

TRATAMIENTO DE LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA EN UN LIBRO DE
GEOMETRÍA PLANA

SANTIAGO CARDOZO FAJARDO
YUDI ANDREA ORTIZ ROCHA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2015

TRATAMIENTO DE LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA EN UN LIBRO DE
GEOMETRÍA PLANA

SANTIAGO CARDOZO FAJARDO
C.C. 1010206066
Cód. 2011140008

YUDI ANDREA ORTIZ ROCHA
C.C. 1075672232
Cód. 2011140052

Modalidad


Asociada al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor

Óscar Javier Molina Jaime
Profesor Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2015


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Universidad del conocimiento</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

1. Información general

Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Tratamiento de los Teoremas de Existencia en un libro de Geometría Plana.
Autor(es)	Cardozo Fajardo, Santiago; Ortiz Rocha Yudi Andrea.
Director	Molina Jaime, Óscar Javier
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 78 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Teorema de existencia; Enunciado; Demostración, Aproximación metodológica; Geometría Plana.


2. Descripción

El grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, hace una propuesta específica para el nivel universitario que tiene como objetivo que los estudiantes den sentido a cuestionarse sobre la existencia de los objetos geométricos en el marco de una teoría específica y perciban que no tiene mucho significado hablar de objetos, cuya existencia no se ha justificado. Así que, se pretende exponer la clasificación de los teoremas de existencia desde dos perspectivas, en la primera, se mostrará la clasificación desde el contenido geométrico de los teoremas; es decir, se tendrá en cuenta el enunciado y demostración; en la segunda, se expone la clasificación desde el contenido geométrico, es decir, según el tipo de problemas que aluden a los teoremas de existencia; para ello se menciona dos aspectos, problemas según el tipo de problemas propuesto, y problemas según el tipo de búsqueda. Este trabajo es realizado haciendo un análisis de los teoremas expuestos en el libro Geometría plana: un espacio de aprendizaje; cabe resaltar no trabajaron los teoremas de existencia que aluden a cuadriláteros, proyección paralela y circunferencia.


	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

3. Fuentes
<p>Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. <i>Annals of Mathematics</i>, 33(2), 329-345. Disponible en http://www.jstor.org/stable/1968336</p> <p>Mariotti M. y Fischbein E. (1997). <i>Defining in classroom activities</i>. Kluwer Academic Publishers. <i>Educational Studies in Mathematics</i> 34: 219-248</p> <p>Mariotti, A. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. En M. Hejnny J. Novotna (eds.). <i>Proceedings of the European Conference on Mathematical Education</i> (pp. 21-26). Prague: Prometheus Publishing House.</p> <p>Mariotti, A. (2006). Proof and proving in mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), <i>Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future</i>. Genova: Sensepublishers.</p> <p>Samper, C. y Molina, Ó. (2013). <i>Geometría plana: Un espacio de Aprendizaje</i>. Universidad Pedagógica Nacional Fondo Editorial. Bogotá.</p>

4. Contenidos
<p>Para desarrollar los propósitos del estudio, este trabajo se organiza en siete capítulos. En el Capítulo uno, se hace la presentación del tema. El capítulo dos incluye la justificación y algunos estudios realizados frente a los teoremas de existencia desde el punto de vista filosófico; por otro lado, se muestran el objetivo general y los objetivos específicos. En el Capítulo tres, se presenta el marco de referencia que sustenta el estudio, constituido por dos partes: Lo relativo a asuntos matemáticos (descripción general de los sistemas teóricos involucrado) y a la aproximación metodológica propuesta por el grupo Æ•G. En el Capítulo cuatro se presenta la metodología implementada para desarrollar el estudio; en el capítulo cinco se describen con detalle las categorías de análisis que nos permitieron clasificar los teoremas de existencia En el capítulo seis</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formadora de Profesores</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 4	
<p>se realiza el análisis mismo a la luz de las categorías propuestas en el cuarto capítulo. Finalmente, en el capítulo siete se exponen las conclusiones que son producto del análisis realizado.</p>		

5. Metodología
<p>La metodología utilizada para la realización del trabajo de grado, corresponde a un análisis de texto. Además, de manera específica, las etapas llevadas a cabo para realizar el estudio son:</p> <p><i>Búsqueda de referentes teóricos:</i> En primer lugar, se realizó una búsqueda de fuentes bibliográficas que diera alguna referencia a la temática de interés (teoremas de existencia en matemáticas). En los documentos revisados se encontró que muchos de estos estudios son relacionados con la filosofía de las matemáticas, lo cual llevó a pensar que el cuestionamiento de los teoremas de existencia en el marco de una teoría eran totalmente pertinentes, puesto que, en relación con el tratamiento de dichos teoremas no hay información suficiente, no obstante, estos asuntos no son el objetivo del trabajo.</p> <p><i>Construcción del marco teórico:</i> Precisión de los referentes que proporcionarán luces respecto de cómo clasificar los teoremas de existencia en el marco de una teoría específica.</p> <p><i>Construcción de categorías de análisis:</i> Las categorías de análisis, atienden a los referentes teóricos antes mencionados. Se realizaron dos tipos de clasificaciones: uno desde un punto de vista matemático atendiendo al enunciado y a su demostración (en donde fueron determinadas 7 categorías emergentes, 3 para los enunciados, y 4 para las demostraciones); y otro según el tipo de tareas (problemas) que se proponen en el libro para abordar estos teoremas (para ello tuvimos en cuenta la tipología propuesta por Samper, Molina y otros (2013))</p> <p><i>Análisis del libro Geometría Plana:</i> un espacio de aprendizaje, Samper y Molina (2013): Se hace uso de tablas que sintetizan la clasificación realizada y presentan una descripción de cada enunciado o demostración tenido en cuenta. Además, para cada caso, se explica la razón de la clasificación realizada a la luz de la descripción de cada categoría de análisis. De manera análoga se realiza lo correspondiente a la tipología de problemas que aluden a los teoremas de existencia.</p> <p><i>Escritura del documento final:</i> Terminado el análisis, se precisan los resultados generales del</p>

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 4	
<p>mismo y las conclusiones del estudio dando respuesta a los objetivos del estudio.</p>		

6. Conclusiones
<p>Realizando la correspondencia entre las categorías de las clasificaciones según enunciado y según demostración, se infiere que existe una relación entre el tipo de enunciado y el tipo de demostración; no obstante, la correspondencia no es total, dado que no todos los teoremas pertenecen al mismo grupo.</p> <p>Por otro lado, los enunciados que atienden a condiciones específicas (ECE) son muy importantes en el sistema teórico, dado que se usan frecuentemente en situaciones de construcción. Por ejemplo, cuando se necesita un ángulo con una medida específica, el teorema Construcción de Ángulos es vital, pues este justifica la existencia del objeto (el ángulo) con la condición solicitada (la medida).</p>

Elaborado por:	Cardozo Fajardo Santiago; Ortiz Rocha Yudi Andrea
Revisado por:	Molina Jaime Óscar Javier

Fecha de elaboración del Resumen:	21	05	2015
--	----	----	------

CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN	5
2.	BREVE PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA	7
2.1.	JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO: ¿POR QUÉ ESTUDIAR LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA?	7
2.2.	OBJETIVO GENERAL.....	8
2.3.	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	9
3.	REFERENTES TEÓRICOS	10
3.1.	TEOREMA DESDE LA PERSPECTIVA DE MARIOTTI.....	10
3.2.	EL MODELO DE BIRKHOFF PARA LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA.....	11
3.2.1.	SISTEMA TEÓRICO DE BIRKHOFF	12
3.3.	DEFINICIONES DE OBJETOS EN UNA TEORÍA	22
3.3.1.	DEFINICIONES DESDE LA PERSPECTIVA DE ARISTÓTELES.....	22
3.3.2.	DEFINICIONES DESDE LA PERSPECTIVA DE MARIOTTI.....	26
3.4.	DESCRIPCIÓN GENERAL DEL LIBRO GEOMETRÍA PLANA: UN ESPACIO DE APRENDIZAJE.....	27
4.	ASPECTO METODOLÓGICOS	30
4.1.	METODOLOGÍA DEL ESTUDIO	30
4.2.	ETAPAS DEL ESTUDIO.....	30
4.2.1.	BÚSQUEDA DE REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS.....	31
4.2.2.	CONSTRUCCIÓN DEL MARCO DE REFERENCIA	31
4.2.3.	DETERMINACIÓN DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	32
4.2.4.	ANÁLISIS	33
4.2.5.	RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y ESCRITURA DEL INFORME	33
5.	CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.....	34
5.1.	DE ACUERDO CON EL CONTENIDO GEOMÉTRICO	34
5.1.1.	DE ACUERDO AL ENUNCIADO	34
5.1.2.	DE ACUERDO A LA DEMOSTRACIÓN	36
5.1.3.	DE ACUERDO A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS.....	41
5.1.4.	DE ACUERDO AL FOCO DE BÚSQUEDA.....	42
6.	ANÁLISIS	44
6.1.	ANÁLISIS DEL ENUNCIADO DE LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA.....	44

6.1.1.	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A DEFINICIONES.....	44
6.1.2.	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A POSTULADOS	47
6.1.3.	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A CONDICIONES ESPECÍFICAS.....	50
6.2.	ANÁLISIS DE LA DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA.	52
6.3.	ANÁLISIS SEGÚN EL TIPO DE PROBLEMAS QUE SE PROPONEN PARA LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA.	69
6.3.1.	PROBLEMAS TEÓRICOS.	71
6.3.2.	PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA	71
6.3.3.	TEOREMAS QUE SURGEN EN MEDIO DE UNA DEMOSTRACIÓN:.....	72
6.4.	ANÁLISIS SEGÚN EL FOCO DE BÚSQUEDA.....	72
6.4.1.	BÚSQUEDA DE CONSECUENTE.....	73
6.4.2.	BÚSQUEDA DE ANTECEDENTE.....	73
6.4.3.	DETERMINACIÓN DE DEPENDENCIA	74
6.5.	CORRESPONDENCIA ENTRE EL TIPO DE PROBLEMAS Y LOS ENUNCIADOS.....	74
6.5.1.	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A DEFINICIONES VS TIPO DE PROBLEMAS.....	74
6.5.2.	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A POSTULADOS VS TIPO DE PROBLEMAS.....	75
6.5.3.	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A CONDICIONES ESPECÍFICAS VS TIPO DE PROBLEMAS	76
7.	CONCLUSIONES	77
8.	BIBLIOGRAFÍA	80

1. INTRODUCCIÓN

El grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) ha trabajado en la conceptualización de la “actividad demostrativa” y su favorecimiento en las clases de geometría de nivel universitario, específicamente, mediante una propuesta de innovación que se viene llevando a cabo en los cursos de la línea de geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En los trabajos realizados no han considerado aún una indagación exhaustiva que permita reportar con suficiente detalle cuáles son los aspectos determinantes del papel del profesor y de la participación de los estudiantes en la producción, organización y tratamiento de enunciados de *teoremas de existencia*. Este trabajo quiere aportar un poco en este sentido, no precisando el papel del profesor ni los estudiantes en el proceso, sino proveyendo un pequeño análisis de texto del libro que fundamenta el desarrollo del curso Geometría Plana. Desde esa perspectiva, específicamente se pretende clasificar los *teoremas de existencia* en dos sentidos: el primero, desde un punto de vista matemático, teniendo en cuenta su enunciado y demostración, y el segundo, desde un punto de vista didáctico, según el tratamiento propuesto por Samper y Molina (2013) en su libro Geometría plana: un espacio de aprendizaje.

En relación con la existencia de los objetos matemáticos, Guevara (2008) menciona que la filosofía de las Matemáticas nombra algunas posturas (el realismo, el conceptualismo, el nominalismo, el apriorismo, el empirismo, el objetivismo y el existencialismo) desde las cuales se explica la naturaleza de los entes matemáticos a partir de una perspectiva ontológica. Cuando la filosofía de las matemáticas aborda el asunto de la existencia de los objetos matemáticos, entre otras cosas, aborda el estudio de la fundamentación de las matemáticas. En relación con estas, Guevara (2008) nombra tres posiciones: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo. La primera posición reduce las matemáticas a la lógica, esto es, pretende que sus conceptos básicos sean definidos mediante recursos puramente lógicos. Dice Guevara (2008) que desde este enfoque, las matemáticas pierden su autonomía y se convierte en parte de la lógica. Con el

formalismo se destaca, como su nombre lo indica, el carácter formal de las Matemáticas mediante un método axiomático; desde este punto de vista, las Matemáticas se ven como un juego de signos y símbolos de carácter formal dejando a un lado la parte empírica y probando la no contradicción de las teorías matemáticas; en esta posición se destacan Hilbert y Birkhoff como principales exponentes (Pareja, 2007). Por su parte, para el intuicionismo, la existencia matemática ya no equivale a no contradicción, como en el caso del formalismo, sino que significa constructividad, donde la demostración matemática es una construcción intuitiva y no formal realizada mediante la introspección. Con este panorama, ya en el marco de teorías matemáticas particulares, se proveen argumentos sobre la existencia de los objetos matemáticos, en otras palabras, demostraciones de su existencia

Desde esta perspectiva, varios espacios académicos del programa de Licenciatura en Educación Matemática toman como fundamento el formalismo con ciertos matices; de manera específica el curso Geometría Plana (curso que es soportado por el libro que se pretende analizar) es un ejemplo de esto; allí se determina un conjunto lógicamente estructurado de enunciados los cuales se diferencian entre sí por su estatus teórico: los axiomas son afirmaciones que se suponen como verdaderas; las definiciones caracterizan los objetos que conforman al sistema teórico (claro, algunos objetos no se definen como punto, recta y plano); y los teoremas son afirmaciones que se deducen de las definiciones, axiomas y otros teoremas del sistema. El matiz del tratamiento en clase de esta fundamentación formalista se manifiesta en la intención deliberada para que los estudiantes se involucren en una *axiomatización descriptiva*, siendo esta una aproximación alternativa a la axiomática deductiva; según Freudenthal (1973, citado en Perry, Samper y Otros, 2012) una axiomatización tal “destaca la pertinencia de participar en la práctica de axiomatizar; propone que los estudiantes participen en procesos de axiomatización descriptiva del conocimiento matemático que ya conocen”.

Con lo expuesta anteriormente, tiene todo sentido especificar el sistema teórico sobre el cual versa el curso de Geometría Plana y por ende, sustentan los Teoremas de existencia. Ese sistema teórico, según el libro Geometría plana: un espacio de aprendizaje, es el propuesto por Moise (1963) el cual fundamenta a su vez en el modelo de Birkhoff (1932).

Para desarrollar los propósitos del estudio, este trabajo se organiza en siete capítulos. En el Capítulo uno, se hace la presentación del tema. El capítulo dos incluye la justificación y algunos estudios realizados frente a los teoremas de existencia desde el punto de vista filosófico; por otro lado, se muestran el objetivo general y los objetivos específicos. En el Capítulo tres, se presenta el marco de referencia que sustenta el estudio, constituido por dos partes: Lo relativo a asuntos matemáticos (descripción general de los sistemas teóricos involucrado) y a la aproximación metodológica propuesta por el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. En el Capítulo cuatro se presenta la metodología implementada para desarrollar el estudio; en el capítulo cinco se describen con detalle las categorías de análisis que nos permitieron clasificar los teoremas de existencia. En el capítulo seis se realiza el análisis mismo a la luz de las categorías propuestas en el cuarto capítulo. Finalmente, en el capítulo siete se exponen las conclusiones que son producto del análisis realizado.

2. BREVE PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA

En esta sección se pretende dar una justificación de trabajo a realizar, haciendo una breve presentación sobre la problemática asociada a la existencia de objetos matemáticos en los procesos de enseñanza/aprendizaje (particularmente en lo referido a la justificación de tal existencia). Enseguida, se presentan los objetivos general y específicos del estudio los cuales exponen las pretensiones que se tienen en relación con intentar contribuir, en algún sentido, a la problemática planteada.

2.1. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO: ¿POR QUÉ ESTUDIAR LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA?

Cuando en un curso universitario se pretende cuestionar sobre la existencia de los objetos que hacen parte de un sistema teórico específico, pensar en una justificación para garantizar tal existencia, parece no tener sentido para los estudiantes. Claro, consideran que la existencia de los objetos es algo natural (obvio) o sencillamente piensan que para ello es suficiente la definición de los objetos.

En relación con esto, Guzmán (1998, citado en Selden, 2012) remarca que una de las dificultades más notorias que tienen los estudiantes en su transición de la secundaria a sus estudios universitarios, tienen que ver con las demostraciones de existencia de objetos, dado que no es fácil para ellos reconocer la necesidad de garantizar teóricamente su existencia. En general, los objetos matemáticos se introducen en la escuela mediante una definición, pueden ser estudiados a partir de la manipulación de diferentes tipos de representaciones, y la justificación de su existencia no es un tema que usualmente se trate; en este contexto, la existencia de los objetos geométricos no se cuestiona.

En cuanto a lo anterior, el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$), hace una propuesta específica para el nivel universitario que tiene como objetivo que los estudiantes den sentido a cuestionarse sobre la existencia de los objetos geométricos en el marco de una teoría específica (para este caso, la geometría plana euclidiana) y

perciban que no tiene mucho significado hablar de objetos, (salvo unos pocos –punto, recta y plano), cuya existencia no se ha justificado. De manera concreta este estudio, si bien no pretende aludir de manera extensa en una propuesta didáctica para tratar teoremas de existencia, sí pretende contribuir a la problemática planteada con un análisis de los Teoremas de Existencia desde un punto de vista matemático; consideramos que hacer un estudio tal, contribuye a que asuntos como los que destacamos a los largo de este documento, sean tenidos en cuenta por profesores cuando diseñen propuestas que aborden estos teoremas en la Universidad (y por qué no, en el nivel secundario). Así nuestra intención no sea proponer una propuesta didáctica, presentamos una clasificación de los tipos de tareas/problemas que el Libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje (Samper y Molina, 2013) propone para abordarlos. Con ello, damos ciertas luces un poco más específicas para un potencial diseño didáctico sobre el asunto.

2.2. OBJETIVO GENERAL

Realizar una clasificación de los teoremas de existencia presentes en el libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje, Samper y Molina (2013), desde un punto de vista matemático aludiendo a la definición de teorema propuesta por Mariotti (2006) y desde un punto de vista didáctico haciendo una descripción del tratamiento de tales teoremas según la propuesta de dicho libro.

2.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hacer una clasificación de los teoremas de existencia, de acuerdo a su enunciado y demostración.
- Realizar una descripción del tipo de problemas relacionados con los teoremas de existencia, propuestos en el libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje.
- Establecer una relación entre el contenido geométrico y el tipo de problemas propuestos en el libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje; ambos, asociados a los teoremas de existencia.

