 8 y de 1 a 10, respectivamente; en el caso del pH, 4, 5 y 6 significan acidez, 7 neutralidad y 8 alcalinidad y para la humedad, hay rangos establecidos de 0 a 100% para categorizar el suelo en seco (10-30)%, húmedo (40-70)% y muy húmedo (80-100)%. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 44)



Figura 3. Medidor de pH o humedad del suelo (Mastronica, 2019).

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 44)

En este fragmento se reflejan elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico y las subcategorías uso de herramientas tecnológicas y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

Una de las variables de gran relevancia, para entender el crecimiento de las plantas es la humedad del suelo, para lograr medir dicha variable, las estudiantes utilizan instrumentos especializados como el medidor de pH o humedad del suelo. Este hecho evidencia conocimiento tecnológico ya que utilizar dichos instrumentos e interpretar sus resultados requiere de conocimientos propios de la ingeniería como se muestra a continuación “ El equipo tiene incluido en el visor de lectura valores de pH y humedad desde 4 a 8 y de 1 a 10, respectivamente; en el caso del pH, 4, 5 y 6 significan acidez, 7 neutralidad y 8 alcalinidad y para la humedad, hay rangos establecidos de 0 a 100% para categorizar el suelo en seco (10-30)%, húmedo (40-70)% y muy húmedo (80-100)%”. Durante el desarrollo del diseño experimental las estudiantes recolectaron información acerca de la humedad del suelo que muestra cada planta y la registraron en una tabla diseñada para tal fin y de esta manera obtener herramientas que permitan entender el comportamiento de esta variable, hecho que refleja elementos relacionados con el uso de herramientas tecnológicas y conocimientos propios de la ingeniería, lo que indica que el conocer matemático y el conocer tecnológico son componentes esenciales en este proceso de determinación de la variable humedad como se muestra a continuación:

Tabla 12. Datos recolectados de humedad y pH de las muestras de suelo.

Bloque A			Bloque B			Bloque C		
Nº Planta	Humedad (%)	pH	Nº Planta	Humedad (%)	pH	Nº Planta	Humedad (%)	pH
1	20	6	6	10	6	11	20	6
2	20	6	7	10	6	12	30	6
3	10	6	8	10	6	13	10	6
4	10	6	9	10	6	14	10	6
5	10	6	10	20	6	15	20	6

Nota: * Humedad y pH de las muestras de suelo de cada una de las quince plantas, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 64)

La implementación de esta herramienta permitió a las estudiantes discernir y reflexionar en torno al porcentaje de humedad que presenta cada planta como se expone cuando las estudiantes afirman que *“En cuanto al parámetro de humedad del suelo; en la Tabla 12 se evidencia que las plantas 3-9, 13 y 14 presentan un porcentaje de humedad del 10%, las plantas 1, 2, 10, 11 y 15, 20% y la única planta con humedad del suelo del 30% fue la planta 12”*. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 65). Lo anterior revela que el uso de herramientas tecnológicas, conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, la modelación puntual y la modelación extendida son elementos importantes para la comprensión de la variable humedad del suelo, sumado a esto, estos elementos orientaron a las estudiantes a reflexionar sobre la favorabilidad del suelo para el crecimiento de la planta como lo comunican cuando afirman que *“Una buena humedad del suelo favorece el desarrollo de todas las funciones de la planta y se refleja en mayor ganancia de biomasa, mientras que la deficiencia de agua puede alterar los procesos fisiológicos y disminuir el rendimiento (May, Pérez, Ruiz, Caamal, & García, 2011). Lo cual permite inferir que la planta 12, con mayor porcentaje de humedad es la que estaría realizando de forma efectiva todas sus funciones si esto dependiera exclusivamente de la cantidad de agua presente”*. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 65)

Fragmento 20: f20

El CO₂ capturado por la planta de mandarina “Arrayana” se estimó a partir de la extrapolación del valor teórico de captura de CO₂ de una planta de mandarina de 15 años de edad; dicho valor corresponde a la sumatoria de captura de CO₂ de ramas (1042,8gr), hojas y tallos (3330,8gr) y tronco (432gr) para un total de captura de CO₂ de 4.805,6gr por árbol anual (Mota, Alcaraz, Iglesias, Martínez, & Carvajal, 2011).

Teniendo en cuenta que este valor corresponde al último año de edad de la planta; es decir, la captura de CO₂ entre sus 14 y 15 años, equivalente a 365 días, y bajo el supuesto de que una iteración se realiza cada 26,8 días; se calculó la cantidad de iteraciones generadas por la planta tanto a los 14 años (190) como a los 15 años (204) y la diferencia entre estos valores es la cantidad de iteraciones que la planta realizó durante ese año (13 iteraciones). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 69-70)

En este fragmento se encuentran elementos relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se identifican elementos relacionados con la categoría conocer tecnológico, la subcategoría uso de métodos formales y herramientas tecnológicas, y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

En la primera parte del fragmento se refleja el conocer tecnológico ya que se emplearon conocimientos propios de la ingeniería que permitieron buscar estrategias para estimar el CO₂ capturado por la planta. Esto se evidencia cuando las estudiantes decidieron utilizar la extrapolación¹ del valor teórico de captura de CO₂ de una planta de mandarina, como se muestra en el siguiente enunciado resaltado por las estudiantes “El CO₂ capturado por la planta de mandarina “Arrayana” se estimó a partir de la extrapolación del valor teórico de captura de CO₂ de una planta de mandarina de 15 años de edad”; de igual forma se identifican elementos del conocer tecnológico y conocer matemático cuando establecen que “dicho valor corresponde a la sumatoria de captura de CO₂ de ramas (1042,8gr), hojas y tallos (3330,8gr) y tronco (432gr) para un total de captura de CO₂ de 4.805,6gr por árbol anual (Mota, Alcaraz, Iglesias, Martínez, & Carvajal, 2011)”. Es decir que las estudiantes reconocen y emplean conceptos propios de la matemática, modelación puntual, con el objetivo de interpretar un fenómeno natural, modelación extendida, lo cual es evidencia de conocer matemático y conocer tecnológico.

Debido a la extrapolación del valor teórico de captura de una planta de mandarina arrayana de 15 años de edad que hicieron las estudiantes, les fue posible determinar el número de iteraciones realizadas por dicha planta en un periodo de un

¹ Extrapolar: Averiguar o estimar el valor de una magnitud para valores de la variable que se hallan fuera del intervalo en que dicha magnitud es conocida. Real Academia de la lengua Española RAE. Extraído de: <https://dle.rae.es/extrapolar?m=form> 02/03/2022

año mediante el uso de conceptos matemáticos como la razón promedio de cambio. Esto refleja características de la modelación puntual, ya que, mediante esta establecieron una estrategia para encontrar el número de iteraciones; la modelación extendida ya que asociaron las matemáticas en asuntos sociales y el uso de conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima. Esto se reafirma cuando la estudiantes manifiestan que *“Teniendo en cuenta que este valor corresponde al último año de edad de la planta; es decir, la captura de CO₂ entre sus 14 y 15 años, equivalente a 365 días, y bajo el supuesto de que una iteración se realiza cada 26,8 días; se calculó la cantidad de iteraciones generadas por la planta tanto a los 14 años (190) como a los 15 años (204) y la diferencia entre estos valores es la cantidad de iteraciones que la planta realizó durante ese año (13 iteraciones)”*.

