



Maestría en
Docencia de la
Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Diseño de dos talleres para la formación de profesores: el Teorema de Pitágoras a partir del
método de Perigal

Autora

Daisy Estela Mayeregger Vera

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, D.C.

2024



Maestría en
Docencia de la
Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Diseño de dos talleres para la formación de profesores: el Teorema de Pitágoras a partir del
método de Perigal

Autora

Daisy Estela Mayeregger Vera

Asesora

Mg. Myriam Sofía Rodríguez Garzón

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, D.C.

2024

Dedicatoria

A mi país Paraguay

A mis padres

A mi hija María Guadalupe y nietos Gael y Renato

A mi familia y amigos

Agradecimientos

A mi Dios Todopoderoso y a la Virgen que me han acompañado y ayudado.

A mi querido país Paraguay por haberme dado esta oportunidad para estudiar y mejorar profesionalmente.

Al Ministerio de Educación y Ciencias por todo su apoyo y acompañamiento.

Al Programa Nacional de Becas de Posgrados en el Exterior “Don Carlos Antonio López” (BECAL), por hacer un sueño realidad.

A la Universidad Pedagógica Nacional, Directivos, Coordinadores y Docentes.

A mi apreciada directora del Trabajo de Grado Mg. Myriam Sofía Rodríguez Garzón.

A mi familia y amigos por estar siempre alentándome y dándome fuerzas para seguir.

A todos aquellos que de una u otra forma contribuyeron para que éste trabajo se hiciera realidad.

Tabla de contenido

Introducción	1
1 Preliminares.....	4
1.1. Inquietud pedagógica	4
1.2. Justificación.....	9
1.3. Objetivos	13
1.3.1. Objetivo general	13
1.3.2. Objetivos específicos.....	13
2. Antecedentes	14
2.1. Formación del profesor de Matemáticas	14
2.2. Integración del conocimiento de contenido y conocimiento tecnológico: el modelo TPACK	17
2.3. El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: el software GeoGebra	18
3. Referentes conceptuales	21
3.1 Marco conceptual	21
3.1.1 Marco TPACK	21
3.1.2. El software dinámico GeoGebra	26
3.1.3. Procesos cognitivos de la actividad geométrica	28
3.2. Marco Matemático	32
3.2.1. Teorema de Pitágoras	32
4. Aproximación metodológica.....	44
4.1. Contexto en el que se implementaran las tareas.....	45
4.2. Estrategia para el diseño.....	46
4.2.1. Descripción general y alcance	46
5. Resultados	52
5.1. Taller 1.....	52
5.2. Taller 2.....	57
6. Consideraciones finales	65
6.1. Conclusiones asociadas a los objetivos general y específicos	65
6.2. Aporte a la formación de la autora	67
Referencias	69

Lista de figuras

Figura 1 Resultados desempeño estudiantes paraguayos PISA 2022.	8
Figura 2 El marco TPACK y sus saberes que lo componen.....	23
Figura 3 Ángulos externos de un triángulo rectángulo	34
Figura 4 Mapa conceptual. Triángulo rectángulo.	36
Figura 5 Mapa Conceptual. Teorema de Pitágoras.	37

Lista de tablas

Tabla 1 La relación entre la medida de los lados del triángulo y su ángulo recto	35
Tabla 2 Proceso de construcción formal de la demostración de Perigal.	38
Tabla 3 Proceso de construcción de la demostración de Perigal.	40
Tabla 4 Demostraciones de Teoremas	41
Tabla 5 Demostración según el método de Perigal.	42
Tabla 6 Formato de taller según Cano (2012).	50
Tabla 7 Los conocimientos sobre el contenido y conocimientos tecnológicos.	63
Tabla 8 Categorías del TPACK.....	64

Introducción

Este trabajo de grado se desarrolla en el marco del convenio entre el Ministerio de Educación de Paraguay y la Universidad Pedagógica Nacional, por medio del Programa Nacional de Becas de Postgrado para el Fortalecimiento de la Investigación, Innovación y Educación “Don Carlos Antonio López”, correspondiente a la cohorte BECAL Paraguay 2024.

Este trabajo de grado se enfoca en el diseño de dos talleres para la formación de profesores en ejercicio, con los cuales se pretende contribuir al desarrollo de los conocimientos matemático y tecnológico para la enseñanza del teorema de Pitágoras a través de la prueba de Perigal.

Este trabajo está organizado en seis capítulos. El primero corresponde a los preliminares donde se abordan tres temas principales: inquietud pedagógica, justificación y objetivos generales y específicos. En la inquietud pedagógica, se manifiesta la preocupación por la formación de docentes de matemáticas en Paraguay, considerando los resultados PISA 2023 (Programa para la evaluación internacional de alumnos), SNEPE 2018 (Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo), y estudios consultados sobre el poco manejo de las TIC de los docentes.

En la justificación se exponen las posturas de varios autores sobre la importancia de la incorporación del software dinámico GeoGebra, en los procesos didácticos. Estos autores, destacan las ventajas de integrar la tecnología como parte de una innovadora propuesta educativa, que busca consolidar y potenciar habilidades en los estudiantes.

Los objetivos específicos hacen alusión a los conocimientos matemáticos y tecnológicos que el profesor debe poseer para la enseñanza del teorema de Pitágoras, también se refieren al diseño de talleres para la formación de profesores tomando el modelo de Cano (2002) que les permitirá ampliar sus conocimientos sobre el uso de diferentes recursos para la enseñanza del

teorema de Pitágoras, según la relación entre áreas de cuadrados y, las representaciones por descomposición y composición de partes.

En el segundo capítulo se exponen los antecedentes contemplando tres aspectos: la formación del profesor de Matemáticas, la integración del conocimiento de contenido con el conocimiento tecnológico (el modelo TPACK) y, el uso de la tecnología en el aula de matemáticas (el software GeoGebra). En cada aspecto se presentan investigaciones y estudios realizados por algunos académicos respecto al conocimiento y las estrategias de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y resaltando que el docente es un actor clave en este proceso. Además, se registran revisiones sistemáticas respecto al modelo TPACK, el cual representa el marco teórico y el hilo conductor de los talleres diseñados. Los estudios consultados también han arrojado que el sistema educativo paraguayo aún no se encuentra en el logro de los avances en TIC. Sin embargo, Paraguay sigue apostando en avanzar en torno a las TIC, trabajando en acciones para el desarrollo profesional docente.

En el tercer capítulo, el lector encuentra los referentes conceptuales donde se presentan los marcos conceptual y matemático. En lo conceptual se refiere al modelo TPACK y sus saberes que lo componen, además se contempla en este modelo los elementos que integran el diseño de los talleres. El software dinámico GeoGebra es otro de los elementos del marco conceptual, este recurso ofrece una gran variedad de opciones y debido a su evolución se está generalizando su uso por parte de los profesores que buscan incorporar nuevas herramientas didácticas en sus clases.

Otro de los aspectos desarrollado en el marco conceptual son los procesos cognitivos de la actividad geométrica, en particular los procesos de visualización y representación.

En el marco matemático se presentan dos temas, el teorema de Pitágoras, con la presentación de mapas conceptuales donde se visualizan los conceptos que se relacionan con este teorema y luego una breve reseña histórica sobre Henry Perigal, quien desarrolló una demostración del teorema de Pitágoras en 1830, basada en la descomposición de figuras, encontrando una disección específica.

En el cuarto capítulo se desarrolla la aproximación metodológica donde se puede observar el proceso cumplido para el diseño de los dos talleres. Por su parte en el quinto capítulo se presentan los dos talleres diseñados.

Finalmente, en el sexto capítulo, se exponen las conclusiones en las que se consideran las reflexiones a partir de los objetivos del trabajo, así como las proyecciones académicas suscitadas de esta experiencia de formación.

1 Preliminares

En este capítulo se presentan tres aspectos que configuran los preliminares de este trabajo. El primer aspecto es la inquietud pedagógica que aborda los siguientes puntos: la preocupación por la incipiente formación de los profesores en el uso de herramientas tecnológicas, la elección del Teorema de Pitágoras, dada su amplia aplicabilidad en las matemáticas y en otras ciencias, la cualificación académica y profesional de los profesores de matemáticas y los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas estandarizadas internacional y nacional. En el segundo aspecto de este capítulo, la justificación, se expone la necesidad de apoyar a los profesores en la formación continua para fortalecer su práctica e incorporar herramientas tecnológicas. El tercer aspecto corresponde a la presentación de los objetivos, general y específicos que orientaron este trabajo.

1.1. Inquietud pedagógica

Mi inquietud pedagógica, se configura desde cinco aspectos fundamentales. El primero, se genera desde mi experiencia docente, en la que he evidenciado la incipiente formación de los profesores en el uso de la tecnología para la enseñanza. Por esta razón considero esencial abordar la integración de las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, mi objetivo es que los profesores que trabajan con jóvenes y adultos cuenten con la formación profesional óptima en matemáticas, que no solo incluya un sólido contenido matemático, sino también estrategias pedagógicas efectivas que respondan a las demandas de la Educación Matemática en Paraguay. Con este propósito, se busca diseñar dos talleres para la comprensión del teorema de Pitágoras haciendo uso de material manipulativo y del software dinámico GeoGebra, a fin de contribuir a la formación continua de los profesores de matemáticas y colaborar en la mejora de sus prácticas pedagógicas.

Con los talleres, se tiene como objetivo que los profesores en ejercicio del Departamento Central (Paraguay) reconozcan que la integración de la tecnología en sus prácticas de enseñanza, especialmente a través del uso del software dinámico GeoGebra, favorecen procesos cognitivos como la visualización, conjeturación, justificación y la representación. En relación con el uso de herramientas tecnológicas como el software GeoGebra, el estudio de Mereles y Canese (2022) aborda las dificultades que experimentaron los docentes durante la educación remota en Paraguay en el año 2020. Los autores recolectaron datos en dos fases: la primera fase se desarrolló entre marzo y abril con 1.030 profesores, y la segunda se llevó a cabo entre noviembre y diciembre de ese año, con 299 profesores. En las dos fases se aplicó un cuestionario online de 37 preguntas, y se realizaron entrevistas grupales con 8, 12 y 20 profesores al finalizar el año lectivo, a través de Google Meet. Las dificultades más comunes reportadas por los autores, “en la primera fase fueron: mala conexión a internet (49%), falta de conocimiento en el uso de las TIC (36,5%), falta de soporte técnico (22,3%) y falta de acceso a las TIC (21,3%)” (p. 127).

El segundo aspecto relacionado con mi inquietud pedagógica es la elección del Teorema de Pitágoras, ya que por su amplia aplicabilidad en las matemáticas y en otras ciencias, permite su integración en distintos niveles académicos. Según la revisión del Currículo paraguayo, en el Programa de Estudio de Educación Básica Bilingüe para Personas Jóvenes y Adultas del tercer ciclo, donde se establecen competencias específicas en el área de matemáticas para este nivel se espera que el estudiante cumpla esas competencias. Según el Ministerio de Educación y Cultura (2011):

Resuelva situaciones y problemas con datos contextualizados que involucren a las operaciones fundamentales con números naturales hasta una centena de millón, números

racionales positivos hasta el milésimo, unidades de medidas, áreas de figuras geométricas y de cuerpos geométricos y procedimientos sencillos de Estadística. (p.47)

Lo anterior se complementa con lo establecido en la unidad temática denominada “La Geometría y las Medidas”. En el tercer ciclo se aborda, entre otros temas, la demostración del Teorema de Pitágoras; por lo tanto, este estudio busca de manera particular, que los profesores de matemáticas reconozcan la importancia de este teorema y desarrollen habilidades de visualización, y representación a partir de los dos talleres diseñados.

El tercer aspecto de la inquietud pedagógica refiere a los esfuerzos que el Estado Paraguayo hace para la cualificación académica y profesional de sus profesores de matemáticas en servicio, al promover espacios académicos e invertir en estudios tanto a nivel nacional como internacional para su especialización, para ello, se ofertan con regularidad especializaciones y maestrías para docentes en universidades extranjeras, utilizando recursos del Fondo para la Excelencia de la Educación y la Investigación (FEEI) a través de las Becas Carlos Antonio López (BECAL).

Sin embargo, la formación profesional se ve influenciada por varios factores sociales y contextuales que dificultan su relación con la tecnología, alguna de estas son la insuficiencia de recursos como: computadores, conexión a internet, energía eléctrica permanente, entre otros. Actualmente, hay profesores cuya formación profesional se remonta a épocas en las que la integración de la tecnología con la educación era incipiente. Además, varios de ellos no participan en espacios académicos de actualización adecuados para el uso de nuevas tecnologías. Esta falta de formación les genera inseguridad, e incluso pueden llevarlos a no usar tecnologías en sus clases, llegando a considerarlas como irrelevante para los procesos de aprendizaje.

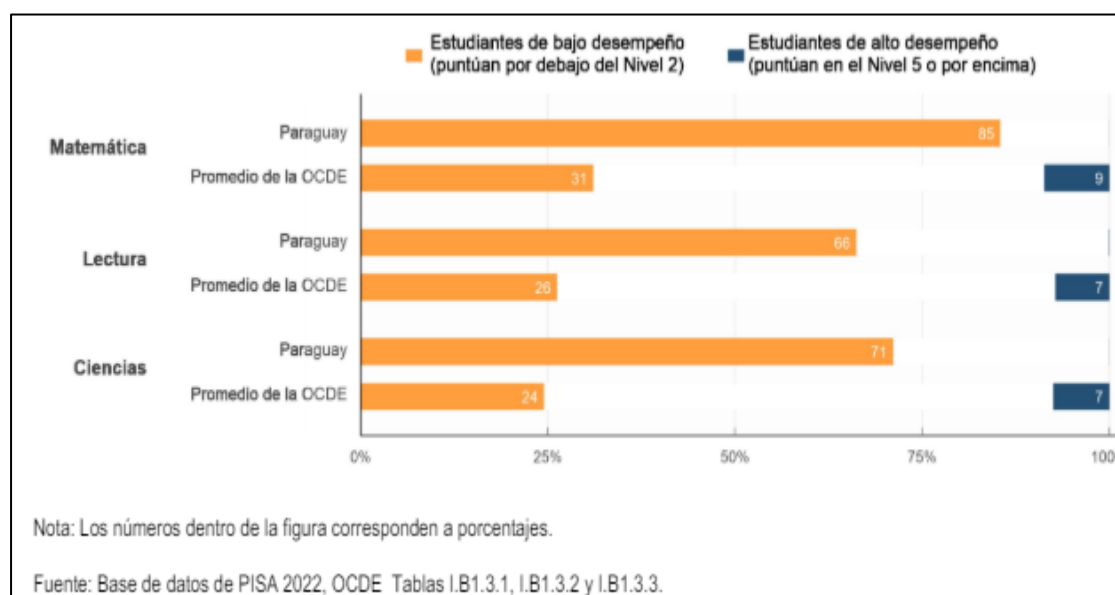
Ante la problemática expuesta, es fundamental que los profesores reconozcan la pertinencia del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas para fomentar el aprendizaje de estas en sus estudiantes. Esto requiere el diseño de estrategias para que los docentes incorporen la tecnología en sus prácticas profesionales. Además, es crucial promover la interacción entre los conocimientos de los contenidos matemáticos que posee el profesor y el uso de la tecnología, asegurando que ambos se contextualicen en el aula. Para lograrlo, es esencial que los profesores estén dispuestos a cambiar sus prácticas y se adapten a los nuevos roles que jugarían ellos y sus estudiantes en el aula con esta incorporación. Personalmente, deseo contribuir a la educación de mi país participando activamente en la mejora de la Educación Matemática y en la formación de profesores de esta área. Deseo aportar al Estado paraguayo utilizando mis conocimientos y habilidades, como una forma de retribuir los recursos y oportunidades que he recibido a lo largo de mi formación académica y profesional.

Un cuarto aspecto de la inquietud pedagógica refiere a los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), los datos publicados en (2023) revelan que el 85% de los estudiantes de Paraguay obtuvo un rendimiento bajo en matemáticas, ocupando el penúltimo puesto entre los países participantes (Figura 1). Además, 9 de cada 10 estudiantes están por debajo del mínimo requerido (OCDE, 2023). Paraguay presenta el mayor porcentaje de estudiantes que no alcanzan el nivel mínimo entre los países evaluados. Comparando las pruebas PISA aplicadas en 2017, con las pruebas PISA aplicadas en 2022, seguimos alejados del mínimo recomendado. Estos datos nos invitan a reflexionar sobre la revisión de las legislaciones vigentes, su cumplimiento y funcionalidad. Es momento de prestar especial atención a la formación continua de los profesores de matemáticas, ya que esta puede tener un impacto positivo en los

aprendizajes de los estudiantes, tal formación debe incluir la integración eficaz de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Figura 1

Resultados desempeño estudiantes paraguayos PISA 2022.



Nota. OCDE (2023), *Resultados PISA 2022* (2023, p. 3)

Finalmente, un quinto aspecto que configura mi inquietud pedagógica son los resultados obtenidos sobre los aprendizajes en Paraguay. El Ministerio de Educación y Ciencias de Paraguay (MEC) tiene por finalidad la mejora de la calidad educativa. La evaluación de esta calidad de los aprendizajes está determinada por el Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo (SNEPE). Este Sistema de Evaluación del Proceso Educativo está a cargo de la Dirección de Evaluación de Logros de Aprendizajes Curriculares (DELAC), dependiente del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) del MEC.