3. REFERENTES TEÓRICOS

A lo largo de este capítulo se hará una descripción de los referentes teóricos que sustentan este estudio. En primera instancia se mencionará la postura de Mariotti (2006) respecto de lo que ella considera, es un teorema; en seguida, se hará una breve descripción del sistema teórico de Birkhoff, que fue adaptado por Moise (1963), y luego por Samper y Molina (2013), en el cual se enmarca los teoremas de interés para este estudio. Posteriormente, se explicará cómo determinados autores intentan clasificar definiciones y como esto es oportuno para el desarrollado. Finalmente, se describirán dos elementos que generan un entorno favorable para el proceso de aprender a demostrar, los cuales se encuentran en el libro de Samper y Molina (2013), con el fin de clasificar las tareas propuestas que introducen los teoremas de existencia a la luz de dichos elementos.

3.1. TEOREMA DESDE LA PERSPECTIVA DE MARIOTTI

Para definir que es un teorema se tomará lo expuesto por Mariotti (2006). Ella menciona que un teorema tiene como característica principal estar suscripto en una teoría que considere un conjunto de principios y reglas que puedan validar un enunciado mediante el cual se formula un teorema. En tal sentido, lo que se busca es demostrar enunciados que sean ciertos y que consigan validez en correspondencia con determinada teoría. Partiendo de esto, la autora menciona que un teorema es considerado un conjunto de tres elementos: i) afirmación o enunciado; ii) demostración; iii) teoría.

El enunciado está conformado por su estructura lógica y su contenido geométrico. En la estructura lógica del enunciado se encuentra inmerso la hipótesis y la tesis de la proposición condicional que lo conforma; por otra parte, el contenido geométrico del teorema se refiere a los objetos geométricos involucrados en el enunciado y las propiedades de interés, la relación de dependencia que liga a dichos objetos y propiedades (Mariotti, 1997).

En cuanto a la demostración se consideran dos elementos importantes: la garantía y la necesidad de aceptación. Maturana (citado en Mariotti, 2012) explica la importancia entre estos dos elementos y la relación que existe entre ellos. Dicha relación inicia cuando se valida o rechaza un enunciado y continúa cuando este enunciado se acepta y se convierte en una garantía; la importancia de este proceso radica en que a partir de los enunciados que se validan, se construye un marco teórico sobre el que se fundamenta la demostración. En otras palabras, se puede hablar de demostración cuando hay un enunciado que contiene elementos que pueden ser justificados y cuando existe un marco teórico en el que esos argumentos tienen validez (Mariotti, 2012). A propósito del marco teórico, el tercer elemento que compone la definición de teorema considerado por Mariotti, este se define como un sistema de principios compartidos y reglas de deducción que están relacionadas entre sí, y los cuales soportan los argumentos de un enunciado que se considere verdadero. Una teoría matemática está compuesta por postulados, teoremas y definiciones que versan sobre objetos específicos (en geometría por ejemplo, el sistema de teórico de Birkhoff versa sobre objetos como punto, recta, plano y conjuntos conformados por ellos).

Teniendo en cuenta que es *sistema teórico* es uno de los elementos de la terna que Mariotti (2006) considera para definir un teorema, es necesario describir aquel tenido en cuenta por el libro objeto de nuestro estudio. En consecuencia, a continuación se hace una descripción del sistema teórico de Birkhoff (1932).

3.2. EL MODELO DE BIRKHOFF PARA LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Desde los años 500 a.C. la geometría se ha considerado parte fundamental de la enseñanza superior, especialmente en la cultura occidental; un aporte significativo a la geometría ha sido la creación del libro *Elementos* construida por Euclides (Maclane, 1959). A partir de este aporte, algunos matemáticos con la intención de complementar y formalizar lo expuesto por Euclides, profundizaron sobre el tema; Hilbert es uno de los principales exponentes de esta tendencia; él organizó un conjunto de 21 hipótesis como fundamento para un tratamiento moderno de la geometría euclidiana.

Más adelante algunos matemáticos que trabajaron con la geometría de Hilbert, se quisieron enfatizar en la enseñanza de la geometría en el ciclo de secundaria; ello

implicaba una adaptación de los axiomas expuestos por Hilbert para trabajarlos en este ciclo. Birkhoff, matemático estadounidense, trabajó en este sentido e hizo una propuesta que fue publicada en el texto escolar *Basic Geometry* en 1940. Esta propuesta incluye un conjunto de cuatro postulados de geometría euclidiana y se caracteriza por cumplir una serie de propiedades que se pueden confirmar con la elaboración de construcciones que se abordan con regla y transportador. A continuación se realiza una descripción de los elementos expuestos en la teoría de Birkhoff (1932).

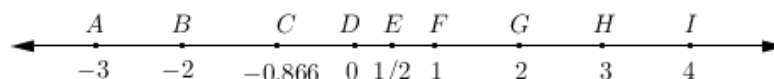
3.2.1. SISTEMA TEÓRICO DE BIRKHOFF

En primera instancia, Birkhoff (1932) considera elementos y relaciones no definidas. Estos elementos son punto y recta; en cuanto a las relaciones, se encuentran dos: i) a cualquier par de puntos les corresponde un número real positivo denotado $d(A, B)$. Alude además que $d(A, B) = d(B, A)$; ii) A cada terna de puntos A, O, B le corresponde un ángulo determinado por ellos. Se escribe como $\angle AOB$; el punto O es llamado vértice del ángulo.

Luego de considerar estos elementos y relaciones, Birkhoff (1932) alude a cuatro postulados (de estos, solamente se tendrán en cuenta los tres primeros, dado que el último no es de interés en este estudio):

Postulado I: los puntos A, B, \dots de cualquier recta se pueden poner en correspondencia (1,1) con el conjunto de los números reales, tal que $|x_B - x_A| = d(A, B)$ para todos los puntos A, B .

En relación con este primer postulado, cabe mencionar que se alude a una correspondencia entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales. Por ejemplo, al punto A le corresponde un número x_A . En el caso de la representación que se muestra a continuación, al punto A le corresponde el número -3 que pertenece a los reales.



Dada la correspondencia descrita, Birkhoff muestra cómo se define la distancia entre dos puntos. Por ejemplo, en la representación gráfica que se muestra, al punto A y B le

corresponden los números -3 y -2 respectivamente. Para hallar la distancia entre estos dos puntos, denotada por Birkhoff como $d(A, B)$, se debe obtener el valor absoluto de la diferencia entre estos dos números: $|x_B - x_A| = |(-2) - (-3)| = 1$; lo que quiere decir, que la distancia entre A y B es de una unidad.

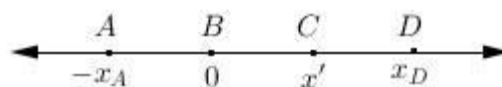
De este postulado, se puede inferir lo siguiente:

(i) $d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.

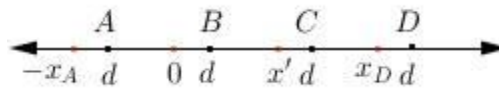
(ii) Tres puntos distintos A, B, C de una recta son debidamente ordenados por la ecuación: $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, si y solo si se cumple el siguiente orden $A - B - C$ y $C - B - A$.

(iii) Si x' denota cualquier sistema de numeración en la recta l , entonces para todos los puntos A de l y para alguna constante d cualquiera, se tiene $x'_A = x_A + d$ o también se tiene $x'_A = -x_A + d$, en la que x'_A es un número real que está en correspondencia con un punto A de l . Se entiende x_A o $-x_A$ como un número real positivo o real negativo respectivamente, los cuales se pueden poner en correspondencia con el punto A .

En relación con (iii), se consideran dos sistemas de coordenadas distintas en la misma recta con los mismos puntos. En el primer sistema de coordenadas, al punto B le corresponde cero, en el segundo sistema, a este mismo punto, le corresponde una coordenada distinta, x' , lo que quiere decir que cero y todos los números se corren d unidades, entonces para hallar las coordenadas de los nuevos puntos, es necesario sumar esa constante d . A continuación, se representan dos sistemas de coordenadas; en el primero, se tiene que la coordenada del punto B es cero, la del punto C es x' , la del punto D es x_D .



En nuestro segundo sistema, estas coordenadas se correrían d unidades, por tanto, al punto B le corresponde una constante d , al punto C le corresponde $x' + d$, al punto D le corresponde $x_D + d$ y así con el resto de puntos. En la siguiente gráfica se muestra lo descrito; en ella, los puntos permanecen estáticos en la recta, lo que cambian son sus coordenadas.

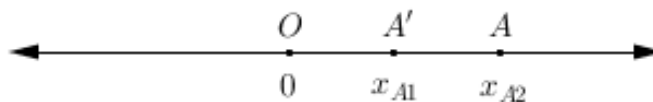


En (iii) x'_A se refiere a las coordenadas en nuestro nuevo sistema. En correspondencia con la anterior gráfica, se observa que al punto D le corresponde $x_A + d$ y esto da como resultado un número que Birkhoff denomina como x'_A .

La propuesta de Birkhoff sigue con la definición de los objetos segmento, semirrecta y triángulo, a saber:

Se puede definir un punto B que este entre A y C , $A \neq C$ si $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$. Por otro lado se tiene que los puntos A y C junto con todos los puntos B entre A y C forman el *segmento* AC . En otras palabras el segmento AC es el conjunto de puntos P tal que $x_A \leq x_P \leq x_C$, $x_C \leq x_P \leq x_A$. Los puntos A, P, C se encuentran en correspondencia con los reales positivos x_A, x_P, x_C respectivamente.

Una *semirrecta* (o rayo) con punto final O está definida por dos puntos O, A en una recta l ($A \neq O$) como la clase de todos los puntos A' de l tal que O no esta entre A y A' ; O puede estar al lado de cualquier punto A' cumpliendo la interestancia $O - A' - A$; en otras palabras, si O esta determinado como el origen del sistema de numeración y A es tomado en el lado positivo, la semirrecta OA consiste precisamente de los puntos A' para cada $x_{A'} \geq 0$. Donde $x_A \in \mathbb{R}$.



Si A, B, C son tres puntos distintos, los tres segmentos AB, BC, AC se dicen que forman un *triángulo* ABC (ΔABC) con lados (segmentos) AB, BC, AC y vértices A, B, C . Si A, B, C están en la misma recta, el ΔABC se denomina degenerado.

Postulado II: Una y solamente una recta l contiene dos puntos P y Q , ($P \neq Q$). Si dos rectas tienen un punto en común, quiere decir que se intersecan en un punto y este es llamado punto de intersección; por el contrario, si dos rectas de un plano no se intersecan son llamadas rectas paralelas.

Postulado III: Las semirrectas l, m, \dots a través de cualquier punto O pueden ser puestas en correspondencia (1,1) con los números reales ($\text{mod } 2\pi$). Si $A \neq O$ y $B \neq O$ son puntos de l y m respectivamente, la diferencia $a_m - a_l (\text{mod } 2\pi)$ es $\angle AOB$ ¹. Además, si el punto B en m varía continuamente en una recta r que no contiene al vértice O , el número a_m también varía.

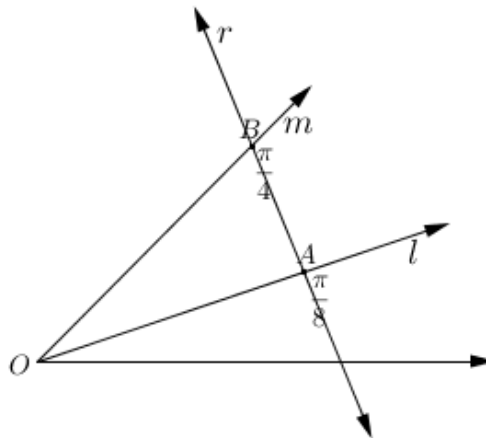
En el anterior postulado, las semirrectas l y m se corresponden con a_m y a_l respectivamente, siendo a_m y a_l números entre 0 y 2π . De acuerdo a este postulado, es acertado afirmar que dos semirrectas l, m con un punto en común, O , definen un $\angle lOm$, es decir un $\angle ABC$ en el cual $A \neq O$, $B \neq O$ pertenecen a las semirrectas l, m respectivamente. Nótese que Birkhoff utiliza la notación

El $\angle lOm$ es el ángulo dirigido desde la semirrecta l hasta la semirrecta m determinando la posición de m relativa a l . Este ángulo, es entonces dado por el valor numérico del residuo mínimo de $a_m - a_l (\text{mod } 2\pi)$. La medida del ángulo $\angle lOm$ (para aludir a la medida del ángulo $\angle lOm$ se utilizará la notación $m\angle lOm$) se obtiene tomando una única diferencia algebraica $a_m - a_l$ que se considera como representativa de un ángulo generado por la rotación continua de una semirrecta de l a m .

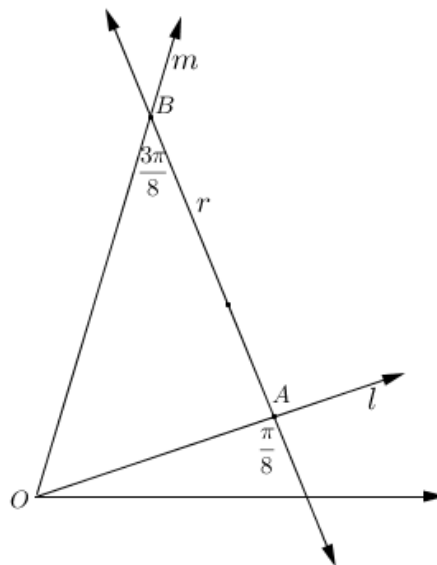
A continuación, se presenta una gráfica de lo mencionado en el postulado III. A la semirrecta m (o rayo OB) le corresponde $\frac{\pi}{4}$, a la semirrecta l (o rayo OA) le corresponde $\frac{\pi}{8}$; la diferencia entre estos dos números que pertenecen a los reales, forma el $\angle lOm$ (o $\angle AOB$), quiere decir que la medida de este ángulo, está determinado por:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

¹ Nótese que Birkhoff utiliza la notación $\angle AOB$ para aludir a la medida del ángulo.



Ahora, el punto B varia en la recta r , lo cual hace variar el número que le corresponde a la semirrecta m , esta valor cambio a $\frac{3\pi}{8}$. Consecuencia de esto, la medida del $\angle lOm$ estaría determinada por la diferencia entre el nuevo valor que le corresponde a m y el valor correspondiente de la semirrecta l , $\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.



De este postulado se infiere que:

(i) $m\angle AOB = 0$, si y solo si $l = m$.

(ii) Si l, m y n son tres semirrectas diferentes que pasan por O , entonces el $m\angle lOm + m\angle mOn = m\angle lOn$.

(iii) Si a' denota cualquier sistema de numeración en la semirrecta l , entonces para todas las semirrectas l que pasan por O y para alguna constante d cualquiera, se tiene $a'_l = a_l + d$ o también se tiene $a'_l = -a_l + d$.

En otras palabras, en (iii) del postulado III, la medida tomada desde un primer sistema de numeración, que iniciaría en cero, esta rotado una constante d cualquiera. Ahora, en el primer sistema, la medida del ángulo teniendo en cuenta el segundo sistema, es d o $-d$ dependiendo del sentido en el que se está midiendo el ángulo, a favor o en contra de las manecillas del reloj.

Seguido de esto, Birkhoff define ángulo plano, recto y rectas perpendiculares.

Dos semirrectas l y m que pasan por O forman un *ángulo plano* si:

$$m\angle lOm = \pi$$

Está claro que si el $\angle lOm$ es un ángulo plano, también lo es $\angle mOl$, de acuerdo con lo dicho en (iii) del postulado III.

Dos semirrectas l y m que pasan por O forman un *ángulo recto* si:

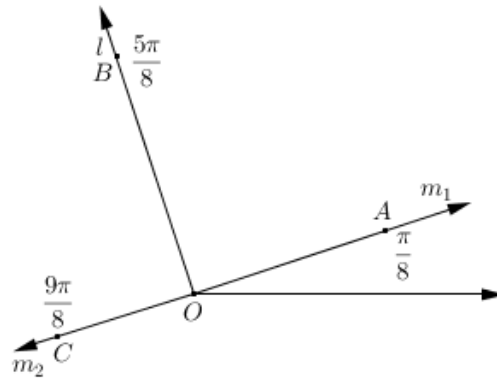
$$m\angle lOm = \frac{\pi}{2}$$

Está claro que si $\angle lOm$ es un ángulo recto, también lo es $\angle mOl$, de acuerdo con (iii) del postulado III. Cuando el ángulo es recto, se dice que m es perpendicular a l , en este caso, se escribe: $l \perp m$. Quiere decir que una recta es *perpendicular* a otra si forman un ángulo recto.

De ello se deduce que hay dos semirrectas m_1, m_2 perpendiculares a una semirrecta dada l que tiene su punto final en O , es decir:

$$m\angle lOm_1 = \frac{\pi}{2}; \quad m\angle lOm_2 = -\frac{\pi}{2}$$

En la siguiente gráfica se observa lo mencionado. El $\angle lOm_1$ equivale a la diferencia entre los valores de l y m_1 respectivamente. $\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. La $m\angle lOm_2$ equivale a la diferencia entre los valores de l y m_2 respectivamente. $\frac{5\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}$.



Evidentemente, m_1 y m_2 forman un ángulo plano.

La propuesta del modelo de Birkhoff para la geometría euclidiana es retomada por Moise (1963). A su vez, estas propuestas fueron los orientadores del sistema teórico expuesto por Samper y Molina (2013) en su libro *Geometría Plana, un espacio de aprendizaje*.

No obstante, el sistema teórico de Birkhoff (1932) y el de Moise (1963) tienen una diferencia cuando se refieren al postulado III antes expuesto, esta se mostrará en la tabla 01, presentada a continuación:

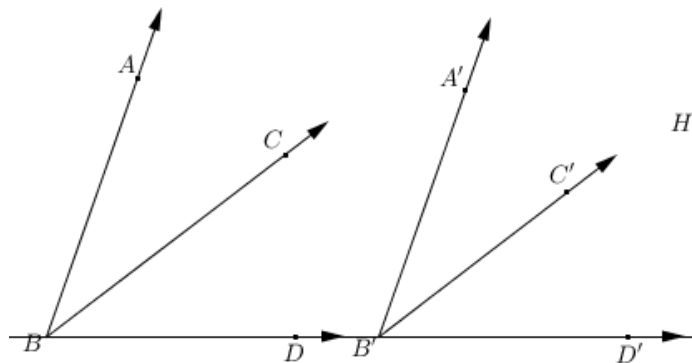
<i>Postulado de Birkhoff</i>	<i>Postulado de Moise</i>
Las semirrectas l, m, \dots a través de cualquier punto O pueden ser puestas en correspondencia (1,1) con los números reales ($\bmod 2\pi$). Si $A \neq O$ y $B \neq O$ son puntos de l y m respectivamente, la diferencia $a_m - a_l (\bmod 2\pi)$ es $\angle AOB$. Además, si el punto B en m varía continuamente en una recta r que no contiene al vértice O , el número a_m también varía.	Existe un rayo AB (\overrightarrow{AB}), que pertenece al semiplano ² determinado por H , un número r entre 0 y $180(\pi)$ y exactamente un rayo AP , con P en H , tal que $m\angle PAB = r$.
	<i>Teorema de Moise</i>
	Se tiene $\angle CBA$ y el rayo $B'A'$ en el semiplano determinado por H , entonces, existe un rayo $B'A'$, con C' en el semiplano determinado por H , tal que: $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$

Tabla No 01 – Diferencia entre el sistema teórico de Birkhoff (1932) y el sistema teórico de Moise (1963)

² Una recta m separa al plano α en dos subconjuntos H y K , llamados semiplanos tal que: i) $H \cap m = \emptyset$ y $K \cap m = \emptyset$; ii) $H \cap K = \emptyset$; iii) $H \cup K \cup m = \alpha$.

