Universidad Pedagógica Nacional
Educadora de Educadores

El Fluido Perfecto como Herramienta para la Formalización de las Variables de Estado Presión y Densidad en la TER

Juan Carlos Pedraza Montenegro

Facultad de Ciencia y Tecnología

Línea de Investigación:

La Enseñanza de la Física Y la Relación Física Matemática
2020

El Fluido Perfecto como Herramienta para la Formalización de las Variables de Estado Presión y Densidad en la TER.

Por:

Juan Carlos Pedraza Montenegro

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Física

Asesor:

Profesor: Yesid Javier Cruz Bonilla

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología - Departamento De Física.

Línea de Investigación: La Enseñanza de la Física Y la Relación Física Matemática

Bogotá, Colombia

2020

Agradecimientos

"En la ciencia la única verdad sagrada es que no hay verdades sagradas." (Carl Sagan)

Este pequeño espacio es para agradecer a todas aquellas personas que han acompañado y han contribuido en mi formación profesional y personal, al profesor Yesid Cruz que ha motivado la rigurosidad y pasión por la ciencia, la matemática, la filosofía y la literatura y agradecer de forma muy especial a mi madre Rubiela Montenegro sin su apoyo no estaría donde estoy, por su convicción en que la educación es el motor que nos transforma y vuelve mejores personas.

Índice general

Índice de Símbolos

Símbolo	Definición	Unidad SI
$\frac{D()}{Dt}$	Derivada material o sustancial	-
c	Velocidad de la luz	m/s
$d\xi$	Diferencial de superficie	m^2
ρ	Densidad	kg/m^3
m	Masa	kg
$\vec{F}$	Vector fuerza	$kg * m/s^2$
p	Presión	N/m^2
$\vec{t}$	Vector tensión	N/m^2
s	Entropia	J/k
γ	Factor de Lorentz	-
∇	Operador nabla	-
$\vec{V}$	Velocidad relativa entre marcos inerciales	m/s
S	Marco de referencia no barrado	-
$\bar{S}$	Marco de referencia barrado	-
$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$	Delta de kronecker ($\delta^i_j = \delta_{ij} = \delta^{ij}$)	-
U	Vector cuadrivelocidad	m/s
P	Vector cuadrimomento	$kg * m/s$
S^o	Marco comóvil	-
m_o	Masa propia	kg
ρ_o	Densidad propia	kg/m^3
p_o	Presión propia	N/m^2
η	Densidad de particulas	$1/m^3$

Introducción

La mecánica de fluidos es una de las ramas más activa de la física clásica, debido a lo complejo de sus fenómenos y a lo complejo de sus desarrollos matemáticos, algunos como las ecuaciones de Navier-Stokes representan un reto dentro de la comunidad académica aún sin resolver, sin embargo, siempre se puede recurrir al estudio de fenómenos más simples de formalizar con la idea de estudiar su posibles aplicaciones a casos particulares, la teoría de fluidos perfectos desarrollada por Leonard Euler representa el modelo más sencillo para el estudio de un fluido al despreciar la viscosidad y la conducción térmica, definiendo para ello como sus únicas variables de estado la presión y la densidad, la idea de trabajar con medios continuos es inquietante pues como afirma castillo:

> La estática y la dinámica de medios continuos requieren del uso de esquemas de análisis y organización, para caracterizar el estado y los cambios que se dan en ellos, muy diferentes de las utilizadas en una mecánica de lo discreto como es la mecánica de corte newtoniano. (Castillo et al., 2014, p.41)

Además, este modelo puede ser representado en la teoría especial de la relatividad lo cual implica un enfoque físico y matemático que va en contravía al sentido común, esto permite un abordaje de la TER desde un enfoque diferente para su enseñanza; como el hecho por (Sierra Pareja, 2014), donde es abordado desde la electrodinámica, por tanto, el presente documento se centra en el estudio del fluido perfecto como herramienta en la comprensión de la TER.

El primer capítulo construye los fundamentos físicos y matemáticos de los fluidos perfectos recurriendo un poco a la historia de la ciencia, para derivar sus ecuaciones fundamentales, mientras el segundo capítulo plantea la formalización en términos relativistas de fluido perfecto y por último en un tercer capítulo se hace una discución, análisis y conclisión de los resultados obtenidos.

0.1 — Planteamiento del problema

La teoría especial de la relatividad[1] hace parte de los logros alcanzados en la física del siglo XX, cambiando por completo los conceptos clásicos de espacio y tiempo, implicó una revolución científica en cómo se entiende y representa la realidad. La idea de una física indistinguible del estado de movimiento relativo, marcó el escenario en donde se formalizaron conceptos, leyes y teorías, el escenario de la física clásica es marcado por el principio de relatividad galileano, que afirma, que todas las leyes la mecánica deben ser las mismas para cualquier marco inercial o lo que es lo mismo, deben ser covariantes, es así que las transformaciones de Galileo rigen la estructura físico y matemática de abordar e interpretar las observaciones que se hacen entre dos marcos inerciales; siempre que estos no se muevan a velocidades comparadas con la de la luz.

El caso del electromagnetismo clásico fue la razón por la que Albert Einstein publicó en 1905 la TER y con esto sentó la base para nuevas formalizaciones en la física, que se basa en dos postulados, uno de ellos es una extensión al principio de relatividad galileano, afirmando que: *"las leyes de la naturaleza son las mismas (o adoptan la misma forma) en todos los marcos inerciales"*(Friedman, 1991, p.186). como resultado de esto, todas las leyes de la física deben ser representadas de la misma forma matemática para todos los observadores inerciales, por tanto, ser covariantes.

En este sentido resulta de interés poner de manifiesto el carácter covariante de la mecánica de fluidos y con ello sus variables de estado, teniendo en cuenta que el estudio de medios continuos resulta diverso y complejo para algunas situaciones, se puede recurrir al modelo de fluido perfecto definido a partir de dos variables de estado; como lo es la presión y la densidad, y examinar como es el comportamiento de sus ecuaciones de campo al transformarse entre marcos inerciales, el desarrollo matemático en la TER implica que deben surgir objetos tetradimensionales (tensores) que permitan una

[1] También denominada TER por su siglas

interpretación física de un fluido perfecto relativista, por tanto, se plantea la siguiente pregunta que guiaran la presente investigación.

¿Cómo se caracterizan las variables de estado de la mecánica de fluidos bajo la teoría especial de la relatividad partiendo de la construcción de un tensor que dé cuenta de la conexión entre marcos inerciales para distintos observadores y bajo transformaciones de coordenadas?

0.2 — Objetivo General

- Caracterizar y formalizar el modelo de fluido perfecto a través de las variables de estado en la teoría especial de la relatividad como herramienta para su compresión.

0.3 — Objetivos Específicos

- Caracterizar las variables de estado presión y densidad desde el enfoque clásico y desde la TER.

- Examinar el principio de relatividad relativista y galileano entorno a las ecuaciones de campo de los fluidos perfectos.

- Elaborar el tensor que represente un fluido perfecto en la TER y se defina a partir de las variables de estado, a la vez que se definen sus ecuaciones de conservación.

1.0 — Capítulo I: Hacia la Formalización Clásica del Fluido Perfecto

La ciencia de hoy sin duda se vale de un conjunto de herramientas conceptuales, teóricas, experimentales y formales que permiten caracterizar y centrar el estudio de ciertos fenómenos particulares; no obstante, esto no siempre fue así, puesto que representó y representa en la mayoría de las veces un incesante trabajo y esfuerzo. Por ello en la siguiente sección se realizará una breve cronología para situar algunos hechos que resultaran relevantes para los fines de este documento. Por tanto, antes de comenzar se plantea una discusión alrededor de lo que se entiende por formalización en física, un aspecto fundamental para el desarrollo de la investigación.

¿Qué es entonces la formalización y que implica formalizar?

1.1 — La Formalización en la Física

El conocimiento puede considerarse como una forma de representación y organización de la experiencia por medio del lenguaje, lo cual pone de manifiesto el carácter formal del conocimiento al hacer uso de estructuras o modelos que dan cuenta del "mundo real", entendiendo que esta relación (sujeto-objeto) no es independiente,[1] lo que hace que esta sea única aun cuando también pueda ser compartida y comunicada: en este sentido, la formalización entonces expresa la forma en como representamos y comunicamos nuestro conocimiento de aquello que definimos como real, como afirma Ayala:

> formalizar es pues una parte esencial del proceso de construcción de conocimiento, caracterizado ante todo por la elaboración y uso de estrategias según las cuales los "diversos modos de mirar" son adaptados continuamente a aspectos de una realidad que es a su vez organizada de acuerdo a estos

[1] De ahí que no se llegue a un conocimiento último y verdadero de la realidad

> modos de conocer.(Ayala, 2018, p21)

Este planteamiento pone de manifiesto un hecho particular en la física y es su relación con las matemáticas, mientras que en las demás ciencias se da de manera instrumental, en la física cobra vital importancia; tanto es así, que es considerada la lengua por excelencia. Este hecho que pasa desapercibido en la mayoría de las veces o es asumido como obvio, está basado en afirmaciones como: que la naturaleza está escrita en lenguaje matemático o por el contrario que las matemáticas es una herramienta que el sujeto aplica para hablar de la naturaleza, así en el primer caso el sujeto es independiente del objeto de estudio y en el segundo es una mera construcción de este, como lo expresa Jean-Marc

> Según que dicho lenguaje se piense como el de la naturaleza, y que el individuo que la estudia deberá esforzarse por asimilar; o bien que se le conciba, a la inversa, como el lenguaje del individuo, al cual habrán de traducirse los hechos de la naturaleza para que resulten comprensibles.(Lévy-Leblond, 1999, p.53).

Pensar que solo existen estas dos posibilidades no resuelve el problema de la relación física y matemática, y muy por el contrario lo acentúan, así lo resalta Jean-Marc (1988), "*es esencial subrayar que ambas actitudes, lejos de oponerse, no son sino los puntos extremos de un espectro continuo*." (p.53). Bajo esta concepción se puede hablar de las distintas posibilidades y de las maneras diversas en que se relaciona lo físico y lo matemático, a lo que da lugar a diversos procesos de formalización en la física. De lo anterior se le podría agregar la siguiente cita de Jean-Marc (1988), "la matemática es un pensamiento, un pensamiento seguro de su lenguaje." (p.55), para hacer referencia a que las matemáticas como lenguaje siguen siendo una visión pobre para dar cuenta de la relación física y matemática.

Para ver como este proceso de formalización tiene lugar, hay que tener en cuenta dos aspectos claves que se dan en la física, uno tiene que ver con las distintas posibilidades de matematización que exhibe un fenómeno físico; denominado polimorfismo físico, que se ve por ejemplo con, la mecánica de Newton, Lagrange y Hamilton, que se formulan para describir un punto material en un campo conservativo (Lévy-Leblond, 1999), por otro lado, la posibilidad que existe de utilizar una misma formulación matemática siempre que sea posible su aproximación para describir distintos fenómenos, como lo nota(Lévy-Leblond, 1999), "*las ecuaciones diferenciales lineales (con coeficientes constantes) de segundo orden rigen las vibraciones mecánicas, las oscilaciones eléctricas y muchos otros fenómenos.*" (p.57), lo que se describe como la plurivalencia física de los objetos matemáticos.

Estas dos ideas antes mencionadas permiten entender los rasgos característicos en los procesos de formalización y permite definir un espectro amplio en la forma en que se aborda, se representa y se desarrolla el conocimiento de los fenómenos fisicos.[2] Por tanto, formalizar en física implica estructurar o construir una forma o conjunto de formas esquematizadas sobre la cual se puede operar la realidad que a su vez es representada con estas formas, para poder anticipar de ella los efectos de los objetos que se buscan representar. Con lo anterior planteado, vale la pena realizar un recuento de cómo se dan tales procesos en la historia de la hidrodinámica.

1.2 — Breve Historia de los Fluidos y su Formalización

Pensar en el desarrollo de una teoría sobre fluidos puede llevarnos a momentos y lugares de la historia tan diversos que sería imposibles abordarlos todos al tiempo, en algunos no existen registros y lo mejor que se puede llegar hacer es divagar o imaginar para viajar desde aquellos momentos donde los humanos primitivos caminaban por la inhóspita tierra en busca de comida, refugio y agua, hasta los primeros asentamientos humanos donde se dieron pensamiento alrededor de fenómenos relacionados con estos, como lo son: las inundaciones, las tormentas o huracanes . Lo que hoy sabemos es que las grandes civilizaciones entre ellas la griega y la romana, construyeron

[2]Es preciso aclarar que bajo esta concepción pueden afirmarse diversas formalizaciones que tienen lugar entre el sujeto y el objeto, y de manera general se pueden situar cuatro categorías que son desarrolladas en el libro - Los procesos de formalización: y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos- estas son: formalización de carácter pragmático, aplicación de las matemáticas en el análisis de los fenómenos físicos, axiomatización de las teorías físicas y unificación de campos fenoménicos y matematización de un campo fenoménico.

relatos pictóricos, escritos y hablados para representar aspectos de la naturaleza que no eran entendidos más que como manifestaciones de entidades místicas o de deidades, los dioses Océanos y Neptuno son algunas de estas representaciones que encarnan todo lo relacionado al mar, por ejemplo:

> Se nos informa que el lugar de Neptuno estaba debajo de las aguas profundas cerca de Grecia. Neures, otra personificación del mar, también es bastante inseparable de su elemento nativo, como también lo son los Tritones, Oceánidas, Nereidas y las atractivas sirenas que, sin embargo, también han sido vistas como personificaciones de los vientos.(Tokaty, 1994, p13)

El esfuerzo de la humanidad por entender la existencia y consistencia de las cosas que aparecen ante sí (como dichos fenómenos) llevaron a la pregunta ¿Quién existe? Y ¿Qué es consistir? – fundamento de la ontología-, que se da desde luego con el desarrollo de la filosofía en Grecia, así lo hace notar Manuel García:

> El primer esfuerzo filosófico del hombre fue hecho por los griegos, y empezó siendo un esfuerzo para discernir entre lo que tiene una existencia meramente aparente y lo que tiene una existencia real, una existencia en sí, una existencia primordial, irreductible a otra.(Morente, 1964, p65).

Entender cuál es la esencia última de las cosas o responder a la primera pregunta ya planteada de ¿Quién existe? constituyo la metafísica, que permitió construir explicaciones más elaboradas al problema de la existencia. El aire y el agua sirvieron para responder a estas preguntas, en filósofos como Anaxímenes y Tales de Mileto (624-546 Ac), este último considerado como el filósofo griego más antiguo, así se dice que:

> Este hombre buscó entre las cosas cúal sería el principio de todas las demás, cuál sería la cosa a la cual le conferiría la dignidad de ser, de principio, de ser en sí, la existencia en sí, de la cual todas las demás son meros derivados; y el hombre dictaminó que esta cosa era el agua.(Morente, 1964, p.66).

