SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA BAJO LA CURVA A TRAVÉS DEL ENTORNO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

RUTH MELINA BENÍTEZ MENDIVELSO
CÓDIGO: 2000240010

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2006

SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA BAJO LA CURVA A TRAVÉS DEL ENTORNO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

RUTH MELINA BENÍTEZ MENDIVELSO
CÓDIGO: 2000240010

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de licenciado en matemáticas.
Director: Benjamín Sarmiento

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTA
2006

A ti hijo, por los muchos momentos que
Dejé de compartir contigo.

A mi esposo, por su paciencia, solidaridad y amor para conmigo.

A mis padres por enseñarme el valor del estudio, de la superación y de la vida.

El autor expresa sus agradecimientos a:

Benjamín Sarmiento por su labor como asesor, ya que gracias a su colaboración y orientación a lo largo de la elaboración del trabajo este se pudo llevar a cabo obteniendo los objetivos propuestos al inicio del mismo.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ANALITICO

TIPO DE DOCUMENTO: Monografía.

ACCESO DEL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional

TITULO DEL DOCUMENTO: Secuencia de actividades didácticas para la enseñanza del concepto de integral definida como área bajo la curva a través del entorno de la geometría dinámica

AUTOR: **BENÍTEZ MENDIVELSO**, Ruth Melina

PUBLICACIÓN: Bogota, Universidad Pedagógica Nacional

PALABRAS CLAVE: Integral definida, área, aproximación, área por exceso, área por defecto, movimiento, distancia, función, función continua, función discontinua, función monótona, función seccionalmente monótona, función creciente, función decreciente, área bajo la curva, suma.

DESCRIPCIÓN:

Esta propuesta se presenta como una ayuda didáctica para el profesor de matemáticas de educación media; su objetivo es facilitar la introducción del concepto de integral definida partiendo de su interpretación geométrica como área bajo la curva a partir del concepto de distancia recorrida desarrollado por Newton, y mediado por las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (applets del programa Descartes).

FUENTES:

- Libros de calculo
- Paginas Web
- Textos escolares
- Revistas de educación matemática
- Tesis de grado

CONTENIDO:

El trabajo se divide en seis capítulos; en el primero se presenta el diagnostico y justificación del trabajo; en el segundo se presentan los objetivos; en el tercer capítulo se encuentra la fundamentación teórica, que tiene por objetivo exponer los antecedentes, el referente matemático y la reseña histórica del concepto de integral definida; el cuarto capítulo contiene la fundamentación didáctica, donde se presentan algunas propuestas didácticas acerca del tema y los ambientes de aprendizaje sobre los cuales se desarrollaran las actividades; en el quinto capítulo se presentan las actividades, mostrando su desarrollo lógico y conceptual; finalmente se presentan las conclusiones relativas al procedimiento utilizado, a la mediación instrumental y a la integral definida como tal.

METODOLOGÍA:

Durante el desarrollo de este trabajo se realizaron las siguientes tareas:

- Búsqueda, análisis y selección de de la información bibliográfica referente al tema a desarrollar (integral definida).
- Fundamentación y planificación de las actividades.
- Selección de situaciones didácticas relacionadas al tema (Interpretación geométrica de la integral definida).
- Diseño y elaboración de materiales didácticos (Applets del programa Descartes).
- Diseño y elaboración de actividades didácticas.
- Conclusiones.

CONCLUSIONES:

1. La introducción del concepto de Integral definida a partir de su interpretación geométrica como área bajo la curva favorece la asimilación del concepto y permite la visualización de otras representaciones como la algebraica estableciendo conexiones lógicas entre ellas.

2. Las representaciones ejecutables juegan un papel de gran importancia en la introducción de conceptos donde es necesaria la representación gráfica; ya que permiten la visualización y manipulación de imágenes logrando así dar una mejor interpretación al concepto como tal.

3. En la introducción de este tipo de conceptos (Integral definida) es necesario utilizar tecnologías computacionales como el programa Descartes, ya que permiten construir la gráfica de las funciones, visualizando un procedimiento lógico para el calculo del área bajo una curva, mediante aproximaciones por defecto ó por exceso; además permiten el manejo de algoritmos algebraicos que liberan a los estudiantes de los largos cálculos que tiene este tipo de trabajo, logrando con ello centrar su interés en la exploración, discusión y formalización del concepto como tal.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se plantea el diseño de una secuencia de actividades didácticas interactivas para alumnos de grado once de educación media; en ella se presenta la construcción del concepto de integral definida desde su interpretación geométrica como área bajo la curva, partiendo del concepto del área de un rectángulo y del concepto de distancia recorrida en un movimiento rectilíneo.

Es un trabajo de interés personal que pretende apoyar la enseñanza del cálculo integral en grado once de educación media; en particular, la enseñanza del concepto de integral definida mediante la utilización de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (Applets del programa Descartes y páginas Web).

La idea nace a partir de la labor desempeñada en las practicas educativas y se fundamenta en el estudio realizado por diversos autores como Turégano y Azcarate (ver justificación) entre otros, quienes plantean la necesidad de elaborar una propuesta didáctica que sirva como ayuda para presentar al estudiante de educación media el concepto de *integral definida*, desde su interpretación geométrica como área bajo la curva; y del hecho de que las herramientas tecnológicas representan una ayuda fundamental en la adquisición de conceptos; de ahí que la propuesta didáctica esté mediada por las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (Applets del programa Descartes) y se construya el concepto de *integral definida* a partir del concepto de distancia recorrida por un cuerpo en movimiento.

El trabajo se divide en tres partes fundamentales: En la primera, se presenta el diagnostico del problema que se pretende tratar con la propuesta, así como la justificación del mismo y el objetivo fundamental del proyecto.

En la segunda parte se presenta la fundamentación teórica y metodológica de la propuesta: La teórica se presenta mediante un rastreo histórico del concepto que va desde Arquímedes y el método de exhaución hasta contemplar la presentación actual, teniendo en cuenta las representaciones gráficas como parte fundamental; en la parte metodológica se presentan algunas propuestas didácticas acerca del tema, aclarando su utilidad en la elaboración de las actividades y se reconoce finalmente el papel que juegan el estudiante, el profesor y los recursos didácticos durante la ejecución de la mismas.

A continuación, se desarrollan las actividades como tal: En primer lugar se propone una sesión donde se tiene en cuenta algunos conceptos previos como área, función y movimiento (relación entre distancia recorrida, velocidad y tiempo), a continuación, y a partir de situaciones didácticas relacionadas con objetos en movimiento (movimiento rectilíneo), se muestra al estudiante la relación existente entre la distancia recorrida y el área bajo la curva $V_{vs}t$ que describe el movimiento, teniendo en cuenta distintos tipos de funciones (continuas y discontinuas, crecientes y decrecientes, etc.) dando lugar al manejo de conceptos como áreas por defecto y áreas por exceso, finalmente se muestra que cuando el número de divisiones hechas al intervalo en el cual se define la función tiende a ser muy grande (tiende a infinito) estas sumas (área por defecto y área por exceso) tienden a ser iguales y a este valor común es a quien se le da el nombre de *Integral definida.*

Se espera que esta propuesta logre establecer otra forma de presentar el concepto de integral definida a través de las representaciones ejecutables y que este proceso logre potenciar las capacidades cognitivas del estudiante, fomentando en él su cultura matemática.

1. DIAGNOSTICO Y JUSTIFICACIÓN

Una buena educación, debe garantizar al estudiante el progreso de su condición humana y promover con ello el desarrollo de un hombre consciente, capaz de ejercer y vivir en comunidad.(lineamientos curriculares)

El objetivo de la matemática en general es dar sentido al mundo que nos rodea, brindando con ello la posibilidad de aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones de la vida cotidiana; un objetivo fundamental de la educación matemática es proporcionar a los estudiantes experiencias novedosas que les hagan sentir, madurar y ejercitar el poder lógico que poseen al momento de lanzar hipótesis, reconstruir información, sacar conclusiones y elaborar definiciones.

Para llevar a cabo este objetivo, es necesario animar a los estudiantes a que reconozcan la naturaleza y el papel que juegan los procedimientos dentro de las matemáticas y que estos por tanto son herramientas que sirven para dar solución a problemas concretos de la vida diaria; en otras palabras, es necesario generar un camino que le permita al estudiante tomar conciencia de que los resultados obtenidos en un calculo son realmente validos y además están asociados hechos reales.

1.1 Parte matemática

La necesidad de matematizar, cuantificar y predecir los cambios de los fenómenos naturales, obliga a la construcción de modelos que no son más que aproximaciones de la realidad. Su estudio exige iniciar la construcción de conceptos como el de velocidad instantánea, para calcular el cambio instantáneo y el de integral definida para calcular el cambio total.

Estas nociones obligan a trabajar y aceptar cuestiones relativas a procesos infinitos, cantidades infinitamente pequeñas, formación infinita de intervalos, magnitudes que disminuyen infinitamente hasta convertirse en cero, etc., encerrando una gran cantidad de conceptos básicos propios del calculo; por otra parte, en la vida práctica (entorno físico) se ve la necesidad de garantizar unicidad y exactitud en una medida ofreciendo solución a problemas en estos dominios, por lo tanto, se exige el desarrollo de métodos y técnicas eficaces que permitan encontrar un valor aproximado a la solución; donde el concepto de integral definida (expresar la medida con unidades más pequeñas) cobra validez debido a la necesidad de expresar las medidas con precisión.

Es necesario promover en el estudiante la capacidad de interpretar las medidas y comprender los atributos medibles teniendo en cuenta que estos resultados no siempre son verdaderos (implican una aproximación); debe comprender además la relación entre el contexto de un problema y el calculo necesario, teniendo en cuenta si el procedimiento a utilizar da como resultado un valor exacto ó una aproximación del mismo, de igual forma, debe estar en capacidad de estimar si los resultados son o no razonables.

Además, el proceso de asignación numérica lleva intrínsecamente una inexactitud incorporada, debido al grado de precisión del aparato utilizado; cuando se trata de área de superficies por ejemplo, es muy usual cuadricular la representación de esta y preguntar ¿Cuántos cuadritos se necesitan para cubrir totalmente el piso?, Cuando las superficies a medir tienen la forma de un polígono regular el valor estimado tiene mayor grado de exactitud que cuando se refiere superficies irregulares, pues en estos casos el resultado encontrado ó bien es menor ó bien es mayor que el verdadero. Es por esto que se requiere avanzar en los procesos de medición, y encontrar una técnica que brinde la posibilidad de presentar una mejor estimación (más aproximada) del área ó superficie a medir, es decir lograr mayor precisión (aportar resultados con mayor grado de exactitud) lo cual se logra con la introducción del concepto de integral definida.

1.2 Parte didáctica

El construir nuevos ambientes de aprendizaje que motiven y pongan a prueba la curiosidad de los estudiantes se convierte en un reto para los educadores actuales, quienes no sólo tienen la responsabilidad de formular problemas interesantes que cautiven a los alumnos, sino que deben orientar permanentemente el trabajo de éstos hacia la construcción conceptual e interpretación grafica de dichos conceptos.

Desde no hace mucho tiempo (década del noventa aproximadamente), y gracias al auge de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación se están configurando ayudas didácticas interactivas que inducen al docente a crear ambientes de aprendizaje basados en el trabajo grafico e informático, y despiertan el interés de los alumnos hacia el estudio de la matemática, especialmente cuando se manejan nuevos conceptos, como la *integral definida*, ya que los estudiantes se ven liberados de tediosos cálculos y representaciones gráficas, logrando dedicar mayor tiempo tanto al estudio y comprensión de los conceptos globales como a la interpretación de los aspectos gráficos relacionados con ellos, por lo tanto asimilan mejor lo que están aprendiendo y van construyendo así su propio conocimiento (Mansilla,2002).Para este tema de estudio, la introducción del concepto de *integral definida*, se han revisado diversas opiniones acerca del proceso de enseñanza y manejo didáctico, entre ellas vale la pena destacar a Carmen Azcarate, Pilar Turégano y Carlos Mansilla, quienes consideran que la introducción de este concepto en particular abordado desde el concepto de área y dinamizado mediante ayudas informáticas como la geometría dinámica[1] facilitan en el estudiante tanto la

[1] .*Geometría dinámica:* programas informáticos cuyas características permiten crear un ambiente experimental en el aula de clase dando la oportunidad de modelar, simular, conjeturar, observar y generalizar un concepto determinado. Su principal característica, el arrastre, permite al usuario realizar el cambio de posición de la pantalla a través del tiempo con el fin de obtener distintas representaciones de un mismo concepto; además permite hacer construcciones muchas veces

construcción como la comprensión lógica del concepto y por tanto ayudan a evitar la algoritmización propia de la metodología tradicional, además permiten al docente presentar el tema como una continuación de la noción de área que los estudiantes vienen manejando desde los primeros años de la escuela:

Turégano (Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo, 1994), quien en sus investigaciones sobre aspectos didácticos acerca de la comprensión del concepto de *integral definida*, llegó a la conclusión de que allí, los estudiantes no tienen un rendimiento aceptable en las clases de cálculo, debido a que el concepto se construye bajo una algoritmización que asegura al estudiante que el concepto existe, sin llegar a justificar ni su existencia ni su convergencia.

En este artículo, la autora propone que se deben generar estrategias didácticas que conecten los aspectos geométricos con los aspectos algebraicos propios del cálculo integral de tal manera que prime la génesis histórica sobre el orden curricular y que la introducción a estos conceptos se dé mediante la resolución de los problemas que han estado en el origen del mismo, logrando así realzar la comprensión de este. Turégano también considera que el uso de diferentes representaciones matemáticas favorece la comprensión y manejo del concepto; en particular, las representaciones ejecutables favorecidas con ayuda del computador, ya que lo aproximan primero de una forma intuitiva y geométrica y luego mediante la exploración y discusión de sus propiedades particulares, permitiendo así que se haga un análisis mas detallado del mismo.

Mansilla (Cálculo de área antes del cálculo, 2002), quien afirma en su artículo que un propósito inicial de un curso de cálculo es brindar al estudiante la posibilidad de lograr una comprensión intuitiva del proceso de integración, por medio de propuestas que se conviertan en herramientas importantes para el proceso de aprendizaje. También afirma que el trabajo gráfico despierta un gran interés en el estudio de la matemática, especialmente en este tipo de temas, ya que los estudiantes comprenden mejor lo que están tratando y de esta manera van construyendo su propio conocimiento; por lo tanto, uno de los métodos que puede ser utilizado para alcanzar el concepto de *integral definida* es el de aproximación de áreas, ya que facilita su compresión lógica y únicamente utiliza conceptos previos al calculo como son el área de un rectángulo ó la de un trapecio y el manejo gráfico de una función; Temas que la gran mayoría de los alumnos maneja, por lo cual está preparado para asimilar el concepto de *integral definida* como el de área bajo una curva.

Azcárate (Cálculo diferencial e integral, 1996)., quien insiste en que la dificultad presentada en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo radica no solo en la riqueza y complejidad de cada tema, sino en el hecho de que los conceptos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática.

---

imposibles de realizar con lápiz y papel como lo es la construcción de representaciones ejecutables con comportamientos específicos.

> *"Se puede recordar la definición del concepto, pero construir la definición fundamental es algo muy distinto".*

Además basada en las investigaciones que ha realizado concluyó que la gran mayoría de los estudiantes parece tener un buen dominio del cálculo algebraico, frente a una clara debilidad en los procesos geométricos y gráficos, por lo que no son capaces de dar significado a dichos conceptos. Carmen Azcarate considera que el punto fundamental para la introducción de *la integral definida* es el concepto de área, el cual puede tratarse utilizando diferentes representaciones: En primera estancia el tratamiento grafico, donde las posibilidades gráficas y dinámicas del computador juegan un papel de gran importancia ya que permiten dar una base cognitiva al concepto en el momento de abordarlo. Posteriormente, el desarrollo de las habilidades aritméticas permite evaluar áreas numéricamente y finalmente se puede considerar la generalización del concepto mediante expresiones algebraicas.

Basados en estas opiniones y en la necesidad de elaborar una secuencia de actividades didácticas interactivas, que sea innovadora y permita introducir el concepto de *integral definida* desde otros puntos de vista, donde sea el estudiante quien construya y valide su propio conocimiento, vale la pena diseñar algunas actividades que permitan presentar el concepto de *integral definida* en funciones de una variable a través de un tratamiento geométrico que parta de los conceptos de área y movimiento, y además, esté dinamizado a través de recursos informáticos, sin tener como base previa los conceptos de límite y derivada.

2. OBJETIVOS

2.1. GENERAL

Diseñar una secuencia de actividades didácticas que permitan construir el concepto de *integral definida* desde su interpretación geométrica como área bajo la curva, y donde prime el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación

2.2. ESPECÍFICOS

1. Recopilar la información presentada en algunas de las propuestas didácticas hechas alrededor de la temática a tratar (*integral definida*).

2. Hacer un rastreo histórico sobre el surgimiento del concepto de *integral definida*, haciendo énfasis en el aspecto grafico (representaciones).

3. Diseñar una secuencia de actividades didácticas que permitan introducir el concepto de *integral definida* desde su interpretación geométrica como área bajo la curva y sin tener como base previa los conceptos de límite y derivada.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

> *"El conocer el desarrollo histórico de un concepto nos puede ayudar a comprender como se produce el proceso de aprendizaje de ese concepto -por qué aparecen determinadas dificultades o errores- o a organizar su enseñanza."*
> Turégano, (1998)

En este capítulo se presenta el origen y evolución del concepto de *integral definida* a lo largo de la historia; partiendo desde el método del agotamiento desarrollado por los griegos hasta llegar a la presentación actual del concepto, haciendo énfasis en el aspecto gráfico (representaciones) y geométrico del mismo y dejando de lado algunas veces el aspecto algebraico, debido al interés de la propuesta.

3.1 EVOLUCIÓN HISTORICA DEL CONCEPTO

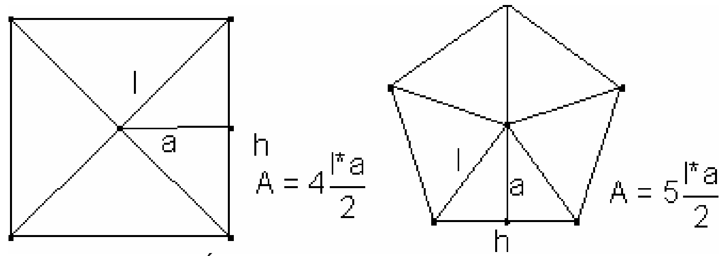
Aunque es a Newton y a Leibniz a quienes se considera los inventores del cálculo integral, ellos solo representan un escalón en la larga lista de personajes que han aportado a la evolución de este concepto; pues el problema del área de figuras planas se remonta a los griegos. Ellos ya poseían distintos métodos para realizar estos cálculos y fueron quienes sentaron las bases de lo que hoy se conoce como *integral definida*.

3.1.1 Método del Agotamiento

El área de una figura geométrica es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por dicha figura. Por ejemplo, el área de un rectángulo, se puede expresar como la cantidad de cuadrados de lado igual a una unidad (previamente establecida) que recubren exactamente toda la región, así:

Área de un Rectángulo

En la figura, el área del rectángulo izquierdo, es aproximadamente igual a 8 cuadrados y la del rectángulo derecho, es 32 cuadrados, según el tamaño del cuadrado que se halla elegido como unidad de medida.
De la misma forma es posible calcular el área de un polígono regular, a partir del área de los triángulos en que este puede ser descompuesto. Por ejemplo, un cuadrado puede ser descompuesto en cuatro triángulos y su área será la suma del área de los cuatro triángulos y un pentágono, puede ser descompuesto en cinco triángulos y su área será igual a la suma del área de los cinco triángulos.



Área de Polígonos Regulares

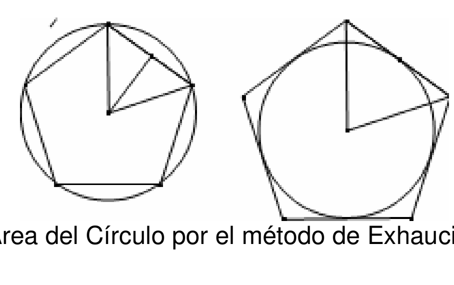
En general, el área de cualquier polígono regular de n lados se puede definir como $A = n * \frac{l * a}{2}$, donde $\frac{l * a}{2}$ es el área de cada uno de los triángulos, y n es el número de triángulos en que se ha descompuesto el polígono.
Esta idea, es conocida como el método del agotamiento y fue propuesta por el sabio griego Anfiton alrededor del año 430 a.C.

3.1.2 Método de exhaución

Un problema mucho más difícil consiste en hallar el área de una región plana curvilínea. Eudoxo (406- 355 a.C.), basado en el método del agotamiento propuso un método conocido hoy en día como método de exhaución, el cual consiste en inscribir ó circunscribir polígonos regulares en torno a una figura de tal manera que la medida del área del polígono inscrito ó circunscrito sea una aproximación cada vez más cercana al área de la figura (a medida que se aumenta el número de lados del polígono el área de este estará más cerca al valor del área de la figura) ya sea por exceso (polígonos circunscritos) ó por defecto (polígonos inscritos) .

Área polígono inscrito < área de la figura < área del polígono circunscrito.
(Área por defecto) (Área por exceso)

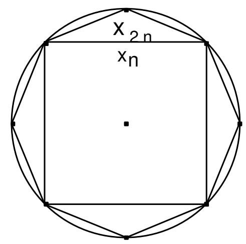
De esta manera Eudoxo consiguió calcular el área de un círculo; afirmando que su área está comprendida entre el área de los polígonos regulares inscritos y la de los circunscritos del mismo número de lados.



Área del Círculo por el método de Exhaución

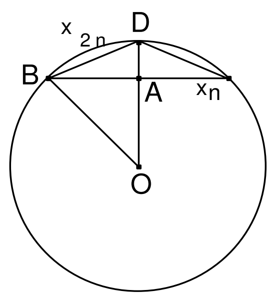
Para hallar el área de los polígonos utilizando el método de exhaución, es necesario conocer el valor del lado del polígono inscrito y del circunscrito en la circunferencia, para esto se utiliza el teorema de Pitágoras[2].

En la figura siguiente, se representa la inscripción de un polígono regular de n lados (X_n) y de uno de 2n lados (X_{2n}) en una circunferencia de radio 1.



Inscripción de Polígonos en un Círculo

Para calcular el valor de X_{2n} (lado del polígono de 2n lados) en función de X_n (lado del polígono de n lados) es necesario calcular primero la apotema[3] del polígono regular de n lados (a_n).

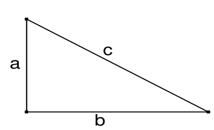


Cálculo de apotemas

Considerando el triángulo OAB se observa que:

---

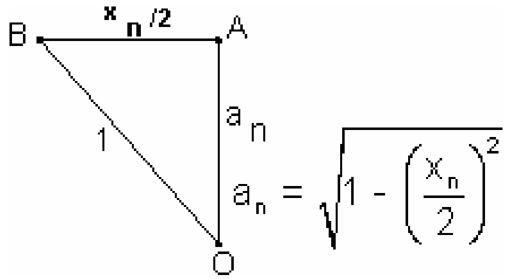
[2] *Teorema de Pitágoras*: Teorema que relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo, y que establece que el cuadrado del lado mayor (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (catetos).



$$c^2 = b^2 + a^2 \quad \text{donde} \quad c = \sqrt{b^2 + a^2}$$

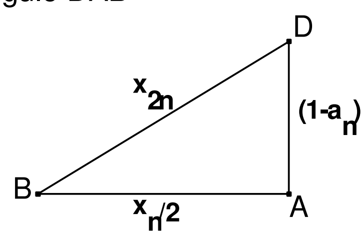
El teorema de Pitágoras permite calcular uno de los lados de un triángulo rectángulo si se conocen los otros dos.

[3] Apotema**:** La apotema es el segmento que va desde el centro del polígono a la mitad de un lado.



Cálculo de Apotemas

Ahora, considerando el triángulo DAB



Se obtiene $x_{2n}=\sqrt{\left(\frac{x_n}{2}\right)^2+\left(1-a_n\right)^2}$.

Como $a_n=\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}$, se encuentra que:

$$x_{2n}=\sqrt{\left(\frac{x_n}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$x_{2n}=\sqrt{\left(\frac{x_n}{2}\right)^2+1-2\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}+1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}$$

$$x_{2n}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}}$$

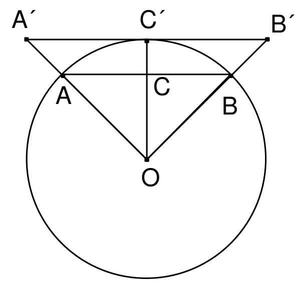
$$x_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{4\left(x_n\right)^2}{4}}}$$

$$x_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-\left(x_n\right)^2}}$$

Por lo tanto el área (por defecto) del círculo será:

$$A = 2n\frac{(1-a_n)\,x_{2n}}{2}.$$

También es posible obtener el área por exceso a partir del polígono circunscrito, así:



Cálculo de Apotemas en Polígonos Circunscritos

En la figura, el segmento AB representa el lado de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio igual a la unidad y el segmento A'B' el lado del correspondiente polígono circunscrito. Como los triángulos AOB y A'OB' son semejantes es posible escribir

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OC'}{OC}$$

Y como el radio de la circunferencia es 1, se tiene que:

$$OC' = 1 \qquad y \qquad OC = \sqrt{1-\left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-(AB)^2}}{2}$$

Por lo tanto $\quad A'B' = \dfrac{2AB}{\sqrt{4-(AB)^2}}$

Luego, el área (por exceso) del círculo es:

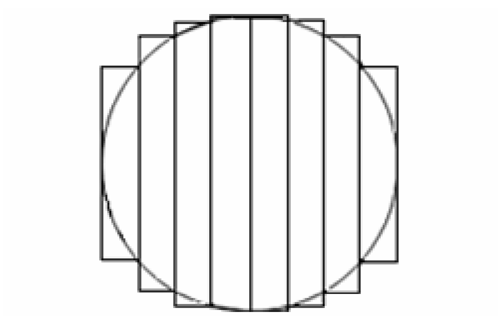
$$\text{Área} = n_1 = \frac{2AB}{\sqrt{4-(AB)^2}} = \frac{nA'B'}{2} = \frac{nAB}{\sqrt{4-(AB)^2}}.$$

Aunque el creador de este método fue Eudoxo, es a Arquímedes (272, 212 a.C.) a quien se le brinda el reconocimiento, y gracias a esto se le considera el creador del cálculo integral.

3.1.3 De Arquímedes a Fermat

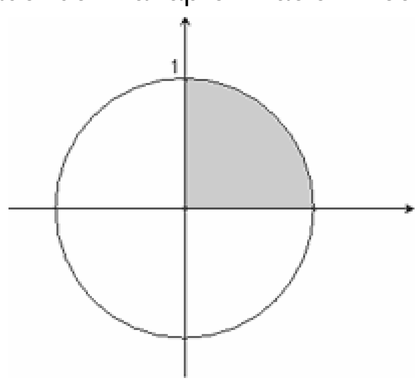
> *"Arquímedes, anticipándose a Newton y Leibniz en más de 2000 años inventó el Cálculo integral, y en uno de sus problemas anticipó la creación del Cálculo diferencial. Estos dos cálculos juntos constituyen lo que se denomina el "cálculo infinitesimal considerado como el instrumento más poderoso que se ha inventado para la exploración matemática del universo físico*", Barros (1998*).*

Existe gran cantidad de ejemplos acerca del trabajo que Arquímedes realizó en cuanto a la *integral definida* se refiere, uno de ellos consiste en encontrar el área de un círculo; Arquímedes utilizó un método que consistía en dividir el círculo en un cierto número de rectángulos que tuvieran el mismo ancho como se muestra en la siguiente figura, de modo tal que los fragmentos desechados fueran lo más pequeños posible; luego sumaba el área de todos los rectángulos y así obtenía una buena aproximación del área buscada.



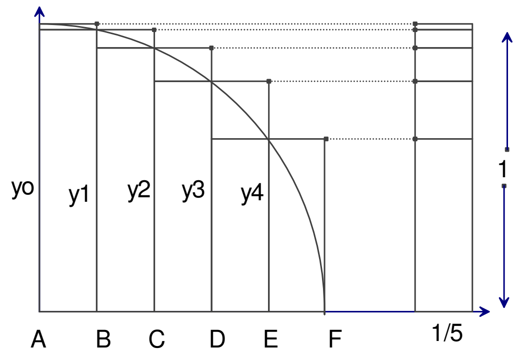
Área del Círculo Según Arquímedes

Si se aumenta el número de rectángulos indefinidamente (se disminuye el ancho de cada uno de ellos) se encuentra que el resultado de la aproximación hecha mediante este método, es cada vez más cercana al área del círculo:



Si se ubica el centro de un círculo de radio una unidad en el origen del plano cartesiano y se considera un cuadrante del plano, el área del círculo será igual a cuatro veces el área del cuadrante.

El área del trozo de circulo ubicada en uno de los cuadrantes está comprendida entre la de dos conjuntos de rectángulos superpuestos (inscritos y circunscritos) como se muestra en la figura,



Área del Círculo en el Primer Cuadrante

Donde se puede observar que el radio horizontal, se ha dividido en cinco partes iguales, por lo tanto el área del cuadrante está comprendida entre la suma del área de los cuatro rectángulos interiores y la suma del área de los cinco rectángulos exteriores. Como se ha dicho que el radio del círculo es una unidad, y este se ha dividido en cinco partes, se puede afirmar que el ancho de cada rectángulo es $\frac{1}{5}$, por lo tanto el área de los rectángulos exteriores será:

$$S = \frac{1}{5}y_0 + \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{1}{5}y_4 = \frac{1}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

Donde y_n indica la altura del círculo en el punto n. El área del círculo completo es cuatro veces la suma del área de los rectángulos exteriores, ósea:

$$S_5 = 4 * \frac{1}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Tomando los rectángulos interiores y siguiendo el mismo procedimiento, el área de estos es:

$$S = \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{1}{5}y_4 + \frac{1}{5}y_5 = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5),$$

De tal forma que el área del círculo completo es:

$$S_5 = 4 * \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

La diferencia entre el área de los rectángulos exteriores y el área de los rectángulos interiores es la de un rectángulo de base $\frac{1}{5}$ y altura 1 (suma de las áreas de la parte rectangular que hay entre los rectángulos inscritos y la de los circunscritos de la figura 8); como el área de los rectángulos interiores (que hay dentro del círculo) se puede expresar como

$$S_5 = \frac{4}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

Y la de los rectángulos exteriores como:

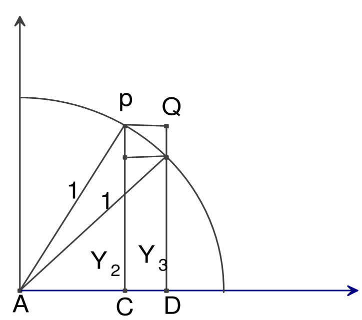
$$S_5 = \frac{4}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Y el área del círculo está comprendida entre $S_5 = \frac{4}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$ y $S_5 = \frac{4}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$, por lo tanto el error máximo que se puede cometer al dar esta aproximación como resultado es:

$$S_5 - S_5 = 4 * \frac{1}{5}$$

Que corresponde al área de un rectángulo de base 1/5 y altura igual a 4, como ya se había mencionado.

Los valores de $y_1, y_2, ..., y_n$ se pueden calcular, con ayuda del teorema de Pitágoras: Al observar el triángulo rectángulo ACP, que se muestra en la siguiente figura.



Cálculo de Y_n (Altura de Rectángulos)

Se tiene que AC es $\frac{2}{5}$, por lo cual se puede escribir:

$$y_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{5^2 - 2^2}{5^2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2}$$

De la misma forma, construyendo los triángulos correspondientes a las alturas y_1, y_3 y y_4 se obtiene:

$$y_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2} \;;\; y_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2} \;;\; y_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2} \;;\; y_0 = 1$$

Por lo tanto, se puede escribir que el área del círculo obtenida mediante los rectángulos exteriores es:

$$S_5 = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2}\right)$$

Es decir:

$$S_5 = \frac{4}{5^2}\left(5 + \sqrt{5^2 - 1^2} + \sqrt{5^2 - 2^2} + \sqrt{5^2 - 3^2} + \sqrt{5^2 - 4^2}\right)$$

Y en lo que respecta al área del círculo tomando los rectángulos interiores, esta se puede expresar como:

$$S_5 = \frac{4}{5^2}\left(\sqrt{5^2 - 1^2} + \sqrt{5^2 - 2^2} + \sqrt{5^2 - 3^2} + \sqrt{5^2 - 4^2}\right).$$

Aplicando este método y observando lo que ocurriría al dividir el radio horizontal del cuadrante del círculo en 10, 15, 20… partes, Arquímedes logró determinar que el valor del número π está comprendido entre:

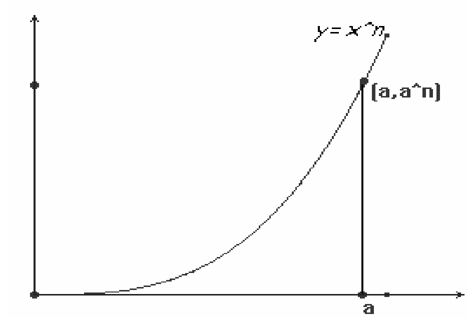
$$3 + \frac{10}{71} \cong 3.1408451 < \pi < 3 + \frac{10}{70} \cong 3.1428571.$$

Pese a que la aplicación de este método (método de exhaución), fue un gran avance matemático, se encontraban serias dificultades al desarrollarlo y no podía extenderse a cualquier figura plana debido a la falta de instrumentos que permitieran expresar de una forma más simple los largos cálculos que resultan; sin embargo, hubo que esperar hasta la introducción del algebra con su potente lenguaje simbólico para revivir el interés de los matemáticos por el estudio de este método; lo cual se dio por los alrededores del siglo XVI (unos 1800 años después) cuando matemáticos de la talla de Fermat, Pascal, Torricelli, Cavalieri, Kepler, Newton, Galileo etc., descubrieron múltiples resultados parciales de importancia fundamental que revivieron el estudio del cálculo integral:

En 1615, un religioso italiano conocido como Bonaventura Cavalieri (1598-1667) (alumno de Galileo) publicó un libro *Geometría indivisibilibus continuorum.*, en donde muestra un acercamiento intuitivo a lo que hoy conocemos como integral, considerando que una superficie se puede suponer formada por segmentos rectilíneos llamados *indivisibles* y, de modo análogo, que un volumen se compone de secciones indivisibles o volúmenes *quasi-atómicos* (muy pequeños).

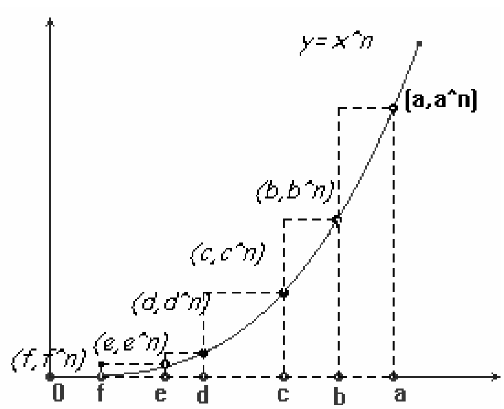
Otro gran matemático del siglo XVII, Pierre de Fermat (1601-1665), se interesó también por estos temas, conocidos hoy en día como análisis infinitesimal, entre ellos el del área encerrada entre una curva y una recta.

3.1.3.1 Cálculo del área bajo la curva $Y = x^n$ desarrollado por Fermat[4]



Fermat propuso y obtuvo el valor exacto del área bajo la curva $Y = x^n$ en el intervalo [0, a].

El área bajo la curva $Y = x^n$ se puede calcular aproximadamente tomando una partición del intervalo [0, a] y levantando los rectángulos tal como se indica en la figura.



División del intervalo [0, a] en la curva $y = x^n$ según Fermat

Sea A el área bajo la curva, que es aproximadamente igual a la suma del área de los rectángulos, por lo tanto:

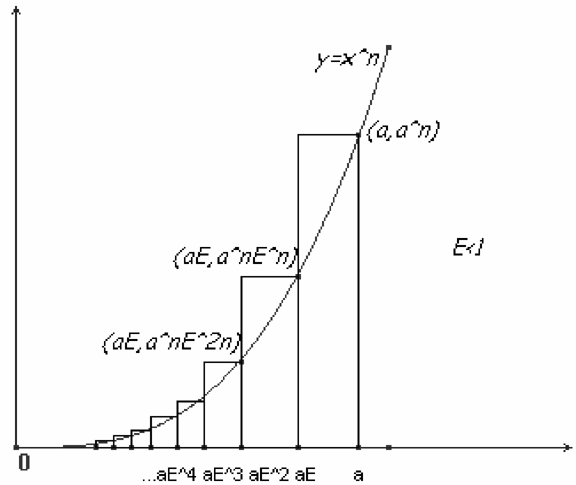
$$A \cong (b-a)a^n + (b-c)b^n + (c-d)c^n + (d-e)d^n + (f-e)e^n + (f-0)f^n$$

Para obtener el área exacta, Fermat construyó la siguiente partición del intervalo [0,a].

$$a,\ aE,\ aE^2,\ aE^3,\ \ldots,\ (E<1)$$

[4] Escudero, M. Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. En Revista Suma, febrero de 1997

Que es una progresión geométrica de razón E<1.



Aproximación del área bajo la curva $Y = x^n$ según Fermat

El área de los respectivos rectángulos resulta así:

$$(a-aE)a^n,\ (aE-aE^2)a^nE^n,\ (aE^2-aE^3)a^nE^{2n}\,(aE^3-aE^4)a^nE^{3n},\ ...$$

Que es una progresión geométrica de razón E^{n+1}<1. Por lo tanto:

A ≈ suma de las áreas de los rectángulos

A ≈ Suma infinita de una progresión geométrica de razón<1

$$A \cong \frac{t_1}{1-r}$$

$$A \cong \frac{(a-aE)a^n}{1-E^{n-1}} = \frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n-1}} = \frac{a^{n+1}}{\frac{1-E^{n+1}}{1-E}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+...+E^n}$$

El área bajo la curva se puede igualar a la suma anterior, haciendo que $E \to 1$ (paso muy intuitivo al límite, aunque muy anterior a su formalización) es decir:

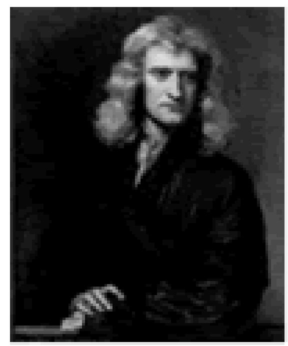
$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1};$$

Lo que en notación moderna se escribe como:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Sin embargo, aunque sus investigaciones fueron más rigurosas que las de Cavalieri, y estudió ampliamente las curvas de tipo $y = kx$, no se percató de la relación inversa entre integración y derivación; en cambio, Isaac Barrow (1630-1677) sí alcanzó a reconocer el carácter inverso de estos procesos y su sucesor en la cátedra, Isaac Newton (1642-1727), muestra el primer ejemplo histórico del cálculo de un área mediante el proceso inverso a la diferenciación, tomando como base para su trabajo la resolución de diversos problemas físicos como la cinemática.

3.1.4 Newton y el problema de la distancia



El cálculo integral de Newton, es en esencia un método para encontrar la distancia recorrida por un cuerpo en movimiento cuando se conoce la velocidad con que este viaja, la solución de este problema, es equivalente al de encontrar el área bajo la curva velocidad vs. Tiempo.
El estudio del movimiento se denomina cinemática[5]: parte de la física que describe el cambio de posición de un cuerpo con respecto al tiempo, sin considerar la causa que lo produce ni la masa del cuerpo que se mueve; Newton en sus estudios acerca del movimiento, logró conectar la matemática con la física, logrando una nueva forma para encontrar la distancia recorrida por un cuerpo que viaja con una cierta velocidad; proceso que se conoce hoy en día como integración:

Antes de mostrar como se maneja este proceso, es necesario reconocer que el movimiento de un cuerpo se puede clasificar de dos formas:

a. De acuerdo con la curva que describe su trayectoria[6]:

- Rectilíneo: describe una recta
- Parabólico: describe una parábola
- Circular : describe una circunferencia
- etc.

b. Según la velocidad[7] que lleve el cuerpo:

- Uniforme: Cuando su velocidad permanece constante con el tiempo
- Variado: Cuando su velocidad cambia con el tiempo; en estos casos se puede subdividir en:
    - Uniforme: Cuando la velocidad varía en forma constante, es decir, es proporcional al tiempo.

[5] Cinemática: palabra que viene del griego *Kinema,* que significa movimiento

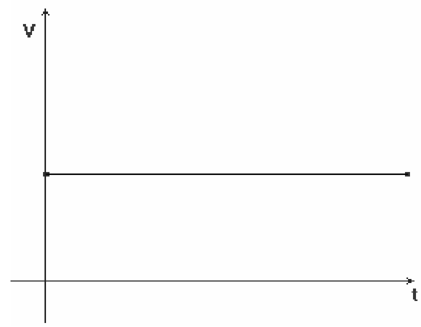
[6] Trayectoria: Curva que describe el movimiento del cuerpo.

[7] Velocidad: Relación establecida entre la distancia que recorre un cuerpo y el tiempo que emplea en realizar este recorrido.

- No uniforme: Cuando la velocidad no varía de forma proporcional al tiempo.

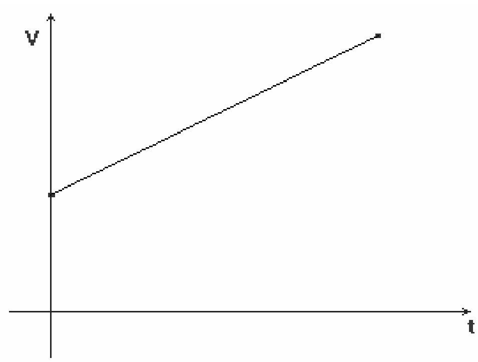
3.1.4.1 Cálculo de la distancia recorrida[8] a partir de las gráficas

Las gráficas son elementos fundamentales para comprender claramente el desarrollo de un movimiento. Para graficar un movimiento se suele usar como sistema de referencia el plano cartesiano. El eje horizontal (eje X) se destina al tiempo, y el eje vertical (eje Y) a la velocidad.



Gráfica Velocidad vs. tiempo en un Movimiento uniforme

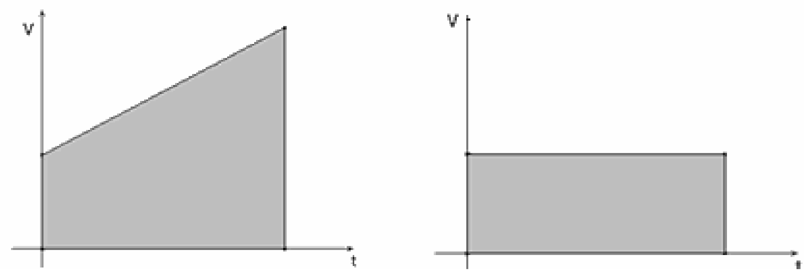
En el movimiento uniforme, la velocidad es constante; por lo tanto la grafica ***V vs t*** será una recta paralela al eje horizontal, cuya ecuación es d = V*t (figura 12), mientras que en un movimiento uniformemente variado la grafica no es paralela ni al eje X ni al eje y.



Gráfica Velocidad vs. Tiempo del Movimiento uniformemente variado

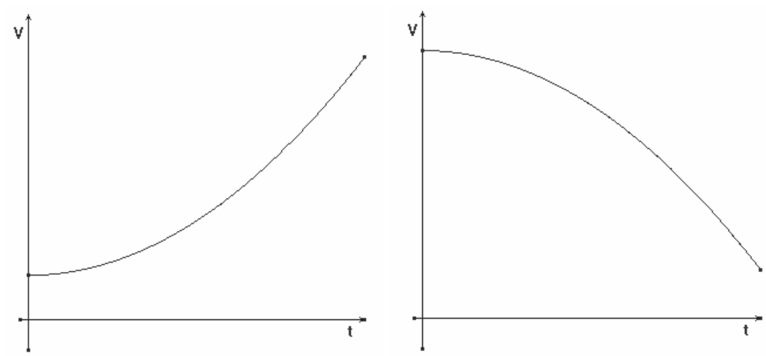
pero se puede observar que representa un aumento proporcional de la velocidad con respecto al tiempo. Analizando estas graficas se puede ver que el cálculo de la distancia recorrida en estos casos se reduce al cálculo del área del rectángulo ó del trapecio que se forma bajo la curva que representa la velocidad:

[8] Distancia recorrida: Longitud de la trayectoria descrita por el cuerpo.