Con el fin de dar a conocer los resultados del Estudio Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes de los Estudiantes determinado por el SNEPE aplicado en 2018 (Ministerio de Educación y Ciencias, 2020), se realizó la conferencia de prensa virtual el 09 de septiembre de

2020. En esta conferencia se explicó que esta evaluación admite medir los logros académicos alcanzados por los estudiantes en las áreas de Matemática y Comunicación Castellana y Guaraní, al final de l

os ciclos de Educación Escolar Básica y Educación Media o sea del 3°, 6 ° y 9° grados de Educación Escolar Básica (EEB) y del tercer curso de la Educación Media (EM). Se destacó también que esta evaluación se realiza cada tres años, siendo de carácter censal con alcance nacional involucrando a todas las instituciones educativas del país, públicas, privadas y subvencionadas, ubicadas en los 17 departamentos y Asunción, la ciudad capital de Paraguay.

Las cifras de participación fueron las siguientes 364.000 estudiantes de 8.141 instituciones educativas, distribuidos en 25.000 secciones. En relación con los resultados de las evaluaciones SNEPE (Ministerio de Educación y Ciencias, 2020) dan cuenta de que la mayoría de los estudiantes en Paraguay se encuentran por debajo del nivel de desempeño mínimo esperado en todas las áreas evaluadas. “Entre 2 a 3 de cada 10 estudiantes alcanza o supera los 550 puntos nivel mínimo de aprendizaje considerado satisfactorio para su grado y área de conocimiento evaluada” (MEC, 2020, p. 144). En particular, es en el área de Matemática de los grados superiores donde se observan los resultados más bajos, según el Informe Nacional SNEPE 2018. Los “resultados indican que hay serios problemas en la calidad de la educación: el sistema educativo paraguayo no está logrando que los estudiantes aprendan los contenidos y desarrollen las capacidades definidas en el curriculum” (Ministerio de Educación y Ciencias, 2020, p. 145).

1.2. Justificación

Este trabajo de grado se realiza en el contexto del Programa Nacional de Becas de Posgrado para el Fortalecimiento de la Investigación, Innovación y Educación, conocido como

“Don Carlos Antonio López”, correspondiente a la cohorte BECAL Paraguay 2024 de la Maestría en Docencia de la Matemática en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

La expectativa con este trabajo de grado es promover la incorporación del software dinámico GeoGebra en las prácticas de los profesores de matemáticas paraguayos y así fortalecer sus competencias digitales para mejorar sus prácticas de enseñanzas. Se espera que la aplicación de estos procedimientos facilite la comprensión del teorema de Pitágoras, los conceptos geométricos relacionados con el mismo y su representación.

A continuación, se presentan las apreciaciones hechas por varios autores respecto a la incorporación de la tecnología en los procesos didácticos. Dado que los educadores constantemente se enfrentan a contextos complejos y dinámicos, es necesario que estén abiertos a un pensamiento y una enseñanza flexible. Esto requiere un conocimiento organizado que integre diversas áreas, como el aprendizaje de los estudiantes, el contenido a enseñar y la tecnología. La capacidad de enseñar matemáticas con tecnología implica más que el dominio de habilidades tecnológicas, también requiere comprender la interacción dinámica entre las herramientas tecnológicas, el contenido y la práctica docente, como lo afirman Koehler et al. (2015).

Existen profesores cuya formación data de épocas en que la educación tecnológica era incipiente, pero además no participan en espacios de actualización adecuados para el uso de nuevas herramientas, esto puede llevar a que se sientan inseguros, mal preparados y reacios a utilizar la tecnología en sus clases, incluso llegando a considerar su uso como irrelevante para el aprendizaje. Ante esta realidad, es crucial desarrollar un enfoque para la integración de la tecnología a la enseñanza, esto implica diseñar estrategias que incorporen tecnologías en las diferentes áreas del conocimiento favoreciendo la interacción entre el conocimiento matemático del profesor y la aplicación de la tecnología en el aula. Es esencial que los educadores estén

dispuestos a afrontar innovaciones y adaptar sus conocimientos sobre el contenido a las complejidades de la tecnología.

Al respecto sobre la incorporación de la tecnología en los procedimientos didácticos y la formación del profesor, según Cuevas (2014, citado en Rojas y Báez, 2017) indica que los profesores emplean poco la tecnología en la enseñanza. En los encuentros con profesores se han detectado que sus enseñanzas no se enfocan en el aprendizaje, además no cuentan con estrategias de planeación lo que conlleva a que las actividades que proponen carezcan de iniciativa, de creatividad y dinamismo.

El software dinámico GeoGebra facilita una gran variedad de opciones que no se limitan solo al dibujo o la construcción, sino también a la exploración e investigación. Muchas de estas actividades “no requieren conocimientos técnicos profundos; con solo familiarizarse con algunas herramientas y comandos básicos, es posible ejecutar numerosas tareas en este software”. (Carrillo, 2017, p.4). Además, GeoGebra ha revolucionado la educación matemática gracias a las amplias posibilidades que brinda y a su constante evolución. (Carrillo, 2017).

En relación con el uso de este software, Goldenberg y Cuoco (1998) y Santos (2001) (citados en Rojas y Báez, 2017), mencionan que la utilización del software dinámico GeoGebra es una herramienta poderosa para el análisis de las relaciones geométricas, facilita el trazado de elementos geométricos y permite visualizar el movimiento de estos. Habría que decir también que para garantizar una enseñanza efectiva es necesario que las instituciones estén provistas de los recursos tecnológicos y que los profesores puedan utilizarlos para perder el miedo al uso de la tecnología. Por otro lado, GeoGebra se caracteriza por ser interactivo, provee una vista algebraica y otra vista gráfica, lo cual permite al estudiante comprobar su solución y cualquier corrección lo puede discutir de inmediato con el profesor (Rojas y Báez, 2017).

La utilización de GeoGebra en los procesos didácticos para la enseñanza de la geometría constituye un avance importante en la manera en que los estudiantes interactúan y comprenden los conceptos matemáticos. GeoGebra, al ser un software de geometría dinámica, permite a los estudiantes manipular figuras geométricas, visualizar sus propiedades y experimentar con construcciones en tiempo real. Esta herramienta se convierte en un recurso crucial para los docentes, ya que facilita un enfoque activo en la enseñanza y fomenta el aprendizaje a través de la exploración y el descubrimiento. Además, la capacidad de GeoGebra para realizar representaciones dinámicas favorece que los estudiantes puedan generar sus propias conjeturas y validarlas mediante experimentación, lo que enriquece su comprensión geométrica y matemática (Barrantes, Zamora y Barrantes, 2021).

Asimismo, el uso de GeoGebra proporciona a los profesores un recurso valioso para adaptar la enseñanza a diferentes niveles de complejidad, permitiendo que el aprendizaje se ajuste a las necesidades y capacidades individuales de los estudiantes. En contextos de enseñanza secundaria, el software facilita la transición de representaciones visuales a deductivas, haciendo que los estudiantes comprendan la relación entre diferentes conceptos geométricos de manera gradual y estructurada. La posibilidad de movilizar las figuras geométricas mediante esta herramienta permite superar las limitaciones de las representaciones estáticas y favorece una enseñanza más profunda y significativa (Barrantes et al., 2021).

Finalmente, la incorporación de software como GeoGebra en la enseñanza de la geometría responde a la necesidad de desarrollar competencias digitales en los estudiantes, preparándolos para un entorno educativo y profesional en constante cambio. GeoGebra no solo apoya el aprendizaje de conceptos específicos de geometría, sino que también promueve habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, al permitir a los estudiantes formular y validar sus propios procesos de razonamiento. Esta herramienta se convierte, por tanto, en un puente

entre la teoría matemática y su aplicación práctica, ofreciendo un entorno de aprendizaje integral que enriquece los procesos cognitivos y didácticos en el aula (Barrantes et al., 2021).

1.3.Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Diseñar dos talleres para la formación de profesores de matemáticas del tercer ciclo de Educación Permanente sobre el teorema de Pitágoras, con la utilización del software GeoGebra, que contribuya al desarrollo de los conocimientos matemáticos y tecnológicos contemplados en el enfoque del Modelo Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK).

1.3.2. Objetivos específicos

1. Identificar los conocimientos sobre el contenido matemático y tecnológico que debe saber el profesor de matemáticas para abordar la enseñanza del teorema de Pitágoras según el Modelo Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK), los cuales son tenidos en cuenta en el diseño de los talleres.
2. Establecer la metodología para el diseño de los dos talleres, incorporando la demostración de Perigal y el uso de los recursos manipulables y tecnológicos.

2. Antecedentes

En este capítulo se exponen 10 investigaciones, de 20 revisadas, por su relación con el tema de interés presentado en el capítulo anterior. El análisis de dichas investigaciones permitió una organización en tres categorías: la formación del profesor de matemáticas (4 estudios); integración del conocimiento de contenido y conocimiento tecnológico: el modelo TPACK (2 estudios); el uso de la tecnología en el aula de matemáticas: el software GeoGebra (3 estudios).

2.1. Formación del profesor de Matemáticas

La primera investigación de este conjunto es la desarrollada por López et al. (2015), titulada “Formación continua docente: un estudio cualitativo en los docentes de matemáticas en Ecuador” cuyo centro es determinar el nivel de formación continua de los docentes en la enseñanza de matemáticas y evaluar su interés hacia la innovación educativa. Los resultados mostraron que, aunque la mayoría de los docentes están interesados en la educación, presentan deficiencias en su formación didáctica y pedagógica. Los investigadores concluyen que la formación de los profesores de matemáticas es un factor clave para el desarrollo armónico de la enseñanza y el aprendizaje, constituyendo un punto de partida fundamental para fortalecer el sistema educativo, por lo que resulta crucial capacitar a los profesores en ejercicio.

La segunda investigación de este conjunto fue desarrollada por Mello y Giménez (2021), titulada “Una perspectiva de la educación Matemática en Paraguay”. Los investigadores llevaron a cabo un análisis cualitativo de los reportes de ocho tesis de la Maestría en Didáctica de las Ciencias de la Universidad Central de Concepción. Estas tesis se organizaron en tres dimensiones: currículo, práctica educativa, y propuestas didácticas innovadoras en la enseñanza de las matemáticas. Los autores concluyeron, entre otros aspectos, que la capacitación inicial y continua de los profesores es fundamental para el éxito del proyecto educativo. Además, destacan

la importancia de continuar con iniciativas y planes que promuevan la transición del modelo pedagógico tradicional hacia metodologías de enseñanza más activas en esta área.

La tercera investigación de este conjunto es la de Benítez y Giménez (2019), reportada en el artículo titulado “Estudio de la incidencia de la competencia matemática de los docentes en el desarrollo de la misma en los estudiantes de primer ciclo de la Educación Escolar Básica, en cinco instituciones educativas de Asunción y Central”. Los autores analizan cómo las competencias matemáticas de los docentes impactan el desarrollo de esas mismas competencias en sus estudiantes en Paraguay, además, indagaron sobre el conocimiento y la aplicación de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en un grupo de profesores de Paraguay.

Los hallazgos del estudio revelan un nivel bajo de competencia matemática tanto en docentes como en estudiantes, con estrategias de enseñanza predominantemente tradicionales, lo que limita el desarrollo efectivo de competencias en los estudiantes. Los autores subrayan la urgencia de renovar los paradigmas de enseñanza y actualizar los programas de formación inicial y continua de los docentes, además de mejorar la infraestructura escolar. Estos cambios son vistos como esenciales para transformar las aulas en espacios de aprendizaje constructivo y lograr un avance en la educación matemática en Paraguay.

Según Díaz (2002, citado en Benítez y Giménez, 2019) “el estudiante no construye el conocimiento solo, sino gracias a la mediación de otros” (p. 4) siendo el profesor uno de esos otros, acompañando y guiando a los estudiantes en esta construcción. Por ello, la capacitación y experiencia del profesor son fundamentales, materializadas en el conocimiento y dominio de la disciplina por parte del docente.

En cuanto a los momentos metodológicos o didácticos en el desarrollo de clases de matemáticas, el estudio de Benítez y Giménez (2019) muestra que las actividades propuestas son

descontextualizadas, es decir, no están relacionadas con la realidad de los estudiantes, y son propuestas de manera mecánica y repetitiva, lo que no favorece el aprendizaje significativo. Los resultados también indican que los profesores reconocen que su conocimiento en matemáticas es básico. Este estudio evidencia que la mayoría de los profesores observados no implementan estrategias de enseñanza diseñadas para el aprendizaje de las matemáticas, limitándose a clases centradas en la repetición de ejercicios. Los momentos didácticos son reemplazados por enfoques tradicionales que no incorporan los conocimientos previos de los estudiantes ni su participación. (Benítez & Giménez, 2019).

La cuarta investigación de este conjunto fue la realizada por Rincón (2018), titulada “El desarrollo de la comprensión de los objetos de la Geometría Plana en los estudiantes de la carrera de Educación, Mención Matemática”. La autora señala que, a través de diversos métodos e investigaciones, se han detectado deficiencias en el aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de matemáticas. Destacando la importancia de prestar atención al desarrollo de la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los profesores, especialmente en el contexto de la actividad geométrica. La investigadora concluye que este proceso debe ser contextualizado y orientado a la profesión, adoptando un enfoque comunicativo que promueva el uso de herramientas matemáticas. La investigadora afirma que, de esta manera, se facilitará que los futuros profesores de matemáticas se desempeñen adecuadamente en un entorno caracterizado por un rápido avance tecnológico.

2.2. Integración del conocimiento de contenido y conocimiento tecnológico: el modelo Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK).

La primera investigación de este conjunto es la desarrollada por Willermark (2017) titulada “Conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido: una revisión de estudios empíricos publicados entre 2011 y 2016”. El autor revisó 107 artículos sobre el uso del modelo Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK) en estudios empíricos publicados entre 2011 y 2016, ubicados en bases de datos como ERIC, Scopus y SSCI.

El autor analizó cada artículo para determinar cómo se procedió para identificar el TPACK del profesor, lo que le permitió establecer dos categorías: la primera se refiere a la identificación a través de autoinformes, siendo esta la manera más común; la segunda a la evaluación del desempeño de las actividades docentes. La investigación revela, además, que en los estudios analizados falta claridad sobre la forma en la que se operacionaliza el TPACK como modelo.

El autor destaca que, aunque ha habido avances significativos en la comprensión y la aplicación del modelo Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK), todavía existen desafíos en la formación de docentes, especialmente en la integración efectiva de la tecnología en la enseñanza. Además, concluye que es fundamental seguir investigando sobre la formación de los profesores en TPACK, proponiendo que las futuras investigaciones se enfoquen en métodos de enseñanza innovadores y en el desarrollo de competencias específicas para una integración exitosa de la tecnología en el aula.

EL segundo trabajo analizado en este conjunto es el realizado por Rivera et al. (2021) titulado “Estudios empíricos del modelo sobre conocimiento didáctico-tecnológico del contenido

(TPACK) en matemáticas, incluidos en bases bibliográficas internacionales.” Los autores analizaron los reportes de investigaciones sobre TPACK en profesores de matemáticas (en formación y en ejercicio), publicados entre 2018 y 2020 e identificaron tendencias, metodologías y hallazgos relevantes relacionados con la implementación y el desarrollo del TPACK en los profesores. Una de las conclusiones del estudio es la tendencia en usar la evaluación del desempeño docente para identificar el TPACK del profesor, por encima de los autoinformes.

El estudio de Rivera et al (2021) revela que varios de los reportes analizados carecen de claridad en la operacionalización del TPACK, por lo que los autores sugieren que nuevas investigaciones desarrollen instrumentos más robustos para medir el TPACK de los profesores. También concluyen que una mejor comprensión y aplicación del TPACK puede contribuir a la preparación de educadores en el área de las matemáticas más competentes en el uso de la tecnología en el aula.

2.3. El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: el software GeoGebra

La primera investigación de este conjunto es la desarrollada por Cañete (2019), publicada en un artículo cuyo título es “Competencia Digital Docente en el Contexto Paraguayo”. El autor describe las acciones que se han emprendido desde el año 2013 al 2019, para promover el desarrollo de competencias digitales en los docentes paraguayos, se realizó un análisis de 32 artículos relacionados con el tema, seleccionados de diversas bases de datos tanto nacionales como internacionales. Los resultados revelan que, si bien Paraguay no se encuentra en la vanguardia en esta área, existen iniciativas que impulsan innovaciones mediante la incorporación de tecnología en la educación. Estas acciones incluyen programas de capacitación docente y el equipamiento tecnológico de instituciones educativas, lo que demuestra un avance hacia la integración de recursos digitales en el ámbito educativo. Estas innovaciones exigen una

formación urgente del profesor en los aspectos tecnológicos y pedagógicos, en ese sentido se da lugar a programas ambiciosos de formación docente continua.

La segunda investigación de este conjunto es un estudio realizado por Crompton (2014), publicado en un artículo titulado “Desarrollo del conocimiento pedagógico tecnológico del contenido (TPACK) y creencias de futuros profesores sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas en K-12: Una revisión de la literatura”. La autora revisa la literatura para identificar tanto el conocimiento como las creencias de los futuros profesores respecto a la integración de la tecnología en la educación matemática, resaltando cómo estas creencias pueden facilitar o limitar su aplicación efectiva en el aula. Según Crompton (2014), muchos profesores no logran incorporar la tecnología de manera significativa debido a una combinación de falta de formación pedagógica, resistencia al cambio y creencias negativas sobre su utilidad en la enseñanza

Además, el estudio analiza cómo programas de formación docente que integran los componentes de tecnología, pedagogía y contenido pueden fortalecer el TPACK en los futuros profesores, mejorando su disposición y competencia para usar herramientas tecnológicas en la enseñanza de matemáticas. Crompton (2014) destaca que un enfoque formativo efectivo requiere no solo conocimientos técnicos, sino también la integración pedagógica que permita a los profesores usar la tecnología como recurso de enseñanza interactiva y efectiva.