Y sin extenderse más, la visión de algunos antiguos griegos de encontrar en una sola cosa la existencia de las demás, es contrapuesta por Empédocles, que no ve en una sola cosa sino en varias, mejor aún en cuatro, el principio sobre el cual todas las demás cosas están constituidas y estas son; la tierra, el fuego, el aire y el agua (los cuatro elementos), esto le permite explicar a él los distintos tipos de materia – diríamos hoy- que existen en la naturaleza, esto es, que la esencia de las cosas no es más que una combinación en alguna proporción de estos elementos.

Ahora bien, tomar el elemento agua para hacer de este una ciencia solo fue posible con uno de los más grandes geómetras que haya existido, Arquímedes (287-212 A.C) de Siracusa. De sus trabajos y de los trabajos de posteriores pensadores que lo han citado, se sabe de los numerosos aportes que hizo a diferentes áreas del conocimiento, tanto así que es considerado por muchos como "*un hombre que destaco en matemáticas, física, astronomía, ingeniería e incluso, tuvo un papel importante y decisivo en cuestiones militares y políticas*"[3](Fernández, 2017)

Uno de estos aportes, que en sí mismo es la piedra angular para la hidrostática fue recogida de un palimpsesto,[4] en la biblioteca del monasterio del Santo sepulcro de Jerusalén por Heiberg en 1906 (Levi, 2001). El palimpsesto trae consigo dos obras *El Método* y De *los cuerpos flotantes*, este último, es el primer tratado que se tenga hasta entonces de hidrostática; compuesto a su vez por dos libros, escritos bellamente a partir de postulados, proposiciones, teoremas y demostraciones geométricas. Siguiendo así con la tradición de la escuela de Euclides en Alejandría, activa en ese entonces por Canon de Samos, Dositeo y Eratóstenes.

En esta obra (De los cuerpos flotantes) Arquímedes nos muestra su método para analizar problemas relacionado al equilibrio y comportamientos de cuerpos sumergidos ya sea total, parcial o que floten sobre este, para esto, parte del siguiente postulado:

> Supongamos que un fluido es de tal carácter, que sus partes reposan de igual forma y siendo continuas, la parte que está menos empujada es conducida por la que está más empujada, y que cada una de sus partes es em-

[3]Se cuenta como ayudo al tirano Hierón, que se cree fue pariente suyo, ante el embate de las tropas romanas, su ingenio en la construcción de todo tipo de armas le valieron el sobrenombre por el cónsul romano Marco Claudio Marcelo (268-208 a.C) de "Geómetra Briareo".

[4]Es un manuscrito antiguo sobre el cual se escribe nuevamente algo al haber borrado lo que allí había.

> pujada por el fluido que está encima de ella en una dirección vertical, si el fluido está sumergido en cualquier sustancia y comprimida por algo más (Becerra et al., 2006, p.1) [5]

Bajo este primer postulado, Arquímedes muestra una idea de presión y a su vez de gravedad, mientras enuncia la idea de equilibrio cuando las partes del fluido sean igualmente empujadas por las demás, también se puede entender como afirma Enzo:

> Siempre que el fluido sea continuo y uniforme a) si hay diferencia de presiones entre dos partes contiguas, la de mayor presión empuja hacia adelante a la de menor, y b) cada una de sus partes está sujeta a la presión del fluido que está encima (en dirección vertical).(Levi, 2001, p.23)

Este postulado cobra importancia relevante cuando se enuncia la siguiente proposición, "*Si una superficie es cortada por un plano que pasa a través de cierto punto y si la sección es siempre una circunferencia (de un circulo) y el centro es el punto mencionado, la superficie es de una esfera.*"(Becerra et al., 2006, p.2).

Esto junto al primer postulado muestra que un fluido en equilibrio siempre adoptará una forma esférica o por lo menos la superficie de este será la de una esfera con centro en la tierra, así de manera implícita muestra la concepción que tenía de una tierra esférica, como lo hacen los astrónomos griegos de la época como Eratóstenes. Con esto en mente Arquímedes comienza a derivar proposiciones que dan cuenta las distintas situaciones que se presentan cuando cuerpos solidos interaccionan en un fluido en equilibrio, por ejemplo, un sólido que flota bajo la superficie del fluido en equilibrio (proposición 3) o un sólido que está parcialmente sumergido (proposición 4) y un cuerpo que se hunde en él (proposición 7)(ver figura 1.1)

Así mismo, se deduce de esta obra el famoso principio hidrostático o principio de Arquímedes como el resultado de combinar la proposición 6 y 7 del primer libro (Fernández, 2017), este principio como se estudia actualmente en muchas partes del

[5] El libro "The Works Of Archimedes" editado por Heath Thomas Little 1897 es una recopilación de varios trabajos realizados por Arquímedes entre ellos sobre los cuerpos flotantes, traducido al español por Becerra, H., Bello, C., & Díaz, V. (2006).

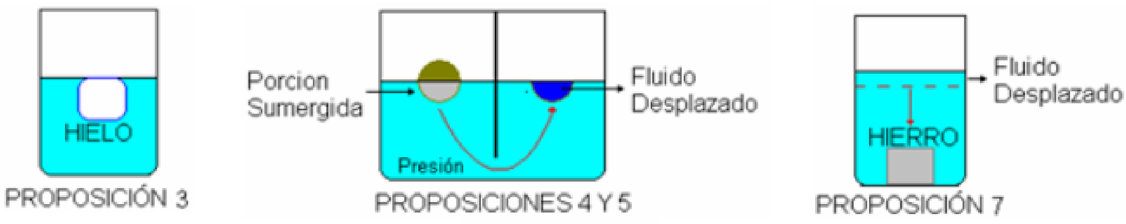

Figura 1.1: Tomado de: Becerra, H., Bello, C., & Díaz, V. (2006). "Sobre los cuerpos flotantes" de Arquímedes: una mirada experimental. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9003/1/SobreCuerpos2006Becerra.pdf

mundo está lejos de tener la forma matemática que conocemos hoy, partiendo del hecho que los conceptos de fuerza y presión no fueron desarrollados por él; aun cuando si introduce el de peso específico o densidad. Esto se puede ver por ejemplo en el relato debido a Vitrubio reconocido arquitecto romano, que narra la anécdota de la corona del rey Hierón II, que Arquímedes resuelve elegantemente, el procedimiento aplicado para la solución de este problema aparecería en un poema titulado De ponderibus et mensuribus (De los pesos y las medidas) en el año 500 d.c (Levi, 2001).

Sus ideas al igual que sus trabajos permanecieron en el olvido durante varios siglos, esto debido a que el pensamiento aristotélico fue ganando cada vez más fuerza. No es sino en 1603, en una reunión entre filósofos y matemáticos en Florencia, que Galileo Galilei (1564-1642) haciendo uso de su conocimiento en temas hidrostáticos (gracias a que uno de sus maestros[6] conoció la obra de Arquímedes), allí plantea senda discusión entre los defensores del pensamiento aristotélico, que aseguraban que la flotación de un cuerpo solo dependía de su forma y no como aseguraba Galileo de su densidad, esta discusión quedó consignada por voluntad de Cósimo hijo del gran duque de Toscana Ferdinando de Medici, así se dice que:

> Fue entonces cuando Cósimo ordenó a su Matemático redactar una relación al respecto, misma que apareció en 1612 bajo el título Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono (Discurso acerca de los cuerpos que se sostienen sobre el agua o se mueven dentro de ella).(Levi,

[6]Ostilio Ricci había sido el discípulo de Tartaglia traductor de Arquímedes y por tanto conocedor de su obra (Fernández, 2017)

2001, p.29)

Aunque también se cree que las ideas de Arquímedes aparecieron un poco antes con Leonardo da Vinci (1452-1519), este personaje más reconocido como artista que como hombre de ciencia, estudió el comportamiento de los líquidos e ideó distintos montajes, entre ellos canales que le permitió por medio de pequeñas partículas (semillas) trazar sus trayectorias, que posteriormente y con bastante dedicación plasmó en papel, adicional a esto hizo afirmaciones sobre la naturaleza del agua y del aire llegando a encontrar características comunes, desapercibidas luego por Newton, como se muestran en las siguientes citas *"en todo caso donde hay movimiento el agua tiene gran parecido con el aire."*(Truesdell et al., 1975, p.71), *"el movimiento del agua en el seno del agua se parece mucho al aire en el seno del aire"*. (Truesdell et al., 1975, p.71)

Otras ideas desarrolladas por Da Vinci, pueden suscitar más revuelo, dado que él nunca sistematizó sus observaciones ni hizo alguna medición que diera cuenta de lo visto, sin decir que su método era poco riguroso, con lo cual hay dificultad de atribuirle dichos descubrimientos estos son: el principio de continuidad y de circulación constante.

1.2 — Mecánica de Fluidos Apartir del Siglo XVIII

Lo más notable sin lugar a duda con el que se cierra el siglo XVII y abre el siglo XVIII son los *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, publicado en 1687 por Sir Isaac Newton (1642-1727) una obra que alcanzo rápidamente gran prestigio en la comunidad académica, los efectos que produjo en la física representan por un lado un gran avance para condensar un sin número de fenómenos descritos por tres leyes (las leyes de Newton) y por otro lado como una obra original que define problemas concretos[7] sobre los cuales enfocar la atención.

El segundo libro hace una discusión extensa sobre la resistencia de los cuerpos en medios fluidos, la obra es extensa y compleja de entender por lo que solo se presenta

[7]Uno tenía que ver con la forma de la tierra, en donde existía una lucha entre cartesianos (teoría de vórtices) y los newtonianos, unos proclamaban que la tierra era achatada por el ecuador (cartesianos) y los otros que era achatada por los polos (newtonianos).

la definición que da Newton de un fluido, que es dada en la sección V (sobre la densidad y compresión de los fluidos, y sobre la hidrostática) del libro 2:

> Fluido es todo cuerpo cuyas partes ceden a la aplicación de cualquier fuerza, y, al ceder, se mueven entre sí con facilidad. (Newton & Escohotado, 1987)

Hoy estos fluidos considerados newtonianos son un caso particular de los medios continuos al considerar un valor constante para la viscosidad del medio, entendiendo que la viscosidad es la oposición que sufren los fluidos mientras fluyen. Pero no fue sino 65 años después cuando aparecieron las famosas ecuaciones de Newton en su forma matemática que realmente incentivó buscar los principios generales de la física y con ello de la mecánica de fluidos, estás ecuaciones las presenta Leonard Euler(1707-1783) y es él también el que se encamina hacia la búsqueda de estos principios. Considerado el físico teórico más importante del siglo XVIII, hizo grandes contribuciones a las matemáticas y en la física sus trabajos son de suma importancia. Se le debe a él, el desarrollo de una teoría de *fluidos perfectos*; si bien se le reconoce como el precursor de tal teoría, lo cierto es que llega a ella siguiendo los trabajos, por un lado, de los Bernoulli, de científicos e investigadores contemporáneos a él, y recogiendo los desarrollos que se venían acumulando entorno a esta ciencia.

Si se parte de lo que expone Clifford Ambrose Truesdell[8], fueron dos problemas los que se derivaron del libro II de los principia de Newton, uno tenía que ver con la forma de la tierra, disputa que se daba entre el modelo de vórtices promulgada por Descartes y el modelo de Newton; que se basa en la acción a distancia, por otro lado, la salida de un líquido por un recipiente, que fue atacado por Daniel Bernoulli (1700-1782), el problema supuso integrar varios principios que aún no eran del todo convincentes, entre ellos el de Leibniz; que se basa en el concepto de *fuerza viva* – hoy asociado con energía cinética- y *fuerza muerta* – esta a su vez con la energía potencial-, de esta manera es que se cree que infiere la famosa ecuación de Bernoulli, sin embargo parece que no es del todo claro cómo llega a ella, pues no aparece en ninguno de sus tex-

[8]Matemático, físico e historiador de la ciencia.

tos. En su obra hidrodynamica publicado en 1738 presenta la manera como se podría calcular la presión dentro de un fluido, en palabras de Truesdell:

> considera al fluido como si fuera un bloque y hace desaparecer la pared del recipiente por donde se quiere calcular la presión ... el bloque de fluido que anteriormente se apoyaba sobre este punto experimenta un impulso que Bernoulli relacionó, con el principio de conservación de la energía, con la presión que debe ejercer la pared para contener al fluido. (Truesdell et al., 1975, p.122)

Es de aclarar que Daniel como lo hacen la mayoría de científicos de la época, consideran la presión en términos de la fuerza por unidad de área, en la siguiente imagen (figura 1.2),[9]se representa uno de estos experimentos de donde se infiere la ecuación de Bernoulli. En la imagen se relaciona la altura perdida con respecto a la cota superior $\mathbf{H_o}$ en el punto $\boldsymbol{m}$ hasta el punto $\boldsymbol{h}$ (altura $\boldsymbol{mh}$), con la energía cinética que ha ganado la columna de agua -en el conducto- en la toma manométrica, que se asocia a la sobrepresión[10] en la columna de agua con altura $\boldsymbol{ah}$, así de esta forma y haciendo unos breves procedimientos se llega a la famosa ecuación de Bernoulli :

$$\rho g H_o = p - p_\alpha + \rho \frac{v^2}{2}{}^{11} \tag{1.1}$$

Esta forma matematica que toma la ecuacion fue dessarrollada por Euler, aunque Juan Bernoulli (1667-1678) padre de Daniel, presenta en su Hidráulica de 1739 una organización más adecuada y comprensible al desarrollo hecho por su hijo.

Lo más notable de la obra (Hidráulica) de Juan Bernoulli es un adelanto hacia la formalización del concepto de presión, partiendo como lo describe Truesdell del concepto de fuerza interna, que recoge de otro estudio debido a la flexión de cables donde

[9]Las guías, flechas y parámetros que aparecen allí, se han puesto de manera adicional para mejorar la explicación, y no corresponden a la imagen original.