Distancia recorrida en movimientos uniformes y uniformemente variados

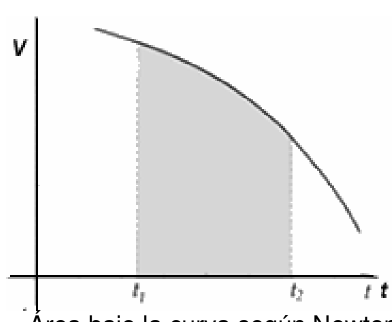
Cuando la velocidad que lleva el cuerpo no varía en forma constante con el tiempo, se pueden encontrar gráficas como las siguientes:



Gráfica $V_{vs}t$ de movimientos variados no uniformes

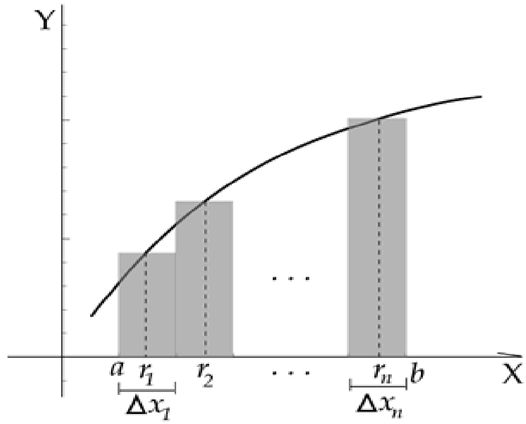
En donde el cálculo de la distancia se vuelve más complicado, aunque no imposible; Newton desarrolló un método para realizar este tipo de cálculos:

Si se considera un cuerpo que viaja con velocidad variable, y cuya curva se muestra en la figura.



Área bajo la curva según Newton

Se observa que la curva situada sobre el eje x representa la gráfica de una función cuya ecuación es $y = f(x)$. La distancia recorrida en el intervalo de tiempo t_1 *a* t_2, es igual al área bajo la curva comprendida entre la gráfica que representa la función y las rectas que corresponden en la gráfica (figura 16) a los valores. t_1 *y* t_2; se tiene que encontrar el área *A* de la superficie limitada por la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, el eje X y las rectas paralelas al eje Y que representan los limites de tiempo (donde comienza y done termina el movimiento) y tienen ecuaciones x = a *y* *x = b* respectivamente. Para tal efecto, se divide el intervalo de tiempo [a, b] en n partes, iguales como se muestra en la figura.



Calculo de la distancia, mediante áreas

Denotando con Δx_1, la longitud de la primera parte, con Δx_2 la de la segunda parte y así sucesivamente hasta denotar la última con Δx_n. En cada parte se eligen puntos r_1, r_2, …,r_n, de tal forma tal que $f(r_1)\Delta x_1$ sea el área del primer rectángulo, (donde, Δx_1 es la base y $f(r_1)$ la altura), $f(r_2)\Delta x_2$ sea el área del segundo rectángulo y $f(r_n)\Delta x_n$ sea el área del enésimo rectángulo; de acuerdo con esto, se tendría que:

$$S_n = f(r_1)\Delta x_1 + f(r_2)\Delta x_2 + \ldots + f(r_n)\Delta x_n$$

es la suma del área de todos los rectángulos de la figura y por lo tanto una aproximación a la distancia recorrida.

Se debe tener en cuenta que entre más fina sea la subdivisión del segmento [a, b], más próxima estará la aproximación S_n al área buscada. Si se considera una sucesión de los valores de la división del segmento [a, b] cada vez más pequeños, entonces la suma S_n tenderá a ser igual al valor del área A. Suponiendo no solo, que n crece indefinidamente, sino también que la longitud del mayor de los Δx_i, en la enésima división tiende a cero, se tiene que.

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} f(r_1)\Delta x_i + f(r_2)\Delta x_2 + \ldots + f(r_n)\Delta x_n$$

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(r_i)\Delta x_i \right)$$

Por lo que el cálculo del área, ó la distancia buscada se reduce a calcular el límite de $S = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(r_i)\Delta x_i \right)$; que es el concepto que se conoce hoy en día como integral definida.

3.1.5 Leibniz y la notación de integral

Leibniz (1646-1716), llegó a los mismos resultados de Newton de manera independiente; es decir sin dejarse guiar por el enfoque físico de los problemas ya que consideró la integral como una suma, además Leibniz logró pasar a la historia entre otras cosas por su afán de sistematización y generalización, ya que fue quien desarrolló la simbología matemática que expresa lo esencial del calculo. A él se deben símbolos como la notación de diferencial dx, segunda diferencial dx^2, la notación de derivada $\frac{d}{dx}$, la notación de integral $\int$ (símbolo que surge al estilizar la s de suma), y $\int ydx$; notaciones que hoy en día aun se utilizan, debido a lo acertado de su elección.

Una de las ventajas del simbolismo desarrollado por Leibniz es que hace que las demostraciones y cálculos sean más fáciles y cortos, además, evita llegar a conclusiones equivocadas.

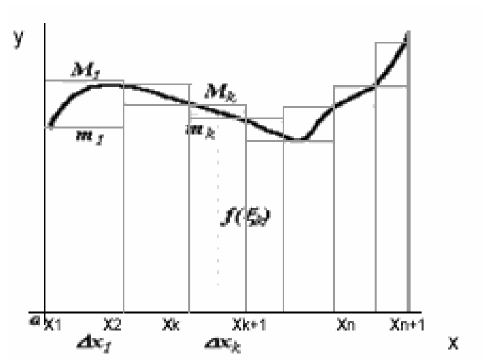
La evolución de los conceptos del análisis matemático (derivada, integral, etc.) continuó, naturalmente, después de Newton y Leibniz y continúa todavía en nuestros días; pero hay una etapa en esta evolución que merece ser destacada y está relacionado con el trabajo de Cauchy.

3.1.6 La integral de Cauchy

Cauchy (1789-1857), retoma el sentido geométrico del cálculo integral y lo separa del cálculo diferencial, definiendo la integral definida como un límite de sumas. Además, demostró su relación con la derivada mediante el Teorema del Valor Medio.

> Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo cerrado (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que
>
> f(a) – f(b) = f'(c)(b-a)

La integral de Cauchy se define como la sumatoria del área de los rectángulos $f(\xi_k)\Delta x_k$ cuando el valor de $\Delta x_k \to 0$.



Integral de Cauchy

$$H_1 \quad d(a,b) < M$$

$$H_2 \quad f \in \frac{C}{[a,b]}$$

$$\int_{a/c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_n \to 0} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

En este caso es necesario anotar que la integral no depende de la variable x ni de la diferencial dx, y que es un número que se obtiene a través de una suma que tiende a un límite. Por lo tanto para que esta definición tenga sentido, debe asegurarse la existencia del límite de la sumatoria que lo define:

$$\int_{a/c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_n \to 0} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

A partir de ahí, Riemann (1826-1866), y Lebesgue (1875-1941), entre otros, son los ejes fundamentales en la noción de *integral definida* que manejamos en la Matemática actual:

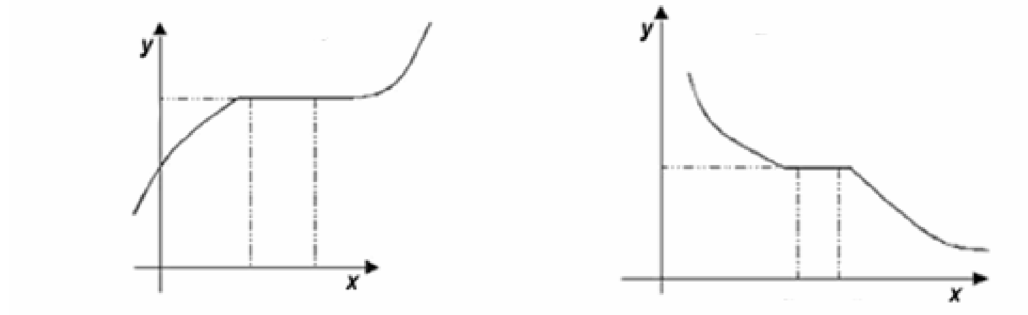
3.1.7 Riemann y la integral definida

Antes de Riemann ya se utilizaban las integrales definidas; pero este gran matemático generalizó su definición y la amplió a un mayor número de funciones:

El dividir el intervalo [a, b] en subintervalos de la misma longitud, ya no es necesario, pues Riemann generalizó todo el estudio que se había presentado hasta ahora para subintervalos de distinto tamaño. Además, hasta el momento solo se había hecho referencia a funciones continuas y no negativas (puesto que estábamos hablando de área bajo una curva); en este aspecto Riemann también generalizó sus conclusiones y la única condición que puso es que la función f(x) estuviese definida en el intervalo [a, b]; es decir, el hecho de que una función sea continua en un intervalo, es condición suficiente para que sea integrable en dicho intervalo, sin importar si la función es positiva, negativa, continua ó discontinua:

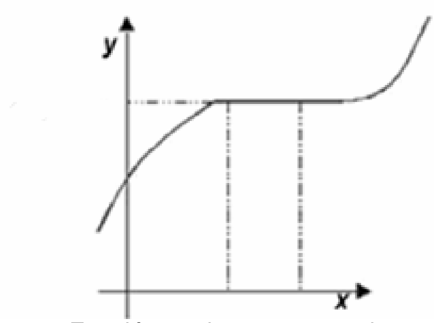
3.1.7.1 Integral de Riemann para funciones monótonas

La función y = f(x) definida en el intervalo [a, b] se considera monótona si es siempre creciente ó siempre decreciente en este intervalo.



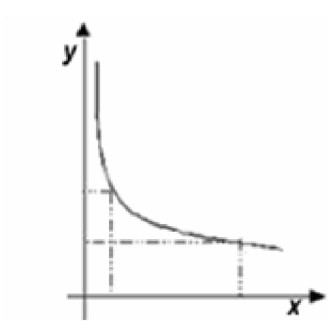
Funciones crecientes y decrecientes

si al tomar cualquier $x, y \in [a,b]$, con $x < y$,se cumple que $f(x) \leq f(y)$. Si se cumple la desigualdad estricta, se dice que f es estrictamente creciente.



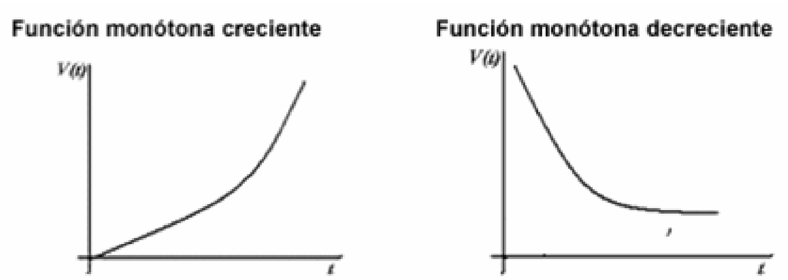
Función estrictamente creciente

f es decreciente el intervalo [a, b] si al tomar cualquier $x, y \in [a,b]$ con x < y, se cumple que $f(x) \geq f(y)$. Si se cumple la desigualdad estricta, se dice que f es estrictamente decreciente.



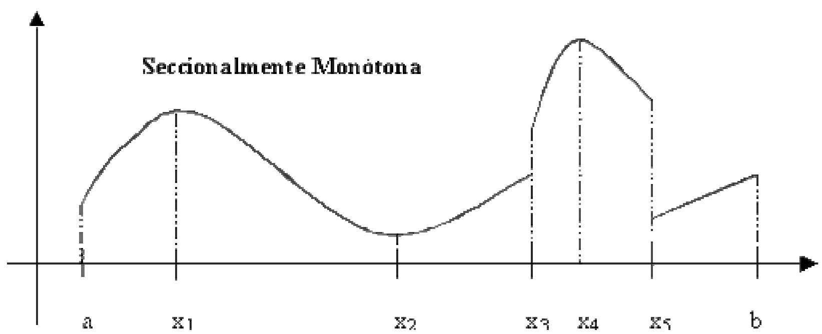
Función estrictamente decreciente

La función f considera monótona en el intervalo [a, b] la función es siempre creciente o siempre decreciente.



Funciones monótonas

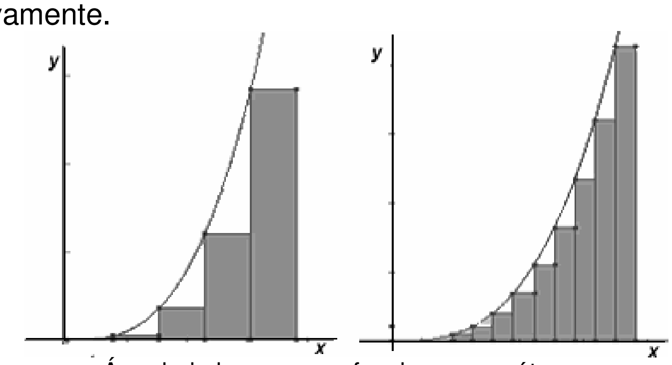
Una función f es seccionalmente monótona en el intervalo [a, b] si es posible dividir el intervalo en [a, b] en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales la función es monótona.



Funciones seccionalmente monótonas

3.1.7.2 Área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,1].

Siguiendo el procedimiento utilizado por Fermat, Riemann divide el intervalo [0,1] en n partes iguales, y sobre cada uno de los subintervalos construye rectángulos, de tal forma que del área de estos rectángulos le permita aproximar por abajo el área buscada, es decir, levanta en cada subintervalo un rectángulo de altura igual a la imagen del extremo izquierdo, y base igual a la longitud del subintervalo. En la siguiente figura se muestran aproximaciones con subdivisiones en 5 y 12 partes iguales respectivamente.



Área bajo la curva en funciones monótonas

Como se puede apreciar en estas gráficas la suma del área de los rectángulos es una aproximación al área bajo la curva y entre mayor sea el número de subdivisiones del intervalo, mejor será la aproximación; por ejemplo, para cinco subdivisiones, se tiene que:

$$S_5 = \frac{1}{5} * 0 + \frac{1}{5} * \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} * \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} * \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.24;;$$

Para doce subdivisiones se encuentra que:

$$S_{12} = \frac{1}{12} * 0 + \frac{1}{12} * \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{12} * \left(\frac{2}{12}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{12}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{12} * \left(\frac{11}{12}\right)^2 = 0.292824$$

Y en general, Riemann encuentra una expresión que le permite aproximar el área bajo la curva cuando se divide el intervalo [0,1] en n subintervalos de la misma longitud:

$$S_n = \frac{1}{n} * 0 + \frac{1}{n} * \frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n} * \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n} * \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

$$S_n = \frac{1}{n} * \left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{n^3} * \left(0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)$$

$$S_n = \frac{1}{6} * \left(\frac{n-1}{n}\right) * \left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

Para n = 1, 2, 3,..., S_n es una sucesión de aproximaciones al área bajo la curva, por ejemplo para los valores n = 5 y n = 12, se obtiene:

$$S_5 = \frac{1}{6} * \left(\frac{5-1}{5}\right) * \left(\frac{10-1}{5}\right) = 0.24\ldots$$

$$S_{12} = \frac{1}{6} * \left(\frac{12-1}{12}\right) * \left(\frac{24-1}{12}\right) = 0.2928407\ldots$$

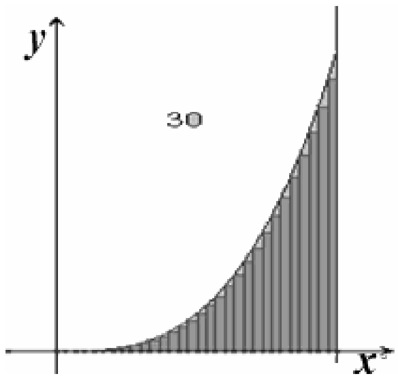
es decir, el área A bajo la gráfica es aproximadamente igual a:

$$A \cong S_5 = 0.24\ldots$$

Y mejorando la aproximación se obtiene:

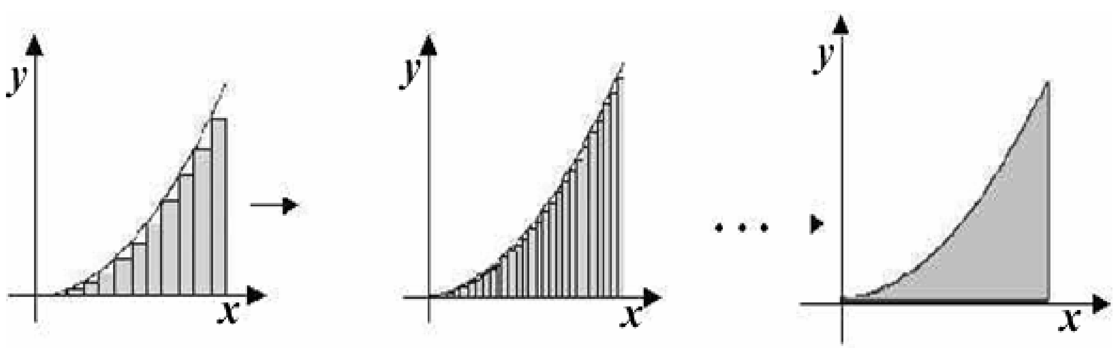
$$A \cong S_{12} = 0.2928407...$$

Tomando otras subdivisiones se encuentra que:



n	S_n
5	0.24
12	0.2928
50	0.3234
100	0.32835
10,000	0.3332833
1000,000	0.333332833

Aproximaciones al área de la función cuadrática



Observe que cuando el número de subdivisiones n tiende a aumentar indefinidamente, la aproximación S_n (suma del área de los rectángulos) tiende a aproximarse más al valor real del área. Para obtener este valor (el valor exacto del área bajo la curva), es necesario tomar el valor límite de las aproximaciones de S_n cuando n crece indefinidamente (tiende a infinito), es decir:

$$A = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Sustituyendo en la expresión obtenida para S_n, se encuentra que:

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} * \left(\frac{n-1}{n} \right) * \left(\frac{2n-1}{n} \right)$$

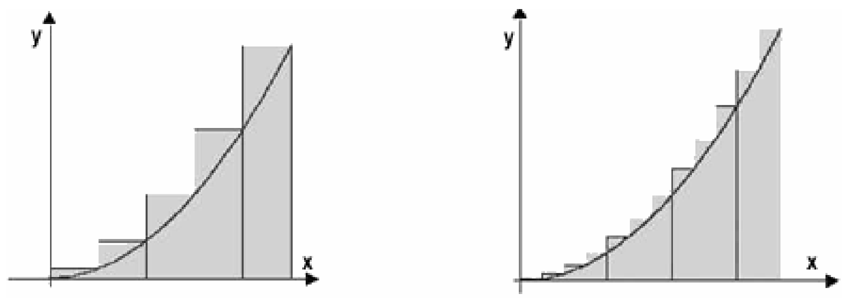
$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} * \left(1 - \frac{1}{n} \right) * \left(2 - \frac{1}{n} \right)$$

$$A = \frac{1}{6} * (1) * (2)$$

$$A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{3} = 0.33333...$$

De la misma forma a como aproximó el área por defecto, Riemann aproxima el área por exceso tomando rectángulos cuya altura sea el extremo derecho del intervalo, en la siguiente figura se muestra la aproximación por exceso cuando $n = 5$ y $n = 12$:



Si se llama $\overline{S}_n$ a la suma de las áreas de los rectángulos así construidos, se encuentra que:

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n} * \frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n} * \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{1}{n} * \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n} * \left(\frac{1^2}{n^2} + * \frac{2^2}{n^2} + ... + * \frac{n^2}{n^2} \right)$$

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n^3} * \left(0 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 \right)$$

$$\overline{S}_n = \frac{1}{6} * \left(\frac{n-1}{n} \right) * \left(\frac{2n-1}{n} \right)$$

A continuación se muestra el área obtenida mediante algunas aproximaciones:

n	$\overline{S}_n$
5	0.44
12	0.376157
50	0.3434
100	0.33835
10,000	0.3338335
1000,000	0.3333338333335

De nuevo se observa que cuando el valor de n tiende a infinito, los valores de E_n (suma del área por exceso), se acercan más al área real; calculando el límite se encuentra:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} * \left(\frac{n-1}{n}\right) * \left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} * \left(1-\frac{1}{n}\right) * \left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$A = \frac{1}{6} * (1) * (2)$$

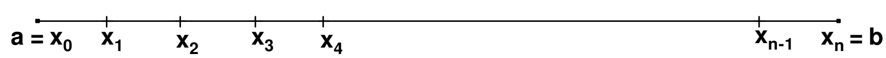
$$A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{3} = 0.33333...$$

Al igual que en las áreas por defecto.

3.1.7.3 Sumas superiores e inferiores para funciones monótonas

En general, si tenemos una *función creciente* y = f(x), y dividimos el intervalo [a, b] en n partes iguales, cada una de longitud $\frac{b-a}{n}$, los puntos de subdivisión del intervalo son:



$x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2 * \frac{b-a}{n}$, ... , $x_{n-1} = a + (n-1) * \frac{b-a}{n}$,

$x_n = a + n * \frac{b-a}{n} = b$.

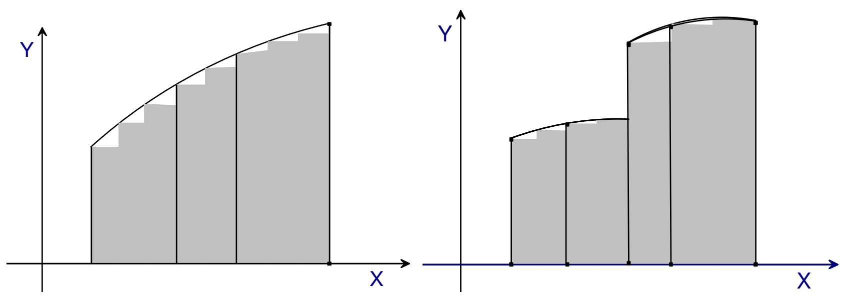
La Suma inferior de la función y = f(x), en relación a esta subdivisión, se define como:

$$\underline{S}_n = f(x_0)\frac{b-a}{n} + f(x_1)\frac{b-a}{n} + f(x_2)\frac{b-a}{n} + ... + f(x_{n-1})\frac{b-a}{n},$$

que expresado en notación sumatoria es:

$$\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

Geométricamente, si f(x) > 0 en el intervalo [a, b], $\underline{S}_n$ representa la suma de las áreas de los rectángulos que están por debajo de la curva, y por lo tanto es una aproximación por defecto al área bajo la curva y si f(x) < 0 $\underline{S}_n$ es una aproximación por exceso.



Suma inferior, aproximaciones por defecto

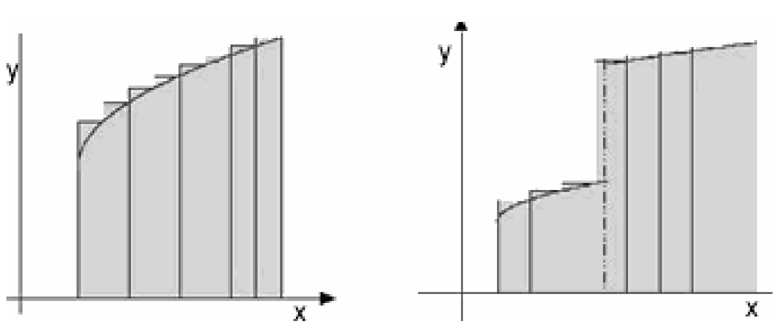
Análogamente de define la Suma superior de la función y = f(x), como:

$$\overline{S}_n = f(x_0)\frac{b-a}{n} + f(x_1)\frac{b-a}{n} + f(x_2)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(x_n)\frac{b-a}{n}$$

Que expresado en notación sumatoria equivale a:

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

Geométricamente, si f(x) > 0 en el intervalo [a, b], $\overline{S}_n$ representa la suma de las áreas de los rectángulos que están por arriba de la curva y por lo tanto es una aproximación por exceso al área bajo la curva y si f(x) < 0 $\overline{S}_n$ es una aproximación por defecto.

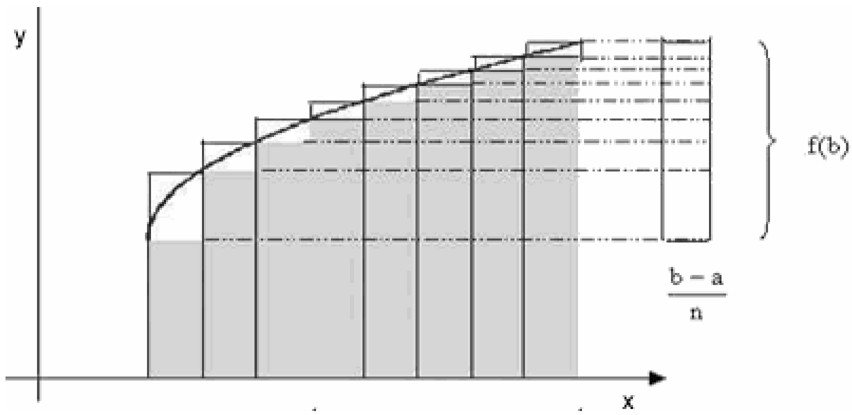


Suma superior, aproximaciones por exceso

3.1.7.4 Criterio de integrabilidad de Riemann

Si f es una función monótona creciente, considerando la diferencia entre las sumas superior e inferior $\overline{S}_n - \underline{S}_n$ gráficamente se puede ver que $\overline{S}_n - \underline{S}_n$ representa el área de la columna de la derecha como se aprecia en la siguiente figura es decir:

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]$$



Diferencia entre le área superior y el área inferior

Cuando el número de subdivisiones n tiende a infinito, la diferencia $\overline{S}_n - \underline{S}_n$ se va acercando cada vez más a cero, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\overline{S}_n - \underline{S}_n\right) = 0$$

o bien

$$\lim_{n \to \infty} \overline{S}_n = \lim_{n \to \infty} \underline{S}_n .$$

Cuando estos límites son iguales, se dice que la función y = f(x) es integrable en el intervalo [a, b], y al valor común de estos límites se le denomina integral definida de f sobre el intervalo [a, b], y se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

En consecuencia:

Toda función creciente ó decreciente es integrable en un intervalo cerrado [a, b].

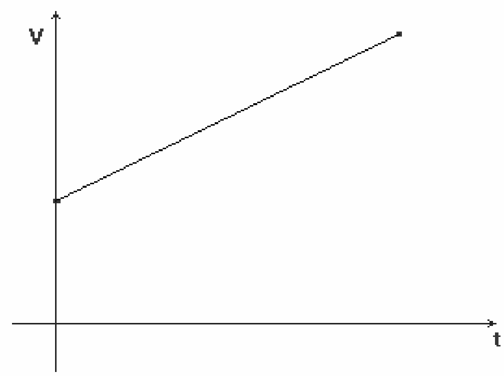
3.2 PRESENTACIÓN ACTUAL DEL CONCEPTO

Actualmente, autores como Deborah Hughes, entre otros, presentan la *integral definida* desde otro ámbito, donde se parte de la gran cantidad de aplicaciones que tiene el concepto, se lleva la idea al estudiante de una forma tal que es el mismo quien construye el conocimiento, con ayuda de materiales didácticos como el computador ó las calculadoras graficadoras, las cuales le dan la oportunidad al estudiante de describir, graficar y verificar los resultados obtenidos:

> *"La integral definida, calcula el cambio total en una función a partir de su rapidez de cambio."*

¿Cómo se mide la distancia recorrida por un cuerpo?

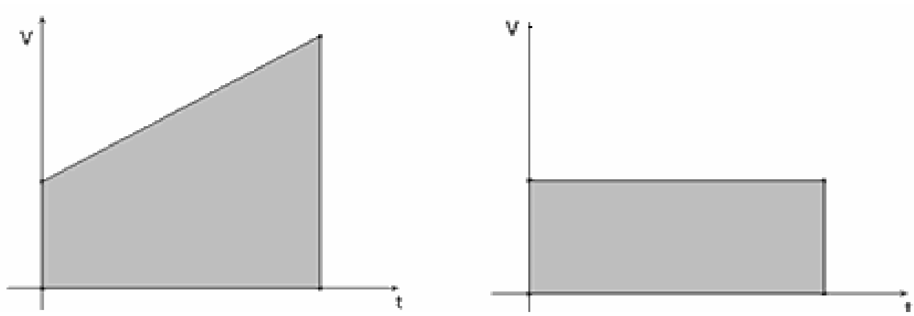
Si el cuerpo viaja con velocidad constante, como se muestra en la figura, la distancia se puede calcular como la multiplicación de la velocidad con que viaja el cuerpo por el tiempo durante el cual se lleva a cabo el movimiento.



Gráfica Velocidad vs. Tiempo del Movimiento uniformemente variado

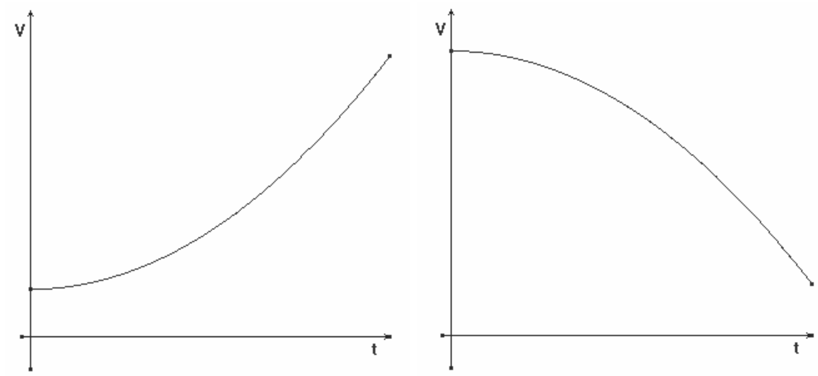
***Distancia = velocidad * tiempo*.**

En otras palabras, se está calculando el área del rectángulo cuya altura es la velocidad y cuya base es el tiempo.



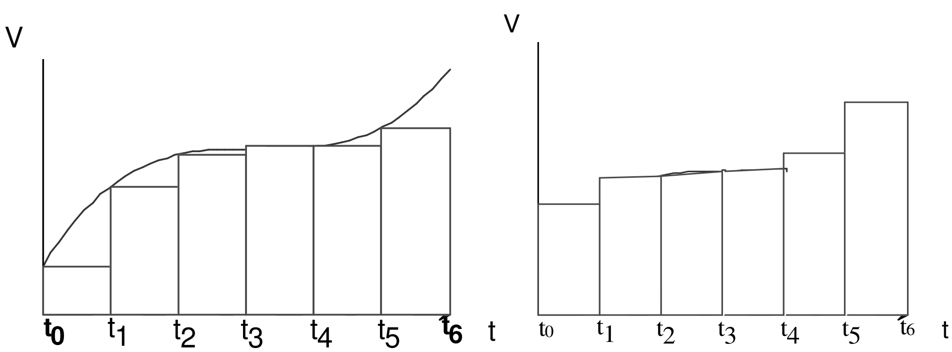
Distancia recorrida en movimientos uniformes y uniformemente variados

Pero, ¿Cómo se calcula la distancia recorrida cuando la velocidad del auto no es constante?



Gráfica $V_{vs}t$ de movimientos variados no uniformes

En estos casos se puede recurrir a aproximaciones, es decir al cálculo de la distancia por partes y luego sumar estos resultados. Dividiendo el tiempo empleado en n partes iguales, se obtienen n rectángulos de base $\frac{t}{n}$ y altura v



Distancia recorrida, aproximación por defecto y por exceso

Al hallar el área de cada uno de estos rectángulos y luego sumar los resultados se obtiene una buena aproximación de la distancia recorrida por el auto, ya sea por defecto (menor que la real) ó por exceso (mayor que la distancia real) figura 26; y esta será cada vez más precisa a medida que se aumente el numero de divisiones que se le haga al tiempo:

Si se llama Δt (delta t) a cada uno de los intervalos en que se ha dividido el tiempo, se tendría que: $\Delta t = \frac{b-a}{n}$**,** donde b y a son los puntos final e inicial respectivamente y n es el número de intervalos en que se ha dividido el tiempo y se calcula la distancia recorrida en cada uno de estos intervalos, se encuentra que:

Número de subdivisiones n	Distancia recorrida	
	Aproximaciones por defecto	Aproximaciones por exceso
1	$d_1 = f(t_0)\Delta t_0$	$d_1 = f(t_1)\Delta t_1$
2	$d_2 = f(t_1)\Delta t_1$	$d_2 = f(t_2)\Delta t_2$
3	$d_3 = f(t_2)\Delta t_2$	$d_3 = f(t_3)\Delta t_3$
...	...	...
4	$d_n = f(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$	$d_n = f(t_n)\Delta t_n$

La columna de la izquierda indica el cálculo realizado cuando se toma el valor de la función (velocidad) correspondiente al extremo izquierdo de cada intervalo, mientras que la columna de la derecha indica el cálculo cuando se toma el valor de la función correspondiente al extremo derecho del intervalo. Según el comentario anterior, la suma de estos datos correspondería a aproximaciones por exceso en la columna derecha ó por defecto en la columna izquierda, que en este contexto indicaría la distancia máxima recorrida ó la distancia mínima recorrida respectivamente:

Para aproximaciones por la derecha, el resultado de la suma es la:

$$\begin{array}{c}\text{Distancia máxima}\\ \text{recorrida}\end{array} = f(t_1)\Delta t_1 + f(t_2)\Delta t_2 + \ldots + f(t_n)\Delta t_n\ ;$$

Mientras que para aproximaciones por la izquierda, la suma corresponde a la:

$$\begin{array}{c}\text{Distancia minima}\\ \text{recorrida}\end{array} = f(t_0)\Delta t_0 + f(t_1)\Delta t_1 + \ldots + f(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$$

Cuando se va a calcular el valor exacto de la distancia total recorrida por el cuerpo en un intervalo de tiempo [a, b], se toma un número de divisiones muy grande (que tienda a infinito), de tal manera que Δt tienda a ser muy pequeña y la aproximación sea cada vez más exacta, y por lo tanto los cálculos por exceso y por defecto tienden a ser iguales; es decir:

$$\begin{array}{c}\text{Distancia máxima}\\ \text{recorrida}\end{array} \cong \begin{array}{c}\text{Distancia minima}\\ \text{recorrida}\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\text{Distancia total recorrida} \cong f(t_0)\Delta t_0 + f(t_1)\Delta t_1 + \ldots + f(t_n)\Delta t_n$$

Que en otra notación se escribe

$$\text{Distancia total recorrida} \cong \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Donde $\sum_{i=1}^{n}$ (sigma) es el símbolo matemático que representa sumas, e *i* indica el número de términos que se están sumando; en este caso *n* términos. Cuando *n* tiende a ser muy grande (tiende a ser infinito), la distancia total recorrida por el cuerpo se puede expresar como:

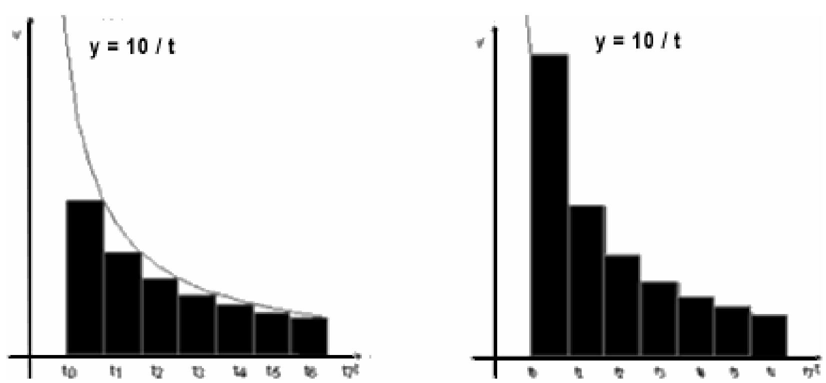
$$\text{Distancia total recorrida} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

(Se lee limite cuando n tiende a infinito de la sumatoria de *i=1* hasta *n* de f(t $_i$) por Δt); lo cual indica el valor que toma la distancia cuando n tiende al límite; es decir tiende a ser el máximo número de divisiones que se le puede hacer al tiempo empleado en el recorrido. Este concepto, es la definición que se presenta hoy en día de la integral definida; se representa con el símbolo matemático:

$$\int_a^b f(t)\Delta t$$

Y se interpreta como el área bajo la curva definida por una función, dos rectas paralelas al eje X (las cuales indican el inicio y el fin del recorrido) y los ejes de coordenadas.

Cuando una función es creciente, las aproximaciones realizadas son por defecto y por exceso respectivamente, como ya se vio, pero cuando la función es decreciente, las aproximaciones se consideran al contrario:



Aproximaciones del área en una función decreciente

4. FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA

Antes de diseñar las actividades, se considera necesario analizar algunas de las propuestas que se han presentado acerca del tema (*integral definida*) con el fin de rescatar de cada una de ellas lo más importante. Además se debe tener en cuenta el papel que juega el profesor, los alumnos y el material diseñado en el momento de ejecución de las actividades.

4.1. PROPUESTAS DIDÁCTICAS ACERCA DEL TEMA

A continuación se presentan algunas de las propuestas didácticas que se han realizado con el fin de introducir el concepto de *integral definida,* ya sea utilizando ayudas tecnológicas y computacionales como recurso didáctico ó sin ellas:

4.1.1. Propuesta hecha por Ricardo Losada[9]

El autor inicia la presentación del tema con un repaso acerca del área de algunas figuras conocidas:

> *"es fácil conocer cual es el área de ciertas clases de figuras con las cuales estamos familiarizados. Sabemos que el área de un cuadrado de lado l es l^2, o de un rectángulo de lados b y h es b*h, donde b es la base y h es la altura, y que el área de un circulo de radio r, es igual a πr^2. Así, si tenemos una circunferencia de radio cm., el área de esta circunferencia seria:"*

$$A = \pi * 3^2 = 3.1416 * 9 = 28.274\text{cm}^2$$

Luego, introduce preguntas como:

> *"¿Qué pasaría si no conociéramos la fórmula para hallar el área de un círculo? ¿Cómo podríamos aproximarnos al valor verdadero del área?"*

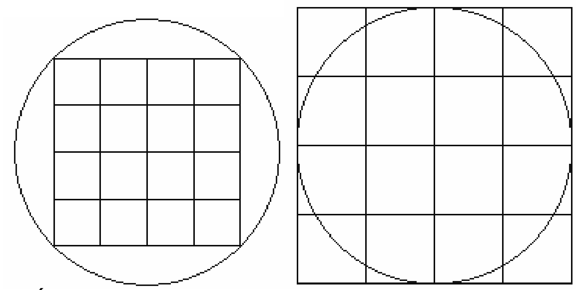
Donde trata de mostrar que la manera más sencilla para encontrar una buena aproximación del área consiste en dividir la figura (en este caso un círculo) en cuadrados de área conocida, Por ejemplo, si el círculo cuya área se quiere conocer tiene 3 cm. de radio, se puede observar, según la figura 31 (izquierda) que este circulo contiene exactamente 16 cuadrados de 1 cm^2 de área cada uno, ósea, que ha encontrado un valor que aproxima el área buscada por defecto (menor que el real). Es decir que el área verdadera A, es mayor que la suma del área de los 16 cuadrados de 1 cm. de lado.

---

[9] Losada, R. Integral definida. En: Matemática en acción 6

Resumiendo, $16\ \text{cm}^2 < A$. Así como encontró un valor aproximado por defecto para el área del círculo, encuentra un valor aproximado por exceso, es decir mayor que el real. Para ello busca cual es el mínimo número de cuadrados de $1\ \text{cm}^2$ de área que cubre toda el área buscada. Observando la parte derecha de la figura 31, concluye que son 36 cuadrados. Considerando que cada uno de estos 36 cuadrados está cubriendo una parte del área total del círculo, es posible escribir que $A < 36\ \text{cm}^2$ y agrupando los resultados por defecto y por exceso en una sola expresión vemos que:

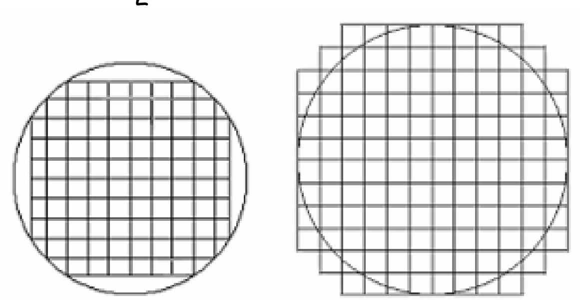
$$16\ \text{cm}^2 < A < 36\ \text{cm}^2$$



Área del círculo propuesta por Ricardo Losada

Sin embargo, Losada afirma en su propuesta que es posible hacer una mejor aproximación del área, si en lugar de dividir el área en cuadrados de 1 cm. de lado, se hace en cuadrados de $\frac{1}{2}$ cm de lado.

"¿Cuántos cuadrados de $\frac{1}{2}$ cm de lado podemos incluir dentro del círculo?"



Observando la parte izquierda de la figura anterior, se encuentra que el número total de dichos cuadrados es 88 y que el área de cada uno de ellos es $(0.5\ \text{cm})^2 = .025\ \text{cm}^2$. En otras palabras, un valor aproximado por defecto del área del círculo es $88 * 0.25\ \text{cm}^2 = 22\ \text{cm}^2$ o sea $22\ \text{cm}^2 < A$. De igual manera, para encontrar un valor aproximado del área por exceso se tendría que ver cuantos cuadrados del mismo tamaño son necesarios para cubrir toda el área del círculo. Observando la parte derecha de la figura anterior, es posible concluir que son necesarios 132 cuadrados de 0,5 cm. de lado, es decir:

$$A < 132 * 0.25\ \text{cm}^2, \quad \text{por lo tanto:}$$

$$22\ cm^2 < A < 33\ cm^2$$

En consecuencia, al efectuar esta nueva división, la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto se hace más pequeña.

Considerando las dos figuras anteriores, se observa que dentro de cada cuadrado de 0.5 cm. de lado, caben 25 cuadrados de 0.1 cm. de lado (o de $10^{-1}cm$), lo cual da un área de $10^{-2}cm^2$ para cada uno.

Entonces, se puede preguntar: ¿Cuántos cuadrados de $10^{-2}cm^2$ de área podemos incluir en el círculo de 3 cm. de radio?, ¿Cuántos cuadritos son necesarios para cubrir completamente el área del círculo?

Pues bien; Ricardo Losada, muestra que son exactamente 2740 cuadrados de 0.1 cm. de lado que están contenidos completamente dentro del circulo y que son necesarios 2904 cuadraditos para cubrir toda el área del círculo.

Por lo que es posible escribir

$$2740 * 10^{-2}\ cm^2 < A < 2904 * 10^{-2}\ cm^2,$$

lo cual nos da que

$$27.40\ cm^2 < A < 29.04\ cm^2$$

Este proceso se puede repetir muchas veces, haciendo cada vez menor el área de los cuadrados. Claro está, que a medida que estos disminuyen de lado, el conteo para averiguar el área por exceso y por defecto se hace más tedioso.

De todas maneras, cuando se disminuye el área de los cuadrados, la diferencia entre el área por exceso y por defecto se hace cada vez más pequeña, tan pequeña como se quiera.

"¿Cuál será entonces el límite de esta diferencia?"

Es fácil ver que esta diferencia tiende hacia cero por lo tanto, las dos áreas (por defecto y por exceso) tienden a un mismo valor y este es precisamente el valor del área buscada. En el ejemplo del círculo se puede ver que:

$$16\ cm^2 < A < 36\ cm^2$$

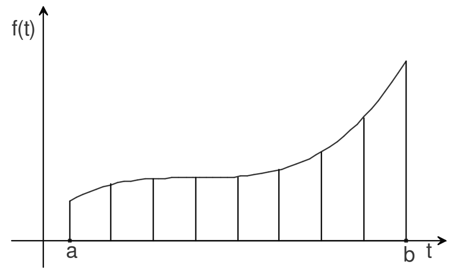
$$22\ cm^2 < A < 33\ cm^2$$

$$27.40\ cm^2 < A < 29.04\ cm^2,$$

$$\text{luego,} \quad A_n^- < A_n^+ \ \text{ y } \lim_{n\to\infty} A_n^- = A = \lim_{n\to\infty} A_n^+,$$

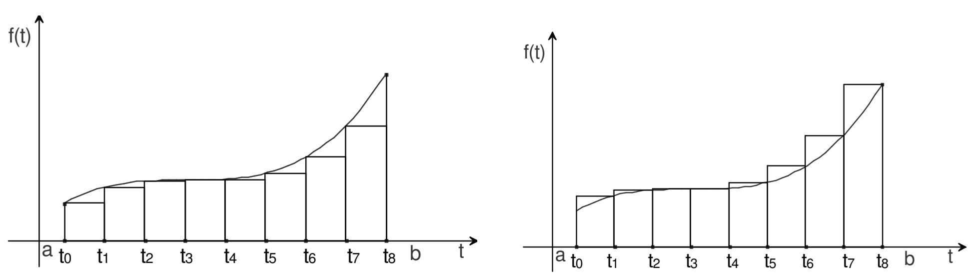
donde A^- indica el área por defecto y A^+ indica el área por exceso.