Las estudiantes utilizaron herramientas como tablas para registrar los valores resultantes de la extrapolación realizada a las 15 plantas en estudio, con la intención de evidenciar características y realizar reflexiones en torno a la cantidad de CO₂ capturado por las plantas. Esto refleja elementos del conocer matemático y el conocer tecnológico. Lo anterior se corrobora cuando las estudiantes expresan que *“Se puede resaltar que la planta 10 es la que mayor captura de CO₂ ha realizado con 156.800E-56gr de CO₂ y, por el contrario; la que menor captura de CO₂ realizó fue la planta 13 con 2,38E-56gr de CO₂; estos valores están relacionados directamente con la cantidad de ramas y hojas de la planta; por lo tanto, debido a la fase temprana en la que se encuentran todas las plantas, su captura de CO₂ no es significativa en comparación a la de un árbol adulto”*. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 71).

Tabla 15. Captura de CO₂ de las plantas 1-15.

Nº Planta	Iteraciones	Ramas y hojas acumuladas	Captura de CO ₂ acumulada (E-56)(gr)	Nº Planta	Iteraciones	Ramas y hojas acumuladas	Captura de CO ₂ acumulada (E-56) (gr)
1	16	131071	1220	9	11	4095	38,27
2	14	32767	306,24	10	23	16777215	156800
3	18	524287	4899,98	11	12	8191	76,55
4	22	8388607	78399,80	12	12	8191	76,55
5	16	131071	1224,99	13	7	255	2,38
6	21	4194303	39199,90	14	9	1023	9,56
7	17	262143	2449,98	15	9	1023	9,56
8	22	8388607	78399,80				

Nota: *CO₂ capturado de acuerdo al número de iteraciones y a su cantidad de ramas y hojas acumuladas, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 70)

Fragmento 21: f21

Obtenidos los datos de las distintas variables de la planta (captura de CO₂, cantidad de ramas y hojas, iteraciones totales, crecimiento de altura total, concentración de nitratos, humedad y pH) a través de las fases anteriores, se utilizó el software SPSS Statistics 25 para analizarlos estadísticamente mediante una matriz de correlación; lo cual permitió determinar la relación entre las variables para posteriormente establecer que variables incluir en un modelo de regresión lineal en el que la variable dependiente fue la captura de CO₂ por parte de la planta de mandarina "Arrayana". (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 47)

En este párrafo se vislumbran componentes relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, así mismo se distinguen factores relacionados con la categoría conocer tecnológico y las subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima

Las estudiantes emplean software especializado como herramienta fundamental para el desarrollo del diseño experimental. El software SPSS Statistics 25, ayudó a las estudiantes a decidir que variables se deben tener presentes en el modelo de regresión lineal ² ya que este software permite analizar dichas variables mediante una matriz de correlación que éste elabora. En este proceso se evidencia el uso de métodos formales y herramientas tecnológicas, lo que conlleva a deducir que el conocer tecnológico es de gran relevancia en este asunto.

Para la definición de variables que se contemplaron en el modelo de regresión lineal, las estudiantes recopilaron toda la información relacionada con cada una de estas variables, en un instrumento diseñado para tal fin, esto significa que las estudiantes utilizaron herramientas como tablas, gráficos, matrices, entre otras, para determinar características de las variables definidas para el estudio del crecimiento de la planta. Estas características permitieron estipular el conjunto de variables pertinentes para el modelo de regresión lineal, es decir que tanto el conocer

² La regresión lineal múltiple trata de ajustar modelos lineales o linealizables entre una variable dependiente y más de una variables independientes. Montero Granados. R (2016): Modelos de regresión lineal múltiple. Documentos de Trabajo en Economía Aplicada. Universidad de Granada. España.

Extraído de http://www.ugr.es/~montero/matematicas/regresion_lineal.pdf

tecnológico como el conocer matemático son relevantes para la tarea de definición de variables. A continuación, se presenta el instrumento en el que las estudiantes registraron toda la información relacionada con cada una de las variables estudiadas.

Tabla 18. Recopilación de las variables de la mandarina "Arrayana".

Bloque	Edad (meses)	Nº Planta	Captura de CO ₂ acumulada	Iteraciones generadas	Iteraciones totales	Ramas y hojas acumuladas	Altura total	Tratamiento: Abono (gr)	Concentración de Nitratos	Humedad (%)	pH
A	15	1	1220,00	0	16	131071	76	0	7,5	20	6
		2	306,24	1	14	32767	91	45	-1,8	20	6
		3	4899,98	1	18	524287	86	35	2,9	10	6
		4	78399,80	7	22	8388607	79	40	2,5	10	6
		5	1224,99	1	16	131071	78	30	5,6	10	6
B	9	6	39199,90	9	21	4194303	80	45	7,1	10	6
		7	2449,98	5	17	262143	78	35	1,3	10	6
		8	78399,8	10	22	8388607	89	40	0,3	10	6
		9	38,27	0	11	4095	74	0	8,5	10	6
		10	156800	9	23	16777215	85	30	6,4	20	6
C	5	11	76,55	4	12	8191	65	35	2,9	20	6
		12	76,55	2	12	8191	65	45	41,8	30	6
		13	2,38	0	7	255	58	0	5,8	10	6
		14	9,56	2	9	1023	65	30	4,4	10	6
		15	9,56	0	9	1023	65	40	2,6	20	6

Nota: * Datos registrados de las variables por planta, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 73)

De la tabla anterior, se puede evidenciar la recolección de información de cada variable en el proceso llevado a cabo por las estudiantes durante el desarrollo del diseño experimental. Esto es un ejemplo de la implementación de la modelación puntual, la modelación extendida, métodos formales, herramientas tecnológicas y conocimientos específicos de la ingeniería, lo que permite afirmar que el conocer tecnológico y el conocer matemático representan componentes indispensables para las reflexiones realizadas por las estudiantes en torno a las variables que componen el fenómeno en estudio.

La implementación de herramientas tecnológicas es un factor fundamental en los procesos de investigación formativa, las estudiantes emplearon el software SPSS Statistics 25 para analizar las variables estadísticamente mediante una matriz de correlación que el SPSS les arrojó después de introducir los datos recolectados durante el desarrollo del diseño experimental. En esta matriz se evidencian elementos vinculados con la modelación tanto puntual como extendida ya que se vincula la matemática con la realidad, al igual que se identifican elementos relacionados con el uso de métodos formales y herramientas tecnológicas

Tabla 19. Matriz de correlación entre las variables de las plantas.