[10]La sobre presión se entiende cómo; la presión debida a la columna de agua en la toma manométrica (ah), representada como : p'=p-p_α donde p_α es la presión atmosférica

[11]Para una mejor compresión, véase: Las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos por Liñán, A. PP. 154- 158

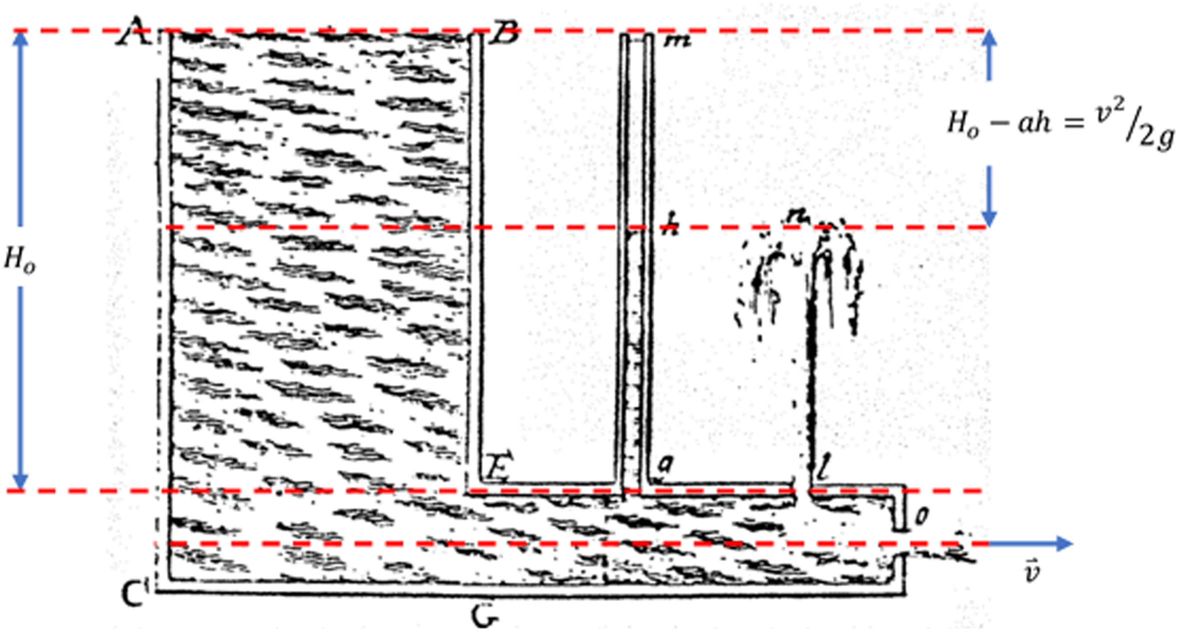

Figura 1.2: . Liñán, A. (2007). Técnica de medición de la presión que él introdujo por primera vez en la Mecánica de Fluidos. [Figura]. Recuperado de: http://www.profesaulosuna.com/data/files/TOPICOS %20SELECTOS %20DE %20FISICA/FLUIDO/LINAN_CL_2009_01a.pdf

ya había formalizado el teorema de Pardies[12] en el tratamiento de la curva catenaria, así supone la existencia de un volumen (cilindro) infinitesimal en el seno de un medio fluido sobre el cual actúan fuerzas tangenciales en la superficie de dicho volumen, aclarando que:

> Mediante esta abstracción... no debe confundirse con la presión ejercida sobre la pared... ni con el peso de una columna de líquido en reposo ya que aparece en los trabajos antiguos, pues el nuevo concepto incluye a éstos dos como casos particulares. (Truesdell et al., 1975, p.120)

1.2 — La Teoría de Fluidos Perfectos de Euler

La estocada final la haría Euler al introducir el concepto de *presión interna* que junto con *el principio general del momento lineal* le permitieron encontrar las ecuaciones diferenciales para describir la dinámica de los fluidos irrotacionales e incompresibles. Euler sabía de los trabajos de Juan y Daniel Bernoulli y adicional a esto él ya

[12]Este teorema presuponía que la acción de cualquier parte de un arco pesado sobre su vecina es equipolente a una fuerza tangencial que actúa sobre la juntura.(Truesdell et al., 1975).

había elaborado trabajos del mismo corte; esto es, hallar las expresiones matemáticas para casos particulares, uno de estos trabajos titulado *Sur le mouvement de l'eau par de tuyaux de conduite* (Sobre el movimiento del agua a través de tuberías) se basa en analizar el comportamiento de bombas de agua (ver figura.1.3) y encontrar la relación entre un diferencial de velocidad y de presión que experimenta una porción de masa fluida en la tubería de ascenso, con esto en mente utiliza el principio de continuidad y en resumen concluye que para un diferencial de volumen contenido entre el área yz y YZ, es la diferencia de presión estre estas las que produce el movimiento.

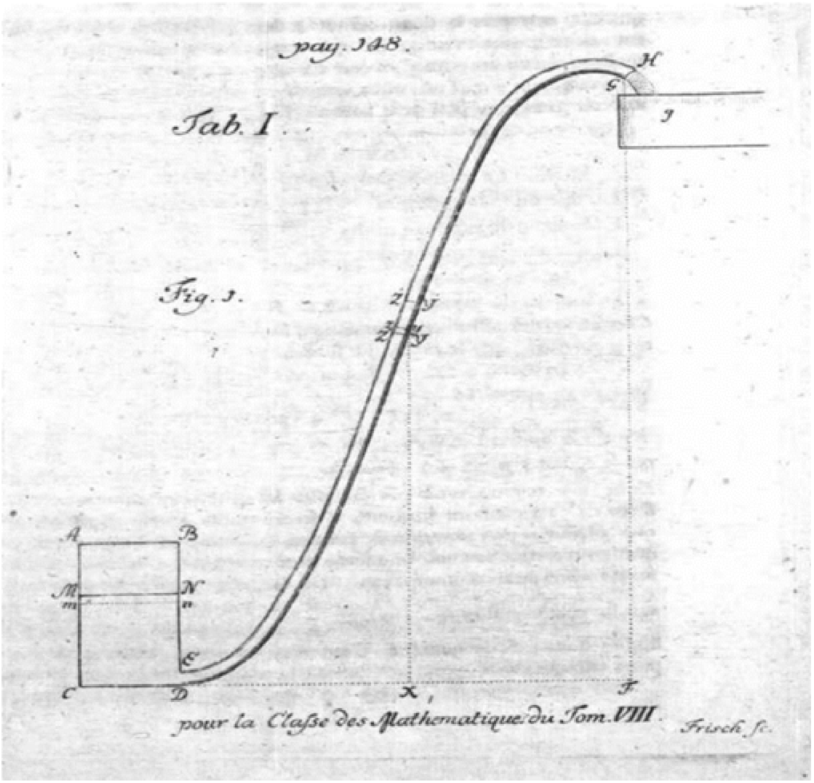

Figura 1.3: Euler. (1754). Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite-Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, Volume 8, pp. 111-148.. [Figura]. Recuperado de: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/206/

Esto permitió a la vez desarrollar otro concepto fundamental, el de *partícula fluida* hoy en día ampliamente usado para describir la dinámica de fluidos, un concepto tan simple, pero a la vez tan potente que está a la base de la formalización de esta ciencia, decantado por él, al llevar al límite (casi infinitesimal) un volumen de masa, de tal forma que pueda describirse como un punto físico, con propiedades como: momentum, masa, volumen, densidad entra otras, siempre y cuando dicho volumen sea lo suficientemente grande para albergar un número elevado de partículas o moléculas, de esta forma se pueden describir las trayectorias de dichas partículas fluidas como función de las coordenadas espaciales y como función del tiempo, así por ejemplo; si se consideran las trayectorias de partículas fluidas al interior de un tubo de corriente y se asume que estas trayectorias son paralelas y continuas en todo su recorrido (Tokaty, 1994) y además que la cantidad de materia que entra por la sección transversal en **A** es igual a la que sale en **B**, como se muestra en la (figura 1.4).

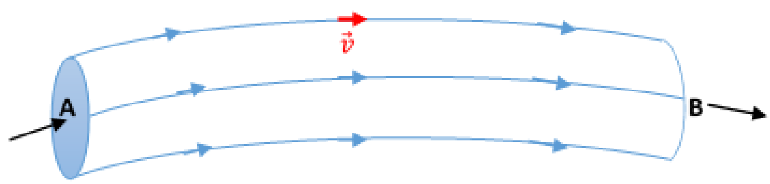

Figura 1.4: Tokaty, G. A. (1994). Líneas de corriente de flujo en un tubo de corriente. [Ilustración]. Recuperado de: A history and philosophy of fluid mechanics.

Entonces, la velocidad –el vector- es tangente a la trayectoria o línea de flujo de las partículas fluidas en todo momento, resulta es fácil usar las propiedades del producto cruz, para notar que $\vec{v} \times \vec{dl} = \vec{0}$ donde $\vec{v}$ es el vector velocidad y $\vec{dl}$ es la diferencial de la línea de flujo con sus respectivas componentes dx, dy y dz, es entonces que:

$$\vec{v} \times \vec{dl} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{1.2}$$

De la cual se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{1.3}$$

Que se denomina ecuación de líneas de corriente, por otro lado, para establecer la ecuación de conservación para la masa basta con establecer la variación de la misma en el tiempo a través de una superficie contenida en un volumen determinado, conocida como la ecuación de continuidad, que para fluidos incompresibles ρ es constante (véase el Anexo A)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \nabla \vec{V} = 0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Estas ideas las perfecciona y generaliza en su tratado llamado *Principia Motus Fluidorum* presentado a la academia de Berlín en 1752, donde desarrolla el conjunto de ecuaciones – entre ellas la (1.4) - necesarias y suficientes para determinar el estado de movimiento de un fluido, que como ya se ha mencionado es por hipótesis incompresible e irrotacional. Lo que sigue es aislar una partícula fluida situando un marco de referencia cartesiano para hacer el balance de fuerzas (ver figura 1.5)

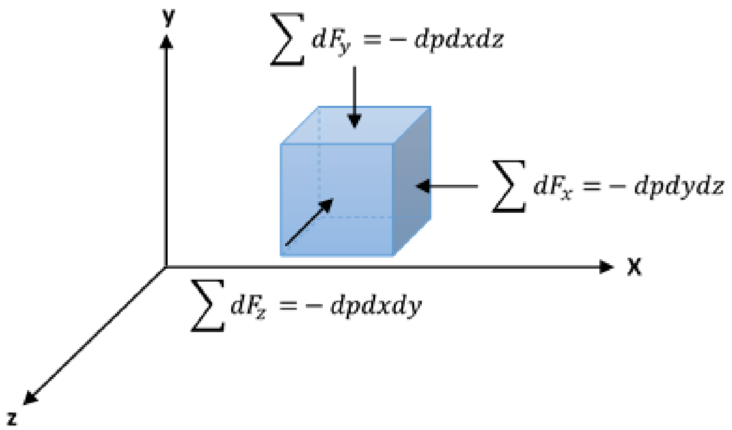

Figura 1.5: Partícula fluida sometida en todas las direcciones por fuerzas perpendiculares a la superficie de cada cara. Recurso de autoría propia

Y utilizando otra vez su hipótesis sobre la diferencia de presiones, logra aislar las componentes de las fuerzas con magnitud $d\rho dydz$ en la dirección -**X**, $d\rho dxdz$ en la dirección -**Y** y $d\rho dxdy$ en la dirección –**Z**, que deben equilibrarse con la fuerza aceleratriz con la que la partícula es movida (Ayala, 2018), estas fuerzas están dadas por el elemento de masa y las componentes de la aceleración $a_x, a_y, y\ a_z$, se obtienen entonces las siguientes ecuaciones.

$$dma_x = d\rho dydz; \qquad dma_y = d\rho dxdz; \qquad dma_z = d\rho dxdy \tag{1.5}$$

Que al utilizar la regla de la cadena para las componentes de la aceleración, asumiendo que *u=u(x,y,z,t)*, *v=v(x,y,z,t)*, y *w=w(x,y,z,t)* son las componentes de la velocidad de la partícula fluida en los ejes x, y, y z, que son a su vez funciones de estas coordenadas y adicionalmente del tiempo t, se llega a:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.6}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.7}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \tag{1.8}$$

Estas ecuaciones (1.6),(1.7), (1.8)[13] junto con (1.4) son las que permiten describir el movimiento de *los fluidos perfectos*, o también denominados ideales, donde la ecuación (1.4) depende si el fluido es o no incompresible, si ρ es constante entonces esto permite constituir un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (p,u,v,w) a determinar (Liñán, 2007). En notación vectorial estas ecuaciones quedan sintetizadas en solo dos ecuaciones

$$\nabla\vec{V} = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g \tag{1.10}$$

[13]El termino $-\rho g$ se introduce como consecuencia de la presión que se experimenta debido al campo gravitatorio y que es dirigido según la línea de la plomada, por lo general asociada al eje z.

La Derivada Material

Dentro de las ecuaciones de Euler surgen dos marcos descriptivos para el análisis del comportamiento de las partículas fluidas, estos denominados; descripción Lagrangiana y euleriana. Por un lado, la descripción Lagrangiana implica seguir (o marcar) una partícula fluida para cada instante de tiempo con lo cual, la información que se obtiene de ella no depende de su posición; esto es $\varphi = \varphi(t)$, mientras que en la descripción euleriana se toman puntos fijos en el espacio, en los que se mide alguna magnitud de interés para un instante de tiempo determinado, por tanto $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$, lo que implica que esta segunda descripción toma en cuenta las variaciones de posición y tiempo que tienen lugar en un fluido, surge entonces el concepto de *derivada material* o *sustancial* que integra las dos descripciones mencionadas anteriormente dentro del mismo modelo matemático, de la siguiente forma:

$$\frac{D(\varphi(\vec{r}, t))}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \varphi \tag{1.11}$$

Al aplicar la regla de la cadena a una función φ que depende del espacio y del tiempo, se introduce el operador *D()/Dt* que permite hacer este tipo de descripción dentro de los medios continuos, la derivada temporal del segundo miembro se denomina derivada local mientras que el producto punto del vector velocidad por el vector gradiente se denomina derivada convectiva. Las ecuaciones de Euler entonces pueden describirse bajo este operador, con lo que la ecuación (1.10) se expresa como sigue:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g \tag{1.12}$$

Ya para finalizar esta sección, hay que tener en cuenta que estos desarrollos no involucran la resistencia que sufren los fluidos, que se caracteriza con la viscosidad o de otra forma, en los fluidos perfectos la viscosidad del medio fluido es cero, con lo cual afirma (Levi, E., 2001) "*pues supone que sus partículas se mueven sin afectar a las vecinas*" (p.325). Aunque claro esta Euler sabia de estos efectos, pero faltándole una definición clara de cuál era su naturaleza decidió omitirlos, en su descripción de medios deformables, lo último que hace Euler es introducir el concepto de esfuerzo, para caracterizar la condición de equilibrio, siendo p una función de la posición su diferencial ha de cumplir la siguiente condición $dp = Ldx + Mdy + Ndz$, en donde $L = \rho a_x, M = \rho a_y, N = \rho a_z$ se tiene entonces: $dp = \rho a_x dx + \rho a_y dy + \rho a_z dz$, esto lleva a :

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) \tag{1.13}$$

Donde el segundo miembro resulta de diferenciar una cantidad finita e, que es función también de las coordenadas (x, y, z) y es denominada por Euler como *esfuerzo.*

$$dp = \rho de \tag{1.14}$$

Así, si la densidad es constante se tiene una condición de equilibrio, por lo tanto, solo dependerá de la función e (Ayala, 2018). También él identifica que en el caso que esto no sea así, habrá una interdependencia entre la presión y la densidad, otro aspecto a tener en cuenta es que se habrá de considerar además la temperatura si esta depende de la presión.