A continuación, el autor aplica este concepto para encontrar el área comprendida entre el eje horizontal, una curva cuya altura viene determinada por una función y dos rectas verticales.



En este caso, el área buscada está comprendida entre la recta t = a, t = b, y y = f(t); Para encontrar dicha área se puede seguir el proceso indicado para el circulo de radio 3 cm. tratado anteriormente, sin embargo, hay un método más fácil que consiste en inscribir ó circunscribir rectángulos con base en el eje x y altura igual a f(t) y donde la suma del área de estos se aproxime al área bajo la curva y = f(t); como se muestra en la figura anterior.

En la siguiente figura es posible observar que A_n^- sería la suma de los ***n*** rectángulos inscritos bajo la curva y que A_n^+ sería la suma por exceso de las áreas Rectangulares que se muestran en la figura.



Ahora bien, la base de los rectángulos es igual al valor de la distancia entre los puntos a y b dividida entre el número de rectángulos n en que se ha dividido el intervalo y las alturas de los rectángulos cuya suma determina el área por defecto A^-, se ha simbolizado por h_i. Así:

h_1 = altura del primer rectángulo
h_2 = Altura del segundo rectángulo
h_3 = Altura del tercer rectángulo,

Y así sucesivamente. De la misma manera se ha designado por H_i a la altura de cada uno de los rectángulos que forman el área por exceso A^+. Es decir que:

El área por defecto es:

$$A_8^- = h_0(t_1 - t_0) + h_1(t_2 - t_1) + h_2(t_3 - t_2) + ... + h_7(t_8 - t_7)$$

Y el área por exceso es:

$$A_8^+ = H_1(t_1 - t_0) + H_2(t_2 - t_1) + H_3(t_3 - t_2) + ... + H_8(t_8 - t_7)$$

Se puede expresar tanto el área superior como el área inferior, utilizando el símbolo de sumatoria:

$$A_8^- = \sum_{i=0}^{7} h_i(t_i - t_{i-1}) \quad y \quad A_8^+ = \sum_{i=1}^{8} h_i(t_i - t_{i-1})$$

El cual indica la suma del área de los *i* rectángulos en que se ha dividido el intervalo $[a,b]$. Observe que las alturas de los rectángulos que forman área por defecto y por exceso son valores que toma la función en algún punto del intervalo (ya sea el primero ó el último) que forma la base del rectángulo. (ver figura anterior):

$$\begin{aligned}
h_1 &= f(t_0) \quad y \quad t_0 \in [t_0, t_1] = I_1 \\
h_2 &= f(t_1) \quad y \quad t_1 \in [t_1, t_2] = I_2 \\
h_3 &= f(t_2) \quad y \quad t_2 \in [t_2, t_3] = I_3 \\
h_4 &= f(t_3) \quad y \quad t_3 \in [t_3, t_4] = I_4 \\
h_5 &= f(t_4) \quad y \quad t_4 \in [t_4, t_5] = I_5 \\
h_6 &= f(t_5) \quad y \quad t_5 \in [t_5, t_6] = I_6 \\
h_7 &= f(t_6) \quad y \quad t_6 \in [t_7, t_8] = I_7 \\
h_8 &= f(t_7) \quad y \quad t_7 \in [t_8, t_9] = I_8
\end{aligned}$$

Si se divide el intervalo [a, b], no en 8, como en la figura anterior, sino en n subintervalos, I_1, I_2, I_3, ..., I_n donde:
$I_i = [t_{i-1}, t_i]$ $i = 1,2,...,n$ y $(t_0 = a, \; y \; t_n = b)$, siempre existe un $t_i \in I_i$ tal que $f(t_i) = h_i$ puede ser un extremo del i-esimo intervalo, o puede estar dentro del intervalo.

Si son n los subintervalos de división, entonces:

$$A_8^- = \sum_{i=0}^{7} h_i \left| t_i - t_{i-1} \right| \quad y \quad A_8^+ = \sum_{i=1}^{8} h_i \left| t_i - t_{i-1} \right|$$

Si se nombra como A el área comprendida entre t=a y t=b, entonces se cumple Que:

$$A_n^- < A < A_n^+ \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} A_n^- \le A \le \lim_{n\to\infty} A_n^+$$

Es decir que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left|t_i - t_{i-1}\right| \le A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left|t_i - t_{i-1}\right|$$

Y por el teorema del Emparedado para sucesiones infinitas

> Teorema del emparedado
>
> Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones infinitas tales que $a_n \le b_n \le c_n$ para todo n, y si
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$
>
> Entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Es posible afirmar que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\beta_i)\left[t_i - t_{i-1}\right] = A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i)\left[t_i - t_{i-1}\right]$$

Este limite no es más que el área bajo la curva y se simboliza como

$$A = \int_a^b f(t)dt$$

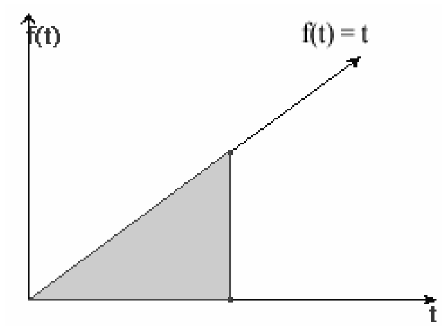
Léase “integral desde a hasta b de f (t)”.

Luego, Ricardo losada aplica este concepto para averiguar el área bajo curvas con las cuales según él, el alumno está familiarizado:

Ejemplo 1: Hallar $A = \int_0^x t\,dt$

Solución:

En este caso, f(t) = t,



En la gráfica anterior, es fácil ver que el área que se busca corresponde a la de un triangulo cuya base es x y cuya altura es f(x).

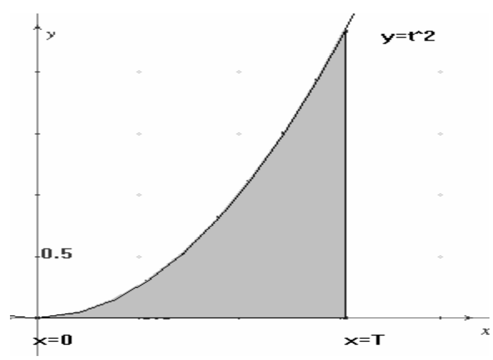
Como el área de un triángulo es igual a: $A = \frac{1}{2}$ base * altura

Entonces, $A = \frac{1}{2} x * x \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2} x^2 = \int_0^x t dt$.

Ejemplo 2: Hallar el área bajo la curva $y = x^2$, limitada por t = 0 y t = T.

Solución:

En la figura se muestra el área que se busca, o sea, la parte sombreada.



En este caso, se divide la región en n rectángulos iguales, cuya base tiene por longitud $\frac{T}{n}$, es decir, que los puntos extremos de los subintervalos serán:

$$t_o = 0, t_1 = \frac{T}{n}, t_2 = \frac{2T}{n}, \ldots, t_i = \frac{iT}{n}, \ldots, t_n = T$$

Cada intervalo tiene la misma longitud y se denota por Δt;

Por lo tanto, $t_1 - t_0 = \Delta t$, $t_2 - t_1 = \Delta t$ y en general, $t_i - t_{i-1} = \Delta t$.

Para el área por defecto, ósea A_n^-, se observa que cada rectángulo tiene por altura la función aplicada al extremo izquierdo del intervalo. Así, para el primer intervalo se tiene que:

$$h_1 = f(t_0),$$

Para el segundo:

$$h_2 = f(t_1);$$

Y en general, para cualquier intervalo se tiene que:

$$h_i = f(t_{i-1}) \quad \text{y} \quad h_n = f(t_{n-1}).$$

De tal forma que:

El área del primer rectángulo será $f(t_0)\ \Delta t$
El área del segundo rectángulo será $f(t_1)\ \Delta t$
El área del i-ésimo rectángulo será $f(t_{i-1})\ \Delta t$
Y el área del último rectángulo será $f(t_{n-1})\ \Delta t$

Entonces, $A_n^- = \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta t$ pero como $\Delta t = \dfrac{T}{n}$

$$A_n^- = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 . \frac{T}{n} = \frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

Pero $t_i = \dfrac{iT}{n}$

Entonces,

$$A_n^- = \frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{iT}{n} \right)^2 = \frac{T^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Ahora, recordando que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(2n+1)(n+1)}{6},$$

se tiene: $$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)\left[2(n-1)+1\right]\left[(n-1)+1\right]}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

por lo tanto, $A_n^- = \frac{T^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$,

luego, $A = \lim_{n \to \infty} A_n^- = \int_0^T f(t)dt = \int_o^T T^2 dt$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{T^3}{6} \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{n^3} = \frac{T^3}{6}\,2 = \frac{T^3}{3},$$

luego

$$\int_0^T t^2 dt = \frac{T^3}{3}$$

Este mismo resultado se hubiera obtenido si en lugar de tomar la suma por defecto, hubiéramos tomado la suma de las áreas por exceso:

En cada uno de los rectángulos que conforman el área por exceso, se ve que la altura está determinada por el valor que toma la función en el extremo derecho del intervalo que conforma la base de cada uno de los rectángulos, así:

El primer rectángulo tiene por área $H_1 \Delta t = f(t_1)\ \Delta t$
El segundo rectángulo tiene por área $H_2 \Delta t = f(t_2)\ \Delta t$,
El i-esimo rectángulo tiene por área $H_i \Delta t = f(t_i)\ \Delta t$
Y el último rectángulo tendrá por área $H_n \Delta t = f(t_n)\ \Delta t$

Luego $A_n^+ = \sum_{i=1}^{n} H_i \Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \Delta t = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \frac{T}{n}$$

$$= \frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \qquad \text{Pero} \qquad t_i = \frac{Ti}{n}$$

Luego, $A_n^+ = \frac{T^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$

$$A_n^+ = \frac{T^3}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ahora, $\lim_{n\to\infty} A_n^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{T^3}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{T^3}{6} * \frac{n}{n} * \frac{n+1}{n} * \frac{2n+1}{n}$$

$$= \frac{T^3}{6} * 2 = \frac{T^3}{3} = \int_0^T f(t)dt$$

Entonces: $$A = \int_0^T f(t)dt = \frac{T^3}{3}$$

4.1.2. Propuesta hecha por Pilar Turégano[10].

Turégano presenta una propuesta didáctica con el fin de introducir el concepto de integral definida como una continuación del concepto de área, y utiliza para esto la ayuda del computador con el objetivo de "*dar significado al concepto y eliminar al máximo los cálculos algebraicos*"

Inicialmente, y con ayuda del computador propone al estudiante la construcción gráfica de funciones y la visualización del área sombreada en un intervalo cualquiera.

> *"La visualización juega aquí un papel importantísimo, ya que proporciona una visión holistica del grafico y del área sombreada. Este primer acercamiento a la integral, tiene que ver con el área como magnitud. "*

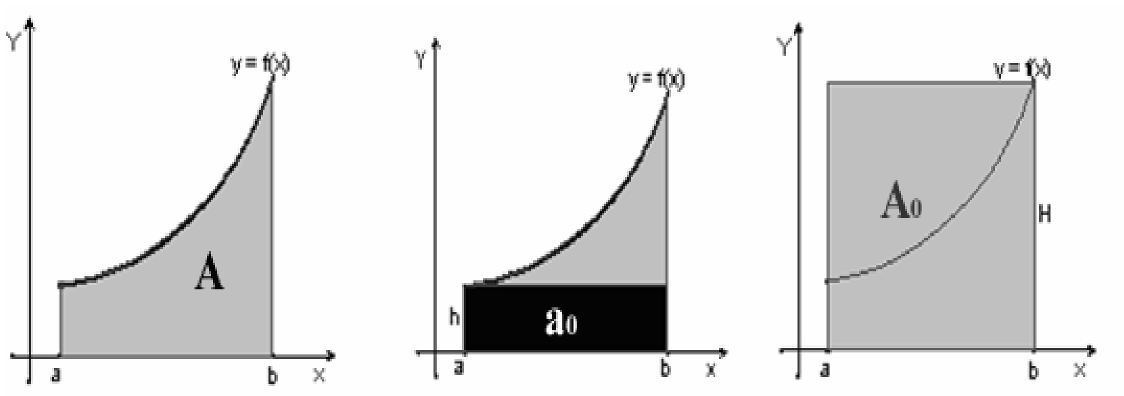
Luego, el estudiante explora algunos ejemplos con y sin ayuda del computador.

4.1.2.1 Iniciación al proceso de integración

> ***"****La noción de integral va asociada a la idea de medir el área bajo gráficos. Al proceso utilizado para encontrar ese número es a lo que llamamos proceso de integración****"***

En su propuesta, Turégano muestra gráficas como:

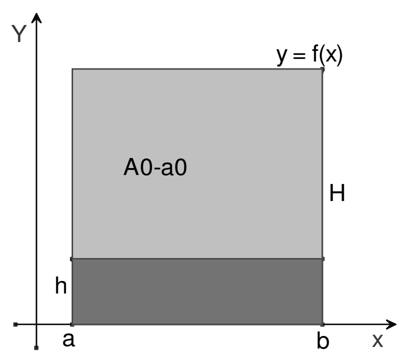
[10] Turégano, Pilar, El aprendizaje del concepto de integral. En: Revista Suma N° 26, 1997.



Donde la primera gráfica representa el área que se desea determinar, la segunda, representa el área del rectángulo formado cuando se toma como altura el valor más pequeño que toma la función en el intervalo [a, b] y como base la longitud del intervalo y en la tercera gráfica de la figura se representa el área del rectángulo formado cuando se toma como altura el máximo valor que toma la función en el intervalo [a, b] y como base la longitud del intervalo.

Esto con el fin de concluir que $a_0 < A < A_0$.

A continuación, presenta una figura, donde se muestra la diferencia entre el valor de las áreas A_0 y a_0



y partir de esta concluye que es necesario dividir el intervalo [a, b] de tal forma que con este mismo método se pueda realizar una mejor aproximación al área buscada; luego propone que la base de los rectángulos en que se divide el intervalo sea siempre igual; debido a esto, continúa el desarrollo de la unidad planteando la definición de bipartición y subintervalo:

> *"Definición: Llamamos bipartición de un intervalo a la división del mismo en dos partes iguales. Cada una de estas partes recibe el nombre de subintervalo".*

y propone actividades como:

1. Considerando el intervalo [0, 4] y efectuando una bipartición, los dos subintervalos que se determinan son [0, 2] y [2, 4].

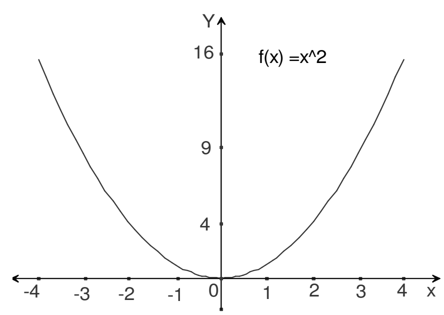
Teniendo en cuenta este ejemplo, efectué dos biparticiones al intervalo y escriba los subintervalos que determina.

Ahora efectué tres biparticiones y escriba los subintervalos que se forman

Si efectuamos siete biparticiones ¿Cuántos subintervalos se determinarían?

¿Y si fueran n biparticiones, cuántos subintervalos se determinarían?

2. El diagrama siguiente muestra el gráfico de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [-4,4].

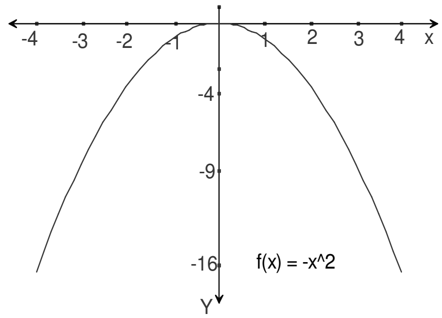


a. Determine que valores toma la función en los extremos de los intervalos [0,1], [1,2], [2,3,], [3,4].

b. Dibuje sobre el grafico las ordenadas calculadas. A estas ordenadas las llama alturas de la función

c. Diga cuales son las alturas mínima y máxima en los intervalos dados

   a. El diagrama siguiente muestra el gráfico de la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo [-4,4].



Determine que valores toma la función en los extremos de los intervalos [-4,-3], [-3,-2],[-2,-1], [-1,0].

a. Dibuje sobre el grafico las ordenadas calculadas. A estas ordenadas las llama alturas de la función

b. Diga cuales son las alturas mínima y máxima en los intervalos dados

Con ayuda del programa ALTURAS, Pilar Turégano propone una actividad al estudiante, donde el estudiante puede observar en la pantalla del computador las secuencias tanto numéricas como gráficas de las biparticiones que se le pueden hacer a un intervalo determinado.

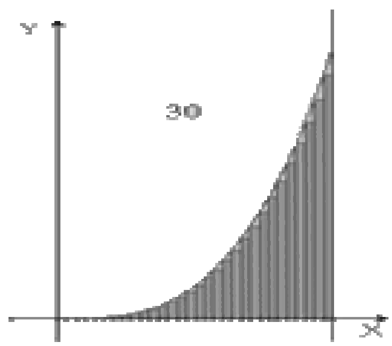
Este es un programa que permite aproximar y tabular los datos obtenidos mostrando la diferencia entre las alturas:

Nº de biparticiones	Media de las Alturas extremas izquierdas h	Media de las alturas extremas derechas H	Diferencia de las alturas H - h
Ninguna	0	16	16
1	2	10	8
2	3.50080	7.50000	4
3	4.37500	6.37500	2
4	4.84375	5.84375	1
5	5.08594	5.58594	0.50000
6	5.20898	5.45898	0.25000
7	5.27100	5.39600	0.12500
8	5.30212	5.36462	0.06250
9	5.31770	5.34896	0.03125
10	5.32552	5.34114	0.01563
11	5.32943	5.32724	0.00781
12	5.33138	5.33529	0.00391
Con infinitas	5.3		0

Después de las actividades expuestas, Turégano propone el calculo del área de los rectángulos con ayuda del programa INTEGRAL, en el cual se teclean los datos de la función, el intervalo en el cual está definida, y el número de biparticiones deseadas; con estos datos, el programa muestra en la pantalla la grafica de la función, el área sombreada en el intervalo convenido las secuencias numéricas del área de los rectángulos, así como la diferencia entre las áreas y las alturas en una tabla, por ejemplo para la función Y = x^2, en el intervalo [0,4], el programa presenta la siguiente tabla:

Nº	h	H	H-h	(b-a)h	(b-a)H	A-a
0	0	16	16	0	64	64
1	2	10	8	8	40	32
2	3.500	7.500	4	14	30	16
3	4.375	6.375	2	17.5	25.5	8
4	4.843	5.843	1	19.375	23.375	4
5	5.085	5.585	0.500	20.343	22.343	2
6	5.208	5.458	0.250	20.835	21.836	1
7	5.271	5.396	0.125	21.084	21.584	0.5
8	5.302	5.364	0.062	21.208	21.458	0.25
9	5.317	5.348	0.031	21.270	21.395	0.125
10	5.325	5.341	0.015	21.302	21.364	0.0625
11	5.329	5.327	0.007	21.317	21.348	0.0312
12	5.331	5.335	0.003	21.325	21.341	0.0156
∞	5.3		0	21.33		0

Y la siguiente gráfica:



Finalmente la autora recomienda trabajar con diferentes tipos de funciones (crecientes, decrecientes, mayores que cero y menores que cero), con el fin de ilustrar a los estudiantes los posibles errores que se cometen, ya que por ejemplo al aplicar el programa INTEGRAL, a la función Y = x^3, en el intervalo [-2,2] el resultado obtenido será cero, pero la imagen del área bajo la curva muestra algo muy diferente, y esto puede generar confusión en los estudiantes si no se corrige a tiempo, ya que la mayoría de ellos confía plenamente en las respuestas que da el computador y muchas veces no analiza los resultados.

Finalizada la presentación de las propuestas, es bueno anotar que su selección se debe al objetivo general de la propuesta didáctica; La primera propuesta, se seleccionó teniendo en cuenta que se pretende introducir el concepto de integral definida como área bajo la curva; tal como lo plantea Ricardo Losada. Sin embargo fue necesario analizar otras propuestas, entre ellas la de Pilar Turégano quien presenta el concepto a los estudiantes a partir del concepto de área y teniendo en cuenta tanto aproximaciones por defecto como por exceso, además, tiene en cuenta diferentes tipos de funciones como crecientes, decrecientes, positivas y negativas.

La propuesta didáctica "**Secuencia de actividades didácticas para la enseñanza del concepto de integral definida como área bajo la curva a través de un**

entorno de la geometría dinámica.” tuvo como guía para su desarrollo las propuestas de Ricardo Losada y Pilar Turégano y como complemento a ellas se mostrará el calculo de áreas bajo la curva en funciones continuas (crecientes, decrecientes y seccionalmente monótonas) y discontinuas mediante aproximaciones tanto por exceso como por defecto, partiendo como ya se dijo del concepto de movimiento rectilíneo (distancia recorrida).

Antes de enunciar la propuesta didáctica, es necesario dejar claro cual debe ser el papel tanto del profesor como del estudiante durante su desarrollo, teniendo en cuenta tanto el material didáctico que se va a utilizar cuando se lleve a cabo (páginas Web con representaciones ejecutables) como la metodología que se debe utilizar, lo cual se aclara en la siguiente sección.

4.2 AMBIENTES DE APRENDIZAJE

La incorporación de las nuevas tecnologías de la Información y la Comunicación, a la propuesta “**Secuencia de actividades didácticas para la enseñanza del concepto de integral definida como área bajo la curva a través del entorno de la geometría dinámica**” tiene como objetivo primordial la búsqueda de una mayor autonomía en el estudiante y el incremento de su participación, en el desarrollo de competencias.

Para poder llevar a cabo esta incorporación (de tecnologías al aula) es necesario generar estrategias pedagógicas donde se relacionen de manera directa los procesos formativos que se desarrollan al interior del programa y permitan hacer realidad, las guías para la actividad educativa. Para su definición es necesario determinar criterios que permitan la realización de diferentes actividades en las cuales se involucran de manera activa los miembros de la Comunidad educativa, por lo que se deben abordar preguntas tales como ¿Cuál es el papel del estudiante?, ¿Cuál es el papel del profesor?, ¿Cuál es la influencia de los materiales empleados para la enseñanza del concepto? que generan los retos que se imponen al estudiante en el presente y hacia el futuro (Camargo, 2005)

4.2.1 Papel del estudiante

Dentro de la propuesta “**Secuencia de actividades didácticas para la enseñanza del concepto de integral definida como área bajo la curva a través del entorno de la geometría dinámica**” se pretende como afirma Omar Salavarrieta (Coordinador de Ciencias Políticas de la Universidad Javeriana) que el estudiante se convierta en un agente de su propia formación, actor y protagonista de su aprendizaje, dentro del marco de una estructura curricular flexible superando su papel de receptor y oyente, para esto es necesario que él sea una persona independiente en la consecución de sus metas de aprendizaje, consultando, ampliando y confrontando la información acerca de los contenidos (*integral definida*), generando así nuevas preguntas y otros puntos de vista.

En esta medida los medios audiovisuales (video beam, retroproyectores de diapositivas, acetatos, videos, etc.) y computacionales, se tornan en instrumentos fundamentales para desarrollar las actividades de aprendizaje, en nuestro caso el computador junto con las representaciones ejecutables (programa Descartes) serán de gran ayuda ya que permiten al estudiante visualizar la parte geométrica del concepto y aligerar los cálculos algebraicos, logrando así dedicar mayor tiempo al análisis y comprensión del concepto.

4.2.2 Papel del profesor

Durante el desarrollo de las actividades, el profesor debe convertirse en un orientador, acompañante y facilitador de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, superando el papel de transmisor de información y expositor de conocimientos acumulados frente a alumnos, los cuales esperan recibir y adquirir los conocimientos que él posee fruto de su formación o experiencia, pero no como un cúmulo de información que no se sabe de donde viene sino como una experiencia propia de su vida diaria.

Para llegar a esto, es necesario destacar estrategias pedagógicas básicas en la formación del profesor; entre ellas: exposición docente, estudio y solución de casos, planteamiento y solución de preguntas, formulación y resolución de problemas entre otros; simulando situaciones y comparando la forma en que se llega a una solución. (Camargo, 2005)

Para el desarrollo de esta propuesta en particular, es necesario que el profesor se convierta en un solucionador de conflictos más no en un expositor de temas, pues los estudiantes deben llegar al conocimiento por si solos y el profesor únicamente debe servir como guía en el camino a este conocimiento.

4.2.3 Mediación instrumental

El contexto teórico en que se basa esta propuesta contempla una idea basada en los conocimientos socioculturales en educación matemática, desarrollados a partir de la obra de Vigotsky, quien plantea que la mediación instrumental se pone de manifiesto el conocimiento matemático y didáctico de los profesores en ejercicio y este está determinado por las tecnologías utilizadas en su formación y las que suele usar durante sus practicas de enseñanza (papel, lápiz, calculadoras, etc.).

La presencia de instrumentos de mediación en educación matemática ha hecho evidente que existe una relación indisoluble entre el instrumento de mediación usado y el conocimiento producido. Puede tratarse de un lápiz, un transportador, un compás, un texto, una calculadora ó un computador; en todos los casos el conocimiento construido depende de los instrumentos que se ponen en juego para su construcción.

Este principio permite entender el efecto de los instrumentos computacionales sobre el conocimiento matemático, identificando nuevas estrategias de solución a problemas ó situaciones que implican la introducción de nuevos conceptos, entre ellas podríamos destacar las representaciones ejecutables, es decir representaciones que simulan acciones anteriormente privativas de la cognición humana, como lo es el poder manipular el objeto que aparece en pantalla de tal forma que se genere una sensación de existencia casi material.

También se podría afirmar que el poder expresar ó demostrar el concepto de *integral definida* mediante instrumentos computacionales (representaciones ejecutables) genera un ambiente que favorece la expresión de ideas y el intercambio comunicativo entre los profesores y los estudiantes. El poder pensar en conjunto es mucho mas poderoso (“Dos cabezas piensan más que una”) ya que permite la visualización gráfica y por tanto el análisis detallado de nuevos conceptos. (Balacheff & Kaput, 1996).

4.2.3.1 Programa Descartes

El programa Descartes es una herramienta dirigida a profesores de matemáticas que permite generar aplicaciones educativas variadas y atractivas; se puede definir como un sistema de referencia cartesiano interactivo en el que se pueden configurar y emplear todos los elementos habituales propios del cálculo: Origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas, vectores, etc., además de los elementos geométricos elementales: puntos, segmentos, rectas, arcos, etc., permitiendo con ello representar la gráfica de todas y cada una de las funciones que habitualmente se utilizan en la enseñanza secundaria y media, teniendo en cuenta distintos tipos de coordenadas (cartesianas, paramétricas y polares) (Ver Anexo 1 pag. 138).

Como ocurre en las representaciones gráficas Los elementos que intervienen en la definición de las ecuaciones que se representan, pueden ser parámetros modificables por el usuario, lo que hace que las gráficas que se muestran cambien al modificar esos parámetros. Descartes también dispone de una herramienta de cálculo muy buena, la cual permite evaluar cualquier expresión matemática y escribir el resultado en la escena(Ver Anexo 1 pag. 139).

Además de ser un programa que permite ser controlado por el profesor en un tiempo razonable, el programa Descartes es fácil de usar para los alumnos, por lo tanto se convierte en una ayuda didáctica y metodológica que el profesor puede usar con el fin de obtener:

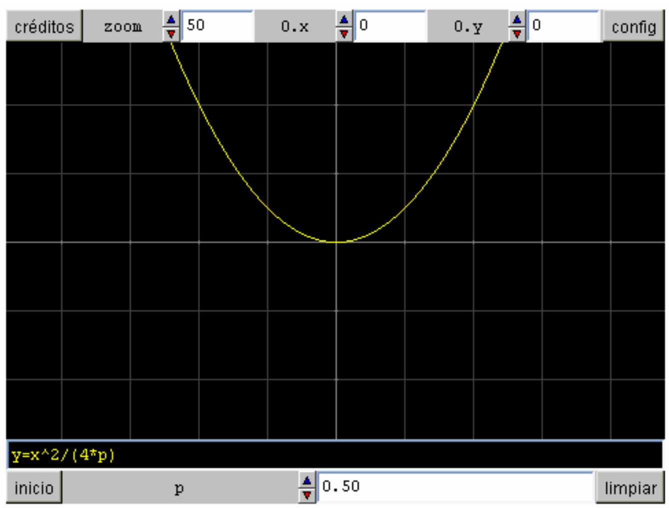
- metodologías activas, para que el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje
- un aprendizaje cooperativo e individualizado, el trabajo en equipo es esencial y la atención personalizada también
- diversidad, permitiendo que los materiales sean flexibles para poder modificarlos tanto cuanto se quiera.

4.2.3.1.1 Applet Descartes

Es un *applet*[11] configurable, diseñado para presentar interacciones educativas con números, funciones y gráficas; se desarrolló con el fin de diseñar páginas interactivas de Matemáticas, donde los gráficos y los cálculos cobran vida a través de escenas configurables que permiten a los alumnos:

- investigar propiedades
- adquirir conceptos y relacionarlos
- aventurar hipótesis y comprobar su validez
- hacer deducciones
- establecer propiedades y teoremas
- plantear y resolver problemas
- y en general, realizar las actividades propias de las clases de matemáticas.

Con el programa Descartes los profesores pueden preparar páginas *Web* interactivas sobre varios temas relacionados con las matemáticas. Por ejemplo, la siguiente figura muestra la gráfica una parábola está hecha con el *applet* Descartes:

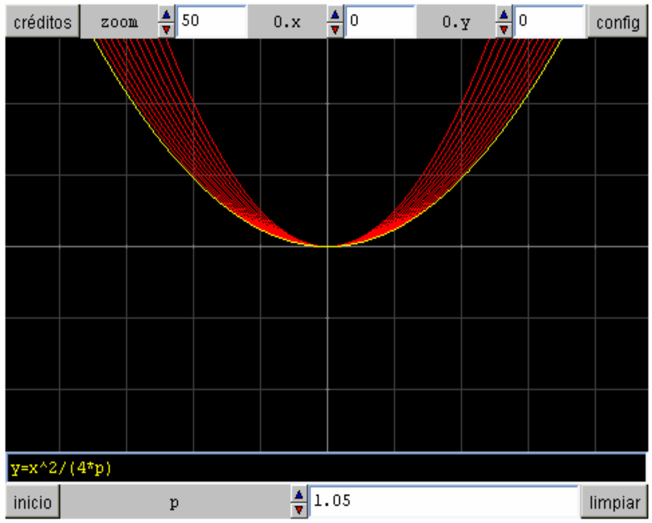


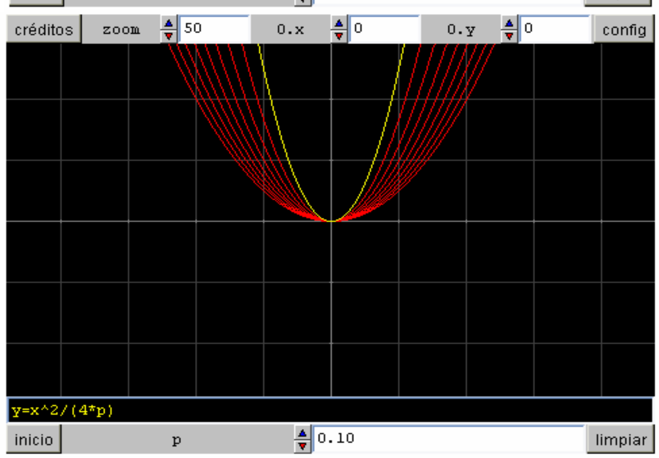
En ella se puede modificar los valores del parámetro p (pulsando en las flechas del control de **p** o bien escribiendo explícitamente en el campo de texto y pulsando ***intro***) y observar cómo cambia la gráfica en respuesta a esas modificaciones.

[11] Applet: Programa informático realizado en lenguaje JAVA. Son instrumentos tecnológicos novedosos, ya que son sistemas ejecutables que virtualmente llevan a cabo funciones cognitivas que anteriormente eran exclusivas de los seres humanos, mediante un proceso donde el lector interpreta desde distintos enfoques los conceptos que se trabajan en la pantalla.

Su distribución, en la mayoría de los casos gratuita, y su posible ejecución desde las paginas WEB, hace de estos programas un elemento de gran importancia en el campo educativo ya que permite que el profesor los adapte a sus necesidades especificas.

Cada vez que el parámetro **p** cambia, la gráfica se actualiza, de forma tal que cuando se aumenta el valor de p la parábola se abre (primera figura); mientras que si se disminuye este valor, esta se cierra (segunda figura).





Este ejemplo es una aplicación típica del *applet* Descartes, donde aparece una gráfica cuya definición matemática depende de un parámetro y al cambiar el valor de este parámetro la gráfica se modifica (Ver mas información en Anexo 1 pag.141).

El *applet* Descartes permite visualizar prácticamente todas las *gráficas* de las *funciones de una variable* y de las *ecuaciones en dos variables* que se trabajan a lo largo de la educación básica y media, además, ayuda a comprender las relaciones entre las ecuaciones, sus gráficas y los diversos elementos que las componen. Las aplicaciones que se presentan en este trabajo ilustran la gran variedad de usos posibles del programa Descartes

5. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

Este proyecto se inició con el fin de aportar una solución al problema planteado por diversos autores acerca de la necesidad de retomar el concepto de *integral definida* desde otro ámbito en el cual el alumno de educación media esté en capacidad de asimilarlo y trabajarlo, teniendo como base previa únicamente los conceptos de área, movimiento y función.

Teniendo en cuenta que los conceptos matemáticos generalmente nacen de la necesidad del hombre por resolver problemas, se decidió presentar el concepto de *integral definida* a partir de su génesis histórica (áreas bajo la curva y distancias) e incorporar a su desarrollo tecnologías computacionales como son las representaciones ejecutables y las paginas Web.

En el desarrollo de las actividades se llega al concepto de *integral definida* siguiendo su desarrollo histórico; a partir del problema de la distancia planteado por Newton y con ayuda de paginas Web que incluyen Applets del programa Descartes; con el objetivo que el estudiante llegue al concepto mediante su representación gráfica, por medio de representaciones ejecutables que le permitan manipular los objetos que se encuentran en la pantalla y de esta forma lograr una mejor comprensión del tema.

Vale la pena anotar que para que el alumno asimile el concepto a través de esta propuesta didáctica, debe manejar algunos conocimientos previos, como son el concepto de función, área de polígonos regulares (rectángulo) y el de movimiento rectilíneo (relación entre velocidad, tiempo y distancia), de tal forma que al dar inicio a la propuesta no se vea en la necesidad de posponerla mientras reconoce el alcance de estos conceptos, por este motivo y pese a que son conceptos que se han manejado en cursos anteriores tanto en el área de matemáticas como en otras áreas del conocimiento, se propone en primera estancia un taller (a libre albedrío del profesor encargado) con el fin de que el alumno recuerde estos conceptos y se familiarice con ellos.

Luego viene el desarrollo de la propuesta. Aquí se presenta el concepto de *integral definida*, a partir del concepto de movimiento, mediado bajo las preguntas ¿Cómo calculamos la distancia recorrida por un objeto que se mueve con velocidad constante, durante un tiempo t cualquiera? y ¿Si el objeto que se mueve no lleva velocidad constante?, cuyas respuestas generan situaciones que muestran una forma lógica de llegar al concepto de *integral definida* sin necesidad de que el lector maneje los conceptos de limite y derivada.

La propuesta como tal, consta de siete partes; las tres primeras son repaso de algunos conceptos, pues aunque se considera que se han manejado en cursos anteriores, es necesario que el estudiante reconozca el alcance de cada uno de ellos: en la primera parte de esta sesión se muestra la clasificación gráfica de funciones: funciones continuas (funciones constantes, crecientes, decrecientes y seccionalmente monótonas) y discontinuas; en la segunda se considera el concepto de movimiento rectilíneo teniendo en cuenta la relación que existe entre distancia, velocidad y tiempo y finalmente se muestra el concepto de área de una región plana y se introduce el concepto de áreas por exceso y áreas por defecto.

En la segunda sesión se considera como primera medida la relación que existe entre distancia recorrida y área bajo la curva, esto a partir de una situación relacionada con el movimiento rectilíneo con velocidad constante; en ella se muestra que la distancia recorrida por un objeto que se mueve con velocidad constante equivale al área del rectángulo limitado por las rectas que representan la velocidad, el tiempo y los ejes coordenados. A continuación se consideran situaciones donde los objetos en movimiento no viajan con velocidad constante, aclarando que la relación $V_{vs}t$ en estos casos puede describir funciones continuas (crecientes, decrecientes y seccionalmente monótonas) ó discontinuas. Además se muestra al estudiante que una manera lógica de aproximar la distancia recorrida en este tipo de movimiento, es mediante particiones muy pequeñas del tiempo, en las cuales se supone una velocidad constante, también se muestra que entre mayor sea el número de subdivisiones hechas al tiempo, mayor será la aproximación del cálculo deseado (la distancia recorrida por el cuerpo).

Durante el desarrollo de esta sesión se plantean actividades que explican la forma para calcular el área bajo la curva en varios tipos de funciones; distinto al trabajo realizado en la mayoría de los textos tradicionales donde solo muestran ejemplos con funciones continuas y crecientes; sin tener en cuenta el procedimiento a seguir para calcular el área bajo la curva en otro tipo de funciones que ya se manejan en grado once y que no tienen estas características; por ejemplo la función y = sen(x), pese a ser una función continua no siempre es creciente; la función y = tan(x), pese a ser siempre creciente no es continua en todo su recorrido y así con una gran cantidad de funciones como las que se proponen en esta sesión.

Finalmente se formaliza el concepto de *integral definida* como el de área bajo una curva y se finaliza introduciendo la expresión matemática de integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx$$

5.2 ESTRATEGIAS DE DESARROLLO Y APLICACIÓN

La secuencia de actividades se compone de tres sesiones en las cuales como ya se mencionó, se utilizarán las representaciones ejecutables y las páginas Web como recurso didáctico.

Las actividades se plantean en paginas WEB (Ver anexo en el CD titulado “actividades”) guiando su desarrollo guiando su desarrollo mediante preguntas y actividades extra de tal forma que el estudiante pueda llegar al concepto de manera independiente, sacando sus propias conclusiones, de ahí que la labor del profesor al momento de llevar a cabo la propuesta es más la de un orientador que aclara las posibles dudas de los estudiantes y guía el proceso de formación que el un transmisor de conocimientos.

Las actividades están diseñadas de manera independiente, de forma que si un profesor necesita una actividad para complementar su trabajo en el aula, pueda elegir pueda elegir una de ellas y llevarla a cabo sin ningún problema.

Para llevar a cabo la secuencia de actividades propuesta, es necesario un computador con explorador de Internet (Internet Explorer) y que interprete lenguaje JAVA.

A continuación se presenta una posible solución a las actividades planteadas en el CD, y algunas sugerencias al momento de llevar a cabo la propuesta.

5.2.1 Primera Sesión

Las actividades planteadas en esta sesión son repaso de algunos temas que los alumnos han manejado en periodos anteriores tanto en matemáticas como en otras áreas del conocimiento. Se plantean con el fin de que el alumno recuerde estos conceptos y se familiarice con ellos; sin embargo, su ejecución se deja a elección del profesor encargado.

5.2.1.1 Contenidos matemáticos:

Tema: Conceptos previos a la integral definida

- Clasificación de funciones
- Movimiento rectilíneo uniforme
- Área de figuras conocidas

5.2.1.2 Objetivo:

Que el estudiante recuerde y se familiarice con algunos conceptos y fórmulas matemáticas necesarias en el estudio de la integral definida como lo son el concepto de área, el de clasificación gráfica de funciones y el concepto de movimiento rectilíneo con todas sus características.

5.2.1.3 Metodología:

Para el desarrollo de esta sesión, se proponen tres situaciones; en la primera, se presenta información acerca la definición de función y su clasificación gráfica en funciones continuas y discontinuas, monótonas y seccionalmente monótonas, constantes, crecientes y decrecientes; Al igual que en la primera situación, en la segunda se presenta el concepto de movimiento rectilíneo y la relación que existe entre la velocidad de un objeto en movimiento, la distancia que recorre y el tiempo que emplea en recorrer esta distancia; a partir de una situación relacionada con este tema, con el fin de que el alumno recuerde el concepto y se familiarice con el. En la tercera parte se considera el cálculo del área de algunas regiones planas, incluyendo la definición de aproximación de áreas por exceso y por defecto mediante algunas situaciones en las que se hace necesario realizar este tipo de aproximaciones.

5.2.1.4 Descripción:

5.2.1.4.1 Clasificación grafica de funciones

Una función es una regla ó correspondencia que asocia dos conjuntos X e Y de tal forma que a cada elemento del conjunto X le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto Y.

A cada elemento del conjunto Y se le llama imagen de x bajo la función f y se denota por f(x), el conjunto X recibe el nombre de dominio de la función; mientras que el conjunto conformado por las imágenes de todos los elementos del conjunto X recibe el nombre de rango de la función.

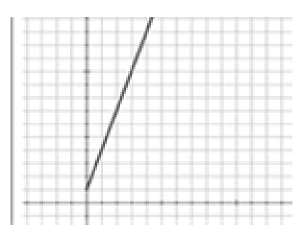
La gráfica de una función f se puede definir como el conjunto de puntos en un plano cartesiano cuyas coordenadas son (x, f(x)) con el dominio de la función en el eje X y el rango en el eje Y.

Ejemplo:

Si f(x) = 3x+1, algunos valores de x y sus correspondientes f(x) en el intervalo [- 3, 3] son:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-8	-5	-2	1	4	7	10

Y gráfica es:



La representación gráfica de las funciones ayuda a reconocer las características de cada una de ellas, (describe el comportamiento de las imágenes de la función (f(x)) a medida que el valor de x varía) y con base en esto clasificarlas en:

Funciones continuas y discontinuas
Funciones constantes, crecientes y decrecientes
Funciones monótonas y seccionalmente monótonas

Situación 1

Analice el comportamiento de las siguientes funciones en el intervalo indicado:

1. $f(x) = 3; [2,10]$
2. $f(x) = x^2; [1,6]$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$; $[2, 7]$
4. $f(x) = sen(x)$; $[0, \pi]$
5. $f(x) = sec(x)$; $(0, \pi]$

1. Complete las tablas encontrando el valor de f para cada una de las funciones.

1. $f(x) = 3; [2,10]$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	3	3	3	3	3	3	3	3	3

2. $f(x) = x^2; [1,6]$

X	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	4	9	16	25	36

3. $f(x) = \frac{1}{x}$; $[2, 7]$

X	2	3	4	5	6	7
f(x)	0.5	0.33	0.25	0.2	0.16	0.14

4. $f(x) = sen(x)$; $[0, \pi]$

X	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
F(x)	0	0.309	0.809	1	0.951	0.587	0.309	0

5. $f(x) = sec(x)$; $[0, \pi]$

X	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
F(x)	1	1.051	1.701	¿?	-3.236	-1.236	-1.051	-1

A continuación se analiza el comportamiento de las imágenes (f(x)) en cada una de las funciones

2. ¿Qué ocurre con el valor de f(x) cuando se aumenta el valor de x?

1. $f(x)=3;[2,10]$

El valor de f(x) permanece constante.