Comparando las propuestas realizadas por Birkhoff (1932) y Moise (1963), se notan dos diferencias: i) para Birkhoff la medida de un ángulo esta entre 0 y 2π , mientras que para Moise la medida de un ángulo esta entre 0 y π ; ii) Birkhoff menciona que para encontrar la medida de un ángulo se hace hallando la diferencia entre el valor numérico de cada rayo, Moise no describe como hallar la medida de un ángulo.

Adicional a estas dos diferencias, Moise considera la forma de construir un ángulo a partir de otro ángulo dado, algo que Birkhoff no considera de manera explícita. Por ejemplo, se tiene el $\angle CBA$, se construye un $\overrightarrow{B'A'}$ y un punto C' en el semiplano determinado por H de tal forma que $m\angle C'B'A' = m\angle CBA$.



Con respecto a lo anterior, Samper y Molina (2013) aluden a un modelo y a otro para exponer lo relativo a correspondencia entre rayos, con condiciones específicas, y número reales; y la manera de determinar la medida del ángulo formado por dos rayos. Así, atienden a Moise, para tomar la medida de un ángulo entre 0 y 180; y atienden a Birkhoff en la manera como se encuentra la medida de un ángulo, hallando la diferencia del valor numérico de cada rayo. Sin embargo, hay una diferencia fundamental en la manera como Birkhoff alude a la “coordenada del rayo” en relación a como lo hace Samper y Molina (2013). Birkhoff alude a una recta que interseca los rayos, mientras que Molina y Samper no lo hacen de este modo, ellos simplemente mencionan que a cada rayo le corresponde un número entre 0 y 180 y a cada número entre 0 y 180 un rayo. De manera formal, en su sistema teórico, el postulado que alude a esta correspondencia es el siguiente:

Postulado Rayos -número Dada una \overleftrightarrow{AB} y un punto C talque $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Se puede establecer una correspondencia entre todos los rayos con extremo en A y un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ con los números reales entre 0 y 180 tal que:

- i) A cada rayo con un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ le corresponde un único número entre 0 y 180.
- ii) A cada número entre 0 y 180 le corresponde un único rayo con un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$.
- iii) Al \overleftrightarrow{AB} le corresponde 0.
- iv) Al rayo opuesto al \overleftrightarrow{AB} le corresponde el número 180.

Un ejemplo Ilustrativo: Un teorema de Sistema de Birkhoff a la luz de la propuesta de Mariotti

A continuación se ilustrará un teorema en el sistema teórico de Birkhoff a la luz de la propuesta de Mariotti (2006); por consiguiente vamos a presentar su enunciado, su demostración y a mostrar como el sistema teórico hace que este enunciado tengan sentido en él y la demostración muestre la validez de que su tesis sea consecuencia necesaria del antecedente.

Que un enunciado tenga sentido significa que el sistema teórico mismo soporta la existencia de los objetos mencionados en el antecedente. A continuación, se presenta el enunciado del Teorema de existencia Punto a un lado.

Enunciado: Dados dos puntos A y B , entonces existe un punto Y tal que $A - B - Y$.

En este enunciado, los dos puntos a los que se aluden en su antecedente (Dados dos puntos A y B) tiene sentido dado que el sistema provee herramientas para justificar que dichos puntos existen. El teorema que permite afirmar que una recta tiene por lo menos dos puntos, puede ser garantía de ello. Este teorema se justifica a partir del Postulado Puntos de Recta – Número Reales³.

A continuación se presenta la demostración del enunciado anterior; se evidencia cómo el sistema teórico provee las garantías que sustentan que existe un punto Y tal que $A - B - Y$, dados los puntos A y B .

³ Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tales que:

- i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real.
- ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.

En el siguiente diagrama se encuentran dos columna, la primera tiene como encabezamiento “Afirmación” y la segunda se titula “Garantía y datos” y se destina para registrar la garantía y también los números (en paréntesis) de los pasos previos que contienen las premisas de la hipótesis del teorema, postulado o definición usado como garantía.

Demostración:

Afirmación	Garantía y datos
1. A, B puntos	Dado
2. $\exists \overline{AB}$	Post. Dos puntos – recta ⁴ (1)
3. $C(A) = a, C(B) = b \ a \neq b \ a, b \in \mathbb{R}$	Postulado puntos de recta - números reales (\mathbb{R}) (i) (1,2)
4. $a < b, b > a$	Propiedad de Tricotomía de los número reales (3)
5. $\exists y y \in \mathbb{R}$ $a < b < y \vee a > b > y$	Propiedad de los números reales. (4)
6. $\exists ! Y Y \in \overline{AB}, C(Y) = y$	Postulado Puntos de recta -números reales (ii) (4,2)
7. $C(A) < C(B) < C(Y) \vee C(A) > C(B) > C(Y)$	Principio de sustitución. (4,3,5)
8. $A - B - Y$	Teo. Doble orden –Interestancia ⁵ . (7)

Tabla No 02 – Demostración Teorema Punto a un Lado

Con lo realizado, podemos decir que “Dados dos puntos A y B , entonces existe un punto Y tal que $A - B - Y$ ” es un Teorema en sentido estricto, según Mariotti: Tiene un enunciado, una demostración y un sistema teórico que los soporta. En tal sentido, dicho hecho ya hace parte del sistema teórico mismo y puede ser utilizado en demostraciones de otros enunciados. A continuación, se presenta un enunciado en el cual uno de sus argumentos es el teorema de existencia punto a un lado.

Enunciado: Dado un \overline{BA} , existe un \overline{BC} tal que \overline{BA} y \overline{BC} son rayos opuestos.

Demostración:

Afirmación	Garantía y datos
1. \overline{BA}	Dado
2. $A - B - C$	Teorema punto a un lado (1)
3. $\exists \overline{BA}$ y \overline{BC}	Definición de rayo (2)

⁴ Si A y B son dos puntos entonces existe una única recta m que los contiene.

⁵ Dados tres puntos A, B y C de la recta m , si $c(A) < c(B) < c(C)$ ó si $c(C) < c(B) < c(A)$ entonces $A - B - C$ ó $C - B - A$.

4. \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} son opuestos	Definición rayo opuesto (3)
---	-----------------------------

Tabla No 03 – Demostración Teorema Existencia Rayo Opuesto

Hecha la anterior descripción e ilustración de *teorema*, en el presente estudio se presentará un análisis de los teoremas de existencia abordados en el libro *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*, teniendo en cuenta los elementos de un teorema considerados por Mariotti (2006), su enunciado y su demostración. En el capítulo 5, se presentará la manera en que se llevará a cabo el análisis referido.

3.3. DEFINICIONES DE OBJETOS EN UNA TEORÍA

Las definiciones en un sistema teórico desempeñan un papel crucial. A través de las definiciones, se introducen los "objetos" de la teoría: las definiciones expresan las propiedades que caracterizan a los objetos; por tanto, las nuevas propiedades de los objetos definidos, las nuevas relaciones entre ellos y los objetos de la teoría, pueden estar establecidos a través de los procesos de deducción.

Expuesta la importancia de las definiciones dentro de un sistema teórico, se muestra a continuación la perspectiva de Aristóteles y Mariotti respectivamente, en relación con dicho asunto; ello dará cierto contexto para el estudio que se pretende realizar.

3.3.1. DEFINICIONES DESDE LA PERSPECTIVA DE ARISTÓTELES

Aristóteles intentó clasificar las definiciones en nominales y reales. En términos actuales, podemos decir que las *Nominales* proveen una lista de propiedades que caracterizan complemente al objeto sin aludir a otros objetos más que los que conforman al objeto mismo. Tales propiedades no se pueden construir directamente en el marco de un sistema teórico específico, es decir, que no existen elementos del sistema teórico que explícitamente y de manera inmediata provean un objeto con dichas propiedades.

Por otro lado, las definiciones *Reales* se reconocen por proveer una lista de propiedades del objeto que se vale de otros objetos de la teoría (que no necesariamente componen a la figura) cuya existencia previamente ha sido demostrada en el marco del sistema teórico. De esta lista de propiedades se pueden deducir las propiedades del objeto dadas en la definición nominal.

Para ilustrar lo dicho anteriormente, presentaremos en la tabla 04 una definición nominal y otra definición real para los objetos geométricos *Rectas Paralelas* y *Mediatriz de un segmento*:

	<i>DEFINICIÓN NOMINAL</i>	<i>DEFINICIÓN REAL</i>
<i>Recta Paralelas</i>	<i>Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan</i>	<i>Dos rectas son paralelas si son rectas coplanares y perpendiculares a una misma recta</i>
<i>Mediatriz de un segmento</i>	<i>Dado un segmento, su mediatriz en un plano que lo contiene, es la recta del plano en la cual todos sus puntos equidistan de los extremos del segmento.</i>	<i>Dado un segmento, su mediatriz en un plano que lo contiene, es la recta perpendicular al segmento, que contiene el punto medio de este.</i>

Tabla No 04 – Definiciones reales y Nominales

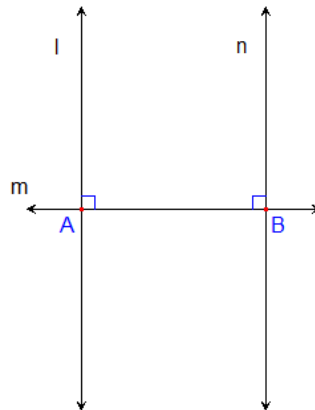
Nótese que en la definición nominal, únicamente se listan las propiedades que caracterizan complemente a este objeto, sin aludir a propiedades de otros objetos más allá que características del objeto que se define (rectas que no se intersecan y son coplanares para el caso de la definición de rectas paralelas, y recta cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento para el caso de la mediatriz de un segmento). En el sistema teórico de Birkhoff, que es el sistema de referencia tomado por Samper y Molina (2013), no existe manera de construir esas propiedades sin aludir a otros elementos del sistema (e.g., ángulos alternos internos y rectas perpendiculares, respectivamente).

En cuanto a la definición real se observa que se alude a otros objetos específicos del sistema con los cuales es posible construir un objeto con las propiedades dadas en la definición; así, basta garantizar, en el sistema teórico, que dada una recta es posible construir una perpendicular a ella por uno de sus puntos en un plano que la contenga (para el caso de la mediatriz, por ese punto es el punto medio del segmento), hecho que se logra puesto que el sistema de Birkhoff, existe un hecho soporta dicha existencia (la de la recta perpendicular para ambos casos, y la del punto medio de un segmento para el caso de la mediatriz).

Claramente, la anterior ejemplificación ha permitido ilustrar las características de una definición nominal y real de un objeto; no obstante, desde un punto de vista meramente

matemático, las definiciones reales de los objetos, en el marco de un sistema teórico (Birkhoff para este caso), se convierten en Teoremas, que en dicho sistema, soportan la demostración de la existencia del objeto definido de manera nominal; una situación recíproca también es viable. La siguiente tabla, expone la demostración de la condicional asociada a la “definición real” de recta paralela.

Dos rectas son paralelas si son rectas coplanares y perpendiculares a una misma recta



Afirmación	Garantía y Datos
1. $l \perp m$ por A, $n \perp m$ por B, $l \neq n$ 2. $A, B \in m$, $\{A\} \neq \{B\}$ 3. $l, n, m \subset \alpha$, α un plano	Dado
4. Suponemos $l \nparallel n$	Negación de Tesis
5. l y n no son coplanares o $l \cap n \neq \emptyset$	D. Recta Paralela (se alude a la nominal) (2)
6. l y n no son coplanares	Caso 1 (5)
7. l y n no son coplanares y $l, n \subset \alpha$, α un plano	Conjunción (1,3)
8. l y n son coplanares	Pr. de reducción al absurdo (7)
9. $l \cap n \neq \emptyset$	Caso 2 (5)
10. $l \cap n = \{P\}$	D. Conjunto no vacío, T. Intersección de rectas (9)
11. $l = n$	T. por un punto externo a una recta, existe solo una recta perpendicular a dicha recta
12. $l = n$ y $l \neq n$	Conjunción
13. $l \cap n = \emptyset$	Pr. de reducción al absurdo
18. $l \parallel n$	Conjunción (13,8)

Tabla No 05 - Demostración Teorema Perpendicularidad - Paralelismo

Nótese que de las definiciones reales de rectas paralelas se deducen las propiedades dadas en la definición nominal, es decir, comprobada la perpendicularidad, se deduce que las rectas no se intersecan y son coplanares.

Con lo expuesto hasta el momento, vale la pena hacer precisión sobre dos asuntos:

- i) En un sistema teórico (v.g., Birkhoff) se puede escoger cualquiera de las dos definiciones (nominal o real) como la definición del objeto. Dado que ambos enunciados proveen el mismo conjunto de ejemplos, decimos que tales enunciados son equivalentes desde un punto de vista matemático. No obstante lo anterior, en el marco de un sistema teórico no pueden haber dos definiciones de un mismo objeto (i.e., los enunciados asociados no pueden tener el mismo estatus de definición); así, es necesario escoger uno de ellos como definición, el otro adquiere el estatus de teorema.
- ii) No todos los objetos que poseen definición en el marco de un sistema tienen una nominal; sin embargo, siempre tienen una real. Es el caso, por ejemplo, del objeto rectángulo en el marco del sistema de Birkhoff. Los posibles enunciados que pueden ser considerados como definiciones del objeto aluden a objetos (ángulos con propiedades que pueden ser construidos con elementos ya existentes en el sistema). Veamos, si se quiere mostrar la existencia del objeto cuadrado, se quisieran “construir”, en el marco de la demostración, TODOS los objetos con sus respectivas propiedades a los que alude la definición (cuatro ángulos rectos y todos los lados congruentes); sin embargo, al intentar hacerlo varias de esas propiedades resultan “*gratis*”; por ejemplo, basta con construir tres segmentos congruentes y los ángulos rectos comprendidos entre los segmentos, para que un ángulo recto y dos lados resulten congruentes. Esta construcción es validada por el Teorema Localización de puntos y el teorema Perpendicular por punto de Recta. Decimos que esta no es una definición nominal dado que aun cuando las propiedades que se presentan en ella se refieren a aquellas que conforman al objeto mismo, existen elementos del sistema teórico que explícitamente y de manera inmediata provean objetos con las propiedades enunciadas. En tal sentido, se podría decir que tal definición es real, aun cuando no se aluden a otros objetos del sistema para demostrar la existencia en cuestión (la de cuadrado). Este es un caso en donde no es fácil determinar si la definición es real o nominal, pero es el conocimiento sobre el Sistema Teórico el que

permite decantar cuál clasificación es más acertada. Por las características ilustradas antes, parece afortunado decir que es una definición real.

Para resumir e ilustrar lo dicho anteriormente, se muestran a continuación las definiciones reales y nominales de algunos objetos geométricos.

	<i>DEFINICIÓN NOMINAL</i>	<i>DEFINICIÓN REAL</i>
Recta Paralelas	Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan	Dos rectas son paralelas si son rectas coplanares y perpendiculares a una misma recta
Mediatriz de un segmento	Dado un segmento, su mediatriz en un plano que lo contiene, es la recta del plano en la cual todos sus puntos equidistan de los extremos del segmento.	Dado un segmento, su mediatriz en un plano que lo contiene, es la recta perpendicular al segmento, que contiene el punto medio de este.

Tabla No 06 – Definiciones Nominales y Reales

3.3.2. DEFINICIONES DESDE LA PERSPECTIVA DE MARIOTTI

Mariotti y Fischbein (1997) mencionan que en Matemáticas todos los objetos deben ser declarados y claramente definidos; aluden a dos tipos de definición: (a) la definición para introducir los objetos básicos de la teoría, y (b) la definición para la introducción de nuevos elementos en la teoría. Para la primera, las definiciones se declaran a través de los axiomas que caracterizan los objetos (v.g, la definición de grupo en la Teoría del Álgebra Abstracta), mientras que para la segunda, la introducción de un nuevo elemento es permitido por algún teorema que afirme la existencia de tal elemento dentro de la teoría.

En esta perspectiva, y enmarcado en el sistema de Birkhoff, se pueden distinguir objetos que aluden al tipo b de definiciones al que tales autores mencionan; claro, salvo los objetos primitivos del sistema, todos los objetos involucrados en él se introducen mediante un teorema de existencia. Los objetos primitivos, si bien no son definidos, existen en dicho sistema producto de postulados (axiomas en términos de Mariotti y Fischbein); en el capítulo 5 daremos ejemplos de esto que comentamos.

Nótese que según la descripción hecha, vemos una correspondencia entre las definiciones del tipo b de Mariotti y Fischbein con las tipologías descritas para la

propuesta de Aristóteles; esto, siempre que se cuente con un sistema teórico mediante el cual los objetos existan a través de un teorema de existencia. En el marco de Birkhoff, según lo descrito antes, cualquiera de los dos tipos de definiciones de Aristóteles, nominal o real, tiene asociado un teorema de existencia. Finalmente, lo que determina que haya tal teorema existencia para un objeto determinado es el sistema teórico, más allá del tipo mismo de definición aristotélica del objeto. Es decisión matemática o didáctica (aludiendo a la conveniencia) escoger tal o cual definición para el objeto. Pensando en el libro objeto de estudio, al estar fundamentado en el modelo de Birkhoff, solamente postulan la existencia de cuatro objetos⁶: punto, recta, plano y un punto que no esté en el plano, dado que no hay definición para los mismo; los demás objetos, cuya existencia se demuestra, son definidos, en general, atendiendo a una definición de tipo nominal; su demostración se vale de lo que sería una definición real para el objeto (en el marco del sistema, esta definición real, es un teorema como se dijo antes).

3.4. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL LIBRO GEOMETRÍA PLANA: UN ESPACIO DE APRENDIZAJE

En el estudio que se llevará a cabo, se analizará el libro *Geometría plana: Un espacio de aprendizaje* tiene como propósito principal cristalizar la aproximación metodológica con la que en el curso Geometría Plana, de la Universidad Pedagógica Nacional, se enseña la geometría plana euclidiana. Dicho curso ha sido objeto de un proceso de innovación que comenzó en el año 2004 en manos del grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. El libro está compuesto en dos grandes partes: En la primera, se presentan las razones que motivaron la innovación del curso; los referentes teóricos que sustentan la propuesta de innovación y son producto de las diversas investigaciones que el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$, de la Universidad Pedagógica Nacional, ha venido desarrollando; las definiciones de los términos que se usan al describir los objetivos de la innovación; una descripción de la aproximación metodológica; un recuento no solo de las actuaciones problemáticas que presentan los estudiantes cuando hacen demostraciones sino también de las estrategias que se diseñaron para apoyar al estudiante a superar dichas actuaciones; y una herramienta didáctica para ayudar al

⁶ Estos objetos no presentan alguna definición en este sistema teórico, puesto que son los objetos primitivos de este.

estudiante a entender el estatus teórico y operativo de las definiciones, los postulados y teoremas.