En este estudio, se tomó la definición de Koehler y Mishra (2008, citado en Crompton,2014) de integración eficaz entre la tecnología y las prácticas educativas, considerando los tres elementos: contenidos matemáticos, pedagogía y tecnologías. Esto originó el modelo TPACK con investigaciones para descubrir una metodología efectiva (Crompton, 2014).

El análisis bibliográfico solo resultó en un estudio restringido sobre tecnología, matemáticas, TPACK y la capacitación de docentes. Resulta imprescindible disponer de métodos

que promuevan el avance de TPACK en los programas de capacitación docente y cómo este progreso impacta las convicciones de los docentes respecto a la incorporación de la tecnología en matemáticas (Crompton, 2014).

La tercera investigación de este agrupamiento es un estudio realizado por García (2011) titulado “Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula”. La metodología utilizada por el autor fue la investigación-acción y el objetivo del estudio fue indagar la influencia de GeoGebra en la transformación de actitudes de los estudiantes respecto a las matemáticas y el progreso de los mismos en el logro de las competencias matemáticas, para lo cual se construyó una secuencia de enseñanza-aprendizaje, mediada por GeoGebra.

El estudio de García (2011), permitió identificar la mejora de actitudes y competencias que tienen los estudiantes al incorporar el uso de GeoGebra en las tareas de matemáticas.

En conclusión, se demuestra que el uso de GeoGebra en el aula tiene un impacto efectivo tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en la actitud de los estudiantes. La integración de GeoGebra con el contenido matemático no solo contribuyó al progreso académico, sino también a un cambio en la percepción de los estudiantes en relación a las matemáticas, demostrándose la viabilidad de las herramientas tecnológicas en la educación matemática.

3. Referentes conceptuales

En este capítulo se presentan dos marcos principales que configuran los referentes conceptuales, el marco conceptual y el marco matemático, cada uno de ellos presentan elementos que favorecen su comprensión.

3.1 Marco conceptual

La integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha resultado ser un desafío en varios países, incluido Paraguay. En este apartado en primer lugar se presentan los elementos más importantes que conceptualizan el marco de Conocimiento Pedagógico y Tecnológico del Contenido (TPACK), destacando sus componentes. En segundo lugar es abordado el software dinámico GeoGebra con la exposición de estudios sobre este recurso, que está ofreciendo innovaciones a los profesores en sus prácticas educativas. Finalmente se trata un tercer elemento relacionado con los procesos cognitivos en la actividad geométrica.

3.1.1 Modelo de Conocimiento Pedagógico y Tecnológico del Contenido (TPACK)

El marco TPACK (Koehler et al, 2015) se basa en el modelo Pedagogical Content Knowledge (PCK) de Shulman (1986) y lo extiende con un tercer componente central relacionado con la tecnología para enseñar de manera efectiva en la era digital. El PCK determina diferentes tipos de conocimientos que un profesor debe tener para la enseñanza de las matemáticas, proponiendo uno de los modelos que más impacto ha tenido en el estudio del pensamiento del profesor. En 1986 Shulman planteó tres categorías que forman el conocimiento del profesor, las cuales se describen a continuación:

Conocimiento del Contenido. Este se refiere a la organización mental que tiene el profesor acerca de los contenidos que va a enseñar.

Conocimiento Pedagógico del Contenido: Este se refiere a comprender qué facilidades o dificultades presenta el aprendizaje de un tema que se va a desarrollar (Shulman,1986, citado en González y Muñoz, 2018, p. 31).

Conocimiento del Currículo: es el conocimiento respecto al programa curricular del nivel educativo en el cual se está trabajando, y también el conocimiento de los libros de textos con los que se cuenta para la enseñanza (Shulman,1986, citado en González y Muñoz, 2018, p. 31). El PCK es un conocimiento que "incluye las formas usuales para representar las ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, en otras palabras, los caminos para representar y formular un contenido matemático y hacerlo más comprensibles a los demás" (Shulman, 1986, citado en González y Muñoz 2018, p. 31).

En 1987 Shulman amplía sus ideas sobre los conocimientos base que los profesores necesitan para la enseñanza y los categoriza así: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico en general, el conocimiento del currículo, el conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes y de sus características tanto afectivas como cognitivas, conocimiento de los contextos educativos y el conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación, así como los fundamentos filosóficos e históricos (Shulman,1987, citado González y Muñoz, 2018, p. 32) . Esta propuesta de Shulman ha dado origen a otras propuestas con propósitos similares, como la de Koehler et al. (2015).

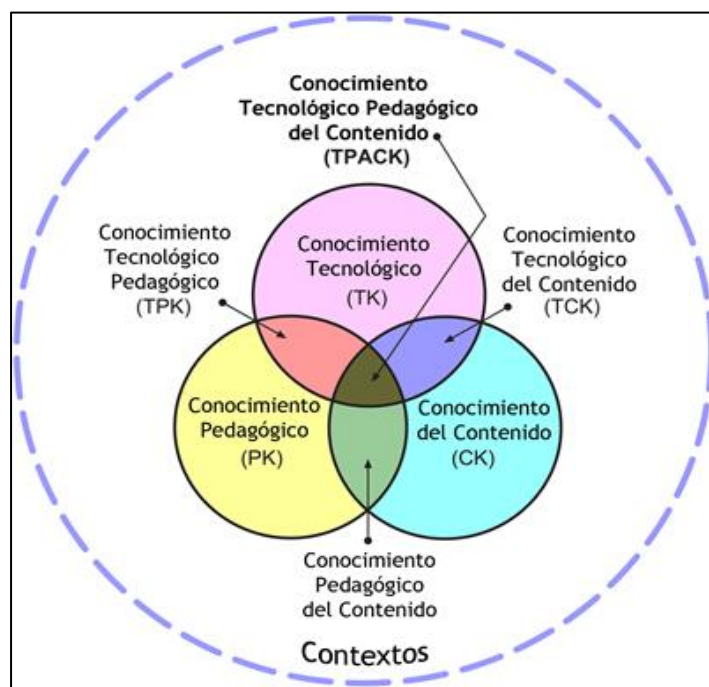
A medida que la comprensión por el PCK evolucionó, las tecnologías digitales modernas empezaron a ser mejor valoradas como herramientas beneficiosas para la enseñanza y el aprendizaje. Kohler et al. (2015) señalan que el TPACK no es un concepto nuevo ni una “creación” exclusiva de ellos, ya que diversos académicos han argumentado que el conocimiento

tecnológico no debe considerarse de manera aislada del contexto. Además, enfatizan que una enseñanza efectiva implica entender la relación entre la tecnología, la pedagogía y el contenido.

Kohler et al. (2015) desarrollaron el marco TPACK, que como ya se mencionó antes, basados en las ideas de Shulman sobre el PCK, con la incorporación de un tercer componente central relacionado con la integración efectiva de la tecnología para enseñar en la era digital. Por tanto, el marco TPACK consta de tres componentes centrales: conocimientos de contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento tecnológico (TK), además de tener presente el contexto. Estos conocimientos no se consideran de manera aislada, sino que se abordan las interacciones e intersecciones de estos, conformando los siete elementos, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

El marco TPACK y sus saberes que lo componen.



Nota. Tomado de (Koehler, Mishra, & Cain, 2015, pág. 14)

De acuerdo con lo anterior, a continuación, se explica cada uno de los componentes expuestos en la figura 2.

Conocimiento sobre el contenido (CK): es el conocimiento que debe tener el profesor sobre la disciplina que enseña. Según Shulman (1987, citado en Kohler et al.2015) este saber abarca conocimientos de conceptos, teorías, ideas, esquemas organizativos, pruebas y evidencias, además de métodos y enfoques definidos para elaborar ese contenido.

Contenido Pedagógico (PK): es la información que los docentes deben poseer acerca de los procedimientos y técnicas de enseñanza y aprendizaje. Incluyen, entre otros aspectos, los objetivos, valores y metas educativas globales. Este tipo general de saber se utiliza para entender el proceso de aprendizaje de los alumnos, las capacidades globales de administración del aula, la organización de las clases y la valoración de los estudiantes. Es esencial que el docente posea entendimiento de las teorías cognitivas, sociales y del desarrollo del aprendizaje. (Koehler et al., 2015, p. 14).

Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK): similar la idea elaborada por Shulman (1987) sobre conocimiento pedagógico aplicable a la enseñanza de contenido específico. Esta aplicación se da cuando el profesor interpreta el contenido de la disciplina y puede representarlo en varias formas, adaptando y construyendo materiales didácticos para la instrucción según las concepciones y acorde a los conocimientos previos de los estudiantes (Shulman, 1986 citado en (Koehler et al., 2015, p. 15).

Conocimiento sobre la Tecnología (TK): El Conocimiento de la tecnología (TK) siempre se mantiene en un estado de constante cambio y evolución, a diferencia de la pedagogía y el contenido, que son los otros dos componentes del modelo TPACK. El conocimiento sobre la tecnología favorece que las personas puedan realizar varias tareas usando la tecnología de la información de diferentes formas (Koehler et al., 2015, p. 15).

Conocimiento sobre el contenido tecnológico (TCK): Además del material que imparten los docentes, deben entender que los contenidos pueden variar con el uso de una tecnología específica. Para elaborar el contenido de un campo determinado, es necesario comprender qué tecnologías son las más adecuadas para fomentar el aprendizaje de este (Koehler et al., 2015, p. 15).

Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos (TPK): El profesor debe comprender cuales son las restricciones y posibilidades de las herramientas tecnológicas y las disciplinas con las cuales trabajan. Los softwares no han sido diseñados para temas educativos sino para actividades comerciales. Es preciso que el profesor pueda configurar su uso para fines pedagógicos (Koehler et al., 2015, p. 16).

Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK): son los conocimientos que trascienden los tres elementos (Contenido, pedagogía y tecnología); surgen de la interrelación entre los conocimientos de contenido, pedagogía y tecnología (Koehler et al., 2015, p. 17).

Contexto: la tecnología, pedagogía y contenidos están inmersos en contextos específicos de enseñanza y aprendizaje (Koehler et al., 2015, p. 17).

3.1.2. El software dinámico GeoGebra

La incorporación de GeoGebra en el diseño de talleres para la comprensión del Teorema de Pitágoras representa un avance significativo en el proceso cognitivo de la actividad geométrica, facilitando tanto la visualización como la representación de conceptos matemáticos de forma interactiva. GeoGebra actúa como una herramienta tecnológica dinámica que permite a los maestros no solo visualizar objetos geométricos, sino también explorar sus propiedades de manera intuitiva y accesible.

De acuerdo con su sitio web oficial (<https://www.geogebra.org/?lang=es-ES>), GeoGebra es un software dinámico de matemática diseñado para todos los niveles educativos, que integra en una sola herramienta aspectos de geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadística y cálculo. Además, GeoGebra proporciona una plataforma en línea con más de un millón de recursos educativos gratuitos, creados por una comunidad multilingüe. Estos recursos pueden compartirse fácilmente en GeoGebra Classroom, una plataforma colaborativa que permite a los docentes verificar el progreso de sus estudiantes en tiempo real.

GeoGebra también proporciona recursos matemáticos diseñados por expertos para diversas áreas, junto con herramientas gratuitas, como calculadoras y aplicaciones interactivas que facilitan el aprendizaje y la evaluación en múltiples plataformas. Además, ofrece lecciones interactivas de matemáticas e integración con distintos sistemas de gestión de aprendizaje (LMS) compatibles. Entre sus nuevas opciones se encuentra GeoGebra Practice, un espacio donde los usuarios pueden practicar la resolución de problemas algebraicos.

GeoGebra es un software libre, fácil de instalar y compatible con cualquier sistema operativo, que permite trabajar diversos contenidos matemáticos. Esta herramienta es ideal para fomentar el aprendizaje colaborativo, ya que los estudiantes, mediante la exploración del

software, pueden construir conocimientos conjuntamente y compartir experiencias de aprendizaje. La misión de GeoGebra es proporcionar las mejores herramientas para que los docentes apoyen el desarrollo del potencial de sus estudiantes. Más allá de ser una simple colección de herramientas, GeoGebra se esfuerza por conectar a apasionados de la educación y ofrece un enfoque innovador para enseñar, explorar y aprender matemáticas (<https://www.geogebra.org/>).

Carrillo (2017) recopila observaciones emitidas respecto al software GeoGebra en el Segundo Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Al recurso GeoGebra lo define como Geometría y Álgebra, explicando que ya existen versiones que ofrecen la posibilidad de trabajar cualquier contenido matemático, con versiones para la educación secundaria, universitaria y para la escuela primaria.

El uso del recurso GeoGebra se está generalizando entre el profesorado, su uso es casi imprescindible para los docentes que desea incorporar las TIC a su trabajo diario. Este recurso, debido a su continua evolución, brinda una amplia gama de alternativas que facilitan su uso, no solo para ilustrar o edificar, sino también para realizar actividades de investigación y experimentación, que no demandan un gran dominio técnico; será suficiente con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos para llevar a cabo las tareas con este software.

(Carrillo, 2017)

La incorporación de las TIC no debe darse en forma improvisada, se requerirá de una previa formación técnica que ayude a dar los primeros pasos en su uso. Además, Carrillo (2017) afirma que como profesores no es provechoso abusar de la formación técnica y descuidar la formación pedagógica, ya que la formación pedagógica es la que nos conduce a aprovechar los recursos y potencialidades que se necesitan para que los estudiantes aprendan. Se recomienda la

formación técnica necesaria para empezar el uso de GeoGebra y evitar las improvisaciones, planteando actividades simples que no solo asistan al docente, sino también al estudiantado a conocer el programa y que permitan que gradualmente sea factible afrontar nuevos desafíos.

Cuando nos proponemos incorporar las TIC en las clases de matemáticas, lo mejor es comenzar con actividades sencillas que motiven el uso de GeoGebra, convirtiéndolo en un recurso más en el aula. Además, recordemos que usar la tecnología ya es parte del quehacer diario y también ya están presentes en las instituciones educativas. Al usar las TIC no olvidemos que estas sirven de apoyo a la enseñanza y no prevalecen sobre la enseñanza (Carrillo, 2017)

Por su parte Córdoba y Cardeño (2013) reconocen que el GeoGebra además de ser un software libre, su avance es constante incorporando múltiples posibilidades para incursionar en conceptos de las Matemáticas. Según los autores, este software no solo es apto para el proceso de enseñanza- aprendizaje, sino que también se está usando para la creación de materiales atractivos para el trabajo de los estudiantes en el aula. Además, respecto a su uso, se propone la adopción de decisiones interinstitucionales para crear espacios de cooperación entre los usuarios de GeoGebra y para conocer sus futuros usos y avances. (Córdoba & Cardeño, 2013).

3.1.3. Procesos cognitivos de la actividad geométrica

Según Camargo, et al (2022) los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo del pensamiento geométrico son de: visualización, representación, conjeturación y de justificación. Estos procesos resultan fundamentales para el aprendizaje, ya que permiten a los estudiantes observar, manipular y relacionar objetos geométricos de manera visual, promoviendo una comprensión que facilita el avance hacia el razonamiento deductivo.

Las autoras sugieren que los estudiantes atraviesan un proceso de construcción cognitiva en la geometría mediante la coordinación de varias capacidades: la visualización, la representación, la conjeturación y la justificación. La visualización implica no solo la creación de imágenes mentales de figuras, sino también construir, transformar generalizar, comunicar y representar visualmente imágenes que están involucradas en las matemáticas la comprensión de estas figuras en un contexto matemático, transformando lo perceptivo en conceptual.

El proceso de visualización está implicado en la percepción sensorial visual y mental. Las autoras sugieren tres niveles de visualización, estos niveles están asociados a experiencias individuales y sociales. Estos niveles son: global o percepción visual, percepción e interpretación de elementos constitutivos, percepción visual operativa. Estos son clave para entender cómo los estudiantes interpretan y manipulan objetos geométricos y se describen así:

- **Percepción visual global:** Este nivel se refiere a la capacidad inicial de reconocer formas geométricas en su totalidad. Los estudiantes identifican figuras geométricas sin profundizar en sus propiedades específicas. Aquí, el enfoque está en la percepción general de la forma o estructura, sin atención detallada a los elementos individuales o a las relaciones internas de la figura.
- **Percepción e interpretación de elementos constitutivos:** En este nivel, los estudiantes comienzan a observar y diferenciar los componentes específicos de las figuras geométricas, como los lados, vértices o ángulos. Este análisis permite que comprendan las partes que constituyen una figura y empiecen a desarrollar interpretaciones sobre la relación entre estos elementos. Es un avance significativo hacia un análisis más estructurado y detallado de las formas.

- **Percepción visual operativa:** Este nivel implica la habilidad para manipular y transformar figuras geométricas mentalmente. Los estudiantes pueden imaginar rotaciones, traslaciones o simetrías de las figuras, y operar visualmente con sus elementos. Este tipo de percepción es esencial para el razonamiento deductivo y para realizar construcciones geométricas mentalmente, lo cual permite resolver problemas geométricos de manera activa y operativa.