2. $f(x)=x^2;[1,6]$

El valor de f(x) aumenta

3. $f(x)=\frac{1}{x}$; $[2, 7]$

El valor de f(x) disminuye

4. $f(x)=\operatorname{sen}(x)$; $[0, \pi]$

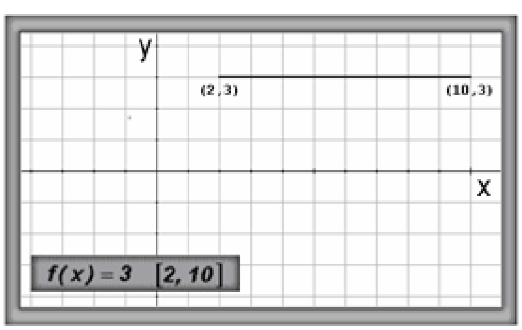
El valor de f(x) En una parte disminuye y otra aumenta

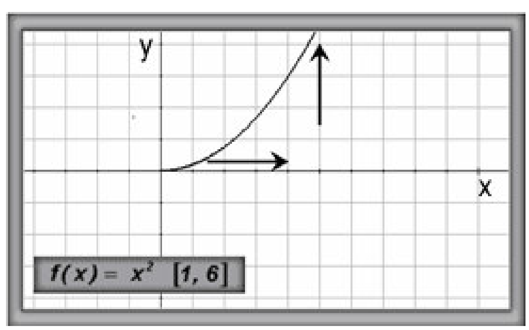
5. $f(x)=\sec(x)$; $[0,\pi]$

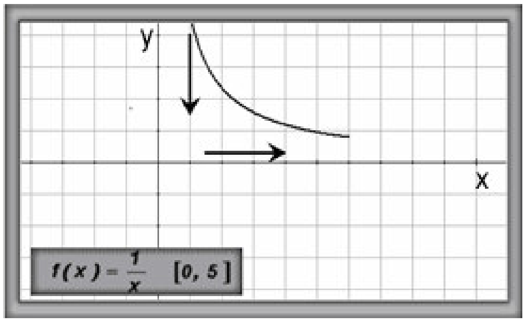
El valor de f(x) En una parte disminuye, en otra aumenta y hay un punto para el cual no está definida la función.

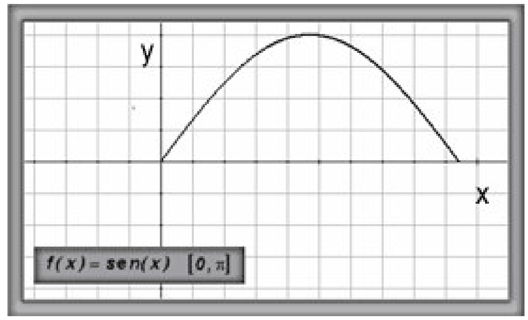
3. Con ayuda del Applet “funciones” observe las características gráficas de cada una de las funciones.

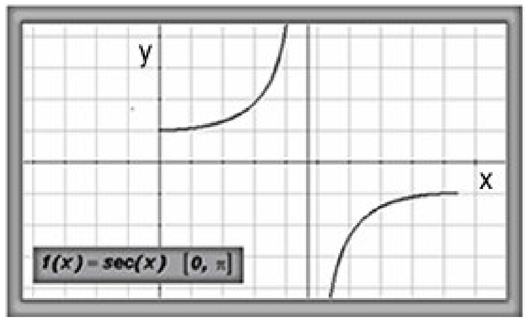
El Applet muestra el dibujo de la gráfica de cada función teniendo en cuenta el intervalo indicado.







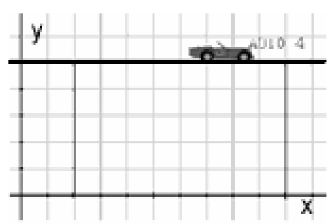




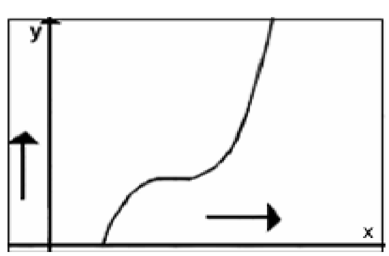
A continuación se presenta la definición de función constante, función continua, función creciente, función decreciente, función seccionalmente monótona y función discontinua:

Teniendo en cuenta que:

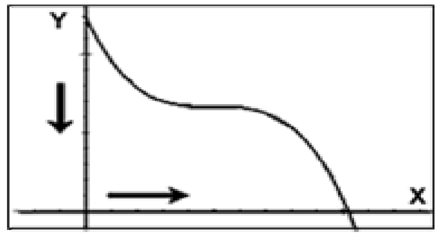
a. Una función es constante si el valor de las imágenes (f(x)) permanece constante, pese a que cambie el valor de x. La gráfica de una función constante es una recta paralela al eje X.



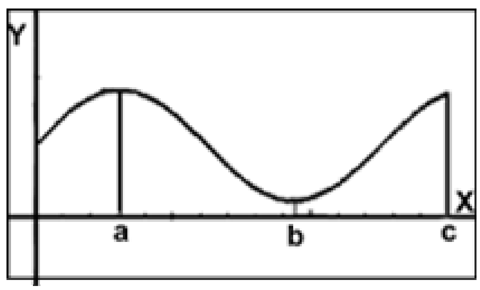
b. Una función es creciente en un intervalo [a, b], si a medida que aumentan los valores de x aumentan los valores de f(x); en la gráfica de una función creciente se puede observar que el valor de las imágenes siempre va aumentando.



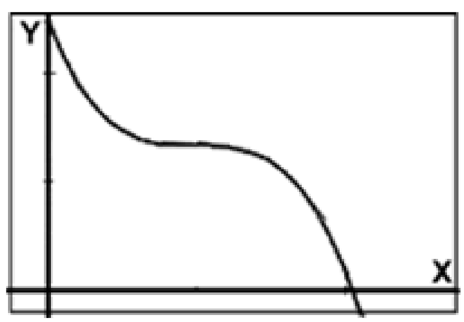
c. Una función es decreciente en un intervalo [a, b], si a medida que aumenta el valor del dominio, disminuye el valor de la función. en la gráfica de una función decreciente se puede observar que el valor de las imágenes siempre va disminuyendo.



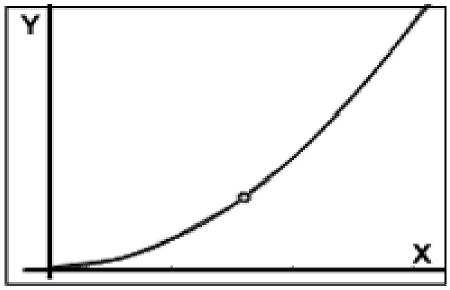
d. Una función es monótona en un intervalo [a, b] si durante todo el intervalo es creciente, ó durante todo el intervalo es decreciente. Y es seccionalmente monótona cuando en cierta sección del intervalo la función es creciente, mientras que en otra sección del mismo intervalo es decreciente.

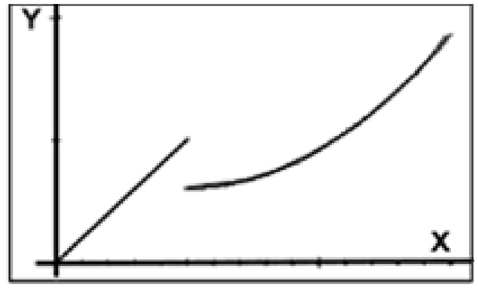


e. Una función f es continua en un intervalo [a, b] si y sólo si para todo x perteneciente al intervalo existe un f(x); gráficamente, la función f se reconoce porque no presenta saltos ó interrupciones en su recorrido.



f. Una función se considera discontinua si existe algún x en el intervalo [a, b] para el cual la función no está definida (el x no tiene imagen); la gráfica de este tipo de funciones siempre presenta saltos o interrupciones.





4. Clasifique las funciones según sean:

- **a**. continuas ó discontinuas
- **b**. constantes, crecientes ó decrecientes
- **c**. monótonas ó seccionalmente monótonas

1. $f(x) = 3; [2,10]$

El valor de f(x) permanece constante, por lo tanto es una función constante; además la gráfica es una línea recta paralela al eje X.

2. $f(x) = x^2; [1,6]$

El valor de f(x) aumenta a medida que aumenta x y la gráfica de la función siempre va subiendo por lo que es una función creciente;

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[2, 7]$

El valor de f(x) disminuye a medida que aumenta el valor de x. En la gráfica, la función siempre va bajando, luego la función es decreciente

4. $f(x) = \text{sen}(x)$; $[0, \pi]$

En unas partes de la función aumenta el valor de f mientras que en otras disminuye, en la grafica se observa que en el intervalo $(0, \pi/2)$, la función es creciente, mientras que en el intervalo $(\pi/2, \pi)$ es decreciente. Por lo tanto la función es seccionalmente monótona.

5. $f(x) = \sec(x)$; $[0, \pi]$

La función y = sec(x) no esta definida en $x = \pi/2$; esta característica se observa en la gráfica, donde la función presenta un salto cuando llega a este punto; por lo que esta función se puede clasificar como discontinua.

5.2.1.4.2. Movimiento rectilíneo

- **Relación entre distancia recorrida, velocidad y tiempo.**

La velocidad de una partícula ó de un objeto en movimiento es la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla; por ejemplo la expresión 30 kilómetros por hora indica que el móvil recorre 30 kilómetros por cada hora de recorrido.

V = velocidad, x = distancia recorrida y t = tiempo empleado

Si $V = \dfrac{x}{t}$ entonces $x = V.t$

Al considerar el problema de hallar la distancia recorrida por un móvil durante un cierto periodo de tiempo, cuando se conoce la velocidad del objeto en todos los momentos, es posible clasificar este proceso en 3 casos:

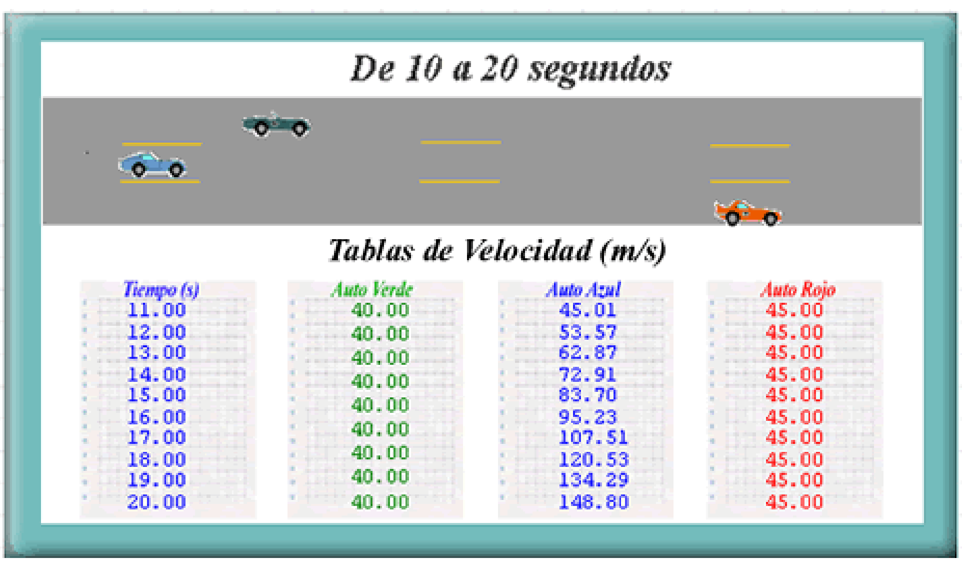
1. Cuando el móvil viaja con velocidad constante durante todo el recorrido

2. Cuando el móvil varía su velocidad por intervalos de tiempo, ya sean distintos ó iguales.

3. Cuando el móvil varía su velocidad durante todo el recorrido.

Situación 2

a. En el applet se representa el movimiento de 3 autos durante los primeros cuarenta segundos de una competencia.



El applet se ha dividido en cuatro intervalos de 10 segundos cada uno, en cada intervalo se muestra una tabla que indica el cambio de velocidad de cada uno de los autos en el intervalo:

1. De 0 a 10 segundos:

Tablas de Velocidad (m /s)

Tiempo (s)	Auto Verde	Auto Azul	Auto Rojo
1.00	40.00	0.37	45.00
2.00	40.00	1.49	45.00
3.00	40.00	3.35	45.00
4.00	40.00	5.95	45.00
5.00	40.00	9.30	45.00
6.00	40.00	13.39	45.00
7.00	40.00	18.23	45.00
8.00	40.00	23.81	45.00
9.00	40.00	30.13	45.00
10.00	40.00	37.20	45.00

2. De 10 a 20 segundos

Tablas de Velocidad (m/s)

Tiempo (s)	Auto Verde	Auto Azul	Auto Rojo
11.00	40.00	45.01	45.00
12.00	40.00	53.57	45.00
13.00	40.00	62.87	45.00
14.00	40.00	72.91	45.00
15.00	40.00	83.70	45.00
16.00	40.00	95.23	45.00
17.00	40.00	107.51	45.00
18.00	40.00	120.53	45.00
19.00	40.00	134.29	45.00
20.00	40.00	148.80	45.00

3. De 20 a 30 segundos

Tablas de Velocidad (m /s)

Tiempo (s)	Auto Verde	Auto Azul	Auto Rojo
21.00	40.00	164.05	35.00
22.00	40.00	180.05	35.00
23.00	40.00	196.79	35.00
24.00	40.00	214.27	35.00
25.00	40.00	232.50	35.00
26.00	40.00	251.47	35.00
27.00	40.00	271.19	35.00
28.00	40.00	291.65	35.00
29.00	40.00	312.85	35.00
30.00	40.00	334.80	35.00

4. De 30 a 40 segundos

Tablas de Velocidad (m /s)

Tiempo (s)	Auto Verde	Auto Azul	Auto Rojo
31.00	40.00	357.49	25.00
32.00	40.00	380.93	25.00
33.00	40.00	405.11	25.00
34.00	40.00	430.03	25.00
35.00	40.00	455.70	25.00
36.00	40.00	482.11	25.00
37.00	40.00	509.27	25.00
38.00	40.00	537.17	25.00
39.00	40.00	565.81	25.00
40.00	40.00	595.20	25.00

Teniendo en cuenta la información presentada en el applet:

1. Anote el comportamiento de la velocidad (aumenta, disminuye ó permanece constante) de cada uno de los autos en la siguiente tabla y compare los resultados.

Intervalo	**Auto Verde**		**Auto Azul**		**Auto Rojo**	
	En este intervalo	Con respecto al intervalo anterior	En este intervalo	Con respecto al intervalo anterior	En este intervalo	Con respecto al intervalo anterior
De 1 a 10 segundos	Constante	Constante	aumenta	aumenta	Constante	Constante
De 11 a 20 segundos	Constante	Constante	aumenta	aumenta	Constante	Constante
De 21 a 30 segundos	Constante	Constante	aumenta	aumenta	Constante	Disminuye
De 31 a 40 segundos	Constante	Constante	aumenta	aumenta	Constante	Disminuye

Teniendo en cuenta que:

El movimiento se puede clasificar según la velocidad del objeto que se desplaza, en:

- Movimiento uniforme: Cuando la velocidad es constante durante todo el recorrido.
- Movimiento uniforme a trozos: Cuando la velocidad del auto no es constante durante todo el recorrido; sin embargo al dividir el tiempo del recorrido en ciertos intervalos, la velocidad en cada uno de ellos es constante.
- Movimiento acelerado: Cuando la velocidad del cuerpo varia (aumenta ó disminuye) con el tiempo.

2. Clasifique el movimiento de cada uno de los autos.

Auto verde: Movimiento uniforme
Auto azul: Movimiento acelerado
Auto rojo: Movimiento uniforme a trozos.

3. Calcule la distancia total recorrida por el auto verde y el auto rojo entre:

a. El segundo 1 y el 15
b. El segundo 21 y el 27
c. El segundo 25 y el 40
d. Todo el recorrido.

Teniendo en cuenta que:

a. En un movimiento con velocidad constante, la distancia recorrida por el objeto equivale a la multiplicación de la velocidad por el tiempo.

Distancia recorrida = Velocidad * tiempo
$x = V.t$

b. Para calcular la distancia recorrida en un movimiento uniforme a trozos, se hace necesario dividir el recorrido en varias partes de tal forma que en cada una de ellas la velocidad sea constante. Luego se aplica la ecuación $x = V.t$ para calcular la distancia en cada uno de ellos y se suman los resultados, obteniendo así la distancia total recorrida por el objeto.

Analizando los datos que nos presenta el applet, es posible concluir que:

- **El auto 1 (auto verde):**

De 0 a 10 segundos	De 10 a 20 segundos	De 20 a 30 segundos	De 30 a 40 segundos
Auto Verde	Auto Verde	Auto Verde	Auto Verde
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00
40.00	40.00	40.00	40.00

Viaja con velocidad constante durante todo el recorrido, por lo que su movimiento se puede clasificar como uniforme.

La velocidad del auto es de 40 m/s; lo cual indica que está recorriendo 40 metros en un segundo. Como este valor (el de la velocidad) es constante con el tiempo, es posible afirmar que en dos segundos el auto recorre 80 metros, en 3 segundos recorre 120 metros (Haga notar que se esta realizando la multiplicación V*t); lo cual se puede resumir en:

Distancia recorrida = Velocidad * tiempo
$X=V*t$

Entonces, ¿Qué distancia recorre el auto entre el segundo 1 y el 15?

Como $X = V*t$ y se tiene que:

$$V= 40m/s \quad y \; t = 15s - 1s = 14 \text{ segundos}$$

Por lo tanto

$$X = 40m/s * 14\ s = 560 \text{ metros}$$

¿Qué distancia recorre el auto entre el segundo 21 y el 27?

$$V= 40\ m/s$$

t = 27s - 21s = 6 segundos,

luego

X = 40m/s * 6 s = 240 metros

¿Qué distancia recorre el auto entre el segundo 25 y el 40?

V= 40 m/s

t = 40s - 25s = 15 segundos,

luego

X= 40m/s * 15 s = 600 metros

¿Y cuál es la distancia total recorrida por el auto?

V= 40 m/s

t = 40segundos,

luego

X= 40m/s *40 s = 1600 metros

- El auto 2 (auto rojo)

Analizando los datos (velocidad del auto) que presenta el applet para este auto se puede llegar a conclusiones como:

- que la velocidad permanece constante en ciertos intervalos de tiempo; por lo cual, el movimiento de este auto se puede clasificar como movimiento uniforme a trozos.

- Para calcular la distancia total recorrida por este auto, es necesario determinar los intervalos de tiempo para los cuales la velocidad es constante

Intervalo1 De 0 a 20 segundos V= 45m/s
Intervalo 2 De 20 a 30 segundos V= 35 m/s
Intervalo 3 De 30 a 40 segundos V= 25 m/s.

Como en cada intervalo la velocidad es constante, es posible aplicar la ecuación X=V*t para calcular la distancia recorrida en cada uno de ellos.

Intervalo 1
t= 20 segundos
V= 45 m/s
X= 45 m/s*20 s = 900 metros

Intervalo 2
t= 10 segundos
V= 35 m/s
X= 35 m/s*10 s = 350 metros

Intervalo 3
t= 10 segundos
V= 25 m/s
X= 25 m/s*10 s = 250 metros

Y luego sumarlos para así encontrar que la distancia total recorrida por el auto fue:

X= 900 m +350 m +250 m.= 1500 metros.

a. Calcule la distancia recorrida por el auto entre el segundo 1 y el 15

En este intervalo V= 45 m/s
Y t = 15 s – 1 s = 14 segundos
X= 45 m/s * 14 s = 630 metros

b. El segundo 21 y el 27

En este intervalo V= 35 m/s
Y t = 27 s – 21 s = 6 segundos
X= 35 m/s * 6 s = 210 metros

c. El segundo 25 y el 40
Se debe aclarar que este cálculo se divide en dos partes debido a que en este intervalo existen dos periodos de tiempo con distinta velocidad, luego es necesario calcular la distancia recorrida en cada uno de ellos y luego sumar los resultados para así obtener una respuesta.

Periodo 1 de 25 a 30 segundos

V = 35 m/s
t = 5 segundos
X = 35 m/s * 5 s = 175 metros

Periodo 2 de 30 a 40 segundos

V= 25 m/s
t = 10 segundos
X = 25 m/s * 10 s = 250 metros

Distancia recorrida = 175 m + 250 m. = 425 metros

Para el caso del movimiento acelerado, se tiene que la velocidad varía con el tiempo (a medida que aumenta el tiempo aumenta ó disminuye la velocidad); y por tal motivo no es posible aplicar la ecuación:

$$x = V.t$$

Para realizar los cálculos y hasta el momento para resolver problemas de este estilo no se tienen herramientas (ecuaciones) que permitan realizar los cálculos directamente. Por lo tanto es necesario recurrir a aproximaciones que permitan presentar un resultado:

Un método consiste en dividir el tiempo del recorrido en ciertas partes (intervalos) y suponer velocidad constante para cada uno de ellas (el valor de la velocidad se debe tomar dentro de cada intervalo; generalmente se toma el valor más bajo (menor velocidad alcanzada en el intervalo) ó el más alto (velocidad máxima alcanzada en el intervalo))

4. Basado en los datos del Applet calcule la distancia recorrida por el auto azul, teniendo en cuanta para ello n = 1, 2, 3, 4 y 8 subintervalos (Tome la velocidad mínima de cada subintervalo para realizar los cálculos).

- El auto 3 (auto azul)

Este auto varía su velocidad durante todo el recorrido tal como se muestra a continuación:

De 0 a 10 segundos	De 10 a 20 segundos	De 20 a 30 segundos	De 30 a 40 segundos
Auto Azul	Auto Azul	Auto Azul	Auto Azul
0.37	45.01	164.05	357.49
1.49	53.57	180.05	380.93
3.35	62.87	196.79	405.11
5.95	72.91	214.27	430.03
9.30	83.70	232.50	455.70
13.39	95.23	251.47	482.11
18.23	107.51	271.19	509.27
23.81	120.53	291.65	537.17
30.13	134.29	312.85	565.81
37.20	148.80	334.80	595.20

Debido a esto, el movimiento que lleva se puede clasificar como movimiento acelerado; por lo tanto es necesario dividir el tiempo del recorrido en un cierto número de subintervalos, luego identificar ó calcular en cada uno de ellos

Tiempo de recorrido
Número de intervalos
Velocidad en cada intervalo

Es necesario aclarar que el valor de la velocidad se debe tomar dentro de cada intervalo y generalmente se toma el valor más bajo (menor velocidad alcanzada en el intervalo) ó el más alto (velocidad máxima en el intervalo):

Para 1 subintervalo

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	40	0.37	14.8	14.8

Para 2 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	20	0.37	7.4	7.4
2	20	148.8	2796	2983.4

Para 3 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	13.33	0.37	4.93	4.93
2	13.33	62.87	838.27	843.20
3	13.33	251.47	3352.93	4196.13

Para 4 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	10	0.37	3.7	3.7
2	10	37.20	372.0	375.7
3	10	148.80	1488.0	1823.7
4	10	334.80	3348.0	5171.7

Para 8 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	5	0.37	1.85	1.85
2	5	9.30	46.5	48.35
3	5	37.20	186.0	234.35
4	5	83.70	418.5	652.85
5	5	148.80	744.0	1396.5
6	5	232.50	1162.5	2559.35
7	5	334.80	1674.0	4233.35
8	5	455.70	2278.5	6511.85

El estudiante debe caer en cuenta que el valor obtenido es menor que el real y que a medida que aumenta el número de intervalos en que se divide el tiempo, este valor se acerca cada vez más a la distancia real recorrida por el auto.

A continuación debe tomar la velocidad máxima de cada subintervalo y repetir el procedimiento. Se debe aclarar que el resultado encontrado es mayor que el real y que al igual que en el cálculo anterior, a medida que se aumenta el número de intervalos, el resultado se acerca cada vez más a la distancia real recorrida por el auto.

5. Repita el cálculo, tomando ahora la velocidad máxima de cada subintervalo para realizar los cálculos.

Para 1 subintervalo

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad máxima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	40	595.2	23808.0	23808.0

Comparando este resultado con el anterior, se encuentra que la distancia real X se encuentra entre 14.8 m y 23808.0 m

$$14.8 \text{ m} < X < 23808.0 \text{ m}$$

Para 2 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad máxima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	20	148.8	2796	2796
2	20	595.2	11904	14700

Luego, la distancia real X se encuentra entre 2983.4 m y 14700.0 m

$$2983.4 \text{ m} < X < 14700.0 \text{ m}$$

Para 3 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad máxima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	13.33	62.87	838.27	838.27
2	13.33	251.47	3352.93	4191.2
3	13.33	595.20	7935.99	12127.20

Esto indica que la distancia real X se encuentra entre 4196.13 m y 12127.20 m

$$4196.13 \text{ m} < X < 12127.20 \text{ m}$$

Para 4 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	10	37.20	372.0	372.0
2	10	148.80	1488.0	1860.0
3	10	334.80	3348.0	5208.0
4	10	595.20	5952.0	11160.0

Esto indica que la distancia real X se encuentra entre 5171.7 m y 11160.0 m

$$5171.7 \text{ m} < X < 11160.0 \text{ m}$$

Para 8 subintervalos

Subintervalo	Tiempo (s)	Velocidad mínima (m/s)	Distancia recorrida en ese subintervalo (m)	Distancia acumulada (m)
1	5	9.30	46.5	46.5
2	5	37.20	186.0	232.5
3	5	83.70	418.5	651.0
4	5	148.80	744.0	1395.0
5	5	232.50	1162.5	2557.5
6	5	334.80	1674.0	4231.5
7	5	455.70	2278.5	6510.5
8	5	595.20	2976.0	9486.0

Lo cual indica que la distancia real X se encuentra entre 6511.85 m y 9486.0 m

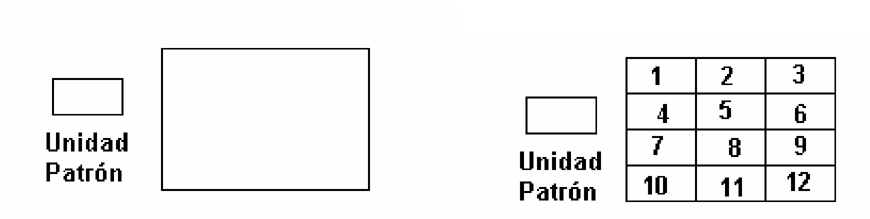
$$6511.85 \text{ m} < X < 9486.0 \text{ m}$$

Es necesario mostrar al estudiante que al aumentar el número de divisiones hechas al tiempo de recorrido el resultado obtenido va a ser más cercano al real.

5.2.1.4. 3. Área de figuras planas

Al encerrar una región del plano con una línea, ó con segmentos de recta, se obtiene en su interior una superficie plana; la medida de esta superficie recibe el nombre de **área.**

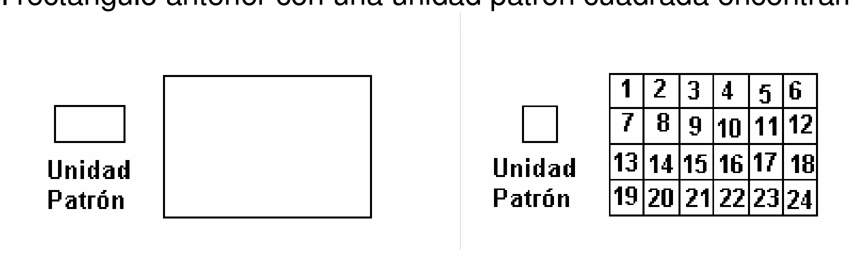
Para hallar la medida del área de una superficie plana, se utilizan unidades patrón (que también son superficies) establecidas previamente; El método consiste en comparar esta unidad con la superficie que se va a medir, por ejemplo:



Al comparar el rectángulo (superficie a medir) con su respectiva unidad patrón, se encuentra que este equivale a 12 unidades patrón, lo cual quiere decir que el área del rectángulo es igual a 12 unidades patrón.

Es necesario unificar el lenguaje; por lo cual se decide tomar una unidad patrón universal y medir con ella todas las superficies. Esta unidad tiene la forma de un cuadrado.

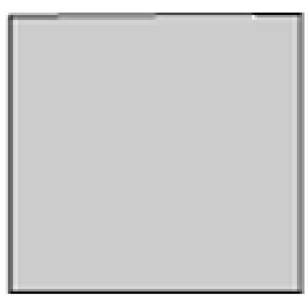
Al medir el rectángulo anterior con una unidad patrón cuadrada encontramos:



Que el rectángulo equivale a 24 unidades patrón (cuadrados).

Situación 3

1. En un octavo de cartulina dibuje y corte un cuadrado (usted elige el tamaño).

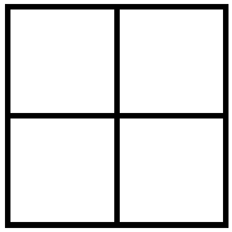


2. Calcule el área del cuadrado tomando como unidad de medida

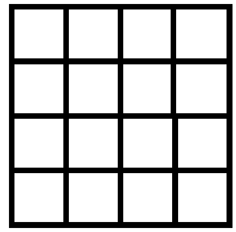
a. Un cuadrado de 4 cm. de lado.
b. Un cuadrado de 2 cm. de lado.
c. Un cuadrado de 1 cm. de lado.
d. Un cuadrado de ½ cm. de lado.

¿Qué resultados encontró?

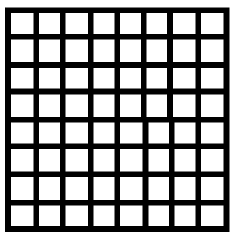
a.



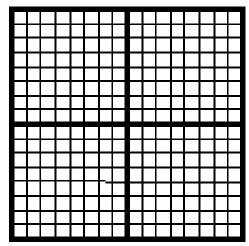
b.



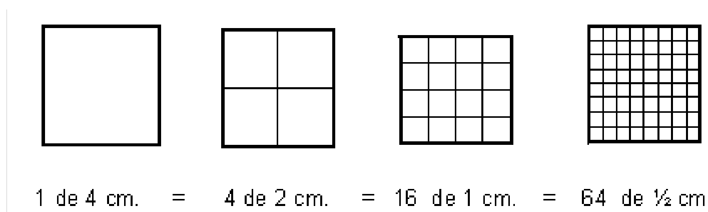
c.



d.



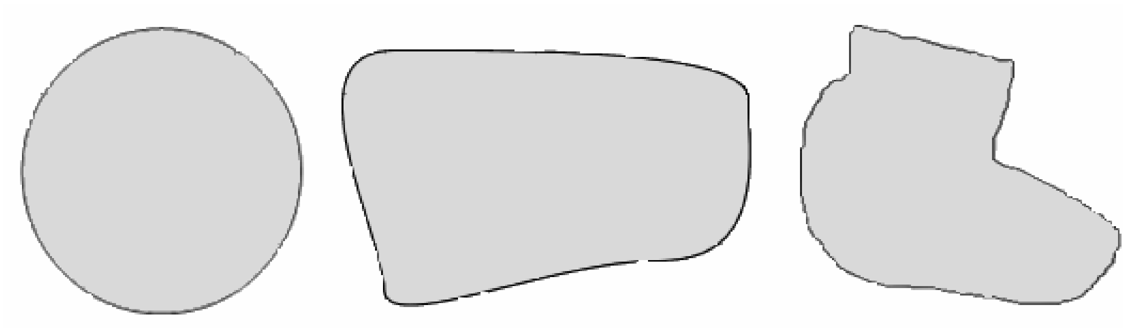
Teniendo en cuenta que:



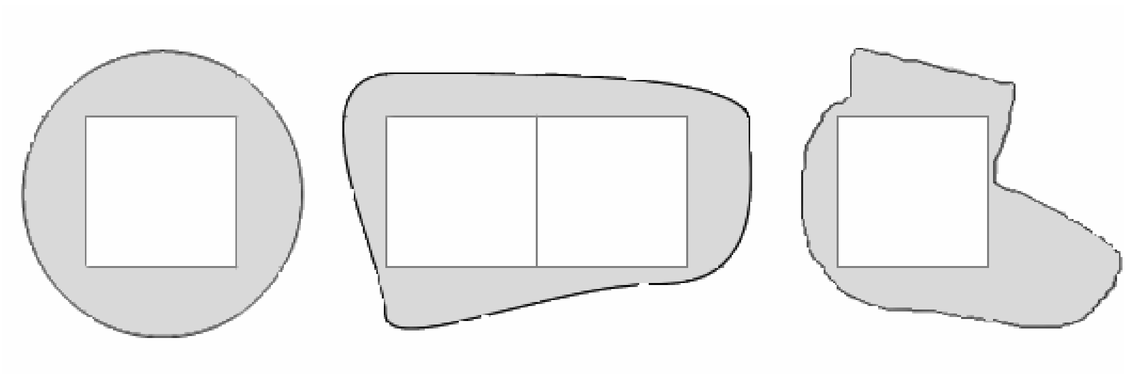
3. Exprese todos los resultados tomando como unidad el cuadrado de 4 cm. de lado.

Esta parte se realiza con el fin de que el estudiante comprenda que el disminuir ó aumentar el tamaño de la unidad de medida, no implica que el área de la figura a medir cambie; por lo tanto se sugiere realizar la conversión de unidades.

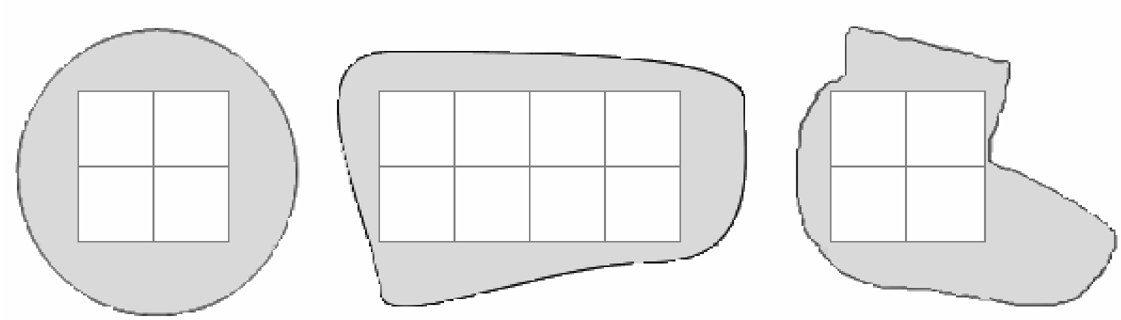
4. En un octavo de cartulina dibuje y corte las siguientes figuras (usted elige el tamaño):



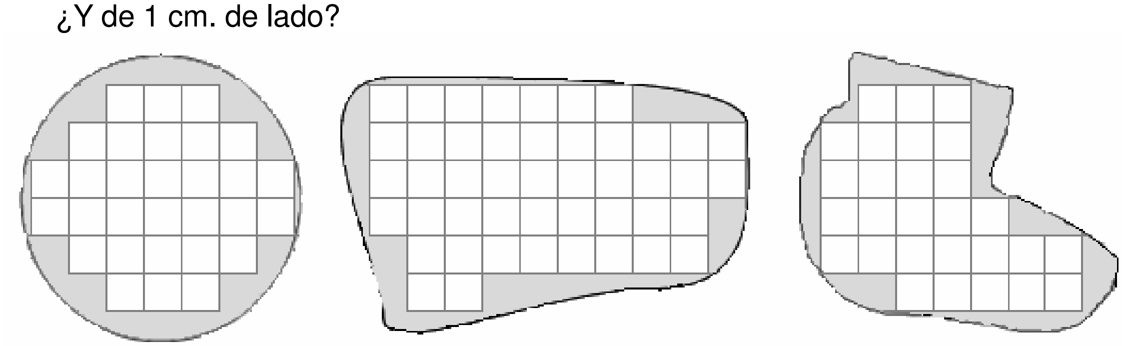
5. luego de recortar estime ¿Cuántos cuadrados de 4 cm. de lado caben dentro de cada figura?



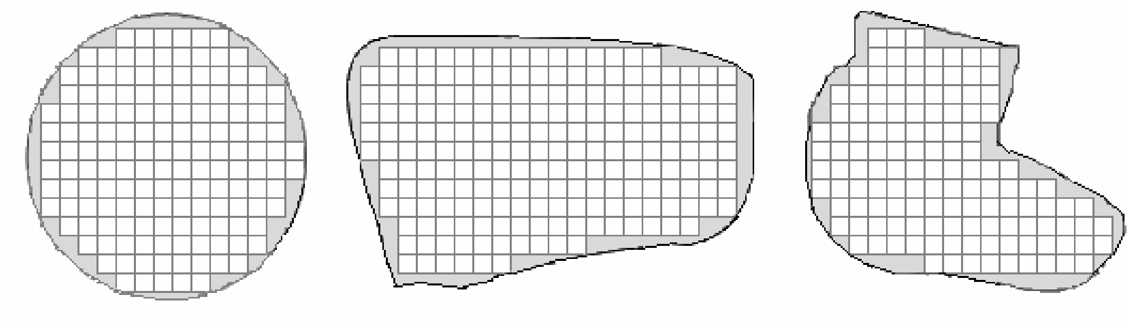
6. ¿Y de 2 cm. de lado?



¿Y de 1 cm. de lado?



¿Y de ½ cm. de lado?

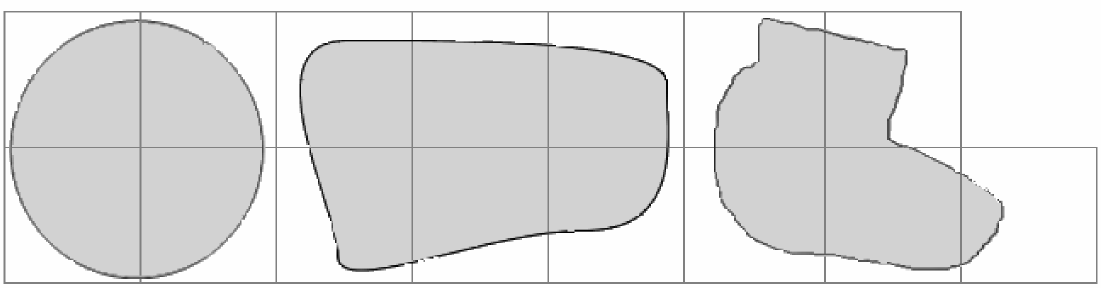


Los resultados varían dependiendo el tamaño de las figuras recortadas por cada estudiante.

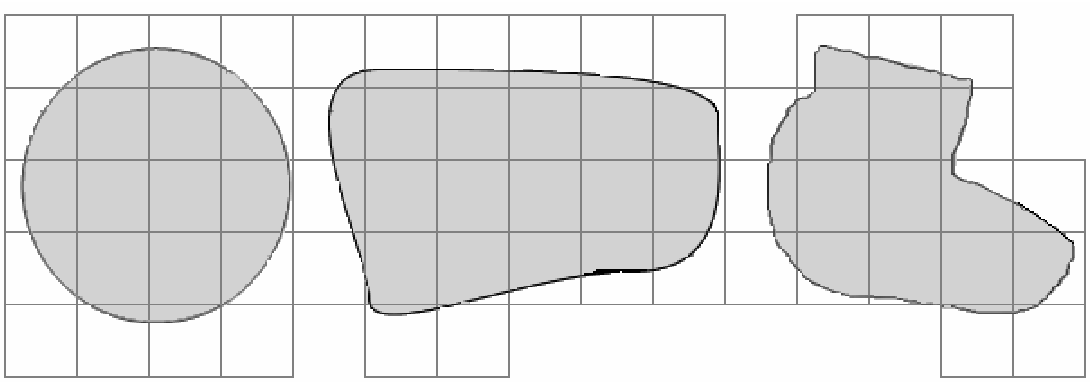
7. Exprese todos los resultados tomando como unidad el cuadrado de 4 cm. de lado.

8. ¿Qué ocurre con el área de las figuras cuando se disminuye la unidad de medida?

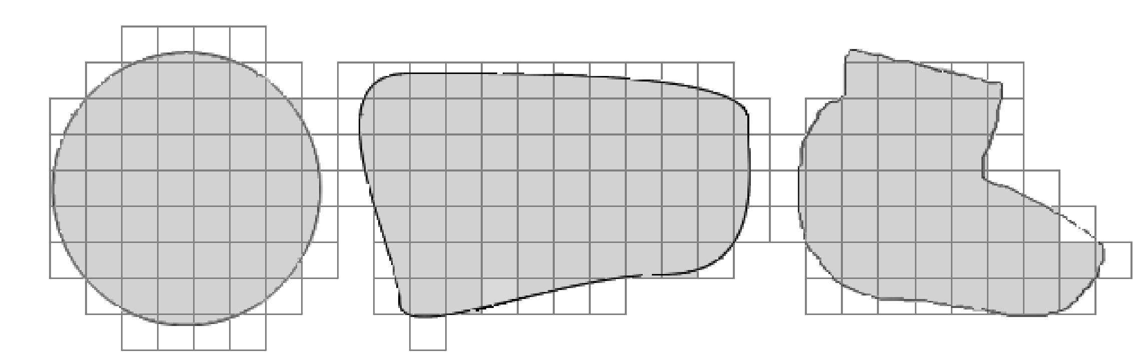
9. ¿Cuántos cuadrados de 4 cm. de lado se necesitan para cubrir totalmente cada una de las figuras?



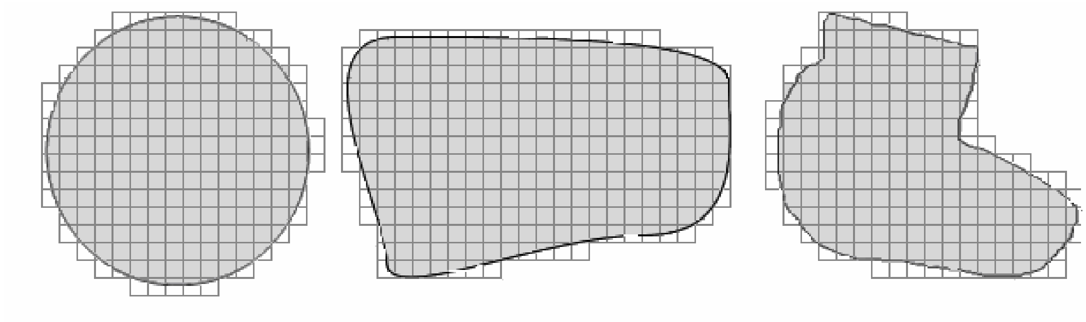
10. ¿Y de 2 cm. de lado?



¿Y de 1 cm. de lado?



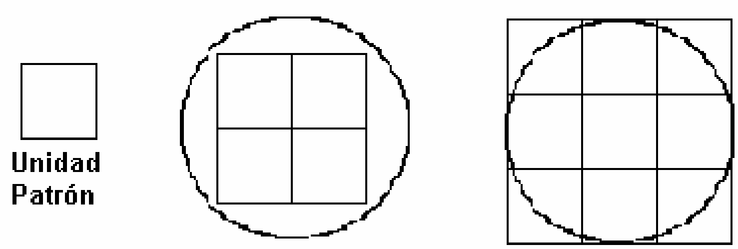
¿Y de ½ cm. de lado?



11. Exprese todos los resultados tomando como unidad el cuadrado de 4 cm. de lado.

12. ¿Qué ocurre con el área de las figuras cuando se disminuye la unidad de medida?

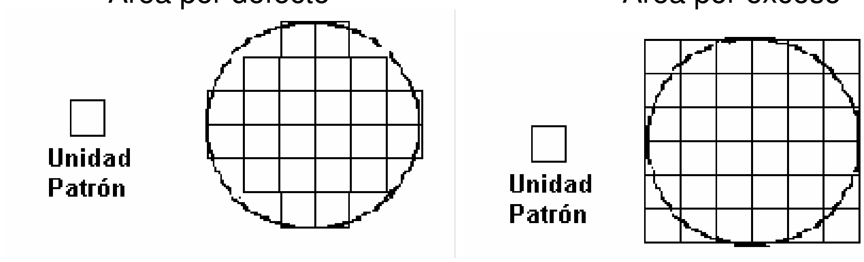
Algunas veces al resolver este tipo de ejercicios se presentan dificultades como el hecho de que la unidad patrón (cuadrado) no permita hallar un resultado exacto de la medida buscada; entonces se procede a realizar aproximaciones; como muestra el siguiente ejemplo, al intentar hallar el área del circulo con este método la medida encontrada o bien es mayor que la real o bien es menor que la real



Si se toma la aproximación que da la medida menor, existirá un defecto (falta algo para que sea el área real); por lo cual recibe el nombre de área por defecto; mientras que si se toma la medida mayor se encuentra un resultado en exceso (es más que la medida real), debido a esto recibe el nombre de área por exceso.

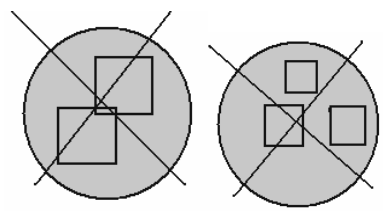
Pero estos resultados (áreas por defecto y por exceso) son demasiado inexactos, por esto se hace necesario tomar una unidad patrón más pequeña, que permita una mejor aproximación al área del círculo como se muestra a continuación, donde se tomó una unidad equivalente a ¼ de la unidad anterior.