La segunda parte del libro, contiene una propuesta de secuencia específica compuesta de 46 problemas. Esta parte está conformada por siete capítulos; cada uno de estos capítulos incluye: presentación del problema propuesto a los estudiantes con su respectivo objetivo; se presenta una explicitación de las conjeturas que usualmente formulan los estudiantes como respuesta al problema, la descripción de los los elementos teóricos que se establecen tras el estudio de la resolución de los problemas; cada capítulo termina con una sección de ejercicios. De manera específica los temas de cada capítulo son, respectivamente: “Relaciones entre puntos y rectas”, “Relaciones entre puntos, rectas y planos”, “Ángulos”, “Congruencia de triángulos” que trata no solo esta relación sino también las que se deducen de ella, como lo relativo a desigualdades, “Cuadriláteros”, “Proyección paralela y semejanza de triángulos”, y “Circunferencias”. Para este estudio no analizamos todo estos capítulos; las temáticas referidas cuadriláteros, proyección paralela y circunferencia no se tratan dado que desborda nuestras posibilidades, particularmente de tiempo.

Como se dijo antes, los autores pretende poner en acto la aproximación metodológica que el grupo $\mathcal{A} \bullet \mathcal{G}$ ha propuesto para la enseñanza. En tal aproximación se destacan tres elementos que generan un entorno favorable para el proceso de aprender a demostrar: i) Las tareas matemáticas; ii) el uso de la geometría dinámica; iii) la interacción social en la clase. En este estudio, no se hará énfasis en el último elemento mencionado dado que el desarrollo o acontecimientos específicos de la clase no son de interés en este estudio. Sí sobre los primeros, dado que nos permitirán elementos para hacer un posterior análisis de los tipos de problemas que se proponen para abordar teoremas de existencia.

En la introducción del libro se menciona que las tareas/problemas propuestas a los estudiantes, fueron diseñadas por el grupo de investigación con el fin de motivar la actividad demostrativa; específicamente los problemas que se propone son “abiertos”; vale la pena precisar lo que los autores entienden por ello:

Un *problema abierto* plantea una tarea con una pregunta que no revela o sugiere la respuesta esperada. En geometría, usualmente los problemas abiertos incluyen la descripción de una situación y una pregunta que pide establecer una conjetura, como

proposición condicional, que expresa relaciones entre propiedades de las figuras involucradas en ésta. Por eso se llaman *problemas abiertos de conjeturación* (Baccaglioni-Frank y Mariotti, 2010, en Problemas Abiertos de Conjeturación, Carmen Samper, Óscar Molina, y Otros (2013))

En la sección 5.2 hacemos una descripción de los tipos de problemas que tuvimos en cuenta para hacer parte del análisis al cual nos comprometimos hacer en uno de los objetivos específicos del estudio.

4. ASPECTO METODOLÓGICOS

Este capítulo pretende describir dos asuntos: uno tiene que ver con una descripción de las etapas que fueron llevadas a cabo para desarrollar el trabajo; otro tiene que ver con una descripción breve de la metodología misma del estudio.

4.1. METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

La metodología general del trabajo es un análisis de texto. Específicamente tomamos como pautas para ello, la propuesta de López (2002), quien señala pasos a seguir para hacer un análisis tal. Estas etapas son: (i) se debe conocer la documentación sobre el problema que se está abordando; para ello, es necesario tener en cuenta que los documentos son muy variados, por tanto, se debe realizar una lectura del texto completo o las partes del texto que se consideren significativas; si hay elementos que no sean comprendidos, será necesario un apoyo en otros documentos en los que se aclaren tales conceptos o elementos; (ii) se debe realizar un esquema en el cual se mencionen las ideas de interés que son expuestas en el texto y categorizarlas según lo requiera el estudio que se lleva a cabo; (iii) para finalizar, escribir un breve resumen de lo encontrado, sin cambiar la narrativa que exponen los autores en el texto.

Las etapas del estudio que se exponen en la sección siguiente, pretenden responder a los pasos sugeridos por este autor para el análisis del texto. Precisamos que el mismo se referirá sólo a lo que tiene que ver con el tratamiento que el texto da a los Teoremas de Existencia. En el capítulo 5 presentamos las categorías de análisis para el estudio

4.2. ETAPAS DEL ESTUDIO

De manera específica, en esta sección presentamos las etapas llevadas a cabo para realizar el estudio. Estas son: búsqueda de referentes teóricos, construcción del marco teórico, construcción de categorías de análisis, análisis del libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje, Samper y Molina (2013) y escritura del documento final.

4.2.1. BÚSQUEDA DE REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Para llevar a cabo el estudio del tratamiento de los teoremas de existencia, en primer lugar, se realizó una búsqueda de fuentes bibliográficas que diera alguna referencia a la temática de interés (teoremas de existencia en matemáticas). En los documentos revisados se encontró que muchos de estos estudios son relacionados con la filosofía de las matemáticas, lo cual llevó a pensar que el cuestionamiento de los teoremas de existencia en el marco de una teoría eran totalmente pertinentes, puesto que, en relación con el tratamiento de dichos teoremas no hay información suficiente, no obstante, estos asuntos no son el objetivo del trabajo. Destacamos textos como los de Guevara (2008). Los teoremas de existencia se estudiarán desde el sistema teórico del libro, Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje (2013), fundamentado en la de Moise (1963), basado a su vez en el modelo de Birkhoff (1932). Dado que nos referimos a los sistemas teóricos de Moise (1963) y Birkhoff (1932), fue necesario acudir a sus textos para hacer algunas precisiones sobre sus propuestas, expuesta en el marco de referencia del capítulo anterior.

Otro asunto de nuestro interés fue consultar respecto de la concepción misma de Teorema. Al respecto, se adoptó la propuesta de Mariotti (1997) dado que no proveyó de elementos generales para hacer el análisis de los teoremas de existencia en términos de enunciados y su demostración. Para precisar tipología de problemas para hacer el análisis en lo que respecta a las tareas planteadas por el Libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje, Samper y Molina (2013) para estudiar los teoremas de existencia, de manera específica recurrimos al texto Problemas abiertos de conjeturación, Samper, Molina y otros (2013)

4.2.2. CONSTRUCCIÓN DEL MARCO DE REFERENCIA

En esta etapa se concentraron los esfuerzos en la construcción del marco teórico. Para ello, nos adentramos en precisar referentes que nos dieran luces respecto de cómo clasificar los teoremas de existencia en el marco de una teoría específica. Dado que no encontramos literatura al respecto, tomamos la decisión de tomar la definición de Teorema dada por Mariotti, en tanto que vislumbramos que sería posible una tipología

atendiendo a dos de los elementos que según ella compone un teorema (Enunciado y demostración). Respecto al otro elemento que conforma un teorema, el sistema teórico en que tiene sentido el enunciado y que soporta la demostración, hubo la necesidad de precisarlo y hacer una descripción del mismo. En este sentido, recurrimos al documento de Birkhoff (1932) para conocer su sistema teórico dado que este fundamenta tanto las propuestas de Moise (1963) como la de Samper y Molina. Específica, para cada uno de estas propuestas, se presenta un contraste entre los postulados que caracterizan al modelo de Birkhoff (postulado de la regla y del transportador). Enseguida se explicitaron propuestas referidas a la definición de objetos o tipos de definiciones de objetos asumidas por Aristóteles (a la luz de hoy) y Mariotti, para poder tener otro tipo de herramientas para tener una mejor comprensión respecto al teorema de existencia. Enseguida se presenta una descripción de la aproximación metodológica para la enseñanza propuesta por el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ dado que el libro objeto del análisis atiende a esa metodología. En ese marco, se presenta una tipología de problema, asunto que será clave para realizar el análisis de las Tareas, propuesta en el libro, que dan lugar a los teoremas de existencia.

4.2.3. DETERMINACIÓN DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Las categorías de análisis, como se dijo antes, atienden a los referentes teóricos antes mencionados. Todas fueron construidas por nosotros, con la ayuda de nuestro profesor asesor, una vez leídos todos los teoremas de existencia⁷ aludidos al libro objeto de estudio. Hicimos dos tipos de clasificaciones: uno desde un punto de vista matemático atendiendo al enunciado y a su demostración (en donde fueron determinadas 7 categorías emergentes, 3 para los enunciados, y 4 para las demostraciones); y otro según el tipo de tareas (problemas) que se proponen en el libro para abordar estos teoremas (para ello tuvimos en cuenta la tipología propuesta por Samper, Molina y otros (2013)) Para el análisis de los problemas se tuvieron en cuenta dos tipologías; la primera, según el tipo de problema propuesto, y la segunda, según el foco de búsqueda. En el capítulo siguiente, presentamos la descripción de estas categorías de análisis con ejemplos.

⁷ No se tuvieron en cuenta los teoremas de existencia que aluden a cuadriláteros, proyección paralela y circunferencia.

4.2.4. ANÁLISIS

En esta etapa, no concentramos a realizar el análisis según las categorías construidas. Para ello, utilizamos tablas que sintetizan la clasificación realizada y presentan una descripción de cada enunciado o demostración tenido en cuenta. Además, para cada caso, se explica la razón de la clasificación realizada a la luz de la descripción de cada categoría de análisis. De manera análoga se realiza lo correspondiente a la tipología de problemas que aluden a los teoremas de existencia.

4.2.5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y ESCRITURA DEL INFORME

Terminado el análisis, se precisaron los resultados generales del mismo y las conclusiones del estudio dando respuesta a los objetivos del estudio. Nos concentramos luego, en hacer el documento que reporta el informe del estudio realizado.

5. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Con el fin de realizar el análisis correspondiente de los teoremas de existencia expuestos por Samper y Molina (2013) en su libro *Geometría Plana un espacio de Aprendizaje* se presentan a continuación las categorías, con su correspondiente descripción, que permitirán hacerlo. En primer lugar, se muestran las categorías para clasificar los enunciados de los teoremas de existencia; luego, se presentan las categorías con las que clasificarán las demostraciones de los teoremas de existencia; para la realización de las demostración se debe tener en cuenta que el sistema teórico trabajado por Samper y Molina (2013) se va construyendo a medida que el curso va avanzando, razón por la cual en las demostración se puede hacer uso únicamente de objetos ya definidos y demostrados. Finalmente, se exponen las categorías según el tipo de problemas propuestos por Samper y Molina (2013) para abordar los teoremas de existencia.

5.1. DE ACUERDO CON EL CONTENIDO GEOMÉTRICO

Para realizar la clasificación de los Teoremas de Existencia, según el contenido geométrico, se identificarán dos aspectos que atienden a la definición de Teorema provista por Mariotti y referenciada antes; el primero, teniendo en cuenta el enunciado de los teoremas, y el segundo, a partir de la demostración de los mismos.

5.1.1. DE ACUERDO AL ENUNCIADO

Para Mariotti (2006), uno de los elementos que forman un teorema es su enunciado o afirmación; el enunciado está conformado por su estructura lógica y su contenido geométrico. Es por eso que una forma de clasificar los Teoremas de existencia es aludiendo a este componente, por tanto, los enunciados de los teoremas de existencia expuestos por Samper y Molina (2013), se clasificarán en dos tipos; a continuación se muestran las categorías para realizar dicho análisis.

ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A DEFINICIONES (ED): Son enunciados de teorema que proveen existencia de objetos o relaciones cuyas definiciones se han provisto previamente.

Dentro de los enunciados que atienden a definiciones precisamos dos tipologías: La primera (**ED1**) son enunciados que explicitan la existencia de un objeto que previamente ha sido definido; un ejemplo de este tipo de enunciados es aquel que provee la existencia de la bisectriz de un ángulo⁸, objeto que previamente se ha definido en el marco del sistema teórico. La segunda tipología (**ED2**) corresponde a enunciados que proveen existencia de objetos que cumplen condiciones/relaciones específicas (que no hacen parte de la definición del objeto si este la tiene, pero sí atienden a la definición de la relación buscada) explicitadas en el mismo enunciado. Esas condiciones son relaciones que cumple el objeto con respecto a objetos dados en el antecedente del enunciado. Para ilustrar esta tipología, se alude al enunciado del Teorema punto a un Lado (Dados A y B, existe C tal que A-B-C.). Nótese que tal enunciado provee la existencia de un punto C (un punto no tiene definición en el sistema teórico) que guarda una condición específica (relación de interestancia) con los puntos dados en el antecedente de la condicional (A y B). Vale la pena precisar que este enunciado no es de tipología **ED1**, ya que el objeto al que se le provee la existencia no tiene definición en el sistema, sin embargo sí alude a la existencia de punto con una relación especial explícita en el mismo enunciado, en este caso que cumpla una interestancia (relación definida en el sistema de referencia).

ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A POSTULADOS (EP): Son enunciados de teorema que proveen existencia de objetos o relaciones que no poseen definición previa (son objetos y relaciones primitivos del sistema). Vale la pena precisar, que en este caso, la existencia de los objetos es garantizada por un postulado.

Veamos dos ejemplos que ilustran esta categoría. Tómesese el enunciado que alude a la existencia de un plano que contiene dos rectas dadas que se intersecan (Teorema dos rectas - plano⁹); al respecto, tal enunciado alude a existencia de un objeto que no tiene definición (el plano) en el sistema teórico pero que su existencia se garantiza por un

⁸ Dado un ángulo existe su bisectriz y esta es única.

⁹ Dadas dos rectas que se intersecan existe un único plano que las contiene.

postulado (por ejemplo, Postulado tres punto-plano¹⁰). Otro ejemplo de enunciado de esta categoría es el que provee el Teorema Recta - Punto¹¹. En este teorema se concreta con el enunciado que alude a la existencia de un punto sobre la recta dada. Claro, Punto es un objeto primitivo y es el objeto que debe existir según el enunciado. Sin embargo, hay una condición más que ese punto debe tener: *pertenecer* a una recta dada. Esta relación (la de pertenencia) es una relación que no se define en el sistema y a la cual el enunciado alude.

ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A CONDICIONES ESPECÍFICAS (ECE): Son enunciados de teoremas que proveen existencia de objetos con una propiedad específica; en otras palabras, el consecuente provee la existencia de un objeto (punto por ejemplo) que cumple propiedades que dependen de las condiciones nombradas en el antecedente. Estos objetos pueden ser primitivos o no del sistema.

Un ejemplo prototípico de este tipo de enunciado es el enunciado del Teorema Localización de Puntos: Sean r un número real positivo y el \overrightarrow{AB} , entonces existe un único punto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AC = r$. Veamos: el punto C que se quiere que exista, depende de las exigencias del antecedente, en este caso, del \overrightarrow{AB} pues C debe pertenecer a este, y del número real positivo r para que $AC = r$.

5.1.2. DE ACUERDO A LA DEMOSTRACIÓN

Luego de haber realizado una clasificación de los teoremas de existencia según sus enunciados de un teorema, pretendemos en lo que sigue, presentar una clasificación de los mismos, esta vez con respecto a sus demostraciones, se podría pensar que si se realiza una clasificación de las demostraciones, esta sería similar (las demostraciones similares son aquellas que tienen la misma estructura (Molina, (en prensa)) a la de los enunciados.

En esta clasificación, se hará mención de aquellas demostraciones de objetos que deben existir de forma inmediata y mediata. Si bien es cierto que en todas las demostraciones, se deben usar garantías teóricas (definiciones, postulados y teoremas) para conformar

¹⁰ Dados tres puntos existe un plano que los contiene y si los tres puntos no son colineales, existe un único plano que los contiene.

¹¹ Toda recta tiene por lo menos un punto.

los argumentos que permiten justificar la existencia del objeto, hay casos en los cuales las aserciones de dichos argumentos proveen las condiciones de teoremas o postulados que de manera inmediata dan la existencia del objeto en cuestión. En contraste a esto, hay casos en los cuales la búsqueda del objeto que cumpla las condiciones para que sea aquel cuya existencia se está demostrando no es tan “directa” o “inmediata” como el caso antes explicado. Describiremos lo que queremos decir en la siguiente clasificación:

DEMOSTRACIONES EXISTENCIA INMEDIATA: En el primer caso, decimos que una demostración es de *Existencia Inmediata* cuando las aserciones de sus argumentos proveen las condiciones de teoremas o postulados que de manera *inmediata* dan la existencia del objeto en cuestión. Ejemplo de este caso de demostración el Teorema Recta - Punto (en el cual se quiere demostrar que una recta tiene por lo menos un punto); en la respectiva demostración se utilizan dos argumentos cuyas correspondientes garantías son el Postulado Conjunto de puntos¹² (mediante el que se asegura que una recta es un conjunto no vacío de puntos), la definición de Conjunto vacío (que permite soportar que la recta tiene por lo menos un punto). Nótese que, en este caso, casi de manera inmediata se establece la existencia del punto de recta.

En las demostraciones de Existencia Inmediata reconocemos dos tipologías:

DI1: Hace referencia a demostraciones que emplea como garantías postulados que justifican la existencia de objetos que no son definidos en el marco un sistema teórico.

Dentro de **DI1**, se encuentran tres subcategorías:

DI1-A: se refiere al uso de un postulado en la demostración, que casi de manera inmediata provee la existencia del objeto que se quiere que exista. Un ejemplo de demostración de esta categoría, es la demostración del Teorema Recta – Punto, antes descrito.

DI1-B: alude al uso de teoremas que proporcionan los objetos que son necesarios para el uso de postulados que proveen la existencia de los objetos; se diferencia de DI1-A, dado que no se hace uso únicamente de un elemento del sistema teórico, sino que se hace necesario como mínimo el uso de un teorema con unas características especiales y de un postulado. Un ejemplo de esta categoría es la demostración del Teorema Dos

¹² Las rectas y los planos son un conjunto no vacío de puntos.

rectas- Plano¹³; con él, se quiere demostrar que dadas dos rectas que se intersecan, existe un único plano que las contiene. En este caso, se debe usar dos argumentos esenciales que proveen la existencia buscada, Teorema Recta-infinitos puntos y el Postulado Puntos-plano. A continuación presentamos la demostración para mayor claridad.