Otro proceso cognitivo tenido en cuenta en el diseño de los talleres es el de representación, el cual “consiste en elaborar y usar imágenes de objetos geométricos” (Camargo et al. 2022, p. 9). Las representaciones pueden manifestarse tanto en forma mental como en elementos materiales. En el caso de los objetos geométricos, estas representaciones suelen adoptar la forma de imágenes o estructuras concretas. Aunque una representación pueda asemejarse mucho al objeto que modela, siempre existirá algún grado de pérdida de información respecto a las propiedades completas del objeto representado. (Camargo et al. 2022)

Además, la representación geométrica permite al estudiante explorar y comunicar sus ideas, lo cual refuerza el aprendizaje al integrar tanto lo visual como el razonamiento lógico. Esta actividad ayuda a generar una base sólida para que los estudiantes apliquen conceptos geométricos en problemas más complejos, fomentando una transición gradual hacia el pensamiento deductivo. Existen diversos tipos de representación entre los que se destacan mano alzada, instrumentos de medición y software de geometría dinámica.

Así también, en el desarrollo del pensamiento geométrico, la conjeturación y la justificación son procesos centrales que promueven la profundización en la comprensión de conceptos geométricos y el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes (Camargo et al., 2022). Ambos procesos son parte de una secuencia de actividades cognitivas en las que los

estudiantes exploran, identifican patrones y propiedades, formulan hipótesis, y posteriormente justifican estas hipótesis mediante argumentos lógicos.

La conjeturación es formular afirmaciones acerca de propiedades geométricas observadas, basándose en patrones visuales o regularidades notadas en construcciones geométricas y que requieren ser justificadas. Este proceso exploratorio anima a los estudiantes a generar ideas que, aunque inicialmente puedan carecer de formalidad, actúan como un punto de partida en la actividad matemática. medida que los estudiantes avanzan en sus conjeturas, comienzan a construir una base intuitiva para el desarrollo de razonamientos más formales, generando una mayor autonomía y participación activa en su proceso de aprendizaje geométrico (Hershkowitz et al., 1996).

Por otro lado, la justificación, es el proceso de argumentación mediante el cual los estudiantes intentan validar o refutar sus conjeturas iniciales. Este paso es fundamental, ya que permite que el conocimiento intuitivo se transforme en conocimiento formal y estructurado, acorde a los principios de la geometría. La justificación requiere el uso de definiciones, teoremas y axiomas, además de la construcción de argumentos deductivos que respalden la veracidad o falsedad de una conjetura. Este proceso de validación desarrolla la capacidad crítica y fortalece la comprensión de la geometría no solo como una serie de observaciones empíricas, sino como un sistema de conocimiento estructurado que requiere una base lógica sólida (Camargo et al., 2022).

Estos procesos, al ser integrados de manera estructurada en el aula o en este caso para un taller, pueden facilitar que los estudiantes-profesores pasen de una comprensión intuitiva de las figuras a una comprensión basada en principios formales de la geometría, haciendo de la actividad geométrica una herramienta poderosa para el desarrollo cognitivo. La combinación de visualización, representación, conjeturación y justificación se plantea, así como un eje central en

la didáctica de la geometría, creando oportunidades para el desarrollo de competencias geométricas que trascienden el ámbito escolar.

3.2. Marco Matemático

Se presentan dos aspectos que configuran el marco matemático, el primero sobre el teorema de Pitágoras que aborda los siguientes aspectos: triángulos, sus elementos, clasificación y relación, además se presenta el mapa conceptual donde se identifican los objetos primarios respecto al teorema de Pitágoras. Otro aspecto tratado en este marco es una breve reseña sobre Henry Perigal, quien realiza la demostración sobre el teorema de Pitágoras.

3.2.1. Teorema de Pitágoras

3.2.1.1. Triángulos y sus elementos

Triángulo: Un triángulo se forma a partir de tres puntos no colineales, es decir, puntos que no se encuentran en una misma línea. Los segmentos que unen estos puntos, denominados vértices, se combinan para crear una figura geométrica cerrada. Los elementos básicos de un triángulo incluyen sus vértices, los tres lados que lo delimitan, y tanto los ángulos internos como los ángulos externos que se generan en la intersección de estos lados.

Según la medida de sus lados los triángulos se clasifican en tres tipos: equilátero, isósceles y escaleno.

Triángulo equilátero: es un triángulo en el cual los tres lados tienen exactamente la misma longitud.

Triángulo isósceles: Es un triángulo en el que dos de sus lados tienen la misma longitud (son congruentes), mientras que el tercer lado es de una longitud diferente. Los ángulos opuestos a los lados iguales también son congruentes, es decir, tienen la misma medida.

Triángulo escaleno: Es un triángulo en el que cada uno de sus tres lados tiene una longitud distinta, es decir, no presenta lados congruentes.

Según la medida de sus ángulos los triángulos se clasifican en tres tipos: acutángulo, obtusángulo y rectángulo.

Triángulo acutángulo: Es un triángulo cuyos tres ángulos son agudos, es decir, cada uno mide menos de 90° . En un triángulo acutángulo, no hay ángulos rectos ni obtusos.

Triángulo obtusángulo: Es un triángulo que posee un ángulo obtuso, es decir, un ángulo cuya medida es mayor a 90° pero menor a 180° . Los otros dos ángulos en un triángulo obtusángulo son agudos, ya que sumados deben cumplir con el total de 180° en la figura geométrica.

Triángulo rectángulo: Es un triángulo que posee un ángulo recto, es decir, un ángulo que mide exactamente 90° . Los dos lados que forman este ángulo recto se conocen como *catetos*, mientras que el lado opuesto al ángulo recto se denomina *hipotenusa*, siendo el lado más largo del triángulo. Los otros dos ángulos en un triángulo rectángulo son agudos, es decir, miden menos de 90° .

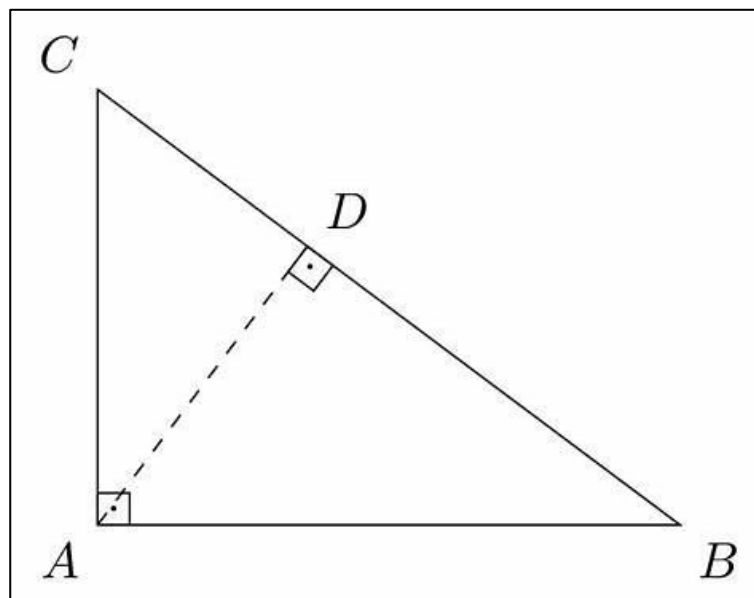
En cuanto a sus ángulos internos y externos tienen características tales como:

Ángulos internos: Tiene dos ángulos agudos estos son ángulos internos, son complementarios o sea sumados dan 90° .

Ángulos externos: cada uno es suplementario al ángulo interno del mismo lado. Ángulos suplementarios son dos ángulos que sumados nos dan 180° . Además, el ángulo externo adyacente al ángulo recto interno también mide 90° .

Figura 3

Ángulos externos de un triángulo rectángulo



Nota. Elaboración propia

3.2.1.2. Relaciones entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo

Cuando un triángulo posee un ángulo recto, sus lados reciben nombres específicos que reflejan sus posiciones y funciones. La «hipotenusa» es el lado opuesto al ángulo recto y es el más largo de los tres lados. Los otros dos lados, que forman el ángulo recto, se conocen como catetos: el cateto «adyacente», que está junto al ángulo agudo de referencia, y el cateto «opuesto», que se encuentra frente a ese ángulo agudo. Estos nombres ayudan a identificar las relaciones entre los lados en el contexto de la trigonometría y del teorema de Pitágoras.

Este teorema relaciona las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo. En el teorema se comprueba que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de

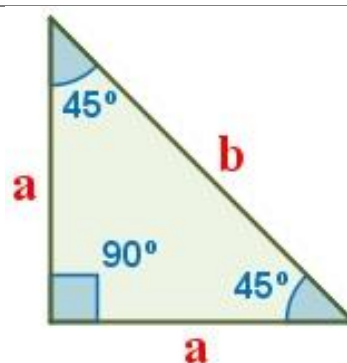
los catetos, teniendo así los lados del triángulo rectángulo identificados con los nombres de catetos y de hipotenusa.

La relación entre la medida de los lados del triángulo y su ángulo recto permite dos clases de triángulos que se explican en la tabla 1.

Tabla 1

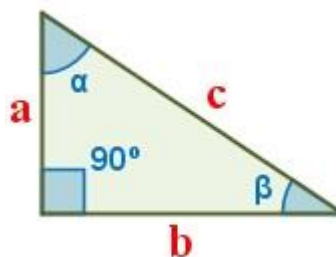
La relación entre la medida de los lados del triángulo y su ángulo recto

Triángulos rectángulos isósceles: En trigonometría, este tipo de triángulo se caracteriza por tener dos lados congruentes, que son los catetos, y un ángulo recto. Los ángulos agudos en un triángulo rectángulo isósceles miden 45° cada uno, ya que deben sumar 90° para completar los 180° del triángulo. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto y es el único lado de longitud diferente, siendo mayor que los catetos. Este tipo de triángulo es especialmente útil en trigonometría por sus propiedades de simetría y relaciones específicas entre los lados y los ángulos.



Tomada de Maths, (2024, 5 de mayo). *El triángulo rectángulo en la Trigonometría.*
<https://lc.cx/7ft6I>

Triángulos rectángulos escalenos: Este tipo de triángulo rectángulo se caracteriza porque todos sus lados y ángulos son diferentes. Tiene un ángulo recto de 90° y dos ángulos agudos que no son congruentes. En este triángulo, la hipotenusa, que es el lado más largo y opuesto al ángulo recto, suele denotarse con la letra c . Los otros dos lados, que son los catetos, se nombran comúnmente como a y b . Esta configuración de lados y ángulos permite el uso de relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras para resolver problemas geométricos.



Tomada de Maths, (2024, 5 de mayo). *El triángulo rectángulo en la Trigonometría.*
https://lc.cx/7ft6I_

Nota. Tomada de Maths, (2024, 5 de mayo). *El triángulo rectángulo en la Trigonometría.*
https://lc.cx/7ft6I_

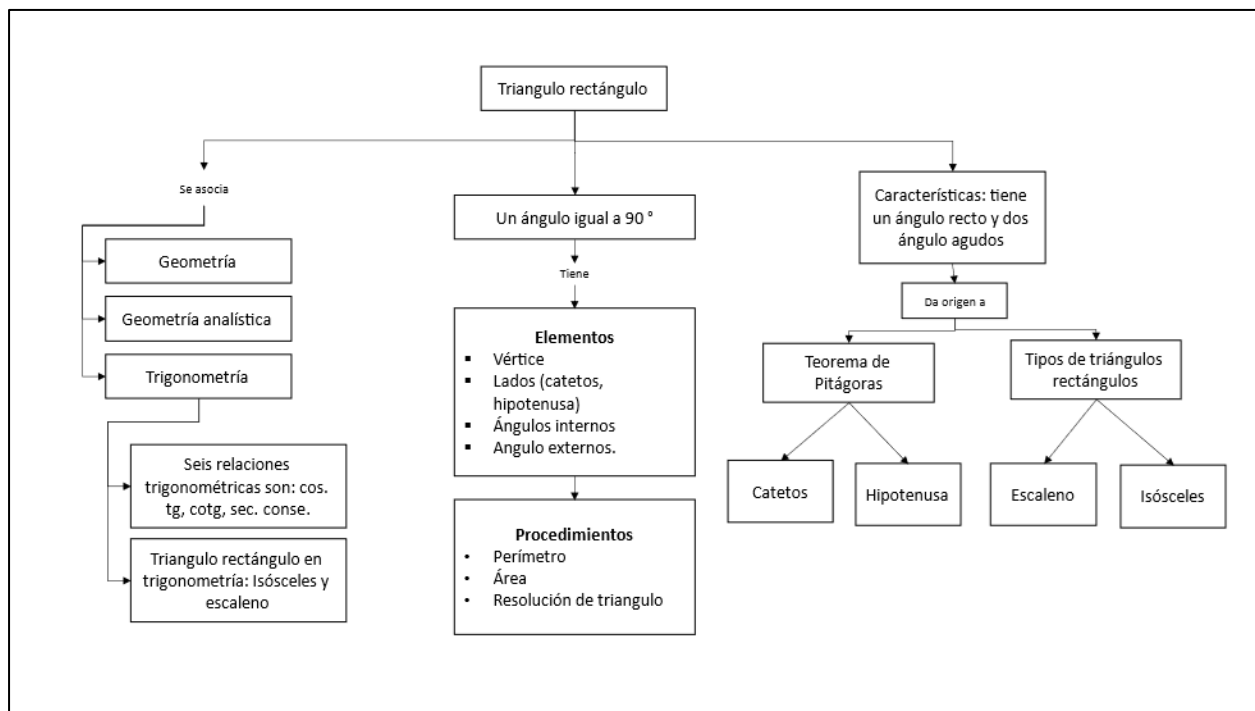
Para calcular el perímetro es suficiente conocer dos de sus lados, ya que el teorema de Pitágoras permite obtener el otro; además, para el cálculo del área si se toma un cateto como base entonces el otro cateto será la altura.

Para el cálculo del perímetro y del área de un triángulo rectángulo contamos con las siguientes fórmulas. $P = l + l + l$ donde l es el lado del triángulo, $A = \frac{b \cdot h}{2}$ donde b es la base y h es la altura

A continuación, se presenta el siguiente mapa conceptual referente al triángulo rectángulo donde se visualizan: elementos de un triángulo, procedimientos, los campos de la matemática con los cuales se le relaciona, los tipos de triángulos rectángulos, los elementos que caracterizan a un triángulo rectángulo.

Figura 4

Mapa conceptual. Triángulo rectángulo.

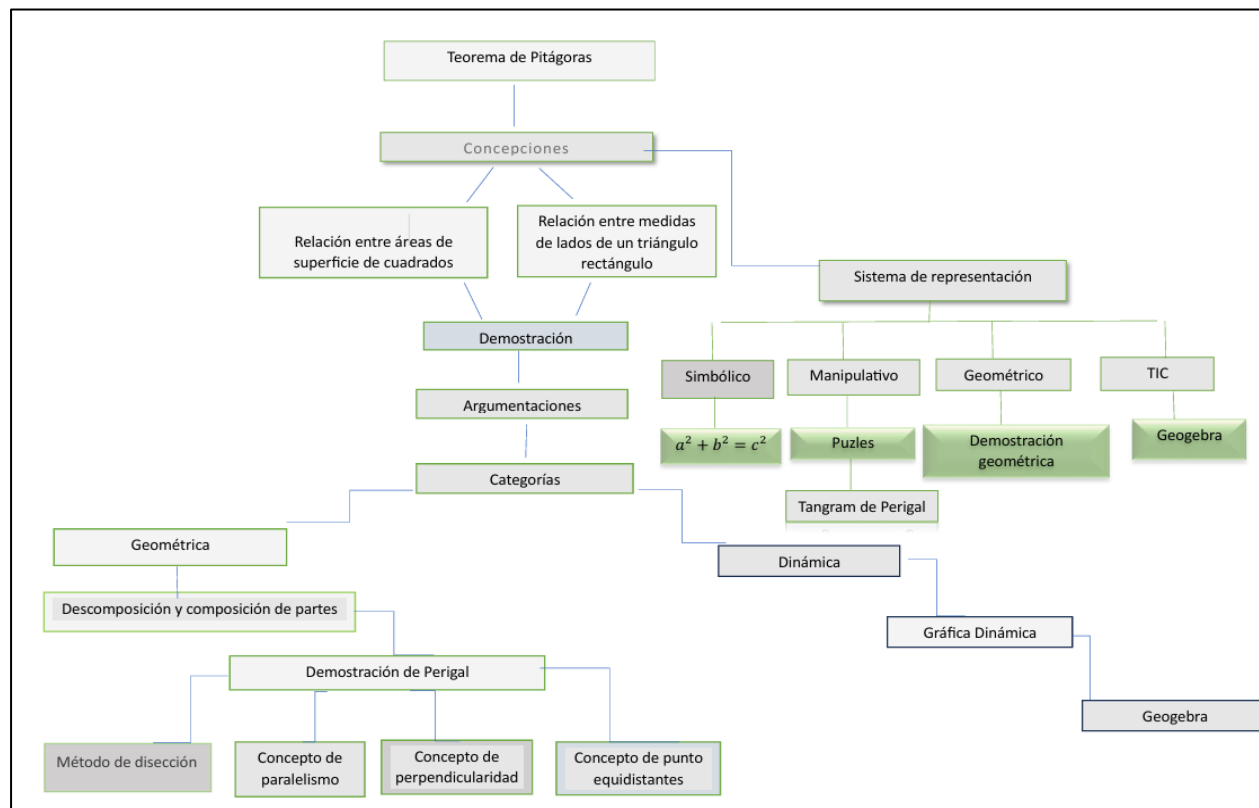


Nota. Elaboración propia.