1.3 — **El Esfuerzo**

Como se mencionó anteriormente, Euler ya vislumbraba una idea de esfuerzo, no en los términos modernos usados hoy en día, donde se generaliza su concepto de *presión interna*, que siempre es definido perpendicularmente con el elemento de superficie $d\xi$. Cauchy demuestra que las ideas de Euler en este tema son un caso particular de un concepto más extenso, que permite definir un campo integrable de vectores de tracción y con ello una transformación lineal por medio de un tensor llamado esfuerzo (Truesdell et al., 1975). Por otro lado, el esfuerzo es una medida del estrés o tensión de un medio, este a su vez es una cualidad o propiedad del mismo denominado estado de tensión o de estrés, como afirma Castillo et al. (2014) "*el stress se suele caracterizar como referido a las acciones que unas partes ejercen sobre aquellas que se encuentran en su* *vecindad*”[14] (p.45), lo que la distingue de la fuerza y este esfuerzo es medido como una densidad de fuerza superficial, si se toma una partícula fluida en el interior de un medio continuo y por hipótesis se asume lo siguiente:

$$\sum_{i}^{n} \vec{F} = m_i \vec{a}_i = 0 \tag{1.15}$$

$$\sum_{i}^{n} \vec{M} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = 0 \tag{1.16}$$

Donde la ecuación (1.15) son las fuerzas externas actuantes sobre la partícula fluida y la ecuación (1.16) son la suma de los momentos; en otras palabras, la partícula no es acelerada ni tampoco gira entorno a algún eje, por tanto, su estado es de equilibrio. Así si sobre dicha partícula actúan los esfuerzos o vectores tensión $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ y $\vec{t}_3$ que se pueden descomponer según los ejes coordenados (x,y,z) (ver Figura 1.6)[15], para que se cumpla (1.15) deben surgir vectores tensión (o esfuerzos) de la misma magnitud y sentido contrario a t_{xx}, t_{yy} y t_{zz} tensiones normales a cada elemento de superficie, mientras que para que se verifique (1.16) basta con que se cumpla que $t_{xy} = t_{yx}$, $t_{yz} = t_{zy}$ y $t_{zx} = t_{xz}$ como es señalado en (**b**)

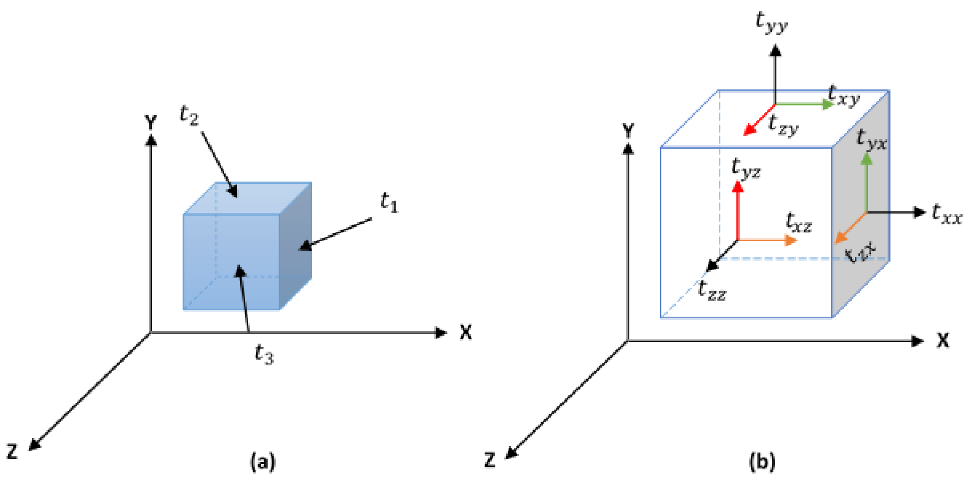

Figura 1.6: Partícula fluida en un medio continuo, donde las tensiones que actúan sobre cada cara no son perpendiculares a dicha superficie $d\xi$ (a) y por tanto se pueden descomponer según los ejes coordenados (b). Recurso de autoría propia.

[14]Para ver una discusión alrededor del concepto fuerza- esfuerzo véase: El tensor de esfuerzos. Un análisis epistemológico desde una perspectiva pedagógica

[15]Basado en la imagen y análisis expuesto en; (Kay, 1988) paginas 29 – 32.

Por otro lado, si se quiere identificar un esfuerzo para un elemento de área orientado arbitrariamente basta con hacer un corte por medio de un plano en el medio fluido, de tal forma que este no sea paralelo a los ejes coordenados[16] (x, y, z) (ver figura 1.7). De esta superficie se identifica un elemento de área denotado por $d\xi$ en el que actúa un esfuerzo $\vec{t}$ dirigido hacia afuera del volumen; formado por la intersección de los planos que generan los ejes coordenados con el plano de corte, la normal $\hat{\mathbf{n}}$ identifica al elemento de área[17] en ese punto con lo cual, haciendo uso de la hipótesis (1.15) se establecen esfuerzos que están en relación al $d\xi$ y en relación a los planos xy , yz y zx con n_1, n_2 y n_3 como sus cosenos directores correspondientemente a cada esfuerzo $\vec{t_i}$ para (i= 1,2,3) generado para cada plano y expresado como combinación lineal de la forma siguiente[18]:

$$\vec{t} = \vec{t_1}n_1 + \vec{t_2}n_2 + \vec{t_3}n_3 \tag{1.17}$$

Expresado en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

La matriz asociada en la expresión (1.18) que conserva el estado de tensión de una partícula fluida en un punto, se denomina tensor de esfuerzo o de tensiones, representada en la ecuación (1.19), como se evidencia el tensor es simétrico con lo cual $\mathbf{T} = \mathbf{T}^t$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

[16] También puede considerarse el caso contrario y ubicar el sistema de coordenadas de tal forma que no coincida con los lados de dicho plano de corte

[17] Si $\hat{\mathbf{n}}$ es positivo sale del volumen caso contrario si es negativo (entra), hecho que Cauchy demuestra llegando a $\vec{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\vec{t} \cdot (-\hat{\mathbf{n}})$

[18] En el sentido estricto del cálculo es necesario introducir las fuerzas de volumen, que a diferencia de las tensiones no son fuerzas por contacto o que se trasmiten a través de una superficie, sino que son fuerzas instantáneas como la gravedad y que resultan despreciables para la operación.

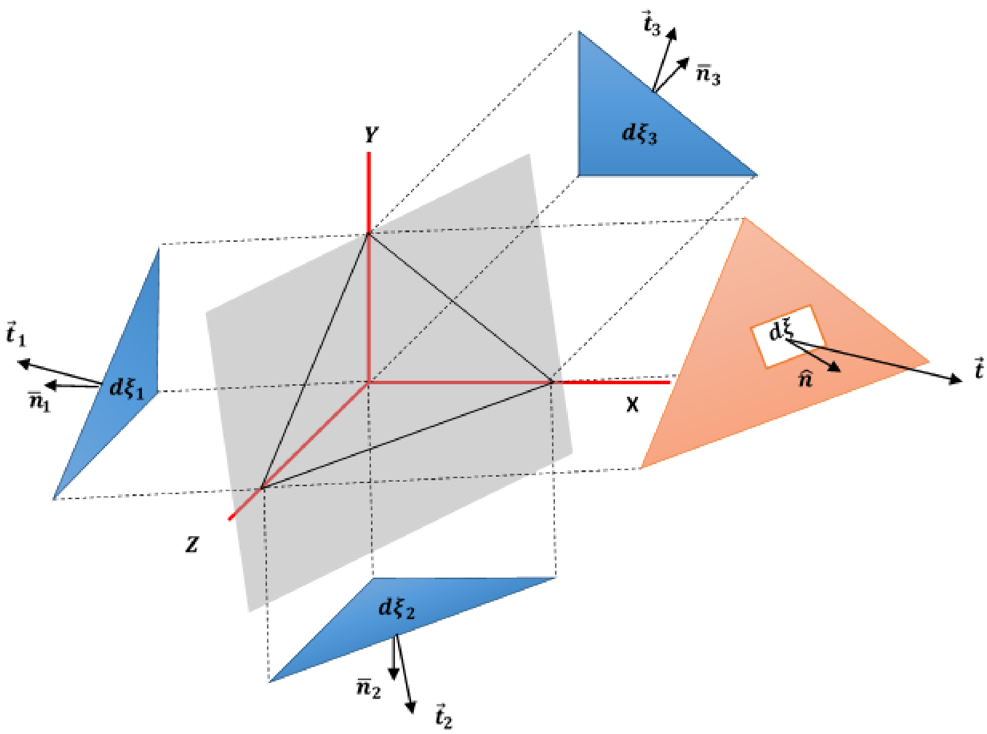

Figura 1.7: Esfuerzo orientado de manera arbitraria a los ejes coordenados (x,y,z), para hallar la expresión general del estado de tensión en un punto. Recurso de autoría propia

En notación de subíndices la ecuación 1.18 toma la forma de:

$$t_i = n_j t_{ji} \tag{1.20}$$

Es importante resaltar que las componentes del tensor esfuerzos relacionan el subíndice i del plano donde se aplica tal esfuerzo en dirección j, así, por ejemplo, la componente t_{xy} relaciona el esfuerzo en dirección de las equis con el elemento de área perpendicular al eje y (el plano xz). Esto da lugar a dos tipos de esfuerzos los cortantes y los normales.

1.3 — Esfuerzo Cortante

Se denomina esfuerzo cortante o tangente a los esfuerzos que actúan paralelamente a la superficie, una expresión matemática que da cuenta de esto es:

$$\begin{aligned}\tau = \lim_{\Delta\xi \to 0}\left(\frac{\Delta F_t}{\Delta \xi}\right) &= \frac{dF_t}{d\xi} \\ &= \frac{dF_j}{d\xi_i} = t_{ij}\ con j \neq i\end{aligned} \tag{1.21}$$

Donde F_t es una fuerza tangencial sobre la superficie, estos esfuerzos a su vez se pueden descomponer en dos ejes ortogonales sobre la superficie, este tiene un efecto sobre los fluidos por ser el causante de la deformación, como ya se ha señalado, los fluidos no soportan pequeños esfuerzos de esta índole y tienden a fluir debido a ello.

Representado en forma matricial como:

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & 0 & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

1.3 — **Esfuerzo Normal: Presión**

El esfuerzo normal o llamado también presión, es el esfuerzo que es perpendicular a la superficie y puede estar orientado positivamente si este sale del volumen de referencia con lo cual se le suele denominar tensión de tracción que en los liquidos y en los gases no está presente, en cambio cuando está orientado negativamente; entrando hacia el volumen de control, se le denomina tensión de compresión o presión interna, al igual que el esfuerzo cortante se mide como una densidad de fuerza superficial, al llevar al límite la superficie por el cual actuaria dicho esfuerzo

$$\begin{aligned}\sigma = \lim_{\Delta\xi \to 0}\left(\frac{\Delta F_n}{\Delta \xi}\right) &= \frac{dF_n}{d\xi} \\ &= \frac{dF_j}{d\xi_i} = \sigma_{ij}\ con\ i = j\end{aligned} \tag{1.23}$$

Que expresado en forma matricial en relación al tensor esfuerzo queda de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Téngase en cuenta que, gracias a la simetría del tensor de esfuerzos, este se puede expresar de tal forma que bajo cierta configuración las componentes tangenciales sean cero, esto es, que puede ser diagonalizado o expresado como una matriz diagonal para cierta base ortogonal, con lo cual la matriz (P) que determina los vectores de dicha base, cumple con la condición de $P^t = P^{-1}$ por tanto el esfuerzo normal queda representado como:

$$\sigma = P^{-1}TP \tag{1.25}$$

Si se expresa en notación de subíndices se introducirá el delta de kronecker como $t_{ij} = -p\delta_{ij}$, que representa el caso de un fluido en equilibrio con p como la presión; consideración que se hace en la termodinámica (Crespo Martinez, 2006)

1.3 — Propiedades del Tensor Esfuerzo

Una de las propiedades más importantes y de interés de los tensores es su invariancia, esta característica permite hacer transformaciones de coordenadas sin que con ello se cambien las magnitudes que definen el estado del sistema, por tanto, si se considera un nuevo sistema de coordenadas tal que la medida del esfuerzo neto sea el mismo, se puede encontrar una regla de transformación como la siguiente:

$$\bar{T}^{ij} = T^{rs}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s} \tag{1.26}$$

La ecuación 1.26 es dada en forma tensorial y relaciona a un sistema de coordenadas x^i con el sistema barrado dado por $\bar{x}^i$ [19]

[19]Véase la demostración en el anexo B de este documento

1.4 — Densidad

La densidad es una propiedad intensiva cuando no se consideran las variaciones de temperatura y compresión que puede experimentar un fluido, de esta forma, esta magnitud se mantiene constante. Por otro lado, un paso al límite para un volumen de control muestra que $\Delta V'$ es el volumen mínimo para que las consideraciones del continuo sean coherentes con las descripciones de los fenómenos físicos.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \Delta V'} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right) = \frac{dm}{dV} \tag{1.27}$$

1.5 — Ecuación de Conservación de la Energía

Otra cantidad importante que se tiene en cuenta es la entropía, partiendo del principio de conservación de la energía, que supone que en un fluido perfecto esta es contante, debido a que no existe conducción térmica y por ende perdidas de calor, lo que conduce a que el movimiento para cualquier partícula fluida sea a través de un medio adiabático, con lo cual, el valor de la entropía permanece constante, en otras palabras, la entropía no varía ni en el tiempo ni en el espacio, por tanto su ecuación se representa como:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \tag{1.28}$$

Utilizando la derivada material para reescribir la ecuación anterior, esta toma la siguiente forma:.

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla s = 0 \tag{1.29}$$

De la ecuación (1.29) también se dice que el movimiento del fluido es isoentrópico (la entropía es la misma), que describe de manera general el movimiento adiabático de un fluido ideal (Lifshits and Landau, 1986). Además, si $\rho s \vec{V}$ *designa la densidad de flujo de entropía* entonces se puede utilizar la ecuación (1.11) para obtener otra expresión de esta cantidad conservada.