Afirmación	Garantía y datos	
1. l y m rectas, $l \neq m$, $l \cap m = \emptyset$	Dado	
2. $A \in l \cap m$	Definición de conjunto vacío	[1]
3. $A \in l \wedge A \in m$	Definición Intersección de conjuntos	[2]
4. $\exists B, C B \in l, B \neq A \wedge C \in m, C \neq A$	Teorema. Recta-infinitos puntos	[1,3]
5. A, B, C no colineales	Definición de Colinealidad	[1,4]
6. $\exists! \alpha \alpha$ es un plano. $A, B, C \in \alpha$	Postulado Puntos plano	[5]
7. $l, m \subset \alpha$	Postulado. Llaneza del plano	[1,6]

DI1-C: son aquellas demostraciones en las cuales los objetos que se quiere que existan no son justificados al final de la demostración por postulados, sino que hay un teorema específico que media la existencia del objeto. Aunque en esencia, la existencia está dada gracias a un postulado. Difiere de DI1-A y DI1-B dado que no hace uso de un único postulado en su demostración y no se usa un teorema que da existencia a objetos inmersos en postulados. Por ejemplo, en la demostración del Teorema Punto Entre¹⁴, se quiere que exista un punto C entre dos puntos A y B dados; la existencia del punto C es dada gracias al Postulado Recta-Números reales, previa determinación de un número que sería su coordenada; sin embargo, se hace necesario el uso del Teorema Doble Orden-Interestancia¹⁵ para que a partir de la desigualdad $(A) < C(X) < C(B)$, se genere la interestancia $A - X - B$. A continuación presentamos la respectiva demostración para que haya mayor claridad.

Afirmación	Garantía y datos	
1. A y B dos puntos	Dado	
2. $\exists! \overline{AB}$	Postulado dos puntos - recta	[1]
3. sea $C(A) = Z$ y $C(B) = Y$ siendo $Z \neq Y$, $Z, Y \in R$	Postulado Puntos de Recta - Números reales (i, ii) Definición de. Coordenada.	[2]
4. $\exists t t \in R y > t > z \vee y < t < z$	Propiedad de los Números reales (Propiedad de densidad)	[3]

¹³ Si m y k son dos rectas que se intersecan, entonces existe un único plano que las contiene.

¹⁴ Dados A y B , existe C tal que $A - C - B$.

¹⁵ Dados tres puntos A, B y C de la recta m , si $c(A) < c(B) < c(C)$ ó si $c(C) < c(B) < c(A)$ entonces $A - B - C$.

5. Sea $X \mid X \in \overline{AB} \wedge C(X) = t$	Post. Puntos de recta - Números reales (i, ii)	[4, 2]
6. $C(A) < C(X) < C(B) \vee C(A) > C(X) > C(B)$	Principio de sustitución	[3,4,5]
7. $A - X - B$	T. Doble Orden-Interestancia.	[6]

Por otro lado, reconocemos una segunda tipología en DI (**DI2**), en la cual se encuentran aquellas demostraciones de objetos que poseen definición en el sistema. Reconocemos dos tipologías en este tipo de demostraciones:

DI2-A: demostración en la cual para sustentar la existencia del objeto es suficiente garantizar las condiciones sobre las cuales se enuncia la definición del objeto. Dos ejemplos prototípicos de este tipo de demostraciones se constituyen con la demostración de la existencia de segmentos y la demostración de existencia de triángulos. Para describir los ejemplos, presentamos a continuación las respectivas definiciones:

Definición de segmento: dados dos puntos A y B , el segmento AB (que se denota \overline{AB}) es la unión de los puntos A y B con todos los puntos que están entre A y B .

Definición de triángulo: dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos

Nótese que en ambas demostraciones, se exige la existencia de puntos para que tenga sentido la definición del objeto: dos puntos para el segmento, tres puntos no colineales para el triángulo. En este sentido, para garantizar que cada uno de estos objetos exista, es necesario garantizar que dichos puntos existan de antemano. En el caso del segmento, es suficiente garantizar que existen dos puntos para que el segmento exista (pues dichos puntos hacen parte del conjunto que según la definición es un segmento; si el conjunto de puntos entre ellos es vacío o no, no es asunto indispensable para garantizar la existencia del segmento). En el caso del triángulo, es necesario garantizar la existencia de los tres puntos no colineales y luego, la existencia de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos. Para ambos casos, la existencia de los puntos es soportada por el Postulado de la existencia (existe por lo menos un punto, una recta y un plano) y por el Postulado Plano-Puntos¹⁶ (este último para el caso del triángulo). En esencia, la demostración de los objetos segmento y triángulos con *inmediatas* en tanto que un

¹⁶ Un plano tiene por lo menos tres puntos no colineales.

postulado (o teorema) garantiza directamente condiciones exigidas en sus respectivas definiciones.

DI2-B: demostración en la cual para sustentar la existencia del objeto se utiliza un teorema que provee, de manera inmediata, las propiedades (dadas en la definición) del objeto en cuestión. Un ejemplo de esta categoría es la demostración del Teorema de existencia de la perpendicular por punto de recta¹⁷; en esta se demuestra la existencia de un ángulo de medida 90° haciendo uso del Teorema construcción de ángulos. Veamos la demostración del Teorema para ilustrar de mejor manera lo que queremos expresar:

Afirmación	Garantía y datos	
1. m una recta, A un punto $A \in m$	Dado	
2. $\exists B$ tal que $B \in m$ y $B \neq A$	Teorema recta infinitos puntos	[1]
3. \overleftrightarrow{AB}	Post. Dos puntos recta	[1,2]
4. $\exists C/C \notin \overleftrightarrow{AB}$	Post. Existencia	[3]
5. $\exists \alpha/\overleftrightarrow{AB}$ y $C \subset \alpha$	Post. Puntos-plano	[4]
6. Sea $\overrightarrow{AC} \subset S_{\overleftrightarrow{AB}}$, tal que $m\angle CAB = 90$	Teo. Construcción de ángulos	[5]
7. $\angle EAB$ es recto	Definición de ángulo	[6]
8. Sea \overleftrightarrow{AE}	P. dos puntos - Recta (existencia) (2)	[7]
9. $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AE}$	D. rectas perpendiculares (1,3,4)	[3, 7, 8]

DEMOSTRACIÓN EXISTENCIA MEDIATA: Las *Demostraciones Mediatas* se caracterizan porque los objetos que cuya existencia quiere demostrar poseen definición en el sistema. No obstante, a diferencia de la tipología de Demostraciones de Existencia Inmediata, se deben usar varios argumentos que en conjunto generan condiciones suficientes de un objeto que resulta finalmente ser el objeto cuya existencia se está demostrando; en otras palabras, los argumentos usados no contienen garantías que provean de manera inmediata las propiedades del objeto en cuestión según su definición. Reconocemos dos tipologías en esta categoría:

DM1: se vale de un teorema que provee la existencia de un objeto que en principio no cumple con las propiedades de la definición del objeto cuya existencia se demuestra. Sin embargo, este teorema provee propiedades mediante la cuales indirectamente generan

¹⁷ Dada una recta m en un plano α y un punto A en m entonces existe una única recta l tal que $l \perp m$ por A en $+\alpha$.

las condiciones de la definición del objeto en cuestión. Por ejemplo, en la demostración del teorema existencia de la paralela¹⁸, se realiza una construcción con dos rectas perpendiculares a una dada, en la cual, estas dos rectas que son perpendiculares resultan ser paralelas entre sí. En este ejemplo se evidencia que partir de los objetos construidos (rectas perpendiculares a una misma recta) se obtiene el paralelismo.

DM2: se demuestra la existencia de un objeto cuya definición incluye dos o más condiciones, se debe determinar mediante una construcción un objeto específico que satisfaga algunas de las condiciones en cuestión, unas que se puedan validar teóricamente de manera directa, y luego mostrar que el objeto así determinado también cumple las demás condiciones que la definición le impone al objeto cuya existencia se quiere demostrar (Samper y Perry, (En prensa)). Un ejemplo de esta categoría es la demostración del Teorema de Existencia del Punto Medio, en la que se busca un punto X que cumpla dos condiciones las cuales son dadas por la Definición de Punto Medio: interstancia con dos puntos dados A, B , tal que $A - X - B$ e igual distancia del punto X tanto al punto B como al punto A . En este Teorema, se comienza la demostración determinando un punto M que satisface su equidistancia a los extremos A y B del segmento y luego se demuestra que el punto está entre A y B .

5.2. DE ACUERDO AL TIPO DE PROBLEMAS

Para Samper, Molina y otros (2013), en los problemas abiertos de conjeturación se debe formular una conjetura expresada como condicional, la parte de ésta que se debe buscar (antecedente o consecuente) depende de la información que aporta el problema y la pregunta que se propone.

Por esta razón, las categorías para analizar el tipo de problemas que se proponen al abordar los teoremas de existencia, se dividen en dos tipologías, una que tiene que ver con el contexto (únicamente teórico o usando el software de geometría dinámica) en el cual se debe hacer su exploración para resolverlo; y otro que tiene que ver con el tipo de problema mismo (el foco de búsqueda de la parte –antecedente o consecuente- de la condicional que formula la conjetura solución del problema). Veamos una descripción más completa de tales tipologías:

¹⁸ Dado una recta l y un punto P tal que $P \notin l$, entonces existe una recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$.

5.2.1. DE ACUERDO AL CONTEXTO DE EXPLORACIÓN

PROBLEMAS TEÓRICOS (PT): Son aquellos en donde el contexto de exploración para dar respuesta al problema es totalmente teórico, esto es, para sustentar las respuesta se deben utilizar elementos del sistema teórico únicamente; por ejemplo, el problema que se propone para el introducir el *T. Punto a un lado* es el siguiente: $\overline{AB} \neq \overrightarrow{AB}$?; se busca que los estudiantes recuerden la definición de segmento y de rayo; y se percaten que para garantizar tal diferencia basta con demostrar que el conjunto $\{X \mid A - B - X\}$ aludido en la definición de rayo, no es vacío.; es en este momento donde surge la necesidad de introducir dicho teorema.

PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA (PGD): Son aquellos que, como su nombre lo indica, se hace uso de algún tipo de exploración con geometría dinámica: Presentamos dos tipologías en este tipo de problemas:

PGD1: Donde la respuesta del problema provee un enunciado que se corresponde con un teorema de existencia (útil/clave en la teoría) de manera explícita. Un ejemplo de este tipo de problemas se encarna en el plantado para el Teorema Recta – Puntos; con este, se propone que los estudiantes exploren y conjeturen acerca del número de punto que tiene una recta.

PGD2: Los Teoremas surgen para dar respuesta a algún paso en una demostración o para validar una construcción sugerida por un estudiante; el teorema de existencia no es directamente la conjetura solución al problema planteado; ejemplo de esta tipología es el Teorema Recta perpendicular por punto de recta¹⁹; el mismo surge mediante el estudio de la solución al problema “construir dos ángulos congruente”. Los estudiantes proponen como solución a este problema construir dos rectas perpendiculares entre sí. En este punto surge la necesidad entonces de introducir tal Teorema.

¹⁹ Si \overline{AB} recta y A un punto en \overline{AB} entonces existe una recta \overline{AE} que contiene a A tal que $\overline{AB} \perp \overline{AE}$.

5.2.2. DE ACUERDO AL FOCO DE BÚSQUEDA

En las categorías de los problemas según el foco de la búsqueda, se encuentran tres tipologías: búsqueda de consecuente, antecedente o determinación de dependencia; estas son tomadas de la propuesta realizada por Samper, Molina y Otros (2013).

BÚSQUEDA DE CONSECUENTE (BC): El tipo de enunciado de los problemas de búsqueda del consecuente se presenta de la siguiente manera: dadas las condiciones suficientes, hallar las consecuencias necesarias de éstas. Son denominados también, como problemas de construcción sugerida.

BÚSQUEDA DE ANTECEDENTE (BA): El enunciado de los problemas de búsqueda del antecedente es: hallar las condiciones suficientes para las cuales las propiedades mencionadas en el enunciado son la consecuencia necesaria, se denominan también como problemas de construcción creativa.

DETERMINACIÓN DE DEPENDENCIA (DP): El formato del enunciado de los problemas de determinación de dependencia es: “dado un conjunto referencial de figuras geométricas y unas propiedades, establecer dependencias entre “tipos de figuras del conjunto referencial” y las “propiedades dadas”. Aquí hay libertad de decidir si el conjunto referencial o las propiedades son el antecedente de la conjetura, y usar la geometría dinámica de acuerdo a ello.”

6. ANÁLISIS

En el presente capítulo se clasifican los teoremas de existencia expuestos en el libro *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*, a luz de las categorías expuestas en el capítulo anterior; en primer lugar se presenta el análisis en relación con los enunciados de los teoremas, luego, de acuerdo al tipo de demostración de los mismos, y finalmente, según el tipo de problemas que se proponen para abordarlos.

6.1. ANÁLISIS SEGÚN EL ENUNCIADO

En los enunciados de los teoremas de existencia se distinguen tres categorías, presentaremos los enunciados de los teoremas de existencia que hacen parte de cada una de ellas, justificando su inclusión en la categoría respectiva.

6.1.1. ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A DEFINICIONES (ED)

Para el análisis, se presentará en primer lugar, los enunciados de los teoremas que corresponden a la tipología (ED1); posteriormente, los teoremas cuyos enunciados pertenecen a (ED2).

Enunciados que atienden a definiciones – tipología ED1.

En la tabla 07 se muestran los enunciados que hacen parte de los de la tipología ED1; se presenta el enunciado correspondiente, los objetos que intervienen en el enunciado, el objeto que existe, y particularmente, para este caso, el objeto que se ha definido previamente en el sistema teórico.

Nombre del Teorema	ENUNCIADO	OBJETOS QUE INTERVIENEN	ENUNCIADO PARAFRASEADO	OBJETO QUE EXISTE	OBJETO PREVIAMENTE DEFINIDO
Existencia del ángulo	Existen los ángulos	Ángulo	Los ángulos existen	Ángulo	Ángulo

Existencia de la Bisectriz.	Dado un ángulo, existe su bisectriz y esta es única.	Ángulo, bisectriz de ángulo	Siempre que se tenga un <i>ángulo</i> , es posible encontrar su <i>bisectriz</i> .	Bisectriz de un ángulo	Bisectriz de un ángulo
Existencia de la Mediatriz	Dado un segmento entonces existe su mediatriz.	Segmento, mediatriz de segmento	Siempre que se tenga un <i>segmento</i> , es posible encontrar su <i>mediatriz</i> .	Mediatriz de un segmento	Mediatriz de un segmento
Existencia de la Recta Paralela	Dada una recta y un punto externo a ella, existe una recta paralela a la dada que contiene el punto dado.	Recta, Punto, recta paralela	Siempre que se tenga una <i>recta</i> y un <i>punto</i> que no pertenezca a la recta, es posible encontrar una <i>recta paralela</i> a la recta inicial por el punto dado.	Recta Paralela	Recta Paralela
Recta Perpendicular por punto de la recta	Dada una recta m y un punto P en m . Existe una recta n que contiene a P tal que $m \perp n$.	Recta, Punto, recta perpendicular	Siempre que se tenga una <i>recta</i> y un <i>punto</i> que pertenezca a la recta, es posible encontrar una <i>recta perpendicular</i> a la recta inicial por el punto dado.	Recta Perpendicular por punto de una recta	Recta Perpendicular
Recta Perpendicular por punto externo	Dada recta m y un punto $A \notin m$ entonces existe una recta n tal que $A \in n$ y $n \perp m$.		Siempre que se tenga una <i>recta</i> y un <i>punto</i> que no pertenezca a la recta, es posible encontrar una <i>recta perpendicular</i> a la recta inicial por el punto dado.	Recta Perpendicular por punto externo a una recta	
Existencia Punto medio	Todo segmento tiene un punto medio.	Segmento, punto medio de un segmento	Siempre que se tenga un segmento, es posible encontrar su <i>punto medio</i> .	Punto Medio de un segmento	Punto Medio de un segmento
Existencia Rayo opuesto	Dado \overrightarrow{BA} , existe un \overrightarrow{BC} opuesto al \overrightarrow{BA} .	Rayo, rayos opuestos	Si se tiene un <i>rayo</i> , es posible encontrar un <i>rayo opuesto</i> a este.	Rayo Opuesto a uno dado	Rayos Opuesto

Recta-rayo-segmento	Si se tiene \overleftrightarrow{AB} entonces si existe \overline{AB} o \overrightarrow{AB}	Recta, Rayo, Segmento,	Si tiene una <i>recta</i> determinada por dos puntos, se tiene los <i>rayos</i> y el <i>segmento</i> determinados por dichos puntos.	Rayo, Segmento,	Rayo Segmento
Existencia Triángulo	Existen los triángulos	Triángulo	Los <i>triángulos</i> existen	Triángulo	Triángulo
Existencia Segmento	Existen los segmentos	segmento	Los segmentos existen	Segmento	Segmento
Existencia Rayo	Existen los rayos	rayo	Los rayos existen	Rayo	Rayo

Tabla 07 – Enunciados que atienden a definiciones – tipología ED1.

En los Teoremas anteriores, el consecuente afirma la existencia de un objeto que previamente ha sido definido; con ello se garantiza que estos teoremas pertenecen a la categoría **ED1**. No pertenecen a **ED2**, puesto que los objetos que existen no dependen de la definición de una relación sino del objeto mismo.

Enunciados que atienden a definiciones – tipología ED2.

La segunda tipología perteneciente a los enunciados que atienden a definiciones, es la ED2; la tabla 08, muestra los enunciados de los teoremas que por sus características, son incluidos en esta categoría; también se presentan los objetos que intervienen en el enunciado, el objeto que existe, y para el caso de esta tipología, la relación que cumple el objeto que existe con los objetos que intervienen.

Nombre del Teorema	ENUNCIADO	OBJETOS QUE INTERVIENEN	OBJETO QUE EXISTE	RELACIÓN DEFINIDA
Punto a un lado	Sean A y B dos puntos. Existe un punto C tal que $A - B - C$.	Puntos A y B	Punto C	Interestancia: El punto B está entre los puntos A y C si A, B y C son colineales, y $AB + BC = AC$
Punto entre	Dados dos puntos A y B existe un punto C entre ellos.			

Tabla 08 - Enunciados que atienden a definiciones – tipología ED2.

Teorema Punto a un Lado: Sean A y B dos puntos. Existe un punto C tal que $A - B - C$.

En la hipótesis del teorema, se mencionan *dos puntos* cualesquiera A y B (sin propiedad especial alguna); la tesis afirma la existencia de un *punto C al lado de B* , de tal forma que A, B y C sean colineales. La dependencia entre hipótesis y tesis se describe de la siguiente manera: Siempre que se tengan *dos puntos*, es posible encontrar un *punto* al lado de estos dos, de tal forma que los tres puntos sean colineales.

Los objetos involucrados en el teorema, destacados en letra cursiva, son: dos puntos y una relación entre puntos (**interestancia**); con el teorema se garantiza la existencia de un punto que cumple con una relación. Esto último, hace que el enunciado del Teorema Punto a un Lado pertenezca a la tipología **ED2**; para justificar la existencia del nuevo punto, se hace uso de la relación de interestancia, para ello, es necesario recurrir a la definición de dicha relación, de este modo, se garantiza que este teorema no pertenece a ED1, ya que el objeto al que se le provee la existencia no tiene definición en el sistema.