Área por defecto　　　　　　Área por exceso



Y se observa que el área desperdiciada en el caso del área por defecto, ó el área de más en el caso del área por exceso es mucho menor que en el intento anterior; es decir el área encontrada esta expresada con mayor exactitud.

Es necesario aclarar que los cuadrados (unidades de medida) no deben ir montados, ni salirse del círculo (para el área por defecto) ó estar dentro de él (para el área por exceso)



13. Teniendo en cuenta que:

Área por defecto = Número de cuadrados que caben dentro de la figura y
Área por exceso = Número de cuadrados necesarios para cubrir totalmente la figura.

Indique el área por defecto y el área por exceso de cada una de las figuras, teniendo en cuenta las cuatro unidades patrón establecidas (4 cm., 2 cm., 1 cm., ½ cm.). Exprese los resultados utilizando el cuadrado de 4 cm. de lado.

Observe que a medida que se disminuye la unidad de medida, los resultados se acercan cada vez más al área del círculo (el área por defecto aumenta mientras que el área por exceso disminuye); por ejemplo para el círculo se tiene que:

Primera aproximación

Figura 1

Área menor que la real = 1 unidades
Área mayor que la real = 4 unidades

Figura 2

Área menor que la real = 2 unidades
Área mayor que la real = 6 unidades

Figura 3

Área menor que la real = 1 unidades
Área mayor que la real = 5 unidades

Luego el área del círculo se encuentra entre 4 unidades y 9 unidades.

Segunda aproximación

Figura 1

Área menor = 4 cuadrados de 2 cm. = 1 cuadrado de 4 cm. de lado.
Área mayor = 20 cuadrados de 2 cm. = 5 cuadrados de 4 cm. de lado.

Figura 2

Área menor que la real = 8 unidades = 2 cuadrados de 4 cm. de lado.
Área mayor que la real = 26 unidades= 7 cuadrados de 4 cm. de lado.

Figura 3

Área menor que la real = 4 unidades = 1 cuadrado de 4 cm. de lado.
Área mayor que la real = 19 unidades = 4.75 cuadrados de 4 cm. de lado.

Tercera aproximación

Figura 1

Área por defecto = 30 cuadrados de 1 cm. = 1.875 cuadrados de 4 cm. de lado.
Área por exceso = 60 cuadrados de 1 cm. = 3.75 cuadrados de 4 cm. de lado.

Figura 2

Área menor que la real = 46 unidades = 11.5 cuadrados de 4 cm. de lado.
Área mayor que la real = 80 unidades = 20 cuadrados de 4 cm. de lado.

Figura 3

Área menor que la real = 26 unidades 1.625 cuadrados de 4 cm. de lado.
Área mayor que la real = 54 unidades 3.375 cuadrados de 4 cm. de lado.

Cuarta aproximación

Figura 1

Área por defecto = 152 cuadrados de ½ cm. = 2.375 cuadrados de 4 cm. de lado
Área por exceso = 203 cuadrados de ½ cm. = 3.172 cuadrados de 4 cm. de lado

Figura 2

Área menor que la real = 204 unidades = 3.1875 cuadrados de 4 cm. de lado.
Área mayor que la real = 269 unidades = 4.203 cuadrados de 4 cm. de lado.

Figura 3

Área menor que la real = 132 unidades = 2.062 cuadrados de 4 cm. de lado.
Área mayor que la real = 190 unidades = 2.969 cuadrados de 4 cm. de lado.

Se podría sugerir al estudiante que ubique los resultados obtenidos según la tabla, por ejemplo, para el circulo se tiene

unidad	A^-	A^+	A^+-A^-
4	4	9	5
2	4	8	4
1	5	7.5	2.5
½	5.44	6.59	1.16

Y con base en esto responda:

-¿En qué valor disminuye el área por exceso A^+?

- ¿En qué valor aumenta el área por defecto A^-?

-¿Qué ocurre con la diferencia entre el área por defecto y el área por exceso $A^+ - A^-$ a medida que disminuye la unidad de medida?

-¿Qué indica esta diferencia?

Las dos últimas preguntas se sugieren con el fin de que el estudiante vaya relacionando que a medida que se disminuye la unidad de medida, el área por defecto tiende a ser igual al área por exceso.

Como actividad complementaria se debe repetir el procedimiento con el ovalo, con el fin de que el estudiante adquiera destreza en el manejo de áreas por defecto A^- y áreas por exceso A^+.

5.2.2. Segunda sesión

5.2.2.1. Contenidos matemáticos:

Tema: Áreas bajo la curva

- Relación entre distancia recorrida y área bajo la curva
- Área bajo la curva en funciones continuas
  - ✓ Funciones monótonas crecientes
  - ✓ Funciones monótonas decrecientes
  - ✓ Funciones seccionalmente monótonas
- Área bajo la curva en funciones discontinuas

5.2.2.2. Objetivo:

Que el estudiante asimile el concepto de área bajo la curva y adquiera destreza en el calculo de esta, teniendo en cuenta funciones continuas (constantes, crecientes, decrecientes y seccionalmente monótonas) y discontinuas mediante aproximaciones por exceso y por defecto.

5.2.2.3. Metodología:

Esta sesión se divide en tres partes: En la primera se propone una situación donde el estudiante con ayuda de applets del programa Descartes verifica que la distancia recorrida por un objeto que viaja con velocidad constante es igual al área bajo la curva descrita por la función V(t); Al igual que en la primera parte, en la segunda se muestra la manera de calcular el área bajo la curva en funciones continuas (crecientes, decrecientes y seccionalmente monótonas); a partir de situaciones relacionadas con el movimiento de objetos que no viajan con velocidad constante. Este proceso se realiza mediante aproximaciones por defecto y por exceso. Para las funciones seccionalmente monótonas, se aclara que no siempre se toman los extremos del intervalo para calcular la altura de cada rectángulo; por el contrario, se toma como altura el valor mínimo de la función en cada uno de los intervalos para aproximaciones por defecto y el valor máximo de la función para aproximaciones por exceso sin importar en que lugar del intervalo se ubique.

En la tercera parte se presentan las funciones discontinuas y el proceso que se sigue para calcular el área bajo la curva en este tipo de funciones, aclarando que el intervalo [a, b] en el cual está definida la función, no siempre se divide en partes iguales.

El trabajo de esta sesión esta mediado por el concepto de distancia recorrida y se maneja con ayuda de applets del programa Descartes.

5.2.2.4. Descripción:

5.2.2.4.1. Relación entre distancia recorrida y área bajo la curva

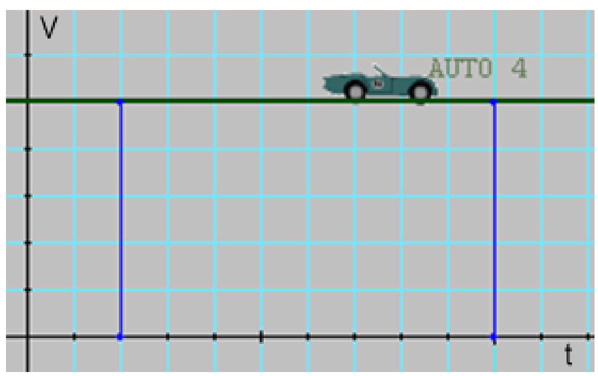
Al observar la grafica de un movimiento con velocidad constante es posible notar que el producto x = v*t (distancia recorrida) equivale al área del rectángulo cuyos lados están representados por la velocidad del objeto, y el tiempo que tarda en realizar el movimiento; en este caso, la base del rectángulo es el tiempo y la altura es la velocidad.

Ejemplo:

Un auto se mueve con velocidad constante de 30 Km./h durante un periodo comprendido entre las diez de la mañana y las tres de la tarde (las quince horas) ¿Qué distancia recorrió el auto en este intervalo de tiempo?
Se tiene que:

$$V(t) = 30 \text{ Km./h} \quad [10,15]$$

Es la función que describe la velocidad del auto con respecto al tiempo. Al dibujar la grafica de esta función, se encuentra:



Como el auto viaja con velocidad constante, es posible aplicar la ecuación X = V*t para encontrar la distancia recorrida por el auto en este intervalo de tiempo:

$$t = 15 – 10 \text{ horas}$$
$$x = v * t = 30 * 5 = 150 \text{ Km.}$$

Área del rectángulo = base*altura = velocidad * tiempo
Área del rectángulo = distancia recorrida,

Situación 1

Una motocicleta, viaja con velocidad constante de 30 m/s. durante un periodo de 25 segundos.

1. Aplicando la definición de movimiento uniforme, calcule la distancia recorrida por la motocicleta en los intervalos.

- **a.** El segundo 3 y el 8
- **b.** El segundo 4 y el 20
- **c.** Todo el recorrido.

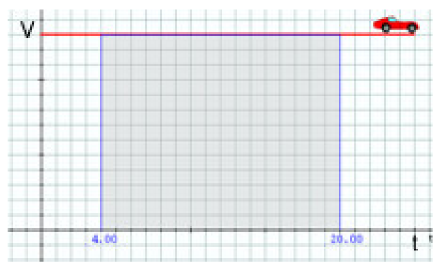
Como la velocidad de la motocicleta es constante en cada uno de los intervalos, es posible aplicar la ecuación X = V*t para realizar los cálculos correspondientes.

a. X = V*t = 30 *(8-3) = 30*5 = 150 metros

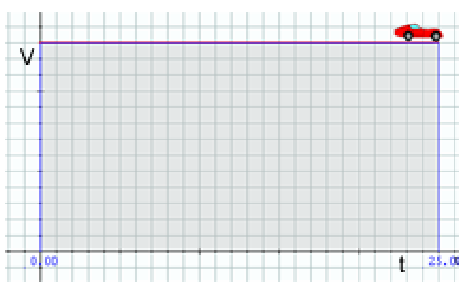
b. X = V*t = 30 *(20-4) = 30*16 = 480 metros

c. X = V*t = 30 *(25-0) = 30*25 = 750 metros

2. Dibuje la gráfica de la función f(x) = 30 en cada uno de los intervalos:
a. Entre el segundo 3 y el 8 b. Entre el segundo 4 y el 20

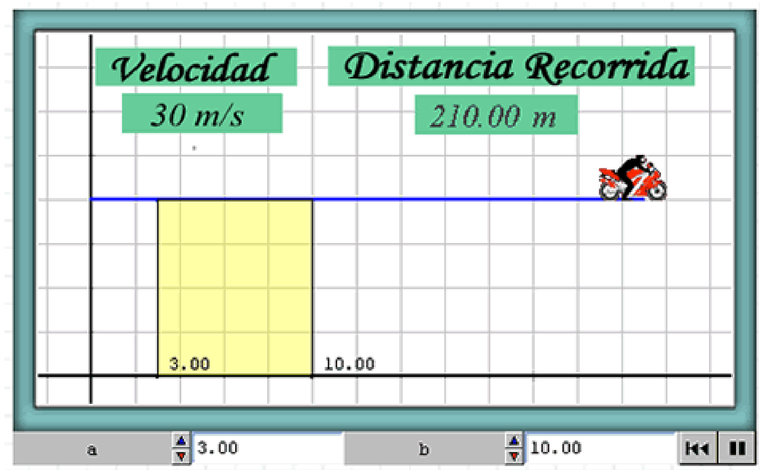


c. durante todo el recorrido



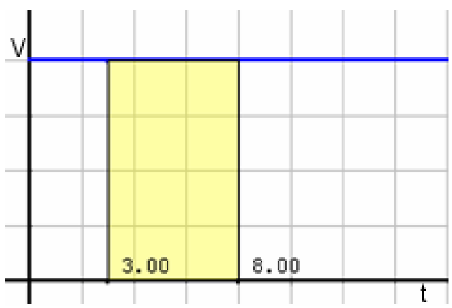
Con ayuda del applet se puede mostrar al estudiante que en la gráfica de la función $V_{vs}t$ se muestra un rectángulo cuya base es el intervalo de tiempo que dura el movimiento y cuya altura es la velocidad que lleva el objeto:

3. En el siguiente Applet se muestra la gráfica de la función $V_{vs}t$ que describe el movimiento.

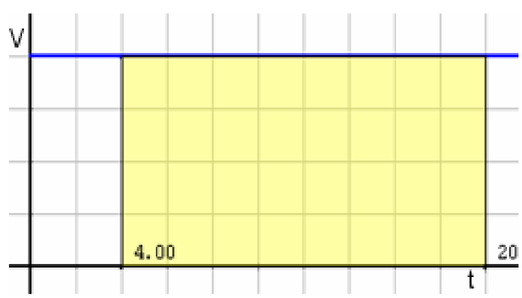


La gráfica muestra un rectángulo de base igual al intervalo de tiempo que dura el movimiento y cuya altura es la velocidad que lleva el objeto:

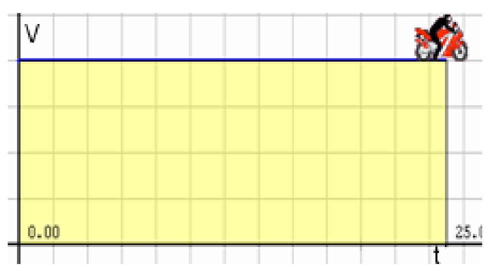
a. Entre 3 y 8 segundos



b. Entre 4 y 20 segundos



d. durante todo el recorrido



4. Calcule el área del rectángulo para cada intervalo, teniendo en cuenta que el área de un rectángulo es igual a la base multiplicada por su altura (A= base * altura).

a. Entre el segundo 3 y el 8

X = V*t = 30 * 5 = 150 metros
A = V*t = 30 * 5 = 150 metros
X = A = v*t = 30 *5 = 150 metros

b. Entre el segundo 4 y el 20

$$X = V*t = 30 * 16 = 480 \text{ metros}$$
$$A = V*t = 30 * 16 = 480 \text{ metros}$$
$$X = A = v*t = 30 *16 = 480 \text{ metros}$$

c. Durante todo el recorrido

$$X = V*t = 30 * 25 = 750 \text{ metros}$$
$$A = V*t = 30 * 25 = 750 \text{ metros}$$
$$X = A = v*t = 30 *25 = 750 \text{ metros}$$

5. Compare los resultados obtenidos con los que obtuvo al calcular la distancia recorrida, ¿Qué encuentra?

Al calcular el área de cada rectángulo (A= base * altura) se encuentra que:

$$A = \text{base} * \text{altura}$$
$$A = \text{tiempo} * \text{velocidad}$$

Que es la definición de distancia recorrida presentada en el movimiento uniforme.

Observando los cálculos que presenta el applet y comparándolos con los realizados anteriormente se llega a la conclusión de que el área bajo la curva descrita por la función V(t) descrita por un objeto en movimiento, es igual a la distancia recorrida por el objeto

Área del rectángulo = base*altura = velocidad * tiempo
Área del rectángulo = distancia recorrida,

Nota: Aún cuando el móvil no viaje con velocidad constante, la distancia recorrida equivale al área bajo la curva $V_{vs}\ t$; es decir al área de la región comprendida entre la función que representa la variación de la velocidad con respecto al tiempo, el tiempo empleado en el recorrido y el eje x.

5.2.2.4.2. Área bajo la curva en funciones continuas

Para calcular el área bajo la curva (distancia recorrida) en funciones donde f(x) (la velocidad) no es constante (funciones crecientes, decrecientes, seccionalmente monótonas, etc.), es preciso recurrir a aproximaciones de ella, ya sean por exceso ó por defecto:

5.2.2.4.2.1 Funciones crecientes

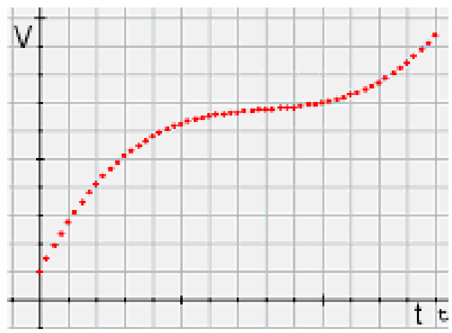
Situación 2

La velocidad de vuelo de una abeja que parte de su panal en busca de néctar viene dada por la ecuación:

$$V(t) = 0.01(t^3 - 24\,t^2 + 200t + 100).$$

La abeja vuela sin detenerse durante 14 segundos en busca de su objetivo.

La gráfica que describe la función V(t) es:



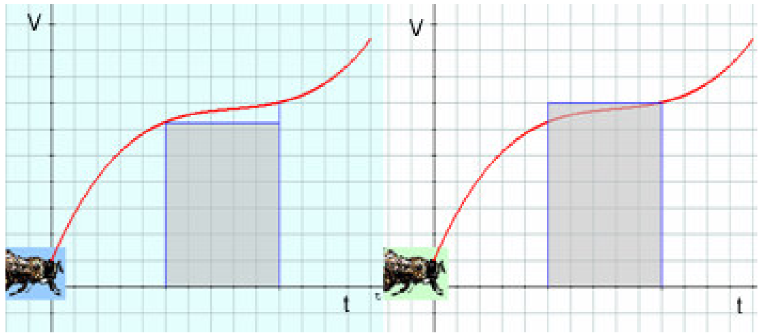
Que es la gráfica de una función creciente definida en el intervalo [0, 14].

El procedimiento a seguir para calcular el área bajo la curva (distancia recorrida) consiste en dividir el intervalo de tiempo en n partes (en este caso lo vamos a dividir en partes iguales), y sobre cada uno de ellos levantar rectángulos cuya altura sea igual al valor mínimo de la velocidad en el intervalo para aproximaciones por defecto y el máximo para aproximaciones por defecto; se calcula el área de cada rectángulo y se suman los resultados; por ejemplo para calcular la distancia recorrida por la abeja entre el segundo 5 y 10 se tiene:

Vamos a llamar Δt al tiempo de cada subintervalo.

Para n = 1 subintervalo

$t_0 = 5$, $t_1 = 10$



$$V(t_0) = (5^3 - 24 * 5^2 + 200 * 5 + 100) = 6.25$$
$$V(t_1) = (10^3 - 24 * 10^2 + 200 * 10 + 100) = 7$$

De ahí que la velocidad mínima del intervalo es 6.25 m /s y la máxima es 35 m / s.

Por lo tanto, se puede concluir que si se divide el tiempo inicial en un subintervalo:

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	5	6.25	31.25	7	35
Área acumulada	///	///	31.25	///	35

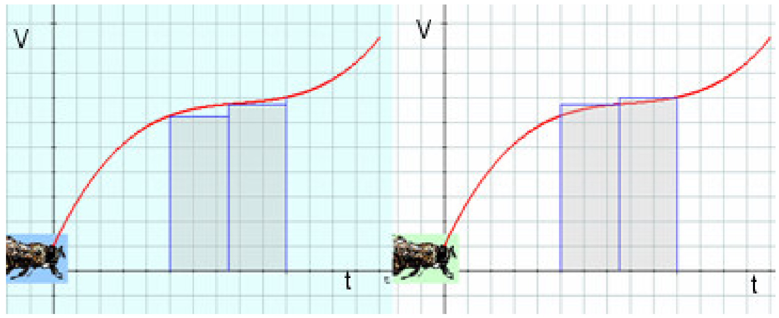
$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$31.35 < \text{Área real} < 35.00$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 35.00 - 31.25 = 3.75$$

Ahora, si se divide el intervalo de tiempo inicial [5, 10] en dos subintervalos se encuentra que:

$t_0 = 5$, $t_1 = 7.5$ y $t_2 = 10$

De ahí que:

$$V(t_0) = (5^3 - 24 * 5^2 + 200 * 5 + 100) = 6.25$$
$$V(t_1) = (7.5^3 - 24 * 7.5^2 + 200 * 7.5 + 100) = 6.72$$
$$V(t_2) = (10^3 - 24 * 10^2 + 200 * 10 + 100) = 7.00$$



Las velocidades mínima y máxima de cada subintervalo sean:

Velocidad mínima		Velocidad máxima	
Subintervalo 1	6.25 m/s	Subintervalo 1	6.72 m/s
Subintervalo 2	6.72 m/s	Subintervalo 2	7.00 m/s

Por lo tanto:

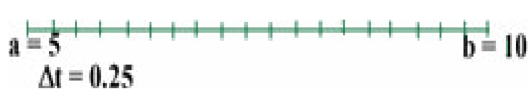
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	2.5	6.25	15.63	6.72	16.80
2	2.5	6.72	16.80	7	17.5
Área acumulada	///	///	32.42	///	34.3

Luego, se puede concluir que si se divide el tiempo inicial en dos subintervalos:

$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$32.42 < \text{Área real} < 34.3$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 34.30 - 32.42 = 1.88$$

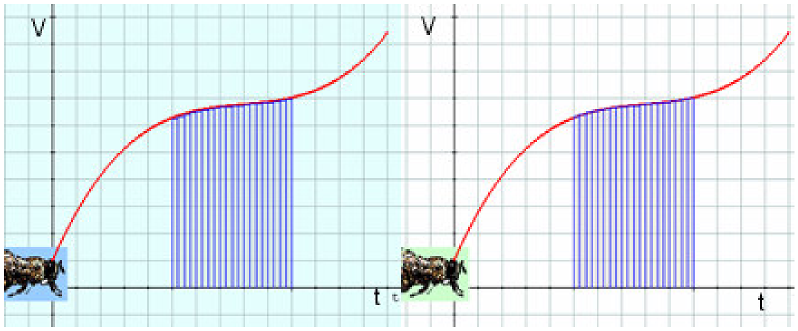
Observe que mientras el área por defecto aumenta de 31.25 a 32.42, el área por exceso disminuye de 35 a 34.3 cuando se aumenta de uno a dos el número de subintervalos en que se divide el intervalo inicial [5, 10].

Ahora, si se divide el intervalo de tiempo inicial [5,10] no en dos, sino en 20 subintervalos se encuentra que:



$t_0 = 5$	$t_5 = 6.25$	$t_{10} = 7.50$	$t_{15} = 8.75$	$t_{20} = 10.00$
$t_1 = 5.25$	$t_6 = 6.50$	$t_{11} = 7.75$	$t_{16} = 9.00$	
$t_2 = 5.50$	$t_7 = 6.75$	$t_{12} = 8.00$	$t_{17} = 9.25$	
$t_3 = 5.75$	$t_8 = 7.00$	$t_{13} = 8.25$	$t_{18} = 9.50$	

$t_4 = 6.00$ $t_9 = 7.25$ $t_{14} = 8.50$ $t_{19} = 9.75$



Haciendo los cálculos necesarios (calculando la velocidad que lleva la abeja en cada uno de los puntos y el área de cada uno de los rectángulos) se encuentra que:

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	0.25	6.25	1.56	6.33	1.58
2	0.25	6.33	1.58	6.40	1.60
3	0.25	6.40	1.60	6.47	1.62
4	0.25	6.47	1.62	6.52	1.63
5	0.25	6.52	1.63	6.57	1.64
6	0.25	6.57	1.64	6.61	1.65
7	0.25	6.61	1.65	6.64	1.66
8	0.25	6.64	1.66	6.67	1.67
9	0.25	6.67	1.67	6.70	1.67
10	0.25	6.70	1.67	6.72	1.68
11	0.25	6.72	1.68	6.74	1.68
12	0.25	6.74	1.68	6.76	1.69
13	0.25	6.76	1.69	6.78	1.70
14	0.25	6.78	1.70	6.80	1.70
15	0.25	6.80	1.70	6.82	1.71
16	0.25	6.82	1.71	6.85	1.71
17	0.25	6.85	1.71	6.88	1.72
18	0.25	6.88	1.72	6.91	1.73
19	0.25	6.91	1.73	6.95	1.74
20	0.25	6.95	1.74	7	1.75
Área acumulada	///	///	33.34	///	33.53

$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$33.34 < \text{Área real} < 33.53$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 33.53 - 33.34 = 0.19$$

Observe como al aumentar el número de intervalos de 1 a 20 la diferencia entre el área por defecto y el área por exceso se reduce en 3 unidades.

$$\text{Para 1 intervalo} \quad \overline{S} - \underline{S} = 35.00 - 31.25 = 3.75$$
$$\text{Para 20 intervalos} \quad \overline{S} - \underline{S} = 33.53 - 33.34 = 0.19$$

Esto indica que el valor encontrado está más cerca al valor real.

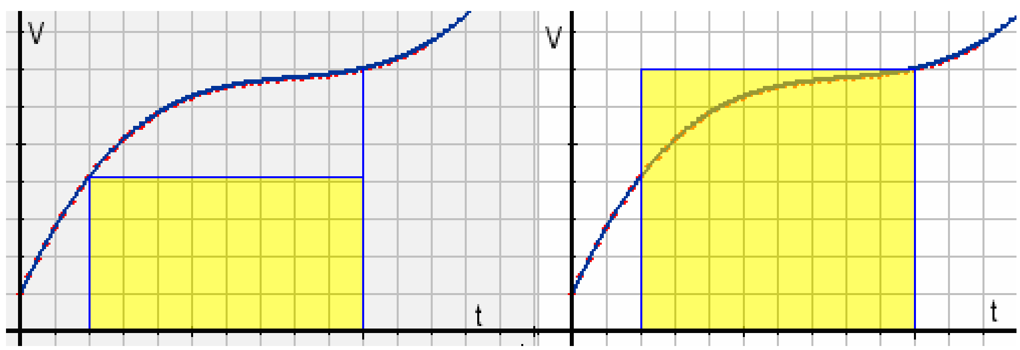
Calcule la distancia recorrida por la abeja entre:

a. El segundo 2 y el 10.
b. El segundo 0 y el 14 (todo el recorrido)

Tenga en cuenta para ello n= 1, 2, 3 y 4 subintervalos.

a. entre el segundo 2 y el 10.

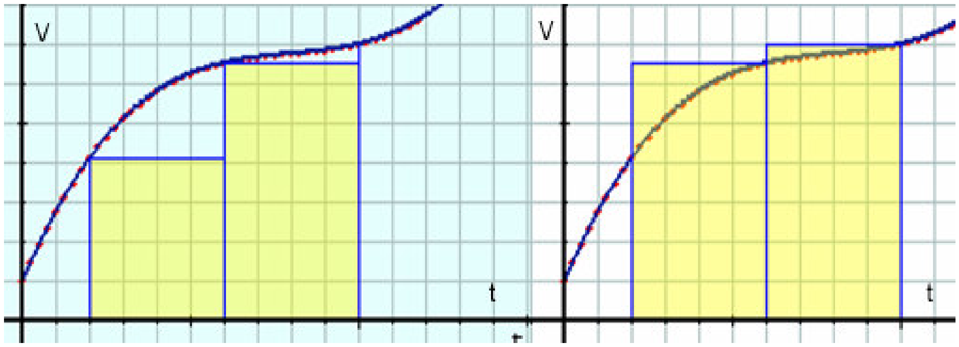
Para n = 1



$\Delta t = 8$

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	8	4.12	32.96	7	56
Área acumulada	///	///	32.96	///	56

Para n = 2



Δt = 4

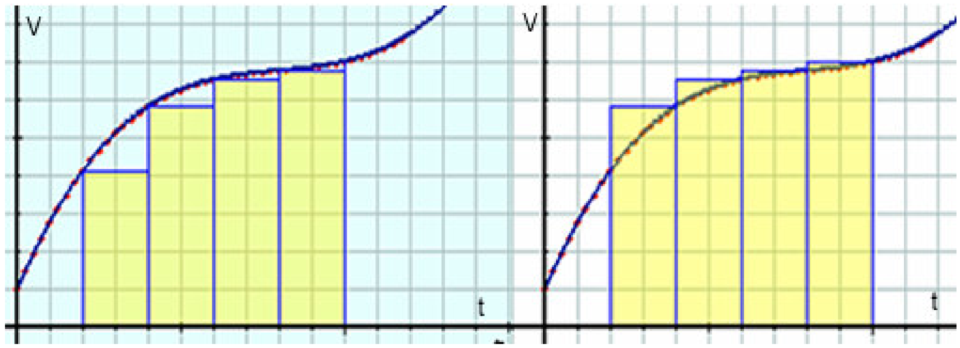
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	4	4.12	16.48	6.52	16.48
2	4	6.52	26.08	7	28
Área acumulada	///	///	42.56	///	44.48

Para n = 3

Δt = 2.67

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	2.67	4.12	11.00	6.63	17.70
2	2.67	6.63	17.70	6.89	18.40
3	2.67	6.89	18.40	7.00	18.69
Área acumulada	///	///	47.10	///	54.77

Para n = 4

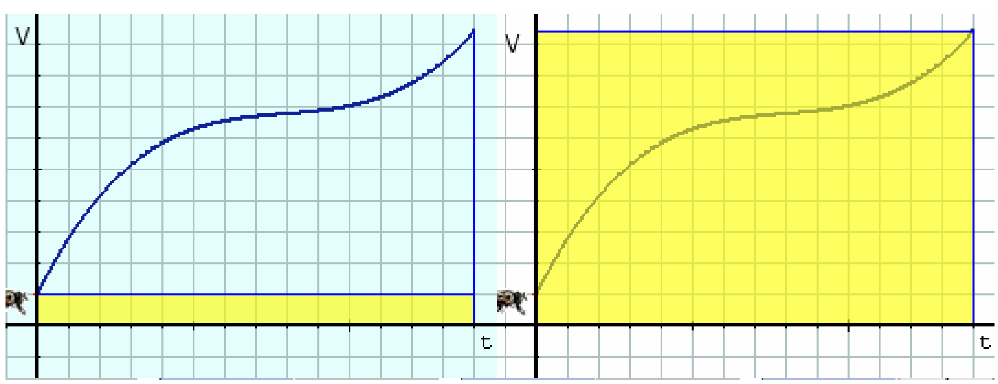


$\Delta t = 2$

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	2	4.12	8.24	5.8	11.60
2	2	5.8	11.60	6.52	13.04
3	2	6.52	13.04	6.76	13.52
4	2	6.76	13.52	7.00	14.00
Área acumulada	///	///	46.40	///	52.16

b. Durante todo el recorrido

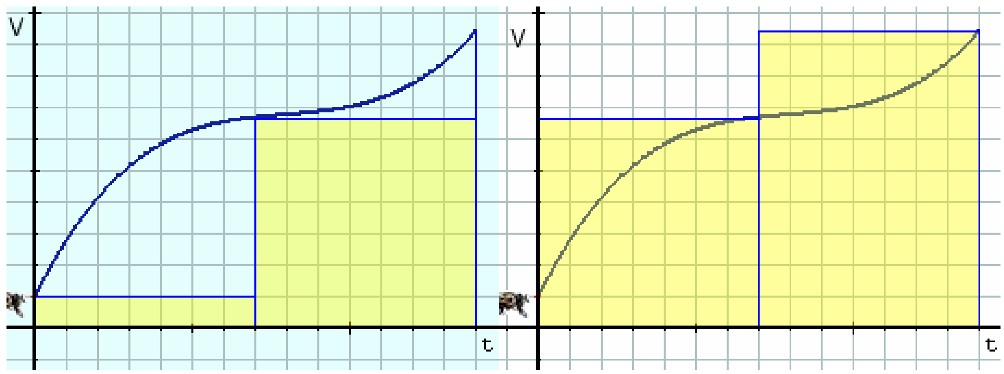
Para n= 1



$\Delta t = 14$

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	14	1	14	9.4	131.6
Área acumulada	///	///	14	///	131.6

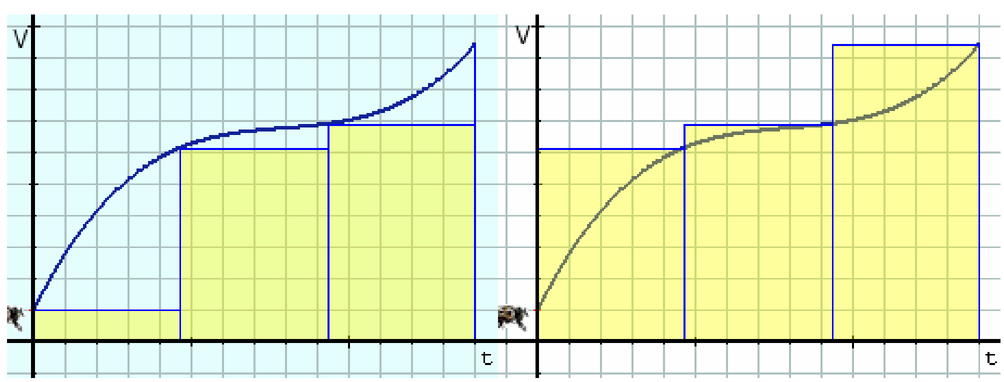
Para n= 2



$\Delta t = 7$

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	7	1	7	6.67	46.69
2	7	6.67	46.69	9.4	65.8
Área acumulada	///	///	53.69	///	112.49

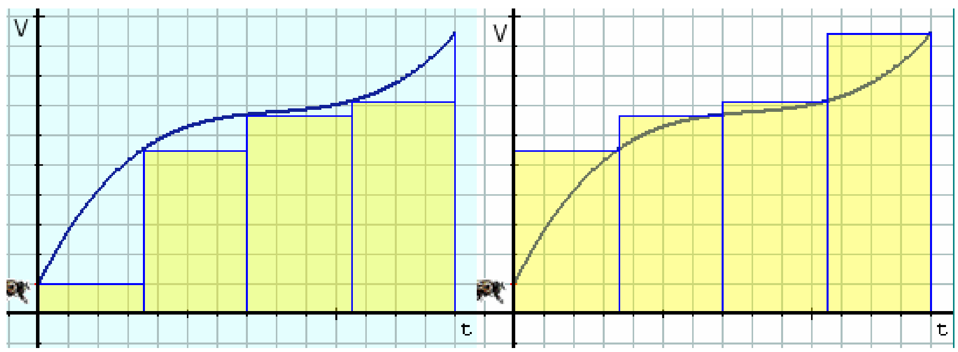
Para n= 3



$\Delta t = 4.67$

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	4.67	1	4.67	6.12	28.57
2	4.67	6.12	28.57	6.89	32.16
3	4.67	6.89	32.16	9.4	43.87
Área acumulada	///	///	65.4	///	104.6

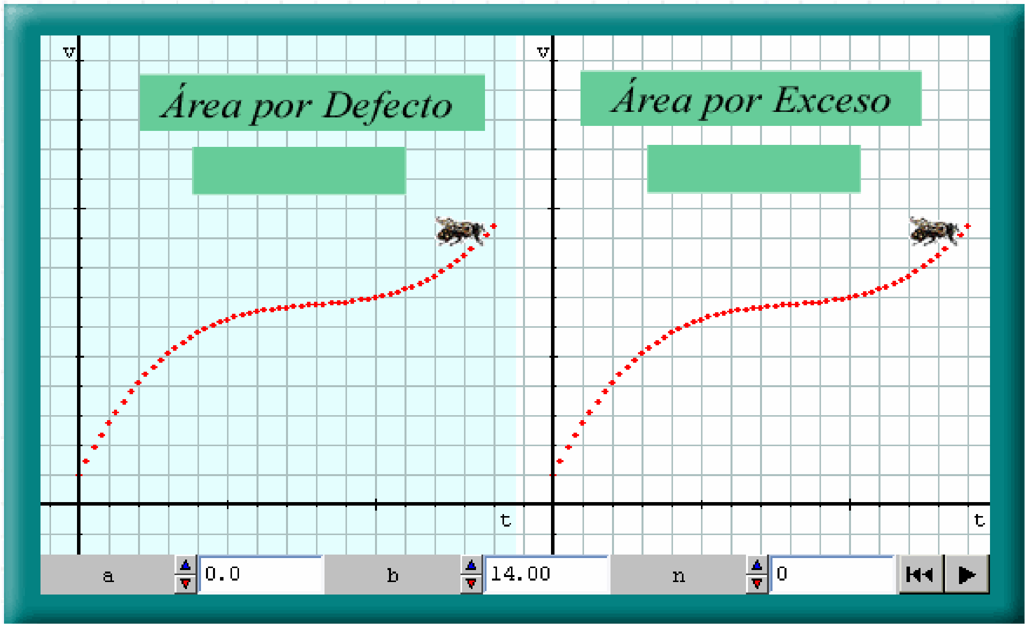
Para n= 4



$\Delta t = 3.5$

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	3.5	1	3.5	5.49	19.21
2	3.5	5.49	19.21	6.67	23.34
3	3.5	6.67	23.34	7.12	24.91
4	3.5	7.12	24.91	9.4	32.9
Área acumulada	///	///	70.96	///	100.36

Con ayuda del Applet:



1. Verifique que sus resultados sean correctos.

2. Teniendo en cuenta 20, 50, 100, 200 y 500 subintervalos, encuentre el área por defecto y por exceso. Halle la diferencia entre las dos y compare los resultados encontrados para cada intervalo.

a. entre 2 y 10 segundos

Número de Subintervalos n	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$	Diferencia $\overline{S}-\underline{S}$
20	49.011	50.163	1.152
50	49.368	49.828	0.460
100	49.484	49.715	0.231
200	49.542	49.657	0.115
500	49.577	49.623	0.046

b. Todo el recorrido

Número de Subintervalos n	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$	Diferencia $\overline{S}-\underline{S}$
20	83.546	89.426	5.880
50	85.339	87.691	2.352
100	85.931	87.107	1.169
200	86.226	86.814	0.588
500	86.402	86.638	0.236

¿Qué ocurre con el área por defecto cuando se aumenta el número de subintervalos en que se divide el tiempo inicial?

Se puede observar que el valor del área por defecto disminuye.

¿Y qué ocurre con el área por exceso?

Se puede observar que el valor del área por exceso aumenta

¿Y qué ocurre con el valor de la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto?

Se hace cada vez más pequeña.

Observe como al aumentar el número de intervalos de1 a 500 la diferencia entre el área por defecto y el área por exceso se reduce en más de 100 unidades.

Para 1 intervalo $\overline{S} - \underline{S} = 131.6 – 14 = 117.6$

Para 20 intervalos $\overline{S} - \underline{S} = 86.638 – 86.402 = 0.236$

5.2.2.4.2.2. Funciones decrecientes

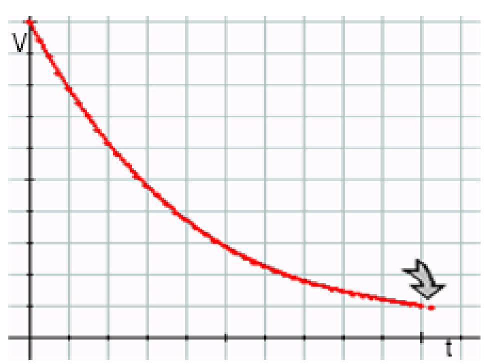
A continuación se presenta el proceso a seguir para encontrar el área bajo la curva en funciones monótonas decrecientes y seccionalmente monótonas, utilizando aproximaciones por defecto y por exceso.

Situación 3

Un auto viene con una velocidad de 36 Km./h (10 m/s); el conductor ve una persona que atraviesa la calle e inmediatamente aplica los frenos. Su velocidad disminuye hasta 3.6 Km./h (1 m/s) en un tiempo de 10 segundos. La ecuación que describe el cambio de velocidad del auto es:

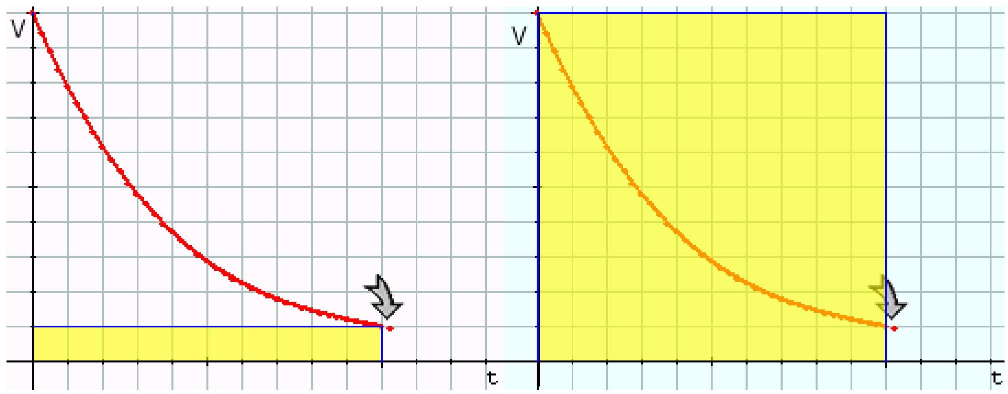
$$V(t) = -0.007\, t^3 + 0.21\, t^2 - 2.3\, t + 10$$

Dibujando la grafica V_{vs} t se obtiene:



Donde se ve claramente que la velocidad del auto disminuye a medida que aumenta el tiempo.

Tomando n = 1 subintervalo, se tiene:



Δt = 10 segundos
Velocidad mínima = V(10)=1 m/s
Velocidad máxima = V(0)= 10 m/s

Área por defecto $\underline{S}$ = 1*10 = 10 m.
Área por exceso $\overline{S}$ = 10*10 = 100 m.

$\overline{S} - \underline{S}$ = 100 – 10 = 90 m.

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	10	1	10	10	100
Área acumulada	///	///	10	///	100

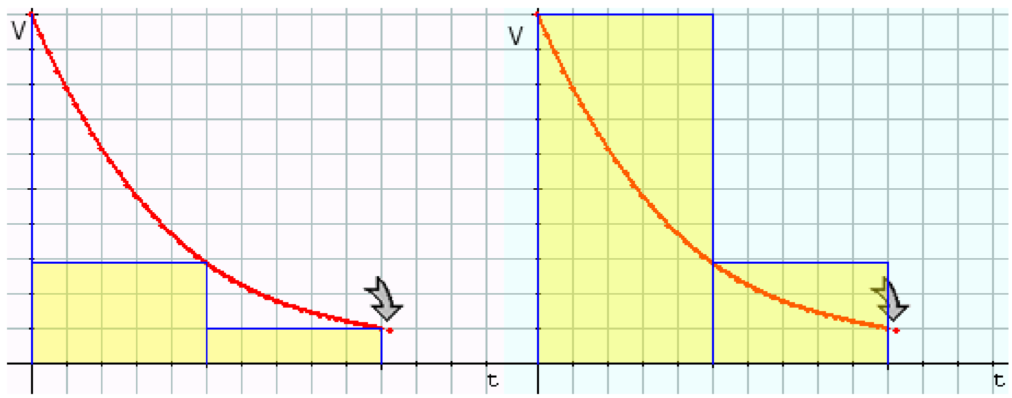
$\underline{S}$ < Área real < $\overline{S}$
10 < Área real < 100
$\overline{S} - \underline{S}$ = 100 – 10 = 90

Observe que en este caso, el valor de la velocidad mínima coincide con el valor de la función para el extremo izquierdo del intervalo, mientras que la velocidad máxima coincide con el valor de la función para el extremo derecho del intervalo; contrario a lo que ocurre en las funciones crecientes.

Se debe aclarar que estas aproximaciones, se supone que el objeto viaja con velocidad constante durante todo el subintervalo: La velocidad mínima de cada subintervalo para aproximaciones por defecto y la máxima para aproximaciones por exceso.

Para n = 2 se tiene

t_0=a t_1=a+Δt t_2=b



$\Delta t = \dfrac{10}{2}$ Segundos= 5 segundos

$t_0 = 0$, $t_1 = 5$, $t_2 = 10$

$$V(t_0) = -0.007 * 0^3 + 0.21 * 0^2 - 2.3 * 0 + 10 = 10$$
$$V(t_1) = -0.007 * 5^3 + 0.21 * 5^2 - 2.3 * 5 + 10 = 2.88$$
$$V(t_2) = -0.007 * 10^3 + 0.21 * 10^2 - 2.3 * 10 + 10 = 1$$

Velocidad mínima	Velocidad máxima
Intervalo 1 = $V(t_1)$ =2.88	Intervalo 1 = $V(t_0)$ = 10
Intervalo 2 = $V(t_2)$ = 1	Intervalo 2 = $V(t_1)$ = 2.88

Área por defecto $\underline{S} = \Delta t * V(t_1) + \Delta t * V(t_2)$

$= \Delta t \; (V(t_1) + V(t_2))$

$=$ 5*(2.88 + 1) = 19.375 m.