Seguidamente se presenta también el mapa conceptual sobre el teorema de Pitágoras donde se contemplan concepciones, categorías, demostración y sistema de representación.

Figura 5

Mapa Conceptual. Teorema de Pitágoras.



Nota. Elaboración propia.

Henry Perigal realiza la idea de demostración del teorema de Pitágoras en 1830 basada en la descomposición de figuras, encontrando cierta disección. Perigal enunció su descubrimiento como "una demostración mecánica por transposición de partes del teorema del Triángulo Rectángulo". (Stewart, 2021, p. 79. Traducción propia).

Para obtener la disección del cuadrado construido sobre el cateto de longitud mayor, primero es necesario determinar el centro del cuadrado, el cual es la intersección de sus diagonales. Posteriormente, se traza una línea paralela a la hipotenusa del triángulo rectángulo

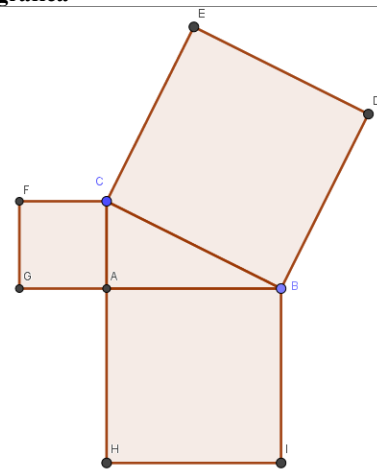
que pasa por este punto. Finalmente, se construye una línea perpendicular a la recta recién construida, que también es perpendicular a la hipotenusa del triángulo.

También funciona esta demostración si la disección se realiza en el cuadrado construido sobre el cateto menor, aunque no se tenga evidencias de que Perigal lo haya realizado.

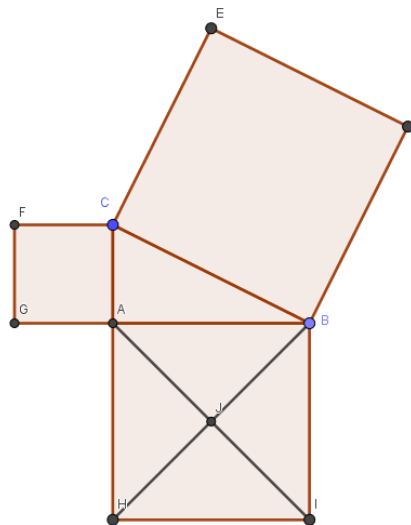
A continuación, se detalla el proceso de disección del Teorema de Pitágoras paso a paso, acompañado tanto de explicaciones textuales como de representaciones gráficas. La información ha sido recopilada de la obra de Perigal en el sitio de García Gutiérrez (2024), disponible en *Historias de la matemática* (<https://www.epsilon.es/paginas/historias/historias-033-demo-pitagoras-perigal.html>). Esta construcción resulta fundamental como preparación para llevar a cabo la demostración formal del teorema.

Tabla 2

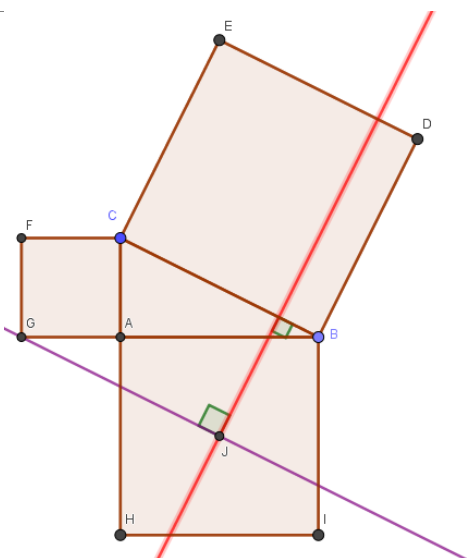
Proceso de construcción formal de la demostración de Perigal.

Proposición	Representación gráfica
Sea el $\triangle CAB$ un triángulo rectángulo, construir un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo.	

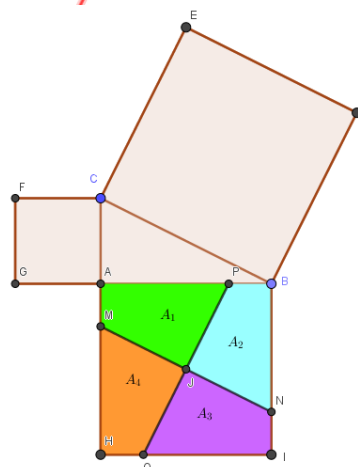
En el cuadrado que esta sobre el cateto con mayor medida, en este caso el cuadrado $ABIH$, ubicar su centro J .



Trazar una recta paralela al \overline{CB} por J (recta morada) y una perpendicular al \overline{CB} por J (recta roja).



Marcar los puntos de intersección entre las dos rectas trazadas y el cuadrado $ABIH$ para formar los cuadriláteros A_1, A_2, A_3, A_4 .



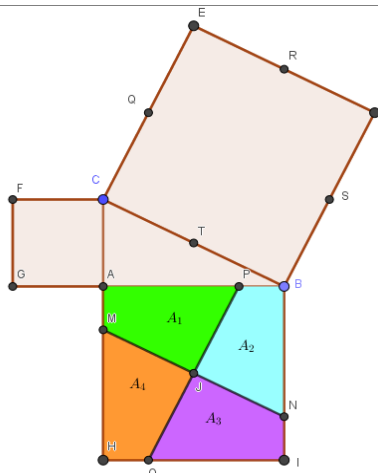
Nota. Elaboración propia.

Ahora interesa diseccionar el cuadrado que comparte un lado con la hipotenusa, de tal forma que estén ubicados los cuatro cuadriláteros que se acabaron de construir, junto con el cuadrado construido sobre el cateto de menor longitud como se ve en la siguiente tabla.

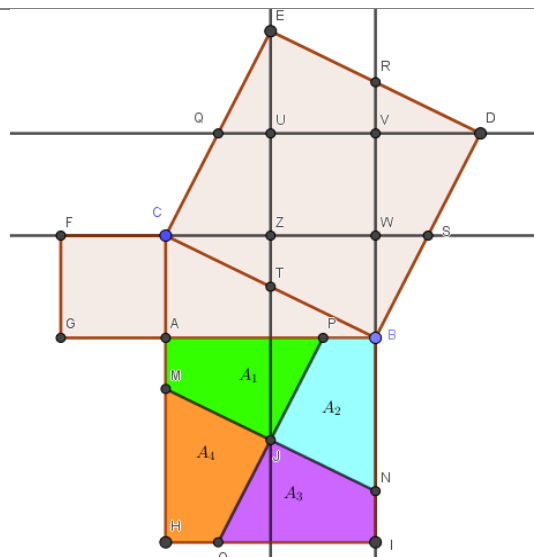
Tabla 3

Proceso de construcción de la demostración de Perigal.

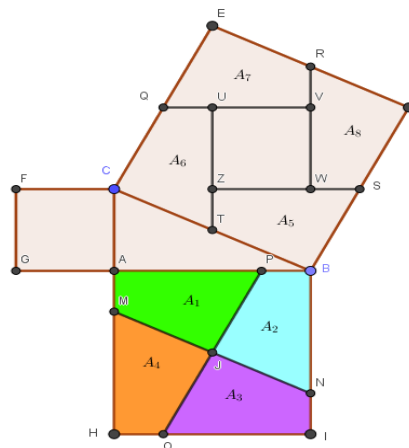
En el cuadrado $CBDE$ se marcan los puntos medios de cada lado (R, S, T y Q).



Trazar las rectas paralelas al \overline{AB} que pasen por Q y S ; las rectas paralelas al \overline{CA} que pasen por T y R ; marcar los puntos de intersección entre las rectas creadas (U, V, W y Z). (Note que también se puede hacer a partir de rectas perpendiculares o combinación entre perpendiculares y paralelas).



Trazar los segmentos \overline{QV} , \overline{RW} , \overline{SZ} , \overline{TU} para formar los cuadriláteros A_5 , A_6 , A_7 y A_8 .



Nota. Elaboración propia.

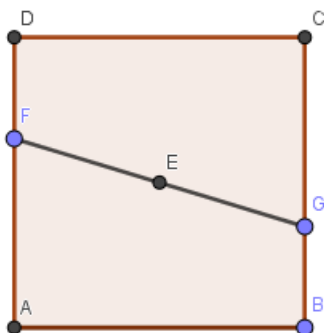
Como se observa gráficamente, las áreas de los cuadriláteros A_1, A_2, A_3, A_4 junto con el cuadrado $FCAG$, es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa. Por supuesto, dicha afirmación requiere una demostración que compruebe su veracidad.

Antes de desglosar la demostración y ver el paso a paso es conveniente mostrar los siguientes dos teoremas.

Tabla 4

Demostraciones de Teoremas

Dado un cuadrado $ABCD$ y el punto E su centro. Si los extremos del \overline{FG} están en dos lados opuestos del cuadrado y $E \in \overline{FG}$, entonces $\overline{FE} \cong \overline{EG}$.



Teorema 1

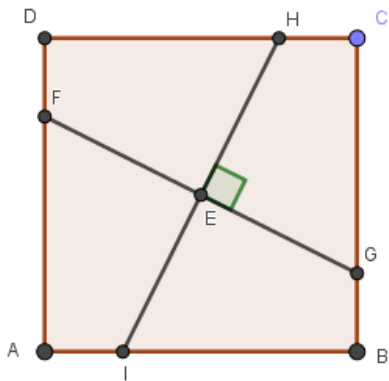
Demostración

Tomemos de manera arbitraria una diagonal del cuadrado. Así, para el \overline{DB} se obtiene que $\overline{DE} \cong \overline{EB}$ por el teorema del cuadrado (las diagonales de un cuadrado se bisecan en su punto medio y son congruentes) y la definición de punto medio de un segmento. Luego, $\angle DEF \cong \angle GEB$ por el teorema ángulos opuestos por el vértice y $\angle EDF \cong \angle DEB$ ya que son ángulos alternos internos y los dos lados del cuadrado son paralelos. Finalmente, se tiene que $\triangle FED \cong \triangle GEF$ por el criterio de congruencia entre triángulos ALA y, por lo tanto, $\overline{FE} \cong \overline{EG}$ por la definición de triángulos congruentes.

Corolario 1

E es punto medio del \overline{FG} .

Dado un cuadrado $ABCD$ y el punto E su centro. Si los extremos de los \overline{FG} y \overline{IH} están en dos lados opuestos del cuadrado, $E \in \overline{FG}$, $E \in \overline{IH}$ y $\overline{FG} \perp \overline{IH}$ por E , entonces $\overline{FG} \cong \overline{IH}$.



Teorema 2

Demostración

Por el teorema 1 se tiene que $\overline{IE} \cong \overline{EH}$, además, como $\overline{FG} \perp \overline{IH}$ por E entonces $\angle IEF \cong \angle HEF$ por el teorema cuatro ángulos rectos y el \overline{FE} es congruente a si mismo. Luego, por el criterio de congruencia entre triángulos LAL se tiene que $\triangle IEF \cong \triangle HEF$ y particularmente los $\overline{IF} \cong \overline{FH}$ por la definición de triángulos congruentes. De manera análoga se llega a que $\overline{IF} \cong \overline{FH} \cong \overline{HG} \cong \overline{GI}$ por lo que el cuadrilátero $IFHG$ tiene sus cuatro lados congruentes y sus diagonales respectivamente son \overline{FG} y \overline{IH} ; \overline{FG} y \overline{IH} se bisecan en su punto medio como consecuencia del teorema 1 y el corolario 1 por que no queda opción que el cuadrilátero $IFHG$ sea un cuadrado y, por consiguiente $\overline{FG} \cong \overline{IH}$.

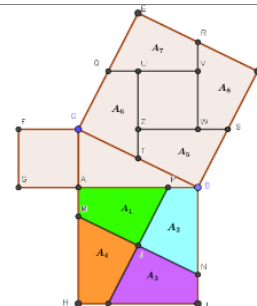
Nota. Elaboración propia

Seguidamente se muestra la demostración según el método de Perigal, en un paso a paso:

Tabla 5

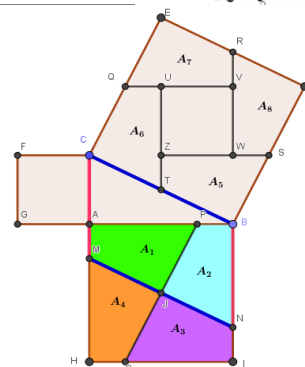
Demostración según el método de Perigal.

Teorema de Perigal: se observa una construcción y lo que se quiere probar es que los cuadriláteros $A_1 \cong A_5, A_2 \cong A_6, A_3 \cong A_7, A_4 \cong A_8$.



Paso 1

Primero, sabemos que $\overline{MN} \parallel \overline{CB}$ por como se realizó la construcción y $\overline{CM} \parallel \overline{BN}$ por el teorema segmento contenido en paralela y la definición de cuadrado. Así, el cuadrilátero $CBNM$ es un paralelogramo.



4. Aproximación metodológica

Este trabajo de profundización se centra en el diseño dos talleres para la formación de profesores, los cuales, una vez sean aplicados, permitirán ampliar sus conocimientos sobre el uso de diversos recursos para la comprensión del teorema de Pitágoras mediante el método de Perigal. Además, el diseño de estos dos talleres pretende promover el desarrollo de los conocimientos matemáticos y tecnológicos de profesores paraguayos de matemáticas del tercer ciclo de educación permanente. La aplicación de los dos talleres está prevista, una vez que retorne a mi país.

En ese contexto, el objetivo de esta sección es, describir el proceso seguido para el diseño de los dos talleres, basado en lo propuesto por Cano (2012). Así, esta sección se ha dividido en dos apartados para su mejor comprensión.

El primero, tiene que ver con la descripción del contexto en el que se tiene proyectado implementar los talleres. Esto incluye aspectos como las características de los profesores, los entornos laborales en los que se desempeñan y temas como el acceso a los recursos tecnológicos en las escuelas, entre otros temas.

El segundo, se refiere a la estrategia que se siguió para el diseño de los dos talleres. Ambos elementos son clave para adaptar los talleres según las necesidades y realidades específicas de los profesores participantes. Al combinar, el contenido y la metodología, se busca favorecer una implementación efectiva, lo que refuerza la importancia de comprender tanto el contexto como la estrategia de diseño en la planificación de los talleres.

4.1.Contexto en el que se implementaran los talleres

Este trabajo está dirigido a profesores de matemática del Tercer Ciclo de la Educación Básica de Educación Permanente, específicamente de instituciones que atienden a la educación de personas jóvenes y adultas del departamento Central de la República del Paraguay. A nivel departamental, en cuanto al uso de internet, se destaca el departamento Central con 83,9%, el mayor porcentaje de población usuaria de internet; alrededor de 8 de cada 10 personas utilizan internet en este departamento (Instituto Nacional Estadística Paraguay, 2024, p. 7).

Los encuentros con los profesores se llevarán a cabo en el colegio Carlos Antonio López, ubicado en la ciudad de Ñemby, departamento Central. Esta Institución educativa tiene una biblioteca con salones aptos para los encuentros con profesores en servicio.

En cuanto a los recursos tecnológicos se ha observado que los docentes disponen de computadores personales, mientras que en la biblioteca de la institución se tiene tres computadores y un retroproyector proporcionados por el gobierno nacional.

De acuerdo con el estudio titulado “Uso y Alcance de las Tecnologías de la Información y Comunicación en los Colegios de Gestión Oficial de la Educación Media” realizado por Canese et al., (2021), todos los profesores paraguayos encuestados señalaron que recibieron pocas o ninguna capacitación sobre el uso de TIC antes de la pandemia, por lo que tuvieron que aprender a utilizar estas herramientas en tiempo récord. El estudio también reporta que, aunque la mayoría de los profesores encuestados afirma tener un conocimiento general de herramientas informáticas, solo el 9% posee nivel experto. En este estudio participaron, en particular profesores del departamento Central, entre ellos de la ciudad de Ñemby.

4.2. Estrategia para el diseño

4.2.1. Descripción general y alcance

Se diseñaron dos talleres dirigidos a profesores de matemáticas, enfocados en la demostración del teorema de Pitágoras, mediante el uso de materiales manipulativos y del software dinámico GeoGebra. El objetivo principal de estos talleres es fortalecer los conocimientos matemáticos de los docentes sobre el teorema de Pitágoras y fomentar la integración de diversos recursos didácticos para su práctica educativa. Además, se busca que los docentes reconozcan la importancia de incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, acorde a lo contemplado en el TPACK. En este sentido, se hace especial énfasis en tres aspectos: el Conocimiento sobre el contenido (CK), el Conocimiento tecnológico (TK) y su integración, es decir el Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK).

El teorema de Pitágoras fue seleccionado como el objeto matemático, debido a su relevancia en las matemáticas escolares, su conexión con otros conceptos fundamentales y su capacidad para vincular la geometría con el álgebra. Posteriormente, se eligió, GeoGebra, como recurso tecnológico para la demostración dinámica del teorema. Asimismo, se optó por utilizar el tangram de Perigal, elaborado en madera, ya que permite ilustrar los conceptos geométricos involucrados y facilita la comprensión de la demostración desarrollada por Perigal a través de la interacción directa con el material.