Lo mismo ocurre para el Teorema Punto Entre, su enunciado es el siguiente:

Dados dos puntos A y B existe un punto C entre ellos.

En el antecedente se nombran los puntos A y B , sin alguna propiedad específica; en el consecuente se afirma la existencia de un *punto C entre A y B* , de tal forma que A, B y C sean colineales. Parafraseando el enunciado se tiene que: Siempre que se tengan *dos puntos*, es posible encontrar un *punto entre* los dos dados.

Los objetos involucrados en este teorema, al igual que en el anterior son: dos puntos y una relación entre puntos (interestancia); con este teorema se garantiza la existencia de

un punto que cumple con una relación. Esto último hace que el enunciado del Teorema Punto a un Lado sea un enunciado tipo **ED2**.

Estos teoremas, (T. Punto a un lado y T. Punto entre), únicamente pueden pertenecer a los **ED2**; no pertenecen a los **ED1**, ya que el objeto que al que se le provee la existencia no ha sido definido previamente y su existencia tampoco es garantizada por un postulado. No pueden ser del tipo enunciados que atienden a condiciones específicas, aunque el objeto que existe no está previamente definido, ni su existencia está justificada por un postulado, sí se hace uso de una relación (la interestancia), relación definida en el sistema de referencia, lo que hace que se excluyan de manera inmediata de los **ECE**.

6.1.2. ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A POSTULADOS (EP)

Son enunciados de teorema que proveen existencia de objetos o relaciones que no poseen definición previa (son objetos y relaciones primitivos del sistema). Vale la pena precisar, que en este caso, la existencia de los objetos es garantizada por un postulado.

En la tabla 09, se presentan los teoremas pertenecientes a esta categoría; se muestra el enunciado correspondiente, los objetos que intervienen en el enunciado, el objeto que existe, y finalmente el postulado que garantiza la existencia de del objeto que surge.

Nombre del Teorema	ENUNCIADO	OBJETOS QUE INTERVIENEN	OBJETOS QUE EXISTE	POSTULADO QUE JUSTIFICA LA EXISTENCIA
Dos rectas - plano	Si m y k son dos rectas que se intersecan, entonces existe un único plano que las contiene.	Rectas, punto de intersección, plano	Plano	Postulado Tres puntos - plano: Dados tres puntos existe un plano que los contiene y si los tres puntos no son colineales, existe un único plano que los contiene.
Recta y punto - plano	Si C es punto dado y m una recta, tal que $C \notin m$ entonces existe un plano α que los contiene.	Recta, Punto, Plano		
Recta - punto	Si m es una recta, entonces existe por lo menos un punto en m .	Recta, punto	Punto(s)	Postulado no vacío: Las rectas y los planos son conjuntos no vacíos de puntos
Recta- infinitos puntos	Si m es una recta entonces existen infinitos puntos en m .			Postulado Puntos Recta- Números reales: Dada una recta, se

				<p>puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales talque:</p> <p>i. a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real;</p> <p>ii. a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.</p>
--	--	--	--	--

Tabla 09 - Enunciados que atienden a Postulados

A continuación haremos una breve descripción, por cada teorema, de lo presentado en la tabla anterior:

Teorema dos rectas – plano: Si m y k son dos rectas que se intersecan, entonces existe un único plano que las contiene.

El texto subrayado corresponde al antecedente, mientras que el no subrayado al consecuente. El antecedente menciona dos rectas que se intersecan; el consecuente afirma la existencia de un plano. Parafraseando el enunciado, la dependencia entre hipótesis y tesis se describe de la siguiente manera: Siempre que se tengan *dos rectas* que se intersecan, es posible encontrar un *plano* que las contiene; con el teorema se garantiza la existencia de un plano. Esto último hace que el enunciado del Teorema dos rectas – plano constituya en un enunciado de tipo **EP**; si bien no se da la existencia de un objeto geométrico que previamente se haya definido, sí de un objeto en el cual su existencia se justifica mediante un postulado, más específicamente con Postulado Tres puntos – plano.

Análogamente, se realiza el mismo procedimiento para determinar la categoría en la que se encuentra el Teorema Recta y Punto – Plano. El enunciado de este Teorema es el siguiente:

Si C es punto dado y m una recta, tal que $C \notin m$ entonces existe un plano α que los contiene.

El antecedente menciona una recta y un punto que no pertenece a dicha recta; el consecuente, al igual que el anterior, afirma la existencia de un plano. El enunciado del

teorema se describe de la siguiente manera: Siempre que se tengan una *recta* y un *punto* que no esté en la recta, es posible encontrar un *plano* que los contiene; el teorema garantiza la existencia de un plano. Esto último hace que el enunciado del Teorema Recta y Punto – Plano, también pertenezca a los enunciados de tipo **EP**, puesto que la existencia del objeto que aparece (el plano), se justifica Tres puntos – plano.

Estos dos teoremas, (T. Dos rectas – plano y T. Recta y punto - Plano), únicamente pueden pertenecer a los **EP**; no pertenecen a los **ED1**, ya que el objeto que nace no se ha definido previamente, su existencia como se vio anteriormente, se justifica mediante un postulado. No pertenecen a **ED2** ya que los objetos que existen no dependen de la definición de una relación.

Para los siguientes teoremas, los enunciados aluden a la existencia de un(os) punto(s) sobre una recta dada. Claro, punto es un objeto primitivo y es el objeto que debe existir según el enunciado. Sin embargo, hay una condición más que ese punto debe tener: *pertenecer* a una recta dada. Los enunciados correspondientes a estos teoremas son los siguientes:

Teorema Recta – Punto: Si m es una recta, entonces existe por lo menos un punto en m .

En la hipótesis del teorema, se menciona una *recta* m cualquiera (sin propiedad especial alguna); la tesis afirma la existencia de un *punto* en la recta. Parafraseando el enunciado del teorema se tiene: Siempre que se tenga una *recta*, es posible encontrar un *punto* en ella. En este teorema, el objeto que existe es un punto, sin embargo, este punto debe cumplir la condición de pertenecer a la recta dada; la relación de *pertenencia*, es una relación no definida dentro del sistema teórico en el cual se está trabajando; esto último, hace que el enunciado del Teorema Recta – punto pertenezca únicamente a los EP; para estar en ED, la relación debe estar definida en el sistema de referencia, lo cual no se cumple; para pertenecer a ECE, el consecuente debe cumplir condiciones nombradas en el antecedente, para el Teorema recta – punto, la única condición es la de pertenencia, sin embargo, el antecedente no es lo suficientemente “exigente”, para incluir dicho enunciado los ECE. Lo mismo ocurre para el Teorema Recta – Infinitos puntos, cuyo enunciado es:

Teorema Recta – Infinitos puntos: Si m es una recta entonces existen infinitos puntos en m .

En el enunciado del teorema se afirma la existencia de un punto a partir de una recta dada; nótese nuevamente el objeto que existe es uno o varios puntos, no obstante al igual que el teorema anterior, el(los) objeto(s) que existe(n) debe(n) *pertenecer* (relación no definida en el sistema teórico) a la recta dada; esto último, hace que el enunciado del teorema Recta – Infinitos puntos se constituya un enunciado de tipo EP.

6.1.3. ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A CONDICIONES ESPECÍFICAS

Para los enunciados de los teoremas que pertenecen a esta tipología, se muestra particularmente, la condición que debe cumplir el objeto que existe; al igual que las categorías anteriores, la tabla 10 presenta el enunciado del teorema de existencia, los objetos que intervienen y el objeto que existe.

Nombre del Teorema	ENUNCIADO	OBJETOS QUE INTERVIENEN	OBJETO QUE EXISTE	CONDICIONES DE EXISTENCIA
Localización de puntos	Sean r un número real positivo y el \overrightarrow{AC} . Entonces existe un único punto $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD = r$.	Rayo, un número real positivo, un punto y una distancia entre puntos.	Punto	Distancia r del punto al extremo del rayo y pertenencia al rayo dado.
Construcción de ángulos	Si se tiene \overrightarrow{AB} en un plano α y un número real r tal que $0 < r < 180$, entonces existe un único \overrightarrow{AD} tal que D esta en alguno de los semiplanos determinados por \overrightarrow{AB} en α y además $m\angle DAB = r$.	Rayo, un plano, un número real entre 0 y 180, semiplano, ángulo y medida del ángulo.	Rayo y ángulo	Medida de ángulo igual a r y pertenencia de uno de sus lados (salvo su extremo) a un semiplano específico.

Tabla 10 – Enunciados que atienden a condiciones específicas.

Hacemos una descripción de la tabla hecha. Para el caso del Teorema Localización de Puntos, cuyo enunciado es:

Sean r un número real positivo y el \overrightarrow{AC} . Entonces existe un único punto $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD = r$.

En el antecedente se menciona un rayo que no cumple alguna propiedad específica y un número real positivo cualquiera. En el consecuente se concluye la existencia a la existencia de un punto D en el rayo, cuya distancia al extremo del rayo dado es el número real r . En otras palabras, siempre que se tenga un número positivo y un rayo, es posible encontrar un punto en el rayo tal que la distancia al extremo del rayo sea el número dado. Los objetos que intervienen en él son: un rayo, un número real positivo, un punto y una distancia entre puntos; con el enunciado del teorema se garantiza la existencia de un punto con dos condiciones, la distancia y la pertenencia al rayo dado.

Esto último hace que este Teorema se clasifique dentro de los **ECE**; el punto D en el consecuente, depende de las “exigencias” del antecedente, en este caso, se necesita el \overrightarrow{AB} y un número real positivo tal que $AD = r$,

Una situación análoga sucede con el Teorema construcción de ángulos, cuyo enunciado es:

Si se tiene \overrightarrow{AB} en un plano α y un número real r tal que $0 < r < 180$, entonces existe un único \overrightarrow{AD} tal que D esta en alguno de los semiplanos determinados por \overrightarrow{AB} en α y además $m\angle DAB = r$.

En el antecedente se menciona un rayo que no cumple alguna propiedad específica, un número real positivo que se encuentre entre 0 y 180, y un plano. En el consecuente se concluye la existencia a la existencia de un rayo, con el cual se forma un ángulo de medida r . El teorema afirma la existencia de un rayo \overrightarrow{AD} (e implícitamente un ángulo) que depende de las condiciones dadas por el antecedente, se necesita el \overrightarrow{AB} , un plano α y un número real r entre 0 y 180; ello garantiza la pertenencia del enunciado a la tipología **ECP**.

En síntesis, se presenta en la tabla 11 los teoremas de existencia clasificados según la tipología respectiva.

ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A DEFINICIONES (ED)		ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A POSTULADOS (EP)	ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A CONDICIONES ESPECÍFICAS (ECE)
ED1	ED2		
T. Existencia del Ángulo	T. Punto a un lado	T. Dos rectas - plano	T. Localización de puntos

T. Existencia de la Bisectriz	T. Punto entre	T. Recta y punto - plano	T. Construcción de ángulos
T. Existencia de la Mediatriz		T. Recta-punto	
T. Existencia de la Recta Paralela		T. Recta -infinitos puntos	
Teorema Recta Perpendicular por punto de la recta			
Teorema Recta Perpendicular por punto externo			
T. Existencia Punto medio			
T. Existencia Rayo opuesto			
T. Recta-rayo-segmento			
T. Existencia Triángulo			
T. Existencia Segmento			
T. Existencia Rayo			

Tabla 11 – Clasificación de los Teoremas de Existencia según su enunciado

6.2. ANÁLISIS SEGÚN LA DEMOSTRACIÓN

Luego de haber analizado la clasificación de los teoremas de existencia según su enunciado, ahora se realizará según su demostración. En primera instancia, se tiene el grupo **DI1**, y en este se encuentran tres subcategorías. En la primer subcategoría **DI1-A**, solamente se encuentra el Teorema Recta Punto (en el cual se quiere demostrar que una recta tiene por lo menos un punto), dado que de manera inmediata el Postulado Conjunto de Puntos provee la existencia del objeto que se quiere que exista.

En **DI1-B** se encuentran tres teoremas, el Teorema Dos Rectas - Plano, Rectas y Punto-Plano y Recta- Infinitos Puntos. A continuación se muestra la Tabla 12, en la cual se evidencia el enunciado de cada Teorema, los objetos que intervienen en estos, los teoremas que proporcionan los puntos que son necesarios para el uso de postulados que provee la existencia del objeto y finalmente los postulados que justifican la existencia del objeto que surge.

ASPECTO TEOREMA	ENUNCIADO	OBJETOS QUE INTERVIENEN EN EL ENUNCIADO	TEOREMAS QUE PROPORCIONAN LOS PUNTOS QUE SON NECESARIOS PARA EL USO DE POSTULADOS QUE PROVEE LA EXISTENCIA DEL OBJETO	POSTULADOS QUE JUSTIFICAN LA EXISTENCIA
<i>Dos rectas plano</i>	Si m y k son dos rectas que se intersecan, entonces existe un único plano que las contiene.	Rectas, punto de intersección, plano	Teorema recta infinitos puntos. Provee la existencia de dos puntos B y C diferentes al punto A que pertenecen a la recta l y m respectivamente, con el fin de determinar la no colinealidad.	Postulado puntos plano. (Teniendo los puntos no colineales, se crea un plano que contiene a estos puntos, con el fin de demostrar lo requerido.)
<i>Recta, punto y plano</i>	Si C es punto dado y m una recta, tal que $C \notin m$ entonces existe un plano α que los contiene.	Recta, Punto, Plano	Teorema recta infinitos puntos. Provee la existencia de dos puntos B y C que pertenecen a la recta m dada, con el fin de determinar la no colinealidad entre los puntos B, C y A (A punto dado que no pertenece a m), y hacer una correspondencia entre la recta BC con la recta m .	Postulado puntos plano Teniendo los puntos no colineales, se crea un plano que contiene a estos puntos, con el fin de demostrar lo requerido.
<i>Recta infinitos puntos</i>	Si m es una recta entonces existen infinitos puntos en m .	Recta, punto	Teorema Recta Punto. Provee la existencia de un punto $A \in m$, el cual será usado para asignarle una coordenada a este punto y a partir de esto, crear números reales que se puedan corresponder con puntos de la recta (este Postulado se usa más veces en la demostración dado que va creando más puntos en la recta).	Postulado Recta Números Reales. Teniendo un punto en la recta, se siguen creando punto en la recta, con el fin de tener infinitos puntos.

En el caso del Teorema Dos Rectas Plano y Rectas Puntos Plano, se hace uso del Teorema Recta Infinitos puntos que proporcione los puntos que son necesarios en el Postulado Puntos Plano que provee la existencia del plano. Por otro lado, se encuentra el Teorema Recta Infinitos Puntos, en el cual se hace uso del Teorema Recta Punto para dar la existencia de un punto en la recta, teniendo este punto en la recta, por medio del Postulado recta números reales (ii) (el cual me da la existencia de puntos de la recta dado un número real que se corresponde con ellos), se tiene la existencia de infinitos puntos en la recta.

Otra subcategoría es **DI1-C**, en esta se encuentra la demostración del Teorema Punto a un Lado y el Teorema Punto Entre. En la Tabla 13 que esta a continuación, se evidencia el postulado que justifica la existencia de estos objetos y el teorema que media la existencia de estos, adicional, dado que las demostraciones de estos teoremas son similares, en la tabla se encuentra la relación de esos teoremas en cuanto a su estructura.

ASPECTO		TEOREMA	TEOREMA PUNTO A UN LADO	TEOREMA PUNTO ENTRE	
QUE SE USA Y SU PROPÓSITO	Postulado dos puntos recta		Teniendo como dado dos puntos A, B , se crea una recta con el fin de determinar coordenadas a los puntos.	Teniendo como dado dos puntos A, C , se crea una recta con el fin de determinar coordenadas a los puntos.	
	Postulado puntos de recta números reales (i)		Determinación de un número que pertenece a los reales para cada punto.		
			$C(A) = a, C(B) = b, b \neq c.$	$C(A) = a, C(C) = c, a \neq c.$	
	Tricotomía		Consideración de dos posibles casos.		
			$a < b \vee a > b$	$a < c \vee a > c$	
	Propiedades de los números reales		Existencia de un número que pertenece al conjunto de los reales que se encuentra en cualquier punto de la recta según se requiera.		
		Existe c tal que: $a < b < c \vee a > b > c$	Existe b tal que: $a < b < c \vee a > b > c$		
POSTULADOS QUE JUSTIFICAN LA EXISTENCIA DEL OBJETO	Postulado puntos de recta números reales (ii)		Determinación de la coordenada del número que pertenece a los reales y que cumple una desigualdad según se requirió.		
			$c = C(C)$	$b = C(B)$	

<i>PROPIEDAD USADA EN EL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN</i>	Principio de sustitución	Dado que se requiere la interestancia entre puntos, teniendo los números y sus respectivas coordenadas, se pueden sustituir las desigualdades de los números que pertenecen a los reales por los puntos correspondientes. $C(A) < C(B) < C(C) \vee C(A) > C(B) > C(C)$
<i>TEOREMA QUE MEDIA LA EXISTENCIA DEL OBJETO</i>	Teorema doble orden interestancia	Por este teorema, se pueden encontrar las interestancias que se requieren a partir de las desigualdades entre las coordenadas de los puntos. $A - B - C \vee C - B - A$

Tabla 13 – Clasificación de las Demostraciones **DI1-C**

Estos teoremas pertenecen a esta subcategoría, dado que son aquellas demostraciones en las cuales los objetos que se quiere que existan no son justificados al final de la demostración por postulados, sino que hay un teorema específico, Teorema Doble Orden Interestancia²⁰ que media la existencia del objeto. Aunque en esencia, la existencia está dada gracias al Postulado Puntos de Recta Números Reales (ii) en la cual a cada número le corresponde un punto.

Por otro lado, se encuentra el grupo **DI2**, el cual se encuentra dividido entre dos subcategorías. En la primera, **DI2-A**, están inmersos las demostraciones de los Teoremas de Existencia del Ángulo, Triángulo, Segmento, Rayo y Segmento-Rayo-Recta. A continuación, se presenta la Tabla 14 en la cual se encuentran los aspectos fundamentales que determinan esta categoría.

<i>TEOREMA</i>		<i>ÁNGULO</i>	<i>TRIÁNGULO</i>	<i>SEGMENTO</i>	<i>RAYO</i>
<i>ASPECTO</i>					
DETERMINACIÓN DE OBJETOS FUNDAMENTALES PARA LA DEMOSTRACIÓN DIRECTA DEL TEOREMA.	<i>Objeto</i>	Determinación de tres puntos A, B, C no colineales.		Determinación de dos puntos A, B .	
	<i>Garantías que se usaron</i>	P. puntos-plano.		T. Recta punto	
CREACIÓN DE OBJETOS DETERMINADOS POR LOS OBJETOS FUNDAMENTALES.	<i>Objeto</i>	Recta AB y BC		$\exists X/A - X - B$	$\exists X/A - B - X$
	<i>Garantías que se usaron</i>	P. dos puntos recta.		T. Punto entre	T. Punto a un Lado
USO DE LAS DEFINICIONES DE LOS OBJETOS QUE	<i>Objeto</i>	Ángulo ABC .	Triángulo ABC .	$\exists \overline{AB}$	$\exists \overrightarrow{AB}$

²⁰ Dados tres puntos A, B y C de la recta m , si $c(A) < c(B) < c(C)$ ó si $c(C) < c(B) < c(A)$ entonces $A - B - C$ ó $C - B - A$.