Variables de control		Correlaciones							
		Captura de CO ₂	Iteraciones totales	Ramas y hojas acumuladas	Altura total	Tratamiento	Concentración de Nitratos	Humedad	
Edad (meses)	Captura de CO ₂	Correlación	1,000	0,824	1,000	0,573	0,206	-0,100	-0,004
		Significación		0,000	0,000	0,032	0,480	0,733	0,990
	Iteraciones totales	Correlación	0,824	1,000	0,824	0,686	0,445	-0,024	-0,082
		Significación	0,000		0,000	0,007	0,111	0,936	0,781
	Ramas y hojas totales	Correlación	1,000	0,824	1,000	0,573	0,206	-0,100	-0,004
		Significación	0,000	0,000		0,032	0,480	0,733	0,990
	Altura total	Correlación	0,573	0,686	0,573	1,000	0,485	-0,218	-0,040
		Significación	0,032	0,007	0,032		0,079	0,453	0,893
	Tratamiento	Correlación	0,206	0,445	0,206	0,485	1,000	0,064	0,210
		Significación	0,480	0,111	0,480	0,079		0,827	0,471
	Concentración de Nitratos	Correlación	-0,100	-0,024	-0,100	-0,218	0,064	1,000	0,582
		Significación	0,733	0,936	0,733	0,453	0,827		0,029
	Humedad	Correlación	-0,004	-0,082	-0,004	-0,040	0,210	0,582	1,000
		Significación	0,990	0,781	0,990	0,893	0,471	0,029	

Nota: * Matriz de correlación elaborada en el software SPSS Statistics 25, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 74)

Para categorizar el grado de correlación entre las variables las estudiantes emplearon niveles de correlación donde se define el rango de cada una de estas, este rango de correlación les indicó a las estudiantes cuales variables tener en cuenta y cuales no, es decir, emplearon conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima mediante el uso de procesos de modelación, métodos formales y herramientas tecnológicas. Estos rangos de correlación se establecen y se categorizan de acuerdo con el color que lo representa de la siguiente manera:

Tabla 20. Niveles de correlación.

Rango de correlación	Significado
$r = 1$	Correlación Perfecta
$0,8 < r < 1$	Correlación Muy Alta
$0,6 < r < 0,8$	Correlación Alta
$0,4 < r < 0,6$	Correlación Moderada
$0,2 < r < 0,4$	Correlación Baja
$0 < r < 0,2$	Correlación Muy Baja
$r = 0$	Correlación Nula

Nota: * Colores establecidos para los niveles de correlación, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2020

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 74)

De acuerdo con la categorización del rango de correlación las estudiantes realizaron reflexiones en torno a la relevancia de las variables que se definen en el modelo de regresión lineal, como se evidencia cuando las estudiantes afirman que “la correlación muy alta de 0,824 entre captura de CO₂ e iteraciones totales, significa que existe una correlación lineal entre estas variables; es decir, a medida que se posee

una mayor cantidad de iteraciones, mayor será la captura de CO₂ por parte de la planta (González J., 2009)” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 75). Estas reflexiones son producto de la implementación de métodos formales, herramientas tecnológicas, procesos de modelación tanto puntual como extendida y el uso de conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, es decir que, a la luz de estas subcategorías, se evidencian las categorías conocer matemático y conocer tecnológico. De esta misma manera las estudiantes reflexionan ante las características de las variables manifestando que “Las correlaciones bajas y perfectas de la captura de CO₂ con respecto a las demás variables no se tuvieron en cuenta debido a que, por un lado, la correlación baja no es significativa porque no existe una relación lineal entre ellas; sin embargo, podrían tener una relación no lineal; por otro lado, la correlación perfecta de valor 1 entre captura de CO₂ y ramas y hojas acumuladas no puede incluirse en el modelo debido a que la fuerza de la relación es lineal (Minitab, 2019)” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 75). Por lo tanto, las variables que se tuvieron en cuenta para el modelo son iteraciones totales, altura total y tratamiento como lo expresan las estudiantes en el siguiente enunciado “De modo que las variables seleccionadas para incluir en el modelo de regresión lineal fueron: iteraciones totales, altura total (cm) y tratamiento” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 75).

Con la identificación de las variables más relevantes para el modelo de regresión lineal las estudiantes, utilizando el software especializado SPSS Statistics 25, lograron establecer dicho modelo el cual explica la captura de CO₂ por parte de la planta de mandarina arrayana mediante la determinación e interpretación de unos parámetros específicos que el software les arrojó. Estos parámetros son el parámetro R cuadrado, el cual establece el porcentaje en que el modelo explica el fenómeno, el parámetro ANOVA con un valor Sig. el cual permite afirmar si el modelo es válido o no en su totalidad y el parámetro coeficientes del modelo mediante los cuales se plantea dicho modelo de regresión lineal.

Lo anterior indica que tanto el conocer tecnológico como el conocer matemático se configuran como elementos que fomentan la reflexión en las estudiantes. Esto se evidencia cuando afirman que “se destaca el valor de R cuadrado de 0,598; el cual indica que el modelo explica un 59,8% la captura de CO₂, en otras palabras, la captura de CO₂ se explica en un 59,8% por las variables iteraciones totales, altura total (cm) y tratamiento (González J., 2009)” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 76). Los cálculos realizados para obtener el valor de R cuadrado muestran elementos de la modelación puntual y el uso de herramientas tecnológicas; la

interpretación que hacen a estos cálculos la determina la modelación extendida y los conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, Así mismo manifiestan que “*Dado que el valor de Sig. debe ser menor a 0,05, el resultado de Sig. del presente estudio se encuentra por debajo, siendo 0,015, lo que permite demostrar que al menos una de las variables es estadísticamente distinta de cero; por tanto, se puede afirmar que el modelo es válido en su conjunto (González J. , 2009)*” (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 76). Este enunciado evidencia que se trata de encontrar variables y modelos, lo cual se asocia a elementos de la modelación puntual; también se perciben elementos de la modelación extendida.

Fragmento 22: f22

La matriz de correlación (Tabla 19) de los datos registrados al final del estudio (Tabla 18), permitió concluir que las variables determinadas en la caracterización del suelo (pH, humedad y concentración de nitratos), no son significativas en la estimación de la captura de CO₂ porque presentaron una correlación muy baja con esta variable; por tal motivo se descartaron del modelo de regresión lineal. Las variables incluidas inicialmente en la regresión lineal fueron tratamiento, altura total e iteraciones totales, con correlaciones baja, moderada y muy alta, respectivamente, con la captura de CO₂ (Y); sin embargo, tras evaluar el valor de Sig. del modelo de regresión lineal obtenido en el software SPSS Statistics 25 (Tabla 23); solo la variable iteraciones (X₁) es considerada relevante para el modelo, de modo que el modelo de regresión lineal ajustado es $Y = 956,630 + 8949,214.X_1 + \varepsilon$ (Ecuación 9). (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, pp 79-80)

En este párrafo se vislumbran componentes relacionados con la categoría conocer matemático y las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, así mismo se distinguen factores relacionados con la categoría conocer tecnológico y las subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas, y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