Los procesos de visualización y representación se favorecen con la implementación de los talleres, ya que ambos procesos¹, son interdependientes y se potencian mutuamente en un entorno de aprendizaje. Al fomentar estos procesos, no solo se busca una comprensión más profunda de

¹ Estos procesos fueron explicados en el apartado de resultados en el desarrollo del Taller.

los conceptos matemáticos, sino también habilidades prácticas que les serán útiles en su formación académica y profesional de los docentes. En estos talleres, uno de los procesos más fortalecidos es la visualización, ya que se realiza una descomposición de elementos de una figura para ser trasladados a otra, utilizando el Tangram de Perigal y el software Geogebra. En cuanto al proceso de representación, además de utilizar los materiales didácticos tradicionales, como la regla y el compás, se utilizará el programa de geometría dinámica GeoGebra que permite realizar trazos y mediciones. Los procedimientos propuestos en los talleres favorecen la construcción mental del teorema de Pitágoras y propician variadas interpretaciones por parte del profesor. Además, el uso del programa GeoGebra brinda a los profesores la oportunidad de interactuar con la tecnología, reforzando sus conocimientos tecnológicos y su integración en el proceso de enseñanza.

En el marco de este trabajo, se adoptará la definición de “metodología de taller” propuesta por Cano (2012) concibe la metodología el taller como un "dispositivo de trabajo" en el que los participantes, a través del intercambio de saberes y la producción colaborativa, adquieren un papel activo en la creación de conocimiento. Este enfoque no solo permite alcanzar objetivos específicos, sino también fortalecer la cohesión grupal y fomentar la transformación tanto de los individuos como de la situación inicial (Cano, 2012).

Según Cano (2012), para que el taller conserve su propósito transformador de la práctica docente, debe ir acompañado de una reflexión teórica y una orientación estratégica clara, evitando así que se convierta en una mera técnica desprovista de sentido pedagógico. La planificación cuidadosa de los objetivos y el reconocimiento de los saberes previos de los participantes son elementos esenciales que refuerzan su efectividad en contextos de educación popular, donde se prioriza la participación activa y el empoderamiento colectivo (Cano, 2012).

Cano (2012), propone una guía de planificación que destaca pasos esenciales para estructurar un taller con fines educativos, considerando desde los objetivos hasta la organización temporal de cada sesión:

- 1. Objetivos:** Es fundamental definir claramente los objetivos que se desean alcanzar. Estos deben servir de guía para todas las actividades del taller y facilitar una evaluación enfocada en los resultados obtenidos.
- 2. Participantes:** La planificación debe considerar las características del grupo, como edad, género, nivel de conocimiento previo y afinidades. Esto permite ajustar las actividades para crear un ambiente inclusivo, donde todos los asistentes puedan participar activamente.
- 3. Contenidos:** La selección y organización de los contenidos debe hacerse de acuerdo con los objetivos del taller y las características de los participantes, evitando la sobrecarga de información. Se debe priorizar el tratamiento profundo de los temas elegidos en lugar de intentar abarcar demasiado.
- 4. Recursos:** Este punto contempla asegurar la disponibilidad de todos los materiales necesarios.
- 5. Responsables:** Definir quién estará a cargo de cada actividad, desde la coordinación general hasta tareas específicas como el registro de las interacciones.
- 6. Tiempo:** La organización temporal es fundamental para evitar la fatiga. Es recomendable planificar sesiones de una hora y media con pausas si el taller se extiende más allá de este tiempo, asegurando así la atención y participación de todos los asistentes.

Según Cano (2012), los momentos fundamentales para estructurar un taller se dividen en tres fases esenciales: «planificación, desarrollo y evaluación». Cada una cumple un papel específico en la creación de un espacio educativo participativo y transformador.

Al planificar un taller en el contexto de la educación popular, es fundamental estructurar su desarrollo en una secuencia de momentos clave que faciliten tanto el cumplimiento de los objetivos pedagógicos como la participación activa del grupo. Cada momento cumple una función específica que guía a los participantes desde la fase inicial de integración y establecimiento de expectativas, hasta el cierre del taller, donde se consolidan y evalúan los aprendizajes alcanzados.

Planificación: Esta fase inicial incluye la organización general del taller y, crucialmente, la convocatoria de los participantes. Es esencial detallar el propósito del taller en la convocatoria para alinear expectativas y atraer a los asistentes de forma adecuada. La planificación también debe contemplar la estructuración del tiempo y de los espacios en los que se realizarán las actividades.

Desarrollo: El desarrollo se divide en tres etapas:

Esta organización, basada en las etapas de apertura, desarrollo y cierre, permite que las actividades fluyan de manera coherente y que los participantes se sientan implicados en cada fase del proceso, promoviendo así una experiencia de aprendizaje significativa y transformadora (Cano, 2012).

- **Apertura:** Esta fase inicial en el taller presencial permite a los participantes conocerse, analizar sus expectativas y establecer el encuadre o acuerdos de trabajo, que definen los objetivos y limitaciones del taller. El coordinador realiza una

nivelación de expectativas para alinear las metas del taller con las percepciones de los asistentes.

- **Desarrollo:** El desarrollo continúa con la ejecución de las actividades planificadas, con una combinación de flexibilidad y creatividad, adaptándose a las necesidades del grupo y permitiendo una participación.
- **Cierre:** Este momento final es clave para recapitular, consolidar y evaluar los aprendizajes. A través de una discusión colectiva, se revisan los acuerdos, los aprendizajes obtenidos y se reflexiona sobre el impacto de la experiencia.

Evaluación: En esta fase, tanto los participantes como el equipo coordinador reflexionan sobre el proceso y los resultados del taller. Se realiza un análisis de los aprendizajes y de los aspectos de organización y metodología que fueron efectivos o que requieren ajuste. La evaluación se puede realizar con técnicas variadas, y es útil para documentar y mejorar futuras implementaciones del taller.

La guía de Cano (2012) enfatiza la importancia de integrar estos elementos de forma coherente para asegurar que el taller cumpla sus objetivos, respete las particularidades de los participantes y genere un impacto transformador en el contexto de la educación popular.

A partir de la estructura del taller propuesta por Cano, la tabla 6 muestra el formato utilizado para el diseño de los dos talleres, alineados con los objetivos de este trabajo.

Tabla 6

Formato de taller según Cano (2012).

Título
Objetivos
Participantes
Contenidos

Recursos	
Responsables	
Tiempo	
Momentos del taller	
Planificación	
Desarrollo	Apertura
	Desarrollo
	Cierre
Evaluación del taller	

Nota. Construcción propia.

5. Resultados

En este capítulo se presenta el diseño de los dos talleres, basado en los elementos teóricos establecidos en el marco teórico y en la orientación para el diseño de talleres propuesta por Cano (2012).

5.1. Taller 1.

Título del taller	Demostración del teorema de Pitágoras. Demostración por Henry Perigal a través de construcciones manuales.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer elementos geométricos en las construcciones geométricas. • Adquirir habilidades en las construcciones geométricas manuales con el uso del compás y la regla. • Conocer la demostración sobre el Teorema de Pitágoras realizada por Henry Perigal. • Fomentar el trabajo colaborativo entre los participantes y la reflexión sobre el proceso de construcción.
Participantes	El taller está dirigido a profesionales de la educación matemática, profesores del tercer ciclo de la Educación de Personas Jóvenes y Adultas del departamento Central del Paraguay.
Contenido	Teorema de Pitágoras. Demostración por Henry Perigal a través de construcciones manuales.
Recursos	<ul style="list-style-type: none"> • El Tangram de Perigal, material manipulable. • Presentación multimedia: diapositivas, videos. • Equipos audiovisuales • Materiales tales como tijeras, cartulina, papel, lápiz, compás, regla. • Recursos bibliográficos: Texto sobre elementos históricos respecto al Teorema de Pitágoras. • Texto con una reseña histórica sobre el matemático Henry Perigal.
Responsables	Dirección General de Educación de personas jóvenes y adultas. Dirección de Educación Básica para personas jóvenes y adultas.
Tiempo	3 horas.
Momentos del taller	
Planificación	<p>Para el diseño de este taller se ha tenido en cuenta tres aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • En cuanto al teorema de Pitágoras y la demostración de Perigal: Se tuvo en cuenta la demostración realizada del teorema de Pitágoras por Henry Perigal, a través del procedimiento de disección de un cuadrado construido respecto al cateto mayor del triángulo rectángulo. • En cuanto al modelo TPAK, se ha tenido en cuenta una de las categorías de este modelo, el conocimiento del contenido que debe tener el profesor de matemática para la enseñanza del teorema de Pitágoras. • En cuanto al uso de recursos; Se utilizarán materiales manipulativos tales como el Tangram de Perigal, que consiste en un rompecabezas de siete piezas, las cuales representan al triángulo rectángulo y los cuadrados construidos sobre sus respectivos lados, además este rompecabezas consta de los cuatro polígonos en los cuales ha quedado diseccionado el cuadrado. Todas las piezas son móviles. y listas para su manipulación por los participantes del taller. Además, se utilizará el compás y la regla, junto con el lápiz para las construcciones, también cartulinas, colores y tijeras. • En cuanto a los procesos a ser desarrollados son la visualización y la representación, en este taller se evidencian a través de diversas actividades estructuradas que facilitan la comprensión y aplicación del Teorema de Pitágoras, fomentando tanto el aprendizaje teórico como práctico. Aquí se destacan los principales procesos geométricos abordados en cada momento: <ol style="list-style-type: none"> a) Identificación de Figuras Geométricas y Disección: Al explorar y armar el Tangram de Perigal, los participantes identifican las figuras geométricas que componen la disección de un cuadrado y comprenden cómo estas figuras se relacionan con el triángulo rectángulo. Este proceso fomenta habilidades de observación y reconocimiento espacial, fundamentales para la percepción geométrica. b) Construcción Geométrica Manual: A través de construcciones con compás y regla, como el trazado de triángulos y cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo, los participantes desarrollan



habilidades prácticas y exactitud en la construcción geométrica. Este trabajo refuerza la comprensión de conceptos como congruencia, simetría y propiedades de los triángulos rectángulos.

- c) **Relación entre Elementos Geométricos:** La actividad que solicita a los participantes trasladar las piezas recortadas al cuadrado sobre la hipotenusa permite observar de manera práctica la relación entre las áreas de los cuadrados sobre los catetos y la hipotenusa, ilustrando visualmente el teorema de Pitágoras. Este proceso se basa en el reconocimiento de relaciones espaciales y proporcionales entre las áreas.
- d) **Razonamiento Deductivo y Comprobación del Teorema:** Las preguntas al final del taller guían a los participantes a deducir el teorema de Pitágoras a partir de la disección y el traslado manual de las piezas, lo que fomenta un razonamiento deductivo. Esta actividad contribuye a la validación conceptual del teorema y fortalece el entendimiento deductivo en el contexto geométrico.
- e) **Reflexión y Metacognición:** Se evidencian los procesos cognitivos como la visualización, que implica reconocer cómo las imágenes mentales ayudan a comprender conceptos espaciales y geométricos. Metacognitivamente, se trata de evaluar cómo usamos y adaptamos estas imágenes para resolver problemas, mejorando nuestra comprensión visual.

Y en cuanto al proceso de la representación, este proceso requiere reflexionar sobre la elección y eficacia de distintas formas de expresar ideas matemáticas (diagramas, ecuaciones, gráficos). Desde una perspectiva metacognitiva, implica cuestionar cómo una representación específica facilita o limita la resolución y comunicación de problemas. Este proceso final promueve la metacognición, permitiendo que los participantes valoren cómo la construcción geométrica manual refuerza su comprensión y cómo aplicarla en el aula.

Estos procesos juntos fortalecen habilidades para el pensamiento crítico en el aprendizaje matemático.

Apertura

Para la presentación de los participantes se aplicará la estrategia de la tela araña, y se destinará un tiempo a la presentación de cada participante.

La técnica de la tela araña también conocida como técnica de empatía. Este ejercicio permitiría que los participantes se conozcan, se rompan las actitudes tímidas e introvertidas de los participantes creando lazos de unión y conectando a las personas del grupo.

Descripción de la técnica: Los participantes sentados o de pie formarán un círculo. Se precisa contar con una persona dinamizadora que dará las orientaciones y proveerá del material que consiste en un ovillo de hilo. Se explicará que, al recibir el ovillo de hilo, la persona deberá presentarse indicando su nombre, organización a la que pertenece, descripción del trabajo que cumple, seguidamente sosteniendo una punta del ovillo arrojará el ovillo a otra persona del círculo. Esta actividad se repite de tal forma que el ovillo llegue a todos los participantes del círculo. Este ir y venir del ovillo y los hilos que se entrecruzan formarían una tela araña. La dinamizadora podrá tomar notas en un cartel, de los nombres, organizaciones a las que pertenecen y actividades que cumplen.

Se presenta los propósitos del taller

Se recogen las expectativas iniciales de los participantes a través de la técnica lluvia de ideas.

Primero se socializa un texto sobre elementos históricos respecto al Teorema de Pitágoras. Luego, se conformarán grupos de trabajo y cada grupo contará con un paquete con las piezas del Tangram de Perigal, en madera.

Luego se seguirán los siguientes pasos:

1º) Identificación de figuras geométricas (Fase exploratoria) Se presenta el material manipulable, el Tangram de Perigal.

Se solicita a los profesores que identifiquen las figuras geométricas que conforman el Tangram de Perigal y procedan a explorarlo.



Desarrollo

2º) Armar el Tangram de Perigal

Se solicita a los profesores que con las piezas:

- a) Formen un triángulo rectángulo
- b) Dispongan los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo.
- c) Dispongan las piezas de polígonos en el cuadrado construido sobre el cateto mayor del triángulo rectángulo y dispongan la pieza que corresponde al cuadrado construido sobre el cateto menor

3°) Identificación de la disección del cuadrado

Se solicita a los participantes la observación del cuadrado construido sobre el cateto mayor del triángulo rectángulo y las piezas ubicadas sobre el mismo.

Se trabaja sobre las siguientes preguntas

- ¿Cómo ha quedado el cuadrado?
- ¿En cuántos polígonos está dividido el cuadrado?
- ¿Son congruentes estos polígonos?



4°) Identificación de relaciones con la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Se solicita el trazado de las figuras del rompecabezas, trasladando así el rompecabezas al papel y determinando:

- El centro del cuadrado.
- ¿Cuál es la relación que existe entre los segmentos que conforman la disección del cuadrado construido sobre el cateto mayor y la hipotenusa del triángulo rectángulo?

5°) Trazado de figuras geométricas con regla y compás

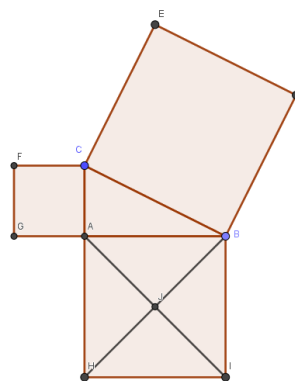
Se solicita la construcción de la siguiente figura en una cartulina. Utilizando regla y compás:

- Un triángulo rectángulo de medidas. $AB=15\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$, $CB=17\text{cm}$
Construir cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo

6°) Determinación del centro del cuadrado

Se solicita el trazado de las diagonales del cuadrado construido sobre el cateto mayor del triángulo rectángulo y luego determinar el centro del cuadrado.

La construcción esperada es:



7°) Trazado de segmento paralelo y perpendicular a la hipotenusa del triángulo. Luego de haber obtenido el centro del cuadrado construido sobre el cateto mayor del triángulo rectángulo se procederá al trazado de las siguientes rectas.

- Una recta paralela a la hipotenusa que pase por el centro del cuadrado
- Una recta perpendicular a la hipotenusa que pase por el centro del cuadrado.

La construcción esperada es

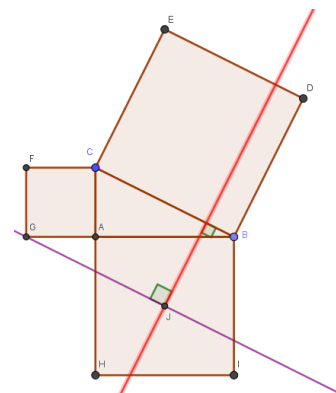
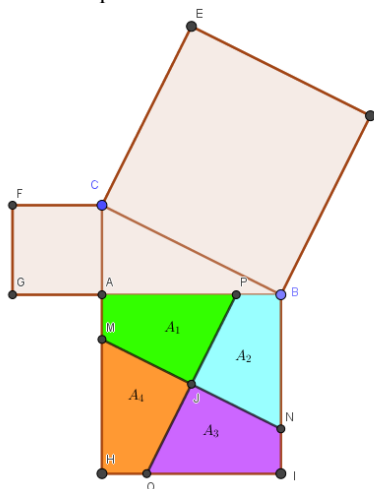
8°) Traslación manual

Los participantes observando la figura obtenida en la actividad 7°, determinan lo siguiente:

- ¿El cuadrado ha quedado diseccionado?
- ¿Cuántos polígonos conforman la disección del cuadrado?

Seguidamente se procede a colorear cada polígono y luego a recortarlos.

La construcción esperada es:



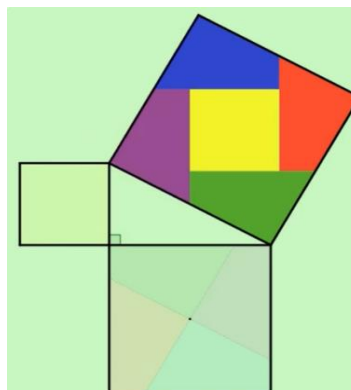
Posteriormente se trasladan las piezas recortadas, al cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Luego del traslado se observa que queda un espacio en el centro del cuadrado y surge la interrogante:

¿Cómo podemos completar ese espacio?