<i>SE QUIEREN QUE EXISTAN</i>	<i>Definición que se uso</i>	D. ángulo	D. triángulo	D. Segmento	D. Rayo
-------------------------------	------------------------------	-----------	--------------	-------------	---------

Tabla 14– Clasificación de las Demostraciones DI2-A

Las demostraciones de esta subcategoría sustentan la existencia del objeto garantizando las condiciones sobre las cuales se enuncia la definición del objeto. Por un lado, justificar la Existencia del Ángulo y del Triángulo, basta con garantizar la existencia de tres puntos no colineales en un plano α ; por otro lado, en las demostraciones de los Teoremas de Existencia del Segmento, el Rayo y del Segmento-Rayo-Recta, basta con garantizar existencia de dos puntos. En conclusión, la demostración de los objetos de esta categoría son *inmediatas* en tanto que un postulado (o teorema) garantiza directamente condiciones exigidas en sus respectivas definiciones.

Adicional, los objetos de los cuales se busca su existencia, deben existir como “*queremos que existan*”, para ello, se hace indispensable hacer uso del teorema punto a un lado y/o del teorema punto entre. Ejemplo de esto, es la demostración del Teorema existencia del segmento; se necesita que existan dos punto A y B y todos los puntos que se encuentran entre estos dos. Luego de garantizar la existencia de los dos puntos, se hace necesario hacer uso del teorema punto entre, para garantizar que en medio de A y B hay más puntos. DI2, se diferencia de DI1, dado que lo que garantiza la existencia de los objetos no es un postulado.

En la demostración del Teorema Recta-Rayo, segmento, se deben justificar dos partes, dado que hay una doble implicación en su enunciado: (i) si se tiene \overleftrightarrow{AB} , entonces existe \overrightarrow{AB} o el \overleftarrow{AB} ; (ii) si se tiene \overrightarrow{AB} o el \overleftarrow{AB} , entonces existe \overleftrightarrow{AB} . La primera parte, es similar a la demostración de la existencia del Segmento y del Rayo, en la segunda parte, basta con usar el Postulado dos Puntos-recta, el cual necesita de dos puntos para formar la recta, estos se encuentran en el rayo y en segmento. El Teorema Recta-Rayo, segmento, pertenece a esta subcategoría dado que en la demostración de cualquiera de las dos partes, se debe sustentar la existencia de dos puntos para garantizar las condiciones sobre las cuales se enuncia la definición del segmento o del rayo según corresponda.

En la segunda subcategoría de DI2, **DI2-B**, se encuentran las demostraciones de los Teoremas de Existencia Perpendicular por Punto de Recta y el Rayo Opuesto. En la

siguiente tabla, se encuentran los dos teoremas pertenecientes a esta subcategoría, en la que se evidencia la relación de diferentes aspectos como: los objetos dados, los teoremas que proveen las propiedades dadas en la definición del objeto en cuestión y el uso de las definiciones de los objetos a los cuales se les cuestiona su existencia.

<i>ASPECTO</i>		<i>TEOREMA</i>	<i>RAYO OPUESTO</i>	<i>RECTA PERPENDICULAR POR PUNTO DE RECTA</i>
<i>OBJETOS DADOS</i>			Rayo <i>BA</i>	Recta <i>AB</i>
<i>CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS (USO DE TEOREMA QUE PROVEE LAS PROPIEDADES (DADAS EN LA DEFINICIÓN) DEL OBJETO EN CUESTIÓN)</i>	<i>Objeto</i>		$A - B - C$	El Rayo <i>AE</i> esta contenido en el semiplano determinado por la recta <i>AB</i> tal que la medida del ángulo $\angle BAE = 90$
	<i>Garantías que se usaron</i>		T. Punto a un lado	T. Construcción de ángulos
<i>DETERMINACIÓN DE OBJETOS CREADOS A PARTIR DE DEFINICIONES</i>	<i>Objeto</i>		Rayo <i>BC</i> y rayo <i>BA</i> .	$\angle BAE$ recto
	<i>Garantías que se usaron</i>		D. Rayo	D. ángulo recto
<i>USO DE LAS DEFINICIONES DE LOS OBJETOS QUE SE QUIEREN QUE EXISTAN</i>	<i>Objeto</i>		Los rayos <i>BA</i> y <i>BC</i> son opuestos	La recta <i>AB</i> es perpendicular a la recta <i>AE</i>
	<i>Definición que se uso</i>		D. Rayo opuesto	D. recta perpendicular

Tabla 14– Clasificación de las Demostraciones DI22

En los dos teoremas se hace uso de un teorema que provee de manera inmediata la existencia de las propiedades encontradas en la definición. En el caso de la demostración del Teoremas de Existencia Perpendicular por Punto de Recta, se hace uso del Teorema construcción de Ángulos que de manera inmediata construye un ángulo con una medida de noventa, para llegar a la propiedad de perpendicularidad. En el caso del Teorema de Existencia del Rayo Opuesto, se hace uso del Teorema Punto a un Lado que de manera inmediata construye un punto a un lado de los dos puntos dados, con esto se lograba generar el rayo opuesto al dado.

Después de analizar las demostraciones que pertenecen al grupo de aquellos objetos que son demostrados de manera inmediata, se continúa con las demostraciones mediatas (DM), en estas, se encuentra dos subcategorías, en la primera, **DM1**, están las

demostraciones de los Teoremas de Existencia de la Paralela, de la Perpendicular por Punto Externo y de la Mediatriz; A continuación, se presenta un esquema, en el cual se visualizan las similitudes y diferencias de los teoremas pertenecientes a esta subcategoría.

<i>TEOREMA</i> <i>ASPECTO</i>	<i>TEOREMA</i> <i>EXISTENCIA</i> <i>DE LA</i> <i>PARALELA</i>	<i>TEOREMA EXISTENCIA DE</i> <i>PERPENDICULAR POR PUNTO</i> <i>EXTERNO</i>	<i>TEOREMA</i> <i>EXISTENCIA DE</i> <i>LA MEDIATRIZ.</i>
<i>OBJETOS</i> <i>DADOS</i>	Recta l, P punto $P \notin l$	recta $m, A \notin m$	\overline{AB}
<i>TEOREMAS</i> <i>QUE</i> <i>PROVEEN LA</i> <i>EXISTENCIA</i> <i>DEL OBJETO</i> <i>QUE EN</i> <i>PRINCIPIO</i> <i>NO CUMPLE</i> <i>CON LAS</i> <i>PROPIEDADES</i> <i>DE LA</i> <i>DEFINICIÓN</i> <i>DEL OBJETO</i> <i>CUYA</i> <i>EXISTENCIA</i> <i>SE</i> <i>DEMUESTRA</i>	Existe una recta k tal que $K \subset \alpha$, $P \in k$ y $k \perp l$.	Sea crea un rayo XT en el que el punto T se encuentra en el semiplano determinado por la recta m en donde no esta A , tal que $m\angle YXT = r$. Con esto, se busca la congruencia entre el $\angle YXT$ y el $\angle AXY$.	Sea M punto medio de \overline{AB}
	Teorema existencia de la perpendicular por punto externo	Teorema Construcción de Ángulos	T. Existencia punto medio
	Existe una recta m tal que $m \subset \alpha$, $P \in m$ y $m \perp k$.	Se crea un punto B que pertenezca al segmento XT tal que $XB = XA$	Sea $l \perp \overline{AB}, M \in l$
	Teorema existencia de la perpendicular por punto externo	Teorema Localización de Puntos	T. Existencia perpendicularidad por punto de recta
			Sea $T \in l, T \neq M$
<i>DEFINICIONES (O</i> <i>TEOREMAS)</i> <i>QUE</i> <i>PROVEEN LAS</i> <i>PROPIEDADES</i> <i>QUE EL</i> <i>OBJETO DEBE</i>	$m \parallel l$	$\overleftrightarrow{AB} \perp m$	\overline{TM} es mediatriz del \overline{AB} .
	Teorema perpendicular	D. Rectas perpendiculares	D. Mediatriz

<i>TENER PARA QUE ESTE EXISTA</i>	paralelismo		
-----------------------------------	-------------	--	--

Tabla 15– Clasificación de las Demostraciones DM1

Estos dos teoremas pertenecen a esta subcategoría, dado que, en cada una de ellas, se valen de un teorema que provee la existencia de un objeto que en principio no cumple con las propiedades de la definición del objeto cuya existencia se demuestra, pero provee propiedades mediante la cuales indirectamente generan las condiciones de la definición del objeto en cuestión.

En el caso de la Existencia de la paralela, se crean dos rectas perpendiculares a una misma recta, construcción sustentada por el Teorema de Existencia de la perpendicular por punto de Recta. Por otro lado, para demostrar la existencia de una recta perpendicular por punto externo, fue necesario realizar una construcción de un ángulo que cumpliera ciertas propiedades para dar existencia del objeto que se busca, esto fue sustentado por el teorema construcción de ángulos y localización de puntos. Finalmente, en la demostración de la Mediatriz, se necesitó construir un punto medio, una perpendicular a este punto y por medio de estos objetos, demostrar que la mediatriz son todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

De esta subcategoría, hay dos demostraciones que tienen unas características especiales. La primera demostración es la Existencia de la Mediatriz, la cual depende de la definición que tiene para que este objeto exista. En este caso, la definición de mediatriz puede ser: (i) dado un segmento, en un plano, la mediatriz del segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, ó (ii) dado un segmento, en un plano, la mediatriz del segmento son los puntos que equidistan de los extremos del segmento. Si se toma (i) como definición, el grupo al que pertenece la demostración es a DM2, dado que se busca un punto X con dos propiedades: la primera, es que sea punto medio del segmento; la segunda, que sea una recta perpendicular por ese punto medio. Necesariamente, se debe construir el punto medio, dado que, si se empieza con la construcción de la recta perpendicular, no hay seguridad que la recta pase por el punto medio. Por otra parte, si se toma (ii) como definición de mediatriz, la demostración del Teorema de Existencia de la Mediatriz pertenece a esta subcategoría, DM1, como ya se había explicado anteriormente.

La segunda demostración, es la Existencia de la Paralela, en esta, no depende de la definición la inclusión en uno u otro grupo, sino de la construcción del objeto; si se hace una construcción diferente a la planteada en esta subcategoría para este teorema, por ejemplo, si se construye una recta transversal a dos rectas y se demuestra que si los ángulos alternos internos que se forman de la transversal con estas dos rectas son congruentes entonces forman dos rectas paralelas, esta demostración haría parte de la subcategoría DI22, dado que la construcción provee de manera inmediata la existencia de las dos rectas paralelas.

Otra subcategoría de DM, es **DM2**, en esta se encuentran las demostraciones de 4 Teoremas de Existencia, Punto Medio, Localización de Puntos, Construcción de Ángulos y Bisectriz. A continuación se presenta un esquema realizado por Molina (En prensa), en el que se muestra el propósito de construir un objeto geométrico con algunas propiedades, que son absolutamente necesarias y que figuran en la definición del objeto geométrico cuya existencia debe ser probada.

<i>TEOREMA</i>		<i>TEOREMA PUNTO MEDIO</i>	<i>TEOREMA LOCALIZACIÓN DE PUNTOS</i>	<i>TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS</i>
<i>ASPECTO</i>				
<i>CONJUNTO AL QUE DEBE PERTENECER EL PUNTO QUE SE BUSCA:</i>		Segmento AB .	Rayo CT .	Uno de los semiplanos (H) determinados por la recta AB en α .
<i>QUE SE USA Y SU SIGNIFICADO</i>	Postulado puntos de recta números reales.	Asignar coordenadas a y b a los extremos A y B del segmento, respectivamente.	Asignar coordenadas al origen del rayo (C) y al punto que lo determina (T).	
	Postulado rayos número			Asignar coordenada 0 al rayo AB .
<i>Propósito de la determinación de un número real relacionado con las coordenadas escogidas:</i>		Satisfacer la equidistancia del punto que se busca a los extremos del segmento.	Satisfacer que la distancia del origen del rayo al punto buscado sea z .	Satisfacer que la medida del ángulo conformado con el rayo buscado y el dado sea r .
Condiciones, en términos de las coordenadas asignadas,		Es el promedio de las coordenadas	Es un número x que depende	Es un número entre 0 y 180 tal

del número que permite determinar el objeto buscado:	asignadas a los extremos.	de la relación de orden entre $c(C)$ y $c(T)$ y del hecho de que la distancia del punto buscado al extremo del rayo sea z . Específicamente, el número x es la suma o la diferencia de $c(C)$ y z , según si $c(T)$ es mayor o menor que $c(C)$.	que el valor absoluto de la diferencia entre la coordenadas que se asignen a los rayos que conforman al ángulo sea r . Específicamente, como la coordenada del rayo AB es 0 , el número buscado es el mismo r .
--	---------------------------	--	--

Tabla 16– Clasificación de las Demostraciones DM2

En el caso de la demostración de la Existencia de la Bisectriz, se requiere de un rayo BD que pertenezca al interior del ángulo dado, $\angle ABC$, el cual se encuentre en correspondencia con un número real $\frac{1}{2}r$, siendo r el número que le corresponde al rayo BC , esta construcción con la intención de generar un rayo que determine la congruencia entre los ángulos adyacentes que se forman, luego de esto, aludiendo a la definición de Bisectriz, se debe demostrar que un punto del rayo BD realmente se encuentra en el interior del ángulo ABC , esto se puede justificar creando una intersección entre la recta BD que contiene al rayo BD con un segmento XY , en el cual los puntos X, Y sean puntos de los rayos BC y BA respectivamente, dado que el Teorema Punto en el Interior del ángulo a partir de esta intersección justifica que un punto del rayo está en el interior del ángulo y con esto, se demuestra que el rayo BD es bisectriz del ángulo ABC .

Este teorema pertenece a este grupo, dado que requiere la construcción de un objeto geométrico, rayo BD , con algunas propiedades: que el rayo este en el interior del ángulo ABC y que los rayos que se forman con este formen ángulos congruentes ente sí. Necesariamente, se debe construir un rayo con coordenada $\frac{1}{2}r$ la cual me asegura que este rayo junto con los rayos del ángulo dado me forman dos ángulos congruentes, dado que, si se empieza construyendo un punto cualquiera que esté en el interior del ángulo,

no hay seguridad que a este rayo le corresponda la coordenada $\frac{1}{2}r$ y por tanto los ángulos no podrían ser congruentes.

Ahora, por medio de un esquema, se presentará de manera general la clasificación de los teoremas de existencia de acuerdo a su demostración.

INMEDIATAS					MEDIATAS	
DII			DI2		DM1	DM2
DI1-A	DI1-B	DI1-C	DI2-A	DI2-B	T. Existencia de la mediatriz	T. Existencia del Punto Medio
T. Recta punto	T. Dos rectas plano	T. Punto a un lado	T. Existencia del segmento	T. recta perpendicular por punto de recta	T. recta perpendicular por punto externo	T. Localización de Puntos
	T. Rectas puntos-plano	T. Punto entre	T. Existencia del rayo	T. Existencia Rayo opuesto	T. Existencia de la Paralela	T. Construcción de Ángulo
	T. Recta infinitos puntos		T. Existencia del ángulo			T. Existencia de la Bisectriz
			T. Existencia del triángulo			
			T. Recta-Rayos, segmento			

6.3. ANÁLISIS SEGÚN EL TIPO DE PROBLEMAS QUE SE PROPONEN PARA LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA.

Para la clasificar el tipo de tareas que se proponen en relación con los teoremas de existencia expuestos anteriormente, se tendrán en cuenta las categorías presentadas en el capítulo anterior. En primer lugar se muestra el análisis de acuerdo al tipo de problemas que se proponen, y luego, de acuerdo al foco de búsqueda.

A continuación, se muestra en la tabla 18 el tipo de problemas que proponen Samper y Molina (2013), para los respectivos teoremas de existencia, se presenta, en la primera columna el teorema de existencia que se trabaja, y en la segunda, el tipo de tarea que se propone.

<i>TEOREMA DE EXISTENCIA</i>	<i>TAREA PROPUESTA</i>
T. Recta - infinitos puntos	Problema 1: Construya una recta en cabri. Determine los hechos geométricos involucrados en la construcción
T. Recta dos puntos	
T. Recta - punto	
T. Punto entre	Surge a partir de la definición de segmento.
T. Punto a un Lado	Problema 2: $\overleftrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AB}$?
T. Segmento - rayo - recta	Surge de la demostración de punto medio
T. Existencia del Punto Medio	Problema 3: ¿Existe el punto medio de un segmento?
T. Rayo opuesto	Problema 4: Dados tres puntos no colineales A, B y C . ¿Es posible construir un punto D tal que \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} se bisecan?
T. Localización de puntos	
T. Recta y punto – plano	Problema 5: ¿Cuántos planos contienen a una recta dada m y a un punto $C \notin m$?
T. Dos rectas - plano	Problema 6: ¿es posible demostrar el postulado puntos plano ii (dados tres puntos existe un plano que los contiene y si los tres puntos no son colineales, existe un único plano que los contiene), a partir del teorema anterior?
T. Construcción de ángulos	Problema 7: Dado un ángulo A en Cabri, describa dos procesos diferentes para construir un ángulo congruente a este. ¿Qué le permite garantizar que son congruentes?
T. Recta Perpendicular por punto de la recta	Surge a partir de una propuesta del problema 7
T. Existencia de la Bisectriz	Problema 8: Construya dos ángulos adyacentes congruentes. ¿Qué le permiten garantizar que son congruentes?
T. Existencia del Triángulo	Problema 9: ¿Existen los triángulos?
T. Recta Perpendicular por punto externo	Problema 10: Sean la \overleftrightarrow{PC} y un punto $A \notin \overleftrightarrow{PC}$ contenidos en un plano. Proponga dos métodos para determinar un punto B en el mismo plano de tal manera que el $\triangle ACP$ y $\triangle BCP$ sean congruentes.
T. Existencia del Ángulo	Problema 11: Sean \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} rayos opuestos y \overrightarrow{AD} otro rayo. ¿Es posible determinar un punto E , en el mismo semiplano en el cual está D , para que el

	$\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?
T. Existencia de la Mediatriz	<p>Problema 12: Dados una recta m, un punto R de ella y un punto P que no pertenece a ella.</p> <p>a. ¿Cuántos puntos del $S_{m,\sim P}$ tienen la misma distancia a R que la distancia de R a P? Justifique su respuesta.</p> <p>b. ¿Existe un punto Q tal que para todo punto Y de m se tenga que QY sea igual a PY? Si existe, describa sus características geométricas.</p>
T. Existencia de la recta Paralela	Problema 13: ¿Existen las rectas paralelas?