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{V}) = 0 \tag{1.30}$$

Finalmente, los desarrollos matemáticos y fiscos que se han planteado han sido desde un enfoque geométrico de la realidad, asumiendo con esto, que el espacio se puede describir con tres coordenadas; la geometría está a la base del sistema formal de la física clásica y está a la base de nuestra experiencia sensible. Cabe resaltar, que en la física clásica son las nociones de espacio y tiempo las que no se han extraído de la experiencia sino de la visión que se tiene del mundo físico y a partir de allí se ha modelado la realidad, esto puede conllevar a contradicciones de orden físico, matemático y filosófico.

Según se ha expuesto, la idea de un fluido perfecto ha partido de estas nociones, y además de la noción, de que en ciertas condiciones podemos asumir que un fluido no está sometido a fricción y por tanto no pierde energía en forma de calor, esto es, no presentan viscosidad y su movimiento es adiabático e isoentrópico, con lo cual las ecuaciones que se han construido permiten describir con bastante precisión aquellos fenómenos que se ajustan a estos parámetros.

2.0 — **Capítulo II: Análisis**

La fisica está fundamentada sobre la base de una serie de principios y leyes que están sujetas a comprobación, sin embargo, en algunos casos estos se asumen como ciertos sin entender a profundidad las implicaciones que estos conllevan, el presente capitulo examina y analiza el principio de relatividad galileano con relación a las ecuaciones de campo de los fluidos perfectos clásico, adicional, analiza los planteamientos de la relatividad que se deben tener en cuenta para formalizar un fluido perfecto.

2.1 — **Principio de Relatividad de Galileo**

El sistema de ecuaciones $\Big(\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0\Big)$, $\Big(\partial\vec{V}/\partial t + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = -\nabla p/\rho - g\Big)$ y $\Big(\partial\rho s/\partial t + \nabla\cdot(\rho s\vec{V}) = 0\Big)$ que describen totalmente el comportamiento de un fluido perfecto, no expresan de manera directa o no hace explicito un principio físico que está a la base de la mecánica clásica, este principio exige la necesidad de las leyes que describen el comportamiento de un fenómeno de ser expresadas en la misma forma para dos (o más) observadores que se mueven uno con respecto a otro a velocidad constante y en línea recta, esto es, que las leyes físicas son indistinguibles del estado de reposo o movimiento relativo (rectilíneo y uniforme) de los observadores. Conocido como principio de relatividad galileano, conlleva a su vez a las ecuaciones de transformación de Galileo que conecta dos (o más) referencias inerciales a partir de las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
x &= \bar{x} + v_x t \\
y &= \bar{y} \\
z &= \bar{z} \\
t &= \bar{t}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Se obtienen por una suma vectorial de los radios vectores $\vec{r} = \overline{OP}$ y $\vec{\bar{r}} = \overline{\bar{O}P}$ definidos en dos sistemas de coordenadas S y $\bar{S}$ (Ver figura 2.1), moviéndose $\bar{S}$ con respecto a S sobre el eje horizontal $\overline{O\bar{O}}$ con velocidad $\vec{V} = \vec{v}_x$.

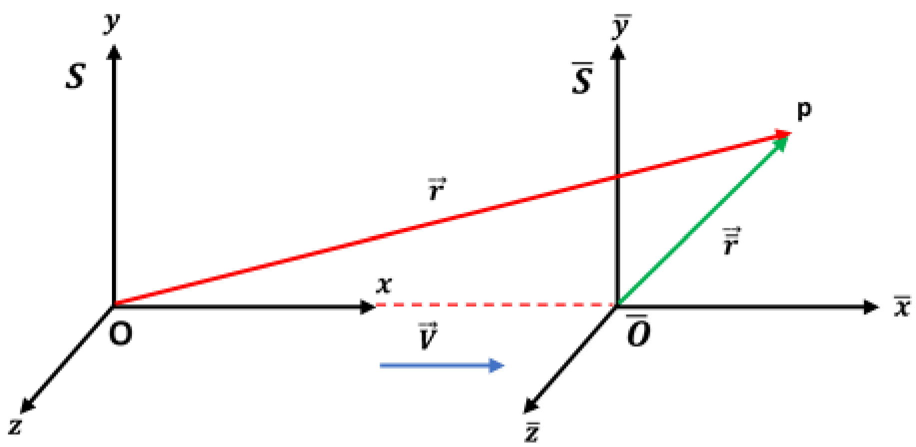

Figura 2.1: Evento P observado desde dos marcos inerciales S y $\bar{S}$ que se conectan mediante radio vectores $\vec{r}$ y $\vec{\bar{r}}$ respectivamente. Recurso de autoría propia.

2.1 — Ecuación de Continuidad Bajo Transformaciones de Galileo

Para corroborar lo expuesto anteriormente supóngase un volumen de fluido en el marco inercial S en el cual se determina la variación de materia contenida en dicho volumen y que pasa por alguna superficie de este, el marco $\bar{S}$ se mueve a velocidad $\vec{V} = \vec{v}_x$ (sobre el eje de las equis) con respecto a S, la ecuación de continuidad toma la familiar forma en S dada por la ecuación[1] (1.4) en la sección 1.2.2 como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Donde $\vec{u}$ es el vector velocidad del fluido que atraviesa dicha superficie con componentes $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, si se expande, la ecuación se desarrolla como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left(u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \tag{2.2}$$

Tomando por ejemplo la componente temporal y las componentes en dirección x para hacer el análisis matemático correspondiente[2], se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Aplicando la regla de la cadena para transformar las coordenadas de S a $\bar{S}$ resultan las siguientes tres expresiones, para cada una de las componentes que se tomaron previamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t}$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \right)$$

$$u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = u_x \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \right)$$

Derivando parcialmente las transformaciones de Galileo (ecuaciones 2.1) se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = -v_x \; ; \; \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1$$

[1] Utilizando las propiedades del cálculo vectorial para la divergencia del producto con una función escalar, como: $\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \nabla \rho \cdot \vec{u} + \rho \nabla \cdot \vec{u}$.

[2] Este sería el caso de un movimiento unidimensional.

Lo que permite simplificar las expresiones anteriores

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}(-v_x) + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}}$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{x}}$$

$$u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = u_x \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}$$

De manera analoga se obtienen para las componentes y y z

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial \bar{u_y}}{\partial \bar{y}} \qquad \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial \bar{u_z}}{\partial \bar{z}}$$

$$u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = \bar{u_y} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \qquad u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \bar{u_z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}$$

Con lo cual, organizando cada uno de los términos obtenidos previamente se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \rho \left(\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u_y}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u_z}}{\partial \bar{z}} \right) + \left((u_x - v_x) \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \bar{u_y} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} + \bar{u_z} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \tag{2.3}$$

Por último, teniendo en cuenta que $\vec{\bar{u}} = \vec{u} - \vec{V}$, se llega a la misma ecuación de continuidad para sistema de referencia[3] en $\bar{S}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \vec{\bar{u}}\ ) = 0$$

2.1 — Ecuación de Euler Bajo Transformación de Galileo

La ecuación de Euler $\left(\partial \vec{V} / \partial t + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p / \rho - g \right)$ que describe la variación de la densidad de momento lineal debe conservarse para cualquier observador inercial al aplicar las transformaciones de Galileo. Tómese para ello la componente en la dirección

[3]El símbolo $\bar{\nabla}$ define las derivadas parciales en es el sistema barrado.

de las equis como se presentó en la sección 1.2.2 del capítulo uno con la ecuación (1.6)

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

Utilizando el mismo procedimiento para transformar las coordenadas de S a $\bar{S}$, del apartado anterior

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}$$

Eliminando aquellos términos que se hacen cero y agrupando nuevamente, resulta en

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{t}}+(u_x-v_x)\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{x}}+\bar{u_y}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{y}}+\bar{u_z}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{z}}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}$$

En consecuencia, se restaura la forma de la ecuación de Euler para el sistema $\bar{S}$.

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{t}}+\bar{u_x}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{x}}+\bar{u_y}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{y}}+\bar{u_z}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \bar{z}}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}$$

2.1 — Ecuación Densidad de Entropía Bajo Transformaciones de Galileo

Para completar el conjunto de ecuaciones necesaria para describir el comportamiento y evolución de un fluido (siempre que la cualidad térmica en este caso la entropía sea tenida en cuenta, de lo contrario bastaran las dos ecuaciones analizadas anteriormente), que es dada por la ecuación (1.30).

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho s\vec{u})=0$$

Que, siguiendo los procedimientos anteriores, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial x} = \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}$$

Haciendo las respectivas simplificaciones y teniendo en cuenta que este procedimiento es análogo a las componentes y y z, se llega a la misma forma de la ecuación isoentropica para el fluido perfecto.

$$\frac{\partial \rho s}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\rho s \vec{\bar{u}}) = 0$$

2.1 — Tensor Esfuerzo Bajo Transformación de Galileo

Por último, se comprueba que el tensor de esfuerzos no dependa del estado de movimiento relativo del observador, esto puede enunciarse como: el estado de tensión de un medio fluido en un punto es independiente del marco inercial en el que se mida, para ello utilizando la regla de transformación de la sección (1.3.3) ecuación (1.26), se procede como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{T}^{11} &= T^{rs}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^s}\\ &= T^{1s}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^s} + T^{2s}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^s} + T^{3s}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^s}\end{aligned}$$

Expandiendo ahora para el índice s

$$\begin{aligned}\bar{T}^{11} =& T^{11}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} + T^{12}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} + T^{13}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} +\\ & T^{21}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} + T^{22}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} + T^{23}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} +\\ & T^{31}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} + T^{32}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} + T^{33}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{T}^{11} =& T^{11}(1)(1) + T^{12}(0)(0) + T^{13}(0)(0) + \\
& T^{21}(0)(0) + T^{22}(0)(0) + T^{23}(0)(0) + \\
& T^{31}(0)(0) + T^{32}(0)(0) + T^{33}(0)(0) \\
\bar{T}^{11} =& T^{11}
\end{aligned}
$$

Si se extiende de manera análoga a la demas componentes[4] se concluye que, para un observador en el sistema $\bar{S}$ la tensión que mide será igual que la medida en el sistema S, esto es $\bar{T}^{ij} = T^{rs}$.

2.2 — Relatividad Especial

La relatividad especial es uno de los logros más importantes con que comienzan el siglo XX, desarrollada por Albert Einstein, al publicar en 1905 su trabajo titulado, sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento; trabajo que despertó todo tipo de reacciones tanto favorables como desfavorables, al deshacerse de la idea del éter tan fuertemente defendida para la época junto con el principio de adición de velocidades de Galileo. Einstein desarrolla una teoría (Teoría Especial de la Relatividad) que describe el comportamiento que experimentan las leyes físicas al transformarse entre marcos inerciales y que parte de dos postulados.

2.2 — Postulados de la TER

Primer postulado: principio de relatividad

Las leyes de la física deben adoptar o tomar la misma forma en todos los marcos inerciales, esto es, deben ser covariantes bajo transformaciones de coordenadas, con lo cual, los resultados de un experimento no dependen del sistema referencia ni a la velocidad a la que se mueva (siempre que sea constante) y por tanto las magnitudes físi-

[4]Tenga presente que la notación de super índices $x^i (i = 1, 2, 3)$ corresponde a las variables (x, y, z) del sistema de coordenadas cartesiano, por otro lado, se asume que $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$ cumple con el delta de kronecker.

cas que se observan en un sistema inercial se pueden transformar a otro sistema inercial. Representa una extensión al principio galileano, pues no se limita a las leyes de la mecánica, sino que debe ser aplicable a todas las leyes de la física.

Segundo postulado: la constancia de la luz

La velocidad de la luz (c) en el vacío es una constante universal independiente del marco de referencia inercial en que se mida, en consecuencia, no existe cuerpo o señal que viaje más rápido que esta velocidad y por tanto todas las interacciones físicas que tengan lugar en la naturaleza deben tener una duración temporal mínima.

2.2 — Las Transformaciones de Lorentz

Las ecuaciones de Lorentz surgen de combinar los dos postulados de la TER para conectar un evento visto desde dos marcos de referencia inerciales, estas ecuaciones son necesarias para asegurar la covarianza por ejemplo; en la electrodinámica pues este conjunto de leyes (ecuaciones de Maxwell) no cumplen con el principio de relatividad de Galileo, si se supone un sistema S en reposo relativo a $\bar{S}$ que se mueve con respecto a S con velocidad $\vec{V} = \vec{v}_x$, que por simplicidad los ejes de las equis coinciden entre los dos marcos inerciales, como se muestra en la figura (figura 2.2).

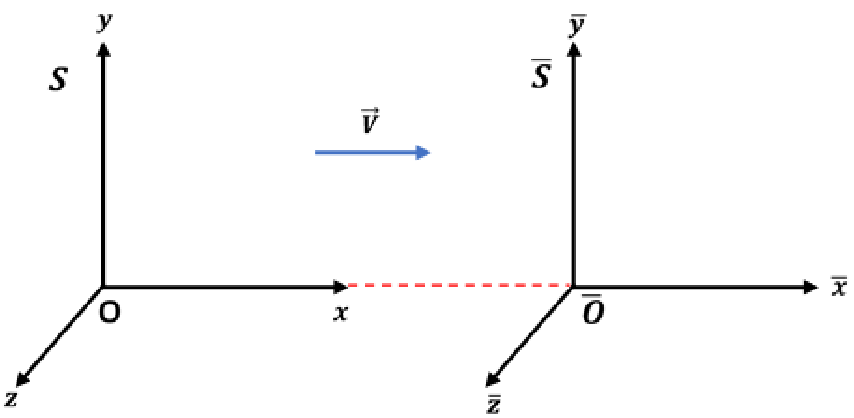

Figura 2.2: Dos marcos inerciales S y $\bar{S}$ alineados sobre el eje de las equis $\bar{S}$ en movimiento relativo a velocidad $\vec{V} = \vec{v}_x$ con respecto a S. Recurso de autoria propia.

Además, cuando los orígenes O y $\bar{O}$ coinciden los relojes comienzan a marchar, así en el sistema S se mide un tiempo t y en $\bar{S}$ un tiempo $\bar{t}$, con lo cual resultan las siguientes ecuaciones de transformación.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \gamma(x - v_x t)\\ \bar{y} &= y\\ \bar{z} &= z\\ \bar{t} &= \gamma(t - x v_x / c^2)\end{aligned} \tag{2.4}$$

El factor $\gamma = \gamma(\vec{V})$ es una función de la velocidad relativa entre los marcos inerciales, que tiene como valor $(1 - v_x^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, a partir de estas ecuaciones se pueden reescribir los principios clásicos. Nótese que las ecuaciones anteriores permiten por simetría conocer las observaciones que se hacen desde $\bar{S}$ hacia el sistema S resultando en:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(\bar{x} + v_x \bar{t}\ )\\ y &= \bar{y}\\ z &= \bar{z}\\ t &= \gamma(\bar{t} + \bar{x} v_x / c^2)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Las consecuencias de los postulados de la TER se evidencian en estas ecuaciones, por un lado, aparece una ecuación de trasformación para la coordenada temporal que a su vez está en términos de una coordenada espacial, de allí que la TER sea una teoría del espacio-tiempo.