Área por exceso $\overline{S} = \Delta t * V(t_0) + \Delta t * V(t_1)$

$= \Delta t \; (V(t_0) + V(t_1))$

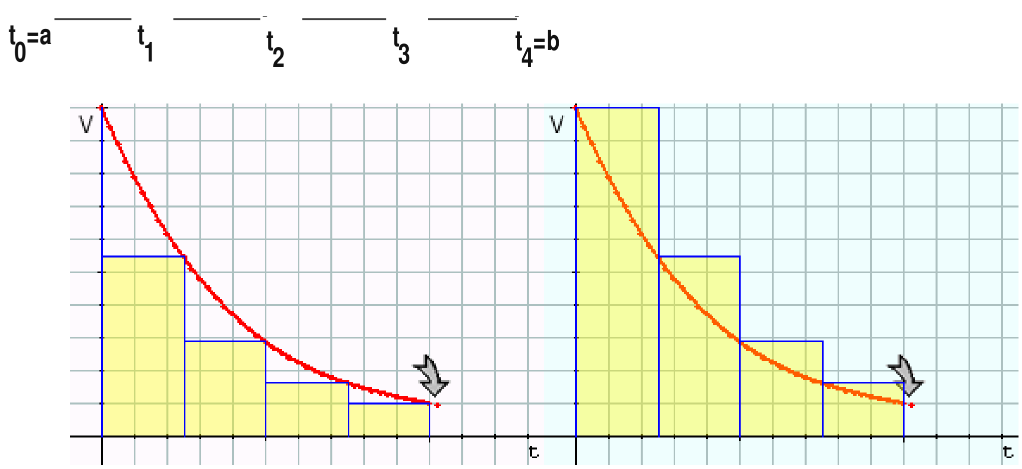
$=$ 5*(10 + 2.88) = 64.375 m.

$\overline{S} - \underline{S}$ = 64.375 – 19.375 = 45.0 m.

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	5	2.88	14.375	2.88	14.375
2	5	1	5	10	50
Área acumulada	- - -	- - -	19.375	- - -	64.375

$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$19.375 < \text{Área real} < 64.375$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 64.375 - 19.375 = 45.0$$

Para n=4 se tiene



$\Delta t = \dfrac{10}{4}$ Segundos= 2.5 segundos

$t_0 = 0$, $t_1 = 2.5$, $t_2 = 5$, $t_3 = 7.5$, $t_4 = 10$

$$V(t_0) = -0.007 * 0^3 + 0.21 * 0^2 - 2.3 * 0 + 10 = 10$$
$$V(t_1) = -0.007 * 2.5^3 + 0.21 * 2.5^2 - 2.3 * 2.5 + 10 = 5.45$$
$$V(t_2) = -0.007 * 5^3 + 0.21 * 5^2 - 2.3 * 5 + 10 = 2.875$$
$$V(t_3) = -0.007 * 7.5^3 + 0.21 * 7.5^2 - 2.3 * 7.5 + 10 = 1.6$$
$$V(t_4) = -0.007 * 10^3 + 0.21 * 10^2 - 2.3 * 10 + 10 = 1$$

Velocidad mínima

Intervalo 1 = $V(t_1)$ = 5.45
Intervalo 2 = $V(t_2)$ = 2.875

Velocidad máxima

Intervalo 1 = $V(t_0)$ = 10
Intervalo 2 = $V(t_1)$ = 5.45

Intervalo 3 = $V(t_3)$ =1.6 Intervalo 3 = $V(t_2)$ = 2.875

Intervalo 4 = $V(t_4)$ =1 Intervalo 4 = $V(t_3)$ =1.6

Área por defecto $\underline{S} = \Delta t * V(t_1) + \Delta t * V(t_2) + \Delta t * V(t_3) + \Delta t * V(t_4)$

$= \Delta t \; (V(t_1) + V(t_2) + V(t_3) + V(t_4))$

$= 2.5*(5.45 + 2.875 + 1.6 + 1) = 28.03$ m.

Área por exceso $\overline{S} = \Delta t * V(t_0) + \Delta t * V(t_1) + \Delta t * V(t_2) + \Delta t * V(t_3)$

$= \Delta t \; (V(t_0) + V(t_1) + V(t_2) + V(t_3))$

$= 2.5*(10 + 5.45 + 2.875 + 1.6) = 50.53$ m.

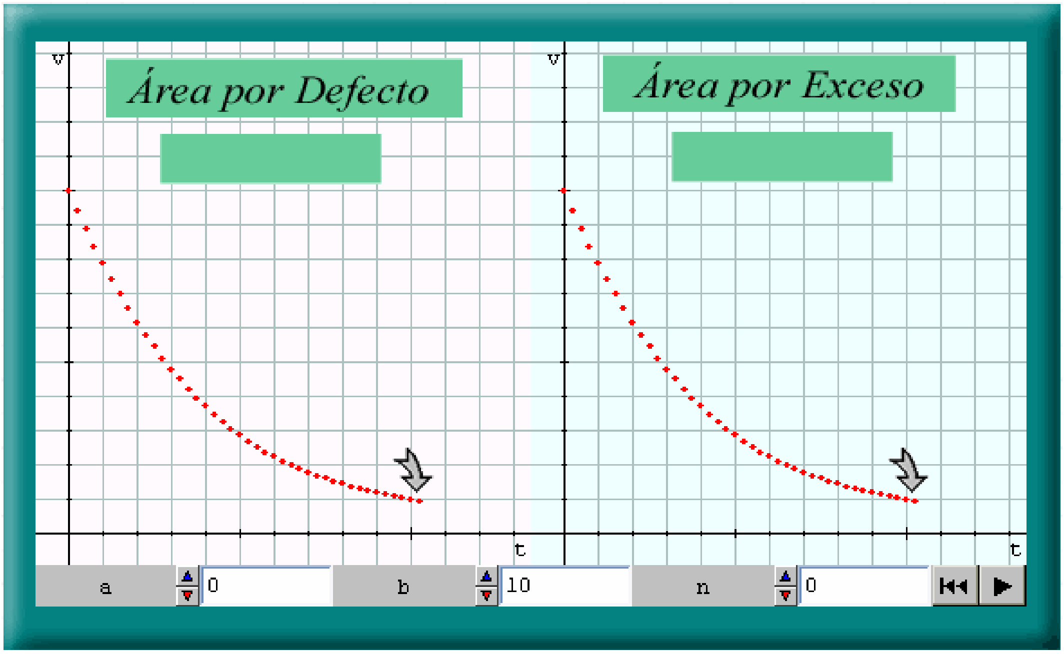
$\overline{S} - \underline{S} = 50.53 - 28.03 = 22.5$ m.

intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	2.5	5.45	13.633	10	25
2	2.5	2.875	7.188	5.45	13.633
3	2.5	1.6	4.020	2.875	7.188
4	2.5	1	2.500	1.6	4.020
Área acumulada	///	///	28.03	///	50.53

$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$28.03 < \text{Área real} < 50.53$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 50.53 - 28.03 = 22.5$$

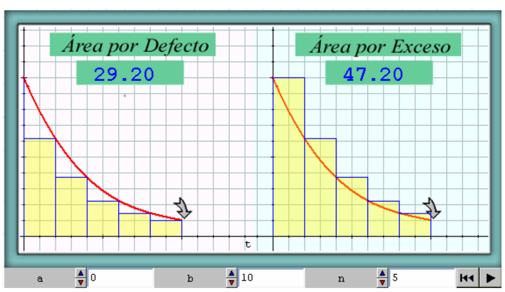
Si este procedimiento continua, la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto se hará cada vez más pequeña (su valor tiende a ser cero); lo cual indica que exceso tienden a ser iguales.

Con ayuda del siguiente Applet calcule la distancia (Área bajo la curva) que recorrió el automóvil durante los 10 segundos que duró el recorrido.

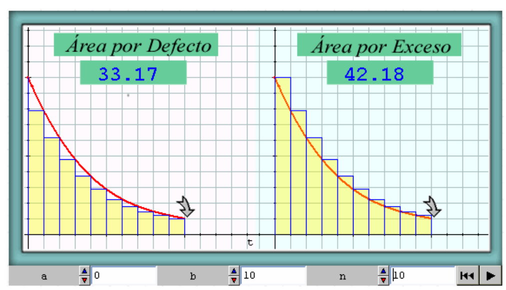


Utilice aproximaciones por defecto y por exceso tomando n = 5, 10, 20, 100, 200 y 300 subintervalos.

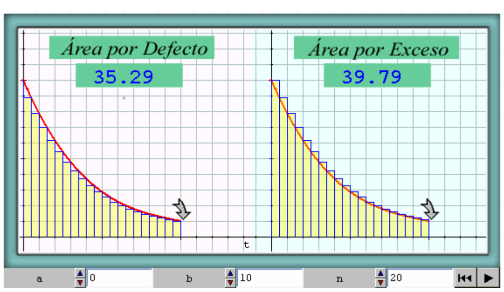
Para n = 5 se tiene que:



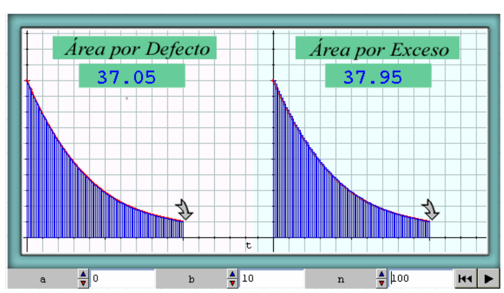
Para n = 10 se tiene que:



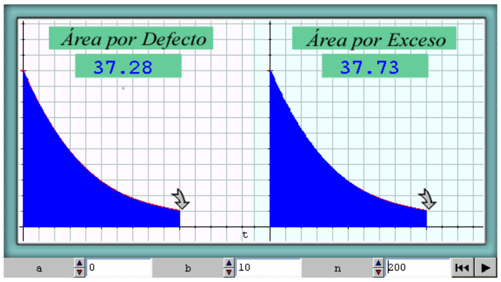
Para n = 20 se tiene que:



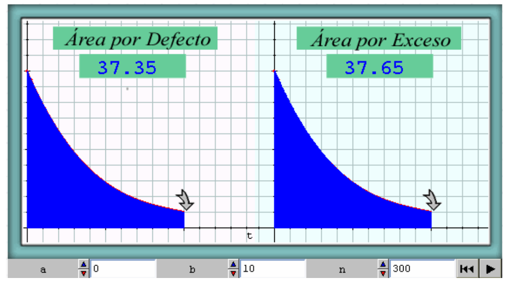
Para n = 100 se tiene que:



Para n = 200 se tiene que:



Para n = 300 se tiene que:



Número de Subintervalos n	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$	Diferencia $\overline{S}-\underline{S}$
5	29.20	47.20	18.0
10	33.17	42.18	9.01
20	35.29	39.79	4.50
100	37.05	37.95	0.90
200	37.28	37.73	0.45
300	37.35	37.65	0.3

¿Qué ocurre con el área por defecto cuando se aumenta el número de subintervalos en que se divide el tiempo inicial?

Aumenta

¿Y qué ocurre con el área por exceso?

Disminuye

¿Y qué ocurre con el valor de la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto?

Se hace cada vez más pequeña.

Observe como al aumentar el número de intervalos de1 a 300 la diferencia entre el área por defecto y el área por exceso se reduce en más de 90 unidades.

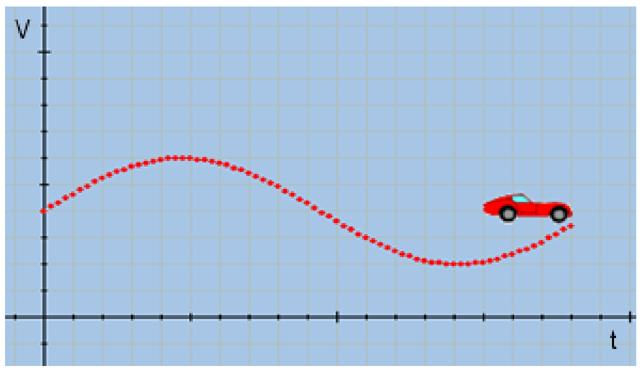
$$\text{Para 1 intervalo } \overline{S}-\underline{S} = 100 - 10 = 90$$
$$\text{Para 20 intervalos } \overline{S}-\underline{S} = 37.65 - 37.35 = 0.30$$

Lo cual indica que a medida que se aumenta el número de divisiones realizadas al intervalo inicial aumenta el grado se exactitud de la medida, pues el área por defecto tiende a ser igual al área por exceso.

5.2.2.4.2.3. Funciones seccionalmente monótonas

Una función es seccionalmente monótona cuando en cierta sección del intervalo la función es creciente mientras que en otra sección es decreciente

Para calcular el área por defecto en un intervalo Δx de una función seccionalmente monótona, se toma como base del rectángulo la división de los limites de la función entre el número de subintervalos (Δx) y como altura del mismo el punto donde la función f(x) tenga su menor valor, sin importar si el punto coincide con uno de los extremos ó está dentro del intervalo; por ejemplo para la función f(x)= cos (x)+2 en el intervalo $[0,2\pi]$ se observa que:

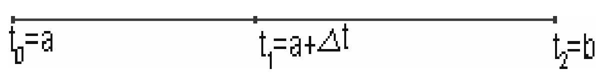


Las aproximaciones del área para uno y dos intervalos son:

En primer lugar, se procede a dividir el intervalo de tiempo en n partes (no necesariamente iguales):

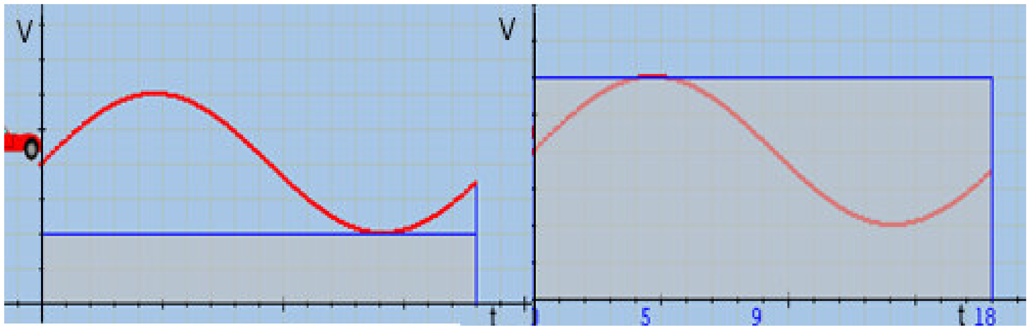
En 1 parte (n =1)

En 2 partes (n = 2)



Luego, se toma el conjunto de las imágenes de cada subintervalo, y se escoge el valor más pequeño (mínimo) para aproximaciones por defecto y más grande (máximo) para aproximaciones por exceso y con estos datos, se dibujan rectángulos sobre la gráfica cuya base sea igual a la longitud de cada subintervalo y cuya altura sea el f(x) mínimo (velocidad mínima) de cada subintervalo para aproximaciones por defecto y el f(x) máximo (velocidad máxima) para aproximaciones por exceso:

Para n = 1



Base = 2π
Altura = 1

Base = 2π
Altura = 3

Para n = 2

Subintervalo 1

Base = π
Altura = 1
$A_1 = \pi$

Base = π
Altura = 2
$A_1 = 2\pi$

Subintervalo 2

Base = π
Altura = 2
$A_2 = 2\pi$

Base = π
Altura = 3
$A_2 = 3\pi$

A continuación se calcula el área de cada uno de los rectángulos y se suman los resultados, con el fin de obtener una aproximación cada vez más cercana al valor buscado:

Para n = 1
Área por defecto $\underline{S} = 2\pi$ Área por exceso $\overline{S} = 6\pi$

$\overline{S} - \underline{S} = 6\pi - 2\pi = 4\pi$

Para n = 2

Área por defecto $\underline{S} = A_1 + A_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$

Área por exceso $\overline{S} = A_1 + A_2 = 2\pi + 3\pi = 5\pi$

$\overline{S} - \underline{S} = 5\pi - 3\pi = 2\pi$

Observe como la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto se reduce a la mitad con solo aumentar en uno el número de subdivisiones hechas al intervalo inicial.

Situación 4

Un avión de pasajeros despega del aeropuerto. Observando la velocidad del vuelo durante 12 segundos y analizando los resultados, se encuentra que la función que relaciona la velocidad del avión con el tiempo es:

$$V(t) = -\,0.06\,(t^2 - 16\,t - 103)\,.$$

Si la grafica que describe la velocidad del avión con respecto al tiempo es:

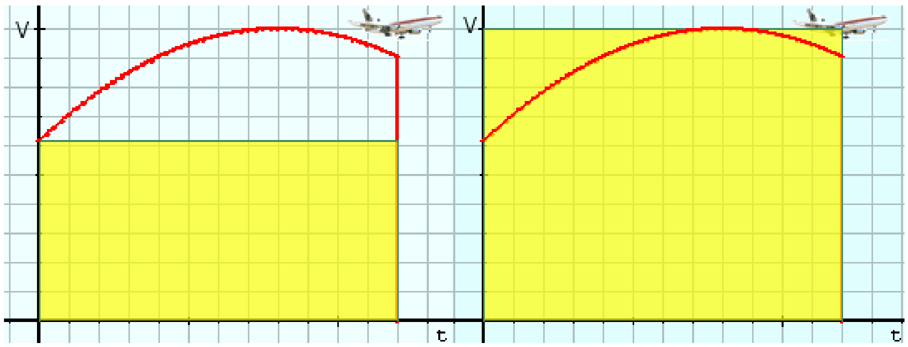
Encuentre una aproximación (por exceso y por defecto) a la distancia recorrida por el avión (área bajo la curva) tomando n = 1, 2, 3 y 4 subintervalos.

Para hallar el área bajo la curva en este tipo de funciones, se procede de la misma forma que en los casos anteriores:

En el área por defecto, se toma como altura de cada rectángulo la imagen (f(x)) más pequeña del subintervalo y para áreas por exceso la de valor más alto.

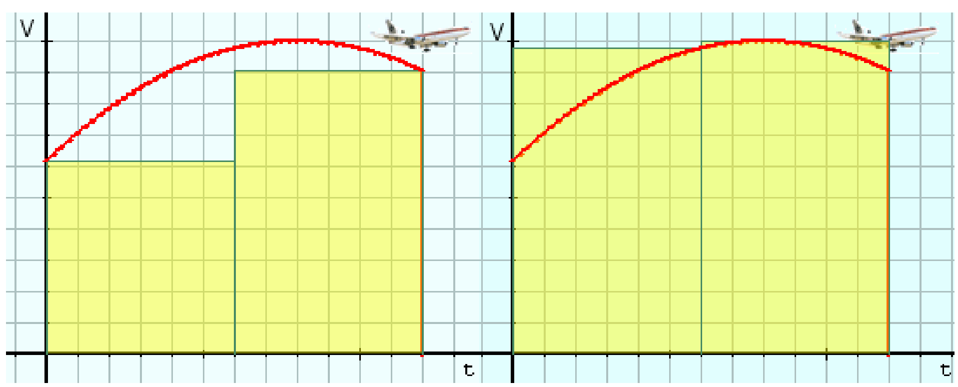
En primer lugar, se procede a dividir el intervalo de tiempo en n partes (no necesariamente iguales):

Para n=1



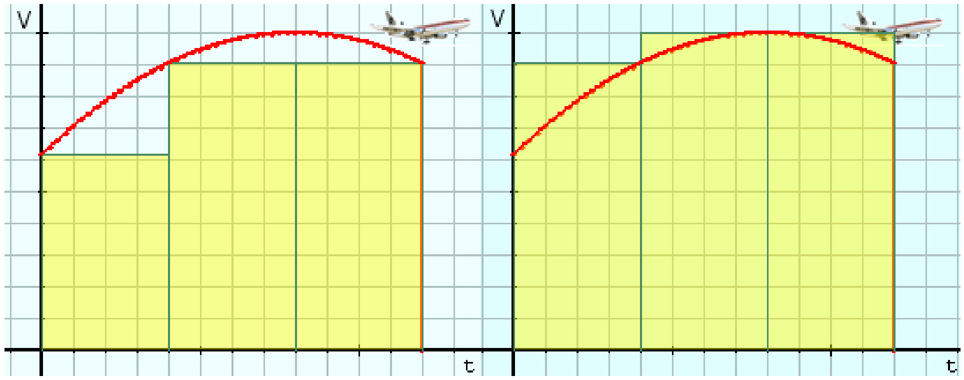
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	12	6.18	74.16	10.02	120.24
Área acumulada	///	///	74.16	///	120.24

Para n=2



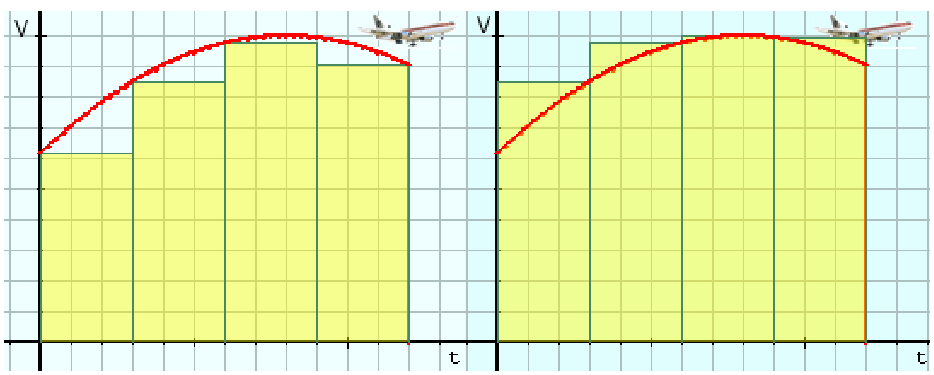
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	6	6.18	37.08	9.78	54.36
2	6	9.06	54.36	10.02	60.12
Área acumulada	///	///	91.44	///	118.8

Para n=3



intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	4	6.18	24.72	9.06	36.24
2	4	9.06	36.24	10.02	40.08
3	4	9.06	36.24	10.02	40.08
Área acumulada	///	///	97.2	///	116.4

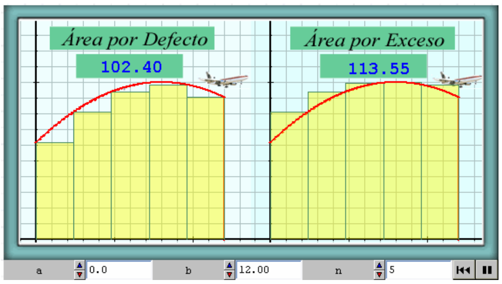
Para n=4



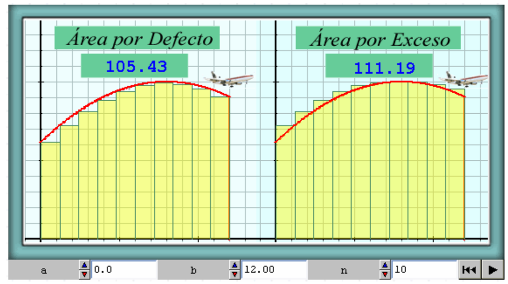
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	3	6.18	18.54	8.52	25.56
2	3	8.52	25.56	9.78	29.34
3	3	9.78	29.34	10.02	30.06
4	3	9.06	27.18	9.96	29.88
Área acumulada	///	///	100.62	///	114.84

Con ayuda del siguiente Applet calcule la distancia (Área bajo la curva) que recorrió el automóvil durante los 12 segundos que duró el recorrido teniendo en cuenta aproximaciones por defecto y por exceso con n = 5, 10, 20, 50, 200 y 500 subintervalos.

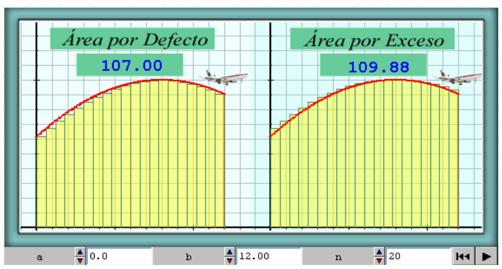
Para 5 subintervalos



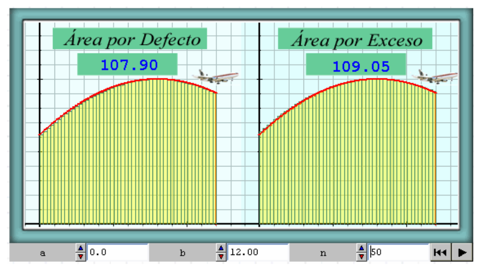
Para 10 subintervalos



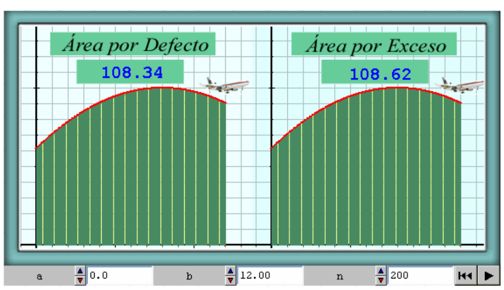
Para 20 subintervalos



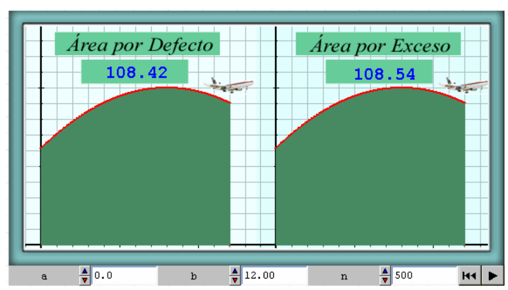
Para 50 subintervalos



Para 200 subintervalos

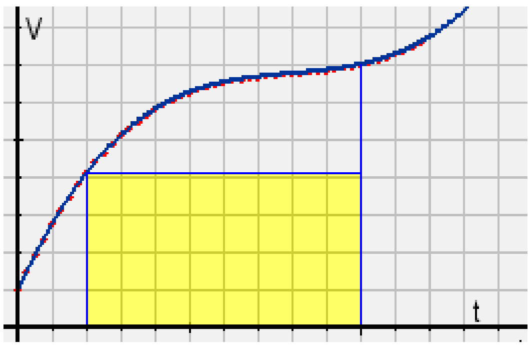


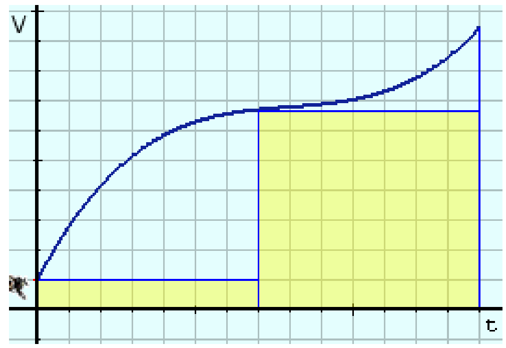
Para 500 subintervalos



Número de Subintervalos n	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$	Diferencia $\overline{S}-\underline{S}$
5	102.40	113.55	11.15
10	105.43	111.49	6.06
20	107.00	109.88	2.88
50	107.90	109.05	1.15
200	108.34	108.62	0.28
500	108.42	108.54	0.12

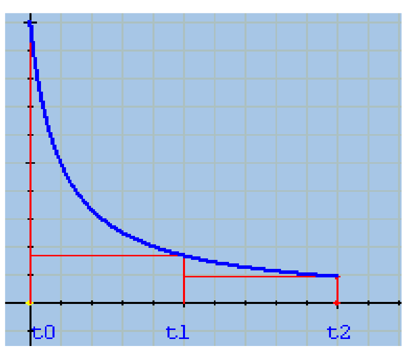
Durante el trabajo con este tipo de funciones, se debe resaltar el hecho de que siempre se toma el valor mínimo de la función en cada intervalo para la altura de los rectángulos en áreas por defecto ó el valor máximo de la función para áreas por exceso, sin importar en que lugar del intervalo se encuentre (en los extremos ó dentro del intervalo); por ejemplo, para funciones crecientes el valor mínimo siempre coincide con el valor que toma la función para el extremo izquierdo del intervalo

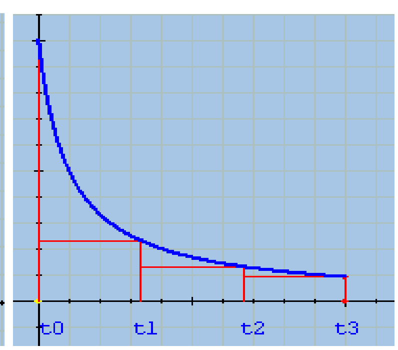




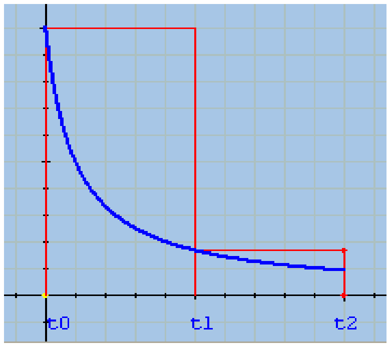
Mientras que el valor máximo de la función siempre coincide con el extremo derecho de ella:

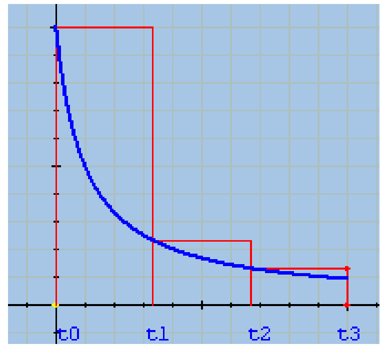
Para funciones decrecientes, el valor mínimo de la función en el intervalo siempre coincide con el valor que toma la función para el extremo derecho del intervalo.



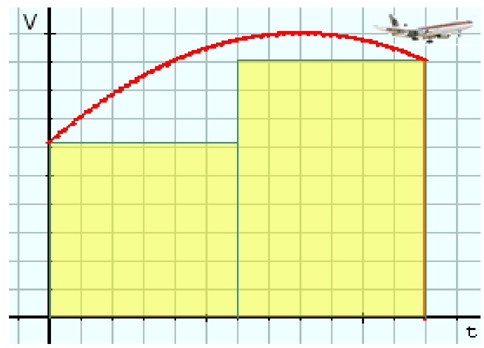


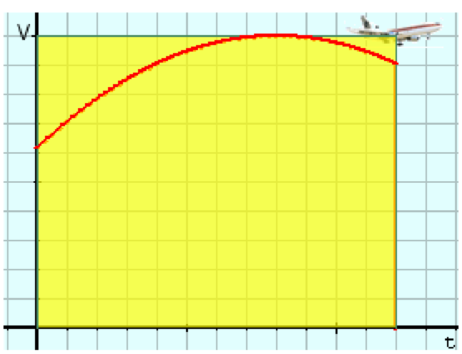
Y el valor máximo de la función siempre coincide con el valor que toma la función para el extremo izquierdo del intervalo, contrario a lo que ocurre en las funciones crecientes.

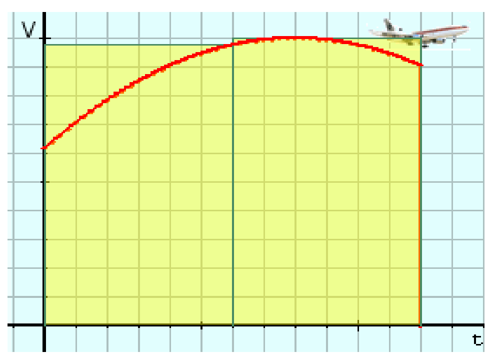




Mientras que para funciones seccionalmente monótonas estos valores coinciden algunas veces con el valor que toma la función para uno de los extremos y otras veces con el valor de la función para un punto que se encuentra dentro del intervalo; tanto para áreas por defecto como para áreas por exceso:

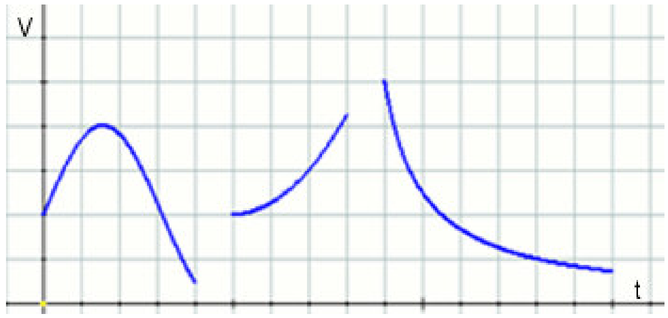






5.2.2.4.2.4. Funciones discontinuas

Una función se considera discontinua si existe algún x en el intervalo [a, b] para el cual la función no esta definida (el x no tiene imagen); la gráfica de este tipo de funciones siempre presenta saltos o interrupciones; por ejemplo, la función:



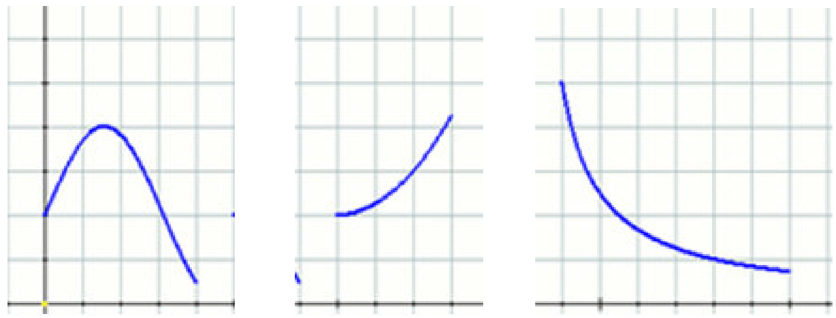
Presenta dos discontinuidades en su recorrido (Hay dos partes del recorrido para los que la función f no está definida).

Pese a que el procedimiento en el cálculo de áreas bajo la curva en este tipo de funciones continua siendo el mismo, es necesario tener en cuenta que hay un intervalo para el cual la función no esta definida (presenta una discontinuidad), por este motivo, antes de realizar los cálculos se debe identificar con claridad el lugar donde se presenta la discontinuidad y dividir la función en subintervalos de tal forma que esta sea continua en cada uno de ellos.

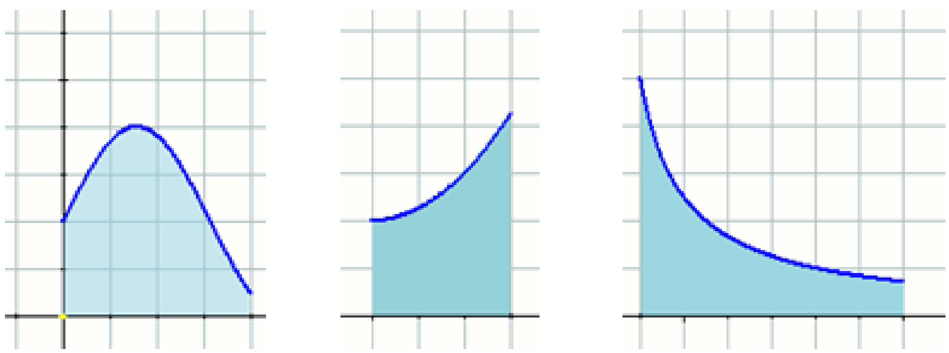
Como primera medida, se divide el intervalo inicial [a, b] en tantas partes como intervalos continuos tenga la función; ya que para realizar este tipo de aproximaciones (por exceso y por defecto) es necesario que la función sea continua en el intervalo seleccionado.

La función

Se divide en tres partes (tres intervalos continuos):

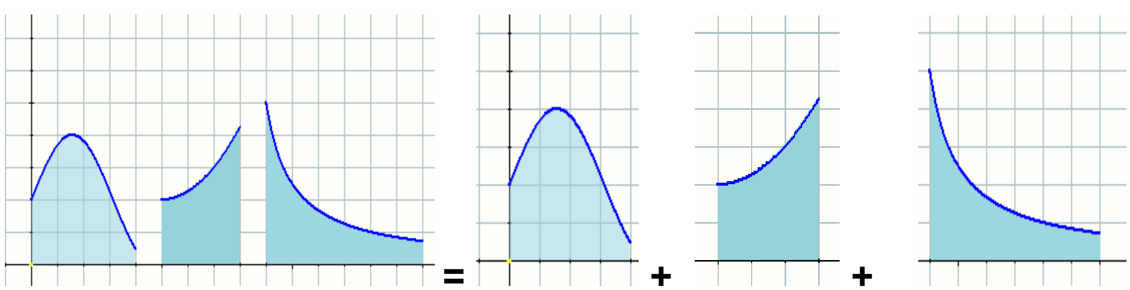


Luego se calcula el área bajo la curva en cada subintervalo siguiendo el proceso descrito anteriormente según la función sea creciente, decreciente ó seccionalmente monótona en el subintervalo:



Finalmente se suman los resultados obtenidos, llegando a si a una aproximación total del área bajo la curva de la función inicial (discontinua)

Área total $= A_1 + A_2 + A_3$



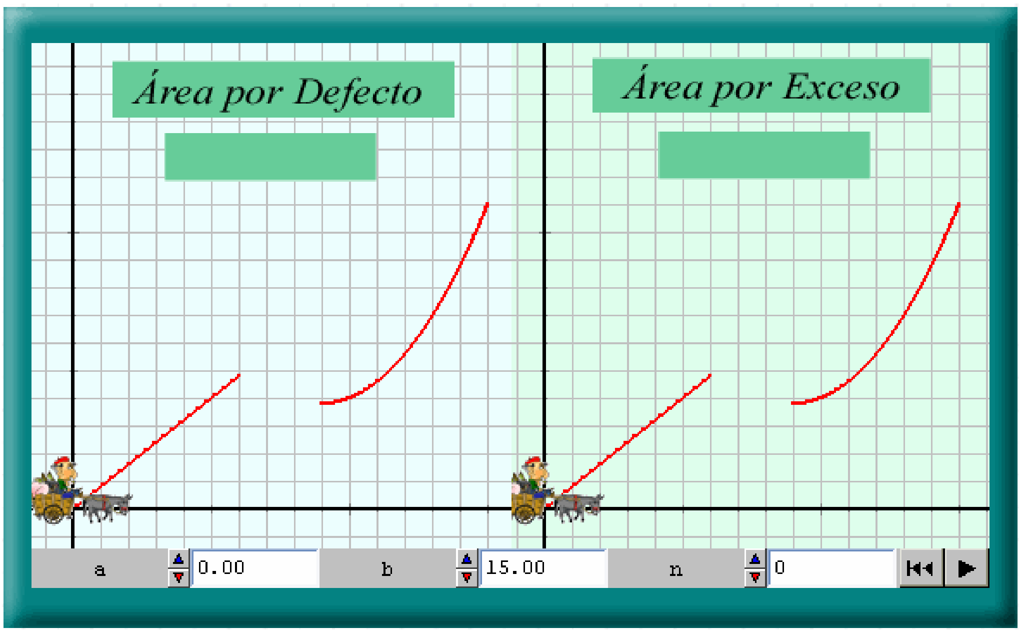
Situación 5

Un aficionado a la fórmula 1, decide analizar la velocidad de Juan Pablo Montoya en una de las competencias. Cuando lleva 6 segundos observando la carrera y anotando los datos pertinentes, se distrae durante 3 segundos y luego reinicia la observación hasta completar 15 segundos.

Al analizar los datos obtenidos durante la observación, el aficionado encuentra que la función V(t) que relaciona la velocidad de Juan Pablo Montoya con el tiempo es:

$$V(t) = \begin{cases} 0.8t & \text{si } \; 0 \le t \le 6 \\ 0.2t^2 - 3.6t + 20 & \text{si } \; 9 \le t \le 15 \end{cases}$$

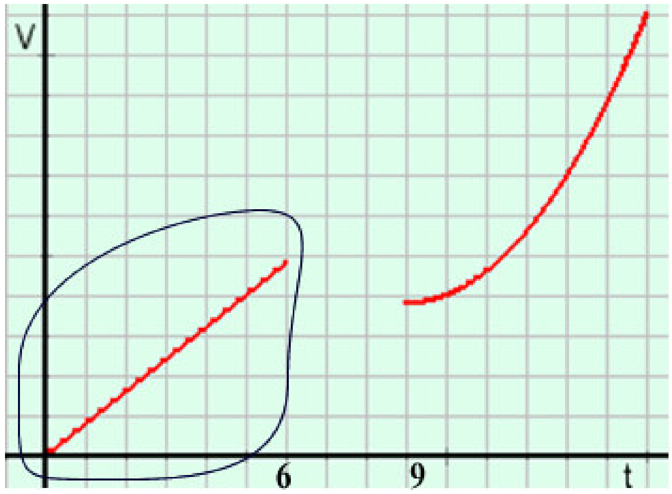
Con ayuda del applet "funciones discontinuas",



Determine el tipo de función en el intervalo:

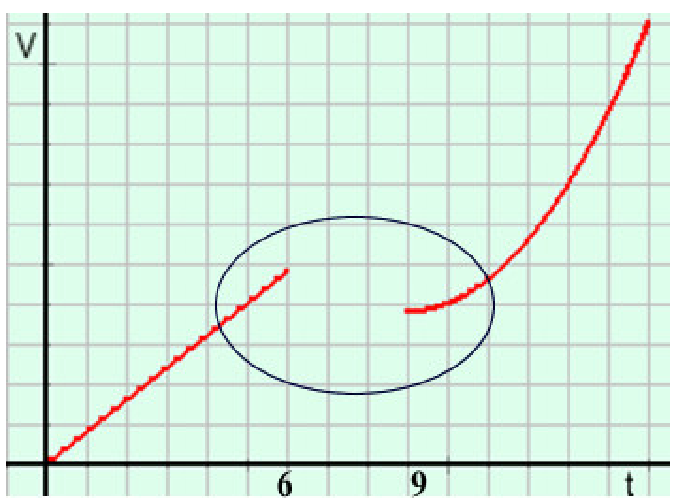
a. el segundo 0 y el 6
b. el segundo 9 y el 15
c. el segundo 6 y el 9
d. todo el recorrido.

a. Entre 0 y 6 segundos la función es continua y creciente



b. Entre 9 y 15 segundos la función es continua y creciente

c. Entre 6 y 9 segundos no esta definida la función



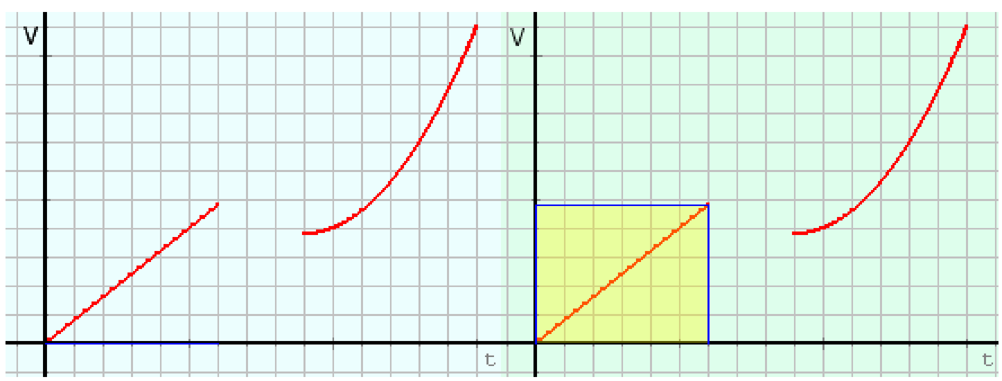
d. Entre 0 y 15 se presenta una función discontinua

3. Calcule el área bajo la curva para los intervalos propuestos en los ítems a, b y c, tomando n= 1, 2 y 3 subintervalos.