Tabla 18 – Problemas propuestos para los Teoremas de Existencia

Luego de presentar el tipo de problemas que se proponen para abordar los Teoremas de Existencia, se analizará cada uno de ellos, y se determinará la tipología a la cual pertenece.

6.3.1. PROBLEMAS TEÓRICOS.

Para determinar los problemas que pertenecen a la tipología PT, se observa que en los enunciados se busca utilizar elementos del sistema teórico para dar solución a la pregunta planteada. De esta forma, los enunciados que pertenecen a esta categoría se muestran en la tabla 19

<i>TIPO DE PROBLEMA</i>	<i>TEOREMA DE EXISTENCIA</i>
PROBLEMAS TEÓRICOS (PT):	T. Punto a un Lado
	T. Existencia del Punto Medio
	T. Recta y punto – plano
	T. Dos rectas - plano
	T. Existencia del Triángulo
	T. Existencia de la recta Paralela
	T. Segmento – Rayo - Recta

Tabla 19 – Problemas Teóricos

6.3.2. PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Para determinar cuál o cuáles problemas pertenecen a la tipología PGD, es fácil observar que, o bien su enunciado hace referencia al uso de la Geometría Dinámica, o bien el propósito del problema es la exploración mediante la Geometría Dinámica.

En primer lugar se muestran los teoremas que pertenecen a la categoría PGD1; de esta forma los problemas pertenecientes a esta categoría son:

<i>TIPO DE PROBLEMA</i>	<i>TEOREMA DE EXISTENCIA</i>
PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA (PGD1):	T. Recta - infinitos puntos
	T. Recta dos puntos
	T. Recta - punto
	T. Rayo opuesto
	T. Localización de puntos
	T. Construcción de ángulos
	T. Existencia de la Bisectriz
	T. Recta Perpendicular por punto externo
	T. Existencia del Ángulo
T. Existencia de la Mediatriz	

Tabla 20 – Problemas con Geometría Dinámica PGD1

En segundo lugar, Los teoremas que pertenecen la tipología PGD2, surgen para validar una construcción sugerida por un estudiante; de esta forma, se hace necesario determinar el propósito del problema para clasificar los teoremas de existencia pertenecientes a esta categoría. De esta forma los Teoremas de esta categoría se muestran en la tabla 21:

<i>TIPO DE PROBLEMA</i>	<i>TEOREMA DE EXISTENCIA</i>
TEOREMAS QUE SURGEN EN MEDIO DE UNA DEMOSTRACIÓN (PGD2):	T. Punto entre
	T. Segmento - rayo - recta
	T. Recta Perpendicular por punto de la recta

Tabla 21 – Teoremas que surgen en medio de una demostración.

En síntesis, la tabla 22 muestra los teoremas de existencia clasificados según el tipo de problemas al que pertenecen

PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA (PGD):		PROBLEMAS TEÓRICOS (PT)
(PGD1)	(PGD2)	
T. Recta - infinitos puntos	T. Punto entre	T. Punto a un Lado
T. Recta dos puntos	T. Segmento - rayo - recta	T. Existencia del Punto Medio
T. Recta - punto	T. Recta Perpendicular por punto de la recta	T. Recta y punto – plano
T. Rayo opuesto		T. Dos rectas - plano
T. Localización de puntos		T. Existencia del Triángulo
T. Construcción de ángulos		T. Existencia de la recta Paralela
T. Existencia de la Bisectriz		T. Segmento – Rayo -

		Recta
T. Recta Perpendicular por punto externo		
T. Existencia del Ángulo		
T. Existencia de la Mediatriz		

Tabla 22– Clasificación de los Teoremas de Existencia según los problemas Propuestos.

6.4. ANÁLISIS SEGÚN EL FOCO DE BÚSQUEDA.

Para determinar la tipología a la que pertenece cada problema presentado por Samper y Molina (2013), basta con observar su enunciado y determinar si se presenta una búsqueda de consecuente, antecedente o determinación de dependencia.

6.4.1. BÚSQUEDA DE CONSECUENTE

La tabla 23, muestra cuales de los problemas que se proponen para abordar los Teoremas de Existencia pertenecen a la tipología BC.

<i>TEOREMA DE EXISTENCIA</i>	<i>ENUNCIADO DEL PROBLEMA</i>	<i>ANTECEDENTE</i>	<i>CONSECUENTE</i>
T. Recta - infinitos puntos T. Recta dos puntos T. Recta - punto	Construya una recta en cabri. Determine los hechos geométricos involucrados en la construcción	Recta	Punto(s) <i>La condición que se busca, es que el punto pertenezca a la recta dada.</i>

Tabla 23 – Problemas de búsqueda de Consecuente

6.4.2. BÚSQUEDA DE ANTECEDENTE

La tabla 24, muestra cuales de los problemas que se proponen para abordar los Teoremas de Existencia pertenecen a la tipología BA.

<i>TEOREMA DE EXISTENCIA</i>	<i>ENUNCIADO DEL PROBLEMA</i>	<i>ANTECEDENTE</i>	<i>CONSECUENTE</i>
T. Rayo opuesto T. Localización de puntos	Dados tres puntos no colineales A, B y C . ¿Es posible construir un punto D tal que \overline{AB} y \overline{CD} se bisecan?	Puntos no colineales A, B y C . <i>Se debe buscar la ubicación del punto D, para cumplir la condición del consecuente</i>	\overline{AB} y \overline{CD} se bisecan
T. Recta Perpendicular	Sean la \overrightarrow{PC} y un punto $A \notin \overrightarrow{PC}$ contenidos en	Sean la \overrightarrow{PC} y un punto $A \notin \overrightarrow{PC}$	$\triangle ACP$ y $\triangle BCP$ sean congruentes.

por punto externo	un plano. Proponga dos métodos para determinar un punto B en el mismo plano de tal manera que el ΔACP y ΔBCP sean congruentes.	contenidos en un plano. <i>Se busca determinar la ubicación del punto B, para satisfacer las condiciones del consecuente.</i>	
T. Existencia de la Mediatrix	¿Existe un punto Q tal que para todo punto Y de m se tenga que QY sea igual a PY?	<i>Existencia del Punto Q, que cumpla con las condiciones solicitadas por el consecuente</i>	$QY = PY$

Tabla 24 – Problemas de búsqueda de Antecedente

6.4.3. DETERMINACIÓN DE DEPENDENCIA

Respecto a esta categoría, no se encontraron problemas que aludieran a este tipo de tareas; con lo que no es posible clasificar algún teorema de existencia dentro de esta categoría.

6.5. CORRESPONDENCIA ENTRE EL TIPO DE PROBLEMAS Y LOS ENUNCIADOS

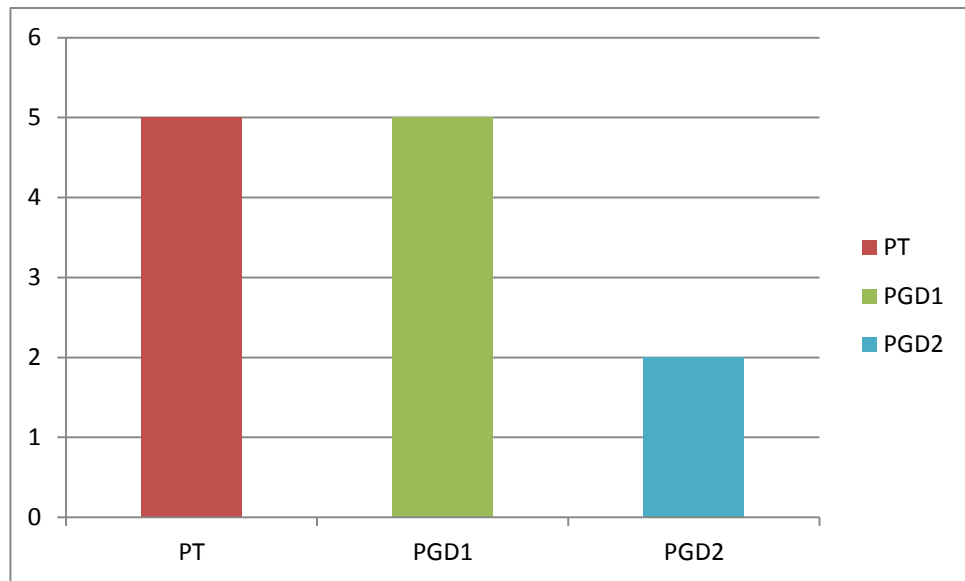
Para establecer alguna correspondencia entre la clasificación del tipo de problemas, y la clasificación según los enunciados, se presentarán los siguientes diagramas de barras, en donde se muestra el tipo de enunciado, y el tipo de problema asociado a cada tipológica.

Los demás problemas no atienden a ninguna tipología, por tanto, no fueron clasificada en ninguna de ella.

6.5.1. ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A DEFINICIONES VS TIPO DE PROBLEMAS

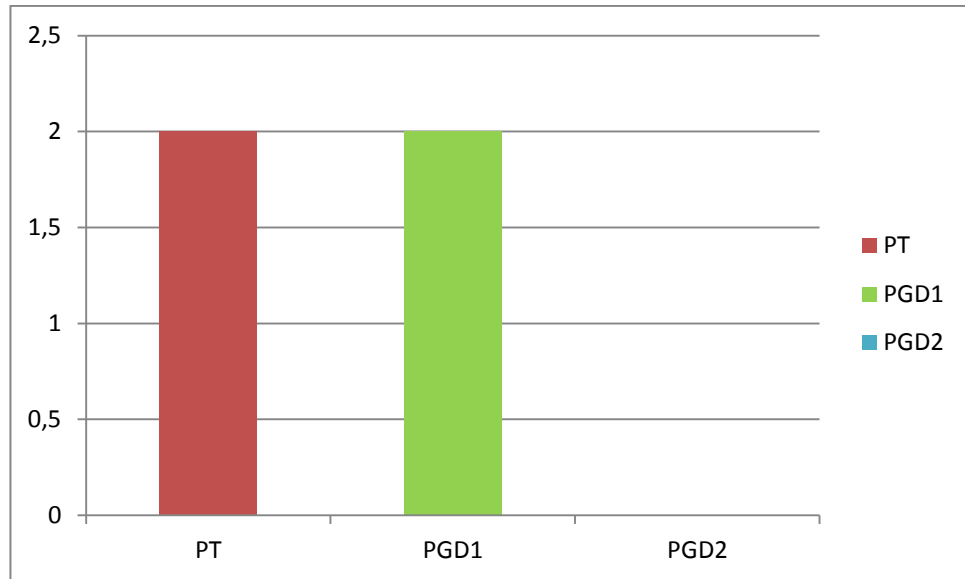
En el siguiente diagrama se observa como en los Enunciados que atienden a es posible encontrar los dos tipos de tareas/problemas, problemas teóricos (5), y problemas con

geometría dinámica (7). Se destaca que la cantidad de problemas de PG1 (5), es mayor a la de PG2 (2).



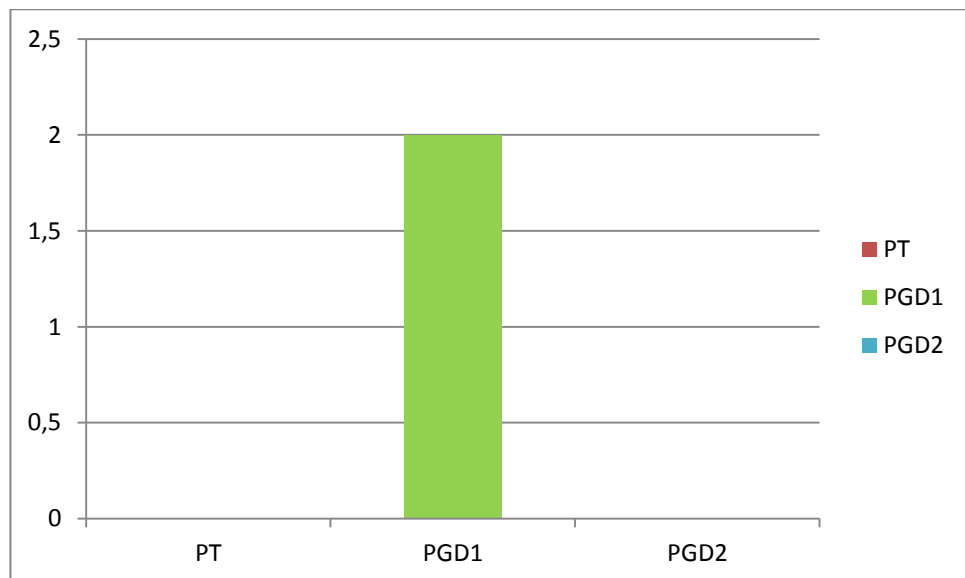
6.5.2. ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A POSTULADOS vs TIPO DE PROBLEMAS

En el diagrama que se presenta a continuación se observa como los Enunciados que atienden a postulados, son únicamente de dos tipos, problemas teóricos, y problemas con geometría dinámica de tipo 1 (PGD1) Los teóricos aluden a los problemas relacionados con objetos no definidos (el plano), mientras que los problemas con geometría dinámica (PGD2) corresponden a relaciones no definidas (pertenencia), es el caso del Teorema Recta – Punto.



6.5.3. ENUNCIADOS QUE ATIENDEN A CONDICIONES ESPECÍFICAS VS TIPO DE PROBLEMAS

En cuanto a la relación entre los enunciados que atienden a condiciones específicas y el tipo de problemas propuestos para los teoremas de existencia, se observa que únicamente se evidencia un tipo de problemas, aquellos que hacen uso de la geometría dinámica de tipo 1 (PGD1).



7. CONCLUSIONES

1. Realizando la correspondencia entre las categorías de las clasificaciones según enunciado y según demostración, inferimos que:
 - i) El grupo de enunciados que atienden a postulados (EP), se encuentran agrupados de forma similar con el grupo de las demostraciones inmediatas de tipo 1 (DI1); difieren únicamente que en DI1 se encuentran dos teoremas adicionales, Teorema Punto Entre y Teorema Punto a un Lado.
 - ii) El grupo de demostraciones DI2 se encuentran agrupados de forma similar con el grupo de enunciados que atienden a definiciones de tipo 1 (ED1); difieren únicamente que en ED1 se encuentran cinco teoremas adicionales, Teorema Existencia de la Bisectriz, de la Mediatriz, de la Recta Paralela, Perpendicular por Punto Externo y Existencia del Punto Medio.
2. Los enunciados que atienden a condiciones específicas (ECE) son muy importantes en el sistema teórico, dado que se usan frecuentemente en situaciones de construcción. Por ejemplo, cuando se necesita un ángulo con una medida específica, el teorema Construcción de Ángulos es vital, pues este justifica la existencia del objeto (el ángulo) con la condición solicitada (la medida).
3. En cuanto a la relación entre el tipo de problemas y la clasificación de enunciados, se infiere que:
 - i) Entre los tipos de problemas y enunciados que atienden a definiciones (ED), se encuentran los dos tipos de problemas; problemas teóricos y problemas con geometría dinámica. Aunque cabe resaltar que dentro de los problemas de geometría dinámica, se encuentran en mayor cantidad los problemas de tipo PGD1
 - ii) Entre los tipos de problemas y enunciados que atienden a postulados (EP), se observa hay una tendencia a realizar problemas, problemas teóricos y problemas con geometría dinámica de tipo 1 (PGD1). Los teóricos aluden a los problemas relacionados con objetos no definidos (el plano), mientras que los problemas con geometría dinámica corresponden a relaciones no

definidas (pertenencia), es el caso del Teorema Recta – Punto. Además, dentro de esta tipología no es posible encontrar problemas de tipo PD.

- iii) Entre los tipos de problemas y enunciados que atienden a condiciones específicas (ECE), se observa que únicamente es posible encontrar problemas con geometría dinámica; ello, en el marco de la tipología PGD1.
 - iv) Los problemas de Tipo PGD1, siempre están presentes en las tareas que se proponen para aludir a los Teoremas de Existencia; ello, debido a que la geometría dinámica es un componente importante en el libro analizado.
4. El cuestionamiento de la existencia de los cuadriláteros no se hace visible en el libro Geometría Plana: un espacio de aprendizaje; sin embargo, como conocedores del curso sabemos que dicho cuestionamiento sí se plantea.
 5. En su gran mayoría las demostraciones que aluden a la existencia de objetos, no se encuentran explícitas en el libro que se está analizando; no obstante se realizó una clasificación de este tipo, dado que este es un componente de la terna propuesta por Mariotti.
 6. La correspondencia entre el tipo de tareas y la clasificación según el tipo de demostraciones no se llevó a cabo, dado que se requería de más tiempo para su realización.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Birkhoff, G. (1932). *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*. *Annals of Mathematics*, 33(2), 329-345. Disponible en <http://www.jstor.org/stable/1968336>
- Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona.
- Euclides (1991, trad.). *Elementos. Libros I-IV* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.
- Guevara, I. (2008). *La Filosofía de las Matemáticas: La Razón de ser del Número*. Universidad Nacional Autónoma de México, 12
- Harari. O. (2004). *Knowledge and demonstration*. Aristotle's Posterior Analytics. The New Synthese Historical Library Texts and Studies in the History of Philosophy. Springer Science Business Media, b.v. (56). p.166.
- MacLane, S. (1959). *Metric postulates for plane geometry*. *The American Mathematical Monthly*.
- Mariotti M. (2009). *Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher*. *ZDM Mathematics Education*. p.427-440.
- Mariotti M. y Fischbein E. (1997). *Defining in classroom activities*. Kluwer Academic Publishers. *Educational Studies in Mathematics* 34: 219-248
- Mariotti, A. (1997). *Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld*. En M. Hejnny J. Novotna (eds.). *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague: Prometheus Publishing House.

- Mariotti, A. (2006). Proof and proving in mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. Genova: Sensepublishers.
- Moise, E. (1963). *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Estados Unidos: Addison-Wesley Publishing Company, Inc,
- Molina, Ó. (En prensa). *Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema?* En En P. Perry (Ed.), Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría (pp. 11 - 34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Pareja, D. (Agosto de 2007). *David Hilbert y su escuela*. Matemática - Enseñanza Universitaria(7), 17
- Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012). *La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa*. Épsilon, 29(3), 16
- Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: Un espacio de Aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional Fondo Editorial. Bogotá.
- Samper, C. y Perry, P. (En prensa), *¿Es esto "machetear"?* En En P. Perry (Ed.), Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría (pp. 79 - 97). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). *Problemas abiertos de conjeturación*. En P. Perry (Ed.), Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Saenz-Ludlow, A., Molina, O., Plazas, T. y Sua, C. (2014) *Semiotic activity to favor student's approach to the mathematical real object procedure to prove existence*. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, University of North Carolina at Charlotte, USA
- Selden, A (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. Editors Gila Hanna.