2.2 — Dilatación de Tiempo y Contracción de Longitudes

La invariancia de la medida de la luz conlleva a que se den dos efectos físicos, que son hoy en día altamente comprobados, por un lado, que la medida del tiempo no es absoluta, lo que hace que cada marco inercial marque su propio tiempo, este efecto no es apreciado dentro del marco, solo si se comparan de manera externa por un observador en otro marco, esto es, "sólo se puede determinar su existencia cuando se comparan los tiempos internos de sistemas en movimiento relativo." (Sierra Pareja, 2014, p.52)

El otro efecto físico tiene que ver con la contracción de las longitudes, que a diferencia de lo que la física clásica asegura bajo las transformaciones de galileo esta permanecería invariante, esto se evidencia fácilmente al tomar dos puntos, por ejemplo: $x_1 = \bar{x}_1 + \vec{v_x}t$ y $x_2 = \bar{x}_2 + \vec{v_x}t$ que al hallar su diferencia (o el delta), resulta en $\Delta x = \Delta \bar{x}$, algo que no pasa con las transformaciones de Lorentz, pues el mismo procedimiento conlleva a la siguiente ecuación[5]:

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \Delta \bar{x} \\
L &= \gamma^{-1} L_o
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Siendo L_o la longitud medida en el marco $\bar{S}$, también llamada longitud propia, esta ecuación muestra que para alguien situado en S, un objeto o cuerpo que se mueve en dirección de las equis con velocidad v_x se contrae en un factor de γ^{-1}, así por ejemplo: se encuentra que para un cubo que se mueve sobre este eje experimenta una contracción en sus áreas, siendo afectadas aquellas perpendiculares al eje equis, mientras que las paralelas no sufren de dicha contracción, se pueden escribir con las siguientes ecuaciones de transformación para los dos sistemas de coordenadas[6].

$$
\begin{aligned}
d\xi_x &= d\xi_x^o \\
d\xi_y &= \gamma^{-1} d\xi_y^o \\
d\xi_z &= \gamma^{-1} d\xi_z^o
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Si se tiene en cuenta estas transformaciones en la construcción del tensor de esfuerzos se encuentra que es asimétrico en la TER, como se expone a continuación.

2.2 — Asimetría del Tensor Esfuerzo en la TER

Considerando lo que se ha visto hasta el momento, y si se utiliza las ecuaciones de transformación de las áreas, junto con la definición de esfuerzo cortante y tangen-

[5] Para ver una explicación más amplia y detallada véase por ejemplo en Vélez (2016) capítulos 9 y 10

[6] Se utilizará de ahora en adelante un superíndice “o” para indicar aquellas variables o medidas hechas en el sistema de referencia $\bar{S} = S^o$, también llamado marco propio.

te visto en la sección 1.3, se puede calcular con las ecuaciones 1.21 y 1.23, el estado de tensión de una partícula fluida, respecto a S y S^o, si como lo expone Tolman[7] las fuerzas también sufren una transformación dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} dF_x &= dF_x^o \\ dF_y &= \gamma^{-1} dF_y^o \\ dF_z &= \gamma^{-1} dF_z^o \end{aligned} \tag{2.8}$$

Así entonces se llega a:

$$\begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx}^o & \gamma t_{yx}^o & \gamma t_{zx}^o \\ \gamma^{-1} t_{xy}^o & t_{yy}^o & t_{zy}^o \\ \gamma^{-1} t_{xz}^o & t_{yz}^o & t_{zz}^o \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Donde $\bar{T} = T^o$ representa un tensor simétrico medido en el sistema de referencia propio $S^o = \bar{S}$, que es en virtud el tensor esfuerzo de la mecánica clásica dado por la ecuación (1.19), para obtener el resultado de la sección (2.1.4) basta con las dos siguientes consideraciones, una que resulta trivial y tiene que ver con la velocidad del marco de referencia, si esta es cero el factor gamma se hace uno y la transformación resulta simétrica, la segunda cuando $c >> v_x$ entonces el factor gamma tiende hacer uno y se tiene el caso de las trasformaciones de galileo. El tensor de la ecuación (2.9) es llamado *tensor de estrés relativo*, la relatividad encuentra un tensor simétrico denotado por las cantidades $P_{ij} = t_{ij} + g_i u_j$, que se suele llamar estrés absoluto[8], donde g_i es la densidad de momento, u_j la velocidad y t_{ij} el tensor de esfuerzos, más adelante se hará referencia a esto.

Aunque este análisis se queda corto considerando que la TER no es una teoría tridimensional y por tanto se requieren otros tipos de objetos matemáticos para hablar de sus fenómenos, como se muestra a continuación.

[7]Véase en Tolman (1987) el capítulo 25
[8]Véase en Tolman (1987) pagina 69

2.2 — Cuadrivectores

Para describir un fenómeno o evento desde el enfoque de la TER, es necesario operar con objetos matemáticos denominados cuadrivectores, nuestra experiencia nos dice que un punto o evento en el espacio tridimensional necesita de tres coordenadas para ser especificado, resulta contra intuitivo pensar que se necesite una coordenada adicional llamada espacio/tiempo, esta es otra consecuencia de los planteamientos relativista que exige extender la noción habitual de vector en R^3 a R^4 también llamado espacio de Minkowski, entonces un cuadrivector es un vector con cuatro componentes reales (Vélez, 2016), sus propiedades matemáticas obedecen las misma propiedades que los vectores tridimensionales, por tanto, las ecuaciones de Lorentz deben cumplir con la propiedad del algebra, esto es que, $\vec{\bar{X}} = A\vec{X}$, donde A es una matriz 4×4.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Nótese que la coordenada $\bar{x}^0$ tiene como valor $c\bar{t}$ esto se debe a la idea de espacio-tiempo[9], en otras palabras,"*la unificación de las dimensiones físicas: la dimensión de la longitud para coordenadas tanto espaciales como temporales*"(Vélez, 2016, p.155).Resulta útil construir una cuadrivelocidad y un cuadrimomento.

Cuadrivelocidad

Su definición es análoga a la de velocidad en un espacio tridimensional, esto quiere decir, que se mide la tasa de cambio de la posición en función del tiempo[10]

$$\begin{aligned} U^\alpha &= \left(U^0, U^1, U^2, U^3\right) \\ U^\alpha &= \gamma(u)\frac{dx^\alpha}{dt} \end{aligned} \tag{2.11}$$

[9] A su vez $\bar{x}^1 = \bar{x}$, $\bar{x}^2 = \bar{y}$ y $\bar{x}^3 = \bar{z}$, por otro lado, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ y $x^3 = z$

[10] Es importante señalar que en virtud de la de la definición, habrá que distinguir entre el tiempo propio y el tiempo medido en el sistema S, o tiempo impropio.

Cuadrimomento

El cuadrimomento se puede definir como el producto de la masa m_o por la cuadrivelocidad, se designa m_o como la masa en reposo, ya que como consecuencia de la conservación del cuadrimomento, la masa inercial de la física clásica cambia de valor en virtud de su movimiento por el factor γ de Lorentz.

$$
\begin{aligned}
P &= m_o U \\
P &= m_o \left(\gamma(u) \frac{dx^\alpha}{dt} \right)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

De tal manera que $m = \gamma(u) m_o$, siendo m el valor de la masa medida en un sistema de referencia estacionario con respecto a S^o.

2.2 — Formulación Covariante para un Fluido Perfecto en la TER

La relatividad especial exige que todas las leyes físicas sean covariantes bajo transformaciones de Lorentz y, por tanto, presentar la misma forma matemática en todos los marcos inerciales, el caso del electromagnetismo es el punto de partida para esta teoría; por no cumplir con las leyes de transformación de galileo, sin embargo, en la teoría clásica de fluidos perfectos no se puede partir de este hecho, como ya se ha demostrado anteriormente la leyes que definen el estado de un fluido, su forma matemática no cambia al cambiar de marco inercial y por tanto la exigencia de una mecánica de fluidos relativista es dada al aplicar las ecuaciones de Lorentz (Tolman, 1987), para construir un objeto matemático que dé cuenta de la conservación de alguna magnitud física consideremos lo siguiente.

Marco Comóvil

En nuestra formulación es necesario situar un observador de forma adecuada, esto quiere decir, establecer un sistema de referencia que se mueva junto con el fluido, con lo cual, para este, el fluido permanece en reposo todo el tiempo. Resulta útil trabajar con estos sistemas de referencia para simplificar los análisis, así se ha hecho con anterioridad, propiamente dicho el marco S^o es una marco comóvil sobre el que se analizó la tensiones en un punto del espacio (véase la sección 2.2.4).

Una de estas simplificaciones es dada por las componentes de la cuadrivelocidad en el sistema S^o, que toman los siguientes valores[11]

$$\begin{aligned} U_o^\alpha &= (U_o^0, U_o^1, U_o^2, U_o^3) \\ U_o^\alpha &= (c, 0, 0, 0) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si en nuestro marco comóvil se establece un valor η_o para la densidad propia de partículas (número de partículas por unidad de volumen), se puede entonces, construir el cuadrivector *flujo de partículas* (N^α), tal que:

$$\begin{aligned} N^\alpha &= \eta_o U_o^\alpha \\ N^\alpha &= \eta_o (U_o^0, U_o^1, U_o^2, U_o^3) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado, si se define la densidad de energía propia ϵ_o como la energía del número de partículas por unidad de volumen, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \epsilon_o &= \eta_o m_o c^2 \\ \epsilon_o &= \rho_o c^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Obsérvese que para que nuestro objeto matemático (nuestro tensor) sea coherente con las observaciones en S^o, se tiene que cumplir, que la única cantidad de energía sea la que es proporcionada por la masa de cada partícula[12], en este caso la que es dada por la ecuación[13] (2.15), esto se consigue haciendo el producto tensorial entre el cuadrimomento y el cuadrivector flujo de partículas.

[11]Como se ha indicado las coordenadas espaciales no cambian en el tiempo y por tanto solo es derivable la coordenada $x^o = ct$

[12]En el caso discreto toma la forma $E = mc^2$ otra consecuancia de la conservación del cuadrimomento

[13]Donde ρ_o se define como la densidad propia del sistema S^o.

$$P^{\alpha} \otimes N^{\alpha} = \begin{bmatrix} \eta_o m_o c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \rho_o U_o^{\alpha} U_o^{\beta} \tag{2.16}$$

Se puede afirmar entonces, que las únicas variables que describen al tensor $T_o^{\alpha\beta} = P^{\alpha} \otimes N^{\beta}$ son la densidad propia y una c-velocidad[14] (Bonilla et al., 2016), ahora bien, si se utiliza la misma estructura para formular un tensor para el sistema S, el tensor se denominará *tensor energía- momento*

Tensor Energía-Momento

Este objeto permite describir el comportamiento lineal del flujo de energía y de momento, bajo la estructura matemática anterior podemos hacer la siguiente construcción, téngase en cuenta, que la densidad de energía en S es dada por las siguientes ecuaciones, que se relaciona con la densidad de energía propia, del sistema S^o.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \eta m c^2 \\ \epsilon &= \rho c^2 \\ \epsilon &= \rho_o \gamma^2, \quad (c = 1) \end{aligned} \tag{2.17}$$

En este caso, como las velocidades son diferente de cero y la cuadrivelocidad es dada por la ecuación (2.12) podemos fácilmente generalizar la ecuación (2.16) para S, obteniendo:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_o U^{\alpha} U^{\beta} \tag{2.18}$$

Además, si definimos que:

[14]En adelante se adoptara el sistema geométrico de unidades (o sistema natural básico) con lo cual $c = 1$

$$U^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\Im} \tag{2.19}$$

Donde $\Im$ es un parámetro a lo largo de la línea de mundo, reescribiendo (2.18)

$$T^{\alpha\beta} = \rho_o \left(\frac{dx^{\alpha}}{d\Im}\right)\left(\frac{dx^{\beta}}{d\Im}\right) \tag{2.20}$$

Lo que sigue, es encontrar cada una de las componentes, si se toma T^{00} (las componente tiempo-tiempo), se deduce lo siguiente:

$$T^{00} = \rho_o \left(\frac{dx^{0}}{d\Im}\right)\left(\frac{dx^{0}}{d\Im}\right)$$

$$T^{00} = \rho_o \left(\frac{dx^{0}}{d\Im}\right)^2 = \rho_o c^2 \left(\frac{dt}{d\Im}\right)$$

$$T^{00} = \rho_o c^2 \left(\frac{dt}{d\Im}\right)$$

Utilizando el intervalo cuadrado para hallar la relación entre $dt/d\Im$, se encuentra que esta es γ/c, con lo cual:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho_o c^2 \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \\ &= \rho_o \gamma^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Desarrollando las componentes (tiempo-espacio) $T^{0i} = \rho_o(\gamma^2/c)v^i$, se obtiene el siguiente conjunto de ecuciones.

$$\begin{aligned} T^{01} =& \rho_o(\gamma^2/c)v^1 \\ T^{02} =& \rho_o(\gamma^2/c)v^2 \\ T^{03} =& \rho_o(\gamma^2/c)v^3 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para las demás componentes basta con la forma general de la ecuación (2.20) que mediante la regla de la cadena se transforma en:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_o \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)\left(\frac{dx^\beta}{dt}\right) \tag{2.23}$$

de esta forma obtenemos que la componentes del tensor, está dada por:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho_o\gamma^2 & \rho_o\gamma^2 v^1/c & \rho_o\gamma^2 v^2/c & \rho_o\gamma^2 v^3/c \\ \rho_o\gamma^2 v^1/c & \rho_o\gamma^2 (v^1/c)^2 & \rho_o\gamma^2 v^1 v^2/c^2 & \rho_o\gamma^2 v^1 v^3/c^2 \\ \rho_o\gamma^2 v^2/c & \rho_o\gamma^2 v^2 v^1/c^2 & \rho_o\gamma^2 (v^2/c)^2 & \rho_o\gamma^2 v^2 v^3/c^2 \\ \rho_o\gamma^2 v^3/c & \rho_o\gamma^2 v^3 v^1/c^2 & \rho_o\gamma^2 v^3 v^2/c^2 & \rho_o\gamma^2 (v^3/c)^2 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Para el marco comóvil $\gamma = 1$ y entonces[15]:

$$T_o^{\alpha\beta} = \rho_o \begin{bmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & (v_x/c)^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_y v_x/c^2 & (v_y/c)^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_z v_x/c^2 & v_z v_y/c^2 & (v_z/c)^2 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