Elaborar conclusiones y juicios de valor extraídos de instrumentos, como tablas y gráficos, requiere interpretación y análisis de dichos instrumentos, esto lleva a inferir que la modelación puntual, la modelación extendida, los conocimientos propios de la ingeniería y el uso de métodos formales y herramientas tecnológicas cumplen un papel fundamental para realizar conclusiones y tomar decisiones, esto se evidencia cuando las estudiantes afirman que “*La matriz de correlación (Tabla 19) de los datos*

registrados al final del estudio (Tabla 18), permitió concluir que las variables determinadas en la caracterización del suelo (pH, humedad y concentración de nitratos), no son significativas en la estimación de la captura de CO₂ porque presentaron una correlación muy baja con esta variable; por tal motivo se descartaron del modelo de regresión lineal” es decir, que las estudiantes mediante el conocer matemático y el conocer tecnológico establecieron criterios que permitieron discernir y decidir sobre las variables analizadas durante el diseño experimental y determinar su pertinencia en el modelo de regresión lineal, esto se reafirma cuando expresan que “Las variables incluidas inicialmente en la regresión lineal fueron tratamiento, altura total e iteraciones totales, con correlaciones baja, moderada y muy alta, respectivamente, con la captura de CO₂ (Y); sin embargo, tras evaluar el valor de Sig. del modelo de regresión lineal obtenido en el software SPSS Statistics 25 (Tabla 23); solo la variable iteraciones (X₁) es considerada relevante para el modelo”, en lo expuesto en los párrafos anteriores se identifica una reflexión caracterizada por el conocer matemático y tecnológico de las estudiantes, ya que se determinó cual es la variable más relevante para el modelo. Esto indica que las herramientas tecnológicas fueron relevantes en el proceso de modelación llevado a cabo por las estudiantes, ya que estas herramientas ayudaron a definir el modelo de regresión lineal, como se muestra a continuación “de modo que el modelo de regresión lineal ajustado es $Y = 956,630 + 8949,214X_1 + \varepsilon$ (Ecuación 9)”

Fragmento 23: f23

El estudio de la captura de dióxido de carbono (CO₂) de la planta de mandarina “Arrayana” desde una perspectiva matemática y geométrica amplía el conocimiento de los servicios ecosistémicos brindados por los árboles; específicamente de su capacidad de actuar como sumidero de carbono y de ser un mecanismo de adaptación al calentamiento global, problemática de interés mundial ocasionada por el incremento de GEI en la atmósfera; entre ellos, el CO₂. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 78)

La categoría conocer matemático, con las subcategorías modelación puntual y modelación extendida, y la categoría conocer tecnológico, con la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, tienen una gran incidencia en este párrafo, así mismo, la categoría dimensión ética y normativa representa un componente importante en este enunciado. En primer lugar, se identifica una relación entre el uso de conocimientos específicos de la ingeniería y conceptos propios de la matemática cuando las estudiantes articulan que “El estudio

de la captura de dióxido de carbono (CO₂) de la planta de mandarina “Arrayana” desde una perspectiva matemática y geométrica amplía el conocimiento de los servicios ecosistémicos brindados por los árboles”. En segundo lugar, se identifican elementos relacionados con los propósitos y fines colectivos ya que las estudiantes reconocen una problemática de interés mundial y se hace visible cuando afirman que “específicamente de su capacidad de actuar como sumidero de carbono y de ser un mecanismo de adaptación al calentamiento global, problemática de interés mundial ocasionada por el incremento de GEI en la atmósfera; entre ellos, el CO₂”. De acuerdo a lo anterior expuesto y los planteamientos de (Skovsmose 1999), “el conocimiento reflexivo se relaciona con la competencia necesaria para reaccionar como ciudadanos críticos en la sociedad de hoy en día” (p. 111), se evidencia una reflexión caracterizada por el sentido de la responsabilidad social debido a la preocupación que muestran las estudiantes por una problemática de corte mundial relacionada con el cambio climático.

Fragmento 24: f24

Para estimar la cantidad de dióxido de carbono capturado por parte de una planta de mandarina “Arrayana”; el trabajo de campo fue esencial debido a que permitió encontrar la relación existente entre cada proceso iterativo y el tiempo de repetición del patrón de crecimiento y de este modo, relacionar los L-sistemas (fractales) con el modelo de crecimiento exponencial.

El análisis de este apartado evidencia componentes relacionados con las categorías conocer matemático con sus subcategorías modelación puntual y modelación extendida, al igual que se reconocen elementos respectivos con la categoría conocer tecnológico con sus subcategorías uso de métodos formales y herramientas tecnológicas y, conocer específico para la obtención del fenómeno en forma óptima.

Las estudiantes consideran que sin el trabajo de campo no hubiera sido posible encontrar la relación existente entre cada proceso iterativo y el tiempo de repetición, lo cual las lleva a reflexionar sobre la importancia de los procesos de observación estructurada, toma de datos y desarrollo del diseño experimental. Esto se evidencia cuando afirman que “*Para estimar la cantidad de dióxido de carbono capturado por parte de una planta de mandarina “Arrayana”; el trabajo de campo fue esencial debido a que permitió encontrar la relación existente entre cada proceso iterativo y el tiempo de repetición del patrón de crecimiento*”. Lo que refleja una reflexión caracterizada por

conocer tecnológico debido a que el trabajo de campo requiere uso de métodos formales y herramientas tecnológicas, al igual que requiere conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima. De igual forma se identifica una reflexión en caracterizada por el conocer matemático de las estudiantes al establecer relaciones entre conceptos de las matemáticas con fenómenos naturales, como lo establecen las estudiantes al exponer que “y de este modo, relacionar los L-sistemas (fractales) con el modelo de crecimiento exponencial”

Fragmento 25: f25

Tabla 2. *Normatividad legal.*

Norma	Descripción
Constitución política de Colombia 1991 “artículo 79”	Derecho a gozar de un medio ambiente sano.
Decreto 298 de 2016	Por el cual se establece la organización y funcionamiento del Sistema Nacional de Cambio Climático y se dictan otras disposiciones.
Resolución 0650 de 2010	Por la cual se adopta el Protocolo para el Monitoreo y Seguimiento de la Calidad del Aire.
Resolución 2154 de 2010	Por la cual se ajusta el Protocolo para el Monitoreo y Seguimiento de la Calidad del Aire adoptado a través de la Resolución 650 de 2010 y se adoptan otras disposiciones.
Resolución 2254 de 2017	Por la cual se adopta la norma de calidad de aire ambiente y se dictan otras disposiciones.

Nota: * Descripción de la normatividad que aplica para el proyecto, por María Gutiérrez. & María Gutiérrez, 2019.

(Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 40).

En este párrafo se vislumbran componentes relacionados con la categoría dimensión ética y normativa y la subcategoría práctica normativa, así mismo se

distinguen factores relacionados con la categoría conocer tecnológico y la subcategoría conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima.