Una vez obtenida la respuesta se procede a trasladar el cuadrado construido sobre el cateto menor del triángulo rectángulo a dicho espacio.

La construcción esperada es:



9°) Identificación del teorema de Pitágoras.

Preguntas:

Según el procedimiento anterior responde las siguientes preguntas;

- ¿Qué teorema ha quedado comprobado con este procedimiento de trasladar las partes en forma manual al cuadrado mayor construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo?
- ¿Puedes enunciar el teorema??

c) ¿Quién realizó esta comprobación del teorema enunciado anteriormente?

10° Reflexión

Reflexión sobre los procedimientos realizados.

Preguntas al participante

1. ¿Cuáles son las dificultades que podrían tener los estudiantes al realizar la demostración del teorema de Pitágoras usando medios manuales?

¿Además de esta demostración existe otra forma de comprobar el teorema de Pitágoras?

2. Cuáles son los conocimientos matemáticos que se precisan para realizar las actividades.?
3. ¿Cuáles son los procesos cognitivos implicados en las construcciones y animaciones observadas.?
4. ¿Cómo la construcción con medios manuales ayuda a comprender el Teorema de Pitágoras y su aplicación en el aula?

Cierre

Se hará una breve retroalimentación sobre las construcciones realizadas y se identificarán posibles mejoras.

Evaluación del taller

A través de la siguiente rejilla se procederá a la evaluación del taller respecto a los conocimientos adquiridos.

Indicadores de evaluación	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Indiferente	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
Se ha comprendido el tema tratado.					
Se implementaron metodologías de aprendizajes efectivas.					
El contenido fue presentado en forma clara y comprensible.					
Se vivenciaron dinámicas de aplicación práctica en el proceso cumplido.					
Se brindaron recursos adicionales para profundizar en el tema tratado.					
Se logró conectar los contenidos del taller con las experiencias del profesor.					
Se fortaleció el trabajo colaborativo entre los participantes.					

Taller 2

Título del taller	Demostración del teorema de Pitágoras. Comprobación usando GeoGebra.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Familiarizarse con el software GeoGebra. Realizar la comprobación visual por medio de construcciones geométricas y la utilización de movimientos rígidos en el plano (traslación, rotación). Identificar los conocimientos sobre el contenido matemático y tecnológico que tiene el profesor de matemáticas para la enseñanza del Teorema de Pitágoras.
Participantes	El taller está dirigido a profesionales de la educación matemática, profesores del tercer ciclo de la Educación de Personas Jóvenes y Adultas del departamento Central del Paraguay.
Contenido	Teorema de Pitágoras. Comprobación aplicando recursos tecnológicos.
Recursos	<ul style="list-style-type: none"> Recursos tecnológicos: contar con una computadora que tenga instalado el software GeoGebra, Internet. Presentación multimedia: diapositivas, videos. Equipos audiovisuales. Recurso bibliográfico: Textos sobre construcciones geométricas en GeoGebra.
Responsables	Dirección General de Educación de personas jóvenes y adultas. Dirección de Educación Básica para personas jóvenes y adultas.
Tiempo	3 horas
Momentos del taller	
Planificación	<p>Para el diseño de este taller se ha tenido en cuenta tres aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> En cuanto al teorema de Pitágoras y la demostración de Perigal: Se tuvo en cuenta la comprobación realizada del teorema de Pitágoras por Henry Perigal, a través del procedimiento de disección de un cuadrado construido respecto al cateto mayor del triángulo rectángulo y que posteriormente son movilizadas al cuadrado construido sobre la hipotenusa. En cuanto al modelo TPAK, se ha tenido en cuenta una de las categorías de este modelo, el conocimiento tecnológico que debe tener el profesor de matemática para la enseñanza del teorema de Pitágoras. En cuanto al uso de recursos sería utilizado el programa GeoGebra para la construcción de las gráficas y la movilización de las piezas se recurriría al uso de las herramientas de este software. En cuanto a los procesos, se detallan algunos de los procesos geométricos que se trabajan en cada momento del taller: Construcción y Exploración de Figuras: Al realizar construcciones geométricas en GeoGebra, los participantes no solo desarrollan sus habilidades en la creación de figuras como segmentos, triángulos y cuadrados, sino que también comprenden las propiedades y relaciones de estos elementos. El uso de herramientas como la creación de paralelas, perpendiculares y polígonos facilita el entendimiento de conceptos básicos de geometría y de cómo estos se interrelacionan en el plano. Movimientos Rígidos y Transformaciones: A través de las herramientas de traslación y rotación, los participantes aprenden a manipular las figuras en el espacio, lo que permite una comprobación visual de la equivalencia de áreas en el contexto del teorema de Pitágoras. La habilidad para mover los polígonos y observar cómo encajan en el cuadrado construido sobre la hipotenusa fomenta una comprensión intuitiva y visual del teorema. Disección y Relación entre Áreas: El proceso de disección del cuadrado sobre el cateto mayor y el traslado de los polígonos al cuadrado sobre la hipotenusa permiten a los participantes observar la relación directa entre las áreas de los cuadrados construidos sobre cada lado del triángulo rectángulo. Esta actividad promueve la comprensión de la equivalencia de áreas, un concepto clave en el teorema, y lo hace de manera visual y práctica, facilitando el razonamiento geométrico. Reflexión y Justificación: Al responder preguntas reflexivas sobre las construcciones realizadas, los participantes desarrollan habilidades de justificación matemática, un proceso esencial en la validación de conjeturas y en el entendimiento de demostraciones geométricas. La reflexión sobre los pasos de construcción y los errores comunes en el uso de GeoGebra ayuda a consolidar el aprendizaje y a comprender cómo las herramientas tecnológicas pueden apoyar la enseñanza en el aula. Aplicación de Conocimientos Tecnológicos y Matemáticos: Este taller no solo se centra en los conceptos geométricos, sino que también fomenta el uso de habilidades tecnológicas y el conocimiento del software GeoGebra, lo cual es esencial para los educadores que buscan integrar

herramientas digitales en la enseñanza. Este enfoque combina el conocimiento geométrico con el manejo de tecnologías, alineándose con el modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico, Pedagógico y de Contenido) y promoviendo una enseñanza que conecta la teoría con la práctica. Este taller emplea el software GeoGebra para involucrar a los participantes en un aprendizaje activo, donde los procesos geométricos de construcción, visualización, transformación y justificación son integrados en un entorno digital, facilitando así una comprensión profunda y aplicable del Teorema de Pitágoras en el contexto educativo

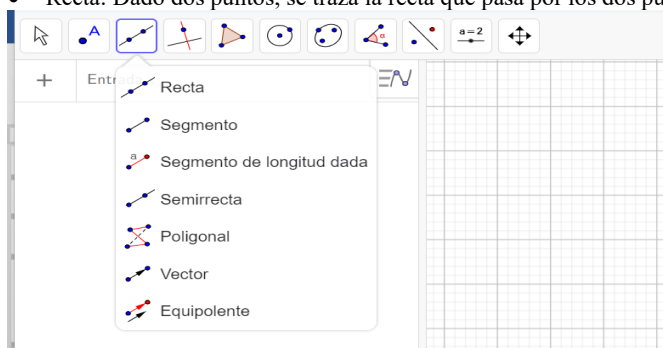
Desarrollo

Apertura

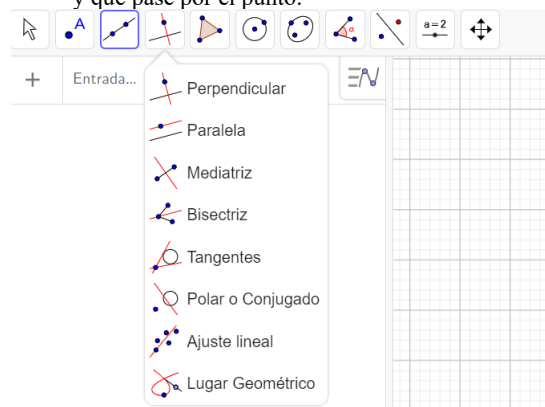
Presentación de un video sobre el software GeoGebra.
Presentación de un texto sobre construcciones geométricas con el uso del software GeoGebra.
Análisis de las expectativas de los participantes. Diálogo entre profesores, para la construcción del modelo del teorema de Pitágoras en GeoGebra a partir de sus experiencias.

Construcción del modelo del teorema de Pitágoras en GeoGebra.

- Indicaciones sobre el uso y la función de las herramientas de GeoGebra.
- La instructora indicará las funciones de las siguientes herramientas en GeoGebra: segmento, recta, paralela, perpendicular, polígono, traslación. Luego procederá a realizar el gráfico de los siguientes elementos geométricos en GeoGebra.
- Segmento: Dados dos puntos se traza un segmento por estos dos puntos.
- Recta: Dado dos puntos, se traza la recta que pasa por los dos puntos.

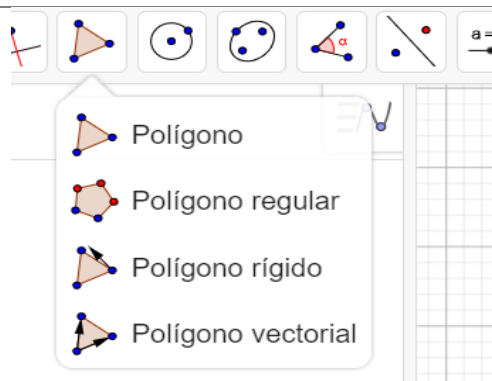


- Perpendicular: dada una recta y un punto (externo o interno a la recta), se traza la recta perpendicular por el punto a la recta.
- Paralela: dada una recta y punto externo a la recta, se traza la recta paralela a la recta dada y que pase por el punto.



Desarrollo

- Polígono: se crea el polígono que pasa por vértices dados.



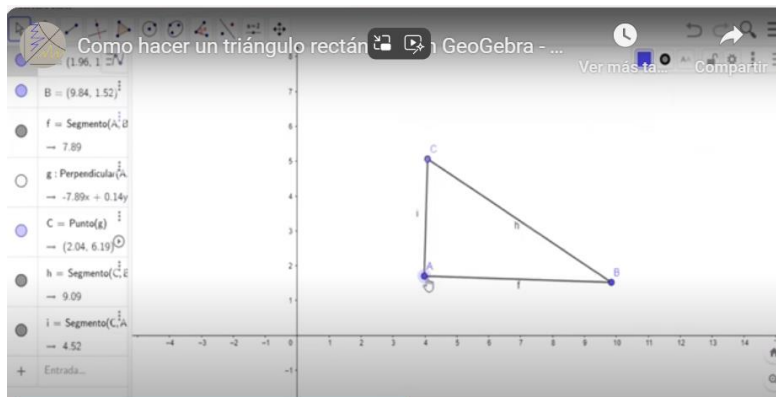
- Los participantes realizarán la práctica para la construcción de: segmento, recta, perpendicular y paralela, en el programa GeoGebra

Construcción de un triángulo rectángulo en el programa GeoGebra:

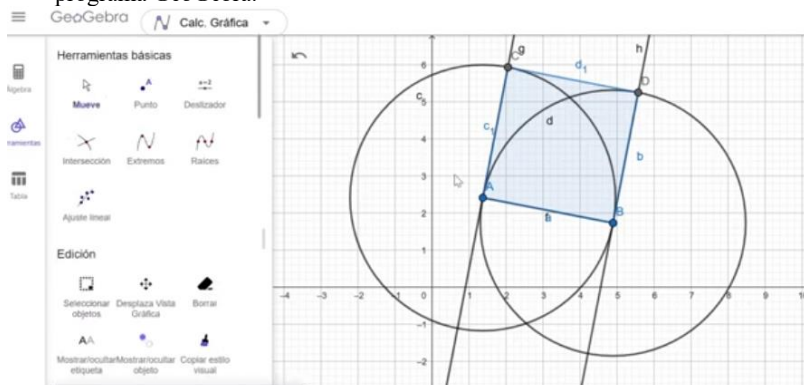
En primer lugar, los participantes observarán un video.

Luego la instructora procederá a realizar el gráfico en GeoGebra.

Los participantes realizarán la práctica para la construcción de un triángulo rectángulo en GeoGebra.

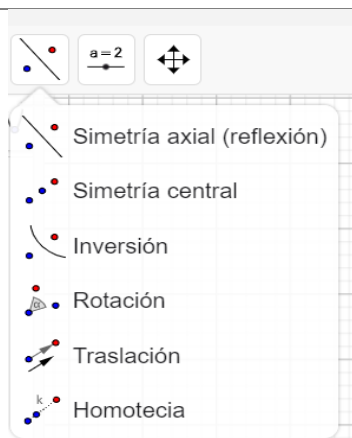


- Para acceder hacer clic [aquí](#)
- Construcción de un cuadrado en el programa GeoGebra:
- En primer lugar, los participantes observarán un video.
- Luego la instructora procederá a realizar el gráfico en GeoGebra.
- Los participantes realizarán la práctica para la construcción del cuadrado en el programa GeoGebra.

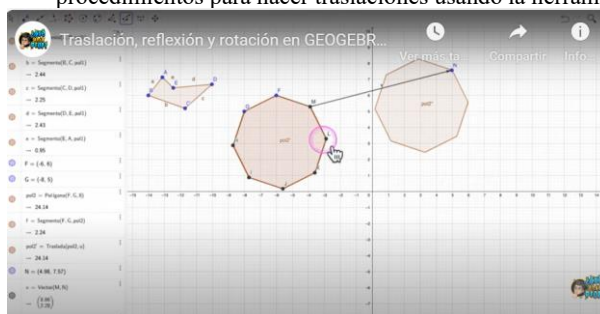


<https://www.bing.com/search?q=C%C3%B3mo+se+construye+un+cuadrado+en+geogebra>

Procedimientos para la Traslación de polígonos: dado un vector y un punto (o figura) se traslada el punto (o figura) en la dirección y magnitud del vector dado



- En primer lugar, los participantes observarán un video donde se aprecie los procedimientos para hacer traslaciones usando la herramienta vector y traslación.

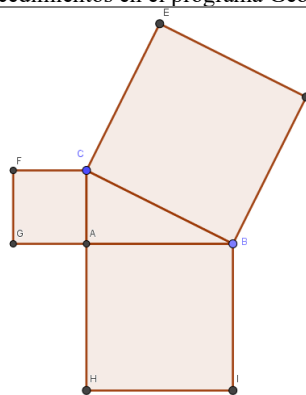


- Luego la instructora procederá a realizar traslaciones de polígonos usando el software GeoGebra.
- Los participantes realizarán la práctica para la traslación de polígonos en el programa GeoGebra.

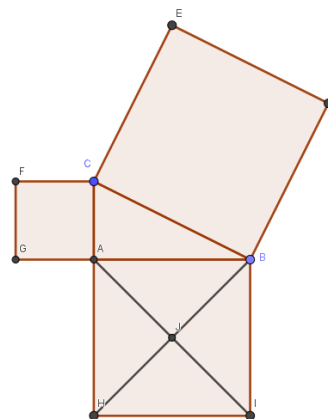
Cómo realizar la construcción de la disección de un cuadrado.

- Realizar la construcción de la disección del cuadrado construido sobre el cateto de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- Se procederá a realizar los siguientes procedimientos en el programa GeoGebra

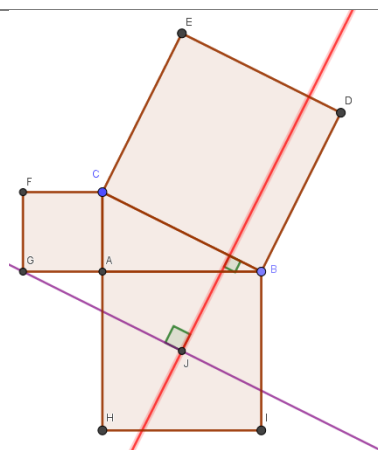
Sea el $\triangle CAB$ un triángulo rectángulo, hacemos un cuadrado sobre cada uno de los lados de este triángulo



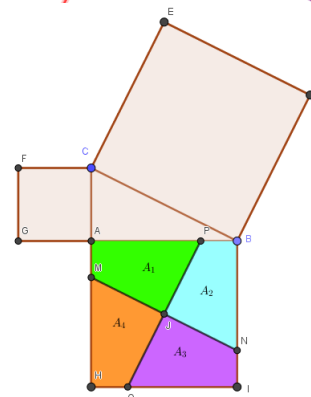
En el cuadrado que esta sobre el cateto con mayor medida, en este caso el cuadrado ABIH, ubicamos su centro J.



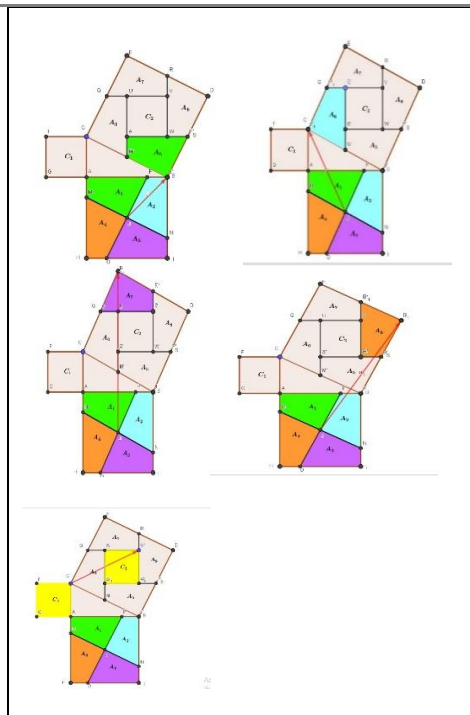
Trazamos una recta paralela al (CB) por J (recta morada) y una perpendicular al (CB) por J (recta roja).