El tensor energía-momento debe ser capaz de conservar cantidades físicas, en otras palabras, se debe cumplir que[16] $\nabla^o_\nu T_o^{\alpha\beta} = 0$, si por ejemplo, se evalua la componente tiempo-espacio $\nabla^o_\nu T_o^{0\nu}$, se haya que:

$$\nabla^o_\nu T_o^{0\nu} = \nabla^o_0 T_o^{00} + \nabla^o_1 T_o^{01} + \nabla^o_2 T_o^{02} + \nabla^o_3 T_o^{03} = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial T_o^{0\nu}}{\partial x^o_\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial \rho_o}{\partial t^o} + \frac{1}{c}\frac{\partial v_x \rho_o}{\partial x^o} + \frac{1}{c}\frac{\partial v_y \rho_o}{\partial y^o} + \frac{1}{c}\frac{\partial v_z \rho_o}{\partial z^o} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho_o}{\partial t^o} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial v_x \rho_o}{\partial x^o} + \frac{\partial v_y \rho_o}{\partial y^o} + \frac{\partial v_z \rho_o}{\partial z^o}\right] = 0$$

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \rho_o}{\partial t^o} + \nabla^o \cdot (\rho_o \vec{v})\right] = 0$$

[15]Si se toma las componentes contravariantes de la velocidad para reescribirlas según la base cartesiana entonces $(v^1, v^2, v^3) = (v_x, v_y, v_z)$

[16]El operador nabla para la TER es de la forma $\nabla_\nu = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$, donde $\nabla_0 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}$

Esta es la forma familiar de la ecuación de conservación de la masa o ecuación de continuidad (1.4) de la sección 1.2.2, por otro lado, si se calcula la componente espacio-tiempo $\nabla^o_\nu T^{1\nu}_o$

$$\nabla^o_\nu T^{1\nu}_o = \nabla^o_0 T^{10}_o + \nabla^o_1 T^{11}_o + \nabla^o_2 T^{12}_o + \nabla^o_3 T^{13}_o = 0 \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial T^{1\nu}_o}{\partial x^o_\nu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial v_x \rho_o}{\partial t^o} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial v_x^2 \rho_o}{\partial x^o} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial v_x v_y \rho_o}{\partial y^o} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial v_x v_z \rho_o}{\partial z^o} = 0$$

$$\frac{\rho_o}{c^2}\left[\frac{\partial v_x}{\partial t^o} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x^o} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y^o} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z^o}\right] + \frac{v_x}{c^2}\left[\frac{\rho_o}{\partial t^o} + v_x\frac{\partial \rho_o v_x}{\partial x^o} + v_y\frac{\partial \rho_o v_y}{\partial y^o} + v_z\frac{\partial \rho_o v_z}{\partial z^o}\right] = 0$$

$$\frac{\rho_o}{c^2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial t^o} + \vec{v}\cdot\nabla^o(v_i)\right] + \frac{v_x}{c^2}\left[\frac{\partial \rho_o}{\partial t^o} + \vec{v}\cdot\nabla^o(\rho_o v_i)\right] = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial(\rho_o v_i)}{\partial t^o} + \vec{v}\cdot\nabla^o(\rho_o v_i)\right] = 0$$

Como se observa en el desarrollo anterior el flujo de densidad de momento $\rho_o v_i$ se conserva, hay que tener presente que en el análisis solo se consideró la energía de cada partícula, esto es, se considera que no existe interacción entre ellas, por lo que el material no está sometido a presiones o lo que es lo mismo que la presión $p = 0$. Si se considera un fluido sometido a presiones en el marco comóvil, se debe introducir dentro de la descripción anterior un variable de presión propia p_o, el tensor en el marco comóvil toma los valores como se aprecia a continuación

$$T^{\mu\nu}_o = \begin{bmatrix} \rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_o + p_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + p_o \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

La ecuación se ha organizado de manera conveniente, teniendo en cuenta que la matriz diagonal (-1,1,1,1), representa el tensor de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$, se puede utilizar el mismo razonamiento que hasta ahora se ha llevado a cabo para expresar lo siguiente:

$$T_o^{\mu\nu} = (\rho_o + p_o)\, U_o^{\mu} U_o^{\nu} + p_o \eta^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

y de manera general para cualquier marco S (su forma completamente covariante) que se mida con respecto a S^o

$$T^{\mu\nu} = (\rho_o + p_o)\, U^{\mu} U^{\nu} + p_o \eta^{\mu\nu} \tag{2.30}$$

Por último, para el caso en que $\mu = 1$, si se calcula la divergencia $\nabla_\nu T^{1\nu} = 0$, se comprueba[17] que

$$\frac{\partial p_o}{\partial x} + (p_o + \rho_o)\frac{du_x}{dt} = 0 \tag{2.31}$$

Resulta en una forma ánaloga a la ecuación de Euler.

Para concluir este capítulo, es importante resaltar que el tratamiento hecho en la primera parte demuestra el porqué la física clásica es tan poco controvertida, el principio galileano asegura la covarianza de las ecuaciones de campo de los fluidos perfectos, la hipótesis de encontrar una contradicción a este principio no resulta ser cierta en este caso, además se asume no solo que las ecuaciones son idénticas para cualquier observador sino también sus variables, en la trasformaciones hechas, la regla matemática no impone un criterio a la variable, con lo cual, se asume que es válida o invariante para cualquier observador.

El tratamiento relativista, por otra parte, permite una construcción matemática si bien más abstracta también más simple, lo abstracto viene de la noción de espacio-tiempo que agrega una coordenada adicional a nuestro sistema matemático y geométrico, esto exige operar con un espacio de cuatro dimensiones y del cual no se tiene una experiencia sensible; como se hizo al plantear el análisis tensorial del concepto de esfuerzo que basándose en la geometría conlleva a la noción de tensión. Sin embargo, las reglas de trasformación y la formulación tensorial proporcionan una explicación consis-

[17] Véase Tolman (1987) sección 85 y 86

tente con los fenómenos formalizados, esto quiere decir, que de la formulación tensorial se pueden extraer resultados e interpretaciones de la naturaleza.

3.0 — Capítulo III: Discusiones y Conclusiones

A continuación, se presenta una discusión en torno a los desarrollos expuestos en el capítulo anterior y se muestran las conclusiones obtenidas.

3.1 — Primera Parte: Sobre la Teoría Clásica de Fluidos Perfectos

Los sistemas en la física se definen a partir de ciertos magnitudes o variables estado que permiten describir el comportamiento a la vez que buscan que la descripción se prolongue en el tiempo, la experiencia muestra que siempre que se hagan ciertas suposiciones sobre la naturaleza, estas conllevarán a una formulación matemática coherente con dichos planteamientos. Si nos referimos al fluido perfecto de la mecánica clásica (véase 1.2.2), este reposa en la idea de que los efectos de viscosidad y conducción térmica no son tenidos en cuenta, en este sentido, solo se configuran como variables de estado aquellas que hablan o se refieren a la distribución de masa y las posibles fuerzas que actúan sobre estas, en otras palabras, se habla de la densidad y de la presión como las variables que dan una descripción total del sistema, si por simplicidad se asume que la densidad es constante, esto es, que miremos donde miremos en el medio continuo su distribución de masa es homogénea obtendremos una formulación aún más simple.

Las suposiciones de distribución de masa (densidad) y fuerzas (presión) se han construido asumiendo de nuestra experiencia que, por ejemplo: la densidad de agua en un vaso, no cambia por que el observador este o no en movimiento (inercial), o por el contrario que sea el vaso el que se aleja o acerca de este, el resultado de esto es, que las variables deben ser invariantes y las ecuaciones que las definen deben cumplirse para cualquier observador (inercial), entonces, las ecuaciones que se han construido deben ser aplicables en cualquier marco de referencia inercial, o sea, deben ser covariantes, en este sentido se ha corroborado (véase la sección 2.1) que al aplicar las trasformaciones de Galileo a las ecuaciones constitutivas o ecuaciones de campo de los fluidos perfectos, estas resultan ser covariantes.

3.2 — Segunda Parte: Sobre la Formulación Covariante

La formulación que se hizo en la sección (2.1) resulto ser covariantes en términos clásico para los fluidos perfectos, por otro lado, si piensa en la teoría física clásica en general, no se encontrará con estos mismo resultados, el caso particular del electromagnetismo sirve como contra ejemplo al principio de relatividad galileano y con ello a sus ecuaciones de transformación, partiendo de este hecho es que surge la relatividad especial, que basándose en dos principios (véase en la sección 2.2.1) logra explicar un conjunto más amplio de fenómenos, así, si se piensa en el conjunto de fenómenos que la TER logra explicar versus la teoría clásica, se podría suponer que la mecánica clásica está contenida en la TER (o por lo menos sus fenómenos).

Es necesario entonces, traducir la mecánica clásica al lenguaje relativista, esto implica operar con las ecuaciones de transformación de Lorentz y además plantear una formulación tensorial de cuatro dimensiones. El marco conceptual donde se establece una primera interpretación y uso de la descripción tensorial, es precisamente en los medios continuos, los tensores son objetos matemáticos que tienen la propiedad de mantener invariante alguna magnitud física independiente del sistema de coordenadas elegido, en los fluidos, este parámetro se define con el estado de tensión o estrés que en un punto del espacio es sometido por fuerzas que se trasmiten a través de superficies, conocidas como esfuerzos, se busca entonces extender la idea de tensión a un medio relativista, el resultado de esto, es la formalización del tensor energía-momento que a diferencia de su contra parte clásica, es una entidad concebida para manter invariante ciertos parametros como se verá más adelante, además de tener un significado de suma importancia para la cosmología.

Cabe aclarar las diferencias fundamentales en cómo se han elegido las magnitudes o variables que describen un sistema, ya se dijo, que en la mecánica clásica este no dependía del observador, diametralmente opuesto resulta en la TER, pues se hace necesario "rotular" estas variables para distinguir aquellas hechas en el marco comóvil, surgen entonces la presión y densidad propias, como los conceptos que permiten organizar dichos fenómenos, por ejemplo: la densidad que un observador en movimiento relativo mide de un medio se transforma por $\rho = \gamma^2 \rho_o$, siendo ρ_o la densidad medida en el marco que se mueve o descansa con el medio y siendo γ el factor de conversión entre los observadores, nótese que $\gamma = \gamma(\vec{v})$ es función de la velocidad relativa (entre S y S^o), así habrá una infinidad de valores que puede tomar ρ.

El tensor energía-momento está definido o mejor aún, esta formalizado a partir de las observaciones locales que se hacen en el marco comóvil de las variables de estado propias (ρ_o y p_o), y por tanto todas las observaciones estarán referidas a dichas variables, la distinción entre variables propias e impropias rompe con el paradigma clásico y en general con la experiencia que tenemos de los fenómenos, aunque claro está, dichos fenómenos no son de nuestra experiencia directa, de ahí, que el significado físico quede ligado a la interpretación del tensor, evaluando las componentes del tensor energía-momento podemos concluir que:

- T^{00} (espacio-espacio) : representa todas las formas de energía o densidad de energía, se puede entender recurriendo en forma análoga a la interpretación clásica, si se asume una superficie contante en t =0 por donde un 0-momento está fluyendo, no en el espacio sino fluyendo en el tiempo.

- T^{0i} (tiempo-espacio) : representa el flujo de densidad energia que atraviesa cada una de las caras de un volumen de control.

- T^{i0} (tiempo- espacio): es un flujo de densidad de momento en dirección i que atraviesa una superficie constante t=0.

- T^{ij}(espacio-espacio) para i,j =1,2,3 : Representa los valores de tensión en un punto, resulta ser el caso análogo del tensor de esfuerzos trabajado en la sección (1.3), la información contenida allí se relaciona con la presión propia del observado comóvil.

3.3 — Tercera Parte: Cosmología y el Fluido Perfecto

La importancia de la construcción del tensor energía-momento trae consigo implicaciones en la forma en cómo se modela el universo, para ello partamos de dos aspectos, uno tiene que ver con el principio cosmológico, que asegura que el universo a gran escala puede considerarse isótropo y homogéneo, cuando se refiere a la escala se entiende que son del orden de 10^8 o más años luz, la isotropía se puede describir desde el enfoque clásico de medios continuos como, la constancia de las variables de estado que describen al medio en todos sus puntos, en otras palabras, no existe un gradiente de alguna de estas variables, o este a ha de ser cero, y por tanto cualquier medición que se haga no depende de la dirección, esto cobra sentido si por ejemplo se piensa, en las observaciones hechas en los marcos comoviles, dado que en cualquier otro marco inercial habrá una transformación de sus variables con respecto a la TER.

El otro aspecto tiene que ver con el postulado de Weyl, que afirma que: *"Las partículas del sustrato descansan en el espacio tiempo sobre geodésicos temporales que divergen de un punto en el pasado finito o infinito"*(Ribera Manzano, 2016, p.14), lo que nos dice este postulado a grandes rasgos, es que el universo se puede modelar como un fluido (un fluido perfecto) donde para cada partícula del espacio tiempo le corresponde una línea de corriente (una línea de mundo), este postulado es la razón por la que hay un tiempo cosmológico que cobra importancia para un marco comóvil , como afirma Ribera Manzano (2016):

Consecuencia de ello es que cualquier punto del espaciotiempo -sin considerar las eventuales singularidades pasadas o futuras- es ocupado por una única geodésica, y, por eso mismo, a él se le pueden asociar una serie de propiedades (temperatura, densidad, presión, etc.)(Ribera Manzano, 2016)

Estos dos aspectos hacen del tensor energía-momento una consecuencia lógica con la cual se puede construir la descripción física a gran escala del universo, solo faltaría imponer una ecuación de estado, que relacione las variables (presión p y densidad

ρ), partiendo de $p = w\rho$, se pueden hallar distintos valores para el parámetro w, que dan cuenta de la distribución de energía-materia en el universo, una de estas ya fue discutida y tiene que ver con $w = 0 \rightarrow p = 0$ asociada a una distribución de partículas desordenadas o materia en "polvo", según Ribera Manzano (2016) *"modeliza el posible comportamiento de la materia bariónica y de la materia oscura. Se sobreentiende que en ambas situaciones la materia que compone el universo no interactúa entre ella"*(p.25), por otro lado, cuando $w = 1/3$ se encuentra que no hay distribución de materia sino solo de radicación, el vacío cuántico se da cuando $w = -\rho$, estos son solo algunos casos.