Tenga en cuenta que los cálculos se realizan siguiendo el procedimiento descrito para funciones crecientes descrito para funciones continuas:

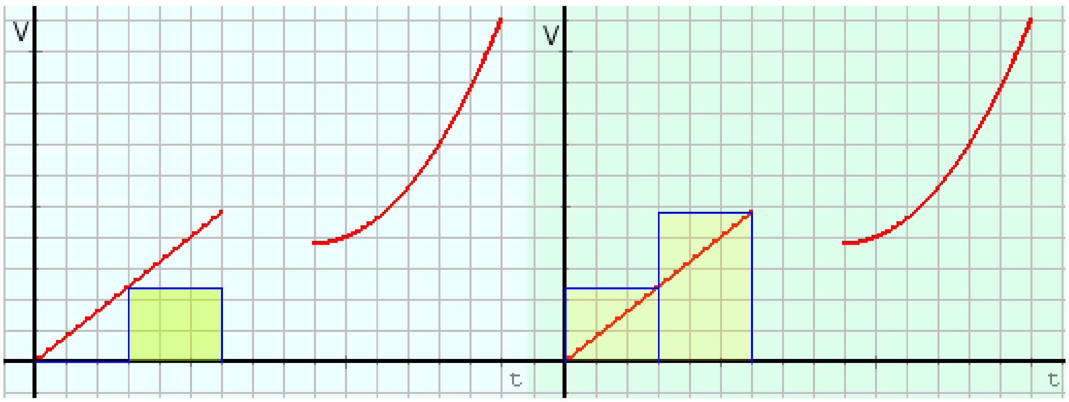
a. Entre 0 y 6 segundos

Para n = 1:



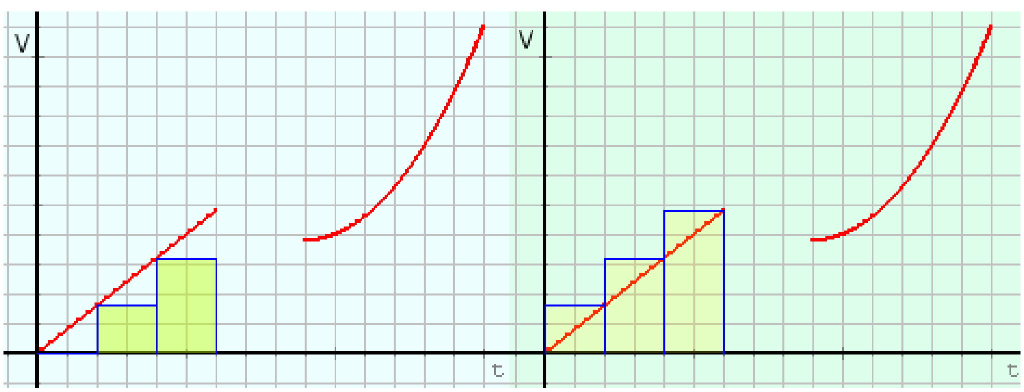
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	6	0	0	4.8	28.8
Área acumulada	///	///	0	///	28.8

Para n = 2:



intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	3	0	0	2.4	7.2
2	3	2.4	7.2	4.8	14.4
Área acumulada	///	///	7.2	///	21.6

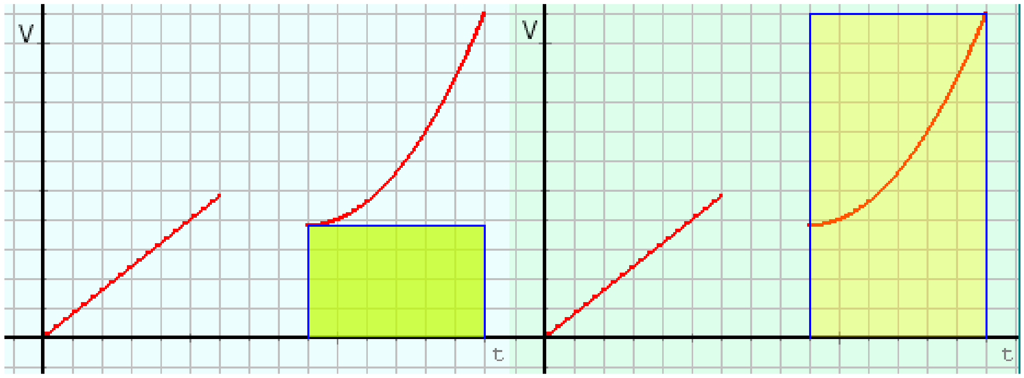
Para n = 3:



intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	2	0	0	1.6	3.2
2	2	1.6	3.2	3.2	4.8
3	2	3.2	6.4	4.8	9.6
Área acumulada	///	///	9.6	///	19.2

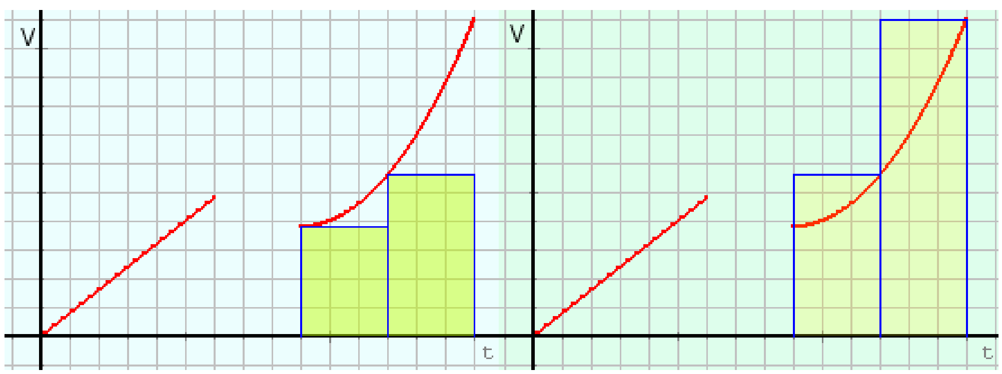
b. Entre 9 y 15 segundos

Para n=1



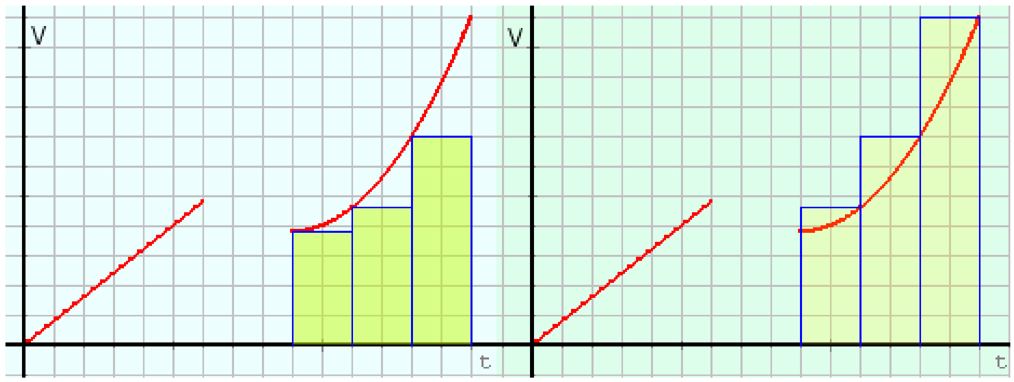
intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	6	3.8	22.8	11	66
Área acumulada	///	///	22.8	///	66

Para n = 2:



intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	3	3.8	11.4	5.6	16.8
2	3	5.6	16.8	11	33
Área acumulada	///	///	28.2	///	49.8

Para n = 3:



intervalo	Base Δt	Velocidad mínima	Área por defecto $\underline{S}$	Velocidad máxima	Área por exceso $\overline{S}$
1	2	3.8	7.6	4.6	9.2
2	2	4.6	9.2	7	14
3	2	7	14	11	22
Área acumulada	///	///	30.8	///	45.2

a. Entre 6 y 9 segundos

En este intervalo no esta definida la función; por lo tanto el área bajo la curva es igual a cero.

4. Con base en los resultados obtenidos en la parte a y b encuentre la distancia total recorrida por el auto:

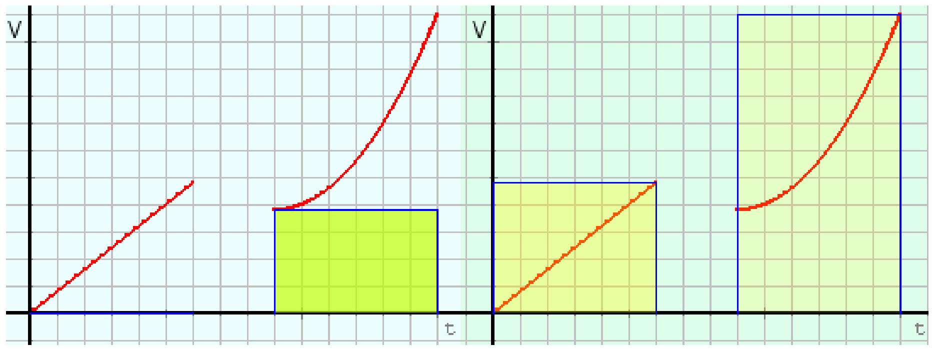
Pese a que el procedimiento en el cálculo de áreas bajo la curva en este tipo de funciones continua siendo el mismo, es necesario tener en cuenta que hay un intervalo para el cual la función no está definida (presenta una discontinuidad), por este motivo, antes de realizar los cálculos se debe identificar con claridad el lugar donde se presenta la discontinuidad y dividir la función en subintervalos de tal forma que esta sea continua en cada uno de ellos.

El procedimiento se divide en tantas partes como subintervalos continuos tenga la función. La función presenta una discontinuidad; y se divide en dos subintervalos continuos ([0,6] y [9, 5]), lo cual indica que el procedimiento se divide en dos partes (una para cada subintervalo):

Se toma cada subintervalo por aparte y se calcula el área bajo la curva siguiendo el procedimiento descrito anteriormente para funciones continuas ya sean crecientes, decrecientes ó seccionalmente monótonas, se suman las áreas encontradas para así obtener un resultado.

Con base en los resultados obtenidos en la parte a y b se tiene:

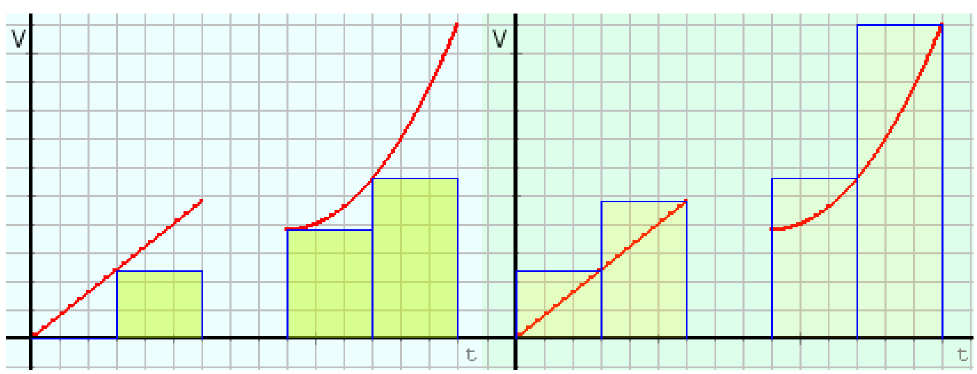
Para n = 1 se tiene:



	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$
Intervalo 1	0	28.8
Intervalo 2	22.8	66
Área total S	22.8	94.8

$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$22.8 < \text{Área real} < 94.8$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 94.8 - 22.8 = 72.0$$

Para n = 2 se tiene:

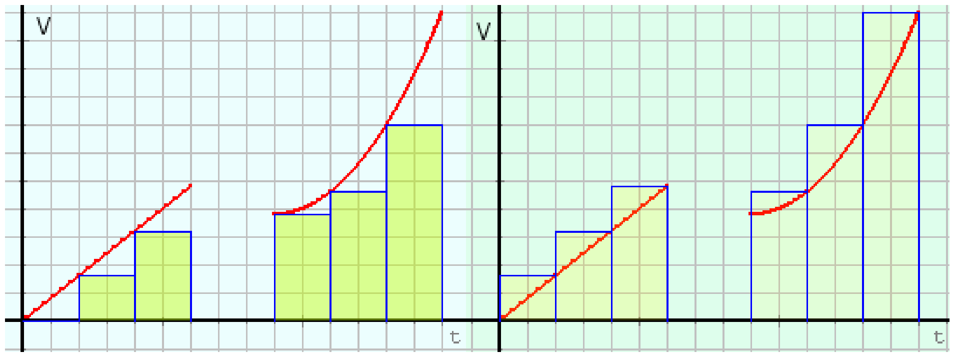


	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$
Intervalo 1	7.2	28.2
Intervalo 2	28.2	66
Área total S	35.4	88.2

$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$

$$35.4 < \text{Área real} < 88.2$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 88.2 - 35.4 = 52.8$$

Para n = 3 se tiene:

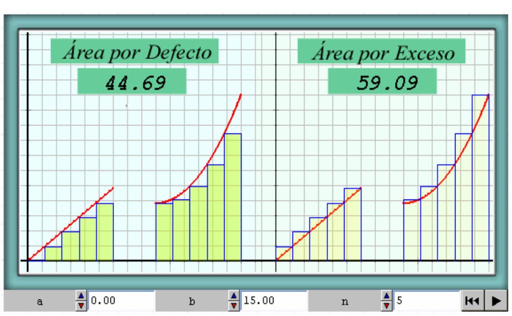


	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$
Intervalo 1	9.6	19.2
Intervalo 2	30.8	45.2
Área total S	40.4	64.4

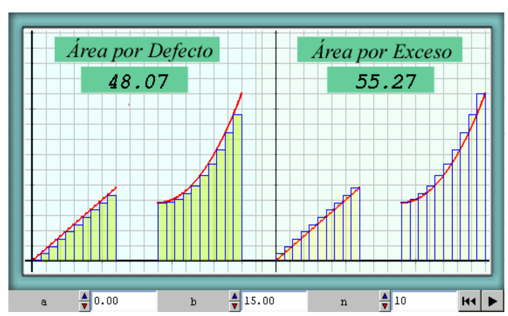
$$\underline{S} < \text{Área real} < \overline{S}$$
$$40.4 < \text{Área real} < 64.4$$
$$\overline{S} - \underline{S} = 64.4 - 40.4 = 20$$

Con ayuda del siguiente Applet calcule la distancia (Área bajo la curva) que recorrió el automóvil durante los 12 segundos que duró el recorrido teniendo en cuenta aproximaciones por defecto y por exceso con n = 5, 10, 20, 50, 200 y 500 subintervalos.

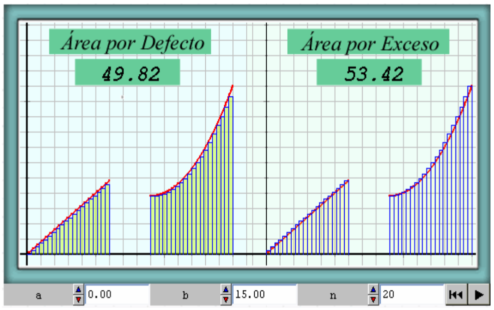
Para 5 subintervalos



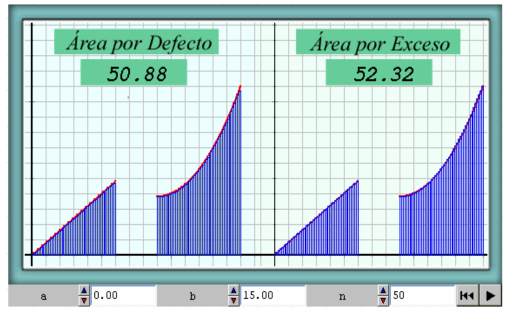
Para 10 subintervalos



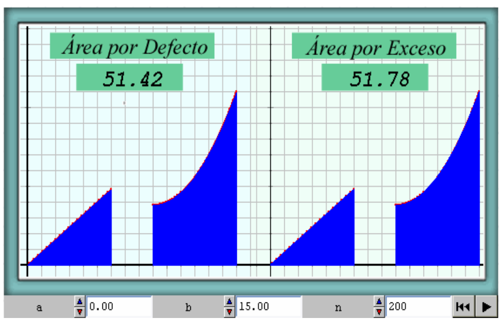
Para 20 subintervalos



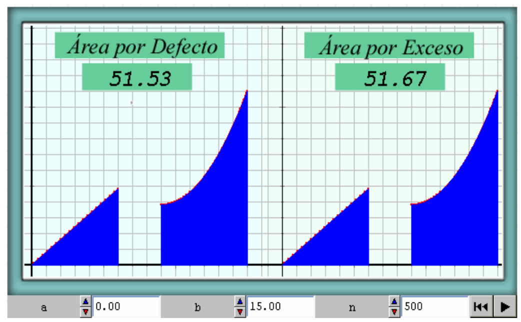
Para 50 subintervalos



Para 200 subintervalos



Para 500 subintervalos



Observe que al igual que en las funciones continuas el procedimiento sigue siendo el mismo y a medida que aumenta el numero de divisiones realizadas al intervalo inicial el valor del área por defecto tiende a ser igual al valor del área por exceso y el del área por exceso tiende a ser igual al valor del área por defecto; lo cual indica que el resultado se acerca cada vez más al valor real.

Complete la tabla según los resultados del Applet, y encuentre la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto.

Número de Subintervalos n	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$	Diferencia $\overline{S}-\underline{S}$
5	44.69	59.69	15.00
10	48.07	55.27	7.20
20	49.82	53.42	3.60
50	50.88	52.32	1.44
200	51.42	51.78	0.36
500	51.53	51.67	0.14

¿Qué ocurre con el área por defecto cuando se aumenta el número de subintervalos en que se divide el tiempo inicial?

Aumenta

¿Y qué ocurre con el área por exceso?

Disminuye

¿Y qué ocurre con el valor de la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto?

Se hace cada vez más pequeña.

Observe como al aumentar el número de intervalos de1 a 500 la diferencia entre el área por defecto y el área por exceso se reduce en más de 70 unidades.

Para 1 intervalo $\overline{S} - \underline{S} = 94.8 - 22.8 = 72.0$

Para 20 intervalos $\overline{S} - \underline{S} = 51.67 - 51.53 = 0.14$

Lo cual indica que a medida que se aumenta el número de divisiones realizadas al intervalo inicial aumenta el grado se exactitud de la medida, pues el área por defecto tiende a ser igual al área por exceso.

5.2.3. Tercera sesión

5.2.3.1. Contenidos matemáticos:

Tema:

Formalización del concepto de integral definida

5.2.3.2. Objetivo:

Mostrar al estudiante la relación existente entre el área bajo la gráfica de una función y la integral definida, a partir del concepto de áreas por defecto y áreas por exceso.

5.2.3.3. Metodología:

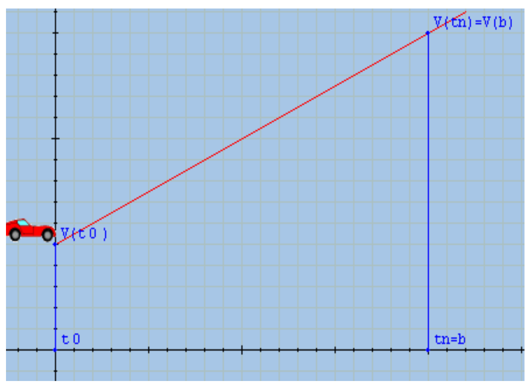
Esta sesión se presentará al estudiante a manera de información .A partir de un ejemplo sobre movimiento con velocidad variable se construye la definición de integral definida; se inicia con el calculo de áreas por exceso y de áreas por defecto, donde se aumenta cada vez más el numero de subdivisiones realizadas al intervalo de tiempo y con esto se muestra que cuando este número se hace muy grande (tiende a infinito) el valor del área por defecto y del área por exceso tienden a ser iguales; es decir su valor se aproxima con un grado de exactitud muy grande al área buscada y al valor común de estas aproximaciones es lo que se conoce como de integral definida

5.2.3.4. Descripción:

Es hora de presentar una expresión matemática que permita expresar el área bajo la curva en una función cualquiera definida en un cierto intervalo [a, b]; y que mejor que hacerlo a partir de una situación relacionada con la distancia recorrida por un objeto en movimiento, como se ha venido trabajando hasta el momento:

Un automóvil que va por una autopista, viaja con una velocidad cuya ecuación es: $V(t) = f(x)$ definida en el intervalo [a, b].

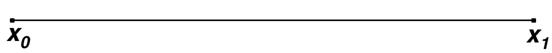
Aplicando aproximaciones por defecto y por exceso, encuentre el área bajo la curva (distancia recorrida por el auto).



En primer lugar, se realiza una partición del intervalo [a,b] en n partes (se divide el intervalo [a,b] en n partes no necesariamente iguales), tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$$

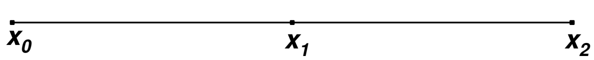
Para n = 1



Donde

$a = x_0 < x_1 = b$

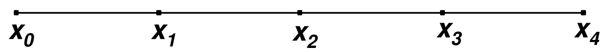
Para n = 2



Donde

$a = x_0 < x_1 < x_2 = b$

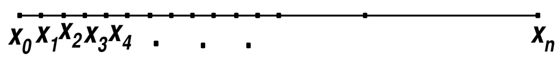
Para n = 4



Donde

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$

Para n partes



Donde

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_n = b$

La longitud de cada subintervalo, se define como Δx (delta x), donde:

$$\begin{aligned}
&\Delta x_1 = x_1 - x_0 \\
&\Delta x_2 = x_2 - x_1 \\
&\Delta x_3 = x_3 - x_2 \\
&\Delta x_4 = x_4 - x_3 \\
&\ldots \\
&\Delta x_n = x_n - x_{n-1}
\end{aligned}$$

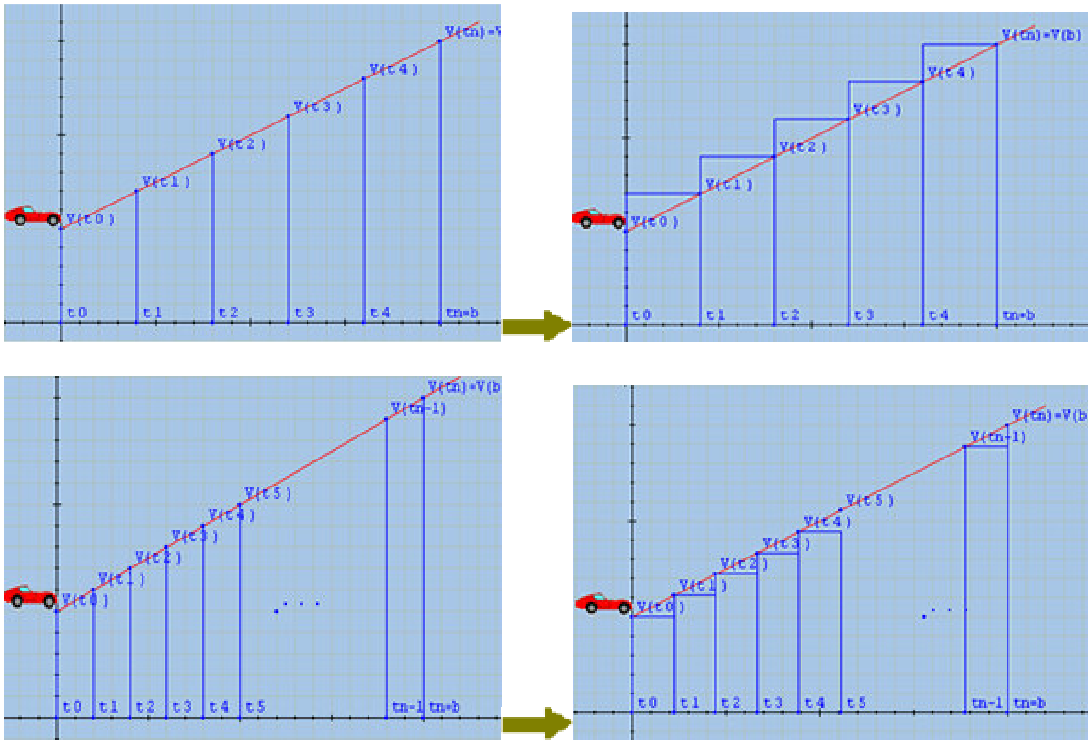
Cuando los intervalos tienen la misma longitud, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, donde b y a son los extremos del intervalo y n es la cantidad de subdivisiones realizadas.

Los puntos de la partición del intervalo [a, b] corresponden a:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

$$\begin{aligned}
&x_0 = a \\
&x_1 = a + \Delta x \\
&x_2 = a + 2\Delta x \\
&x_3 = a + 3\Delta x \\
&\vdots \\
&x_n = a + n\Delta x = b
\end{aligned}$$

Evaluando la función V(t) = f(x), para cada uno de estos puntos se encuentra que $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ es la velocidad que lleva el auto en cada uno de ellos (altura de cada rectángulo).

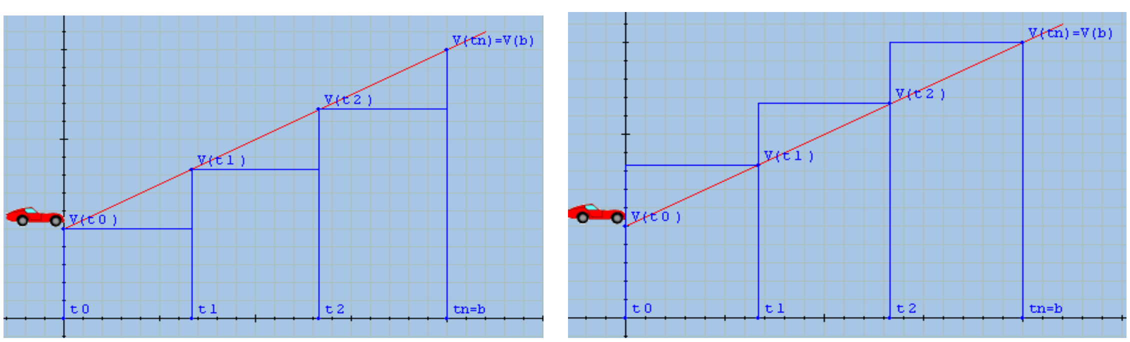


El área de cada uno de estos rectángulos es:

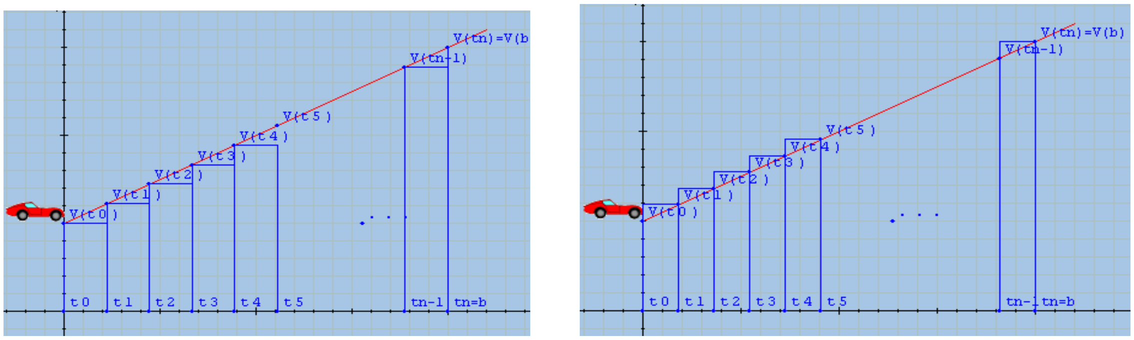
$$s_n = \Delta x f(x_n)$$

Calculando el área de cada uno de ellos:

Para 3 subintervalos

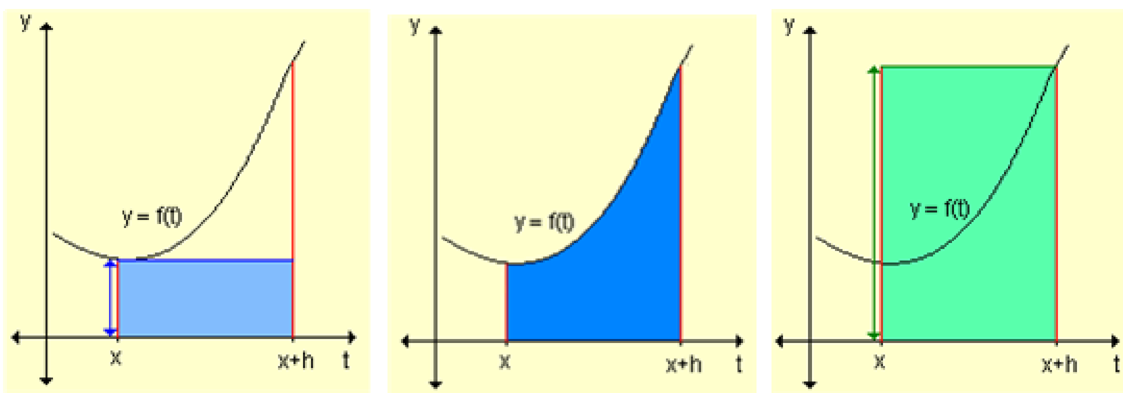


Para n subintervalos



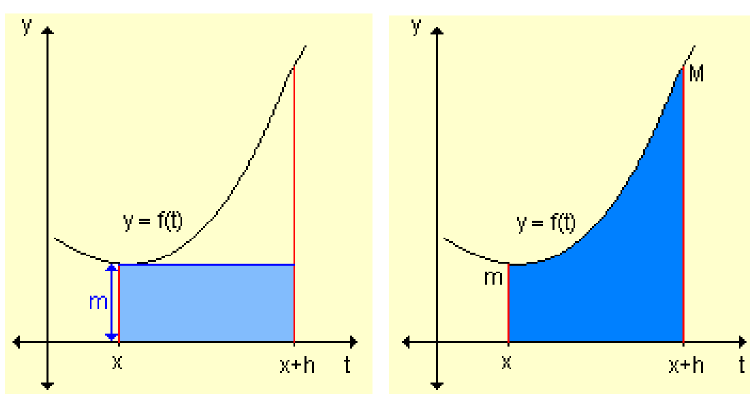
y sumando los resultados se obtiene una buena aproximación al área bajo la curva (distancia recorrida).

Sin embargo, hay que tener en cuenta que al realizar aproximaciones a un cierto valor, el resultado obtenido puede ser menor ó mayor que el real como se muestra en la figura:

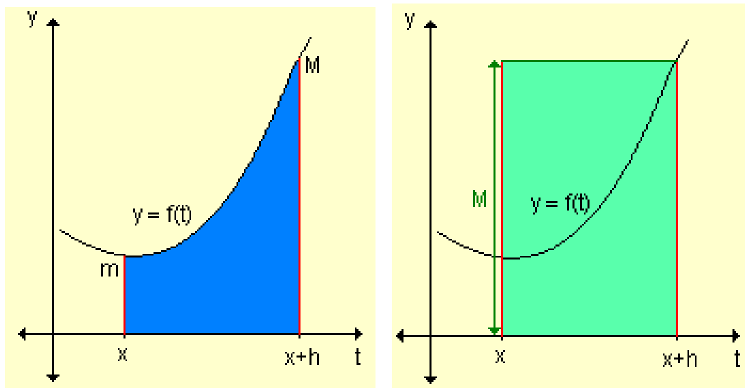


En el caso de aproximación de áreas, estos resultados reciben el nombre de:

Área por defecto $\underline{S}$: Cuando el resultado es menor que el real



Área por exceso $\overline{S}$: Cuando el resultado es mayor que el real.



Calculando el área bajo la curva (por defecto y por exceso) se encuentra que:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{s}_1 = f(x_0)\Delta x & \overline{s}_1 = f(x_1)\Delta x \\
\underline{s}_2 = f(x_1)\Delta x & \overline{s}_2 = f(x_2)\Delta x \\
\underline{s}_3 = f(x_2)\Delta x & \overline{s}_3 = f(x_3)\Delta x \\
\vdots & \vdots \\
\underline{s}_n = f(x_{n-1})\Delta x & \overline{s}_n = f(x_n)\Delta x
\end{array}
$$

Por lo tanto el Área total por exceso y por defecto se pueden expresar como:

Número de intervalos	Área por defecto $\underline{S}$	Área por exceso $\overline{S}$	$\overline{S}-\underline{S}$
1	$f(x_0)\Delta x$	$f(x_1)\Delta x$	$\Delta x(f(x_1)-f(x_0))$
2	$f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x$	$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x$	$\Delta x(f(x_2)-f(x_0))$
2	$f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x$	$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x$	$\Delta x(f(x_3)-f(x_0))$
4	$f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x$	$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x$	$\Delta x(f(x_4)-f(x_0))$
...	...	...	...
n	$f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x$	$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x$	$\Delta x(f(x_n)-f(x_0))$

Como la base de los rectángulos Δx es igual, estas expresiones se pueden factorizar así:

Área por defecto $\underline{s} = \Delta x\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)$

Área por exceso $\overline{s} = \Delta x\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)\right)$

Que en otra notación puede escribirse como:

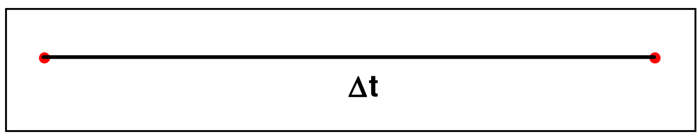
$$\underline{s} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \quad y \quad \overline{s} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Cuando el número de intervalos n en que se divide el tiempo tiende a ser muy grande (tiende a infinito), la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto:

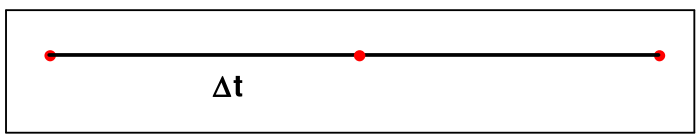
$$\begin{aligned}\overline{S}-\underline{S} &= \Delta x(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_n)) - \Delta x\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right)\\ &= \Delta x\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_n)-f(x_0)-f(x_1)-f(x_2)-...-f(x_{n-1})\right)\\ &= \Delta x\left(f(x_n)-f(x_0)\right)\end{aligned}$$

Se hace cada vez más pequeña (su valor tiende a cero) ya que la longitud Δx de cada subintervalo:

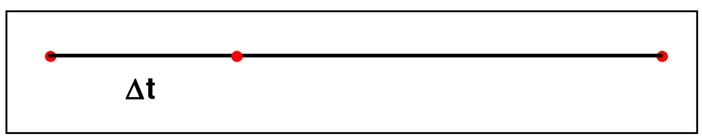
En n = 1



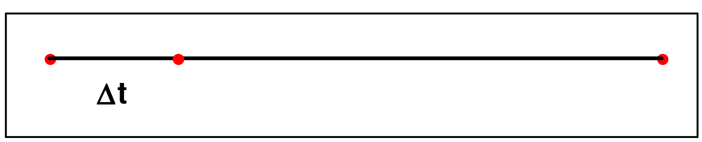
En n = 2



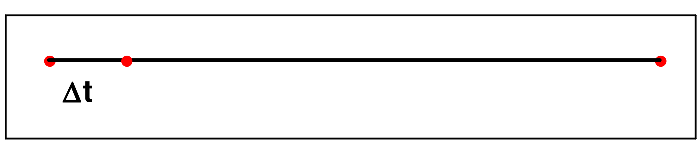
En n = 3



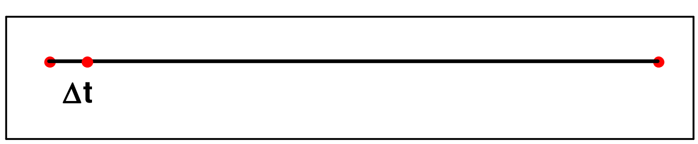
En n = 4



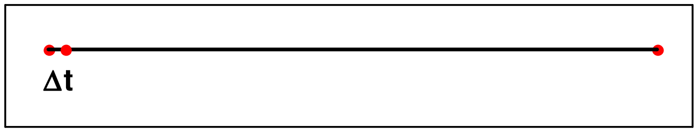
En n = 10



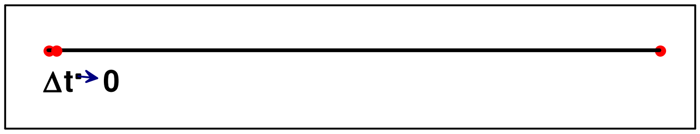
En n = 20



En n = 100



Cuando $n \to \infty$



Se hace cada vez más pequeña (su valor se acerca a cero). Por lo que la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto tiende a ser igual a cero.

$$\overline{S} - \underline{S} \cong 0$$

Explore los Applets que se han manejado en las sesiones anteriores y busque en cada uno de ellos un n (número de partes en que se divide el intervalo inicial [a, b]) para el cual la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto sea aproximadamente igual a:

a. 50 unidades
b. 10 unidades
c. 1 unidad
d. 0.5 unidades
e. 0.05 unidades

Organice los datos como lo muestra el ejemplo:

Para n = 20:

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S} - \underline{S}$
Creciente	6	76.34	95.94	19.6
Decreciente	5	29.20	47.20	18.0
Seccionalmente monótona	3	98.67	116.16	17.19
Discontinua	4	43.05	61.05	18.00

a. 50 unidades

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S} - \underline{S}$
Creciente	2	53.69	112.49	59
Decreciente	2	19.37	64.38	45.01

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S}-\underline{S}$
Seccionalmente monótona	1	73.92	120.00	46.08
Discontinua	2	35.40	71.40	36.00

b. 10 unidades

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S}-\underline{S}$
Creciente	11	81.06	91.75	10.69
Decreciente	9	32.72	42.72	10.0
Seccionalmente monótona	6	103.20	112.80	9.6
Discontinua	7	46.60	56.89	10.29

c. 1 unidad

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S}-\underline{S}$
Creciente	120	86.03	87.01	0.8
Decreciente	90	37.00	38.00	1.00
Seccionalmente monótona	57	107.97	108.98	1.001
Discontinua	72	51.10	52.10	1.00

d. 0.5 unidades

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S}-\underline{S}$
Creciente	239	86.27	86.77	0.50
Decreciente	180	37.25	37.75	0.50
Seccionalmente monótona	115	108.23	108.73	0.50
Discontinua	152	51.36	51.84	.048

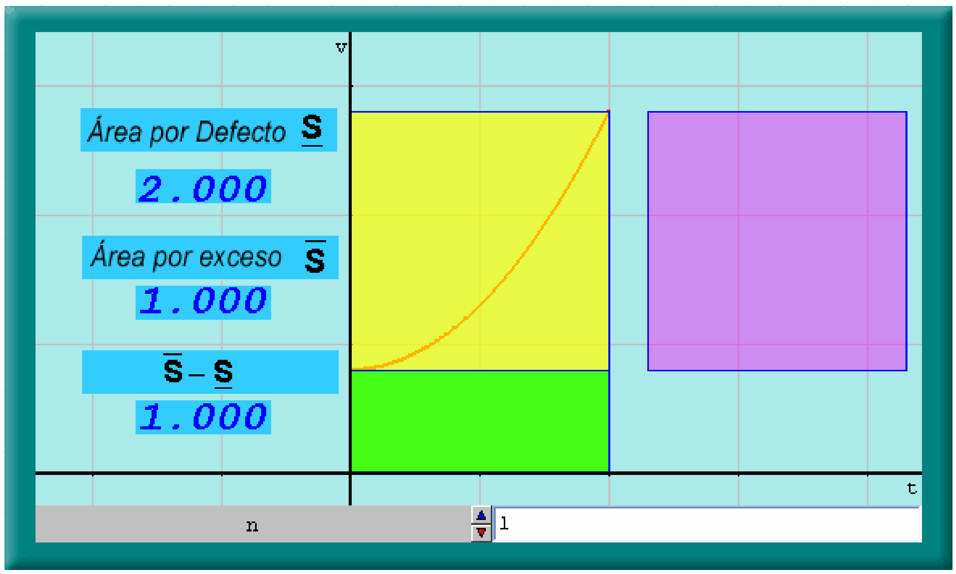
e. 0.05 unidades

Tipo de función	n	$\underline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{S}-\underline{S}$
Creciente	2353	86.50	86.54	0.04
Decreciente	1800	37.48	37.53	0.05
Seccionalmente monótona	1148	108.45	108.50	0.05
Discontinua	1440	51.58	51.63	0.05

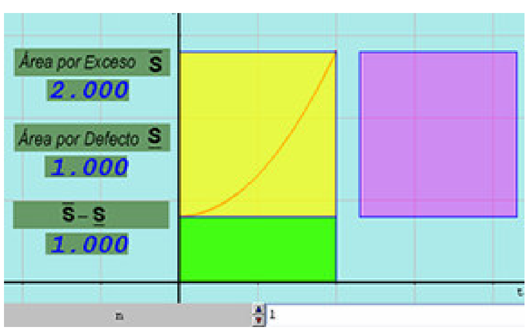
Y compruebe con ello que el área por exceso tiende a ser igual al área por defecto.

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t \;\le\; \overline{S}=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \text{y} \quad \overline{S}=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \;\ge\; \underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

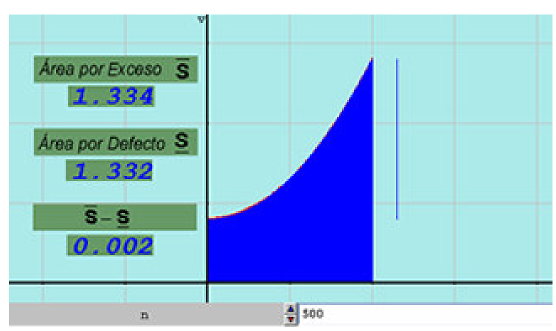
Como se muestra en el siguiente Applet, en el cual se representa el área bajo la curva de la función $y = x^2$ en el intervalo [0, 1].



Observe que en esta función al aumentar el número de intervalos en que se divide el intervalo en que se divide el intervalo inicial [0, 1] de 1 a 500 subintervalos, el valor de la diferencia entre el área por exceso y el área por defecto disminuye a 0.002 unidades.



n= 1



n = 500

Lo cual demuestra que el área por defecto y el área por exceso tienden a ser iguales.

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \;\cong\; \overline{S}=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Cuando esto ocurre, se dice que la función f(x) es integrable en el intervalo [a, b]; y al valor común de estas sumas (áreas por defecto y áreas por exceso) se denomina *Integral definida* de f con respecto a x sobre el intervalo [a, b], y se denota por el símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Que hace referencia al hecho de que una integral es una suma de términos de la forma "f(x) por una pequeña diferencia de x"; por esto es que la expresión dx no se considera por separado, sino que forma parte de la notación que significa "la integral de una determinada función con respecto a t".

Esta notación permite además determinar qué unidades se deben usar para indicar su valor:

Como los términos que se suman son productos de la forma "f(x) por un valor muy pequeño de x", la unidad de medida de

$$\int_a^b f(x)dx$$

Es el producto de las unidades de f(x) por las unidades de x. Por ejemplo: si V(t) representa la velocidad medida en Km./h y t es el tiempo medido en horas, entonces la $\int_a^b f(t)dt$ tiene por unidades Km./h* h = km. La unidad obtenida (kilómetros) es la indicada, ya que su valor representa un cambio de posición (una distancia recorrida).

6. CONCLUSIONES

4. Las representaciones ejecutables juegan un papel de gran importancia en la introducción de conceptos donde es necesaria la representación gráfica; ya que permiten la visualización y manipulación de imágenes logrando así dar una mejor interpretación al concepto como tal.

5. En la introducción de este tipo de conceptos (Integral definida) es recomendable utilizar tecnologías computacionales como el programa Descartes, ya que permiten construir la gráfica de las funciones, visualizando un procedimiento lógico para el calculo del área bajo una curva, mediante aproximaciones por defecto ó por exceso; además permiten el manejo de algoritmos algebraicos que liberan a los estudiantes de los largos cálculos que tiene este tipo de trabajo, logrando con ello centrar su interés en la exploración, discusión y formalización del concepto como tal.

6. Durante la elaboración de las actividades, y en particular del material didáctico (Applets) se vio la necesidad de utilizar el teorema de integrabilidad de Riemann para establecer criterios de las funciones que pueden o no ser integrables en un intervalo determinado y como pueden llegar a ser integrables en caso de ser discontinuas. Este concepto que no se maneja en secundaria, o por lo menos no es explicito para los estudiantes y personalmente, considero debería incluirse en grado once, debido a su riqueza y aportes en el tema.

BIBLIOGRAFÍA

APÓSTOL, T. Calculus. Volumen 1. Segunda edición. Reverte S.A. (Madrid).

AZCARATE, C. Cálculo diferencial e integral (pp. 15-18, 125-190) Editorial Síntesis. (Madrid), 1996.

BARTLE, ROBERT. The elements of real análisis.(pp. 228-233), 1975.

BISHOP, J. ALAN. Implicaciones Didácticas de la investigación sobre la Visualización. Versión en español de Rodrigo Cambray Núñez .En: Antología Educación Matemática,(pp.29-42). Edición de Grupo de Estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato del Dpto. de Matemática Educativa del CINVESTAV. (México), 1992.

________ Enculturación matemática. Paidos, Barcelona, 1992.

BOHIGAS, X Y JAÉN, X Applets en la enseñanza de la física. Enseñanza de las ciencias 21 pp. 463-472. Barcelona, 2003.

BOYER, C. Historia de la matemática. Alianza Editorial. Madrid, 1986.

DE LA FUENTE, C. Y PÉREZ, R. Resolución de problemas y epistemología de las matemáticas hacia la integración en el currículo. Uno. Revista didáctica de las matemáticas, 8, pp. 19-28., 1996.

ESCUDERO JOSÉ. Integral definida. En: matemática II formato pdf.

ESCUDERO MONICA. Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. En: Revista Suma 24 pp. 77 – 79. Madrid 1997.