De la tabla anterior se identifica la existencia de leyes y normas que tienen que ver con la regulación de la calidad del aire y el cambio climático; es decir, se evidencia que las estudiantes poseen un conocer normativo porque traen a colación la norma para el desarrollo de su trabajo y a la vez subyace la dimensión ética en el ejercicio de reconocer la importancia de estas frente a la toma de decisiones para el desarrollo de su trabajo. En términos de (Skovsmose 1999) “el conocer reflexivo también se refiere a normas y valores” se evidencia una reflexión caracterizada por la dimensión ética y normativa, ya que se tienen en cuenta las disposiciones legislativas para abordar el problema.

RESULTADOS DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN

Los resultados que se presentan en este capítulo se sistematizaron en tres apartados, que corresponden a las fases experimentadas por las estudiantes en el proceso de modelación matemática. Estas fases se deducen del análisis desarrollado en el capítulo anterior, pues este proceso de análisis permitió identificar grupos de fragmentos que daban cuenta de distintas fases experimentadas por las estudiantes en la modelación matemática y de distintas expresiones y características del conocer reflexivo al interior de estas fases.

Conocer reflexivo develado en la fase uno del proceso de modelación

En la primera fase de la práctica de modelación matemática experimentada por las estudiantes, la cual consiste en identificar el fenómeno a estudiar, acopio de información y recolección de datos, se evidencia que las estudiantes ponen en juego elementos relacionados con las tres categorías de análisis propuestas en este trabajo, el conocer matemático, el conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa.

Respecto a la dimensión ética y normativa las estudiantes reconocen una problemática global, como lo es el aumento del CO₂ en la atmósfera y muestran interés por abordarla mediante un proceso de investigación formativa, aquí se reconoce una intención de aportar a los propósitos y fines colectivos para mejorar la calidad de vida de los individuos de una comunidad. En este sentido, las estudiantes reconocen intenciones emprendidas por diversas entidades que han resultado parte de su estamento legislativo frente a esta problemática y las toman en cuenta para sus propósitos y fines, como refiere Mantilla (2016) la formación en normatividad es de suma importancia ya que “ la norma regula el actuar social de todo individuo en una comunidad; y el ingeniero ambiental como ciudadano de una sociedad, debe conocerla, obedecerla y hacer uso de ellas y de mecanismos de participación ciudadana” (p. 1), lo que indica que una de las características de las reflexiones realizadas por las estudiantes responde a la dimensión ética y normativa, es decir, se identifican relaciones caracterizadas por su conocer normativo y su formación ética.

Respecto al conocer matemático las estudiantes reconocen que por medio de conceptos propios de la matemática es posible entender el fenómeno del incremento del CO₂ atmosférico y determinan que mediante la relación entre L-sistemas y ecuaciones diferenciales podrían abordar la problemática relacionada con la captura

de CO₂ procesado específicamente por plantas de mandarina arrayana, teniendo en cuenta que el conocer matemático “se refiere a la competencia que comúnmente llamamos habilidades matemáticas, incluidas las competencias para reproducir pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones” (Skovsmose, 1999, p. 111) lo que muestra que el conocimiento matemático de las estudiantes es una de las características que se evidencian en las reflexiones realizadas por ellas. El conocer matemático que se ponen en juego en su práctica de modelación se relaciona con la geometría y el cálculo.

En relación con el conocimiento tecnológico las estudiantes emplean saberes propios de la ingeniería y se remiten a estudios previos que aportan a la consecución de su objetivo, el cual se aprecia en el lenguaje empleado al mencionar y reflexionar ante las formas de captura de CO₂ donde enuncian que un mecanismo para reducir y mitigar naturalmente el CO₂ atmosférico es a través de su captura por parte de los organismos autótrofos, por lo tanto se evidencia otra característica de la reflexiones realizadas por las estudiantes las cuales se enfocan en su conocer teórico profesional, es decir, al afirmar que los organismos autótrofos son una herramienta para la captura de CO₂ atmosférico da lugar a reflexiones caracterizadas por su conocer tecnológico, ya que evidencia la habilidad de aplicar las matemáticas y los métodos formales para el logro de fines tecnológicos, esto es lo que define Skovsmose (1999) como conocer tecnológico.

Las características del conocer reflexivo que emergen en esta fase de modelación matemática como resultado de esta investigación son:

Reconocimiento de su práctica profesional como práctica situada y responsable: el reconocimiento de la práctica profesional de la ingeniería ambiental como una práctica que atiende a problemas de interés mundial relacionados con la transformación de procesos que afectan las condiciones medioambientales y van en detrimento de la conservación el planeta por procesos que procuran la sostenibilidad y el cuidado.

Identificación de su práctica como práctica normada: el reconocimiento de las normas que regulan y determinan los alcances de las técnicas, procesos y procedimientos propias de la práctica de la ingeniería ambiental y la responsabilidad de sus consecuencias.

Identificación de un abordaje interdisciplinar para los problemas que enfrenta su práctica profesional: el reconocimiento de la necesidad de conocimiento matemático y de conocimientos interdisciplinarios relacionados con la biología, química, física, entre otras, que se constituye como conocer tecnológico para la práctica de la ingeniería ambiental.

Conocer reflexivo develado en la fase dos del proceso de modelación

En la segunda fase de la práctica de modelación matemática vivenciada por las estudiantes, la cual se centra en procesos de modelación tanto puntual como extendida, se evidencia que ponen en juego elementos relacionados con dos categorías de análisis propuestas en este trabajo, el conocer matemático y el conocer tecnológico.

Respecto al conocer matemático las estudiantes se remiten a conceptos y conocimientos propios de la matemática como las propiedades de la igualdad, de los exponentes, los logaritmos, la factorización, el concepto de derivada e integral definida, la técnica de separación de variables para determinar la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden; con el fin de abordar la problemática del aumento del CO₂ atmosférico. De acuerdo con Skovsmose (1999) se consideran procesos de modelación puntual a la “identificación de un problema, desarrollo de un sistema, matematización, algoritmización e interpretación, que incluye la puesta en práctica” (p. 116). Por lo tanto, el ejercicio de modelación desarrollado por las estudiantes refleja elementos de la modelación puntual y la modelación extendida. La modelación extendida se reflejó en expresiones como “La Gráfica 1 representa los datos registrados en la Tabla 9 y permite observar que el crecimiento en la cantidad de ramas y hojas es de tipo exponencial”, que se muestra en **F14**, mediante el cual se distinguen los juicios que las estudiantes elaboran sobre los datos, por ejemplo, a través de procesos asociados a la modelación puntual las estudiantes diseñan y elaboran tablas y graficas con los datos que obtienen al seguir detalladamente el crecimiento de las 15 plantas de mandarina sembradas para el diseño experimental, luego de analizar dichos datos, las estudiantes establecen relaciones entre estos datos que les permite afirmar que el crecimiento en la cantidad de ramas y hojas es de tipo exponencial, afirmación que evidencia la modelación extendida.

En relación con el conocer tecnológico, las estudiantes implementan estos procesos en el desarrollo del diseño experimental para modelar el crecimiento de la planta de mandarina arrayana, determinar el número de ramas y hojas en cualquier

instante de tiempo y estimar la cantidad de CO₂ que esta procesa. Para lograrlo las estudiantes acuden a la observación estructurada como herramienta que permite identificar patrones y regularidades que les ayudan a establecer características del crecimiento de la planta. Lo anterior se traduce en un conjunto de variables a analizar en el desarrollo de ésta, las cuales se definen como la variable que detalla la aplicación de tratamientos con abonos, la variable que se relaciona con la humedad del suelo y los nitratos, la variable altura, la variable que establece el número de ramas y hojas que desarrolla, realizando registros periódicos sobre la altura, sobre el número de iteraciones que esta va desarrollando.

De igual manera, se apoyan en herramientas tecnológicas que facilitan los cálculos, los análisis, el diseño de tablas y gráficas, ayudan en el proceso del planteamiento del modelo que describe el crecimiento de la planta y el modelo de regresión lineal que determina una aproximación a la cantidad de CO₂ procesado por la planta, es decir, las estudiantes ponen en juego un conglomerado de conocimientos de la matemática y conocimientos específicos de la ingeniería, como los relacionados anteriormente, para lograr una interpretación y análisis del asunto en estudio ya que “en el tipo de modelaje extendido, las matemáticas se encuentran imbuidas en las partes de nuestro sistema conceptual básico para manejar los asuntos sociales” (Skovsmose, 1999. p. 113).

Por lo anterior en esta segunda fase de práctica de modelación se identifican reflexiones con características de la modelación puntual y extendida y reflexiones relacionadas con el uso de métodos formales, herramientas tecnológicas y conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, en otras palabras se identifican reflexiones con características relacionadas con el conocer teórico matemático de las estudiantes y reflexiones con características relacionadas con el conocer tecnológico profesional.

Las características del conocer reflexivo que emergen en esta fase de modelación matemática como resultado de esta investigación son:

Identificación de la relevancia de actividades relacionadas con la sistematización, matematización, algoritmación e interpretación en los procesos que se desarrollan dentro del actuar profesional de la ingeniería ambiental: el reconocimiento de procesos de modelación matemática como herramienta para la comprensión, entendimiento y abordaje de situaciones problemáticas que afectan el desarrollo

sostenible de la sociedad e involucran aspectos de la ingeniería ambiental

Reconocimiento de su entorno como escenario apropiado para desarrollar procesos de investigación enfocados en afrontar problemáticas de la ingeniería ambiental: el reconocimiento del carácter cambiante de las sociedades y de las implicaciones que el accionar del ingeniero ambiental genera en dichos cambios

Reconocimiento de la observación estructurada como herramienta para el abordaje de problemáticas ambientales: el reconocimiento de la observación estructurada como herramienta que fortalece procesos de determinación de regularidades y patrones que orientan el entendimiento y análisis de situaciones ambientales.

Conocer reflexivo develado en la fase tres del proceso de modelación

La tercera y última fase de la práctica de modelación matemática experimentada por las estudiantes, da paso a elaborar juicios de valor, establecer conclusiones y realizar reflexiones frente al ejercicio investigativo. De manera que, las estudiantes emplean componentes del conocer matemático, el conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa.

Respecto al conocimiento tecnológico y el conocimiento matemático, el proceso llevado a cabo durante el desarrollo del diseño experimental permite a las estudiantes hacer reflexiones en torno al crecimiento de las plantas ya que encuentran grandes diferencias en cada una de estas, es decir, establecen patrones y regularidades, realizan comparaciones, abstracciones y juicios de valor que describen dicho crecimiento de acuerdo con los registros realizados en los instrumentos diseñados, los cuales son una herramienta fundamental en el análisis de cada variable definida en el fenómeno. Esto evidencia reflexiones que se caracterizan por la implementación de métodos formales como la recolección, interpretación y análisis de datos, al igual que se perciben reflexiones en torno al uso de herramientas tecnológicas como tablas, gráficas y software especializado (SPSS Statistic 25), el cual utilizan para facilitar el desarrollo del diseño experimental y la consecución del objetivo, pues mediante este software las estudiantes obtienen la matriz de correlación que les permite reflexionar

sobre la relevancia de contemplar en el modelo de regresión lineal, las variables analizadas durante el diseño experimental, lo que implica conocimientos propios tanto de la matemática como de la ingeniería.

Lo anterior deja en evidencia reflexiones que se caracterizan por el uso de métodos formales, herramientas tecnológicas, conocimiento matemático y conocimiento tecnológico provenientes de hacer inferencias, comparaciones y establecer particularidades sobre el crecimiento de cada una de las plantas contempladas en el estudio.

De igual manera, al interpretar la matriz de correlación para determinar la relevancia de las variables en el modelo de regresión lineal dado por el software SPSS, se identifican reflexiones que elaboran las estudiantes mediante operaciones algebraicas en las que se aplican propiedades de la igualdad, propiedades de los números reales, se realizan cálculos y se resuelven ecuaciones con el fin de dar cuenta de las características del crecimiento de la planta. Para lograr lo anterior, emplean operaciones aritméticas y conceptos matemáticos; un claro ejemplo es el uso del promedio aritmético, que les permite concluir que en promedio una planta de mandarina arrayana tarda 26,8 días en realizar una iteración. Así mismo, a través del uso de herramientas tecnológicas, tablas y gráficas, los conocimientos específicos para la obtención del fenómeno en forma óptima, la modelación puntual y la modelación extendida, las estudiantes forjan reflexiones en torno al crecimiento de la planta el cual determinan de forma exponencial. De esta manera se aprecian reflexiones caracterizadas por el conocimiento matemático y el conocimiento tecnológico.

Así mismo las estudiantes reflexionan ante la metodología empleada por ellas para determinar una estimación a la cantidad de CO₂ procesado por la planta de mandarina, expresando que es una metodología innovadora y bondadosa con la planta ya que no requiere la tala de esta, a diferencia de otras metodologías que si lo requieren.

Lo anterior refleja elementos significativos del conocer reflexivo debido a que se evidencia el respeto por los organismos que son objeto de estudio e investigación en la ingeniería, al igual que manifiestan que es una metodología que “es valiosa tanto para otras investigaciones como para las instituciones con intereses ambientales, sobre posibles escenarios de reducción del CO₂ atmosférico entre diferentes especies vegetales”. (Gutiérrez & Gutiérrez, 2020, p. 81)

Sumado a esto, la normatividad es un factor importante para el desarrollo de las comunidades; el conocimiento, aplicación y el respeto de la legislación es un factor importante por promover en la formación de los futuros profesionales ya que estas regulan el impacto que genera la acción humana. En el proceso que se analiza se aprecia que las estudiantes tienen conocimiento y contemplan algunas de las normas, leyes, decretos y otras disposiciones que han dictado diferentes entidades y lo toman en cuenta para el desarrollo de su trabajo. Por tal motivo, se infiere que las reflexiones elaboradas por las estudiantes están supeditadas a las disposiciones legales determinadas por las instancias idóneas.

Las características del conocer reflexivo que emergen en esta fase de modelación matemática como resultado de esta investigación son:

Reconocimiento de la importancia de la implementación de diseños experimentales y herramientas tecnológicas para abordar problemas ambientales: el reconocimiento del diseño experimental y el uso de herramientas tecnológicas para desarrollar sistemas relacionados con los procesos que afectan la sostenibilidad y al medio ambiente.

Reconocimiento de la naturaleza en todo su esplendor como elemento activo y vital para el desarrollo sostenible de la sociedad: el reconocimiento de los seres vivos como parte fundamental en el desarrollo sostenible para evitar el deterioro de los recursos naturales y fortalecer la relación ser humano-medio ambiente

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones sobre las características del conocer reflexivo develado tras el análisis de las diferentes fases de la modelación que experimentaron las estudiantes abordando un problema propio de su profesión. Estas conclusiones están orientadas por el objetivo general y los objetivos específicos de este estudio.

En relación con el objetivo específico “Identificar las categorías que permitan analizar la información proveniente del corpus documental de esta investigación, enmarcados en la teoría de la Educación Matemática Crítica” se concluye que a través del estudio y una lectura analítica de los elementos propuestos por Skovsmose (1999)

desde una perspectiva de la educación matemática crítica, en la que se diferencian distintos tipos de conocer relacionados con el conocer reflexivo, fue posible establecer un sistema categorial en el que se pudiera identificar la forma en la que el conocer reflexivo tiene un componente de conocimiento matemático, un componente de conocimiento tecnológico y un componente asociado a la dimensión ética y normativa. Estos componentes se diferencian por el tipo de modelación matemática que se procura en la práctica del profesional –modelación puntual o modelación extendida–; también se diferencian por el tipo de herramientas y conocimiento tecnológico que pone en juego en su práctica profesional el ingeniero y el tipo de normas que regulan su quehacer profesional de tal manera que se pueda garantizar la sostenibilidad y procesos responsables en el marco de la ingeniería ambiental.

En cumplimiento del objetivo específico “Establecer conexiones entre los análisis realizados por las estudiantes en el proceso de modelación puntual (al relacionar las ecuaciones diferenciales y los L-sistemas) y los juicios provenientes de la modelación extendida (que implican la responsabilidad social que les compete como futuras ingenieras), de tal modo que aporte a la caracterización del conocer reflexivo exhibido por las estudiantes”. En el análisis desarrollado en el capítulo *Proceso de análisis* se fueron estableciendo las conexiones relacionadas con las acciones de modelación puntual de las estudiantes y los juicios que caracterizan el proceso de modelación extendida vivido por ellas, esto se evidencia en la medida que fue posible relacionar cada uno de los fragmentos seleccionados con el sistema categorial, que daba cuenta de las tres dimensiones que componen el conocer reflexivo (conocer matemático, conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa). Estas dimensiones se evidenciaron, unas en el proceso de modelación puntual, y otras en el de modelación extendida en el que las estudiantes elaboraban juicios en relación con sus prácticas profesionales.

Respecto al objetivo “Relacionar categorías previas que ofrecen los marcos de referencias de esta investigación y categorías que posiblemente emerjan de los datos para identificar aspectos del conocer reflexivo construido por dos estudiantes de ingeniería en cada fase del proceso de modelación de un problema propio de su profesión”, en el capítulo titulado *Resultados del proceso de investigación*, se realizó un ejercicio analítico de relacionar las características del conocer reflexivo con cada una de las fases identificadas en el proceso de análisis. Así fue posible develar las características del conocer reflexivo que emergen en cada fase. En la fase uno se reconocieron características asociadas con: El reconocimiento de su práctica

profesional como práctica situada y responsable; la Identificación de su práctica como práctica normada; y, la Identificación de un abordaje interdisciplinar para los problemas que enfrenta su práctica profesional. En relación con la fase dos se identificaron características relacionadas con: la Identificación de la relevancia de actividades relacionadas con la sistematización, matematización, algoritmación e interpretación en los procesos que se desarrollan dentro del actuar profesional de la ingeniería ambiental; el reconocimiento de su entorno como escenario apropiado para desarrollar procesos de investigación enfocados en afrontar problemáticas de la ingeniería ambiental; y, el reconocimiento de la observación estructurada como herramienta para el abordaje de problemáticas ambientales. En relación con la fase tres se determinaron características del conocer reflexivo como: el reconocimiento de la importancia de la implementación de diseños experimentales y herramientas tecnológicas para abordar problemas ambientales; y, el reconocimiento de la naturaleza en todo su esplendor como elemento activo y vital para el desarrollo sostenible de la sociedad.

Referente al objetivo general de esta investigación, que pretende “Caracterizar los componentes del conocer reflexivo construido por estudiantes de ingeniería ambiental, en una experiencia de modelación matemática asociada a procesos investigativos propios de la profesión”, en esta investigación se concluye que el conocer reflexivo que se desarrolla a partir de las interacciones entre conocer matemático, conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa asociada a la práctica profesional de estas estudiantes de Ingeniería Ambiental está caracterizado por: (a) El reconocimiento de una práctica situada y responsable; (b) El reconocimiento de la práctica profesional como una práctica normada; (c) El reconocimiento del papel de un abordaje interdisciplinar para los problemas propios de la ingeniería; (d) La Identificación de la relevancia de actividades relacionadas con la sistematización, matematización, algoritmación e interpretación en los procesos que se desarrollan dentro del actuar profesional de la ingeniería ambiental; (e) El reconocimiento del entorno como escenario apropiado para desarrollar procesos de investigación mediados por la modelación matemática y enfocados en afrontar problemáticas de la ingeniería ambiental; (f) El reconocimiento de la observación estructurada como herramienta para el abordaje de problemáticas ambientales; (g) el reconocimiento de la importancia de la implementación de diseños experimentales y herramientas tecnológicas para abordar problemas ambientales; y, (h) El reconocimiento de la naturaleza en todo su esplendor como elemento activo y vital para el desarrollo sostenible de la sociedad. El siguiente diagrama (Figura 3) ilustra la conclusión



Figura 3. Características del conocer reflexivo producto del proceso de modelación matemática en la formación de ingenieros ambientales

El proceso desarrollado por las estudiantes permitió desentrañar características de las reflexiones realizadas durante las prácticas de modelación mediante la descripción, explicación e interpretación de los juicios de valor que construyeron a lo largo del texto analizado, permitiendo así precisar una caracterización del conocer reflexivo. En este sentido, es posible plantear que a partir de las relaciones entre el conocer matemático, el conocer tecnológico y la dimensión ética y normativa que ponen en juego las estudiantes en una práctica de modelación matemática, que les permitió abordar un problema de su profesión, las estudiantes lograron el reconocimiento de las consecuencias que tiene su accionar como individuo de una comunidad y como profesional de la ingeniería ambiental. Las estudiantes en su proceso de modelación dieron cuenta de cómo estos tipos de conocer se relacionan para dar paso al conocer reflexivo, ya que sin esta interacción es imposible lograr una comprensión del fenómeno y asumir una actitud responsable frente a él como profesionales.

El desarrollo de este ejercicio investigativo aportó significativamente a la formación del investigador en procesos propios de la investigación cualitativa y del

método deductivo para la investigación y además fortaleció los procesos de depuración, codificación y categorización de la información.

Por otra parte, en relación con los antecedentes empíricos de esta investigación, el investigador como profesor en ejercicio reconoce que la propuesta implementada en el curso de Ecuaciones Diferenciales aportó en gran medida a los procesos de formación matemática de ingenieros ambientales desde la perspectiva de un conocimiento matemático situado en el contexto de su profesión, fortaleciendo especialmente conceptos relacionados con el modelamiento de problemas. Este tipo de práctica contribuyó en el proceso vivido por las estudiantes en la experiencia de investigación formativa basada en la modelación matemática, reflejándose de esta manera, una aproximación al conocimiento reflexivo mediante la interacción entre el conocimiento matemático y el conocimiento tecnológico. Además, se reconoce que en las prácticas de modelación matemática puntual y extendida favorecidas en la experiencia de investigación formativa sobre el crecimiento de una planta de mandarina arrayana, se pone en relación un conocimiento tecnológico, un conocimiento matemático, la dimensión ética y normativa que dan lugar a un metaconocimiento, que se denomina conocimiento reflexivo, siguiendo las ideas expuestas por Skovsmose (1999).

REFERENCIAS

- Alonso, N. I. (2017). *Estudio exploratorio sobre la importancia de la matemática para la carrera de ingeniería civil en la universidad del oriente*. Cuba: Revista electrónica formación y calidad educativa.
- Beltrón, L. H. (2019). *Competencia modelación matemática: concepciones y situación diagnóstica en carreras de ingeniería*. Ecuador: Universidad Técnica de Manabí.
- Brito, M., Aleman, I., Fraga, E., Para, J., & Arias, r. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14.
- Bustos. A, Bustos. G, Novoa. Y. (2013). *Propuesta de ambientes de aprendizaje para la promoción de la modelación matemática desde la perspectiva crítica*. Bogotá, Colombia: Revista educación científica y tecnológica.
- Camelo, D. V. (2018). *Revista latinoamericana de Etnomatemática*. Colombia: Universidad de Nariño.
- Cañón, J. (2006). *La agenda interna para la formación de ingenieros*. Revista de educación en ingeniería. (pp. 50-64). Asociación Colombiana de facultades de ingeniería.
- Capote, G., Rizo, N., & Bravo, G. (2016). *La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria*. (U. d. Cuba, Ed.) Revista Universidad y Sociedad.
- Díaz, M. (2018). *Modelación matemática en la formación inicial de profesores*. Chile: Universidad Austral de Chile.
- Donoso, M., & Rodriguez, E. (2007). *Calidad y educación superior: Desafíos en la formación de ingenieros del siglo XXI*. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 15.

- Duque, M., Gauthier, A., Gómez, R., Loguerrero, J., & Pinilla, A. (1999). *Formación de ingenieros para la innovación y el desarrollo tecnológico en Colombia*. Universidad de los Andes, Facultad de ingeniería. Bogotá: Corporación CIDE.
- Gaete, R. (2015). *El concepto de responsabilidad social universitaria desde la perspectiva de la alta dirección*. Cali. Universidad del Valle. Cuadernos de administración. 53.
- Gutiérrez, M. & Gutiérrez, M. (2020). *Estimación del dióxido de carbono (CO₂) capturado por biomasa aérea de la mandarina "arrayana" mediante la relación: I-sistemas y ecuaciones diferenciales*. Villavicencio: Universidad Santo Tomás.
- Hernandez, A. (2015). *Enriquecimiento de la formación ética y crítica de los ingenieros ambientales del instituto tecnológico Celaya*. Tesis de maestría, Universidad de Guadalajara, Ciencias Ambientales, Zapopan.
- Ibarra, D. (2014). *Complejidad ambiental en la formación de ingenieros ambientales*. *Encuentro Internacional de Educación en Ingeniería*. Cartagena de Indias: Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería ACOFI.
- Mancera, G. (2020). *Conocer reflexivo en contextos de modelación matemática, desde una perspectiva socio crítica*. Brasil: Universidad federal de Minas Gerais.
- Mancera, G, Camelo, F, Salazar, C, García, G. (2014). *Aspectos políticos y Críticos en las prácticas de modelación matemática escolar*. Bogotá, Colombia: I Encuentro Distrital de Educación Matemática.
- Mantilla, N. F. (2016). *Enseñanza-aprendizaje de normatividad en procesos de formación de ingenieros ambientales*. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga: Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería ACOFI.
- Márquez, C. G. (2019). *Evaluación del desarrollo de competencias a partir de la modelación matemática*. Colombia: Revista ingenierías USBMed.

- Orjuela, C., Rojas, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2011). Reglas y Símbolos con L-sistemas. *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 385-395). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Plaza, L. F. (Marzo de 2017). Modelación matemática en ingeniería. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*.
- Quiroz, F. H. (2017). *Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural*. Colombia: Revista colombiana de educación.
- Rondón, M. (2018). *La modelación matemática como estrategia de investigación de futuros licenciados*. Colombia: Universidad del Atlántico.
- Salazar C, Mancera G, Camelo F, Perilla W. (2017). *Una propuesta para el desarrollo de prácticas pedagógicas de modelación matemática en la perspectiva socio crítica*. Bogotá, Colombia: IV Encuentro distrital de educación matemática.
- Sarmiento, E. A. (2020). *La modelación matemática: un análisis de los planteamientos en documentos curriculares colombianos*. Colombia: Revista espacios.
- Serna, E. (2020). *Revolución en la formación y la capacitación para el siglo XXI*. Colombia: Instituto antioqueño de investigación.
- Serna, E. & Serna, A. (2015). Crisis de la ingeniería en Colombia – Estado de la cuestión. Cali. Universidad del Valle. Facultad de ingeniería. Ingeniería y competitividad. 1.
- Sharhorodska, A. A. (2018). *Las matemáticas y la formación del ingeniero, como una relación simbiótica*. Perú: Revista referencia pedagógica.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

- Skovsmose, O. & Valero, p. (2012). *Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente, Universidad de los Andes.
- Sousa, V. y. (2019). *Un panorama de investigaciones sobre modelación matemática en Colombia y Brasil*. Brasil: Revista da sociedade Brasileira de educação matemática.
- Velázquez, D. (2016). *Ética profesional y responsabilidad social universitaria, Universidad, Sociedad y Sujeto*. Fondo editorial Luis Amigó.
- Vera, W. d. (2003). *Geometría Fractal y Geometría Euclídea*. *Revista de Educación y Pedagogía*, 85-91.
- Villa, L. P. (2019). *Obstáculos detectados en la formación matemática de ingenieros, una revisión de literatura*. Colombia: Universidad católica del norte.
- Villa, M. P. (2016). *Interacciones y contribuciones, forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática*. Colombia: Revista actualidades investigativas en modelación.
- Zill, D. G. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Santa Fe, México: CENGAGE learning.