3.4 — Conclusiones

Con la presente investigación se buscó entender el papel que juega el modelo del fluido perfecto en la formalización de las variables de estado presión y densidad en la teoría especial de la relatividad, esto trae consigo las siguientes consideraciones que se pueden dividir en los siguientes aspectos.

Comprensión del mundo físico clásico

A la luz de la teoría clásica que describe el comportamiento del fluido perfecto, este queda determinado por un conjunto de ecuaciones y de variables estado que resultan ser covariantes bajo las transformaciones de Galileo, la idea de invariancia de las magnitudes físicas que definen un sistema como la presión y la densidad, resulta de un sin número de experiencias que alrededor de un fenómeno se han acumulado, sumado a esto se asumen hipótesis sobre la naturaleza del espacio y del tiempo que no están sujetas a comprobación, aunque de ellas se puedan sacar conclusiones verídicas (solo a velocidades pequeñas), lo que explica el por qué la mecánica es poco controvertida.

Por otro lado, el estudio de los conceptos base muestra que los procesos de formalización están mediados por distintas etapas, la idea de presión en la física es un claro ejemplo de esto, a partir de allí se construye la idea de tensión y a su vez la idea de tensor.

Comprensión de los fundamentos de la TER

El estudio de los fundamentos de la TER trae como consecuencia un marco descriptivo más profundo de la realidad física, consecuencia de ello es, por ejemplo, que los objetos se contraen en dirección del movimiento, con lo cual, conceptos como presión y volumen quedan definidos nominalmente para un observado comóvil (presión propia / densidad propia), por tanto, las variables de la mecánica clásica son un caso particular cuando las velocidades relativas son bajas comparadas a la velocidad de la luz y en este caso no hay distinción entre densidad propia o impropia (que no es medida en el marco comóvil).

Lo anterior implica que el marco descriptivo sobre la cual se construyen explicaciones en la TER, es definido por un sistema comóvil donde se formaliza la presión y la densidad, con ello los demás sistemas inerciales quedan caracterizados a partir de leyes de transformación entre tensores junto con estas variables de estado. Las transformaciones de Lorentz implican la forma como son calibradas las medidas hechas entre marcos inerciales cuando estos se mueven a velocidades comparables con la de la luz, el factor de Lorentz juega el papel de proporcionalidad entre las variables propias e impropias, por ejemplo $m = \gamma m_o$.

Por otro lado, para las teorías cosmológicas, ver al universo a gran escala como un fluido perfecto consiste en definir al tensor energía-momento y con ello definir la ecuación de estado que permite modelar distintas situaciones del cosmos, esto permite construir una interpretación coherente del universo y situar reflexiones filosóficas sobre la cosmovisión y el lugar que ocupamos en el universo.

Por último, resulta de interés pedagógico el enfoque de medios continuos tanto en la TER como en la mecánica clásica, esto permite colocar dichas teorías bajo aspectos que resultan comunes, por ejemplo, la idea de un universo homogéneo e isótropo se puede asemejar a la idea de medio continuo e incompresible, sin que con ello se caiga en el error de asumir estos hechos como equivalentes, en este sentido, la investigación pretende motivar en doble vía el estudio de medios continuos desde el enfoque clásico y desde el enfoque relativista , siendo el presente documento un primer puente entre las dos teorías.

Bibliografía

Ayala, M. (2018). *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos.* Universidad de Antioquia and Universidad Pedagógica Nacional.

Becerra, H., Bello, C., and Díaz, V. (2006). "sobre los cuerpos flotantes" de arquímedes: una mirada experimental.

Bonilla, Y. J. C., Rodríguez, J. F. S., and Salas, R. F. D. (2016). *Notas de geometría diferencial y aplicaciones a la física.* Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Castillo, J. C., Ayala, M. M., Malagón, J. F., Barragán, I. G., and Barrios, M. G. (2014). El tensor de esfuerzos. un análisis epistemológico desde una perspectiva pedagógica. *Revista Física y Cultura*, 1(8).

Crespo Martinez, A. (2006). *Mecánica de fluidos.* Editorial Paraninfo.

Fernández, A. E. (2017). *Arquímedes: el precursor del cálculo infinitesimal.* RBA.

Friedman, M. (1991). *Fundamentos de las teorías del espacio-tiempo*, volume 684. Anaya-Spain.

Kay, D. C. (1988). *Schaum's outline of theory and problems of tensor calculus.* McGraw-Hill New York.

Levi, E. (2001). *El agua según la ciencia.* AMH IMTA.

Lévy-Leblond, J.-M. (1999). *Pensar la matemática.* Tusquets.

Lifshits, E. M. and Landau, L. D. (1986). *Mecanica de fluidos.* Reverte.

Liñán, A. (2007). Las ecuaciones de euler de la mecánica de fluidos. *Real Academia de Ciencias Y Universidad Politécnica de Madrid*, pages 151–177.

Morente, M. G. (1964). *Lecciones preliminares de filosofía*. Clásicos Editores.

Ribera Manzano, P. (2016). Modelos cosmológicos en el marco de la teoría general de la relatividad. B.S. thesis, Universitat Politècnica de Catalunya.

Sierra Pareja, A. Y. (2014). Analisis introductorio para la comprensión del segundo postulado de la teoria especial de la relatividad.

Tokaty, G. A. (1994). *A history and philosophy of fluid mechanics*. Courier Corporation.

Tolman, R. C. (1987). *Relativity, thermodynamics, and cosmology*. Courier Corporation.

Truesdell, C., Howard, J. C. N., and Pérez-Relaño, E. T. (1975). *Ensayos de Historia de la Mecánica*. Tecnos.

Vélez, F. (2016). *Apuntes de Relatividad*.

Anexos

A.0 — **Demostración ecuación de continuidad**

La ecuación de continuidad 1.3 dada en la sección 1.2.2 se basa en la hipótesis de incompresibilidad de una partícula fluida

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Para ello, evalúese una partícula fluida con volumen $dV = dxdydx$ y una densidad ρ , que se ubica en la posición R con lo que un desplazamiento a la posición R' en un tiempo dt, determina un volumen dV' y una densidad ρ', como se observa en la imagen[1] A.1

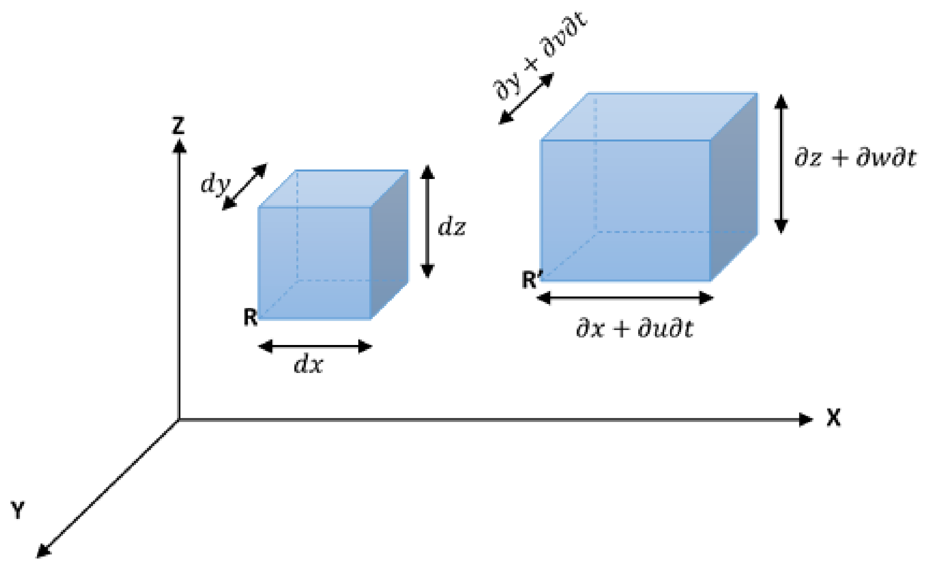

Figura A.1: Levi (2001). Paralelepípedo fluido de agua que se desplaza de la posición R a R' en un tiempo dt.[Figura]. Tomado de: El agua según la ciencia p.298

La densidad o el incremento de densidad en un infinitesimal de tiempo es $\rho' =$

[1]Cabe aclarar que este análisis se encuentra en el libro: El Agua Según La Ciencia, de Levi que aparece desde las páginas 298 a 299 y que acá se han completado los pasos intermedios además de rediseñar la imagen para mejorar la explicación.

$\rho + \frac{d\rho}{dt}dt$, siendo $\rho = \rho(x, y, z, t)$ función de las coordenadas (x, y, z) y del tiempo t, al igual que las componentes de la velocidad en los ejes x, y y z denotadas por u, v, w respectivamente, teniendo en cuenta las siguientes ecuaciones:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{A.1}$$

$$dV = dxdydz \tag{A.2}$$

Y haciendo uso de la regla de la cadena en ρ' , tenemos:

$$\rho' = \rho + \left(\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dx}u + \frac{d\rho}{dy}v + \frac{d\rho}{dz}w\right)dt \tag{A.3}$$

Y utilizando una notación más cómoda, podemos rescribir la ecuación A.3 como:

$$\rho' = \rho + \left(\frac{d\rho}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla\rho\right)dt \tag{A.4}$$

Siendo $\vec{V}$, el vector velocidad con componentes (u,v,w),por otro lado, para el incremento de volumen, se tiene entonces que :

$$dV' = (dx + dudt)(dy + dvdt)(dz + dwdt)$$

$$dV' = dxdydz\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}dt\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}dt\right)$$

Que, al distribuir y operar sin tener en cuenta potencias superiores a dos en los infinitesimales de tiempo, se reduce a la siguiente expresión:

$$dV' = dxdydz\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dt\right] \tag{A.5}$$

Nuevamente rescribiendo la ecuación A.5 como:

$$dV' = dV\left[1 + \nabla \cdot \vec{V}dt\right] \tag{A.6}$$

Aquí surge la condición necesaria para los fluidos incompresible, está ha de mantener el valor de la masa constante, o lo que es lo mismo $dm = dm'$, siendo $dm' = \rho' dV'$ para el incremento de tiempo dt, con lo que se tiene que cumplir que:

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\rho}{\rho'} \tag{A.7}$$

reeplazando con las ecuaciones A.4 y A.6 en A.7 se tiene

$$\frac{1}{\left(1 + \nabla \cdot \vec{V} dt\right)} = 1 + \frac{\left(\frac{d\rho}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla \rho\right)}{\rho} dt \tag{A.8}$$

El lado izquierdo de la ecuación A.8 se puede reescribir como: $1 - \frac{\nabla \cdot \vec{V} dt}{\left(1 + \nabla \cdot \vec{V} dt\right)}$

$$\frac{\nabla \cdot \vec{V} dt}{\left(1 + \nabla \cdot \vec{V} dt\right)} + \frac{\left(\frac{d\rho}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla \rho\right) dt}{\rho} = 0$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla \rho\right) \left(1 + \nabla \cdot \vec{V} dt\right) dt + \rho \left(\nabla \cdot \vec{V}\right) dt = 0$$

Expandiendo y simplificando donde los diferenciales de tiempo de orden superior son despreciados, se obtiene lo siguiente;

$$\frac{d\rho}{dt} + \left[(\nabla \rho) \cdot \vec{V} + \rho \left(\nabla \cdot \vec{V}\right)\right] = 0 \tag{A.9}$$

Por ultimo utilizando las propiedades del cálculo vectorial para el segundo miembro de la suma, se puede reducir aún más la expresión, para obtener:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \tag{A.10}$$

Y como ρ no varía en el tiempo para un fluido incompresible, o lo que es lo mismo $\rho = cte$ en la ecuación A.10 se llega a la conclusión que:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{A.11}$$

B.0 — **Tensor esfuerzos: transformación de coordenadas**

La siguiente expresión denota la ley de transformación del tensor esfuerzos para distintos sistemas de coordenadas

$$\bar{\tau}^{rs} = \tau^{rs} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}$$

Para ello tenga se encuenta la ecuación 1.17 de la sección 1.3

$$\vec{t} = \vec{t_1} n_1 + \vec{t_2} n_2 + \vec{t_3} n_3$$

Que como ya se indicó anteriormente, el esfuerzo queda determinado según una base cartesiana, con lo cual las proyecciones del elemento de área en cada uno de sus planos cumple la siguiente condición:

$$\frac{ds_i}{ds} = (\hat{n} \cdot \hat{e}_i) = \bar{n}_i; \; (i = 1, 2, 3) \tag{B.1}$$

Donde los e_i son los vectores de la base del sistema de coordenadas (x, y, z), a su vez la tensión en cada una de las caras del tetraedro (véase la figura 1.7 de la sección 1.3 de la página 18) se puede escribir como combinación lineal de un esfuerzo normal y dos cortantes, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{t_1} &= \tau^{1s} e_s \\ \vec{t_2} &= \tau^{2s} e_s \\ \vec{t_3} &= \tau^{3s} e_s \end{aligned} \tag{B.2}$$

Así remplazando en 1.17 con las ecuaciones B.1 y B.2 :

$$\begin{aligned}\vec{t} &= (\tau^{1s}e_s)(\hat{n}\cdot e_1) + (\tau^{2s}e_s)(\hat{n}\cdot e_2) + (\tau^{3s}e_s)(\hat{n}\cdot e_3)\\ \vec{t} &= \tau^{rs}(\hat{n}\cdot e_r)e_s\end{aligned} \tag{B.3}$$

Esta notación en donde aparecen los vectores de la base e_i resulta ser útil al querer transformar las coordenadas en función de otra base, por ejemplo, a la base $\bar{e}_i$. Si asumimos que una base se puede expresar en función de otra base a través de los coeficientes de transformación $\alpha_r^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$ entonces es claro que:

$$e_r = \alpha_r^i f_i$$

Reemplazando en (B.3) tenemos

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \tau^{rs}(\hat{n}\cdot \alpha_r^i f_i)\alpha_s^j f_j\\ \vec{t} &= \tau^{rs}\alpha_r^i\alpha_s^j(\hat{n} f_i)f_j\end{aligned} \tag{B.4}$$

El producto de la matriz de coeficientes α con el tensor τ generan una transformación de coordenadas al sistema barrado, esto es

$$\bar{\tau}^{ij} = \tau^{rs}\alpha_r^i\alpha_s^j$$

Que resulta en la ley de transformación de los tensores de segundo orden, con $\alpha_r^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$ y $\alpha_s^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}$, por tanto[1] en:

$$\bar{\tau}^{rs} = \tau^{rs}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}$$

[1]El ánalisis anterior se ha tomado y desarrolado de Kay (1988) del capítulo 3 pagínas, 34, 35 y 36