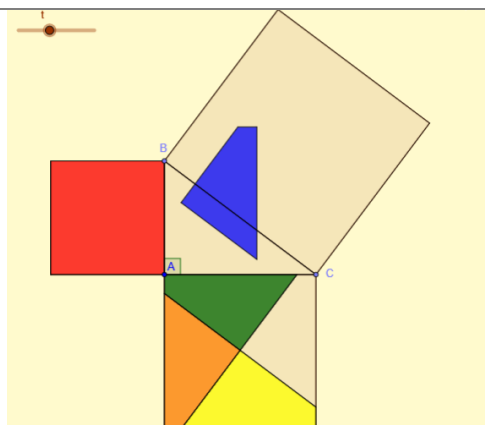
Se marcan los puntos de intersección entre las últimas dos rectas creadas y el cuadrado ABIH y se forman los cuadriláteros A_1, A_2, A_3, A_4 respectivamente.



Seguidamente se aplicará el procedimiento de traslación para movilizar los polígonos al cuadrado construido sobre la hipotenusa, también se trasladará el cuadrado que se encuentra sobre el cateto menor del triángulo rectángulo



Finalmente se observará en el siguiente vínculo como las piezas se van trasladando <https://www.GeoGebra.org/m/Jya6jArZ>



- Reflexión sobre los procedimientos realizados.

Preguntas al participante

1. ¿Cuáles son las dificultades que podrían tener los estudiantes al realizar la demostración del Teorema de Pitágoras usando el software GeoGebra? ¿Qué errores podrían cometer los estudiantes?
2. ¿Además de esta demostración existe otra forma de comprobar el teorema de Pitágoras?
3. Cuáles son los conocimientos matemáticos y tecnológicos que se precisan para realizar las actividades.?
4. ¿Cuáles son los procesos cognitivos implicados en las construcciones y animaciones observadas
5. ¿Con estos procedimientos observados qué se ha llegado a demostrar respecto a la relación que hay entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo? ¿Qué acciones se pueden introducir el profesor en la clase para motivar a los estudiantes en la comprobación del teorema de Pitágoras usando el software GeoGebra?

Cierre	<p>Reflexión sobre los pasos desarrollados: A través del intercambio de opiniones los participantes analizarán la siguiente pregunta: ¿Cómo la construcción con apoyo de la tecnología ayuda a comprender el teorema de Pitágoras y su aplicación en el aula? Luego se hará una breve retroalimentación sobre las construcciones realizadas y se identificarán posibles mejoras.</p>
--------	--

Evaluación del taller A través de la siguiente rejilla se procederá a la evaluación del taller respecto a los conocimientos adquiridos.

Indicadores de evaluación	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Indiferente	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
Se ha logrado la comprensión del tema tratado.					
Se implementaron metodologías de aprendizajes efectivas.					
El contenido fue presentado en forma clara y comprensible.					
Se vivenciaron dinámicas de aplicación práctica en el proceso cumplido.					
Se brindaron recursos adicionales para profundizar en el tema tratado.					
Se logró conectar los contenidos del taller con las experiencias del profesor.					
Se fortaleció el trabajo colaborativo entre los participantes.					

Los conocimientos sobre el contenido y conocimientos tecnológicos que se buscan promover y fortalecer en los profesores con los dos talleres se indican en la siguiente tabla y responden a dos categorías del modelo TPACK.

Tabla 7

Los conocimientos sobre el contenido y conocimientos tecnológicos.

Conocimiento sobre el contenido (CK)	Conocimiento Tecnológico (TK)
Rectas Paralelas Rectas Perpendiculares. Triángulo rectángulo Elementos de un triángulo rectángulo.	Saber trazar paralelas y perpendiculares usando las herramientas perpendicular y paralela del software GeoGebra.

Teorema sobre perpendicularidad Teorema sobre rectas paralelas. Diseción de un cuadrado	Utilizar la herramienta punto medio de un segmento.
Baricentro de un cuadrado.	Utilizar las propiedades para asignar colores a los polígonos generados en la disección realizada.
Enunciado del teorema de Pitágoras. Relación entre las superficies de los cuadrados contruidos sobre los lados del triángulo rectángulo.	Realizar traslaciones usando la herramienta vector del software GeoGebra
Congruencia de triángulos.	

Nota. Construcción propia.

En la siguiente tabla se muestra cómo las preguntas de cada uno de los talleres responden a conocimientos matemáticos o tecnológicos.

Tabla 8

Categorías del TPACK.

Preguntas dirigidas al Profesor	Conocimiento del Contenido	Conocimiento Tecnológico
1. - ¿Cuáles son los procesos cognitivos implicados en las construcciones?		✓
2- ¿Cuáles son las dificultades que podrían tener los estudiantes al realizar la demostración del Teorema de Pitágoras usando el software GeoGebra? ¿Qué errores podrían cometer los estudiantes?		✓
3- ¿Además de esta demostración existe otra forma de comprobar el teorema de Pitágoras?	✓	
4- ¿Qué conocimientos matemáticos y tecnológicos se precisan para realizar esta comprobación del teorema de Pitágoras?	✓	✓
5- ¿Con estos procedimientos qué se ha llegado a demostrar respecto a la relación que hay entre las áreas de los cuadrados contruidos sobre los lados del triángulo rectángulo?	✓	

Nota. Elaboración propia.

6. Consideraciones finales

En este apartado se presentan las conclusiones del trabajo de grado, organizadas en tres aspectos: el cumplimiento de los objetivos, los aportes que dejó el desarrollo del trabajo de grado y las proyecciones personales de la autora.

6.1. Conclusiones asociadas a los objetivos general y específicos

El objetivo general de este trabajo es diseñar dos talleres para profesores de matemáticas del tercer Ciclo de Educación Permanente sobre el teorema de Pitágoras, utilizando el software GeoGebra, con el fin de contribuir al desarrollo de los conocimientos matemáticos y tecnológicos contemplados en del modelo TPACK Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK). Para cumplir con este objetivo, se elaboraron un marco conceptual y un marco matemático que permitieron identificar y apropiarse de los elementos centrales para el diseño. El estudio del modelo TPACK, confirmó la necesidad de que los profesores tengan un conocimiento matemático profundo sobre el teorema de Pitágoras y los conceptos relacionados, lo que permite incorporar la tecnología de manera adecuada en su enseñanza. Por otro lado, la indagación sobre el uso del software GeoGebra en el aula de matemáticas, y las ventajas que ofrece, al ser una herramienta versátil y libre, brindó fundamentos suficientes para afirmar que su elección como artefacto mediador en el desarrollo de uno de los talleres es adecuada. Por último, su elección como artefacto mediador en el desarrollo de uno de los talleres es adecuada, resaltó la necesidad de posibilitar intencionadamente el desarrollo de algunos de estos procesos en el diseño de los talleres; en particular, aquellos relacionados con los procesos de visualización y representación.

Para identificar los conocimientos matemáticos que el profesor debe dominar al enseñar el teorema de Pitágoras, se consideró lo expuesto por Shulman (1986, citado en (Koehler, Mishra, & Cain, 2015) quien afirma que dicho conocimiento “incluye conceptos, teorías, ideas, marcos

organizativos, evidencia y pruebas, así como prácticas y enfoques establecidos para desarrollar ese contenido” (p.13). Algunos de los conceptos que el profesor debe conocer para enseñar el teorema de Pitágoras son: triángulo, elementos que componen un triángulo, clasificación de los triángulos, rectas paralelas, rectas perpendiculares, paralelogramo, cuadrado, disección de un cuadrado y postulados de semejanzas y congruencia de triángulos, entre otros. En cuanto a las concepciones sobre el teorema de Pitágoras, el profesor debe conocer que es posible enunciarlo como relación de las medidas de los lados del triángulo o como relación entre las áreas, siendo esta última la que se abordó en los talleres.

Por otro lado, el conocimiento sobre la tecnología (TK) no se refiere solamente al uso de herramientas tecnológicas, sino que implica la capacidad del profesor para seleccionar aquellas que mejor apoyen los procesos de enseñanza del contenido matemático que se va a desarrollar. En este contexto, el enfoque TPACK ofrece un marco útil, ya que permite integrar adecuadamente la tecnología en su enseñanza. Los talleres diseñados proporcionaron oportunidades para que los profesores desarrollaran este tipo de conocimiento.

Con respecto a diseñar dos talleres profesionales que involucren la demostración del teorema de Pitágoras, a partir del método de Perigal, utilizando materiales manipulables y el uso del software GeoGebra, estos fueron diseñados.

A través de estos talleres, se propone un abordaje didáctico integrando tanto material manipulable como el uso de GeoGebra, permitiendo a los participantes una comprensión más profunda y dinámica sobre el teorema de Pitágoras. La combinación de recursos tangibles y digitales facilita el desarrollo de habilidades cognitivas, como visualización y representación, promoviendo así un aprendizaje activo y significativo.

Los talleres diseñados promueven un entendimiento profundo sobre el teorema de Pitágoras, potenciando la capacidad en los profesores para que ellos diseñen propuestas de enseñanza con metodologías similares, con miras a favorecer la construcción del conocimiento matemático en sus estudiantes.

El programa GeoGebra, ampliamente utilizado en la de enseñanza de la geometría plana, destaca por su sencillez y facilidad, siendo gratuito y permitiendo la construcción de figuras geométricas, así como el establecimiento de relaciones y métricas (Rincón, 2018). Estos aspectos motivaron su inclusión como herramienta clave en el segundo taller.

6.2. Aporte a la formación de la autora

Este trabajo me ha enfrentado a diversas situaciones que han favorecido mi formación profesional, permitiéndome adquirir habilidades en el uso del software GeoGebra y sus herramientas, así como la demostración del teorema de Pitágoras a través del método de Perigal, temas sobre los cuales inicialmente tenía un conocimiento limitado. En cuanto a la redacción, un aspecto que considero uno de mis puntos débiles, he logrado mejorar significativamente a través de la práctica del parafraseo y la elaboración de citas y referencias. Este proceso me ha permitido sentirme más competente para desempeñar mi rol de educadora con mayor confianza y capacidad. Además, me ha permitido tener una visión más clara de la posibilidad de ofrecer talleres de capacitación, contribuyendo de manera más directa al desarrollo de otros profesionales en esta área.

Además, me motiva a continuar con estudios de doctorado y seguir estudiando para mejorar continuamente y poder ayudar a otros, dada la gran necesidad de profesionales capacitados en investigación.

Considero que todo el proceso de preparación de este trabajo de grado ha fortalecido mi actitud hacia la vida transformándome en una persona más solidaria, tolerante y comprensiva de los procesos. A su vez, percibo que mis competencias académicas, así como mis actitudes hacia el aprendizaje y la investigación se han consolidado.

6.3. Posibles asuntos de investigación futura

Estoy interesada en incursionar en trabajos de investigaciones, especialmente en lo que respecta a la aplicación de software para el desarrollo de los procesos didácticos de las matemáticas escolares. Este trabajo ha despertado en mí iniciativas para seguir estudiando sobre este tema y considero que es importante contar con estudios que brinden información acerca del nivel de desarrollo de las competencias pedagógicas y tecnológicas de los profesores de matemáticas en Paraguay.

Me interesaría hacer estudios en el aula donde pueda observar cómo los estudiantes, al desarrollar un contenido matemático, interactúan al utilizar la tecnología y vivenciar los avances y dificultades que manifiestan. Además, observar las competencias que el profesor debe poseer cuando se enfrenta a este tipo de situaciones.

Además, me interesaría elaborar módulos para los profesores de matemáticas, en los cuales se utilicen tanto materiales manipulativos y el software Geogebra para la demostración de otros teoremas, como por ejemplo el teorema de Thales.

Referencias

- Agencia de Información Paraguaya [IP]. (9 de Septiembre de 2020). *MEC presentó resultados del sistema nacional de evaluación del proceso educativo*. Obtenido de <https://www.ip.gov.py/ip/2020/09/09/mec-presento-resultados-del-sistema-nacional-de-evaluacion-del-proceso-educativo/>
- Barrantes Masot, M. C., Zamora Rodríguez, V., & Barrantes López, M. (2021). Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. *Revista de educación matemática*, 36(1). doi:<https://doi.org/10.33044/revem.32658>
- Benítez, C., y Giménez, s. (2019). Estudio de la incidencia de la competencia matemática de los docentes en el desarrollo de la misma en los estudiantes de 1° ciclo de la Educación Escolar Básica, en cinco instituciones educativas de Asunción y Central. *Revista de Ingeniería, Ciencia y Sociedad*, 1-9.
- Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2022). *Tareas de geometría plana para la Educación Básica*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Cano, A. (2012). La metodología de taller en los procesos de educación popular. *Revista Latinoamericana de Metodología de las Ciencias Sociales*, 2(2), 22-51. En Memoria Académica. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.5653/pr.5653.pdf
- Cañete-Estigarribia, D. (2019). Competencia Digital Docente en el Contexto Paraguayo. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0*, 11(1), 36-46. doi:<https://doi.org/10.37843/rted.v11i1.183>
- Carrillo, A. (2017). GeoGebra en el aula. Propuestas y sugerencias. *Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe*. Cali.
- CONEC. (2014). Informe sobre la situación de la educación paraguaya, 2013-2014. *Consejo Nacional de Educación y Cultura*.
- Córdoba, & Cardeño, J. (2013). Innovación en la enseñanza de las matemáticas: *Uso de GeoGebra*. Fondo Editorial ITM.

- Crompton, H. (2014). Examining and mapping CS teachers technological, pedagogical and content knowledge (TPACK) in K12 schools. *IEEE*. Obtenido de ieeexplorer.ieee.org/abstrac/document/704406.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161-204). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_5
- Instituto Nacional Estadística Paraguay. (24 de junio de 2024). *¿Cómo está el acceso a las Tecnologías de la Información y Comunicación en el Paraguay?* Obtenido de https://www.ine.gov.py/ende/contenido.php?c=2037&title=%C2%BFC%C3%B3mo_est%C3%A1_el_acceso_a_las_Tecnolog%C3%ADas_de_la_Informaci%C3%B3n_y_Comunicaci%C3%B3n_en_el_Paraguay
- Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? *Virtualidad, educación y ciencia*, 6(10). doi:<https://doi.org/10.60020/1853-6530.v6.n10.11552>.
- López-Altamirano, D. A., Gómez-Morales, M. J., Mayorga-Alvarado, F. R., Paredes-Ojeda, M. E., Paredes-Ojeda, W. E., Mendoza-Bozada, C. J., . . . A., L.-A. D. (2015). Formación continua docente: un estudio cualitativo en los docentes de matemáticas en Ecuador. *Polo del Conocimiento*, 5(4), 369-388. Obtenido de <https://polodelconocimiento.com>
- Mello-Román, J. D., y Giménez, S. (2021). Una perspectiva de la educación Matemática en Paraguay. Contribuciones desde la Universidad Nacional de Concepción. *Revista Paraguaya de Educación*, 9(1), 101-119. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/352833468_Una_perspectiva_de_la_educacion_Matematica_en_Paraguay_Contribuciones_desde_la_Universidad_Nacional_de_Concepcion
- Mereles, J. I., & Canese, V. (2022). Dificultades docentes durante la educación remota en Paraguay. *Revista científica en ciencias sociales*, 4(1). doi:<https://doi.org/10.53732/rccsociales/04.01.2022.8>

- Ministerio de Educación y Cultura. (2011). *Programa de Estudio. Educación Básica Bilingüe para Personas Jóvenes y Adultas 3° Ciclo*. MEC.
- Ministerio de Educación y Ciencias. (2020). *Informe Nacional de Resultados SNEPE 2018 Evaluación Censal*. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. MEC.
- OCDE. (2023). Resultados PISA 2022 (Volumen I): El estado del aprendizaje y la equidad en la educación, PISA, OECD. doi:<https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Rincón, E. (2018). *El desarrollo de la comprensión de los objetos de la Geometría Plana en los estudiantes de la carrera de Educación, Mención Matemática*. [Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad Autónoma de Santo Domingo, República dominicana]. Repositorio de Institucional.
- Rivera-Robles, S. B., Salcedo-Lagos, P. A., Valdivia-Guzmán, J. R., y López-Jara, O. A. (2021). Estudios empíricos del modelo sobre conocimiento didáctico-tecnológico del contenido (TPACK) en matemáticas, incluidos en bases bibliográficas internacionales. *Información Tecnológica*, 30(4), 109-120. doi:<http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642021000400109>.
- Rojas-Escribano, L., y Báez-Rojas, J. J. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. *El cálculo y su enseñanza*, 9(1), 52-63. Obtenido de <https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/18>
- Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas - en los últimos 10000 años*. Crítica.
- Stewart, S. M. (2021). Henry Perigal. Dissector, paradoxer, habitué of learned societies, and ornamental lathe turner extraordinaire. *Irish Mathematical Society Bulletin*, 87, 51-85
- Suárez, A., y Zubieta, C. (2022). *Análisis de idoneidad epistémica de videos de youtube relacionados con el teorema de Pitágoras*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Walen, S. B., Williams, S. R., & Garner, B. E. (2003). Pre-service teacher learning mathematics using calculators: A failure to connect current and future practice. *Teaching and Teacher Education*.

Willermark, S. (2017). Conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido: una revisión de estudios empíricos publicados entre 2011 y 2016. *Journal of Educational Computing Research*, 56(3), 315-343. doi:<https://doi.org/10.1177/0735633117713114>