EISBERG ROSERG M. Y LERNER LAWRENCE S. Física, fundamentos y aplicaciones, vol. 1, España, 1981.

HUGHES DEBORAH. Calculo PP. 305-341.

ICONTEC. Normas Colombianas para la presentación de Tesis de Grado. Bogota, 1976.

LOSADA, RICARDO. Matemática en acción 6,

MANSILLA, C. Y VEGA NORMA E. Cálculo del área antes del cálculo. Epsilon 53 pp. 281-296. Madrid, 2002.

MEN. Resolución 2343 de junio 5 de 1996.Santa fe de Bogota, 2002.

________ .Lineamientos curriculares de matemáticas 1998.Editorial Magisterio. Santa fe de Bogota, 1998.

________ .Nuevas tecnologías y currículos de matemáticas. Bogota, 1999.

TUREGANO, P. Del área de la integral. Un estudio en el contexto educativo. En: Enseñanza de las ciencias. 16 pp. 233-248. Barcelona, 1998.

________ El aprendizaje del concepto de integral. En: Suma 26 pp. 39 – 52. Madrid, 1997

SACERDOTI JUAN. Integrales de Riemann. En: Notas para los alumnos de análisis matemático III. Departamento de matemáticas, facultad de ingeniería universidad de Buenos Aires. (2002)

SWOKOWSKY EARL W. Cálculo con geometría analítica. México, 1982.

Paginas Web:

Lagares, J. Propuesta de cálculo integral. En:
www.jlagares.html

MEC. Proyecto Descartes, en:
www.eswikipedia.org/wiki/integral_y:funci%C%B3n_primitiva

ANEXOS

MATEMÁTICAS INTERACTIVAS CON DESCARTES[12]

El propósito de este cursillo es dar a conocer a los profesores las bases fundamentales para aprender a utilizar el programa Descartes como herramienta de trabajo. A lo largo del curso-taller se pretende mostrar a Descartes como un sistema de referencia cartesiano interactivo, en el que se pueden configurar y emplear todos los elementos habituales (origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas, vectores, etc.) que permite representar curvas y gráficas dadas por sus ecuaciones, tanto en forma explícita como implícita; en particular permite representar las gráficas de todas las funciones que habitualmente se utilizan en la enseñanza secundaria, tanto en coordenadas cartesianas como en paramétricas y polares. También se presentarán los elementos geométricos elementales (puntos, segmentos, arcos, etc.) que nos permiten hacer numerosas representaciones geométricas. En todos los casos, estas representaciones pueden depender de parámetros, de forma que la representación cambie cuando el usuario modifique dichos parámetros. En la primera parte se muestran los conceptos relativos al applet Descartes, los requisitos para su funcionamiento y los alcances del programa. En la segunda parte, se presentan las diferentes herramientas que ofrece Descartes para trabajar en R^2 y se muestra el diseño una escena interactiva en el plano. En la tercera parte se presentan las diferentes herramientas que ofrece Descartes para el trabajo en R^3 y se muestra el diseño de una escena interactiva en el espacio.

PRIMERA PARTE

¿Qué es el proyecto Descartes?

El proyecto Descartes surge por iniciativa de Agustín Quintana, consejero técnico del CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa - España), quién confió el diseño y la coordinación del mismo a Juan Madrigal Muga y la creación de la herramienta que lo soporta a José Luis Abreu León y Marta Oliveró Serrat. Se inicia a finales de junio de 1998 y tres meses después se disponía ya del primer prototipo del programa con el que se desarrollaron algunas unidades didácticas que sirvieron para depurar el producto e introducir nuevas herramientas, esta primera versión de Descartes se presenta en Madrid en el evento Aula 99.

Desde entonces se han desarrollado sucesivas versiones: Descartes 2D y Descartes 3D, que han ido mejorando la edición e incorporando nuevas opciones y

[12] Benjamín R. Sarmiento Lugo, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá – Colombia

herramientas que amplían sus posibilidades y campo de acción dentro de las Matemáticas, e incluso, de la Física.

En la página de descartes http://descartes.cnice.mecd.es hay numerosos materiales didácticos, la mayoría realizados por un equipo de colaboradores, todos ellos profesores de Matemáticas en activo, que pertenecen a distintas Comunidades autónomas españolas, la mayoría reclutados entre los profesores que obtuvieron los mejores resultados en los cursos de formación sobre Descartes que se realizan anualmente.

El Proyecto Descartes ha sido promovido y financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España. Tiene como principal finalidad la innovación en un entorno de colaboración en el área de Matemáticas, para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, que utilice las ventajas del ordenador y de Internet para ofrecer a los profesores y a los alumnos una nueva forma de enfocar el aprendizaje de las Matemáticas, que promueva nuevas metodologías de trabajo en el aula, más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

¿Qué es el nippe Descartes?

Llamamos nippe Descartes a un programa realizado en lenguaje Java que permite crear escenas interactivas a modo de pizarras electrónicas, que se pueden insertar en las páginas web, estas escenas son pequeños programas que se denominan applets; en Internet existen numerosos applets, algunos son interactivos, es decir que permiten al usuario modificar algún parámetro y observar el efecto que se produce en la pantalla, pero lo que caracteriza a Descartes es que, además, es configurable, es decir, que los usuarios (profesores) pueden "programarlo" para que aparezcan diferentes elementos y distintos tipos de interacción. El nippe Descartes tiene una programación muy matemática para que a los profesores de esta materia les resulte fácil su aprendizaje y utilización.

La palabra nippe es el acrónimo de "núcleo interactivo para programas educativos". El nippe Descartes, aunque se creó con la principal finalidad de la generación de actividades relacionadas con la representación gráfica de funciones, a lo largo de su desarrollo, se han ido incorporado otras utilidades como herramientas geométricas, el cálculo algorítmico, representación en tres dimensiones, etc. Es una aplicación que es capaz de producir una gran variedad de aplicaciones educativas para geometría, aritmética, álgebra, cálculo, estadística, física, etc.

En resumen, Descartes es una herramienta de trabajo para los profesores de matemáticas que deseen crear lecciones interactivas en el formato de páginas Web, ya sea para ser colocadas en un servidor de Internet o en el disco de un ordenador personal. Desde el punto de vista técnico, podemos definir a Descartes como un applet configurable. Que sea un applet significa que puede insertarse en páginas Web. Que sea configurable significa que cada aplicación o configuración puede tener un aspecto diferente. Las aplicaciones de Descartes son escenas educativas con gráficas y números en las que el alumno puede modificar parámetros manipulando controles y observar el efecto que esas modificaciones tienen sobre las gráficas y números.

¿Por qué es útil Descartes en un aula de clases?

Desde el punto de vista pedagógico, puede decirse que Descartes cumple con los requisitos para que una herramienta informática sea útil en un aula de clases, tales como:

- Que sea controlable por el profesor en un tiempo razonable.
- Que sea fácil de usar para los alumnos, para que no tengan que emplear demasiado tiempo en su aprendizaje.
- Que permitan diseñar actividades para los contenidos del currículo correspondiente al curso en donde se vaya a usar.
- Que sea adaptable a la didáctica y metodología que el profesor crea más conveniente para los alumnos con los que va a trabajar.
- Que favorezca metodologías activas, para que el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje.
- Que favorezca el aprendizaje cooperativo e individualizado, ya que el trabajo en equipo es esencial y la atención personalizada también.
- Que favorezca la atención a la diversidad, permitiendo que los materiales sean flexibles para poder modificarlos tanto cuanto se quiera.

¿De qué formas se puede aprovechar a descartes?

Se pueden distinguir tres formas de uso de Descartes:

Como autor: Para crear nuevas escenas originales, en donde se requiere tener un buen conocimiento de cada una de las herramientas del applet.

Como profesor: En este caso se necesita tener una mínima experiencia con algún editor de páginas web o manejo de un procesador de textos que permita editar este tipo de páginas. Después de manipular las herramientas de configuración de las escenas, puede efectuar con facilidad pequeños cambios: colores, poner o quitar ecuaciones, puntos, segmentos, etc.

Como alumno: Aquí no se requiere conocimiento técnico previo. Bastará con las indicaciones que se hagan en la propia página en la que se habrán señalado las actividades que se deben realizar.

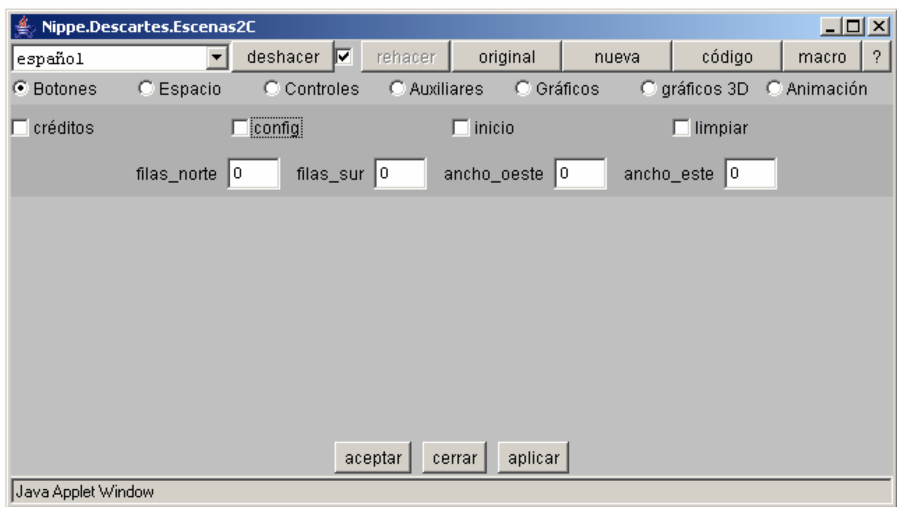
¿Cuáles son los requisitos mínimos para diseñar escenas con Descartes?

El applet Descartes no requiere instalación y se puede trabajar en cualquier sistema operativo por ser una aplicación programada con Java. Se requiere instalar en el ordenador la máquina virtual de Java, la cual es gratuita y se puede descargar de www.java.com. Para poder visualizar las actividades es necesario que en la carpeta donde se guarden las escenas de Descartes se encuentre el archivo Descartes.jar o Descartes3.jar.

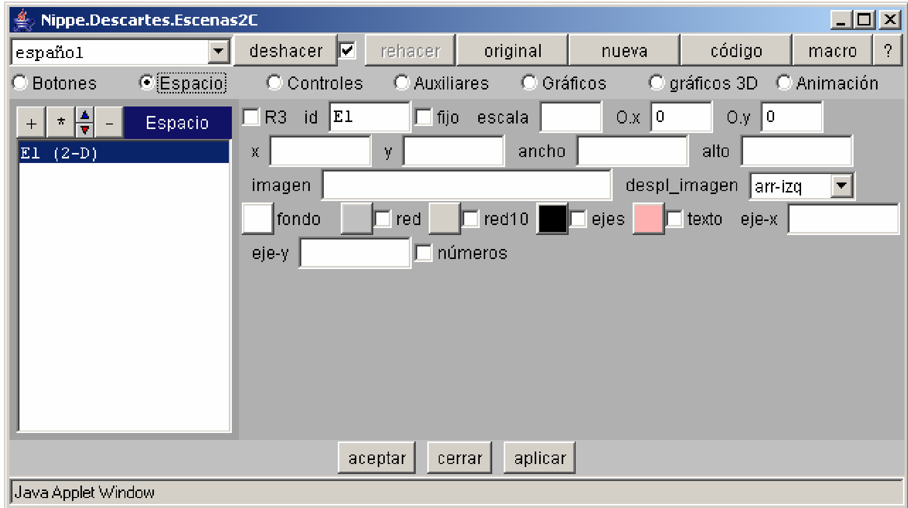
¿Desde dónde se configura una nueva escena o actividad con Descartes?

Descartes es un applet configurable, es decir, a partir de una escena se puede obtener una nueva escena con solo configurar los diferentes paneles que lo conforman. Los paneles de configuración se activan al pulsar clic derecho o doble clic sobre una escena; estos paneles son:

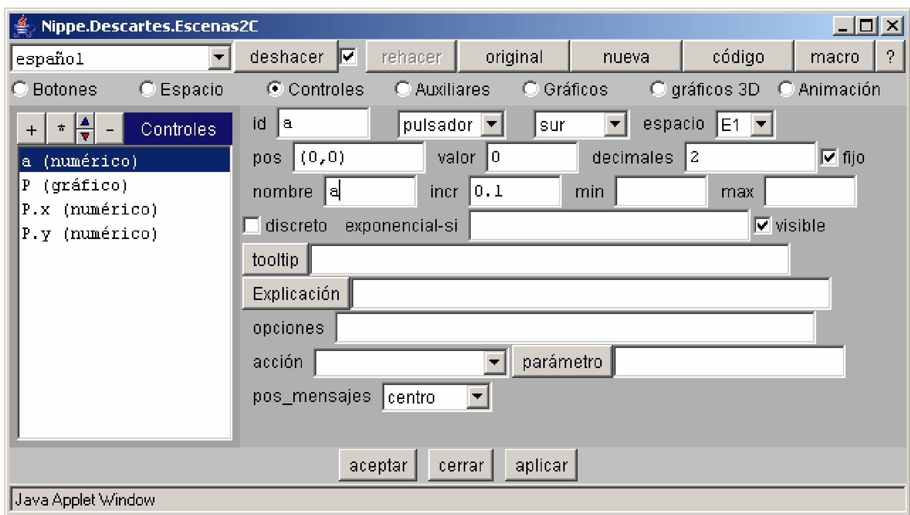
El panel Botones: Desde este panel se pueden agregar a luna escena los botones de créditos, configuración, inicio y limpiar. También se puede definir el número de filas arriba o abajo para los controles y el ancho para los controles a la izquierda o derecha.



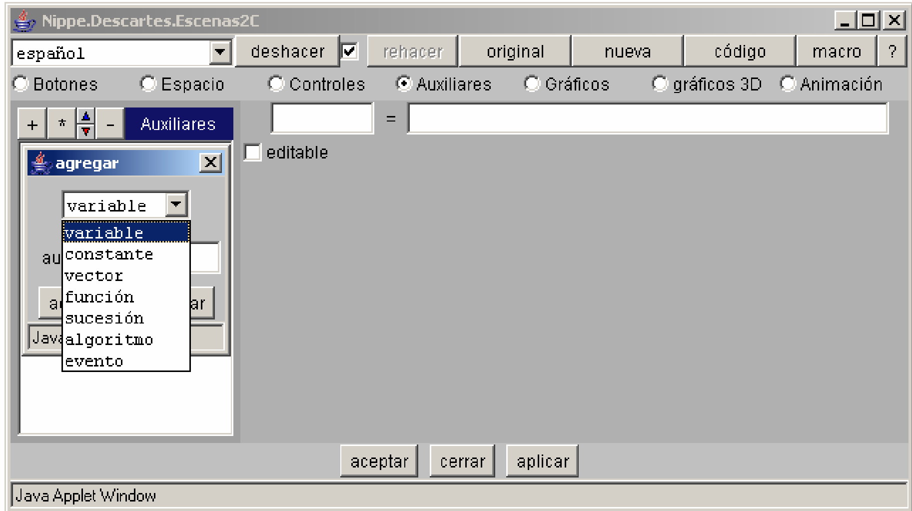
El panel Espacio: Aquí se puede elegir un espacio para diseñar escenas en R^2 o en R^3. Contiene una serie de campos para configurar la escala, color de fondo, ejes, coordenadas, posición, etc.



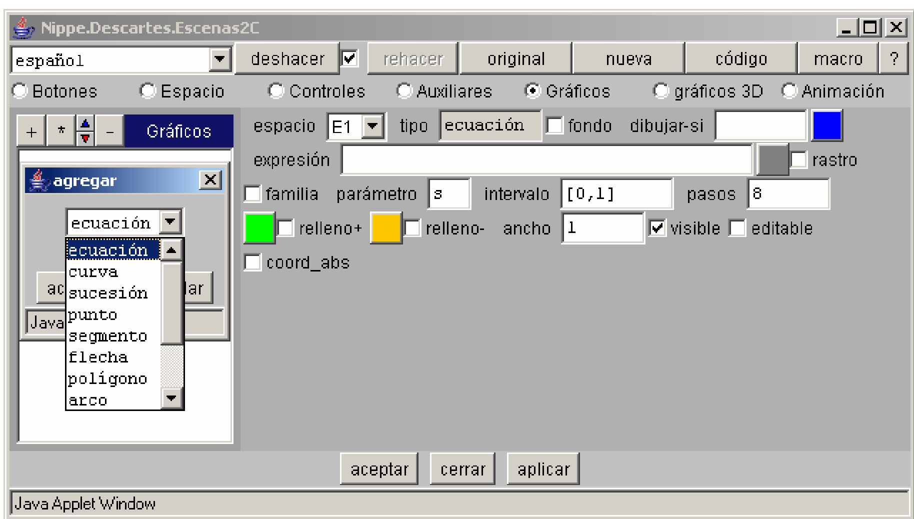
El panel Controles: Es el panel más importante ya que desde aquí se definen los controles o parámetros a través de los cuales el usuario interactúa con la escena; se pueden definir controles numéricos y gráficos. El panel contiene unos campos para configurar en los controles su valor inicial, valor final, valor por defecto, posición, etc.



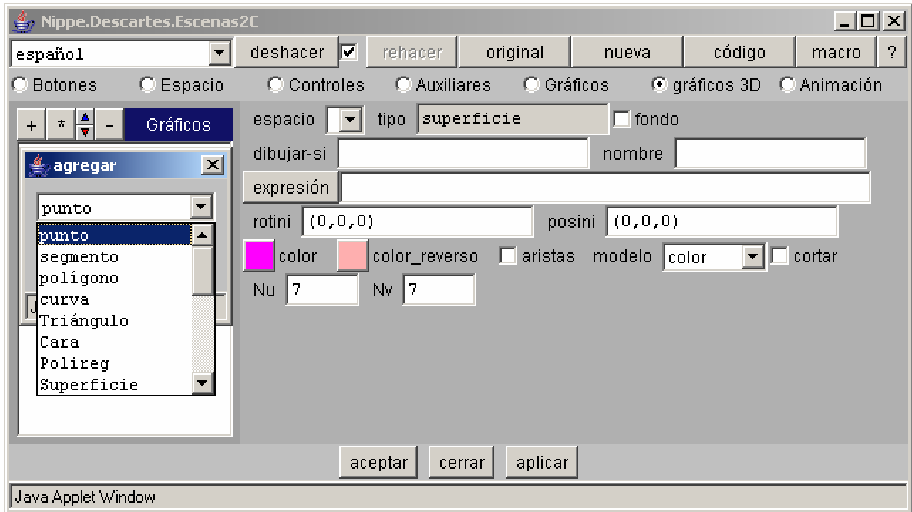
El panel Auxiliares: Este es uno de los paneles más útiles, ya que desde aquí se definen constantes, funciones, algoritmos, etc., que ayudan a agilizar los cálculos que hace el programa Descartes.



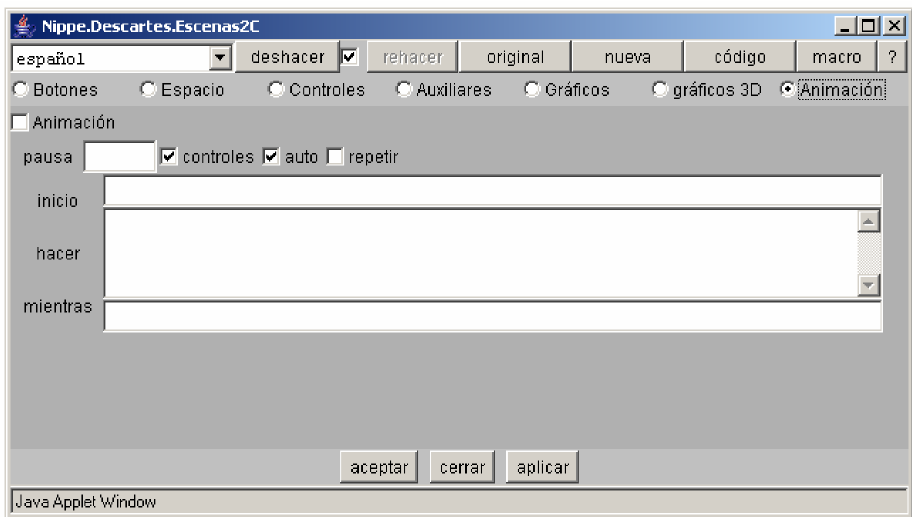
El panel Gráficos 2D: Este panel contiene una serie de macros que permiten graficar en R^2 ecuaciones, sucesiones, puntos, segmentos, arcos, polígonos, vectores, agregar textos, etc. en Contiene unos campos para indicarle al programa que las ecuaciones sean editables, incluir parámetros en las ecuaciones, etc.



El panel Gráficos 3D: Este panel contiene una serie de macros que permiten graficar en R3 puntos, segmentos, superficies, curvas, esferas, cilindros, conos, poliedros regulares, etc. Contiene unos campos para configurar los objetos mencionados.

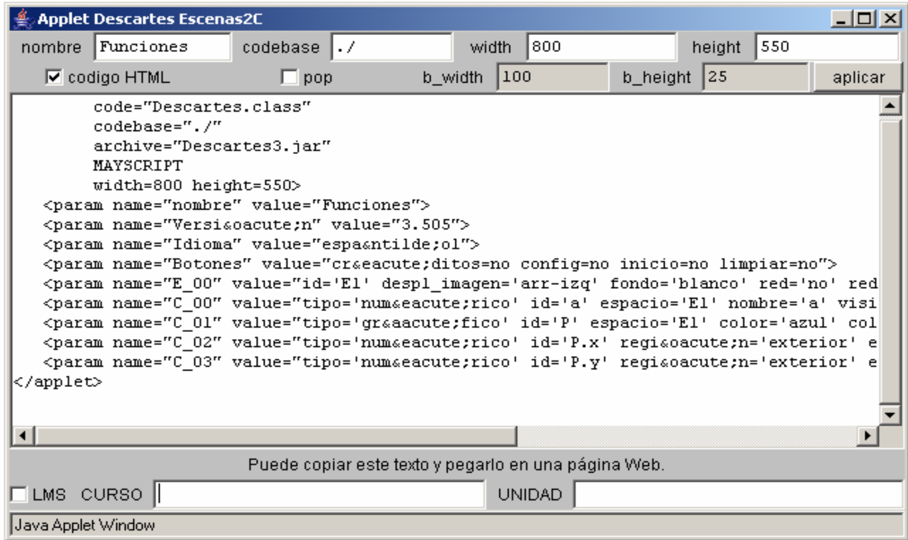


El panel Animación: Desde este panel se puede animar un parámetro mediante un algoritmo muy simple, lográndose que los objetos de la escena tengan movimiento propio sin necesidad de que el usuario manipule los controles.



¿Cuál es el procedimiento para guardar una escena de Descartes?

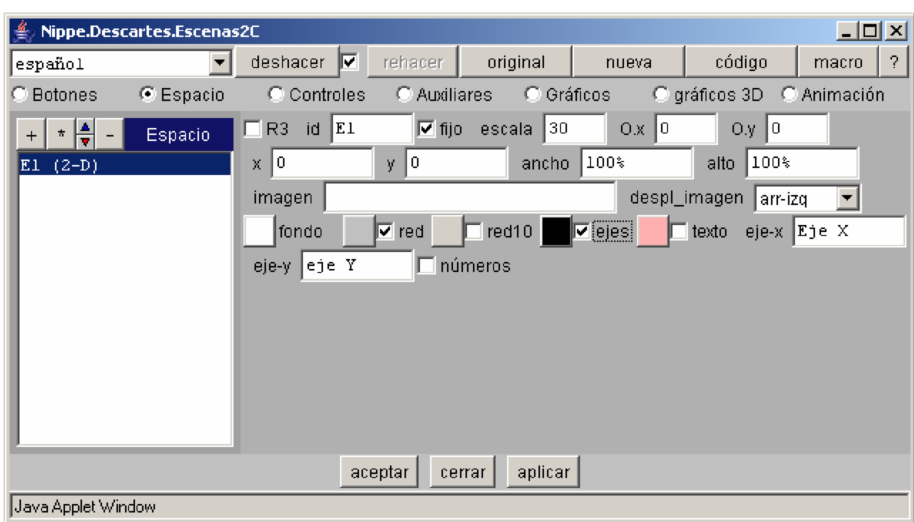
El creador de escenas con Descartes debe pulsar el botón código que aparece en la parte superior del panel de configuración, y se activará un tablero con el código html generado por Descartes; este código se debe insertar en el código de una página html, y finalmente se guarda esta página.



SEGUNDA PARTE

En esta sesión se guiará a los asistentes para que diseñen actividades en R^2. Se propone el diseño de una escena que permita visualizar la variación que sufre la gráfica de la función trigonométrica $y = ASen(Bx+C) + D$ cuando se dan valores diferentes a los parámetros A, B, C y D. Los pasos a seguir son los siguientes:

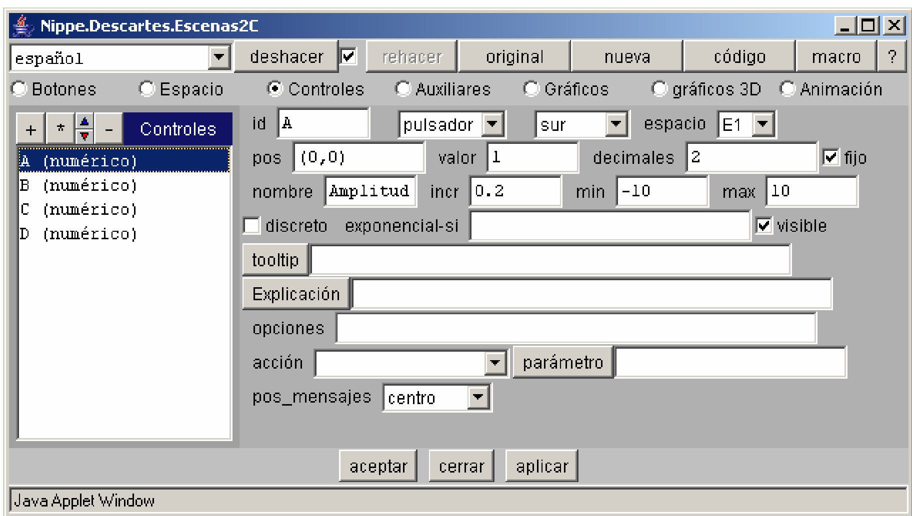
1) **Elegir el espacio en que se va a trabajar:** Se activa el panel **Espacio** y se elige R2, seguramente se llamará E1. Básicamente se configura Escala = 30, Origen en O.x=0 y O,y=0, Ancho=100% y Alto=100%, fijamos la pantalla dando clic en Fijo, se selecciona un color de fondo pulsando sobre Fondo, se selecciona un color para la cuadrícula y los ejes pulsando en Red y Ejes, respectivamente. En las casillas eje-x y eje-y se escribe el texto que queremos para los ejes. Con esta configuración el panel de Espacio quedara así:



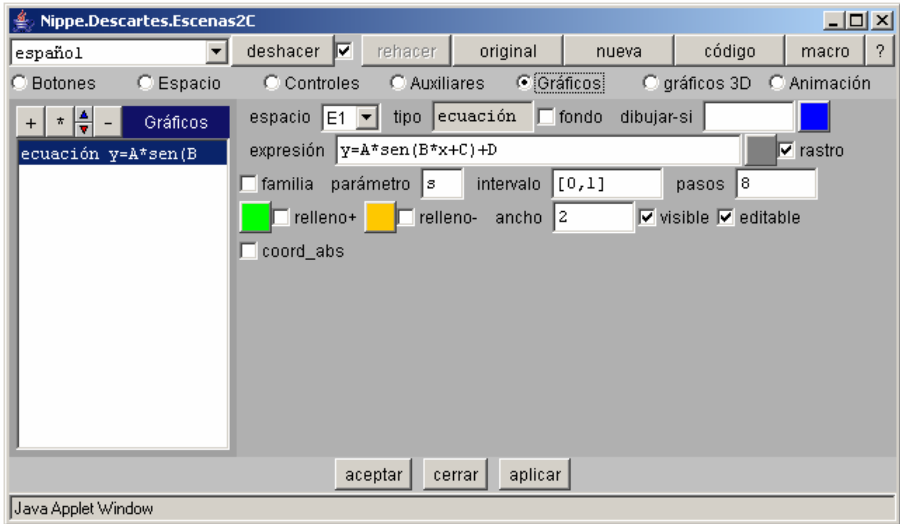
2) **Definir los cuatros parámetros A, B, C y D:** Se activa el panel de **Controles** y definimos cuatro controles numéricos; En Id se coloca el nombre del control como variable para el programa, en Valor se escribe valor por defecto, en Nombre se escribe un texto para guiar al usuario, en Tipo se elige el tipo de control (Pulsador, menú, barra o botón), enseguida se indica la ubicación en donde queremos que aparezca el control, en Incremento le damos el valor en que se incrementa el control. Nuestro controles tendrán las siguientes especificaciones:

Id	Valor	Nombre	Tipo	Ubicación	Incremento
A	1	Amplitud	Pulsador	Sur	0.2
B	1	Periodo	Pulsador	Sur	0.2
C	0	Desfase	Pulsador	Sur	0.2
D	0	Desplazar	Pulsador	Sur	0.2

El panel para el control A, quedará como se muestra en la siguiente figura:

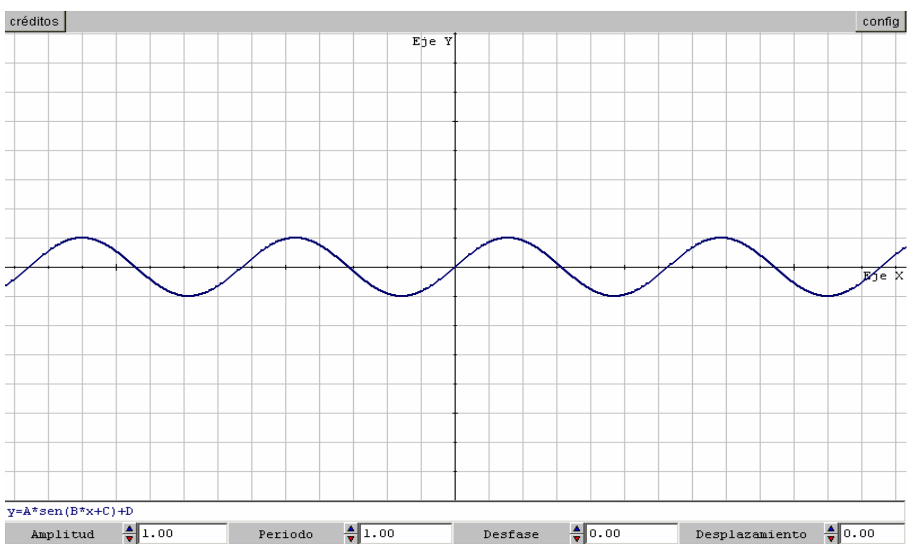


3) **Escribimos la función y = ASen(Bx+C) + D:** Se activa el panel **Gráficos** y se elige el elemento **ecuación**. En el campo Expresión escribimos la función que se quiere graficar, en Rastro damos clic para que en la escena queden los rastros de las diferentes gráficas obtenidas cuando cambiamos el valor de algún control, en Ancho indicamos el grosor de la gráfica, damos clic en Visible y Editable para que en la escena aparezca la ecuación de la gráfica y además pueda cambiarla o editarla. Para la función y = ASen(Bx+C) + D, el panel de gráficos queda así:



4) **Probar el funcionamiento de la escena:** Para ver como está quedando nuestra escena, pulsamos en el botón **aplicar**, el último botón en la parte inferior.

Se obtendrá la siguiente escena:



5) **Agregar algunos botones a la escena:** Cuando probamos la escena vemos la necesidad de ocultar los rastros o volver al inicio de la escena. Esto se resuelve abriendo el panel de Botones, en donde se agregan los botones Inicio y limpiar. Estos botones quedan ubicados automáticamente en los extremos de la parte inferior.

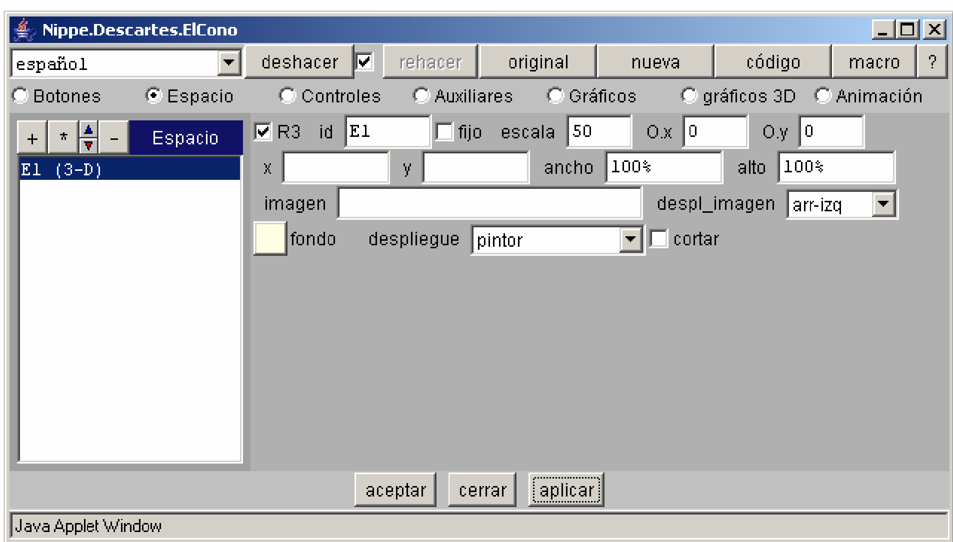
Para probar la funcionalidad de Editable, se propone a los asistentes que cambien la expresión y = A*Sen(B*x+C)+D por expresiones que tengan los mismos parámetros como y = A*Cos(B*x+C)+D, y = A*ln(B*x+C)+D, y = A*x^3 + B*x^2 + C*x + D, y = A*exp(B*x+C)+D, etc.

Finalmente, se propone a los asistentes que diseñen una escena para representar la suma de vectores en R^2, utilizando el elemento Flecha y controles gráficos.

TERCERA PARTE

En esta sesión se guiará a los asistentes para que diseñen una escena en R^3. Se propone el diseño de un modelo tridimensional que permita visualizar las secciones cónicas, para lo cual se deben dibujar un cono □ y un plano □ que atraviese al cono □. El plano □ es una superficie que podrá moverse gracias a los controles H y A, con el control A se modificará el ángulo de inclinación del plano con respecto al plano z=0, el control H permitirá desplazar el plano verticalmente. Para el diseño de la escena se seguirán los siguientes pasos:

1) **Elegir el espacio en que se va a trabajar:** Se activa el panel **Espacio** y se elige R3, seguramente se llamará E1. Básicamente se configura Escala = 50, Origen en O.x=0 y O,y=0, Ancho=100% y Alto=100%, se selecciona un color de fondo pulsando sobre Fondo, y en el campo Despliegue seleccionamos la opción Pintor para que la escena sea de alta calidad.

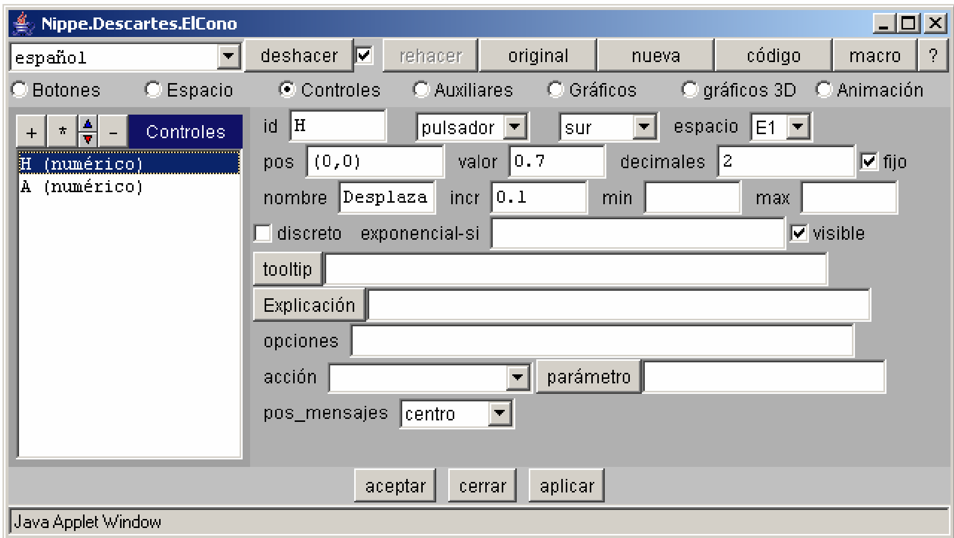


2) **Definir los parámetros H y A:** Se activa el panel de **Controles** y definimos dos controles numéricos; En Id se coloca el nombre del control como variable para el programa, en Valor se escribe valor por defecto, en nombre se escribe un texto para guiar al usuario, en Tipo se elige el tipo de control (Pulsador, menú, barra o botón), en el campo siguiente se da la ubicación norte, sur, este, oeste o exterior donde queremos que aparezca el control y en Incremento le damos el valor en

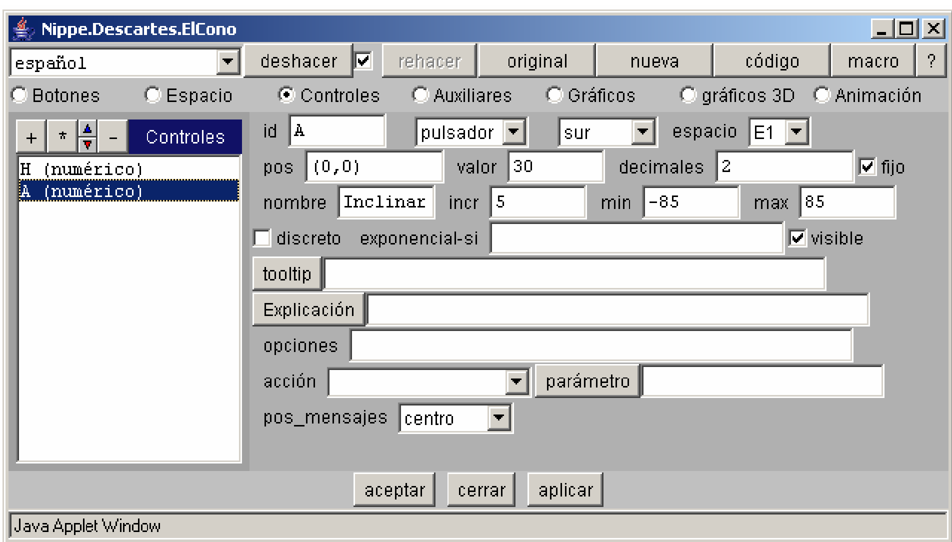
que se incrementa el control. Los controles H y D tendrán las siguientes especificaciones:

Id	Valor	Nombre	Tipo	Ubicación	Incremento
H	0.7	Desplazar	Pulsador	Sur	0.1
A	30	Inclinar	Pulsador	Sur	5

El panel para el control H, quedará como se muestra en la siguiente figura:

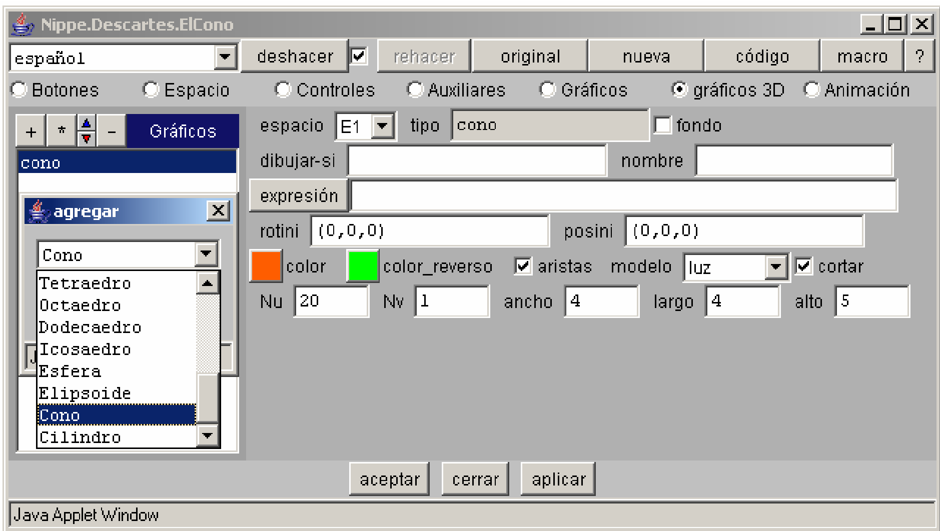


El panel para el control A, quedará como se muestra en la siguiente figura:



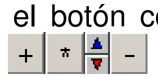
3) **Dibujar el cono :** Se activa el panel **Gráficos 3D** y se elige el elemento **Cono**. En los botones de Color y Color Reverso configuramos dos colores, la barra de transparencia se corre un 50%. En el campo Arista damos Clic. En el campo Modelo seleccionamos Luz o Color, este solo es aspecto para los colores del

cono. Damos Clic en la casilla Cortar para que las intersecciones con el plano queden bien definidas. Nu es el número de lados de la base del cono, ya que Descartes no dibuja una base circular sino poligonal regular, por eso aquí se da un número grande, puede ser 20 o 25. Nv es el número de secciones circulares visibles, solo necesitamos la base, por eso aquí se da un uno. En Ancho y Largo damos el radio de la base del cono, aparecen dos campos en caso de que se quiera una base elíptica, aquí escribiremos 4 en ambos campos. En Alto escribimos la altura del cono. Para el cono el panel de Gráficos 3D queda así:

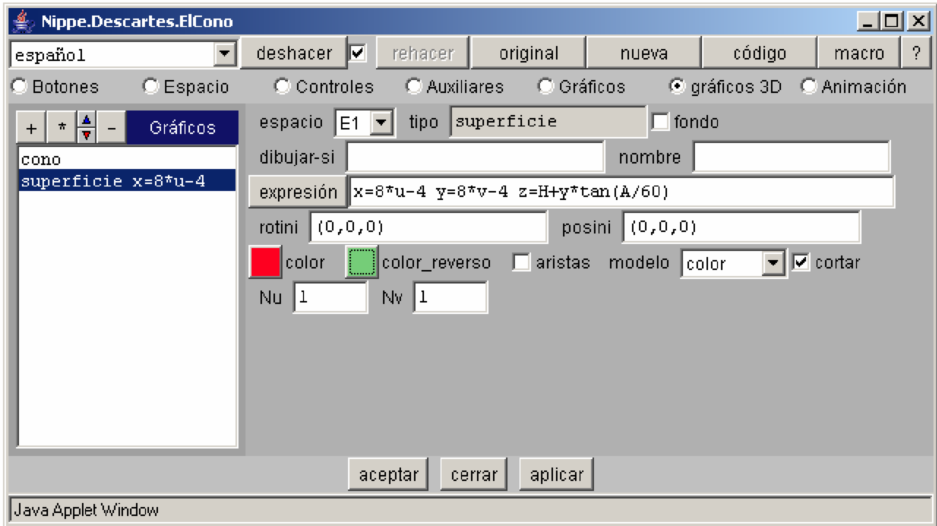


4) **Dibujar el plano:** Se activa el panel **Gráficos 3D** y se elige el elemento **Superficie**. En el campo Expresión escribimos la ecuación del plano: x=8*u-4 y=8*v-4 z=H+y*tan(A/60). En los botones de Color y Color Reverso configuramos dos colores, la barra de transparencia se corre un 50%. En el campo Modelo seleccionamos Luz o Color y damos Clic en la casilla Cortar. Los campos Nu y Nv en un plano definen una cuadrícula, por eso escribimos 1 en ambos campos.

5) **Probar el funcionamiento de la escena:** Para ver como está quedando nuestra escena, pulsamos en el botón **aplicar** ubicado en la parte inferior.

Las Gráficos 3D no dejan rastros y el panel para el elemento **Superficie** no tiene la opción de Editar, como sí sucede con el elemento **Ecuación** del panel Gráficos 2D. Para rotar el conjunto de objetos dibujados se arrastra el mouse con clic sostenido sobre el tablero de Descartes. Para agregar elementos desde cualquiera de los paneles se pulsa el botón con el signo + que aparece a la izquierda del panel de configuración: 

El panel para el plano queda de la siguiente forma:



El resultado final es la siguiente escena: