

PARTICIPACIÓN DE ESTUDIANTES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEOREMA
EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA REGIDA POR UN SISTEMA DE REGLAS
COMPARTIDO

JORGE ALEJANDRO RUIZ VEGA

Asesora

LEONOR CAMARGO

BOGOTÁ D.C.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2014

PARTICIPACIÓN DE ESTUDIANTES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEOREMA
EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA REGIDA POR UN SISTEMA DE REGLAS
COMPARTIDO

JORGE ALEJANDRO RUIZ VEGA

2012185023

Asesora

LEONOR CAMARGO

Doctora en Didáctica de la Matemática

Tesis de grado para optar al título de
Magister en Docencia de las Matemáticas

BOGOTÁ D.C.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2014

DEDICATORIA

A mi mamá por su comprensión y apoyo durante el desarrollo de este estudio. Por brindarme todas las oportunidades para salir adelante y gracias a ella ser todo lo que soy.

A Fernanda por todo su amor, su comprensión y motivación de forma incondicional. Su dulzura y palabras de aliento fueron primordiales para mí en esta etapa.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco especialmente a mi asesora de tesis porque sus aportes fueron invaluable y sin duda no habría podido estructurar este estudio sin su guía. Además de ser mi asesora, fue una gran maestra y aprendí mucho con ella. Gracias profe Leonor por toda su dedicación y por sus enseñanzas.

A los profesores de la UPN porque, en cada seminario que inscribí, mi aprendizaje estuvo relacionado no solo con aspectos de la investigación y de la elaboración de esta tesis, sino también respecto a elementos que me han llevado a reconsiderar mi práctica como docente en el aula de clases. En verdad el paso por esta maestría ha influido notablemente en mis concepciones ideológicas frente a mi profesión y me ha generado muchas más inquietudes para seguir adelante y aportar a los cambios educativos que el mundo de hoy demanda.

Finalmente, agradezco a mi familia, a mi novia y a mis amigos por la motivación y apoyo que me dieron durante la elaboración de este trabajo. Gracias por la paciencia y por estar a mi lado en la consecución de este logro.

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores, hemos dado los respectivos créditos.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "**Participación de estudiantes en la construcción de un teorema en una clase de geometría regida por un sistema de reglas compartido**" Presentado por el estudiante:

Jorge Alejandro Ruíz Vega - 2012185023 - 1032416185

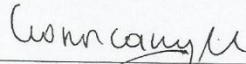
Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 46 Puntos.

Observaciones: _____

En constancia se firma a los 4 días del mes de marzo de 2015.

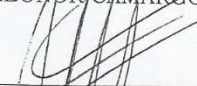
JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesora

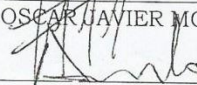

LEONOR CAMARGO URIBE

Jurados:

Profesor


OSCAR JAVIER MOLINA JAIME

Profesor


ARMANDO ECHEVERRY

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4

1.	
Tipo de documento	Tesis de Grado de maestría de investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Participación de estudiantes en la construcción de un teorema en una clase de geometría regida por un sistema de reglas compartido
Autor(es)	Ruiz Vega Jorge Alejandro
Director	Camargo Leonor
Publicación	Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2014.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas
Palabras Claves	Finalidades de participación, Calidad de la participación, Teorema, Actividad demostrativa.

2. Descripción
<p>Esta investigación surge a partir del trabajo desarrollado en la Maestría en Docencia en la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional y bajo los lineamientos del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$). Se retoman algunos datos recogidos por este grupo, durante el año 2007, de un experimento de enseñanza (Camargo, 2010) llevado a cabo en una versión de un curso de geometría euclidiana plana y se analizan esos datos a la luz de un marco de referencia diferente, en función de indagar por la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema, visto como una unidad compuesta por su enunciado, su demostración y el sistema teórico al que pertenece. El ejercicio investigativo pretende destacar el papel que tienen los estudiantes en la búsqueda de un fin común, el cual consiste en construir un teorema de manera colectiva a partir del uso de un sistema de reglas compartido.</p>

3. Fuentes
<p>Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica (M. Acosta, Trad.) <i>Recherches en didactique des mathematiques</i>, 8(3), 267-312. Recuperado en Septiembre de 2013 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Arsac/Arsac2002.pdf.</p> <p>Back, R. J., Mannila, L., & Wallin, S. (2009). Student justifications in high school mathematics. <i>CERME 6–WORKING GROUP 2</i>, 291.</p> <p>Bartolini Bussi, M. G. (2000). <i>Early approach to mathematical ideas related to proof making</i>. Contribution to: Proof and Proving in Mathematics Education. ICME9 TSG 12. Tokyo/Makuhari, Japan.</p> <p>Boero, P. (1999). <i>Argumentation and mathematical proof: A complex productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education</i> (P. Herbst, Trad.) International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Recuperado el 1 de Septiembre de 2013 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html.</p> <p>Camargo, L. (2010). <i>Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria</i> (Tesis de doctorado no publicada). Universitat de València. España.</p> <p>Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIV</i> (pp. 245-258). Lleida: SEIEM.</p> <p>de Villiers, M. D. (1986). <i>The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching</i>: University of</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

Stellenbosch Stellenbosch. Recuperado el 8 de Octubre de 2013 de <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf>.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Netherlands: Sense Publishers.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22nd PME Conference*, 2, 345-352.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, 9(1), 20-25.

Leblanc, S., Saury, S., Seve, C., Durand, M., & Theureau, J. (2001). An analysis of a user's explorations and learning on a multimedia instruction system. *Computers and Education*, 36, 59-82.

Luque, C., & Robayo, L. (2011). *Emergencia de un ambiente de actividad demostrativa con estudiantes en edad extraescolar* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition*. Reporte presentado en Proceedings of the 21st PME Conference, Lathi, Finland.

Molina, O., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración*, 20(1), 73-96.

Ortiz, F., & Perafán, B. (2004). La democracia: una vivencia posible en la clase de matemáticas. *Revista Ema*, 9(2), 129-164.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012a). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En L. Camargo (Ed.), *Investigaciones en educación geométrica* (pp. 127-148). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012b). La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa *Épsilon*, 29(3), 41-56.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2013). Actividad Instrumentada y Mediación Semiótica: Dos Teorías para Describir la Conjeturación como Organizador Curricular *Aportes investigativos para el desarrollo curricular en geometría y estadística*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Sfard, A. (1996). On acquisition metaphor and participation metaphor for the mathematics learning (P. Perry, Trad.). En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 397-411). Sevilla: Selected Lectures.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En P. Valero & O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1-23). Bogotá: Una empresa docente.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

4. Contenidos

- 1) DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA:** Se presenta la justificación del estudio, en la cual se argumenta por qué es pertinente indagar por la participación de estudiantes en la construcción de un teorema a partir de un sistema de reglas compartido y se establece un nexo entre tal participación y la formación en valores democráticos. Se plantean la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo y se muestra la revisión de la literatura.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 4	

- 2) **MARCO TEÓRICO:** Se exponen los fundamentos teóricos que sustentan este estudio en relación al tipo de acciones de participación de los estudiantes en la construcción de un teorema y a la calidad de esa participación.
- 3) **METODOLOGÍA:** Se describe la elaboración metodológica del estudio de caso con el cual se desarrolló este trabajo. Se detalla el proceso de construcción del conjunto de datos a partir de una revisión minuciosa de las sesiones de clase grabadas en video, correspondientes a una versión de un curso de geometría euclidiana plana de profesores de matemáticas en formación. Se presentan las categorías de análisis fundamentadas en el marco teórico propuesto.
- 4) **ANÁLISIS:** Se desarrolla el análisis de la participación de los estudiantes en la reconstrucción de un teorema, teniendo en cuenta el constructo teorema propuesto por Mariotti (1997). Se analiza la calidad de la participación de los estudiantes considerando indicadores de autonomía, genuinidad, relevancia y originalidad.
- 5) **RESULTADOS:** Se discuten los hallazgos más importantes de la investigación respecto a las finalidades y la calidad de la participación de los estudiantes.

5. Metodología

Este estudio es de índole cualitativo y se corresponde con un estudio de caso. Se hace uso de los datos experimentales de la tesis de Camargo (2010), para interpretarlos y analizarlos a la luz de otro marco de referencia y con otro objetivo. Como recurso metodológico se emplean técnicas de análisis retrospectivo como la confrontación, la evocación y el recuerdo (Leblanc, Saury, Seve, Durand, & Theureau, 2001), aprovechando que el autor de la tesis fue estudiante del curso objeto de estudio de Camargo (2010) y a su vez, la asesora de esta tesis, fue observadora no participante de ese curso. De esta manera, al revisar los videos y transcripciones de las clases del curso de geometría de 2007, para escoger los fragmentos con los cuales se llevó a cabo el análisis en el presente estudio, se tuvieron en cuenta aspectos relevantes de la experiencia vivida por el autor y la asesora en el experimento de enseñanza relacionado.

6. Conclusiones

La participación de los estudiantes es diversa a lo largo de la producción del teorema. En las diferentes intervenciones de los estudiantes distinguimos aspectos que nos permiten concluir que la participación de algunos tiene calidad en términos de relevancia, originalidad, autonomía y genuinidad. Así mismo, resaltamos la riqueza en la actividad demostrativa en la que se ven inmersos la mayoría de los estudiantes y, en particular, el trabajo que desarrollan en la exploración del problema y en la formulación del enunciado de la conjetura. Cada grupo presenta una propuesta diferente. Una mirada detallada de ello se da en los capítulos 4 y 5 del presente estudio.

Igualmente, consideramos que sí es posible que los estudiantes construyan un saber valorado social y culturalmente como lo es la producción de un teorema. El hecho de que en la comunidad de clase los estudiantes hayan logrado llevar a cabo este fin común de manera colectiva, contribuye al desarrollo de los valores democráticos en ellos. El fomento de la autonomía, la originalidad y la genuinidad, gracias a la aproximación metodológica, conlleva a que los estudiantes generen aportes relevantes en la toma consensuada de decisiones.

Frente a los objetivos del trabajo, nos propusimos, de manera general, describir, interpretar y analizar cómo participan los estudiantes en la construcción de un teorema teniendo en cuenta el constructo propuesto por Mariotti et al. (1997). Para ello, abarcamos y cumplimos objetivos específicos relacionados con la decantación en la literatura de referentes teóricos, que nos permitieran construir categorías de análisis, para mostrar la participación de algunos estudiantes e inferir algunos resultados. Seleccionamos un estudio de caso, a partir de una revisión minuciosa de videos de una clase de geometría plana, y pudimos desarrollar un análisis de participación de los estudiantes y de la calidad de esa

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 4	

participación. Luego, efectivamente cumplimos los objetivos en su totalidad.

Respecto a la pregunta de investigación, indagamos sobre cómo participan estudiantes de segundo semestre de un programa de formación de profesores de matemáticas, en un curso de geometría plana, regido por un sistema de reglas compartido, que promueve el aprendizaje como participación en una práctica valorada socialmente. A lo largo del trabajo se fue abarcando la pregunta paulatinamente y al final podemos decir que, efectivamente, este estudio la responde, pues se han podido identificar finalidades y características de la calidad de la participación de los estudiantes.

Sobre la proyección de este trabajo nos surgen algunas inquietudes y nos quedan varias preguntas. Por ejemplo, en nuestro estudio no se entró en detalle sobre qué tan convencidos quedaron los estudiantes de que el teorema que construyeron era cierto. Sería interesante indagar si una vez demostrado, los estudiantes aceptan su validez como necesaria. De hecho, Stylianides (2007) señala que el conocimiento que se puede considerar como compartido en una comunidad no refleja necesariamente la comprensión individual de cada estudiante.

Dada la especificidad del análisis realizado, también podría ser importante estudiar si con otros teoremas, incluso del mismo tipo, la participación de los estudiantes sería similar a nuestro estudio de caso. ¿Cómo sería la calidad de la participación si escogiéramos otro teorema con un contenido geométrico diferente? ¿Habríamos encontrado los mismos códigos en cuanto a las finalidades de participación? ¿Los estudiantes que analizamos tendrían diferentes perfiles de participación con otros teoremas? ¿Los códigos con menor frecuencia habrían tenido mayor frecuencia en otros teoremas? ¿Podríamos generalizar perfiles de participación de un estudiante contrastando finalidades y calidad de la participación?

De manera similar, se podría ahondar en la interacción entre grupos de estudiantes, sin ningún apoyo del profesor y hacer una mayor profundización en los posibles nexos entre estas interacciones y la construcción de valores democráticos, en el marco de una comunidad de aprendizaje con un fin común. Además podría hacerse énfasis en el papel que jugó el soporte tecnológico en la participación de los estudiantes y si tuvo alguna relación con la formación de valores en esa comunidad.

Finalmente, en cuanto a la formación profesional del autor de la tesis, esta ha sido una experiencia muy enriquecedora porque me ha permitido tener una visión más amplia de mi práctica como docente, al salirme un poco del rol de maestro en el aula de clases e indagar por aspectos que solo a la luz de una teoría de referencia específica un investigador puede distinguir. A nivel personal, considero que este estudio me sirvió para crecer como persona en el sentido de poner a prueba mi rigurosidad, perseverancia y exigencia conmigo mismo en el logro de una meta.

Elaborado por:	Jorge Alejandro Ruiz Vega
Revisado por:	Leonor Camargo

Fecha de elaboración del Resumen:	9	12	2014
--	---	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA	3
1.1. JUSTIFICACIÓN.....	3
1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	6
1.3. OBJETIVOS.....	7
1.3.1. Objetivo General	7
1.3.2. Objetivos Específicos	7
1.4. REVISIÓN DE LA LITERATURA	8
1.4.1. Introducción del constructo teorema, propuesto por Mariotti et al. (1997), en el ámbito de la educación matemática	8
1.4.2. Estudios relacionados con participar en la formulación del enunciado de un teorema	10
1.4.3. Estudios relacionados con participar en la demostración de un teorema	12
1.4.4. Estudios relacionados con participar en la construcción de un sistema teórico de un teorema	15
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....	17
2.1. ACCIONES DE PARTICIPACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEOREMA.....	17
2.1.1. Tipo de acciones de participación respecto al sistema teórico de un teorema	18
2.1.2. Tipo de acciones de participación en el enunciado de un teorema.....	20
2.1.3. Tipo de acciones de participación en la demostración de un teorema	25

2.2. CALIDAD DE LA PARTICIPACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEOREMA.....	28
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA.....	34
3.1. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN Y EL CONTEXTO.....	35
3.2. PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE DATOS	36
3.2.1. Selección inicial de datos	36
3.2.2. Construcción del conjunto de datos.....	37
3.3. INSTRUMENTOS PARA LA DESCRIPCIÓN, INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS EPISODIOS	38
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS	44
4.1. RECONSTRUCCIÓN DEL TEOREMA TRIÁNGULO ISÓSCELES – ALTURAS CONGRUENTES	44
4.1.1. Contextualización.....	44
4.1.2. Síntesis de la participación	46
CAPÍTULO 5: RESULTADOS.....	81
5.1. PARTICIPACIÓN GENERAL DE LOS ESTUDIANTES SEGÚN LOS COMPONENTES DEL TEOREMA	81
5.1.1. Variedad en la participación de los estudiantes en la construcción del teorema	81
5.1.2. Participación de los estudiantes por episodio y por componente del teorema	83
5.1.3 Frecuencias de participación de los estudiantes por componente del teorema	85
5.2. PERFILES DE PARTICIPACIÓN	87

5.2.1. Tipo de acciones de participación por estudiante en el trabajo por parejas.....	87
5.2.2. Valoración de la participación de los estudiantes en el trabajo por parejas.....	90
5.2.3. Tipo de acciones de participación por estudiante en el trabajo en gran grupo.....	92
5.2.4. Correlación entre finalidades de participación y calidad de participación	97
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES	99
REFERENCIAS	102
ANEXOS	105

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1.	105
Cuestionario sobre creencias respecto a la utilidad de enseñar teoremas en la clase de geometría.	
Anexo 2.	107
EPISODIO 7: María y Efraín deciden hacer una exploración por casos.	
EPISODIO 8: Efraín se cuestiona sobre la inclusión del objeto altura en el enunciado del problema.	
EPISODIO 9: Efraín y María exploran para verificar, a partir de la toma de medidas, y conjeturan.	
Anexo 3.	112
EPISODIO 10: Introducción en el sistema de la definición de rectas perpendiculares y del teorema de la existencia de la recta perpendicular por un punto externo.	
EPISODIO 11: Correspondencia entre la conjetura y la construcción/exploración de Darío y Leopoldo.	
EPISODIO 12: Correspondencia entre la conjetura y la construcción/exploración de Juan y Ana.	
EPISODIO 13: Limitación de la conjetura propuesta por Luz y Marina.	
Anexo 4.	121
Valoración de la participación de los estudiantes en el trabajo en gran grupo	
Anexo 5.	125
Frecuencias de participación de los estudiantes por códigos	

INTRODUCCIÓN

Este estudio surge a partir del trabajo desarrollado en el programa de Maestría en Docencia en la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional y bajo los lineamientos del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$). Se retoman algunos datos recogidos por este grupo, durante el año 2007, de un experimento de enseñanza (Camargo, 2010), llevado a cabo en una versión de un curso de geometría euclidiana, con estudiantes de edades entre los dieciocho y veintitrés años, inscritos en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad.

El propósito de este trabajo es analizar esos datos a la luz de un marco de referencia diferente al usado por Camargo (2010), en función de indagar por la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema visto como una unidad compuesta por su enunciado, su demostración y el sistema teórico al que pertenece (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997). El ejercicio investigativo pretende destacar el papel que tienen los estudiantes en la búsqueda de un fin común, el cual consiste en construir un teorema de manera colectiva a partir del uso de un sistema de reglas compartido en la clase de geometría. El documento se divide en seis capítulos que describimos a continuación.

En el primer capítulo presentamos la delimitación del problema a través de la justificación del mismo, la formulación de la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos que nos planteamos para llevar a cabo el estudio y la revisión de la literatura; en esta última incluimos evidencias empíricas y teóricas que tuvimos en cuenta para configurar el problema de investigación.

En el segundo capítulo describimos el marco teórico del estudio. A partir del constructo teorema, sugerido por Mariotti et al. (1997), se detalla qué vamos a entender por enunciado, demostración y sistema teórico, así como el fundamento que utilizaremos para valorar las participaciones de los estudiantes.

En el tercer capítulo hacemos hincapié en el diseño metodológico del estudio. Realizamos una descripción de la población y el contexto. Describimos el proceso de construcción del conjunto de datos y los instrumentos que usamos para el análisis descriptivo, interpretativo e inferencial de la información recogida y presentamos la rejilla de análisis.

En el cuarto capítulo desarrollamos el análisis de los datos a partir de la reconstrucción de la participación de los estudiantes en la producción del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes. Hacemos una contextualización de las sesiones de clase en las que se trabajó en el teorema, presentamos los episodios en los que dividimos la interacción al respecto, describimos e interpretamos la participación en cada uno y valoramos esa participación de los estudiantes en dos momentos, uno en relación al trabajo en parejas y otro respecto al trabajo en gran grupo¹.

En el quinto capítulo mostramos los resultados que obtuvimos respecto al análisis de la participación de los estudiantes, en la construcción del teorema en mención, teniendo en cuenta el marco teórico del estudio. Resaltamos los aspectos más interesantes de la participación general de los estudiantes en el teorema, haciendo énfasis en las categorías de análisis que usamos, y nos referimos a los perfiles de participación que identificamos en los estudiantes.

Por último, en el sexto capítulo dilucidamos las conclusiones a las que nuestro estudio nos permitió llegar, de acuerdo a las condiciones metodológicas y el marco de referencia elegido. Presentamos algunas reflexiones finales sobre el trabajo y esclarecemos algunos aspectos en los que se podría profundizar en futuras investigaciones.

El título inicialmente pensado para el trabajo fue “Más allá del enunciado de un teorema”, pero este se modificó al título actual debido a las observaciones de uno de los jurados, quién nos hizo notar que ese título inicial no permitía ver el alcance del trabajo ni el enfoque hacia la participación de los estudiantes. A partir de las sugerencias recibidas, se cambió el título para que fuera más preciso con el desarrollo de este estudio y su contexto.

¹ La expresión “gran grupo” se usa en el ámbito escolar para denominar al conjunto de todos los estudiantes de la clase, cuando el profesor se dirige a ellos.

CAPÍTULO 1: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Este capítulo se centra en detallar el planteamiento del problema. Para ello, inicialmente presentamos una justificación del estudio, teniendo en cuenta algunas evidencias empíricas y teóricas que utilizamos para concretar la pregunta de investigación. Seguidamente, formulamos el problema y la pregunta. Luego nos referimos a los objetivos del estudio y finalizamos con la revisión de la literatura.

1.1. JUSTIFICACIÓN

Según la perspectiva socio cultural y específicamente en la teoría de la práctica social, sugerida por Wenger (1998, citado por Camargo & Gutiérrez, 2010), el aprendizaje de las matemáticas se ve como sinónimo de participación en una comunidad de práctica en la que se toman decisiones colectivamente a partir de presupuestos compartidos. Visto así, la educación matemática contribuye a formar en valores democráticos a las personas.¹ Esta aproximación permite considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde perspectivas diferentes a las usuales, como aquellas relacionadas con el trabajo de Wenger (1998), de Skovsmose y Valero (2012), entre otros. Se hace un llamado a la educación matemática para que se responsabilice de la formación en valores democráticos y del impulso a procesos de participación colectiva, en el logro de metas comunes, a partir de sistemas de reglas compartidos.

De esta manera, en algunas aulas de matemáticas se empieza a poner en práctica esa responsabilidad de modo que estas tienden a cambiar para dejar de ser espacios de transmisión y empezar a ser espacios de participación colectiva en prácticas valoradas

¹ Al referirnos a la palabra democracia no aludimos a esta en toda su extensión, pues en este estudio no se alude, por ejemplo, a la toma de decisiones por mayoría, sino a la construcción colectiva de una razón, de una forma de actuar en la sociedad y una forma de compartir responsabilidades. En este sentido entendemos la vida democrática de los ciudadanos.

socialmente. Es así que Sfard (1996), considera que aprender matemáticas tiene que ver con convertirse en miembro de una comunidad matemática en la cual se adquiere cierta habilidad para comunicarse en el lenguaje propio de la comunidad misma y para actuar bajo unas normas particulares, las cuales son negociadas en el proceso de consolidación de dicha comunidad.

Desafortunadamente, en el caso del aula de geometría y específicamente en lo que tiene que ver con el aprendizaje de la demostración, esta no es la situación común. En la experiencia personal, como docente, del autor de esta tesis y a partir de un cuestionario (Ver Anexo 1) que fue aplicado a cinco docentes de un colegio privado en Bogotá, en donde se les preguntaba cómo enseñaban a justificar en las clases, se evidencia que estas ideas y esta responsabilidad de la educación matemática aún no llegan al aula.

En las respuestas al cuestionario se percibe que los docentes solo reconocen la función de verificación en sus concepciones sobre la justificación matemática, ya que únicamente hacen referencia a esta para constatar resultados mediante procesos deductivos o inductivos. Al ser preguntados sobre los aspectos que tenían en cuenta al momento de enseñar un teorema, ellos se centran exclusivamente en la comprensión del enunciado del mismo y no mencionan que un teorema también está en estrecha relación con su demostración y el sistema teórico al que pertenece y además puede ser fruto de un proceso de construcción colectiva. De estas respuestas, es posible vislumbrar el estatus que se le da al enunciado de un teorema en las prácticas de algunos docentes en la escuela, el cual es privilegiado, de modo que es difícil pensar en abarcar otros aspectos del teorema, como su demostración y la teoría en que este se encuentra. Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina (2012a), corroboran tales deficiencias en el aprendizaje de la argumentación y justificación teórica, en geometría, en diferentes niveles educativos en Colombia.

Por otro lado, Dreyfus (1999, citado por Back, Mannila, & Wallin, 2009) enfatiza en que, en el aula, los estudiantes no están acostumbrados a justificar sus resultados y mucho menos a demostrar teoremas. Es común que los profesores le pidan a los estudiantes explicar sus soluciones únicamente cuando se han cometido errores (Back, et al., 2009).

Además, Schoenfeld (1985) afirma que la relación entre una construcción geométrica y el teorema que la valida es algo muy complejo que no es inmediato para los estudiantes. Por ende, a partir de estas dificultades, es válido afirmar que la enseñanza de las matemáticas tal como se lleva a cabo en las aulas de clase, con frecuencia parece estar apartada de la construcción compartida de reglas para la toma de decisiones y lejos de contribuir a la vida democrática (Skovsmose & Valero, 2012).

Esto llama la atención y resulta paradójico, puesto que la formación en valores democráticos emergió en la sociedad occidental de la mano de los métodos deductivos y de la demostración, tal como se conoce hoy en día. Arsac (1987), plantea que los filósofos se sorprendieron de la aparición simultánea en Grecia de la democracia, la filosofía y la geometría:

Para ellos, no hay duda que la aparición de la demostración en matemáticas solo es la aplicación en esta ciencia del debate público en el ágora que caracteriza la organización política de la ciudad griega en relación con los regímenes que la precedieron y los que la rodeaban. Durante mucho tiempo, el origen de esa democracia griega pareció tan misterioso que se hablaba de "milagro griego". El milagro griego, materializado por el nacimiento de la democracia, de la filosofía, de la geometría, consistía en el descubrimiento por la humanidad de la "razón", concebida implícitamente como una estructura de pensamiento universal, independiente de las civilizaciones, que los Griegos habrían sido los primeros en descubrir. (Arsac, 1987, p. 14)

Arsac (1987) también menciona que debido al progreso de la ciencia y en particular, gracias al acceso a la escritura de la civilización que precedió a la Grecia democrática sucedió ese "milagro griego" y fue posible

explicar cómo las transformaciones sociales permitieron pasar del pensamiento mítico a un pensamiento racional, aun parcialmente marcado por sus orígenes y que, ahora consideramos como la racionalidad griega, y no como la encarnación de una mítica razón universal... con una civilización y una historia... la razón ya no es un valor que reina en el cielo de las ideas y descubierta por los griegos, sino una construcción, con una fecha histórica, debida a una civilización que enfrentaba ciertos problemas (desarrollo del comercio, etc.) (Arsac, 1987, p. 14)

Por consiguiente, es factible establecer una conexión entre democracia y participación en comunidades de práctica en matemáticas desde esta perspectiva histórica. Arsac (1987), sugiere que el método deductivo en geometría surgió relacionado con las condiciones sociopolíticas de la época, en Grecia, de manera que los modos de argumentar en geometría, haciendo uso del razonamiento lógico deductivo, tienen sus raíces en el sistema democrático griego.

En ese sentido, un saber que es muy importante y valorado social y culturalmente en la educación matemática es el saber que tiene que ver con la construcción y validación de hechos geométricos. Hay experiencias documentadas como la de Camargo (2010), en donde, en busca de una alternativa para innovar respecto a la enseñanza tradicional de la geometría; se trata de inducir a los estudiantes a participar en la actividad demostrativa de modo que ellos puedan contribuir en prácticas de definir, conjeturar y argumentar, a partir del uso de unas reglas que se ponen en juego y unas formas de razonar que son aceptadas por todos, en función de construir un sistema teórico local, que hacen al estudiante partícipe de esa construcción colectiva.

De hecho, Camargo (2010), muestra que sí es factible que los estudiantes participen en la actividad demostrativa, en la construcción de definiciones, en la elaboración de demostraciones y en la producción de conjeturas. Pero Camargo no entró en detalles respecto a la posibilidad de que los estudiantes construyan un saber que está ligado a las prácticas de demostración como lo es la producción de teoremas. Por tanto, teniendo en cuenta la responsabilidad que conlleva la formación matemática, desde la perspectiva de formación en valores democráticos, es pertinente preguntarse qué tanto pueden participar los estudiantes en la construcción de un teorema a partir de un sistema de reglas compartido en una clase de geometría.

1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo está vinculado a la línea de argumentación y prueba del grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual ha avanzado en la tipificación de algunos

constructos como el de *actividad demostrativa* y en la identificación de tipologías de participación en términos de la relevancia, autonomía y genuinidad de los aportes de los estudiantes en la clase de geometría. Nuestra intención es profundizar en cómo los estudiantes participan en la producción de un teorema, ya que vemos que el tratamiento dado a los teoremas en la clase de geometría generalmente no se aprovecha para favorecer el aprendizaje de prácticas relacionadas con la demostración en matemáticas (Mariotti, 2006) y colateralmente en la formación de valores democráticos. Con base en estos planteamientos y en los aspectos detallados en la sección anterior, respecto a la importancia de la formación matemática de una persona para su participación democrática en nuestra sociedad, la pregunta que orienta nuestro estudio es:

¿Cómo participan estudiantes de segundo semestre de un programa de Licenciatura en Matemáticas en la construcción de un teorema, en un curso de geometría plana, en el cual se pretende instaurar un sistema de reglas compartido que promueve el aprendizaje como participación en una práctica valorada socialmente?

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo General

Describir, interpretar y analizar la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema teniendo en cuenta su enunciado, la demostración y el sistema teórico de referencia.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Decantar en la literatura los referentes teóricos que fundamentan el marco teórico, a partir de la terna propuesta por Mariotti para el constructo teorema, y que sustentan las categorías de análisis propias de este estudio.
- Revisar los videos de la clase de geometría plana del primer semestre de 2007 del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional con miras a seleccionar un caso para su estudio.

- Diseñar categorías de análisis que permitan describir la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema.
- Analizar la participación de los estudiantes haciendo uso de las categorías de análisis desarrolladas, en función de inferir algunos resultados sobre las finalidades de participación y la calidad de esta.

1.4. REVISIÓN DE LA LITERATURA

En esta sección se describen algunas de las investigaciones que se consideraron relevantes para este estudio. El constructo “teorema” definido por Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti (1997), como una entidad conformada por su enunciado, la demostración y el sistema teórico al que pertenece, se constituye en la base para la revisión de la literatura. La revisión se centra en una exploración del uso de dicho constructo en investigaciones en Educación Matemática relacionadas con cada uno de los componentes de la entidad. Esta revisión se hizo en las siguientes publicaciones: *Proceedings of the 21st PME Conference* (1997), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (1998), *Proceedings of the ICME 9* (2000), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (2006); *For the learning of mathematics* (1989), *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof* (1999), *Educational Studies in Mathematics* (2000), *Journal for Research in Mathematics Education* (2007); *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (2007), *Excursions in the History of Mathematics* (2012) e *Investigaciones en educación geométrica* (2012).

1.4.1. Introducción del constructo teorema, propuesto por Mariotti et al. (1997), en el ámbito de la educación matemática

A través de la historia se ha visto que los matemáticos solo aceptan un nuevo teorema cuando este se entiende, nada sugiere que sea falso, el teorema es consistente con la estructura de resultados aceptados o existe un argumento matemático convincente para su demostración (Hanna, 1989). En este sentido, Mariotti et al. (1997) afirman que, para los matemáticos, existe una continuidad evidente entre el enunciado, la demostración y el

contexto teórico en el cual se inserta un teorema. Sin embargo, este no es el caso en el campo de la Educación Matemática pues en relación con la demostración en matemáticas, los teoremas no son aprovechados en la enseñanza para favorecer procesos de argumentación y justificación.

Mariotti et al. presentan el constructo teorema en 1997, en una investigación relacionada con la aproximación a los teoremas en la clase de geometría. En el estudio se introduce un análisis histórico y epistemológico de los teoremas matemáticos vistos como entidades conformadas por tres componentes y también se menciona otro constructo, denominado unidad cognitiva, el cual está muy relacionado con el constructo teorema.

En una primera aproximación, la unidad cognitiva hace referencia a la posible continuidad entre el proceso de construir una conjetura y la elaboración de su demostración. Garuti, Boero y Lemut (1998), presentan las potencialidades investigativas del constructo unidad cognitiva, en relación a la construcción del significado de teorema, para interpretar y predecir las dificultades de los estudiantes al momento de enfrentarse a la demostración del enunciado de un teorema. El constructo unidad cognitiva, según Garuti, Boero y Lemut, establece la relación óptima entre las acciones argumentativas del estudiante durante la producción de una conjetura y la formulación de un enunciado, para después pasar a una demostración en la que se organizan los argumentos producidos, en la etapa de conjeturación, de acuerdo a una cadena deductiva válida en un sistema teórico. En este punto se evidencia la conexión entre el constructo teorema y el constructo unidad cognitiva.

Desde el momento de la formulación del constructo teorema (Mariotti, et al., 1997), este ha sido utilizado principalmente por investigadores de la escuela italiana. Por ejemplo, Garuti, Boero y Lemut (1998), mencionan que el constructo unidad cognitiva surgió del análisis epistemológico de teoremas, en relación al trabajo efectuado en el pasado por geómetras que mostraron diversos ejemplos de la continuidad entre la producción de un enunciado y la construcción de su demostración. Igualmente, Bartolini Bussi (2000) hace uso del constructo teorema, propuesto por Mariotti et al., en el estudio de la producción de

conjeturas y la construcción de demostraciones en la escuela primaria, a través de diversas investigaciones relacionadas con diferentes temáticas de geometría.

En una investigación llevada a cabo por Mariotti (2000), respecto a la introducción al pensamiento teórico y el estudio de las formas en que este proceso es realizado con estudiantes de grado noveno y décimo, en donde se tenía como objetivo desarrollar el significado de “construcción” como procedimiento que puede ser validado por un teorema, la investigadora concluye que los problemas relacionados con construcciones constituyen un núcleo fundamental de las actividades para los estudiantes, pues les permiten relacionar el proceso de conjeturación que da lugar a un enunciado, con su demostración en un sistema teórico. Por ello, hace referencia a la importancia de distinguir entre la construcción intuitiva de conocimiento y su sistematización formal debido a la naturaleza de las matemáticas, en función de construir un teorema a partir de un razonamiento lógico deductivo. Precisamente, esta relación está asociada, para nosotros, al proceso de construcción de una conjetura y se constituye en una guía para el presente estudio.

Mariotti (2006), también menciona que la demostración ha ganado importancia tradicionalmente por sí misma, como si fuera posible aislarla del enunciado al que proporciona soporte y del sistema teórico en el que este apoyo tiene sentido. Para ella, es necesario esclarecer el estatus de la demostración en relación al de la argumentación. Es así que Mariotti afirma que cuando se habla de demostración, todos estos elementos están involucrados al mismo tiempo, aunque no siempre se mencionen. Por ende, según Mariotti, no es posible captar el sentido de una demostración matemática sin vincularlo a los otros dos elementos: un enunciado y una teoría general.

1.4.2. Estudios relacionados con participar en la formulación del enunciado de un teorema

Boero (1999) se posiciona en la concepción de teorema de Mariotti et al. (1997) y afirma que “ingresar a la cultura de los teoremas significa desarrollar competencias específicas inherentes a la producción de [enunciados] [...] y a la [...] [demostración] de las conjeturas

producidas mediante tomar en cuenta elementos del [...] [sistema] teórico” (Boero, 1999, p. 2). Boero se posiciona bajo estas ideas porque difiere de la perspectiva de Balacheff¹ (1999, citado por Boero, 1999) respecto al rol de la argumentación en el aprendizaje de la demostración en matemáticas, al considerar que aproximarse a la demostración es una forma general de aprendizaje cultural y cognitivo que corresponde al ingreso a la cultura de teoremas y teorías matemáticas.

En este sentido, Boero hace alusión a la importancia de tener en cuenta la continuidad posible entre la producción de una conjetura y la producción de su demostración con el fin de hacer una selección adecuada de situaciones problemáticas favorables para el funcionamiento de dicha continuidad (Garuti, et al., 1998) y así construir un teorema a partir del uso de elementos del sistema teórico en la demostración de la conjetura. En su investigación, Boero (1999) también tipifica algunos aspectos a tener en cuenta en las actividades inmersas en la construcción del enunciado de un teorema a través de las siguientes fases: producción de una conjetura, formulación de su enunciado y exploración del contenido de la conjetura. Por ende, consideramos importante tener en cuenta los aspectos que Boero menciona sobre el enunciado de un teorema y así, estas fases se constituyen en una base para el establecimiento de las categorías de análisis del presente estudio.

Luque y Robayo (2011), retoman las fases propuestas por Boero (1999) y las adaptan para crear unas categorías de análisis en función de indagar cuáles son las acciones realizadas por un grupo de estudiantes en edad extraescolar, inmersos en un ambiente de *actividad demostrativa* (Molina, Samper, Perry & Camargo, 2011), según el constructo propuesto por el grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$, en la clase de geometría. Dentro de las categorías e indicadores señaladas por Luque y Robayo, relacionadas con el enunciado de un teorema, destacamos las

¹ Balacheff considera que la argumentación puede ser un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la demostración. Para Boero (1999) la distinción entre prueba y proceso es un factor crucial en la discusión respecto al rol de la argumentación matemática en actividades que tienen que ver con teoremas.

siguientes dos: “reconocimiento de la propiedad invariante”¹ con indicadores como *interpretación de la situación, construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema, exploración de la construcción y predicción de la solución de la situación problema*, y “formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas” con los indicadores referentes al *correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura y la verificación de la formulación de la conjetura*. Tales categorías e indicadores constan de acciones que permiten evidenciar si los estudiantes se involucran en la producción de enunciados de conjeturas.

En la presente investigación nos basamos en las fases de Boero (1999), nombradas previamente, y en las categorías e indicadores propuestos por Luque y Robayo (2011) para constituir las categorías correspondientes al análisis de las finalidades de participación de los estudiantes en la construcción de un teorema, en relación con el componente enunciado del constructo propuesto en 1997 por Mariotti et al. Sin embargo, no recurrimos a todas las categorías que proponen Luque y Robayo, pues solamente algunas de ellas nos eran útiles para analizar los datos experimentales.

También nos basamos en el trabajo desarrollado por el grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$. En particular, tenemos en cuenta el constructo *actividad demostrativa* (Molina, et al., 2011) puesto que en ese tipo de actividad se engloban dos procesos, uno de los cuales tiene que ver con acciones específicas relacionadas con establecer el enunciado de una conjetura. Las acciones que conforman este proceso son visualizar, explorar, generalizar y verificar conjeturas de modo que sean planteadas con un grado alto de seguridad y que por tanto puedan ser candidatas para entrar a un proceso de justificación (Perry, et al., 2012a).

1.4.3. Estudios relacionados con participar en la demostración de un teorema

Stylianides (2007) propone una conceptualización del significado de demostración en las matemáticas escolares que apunta a aspectos socioculturales, relacionados con la formación

¹ Esta categoría es importante en nuestro estudio, pues los estudiantes resuelven el problema usando un programa de geometría dinámica como apoyo, por lo cual pueden indagar respecto a qué cambia y qué se mantiene invariante en una construcción geométrica mediante el arrastre.

de valores democráticos, y examina aspectos del rol del profesor al dirigir la actividad demostrativa de los estudiantes. Esta conceptualización se da a manera de definición, de modo que puede ser aplicada en el contexto de una comunidad de un aula de clases en un determinado tiempo. En tal definición, el autor se refiere a la demostración como un argumento matemático el cual “usa enunciados aceptados por la comunidad del aula de clases [...] emplea formas de razonamiento [...] que son válidas [...] dentro de la comunidad [...] y es comunicado con formas de expresión [...] que son apropiadas [...] para la comunidad” (Stylianides, 2007, p. 291).

Esta conceptualización es importante para nuestro estudio ya que nos da subcategorías de las finalidades de participación de los estudiantes en la demostración de un teorema y nos permite realizar una primera decodificación de los datos a partir de la clasificación de segmentos de las transcripciones de las clases analizadas, de acuerdo a lo que se está tratando en estas, en relación a la demostración. En este sentido, Stylianides (2007) plantea que en una situación en la que los estudiantes se encuentren envueltos en actividad demostrativa, es factible analizar lo que hacen o dicen haciendo uso de los tres componentes dados en la conceptualización del significado de demostración, considerando los condicionantes y restricciones específicas en la comunidad.

Ahora bien, Bartolini Bussi (2000), hace referencia a la creciente atención hacia la importancia de la explicación, la justificación y la demostración en educación matemática y en geometría. Menciona que Boero y Garuti, (1998) transformaron la unidad cognitiva de teoremas como instrumento descriptivo, en uno interpretativo y predictivo para estudiar las dificultades de los estudiantes a la hora de demostrar. Así, Bartolini Bussi cita como ejemplo problemático, las situaciones de clase en las que se omite la fase de conjeturación, la cual relacionamos en este trabajo con la participación de los estudiantes en el componente enunciado de un teorema, y se da directamente a los estudiantes un enunciado para ser demostrado.

Igualmente, Bartolini Bussi (2000) alude a que una demostración rigurosa solo existe dentro de una teoría de referencia, es decir el sistema teórico al que pertenece un teorema.

El sistema establece los postulados, las definiciones y teoremas básicos que se usan como punto de partida para demostrar otros teoremas y determina cuáles son las reglas compartidas. Además, Bartolini Bussi establece que la traducción del conjunto de argumentos en una cadena lógica, es un asunto de construcción social bajo la guía cultural del profesor. Para la presente investigación es de vital importancia esta perspectiva puesto que la población objeto de estudio se pretende constituir en una comunidad de práctica de clase, de acuerdo a la perspectiva de Clark, (2005 citado por Camargo, 2010) y su trabajo se enmarca en la construcción de teoremas a partir del uso de un sistema de reglas compartido.

Boero (1999), también hace referencia a algunas fases de la actividad de producción de teoremas, las cuales relacionamos con el componente demostración: selección y encadenamiento de argumentos teóricos en una cadena deductiva, organización de la cadena de argumentos y aproximación a la demostración formal. De manera similar que con el componente enunciado, Luque y Robayo (2011), retoman también estas fases y las adaptan a su trabajo. De esa categorización, retomamos las siguientes categorías e indicadores: “Exploración del contenido de la conjetura y los límites de validez de la misma” con los indicadores *exploración del contenido de la conjetura y selección de argumentos para explicar la validez de la conjetura* y “Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva” con los indicadores *encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva y organización de la cadena de argumentos de forma deductiva y atendiendo a reglas de inferencia*. Algunos de estos indicadores los modificamos un poco para adaptarlos al contexto de nuestra investigación. Sin embargo, la categorización hecha por Luque y Robayo (2011), retomando las fases propuestas por Boero (1999), se constituyó en un gran aporte para nuestro trabajo y en una de las bases de la rejilla de análisis implementada en el capítulo cuatro.

Por último, tuvimos en cuenta el segundo proceso descrito en el constructo *actividad demostrativa* propuesto por el grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$, mediante el cual se tiene como fin desarrollar

un discurso estructurado de manera deductiva que valide la conjetura dentro del sistema teórico en que se trabaje y en el cual pueden tener cabida las acciones de justificación referidas a la explicación de validación, la prueba y la demostración formal. Concordamos con Perry et al. (2012a), en que al adoptar una visión de actividad demostrativa como la propuesta por el grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$, se atienden dos funciones primordiales de la demostración matemática en el ámbito educativo: “por un lado, promover la comprensión del contenido matemático implicado tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones y, por otro lado, apuntar a la validación de dichos enunciados, en el marco de un sistema teórico en construcción.” (Perry et al., 2012a, p. 132)

1.4.4. Estudios relacionados con participar en la construcción de un sistema teórico de un teorema

Respecto a la noción de sistema teórico, de Villiers (1986), distingue dos tipos de aproximación para la construcción de un sistema teórico. El primer tipo es catalogado por este autor como axiomatización constructiva. En esta, de Villiers alude a la adición, exclusión, generalización o reemplazo de postulados, a partir de un conjunto inicial de estos, para construir un nuevo contenido de manera deductiva. Así, para de Villiers las geometrías no euclidianas de Lobachevsky o de Bolyai, son ejemplos de este tipo de axiomatización.

Sin embargo, para la presente investigación es de interés el segundo tipo de aproximación que propone de Villiers (1986), la cual es denominada como axiomatización descriptiva y se refiere a la selección de un conjunto de postulados tomados de otro conjunto ya existente de postulados y teoremas previos. Luego se analizan las implicaciones lógicas entre algunos enunciados, en función de determinar cómo estos se relacionan y, a partir de este análisis, se conforma el conjunto de axiomas¹ del cual emerge el desarrollo deductivo. Las sentencias restantes son reacomodadas y estructuradas según su deducibilidad.

¹ En este trabajo se considera “axioma” y “postulado” como sinónimos.

Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2012b) retoman algunas de las ideas respecto a la axiomatización descriptiva que propone De Villiers (1986) y mencionan que la selección inicial de postulados no es única y por ende se pueden tener diferentes organizaciones deductivas para un sistema teórico. Como ejemplo, mencionan que “la geometría de Euclides se puede ver como una axiomatización descriptiva de la geometría que se conocía en esa época” (Perry, et al., 2012b, p. 43).

Ahora bien, Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2013), hacen referencia a un enfoque metodológico en el cual se tiene al sistema teórico como uno de tres elementos de un compuesto organizador del currículo con relación a la enseñanza de la demostración en el nivel universitario. En dicho enfoque, Perry et al. aluden al modelo de Birkhoff (1932, citado por Perry, et al., 2013) en el cual se introducen al sistema teórico “los hechos encarnados en la regla y el transportador” (Perry, et al., 2013, p. 19). Es decir, se hace referencia a la geometría euclidiana y a las construcciones geométricas que se pueden llevar a cabo únicamente con regla y compás. Gracias a la reconstrucción de esos hechos geométricos, a partir de un problema, comienza el proceso de construir un teorema para incluirlo en el sistema teórico de referencia.

Luego, para Perry et al. (2013) es importante que el sistema teórico enmarque las resoluciones de los problemas que se proponen a los estudiantes en un curso de geometría plana, de modo que “las conjeturas provenientes de resolver el problema... [permitan] extender el sistema teórico en la medida en que [las conjeturas] entren en calidad de teoremas” (Perry, et al., 2013, p. 20).

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

En consonancia con la revisión de la literatura, en este capítulo presentamos los referentes teóricos que sustentan este trabajo. En primer lugar, describimos la forma cómo entendemos la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema haciendo énfasis en cada uno de los componentes del constructo teorema planteados por Mariotti et al. (1997). Así, en esta primera sección caracterizamos la participación de los estudiantes en el enunciado, en la demostración y en el sistema teórico en relación al constructo en mención. En segundo lugar, desarrollamos las ideas que tenemos en cuenta para analizar la calidad de la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema. Esta participación, en cada componente del teorema, se valora en términos de la autonomía, la relevancia, la originalidad y la genuinidad de los estudiantes según como lo desarrollan Camargo y Gutiérrez (2010) y Molina, Samper, Perry y Camargo (2011).

2.1. ACCIONES DE PARTICIPACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEOREMA

La noción central de este trabajo es la idea de teorema. De acuerdo a los planteamientos de Mariotti et al. (1997), llamamos teorema al constructo conformado por tres componentes: el enunciado del teorema, su demostración y el sistema teórico; de este último se escogen los postulados, las definiciones o los teoremas con los que se lleva a cabo la demostración. Para cada componente, precisamos el tipo de acciones que nos permiten identificar en qué está participando un estudiante en la construcción del teorema, cuando el profesor realiza una aproximación metodológica en la clase, en la que invita a los estudiantes a resolver problemas abiertos de conjeturación y ellos pueden valerse de un programa de geometría dinámica para enfrentarse a la actividad demostrativa.

2.1.1. Tipo de acciones de participación respecto al sistema teórico de un teorema

Entendemos por sistema teórico un conjunto de postulados, definiciones y teoremas, organizados según las relaciones lógicas entre ellos. A partir de estas, el enunciado de un teorema entra a hacer parte del sistema cuando su demostración usa únicamente los elementos previamente organizados en este. La construcción del sistema teórico comienza con la selección de un conjunto de postulados y, a partir de ellos, se identifican las relaciones lógicas entre premisas para iniciar el proceso deductivo de validación y sistematización de enunciados, de modo que el orden lógico sugiere qué enunciados deben deducirse de otros (de Villiers, 1986). El sistema teórico debe ser consistente en la medida de que no haya argumentos circulares o se validen enunciados contradictorios. En este aspecto es responsabilidad del profesor impedir la circularidad de los razonamientos.

En concordancia con Perry et al. (2012b), entendemos los postulados como afirmaciones básicas sobre algunos hechos geométricos; las definiciones, como caracterizaciones de los objetos involucrados; y otras garantías, como afirmaciones que se deducen de las definiciones, postulados y demás teoremas del sistema teórico. Sin embargo, dada la metodología del trabajo en el curso de geometría plana, en la cual se rompe con una secuencia organizada por relaciones lógicas, tal como suele aparecer en los textos, y se procede a partir de las conjeturas que los estudiantes proponen, es factible que, ocasionalmente, algunos teoremas sean incluidos en el sistema teórico aceptando en su demostración, de manera temporal, el uso de teoremas que aún no se han incluido en la teoría, pero siempre con la condición de incluirlos más adelante. Luego, como lo mencionan Perry et al. (2012a), en referencia a esta forma de gestionar el contenido geométrico hay una hipótesis didáctica en la que

poder construir un sistema [teórico]... en la clase a partir de la resolución de situaciones problema requiere que en ocasiones la comunidad acepte, por una parte dejar provisionalmente incompleta la demostración de una conjetura y, por otra, desviarse para considerar otra situación problema que conducirá a obtener los elementos necesarios que permitirán completar la demostración inicial...[es decir,] vincular la coherencia local a una más global. (Perry, et al., 2012a, p. 138)

En el análisis del presente estudio, este tipo de situaciones se pueden apreciar, puesto que en algunos momentos de la demostración de un teorema, se hace necesario suspender temporalmente la demostración e iniciar una nueva respecto a alguna garantía que se requiere para poder continuar posteriormente con la demostración inicial.

Ahora bien, después de revisar las fases de Boero (1999) y la categorización propuesta por Luque y Robayo (2011), encontramos que ninguno de estos autores llega a describir acciones de participación de los estudiantes específicamente en relación con el sistema teórico al que pertenece un teorema. Por ende, para este componente proponemos el siguiente tipo de acción, teniendo en cuenta la revisión que hicimos de los datos experimentales:

Selección y organización de elementos centrales en relación al teorema: En este tipo de acción nos referimos a dos indicadores que nos permiten deducir si un estudiante participa en la construcción de un teorema en relación al componente sistema teórico. Por una parte, nos centramos en la identificación de elementos del sistema teórico, que los estudiantes deben hacer, para que la construcción geométrica que realizan en Cabri o la formulación del enunciado de la conjetura tengan sentido dentro del sistema que se maneja en el curso. Así, por ejemplo con este indicador tenemos en cuenta si los estudiantes se cuestionan acerca de por qué en el enunciado de un problema abierto se incluyen objetos geométricos que no se han definido en el curso:

[La profesora entrega el enunciado a los estudiantes. Dos grupos le preguntan qué se va a considerar como la altura.]

- 2 Darío: Toca preguntarle qué es altura.
- 3 Leopoldo: [Dirigiéndose a la profesora] ¿Por qué tú hablas de altura si eso no lo hemos incluido?

E igualmente consideramos si los estudiantes tienen en cuenta la validez de realizar una construcción geométrica en Cabri utilizando hechos geométricos que aún no se han validado en el sistema teórico del curso como se muestra a continuación:

- 14 Efraín: ¿Por qué no le preguntamos?... Profe, una pregunta, eh, vamos a construir la altura de este triángulo pero solo tenemos este punto [señala el vértice] ¿podemos trazar esta perpendicular?

- 15 P: Sí
- 16 Efraín: Pues, sabemos que podemos, pero como no nos han dado la... [Se refiere a la inclusión en el sistema del teorema de la existencia de la recta perpendicular a otra por un punto externo].
- 17 P: Ah, el teorema
- 18 Efraín: Pero, ¿lo hacemos?
- 19 P: Sí, sí, sí, esperamos que ahora validemos eso
[Hacen la construcción de la recta perpendicular].

Por otra parte, en este tipo de acción también nos referimos a si los estudiantes, bien sea por sí mismos, o bajo la guía de la profesora, se preocupan por asegurarse de que la conjetura que van a demostrar sea deducible en el sistema teórico porque identifican elementos que deben hacer parte del sistema para que la demostración tenga sentido o sea posible en este. Un ejemplo de este tipo se da en la siguiente situación, en la que un estudiante afirma lo siguiente respecto a sus intentos por demostrar una conjetura:

- 92 Daniel: Profe, es que yo hice unas cosas... pero es que... en esas cosas... hay cosas que tengo que demostrar. [todos se ríen]
- 93 P: ¿Qué?... ¿qué?
- 94 Daniel: Pues yo hice una demostración, pero en esa demostración hay tres cosas que tocaría demostrar.

Luego, la preocupación y apropiación de los estudiantes para seguir las normas del curso, en cuánto a solo hacer demostraciones con elementos que pertenezcan exclusivamente al sistema teórico de la comunidad de clase, es un indicador que tenemos en cuenta para identificar si un estudiante detecta elementos que deben incluirse en el sistema para llevar a cabo una demostración de manera exitosa.

2.1.2. Tipo de acciones de participación en el enunciado de un teorema¹

En cuanto al enunciado de un teorema, lo entendemos como una expresión condicional, fruto de un trabajo previo de exploración y verificación, en el marco de la formulación de un problema abierto de conjeturación (Perry, et al., 2012a). Generalmente, el enunciado es

¹ Las acciones de participación se realizan en el marco de la actividad demostrativa.

el resultado de la identificación de un invariante que liga dos propiedades geométricas y que se generaliza a manera de conjetura. Un ejemplo de enunciado es el siguiente: si un triángulo es isósceles, entonces las alturas correspondientes a los lados congruentes son congruentes.

Nos guiamos bajo la aproximación metodológica del grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$, que impulsa la actividad demostrativa, para entender y caracterizar las acciones relativas a la producción de una conjetura. Estas acciones comienzan a partir de situaciones problema propuestas a los estudiantes, las cuales son abiertas, en el sentido de que a partir de ellas, se puedan formular diferentes conjeturas plausibles (Perry, et al., 2012a). Ejemplos de este tipo de situaciones problemas son las siguientes:

¿Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad *dos alturas son congruentes*?

Dibujar ΔMOP . K es un punto de \overline{MP} . ¿Cuándo es $\angle OKP > \angle OMK$? (Perry, et al., 2012a, p. 136)

En la experiencia llevada a cabo en el experimento de enseñanza de Camargo (2010), del cual provienen los datos que son objeto de estudio de este trabajo, se tuvieron en cuenta este tipo de problemas. Perry, et al., (2013, p. 19), los describen de la siguiente manera:

Son de índole geométrica. Su resolución por una parte requiere hacer exploración empírica, para lo cual se acepta el uso de geometría dinámica y, por otra parte, exige de manera explícita formular una conjetura... En los problemas... la representación de la situación que describen se basa exclusivamente en la construcción de objetos que cumplan las condiciones dadas en el problema mismo y la búsqueda de invariantes se basa en la exploración directa de los objetos representados (construidos).

Entre todas las posibles acciones relacionadas con la participación en la producción de un enunciado a modo de conjetura, hemos decidido tener en cuenta las siguientes, a partir de la revisión que hicimos de las fases propuestas por Boero (1999) en las actividades de producción de teoremas, la categorización realizada por Luque y Robayo (2011) teniendo en cuenta esas fases de Boero, en torno al enunciado, y una primera mirada a los datos experimentales:

- Interpretación del enunciado del problema.
- Exploración libre de una representación geométrica en Cabri.
- Identificación de regularidades claves para solucionar el problema.
- Identificación de argumentos para la plausibilidad de la relación detectada.
- Formulación del enunciado del teorema a manera de conjetura.

A continuación describimos y ejemplificamos cada una de estas acciones, las cuales en algunos casos fueron renombradas y adaptadas a nuestro estudio, teniendo como base las categorías desarrolladas por Luque y Robayo (2011).

- **Interpretación del enunciado:** En concordancia con Luque y Robayo (2011), en este tipo de acción nos referimos a extraer la información que el problema abierto enuncia para poder identificar qué es lo que está dado y qué es lo que se pide. Para ello, nos enfocamos en diferentes acciones de los estudiantes como la identificación y representación de los objetos geométricos que se mencionan en el problema, lo cual se evidencia cuando los estudiantes, por ejemplo, se refieren a una figura geométrica y la representan inicialmente en lápiz y papel o en Cabri¹, aun cuando no aluden explícitamente a sus propiedades. Tal representación puede darse de manera blanda, es decir, sin conservar las propiedades geométricas con el arrastre, o de manera robusta, manteniendo así las condiciones iniciales mediante el arrastre.

También tenemos en cuenta si los estudiantes aluden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados en el problema, bien sea al representarlos inicialmente en Cabri o en un dibujo, y hacen mención de manera explícita a alguna de las propiedades inherentes al objeto. Nos fijamos en las posibles estrategias de resolución que los estudiantes formulen, en relación al procedimiento de construcción o exploración que van a llevar a cabo y si anticipan o descartan posibles soluciones al problema.

- **Exploración libre de una representación geométrica en Cabri:** Nos referimos a aquellas acciones en relación al uso que los estudiantes pueden hacer de herramientas

¹ En nuestro estudio los estudiantes contaban con el apoyo del programa Cabri para resolver el problema.

que este software proporciona, tales como construir, medir y arrastrar objetos geométricos como segmentos, triángulos, cuadriláteros, etc., con el objetivo de evaluar si las construcciones realizadas se corresponden con la situación planteada en el problema y a partir del uso de estas herramientas identificar o descubrir nuevas propiedades al igual que establecer relaciones entre estas. Molina, Samper, Perry y Camargo (2011), concuerdan con que este tipo de acciones relacionadas con la producción de una conjetura, generalmente incluyen la exploración de una situación geométrica para buscar regularidades.

Igualmente, coincidimos con Luque y Robayo (2011) en que este tipo de exploraciones están dirigidas a responder la pregunta planteada en el problema abierto y como estos autores lo mencionan, es posible que:

el estudiante realice acciones que no aporten a la solución al problema, tales como: toma de medidas que no son útiles para la solución de la situación, o arrastre de objetos que no corresponden con la intención de la pregunta. Las acciones no afortunadas son evidencia de una interpretación inadecuada de la situación, lo cual puede conducir al estudiante a releerla y reorientar la exploración. (Luque & Robayo, 2011, p. 53)

- **Identificación de regularidades claves para solucionar el problema:** Entendemos este tipo de acciones como aquellas que tienen que ver con que los estudiantes detecten un invariante clave o identifiquen relaciones claves entre invariantes, que les permitan solucionar el problema que da lugar al enunciado de la conjetura. Un ejemplo de detección de un invariante clave es cuando los estudiantes se dan cuenta, a través de la exploración en Cabri, de que si un triángulo tiene dos de sus alturas congruentes, entonces resulta ser un triángulo isósceles y así los estudiantes encuentran una solución al problema. En cuanto a la identificación de relaciones claves entre invariantes consideramos, por ejemplo, si los estudiantes logran detectar dos hechos geométricos y consiguen relacionarlos, en función de encontrar un resultado que les permita solucionar el problema y por ende formular una conjetura.

Luego, al igual que Luque y Robayo (2011), consideramos que en este tipo de acciones está inmersa la acción de generalizar entendida como el reconocimiento de una propiedad que se cumple en varios casos, pero hacemos énfasis en que este tipo de acciones puntualmente llevan a la resolución del problema, a diferencia del tipo de acción de exploración libre de una representación geométrica en Cabri, en las que se pueden descubrir nuevas propiedades no mencionadas en el enunciado, pero que no necesariamente conducen a la solución del problema.

- **Identificación de argumentos para la plausibilidad de la relación detectada:** De manera similar a Luque y Robayo (2011), entendemos que este tipo de acciones tiene que ver con la búsqueda de argumentos por parte de los estudiantes para justificar la plausibilidad de la conjetura que proponen. Así, nos fijamos en si los estudiantes logran identificar, bien sea en la construcción geométrica en Cabri, o en el sistema teórico, algunas propiedades del sistema que permitan darle soporte a su descubrimiento y corroborarlo. Este tipo de acciones tienen que ver con la verificación empírica que podrían efectuar los estudiantes (Molina, et al., 2011).
- **Formulación del enunciado a manera de conjetura:** En este tipo de acción consideramos cómo los estudiantes formulan un enunciado que “dé cuenta de la generalidad encontrada durante la exploración de la situación propuesta” (Luque & Robayo, 2011, p. 56). Coincidimos con Luque y Robayo (2011) y Boero (1999), en que la formulación del enunciado está sujeta a convenciones culturales compartidas, lo cual en la clase de geometría se refiere a las reglas que han sido institucionalizadas. Como lo mencionan Luque y Robayo, en este tipo de acción la formulación de la conjetura comienza cuando se detecta y se establece el invariante clave y se materializa cuando se hace la última escritura de la conjetura. Luego, nos fijamos en identificar si los estudiantes reconocen cuál es el antecedente y el consecuente de la conjetura, según la construcción geométrica que realizaron en Cabri, a partir de un problema abierto.

El antecedente corresponde a aquellos hechos geométricos o propiedades de las cuales partieron los estudiantes en la construcción y a las condiciones que se impusieron. El

consecuente corresponde a los resultados que encontraron, mediante el arrastre, dadas esas condiciones iniciales. Por ejemplo, si en una construcción dinámica los estudiantes parten de dos segmentos con la misma medida, que serán las alturas de un triángulo, y a partir de estos descubren que el tipo de triángulo que tiene esta condición es equilátero, la conjetura correspondiente debería ser: si un triángulo tiene dos alturas congruentes, entonces el triángulo es equilátero. Esto connota la concordancia que se espera que reflejen los estudiantes entre las construcciones o exploraciones realizadas y las conjeturas propuestas.

Así mismo, una vez los estudiantes han formulado la conjetura, tenemos en cuenta si hacen una revisión de la misma, ya sea mediante el trabajo por grupos o el trabajo en gran grupo, es decir en socialización entre todos los miembros de la clase y bajo la guía del profesor, con miras a revisar el enunciado para perfeccionarlo. A diferencia de Luque y Robayo (2011), para nosotros la formulación de la conjetura debe señalar claramente el antecedente y el consecuente de la misma, teniendo en cuenta la estructura lógica condicional.

2.1.3. Tipo de acciones de participación en la demostración de un teorema

Respecto a la demostración, adoptamos la conceptualización que propone Stylianides (2007) para el contexto educativo, según la cual, esta se concibe como un argumento matemático que usa: enunciados aceptados por la comunidad del aula de clase, formas de razonamiento que son válidas para los participantes y formas de comunicación que son apropiadas para la comunidad. En la versión del curso de geometría plana donde obtuvimos la información para el análisis, los enunciados aceptados son postulados, definiciones y teoremas previamente incluidos en el sistema teórico en construcción; las formas de razonamiento hacen alusión a esquemas lógicos racionamiento como *modus ponendo ponens* y *modus tollendo tollens*, entre otros, con los cuales se puede satisfacer el criterio de necesidad lógica (Duval, 2007), a la hora de incluir un teorema en el sistema; y las formas de comunicación aceptadas combinan lenguaje usual con notación y simbología propias de

la geometría euclidiana. En nuestro estudio, no establecemos diferencias entre los términos demostración y prueba, como sí lo hacen diversos autores (Balacheff, 1987, citado por Arsac, 1987; Perry et al., 2012a).

Igualmente, tenemos en cuenta la definición de demostración propuesta por el grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$ como “un argumento de naturaleza deductiva basado en un sistema teórico de referencia en el cual la conjetura puede llegar a considerarse un teorema [del sistema]” (Molina, et al., 2011, p. 74). La demostración formal llevada a cabo en el curso objeto de estudio se escribe en un formato a dos columnas. En la primera columna se escribe cada paso de la demostración, haciendo uso de la simbología y notación acordada en el curso. En la segunda columna se escriben las garantías de cada paso de la demostración. Tales garantías hacen referencia a los objetos del sistema teórico, los cuales pueden ser una definición, un postulado u otro teorema del sistema teórico:

Tenemos dos tipos de acciones de participación en la demostración, las cuales también fueron elegidas después de una revisión de los datos experimentales, de las fases propuestas por Boero (1999) y la categorización realizada por Luque y Robayo (2011):

- Exploración del contenido y los límites de validez de la conjetura.
- Selección y encadenamiento de argumentos teóricos en una cadena deductiva.

A continuación describimos y ejemplificamos cada una de estas acciones, las cuales, al igual que en el tipo de acciones relacionadas con el enunciado, también en algunos casos fueron renombradas y adaptadas a nuestro estudio partiendo como base de las categorías desarrolladas por Luque y Robayo (2011).

- **Exploración del contenido y los límites de validez de la conjetura:** En este tipo de acción nos referimos a aquellas acciones previas o iniciales de la demostración formal de la conjetura, relacionadas con la elaboración de argumentos en función de explorar el contenido de esta y sus límites de validez. Coincidimos con Luque y Robayo (2011) en que en este marco de acciones se generan argumentos para justificar la relación entre

antecedente y consecuente, la plausibilidad y la validación de la conjetura dentro del sistema teórico de referencia.

En ese orden de ideas nos fijamos en las representaciones geométricas que el grupo de estudiantes realiza para hacer explícitas las propiedades del antecedente de la conjetura que se va a demostrar. Tenemos en cuenta si los estudiantes identifican, en el sistema teórico, algunas propiedades que puedan inferir partiendo de lo que se tiene dado en el antecedente, para darle soporte deductivo a la conclusión. Esta detección de propiedades no siempre lleva a la ruta de demostración, pero refleja la búsqueda de argumentos por parte de los estudiantes para determinar la validez de la conjetura.

Luego, en esa búsqueda de argumentos, también nos centramos en el uso de la conclusión como guía para buscar el camino a la demostración y tenemos en cuenta si los estudiantes intentan encadenar propiedades para argumentar acerca de la validez del enunciado, al listar diferentes propiedades que pueden ser usadas en la demostración, pero sin discriminar qué se infiere de qué.

➤ **Selección y encadenamiento de argumentos teóricos en una cadena deductiva:**

Hacemos alusión a aquellas acciones que llevan a que los estudiantes establezcan relaciones lógicas entre enunciados para generar la cadena deductiva, a partir de la exploración del contenido y los límites de validez de la conjetura. Por ende, nos fijamos en que los estudiantes anticipen cómo va a ser la cadena deductiva, organizando los condicionales en el orden en que creen que van a quedar en esta finalmente. Por ejemplo, en la siguiente situación de clase en la que se está demostrando que los segmentos AF y CD son congruentes, se tiene esta figura en el tablero:

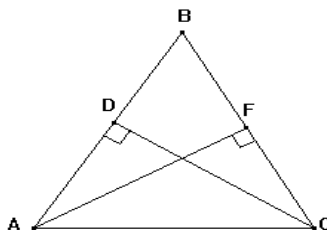


Figura 1.

Y los estudiantes proponen cómo va a quedar la cadena deductiva:

- 128 Orlando: [Los lados] AB y BC son congruentes.
- 129 P: [Los lados] AB y BC son congruentes, sí.
- 130 Orlando: Entonces ya tenemos que este ángulo [BFA] es congruente con este [BDC], y que este ángulo [DBC o FBA] es congruente consigo mismo. Entonces ya tenemos
[...]
- 133 Melisa: FBA [Orlando escribe en el tablero: $\Delta BDC \cong \Delta BFA$].
- 134 Orlando: Los dos triángulos son congruentes, entonces tenemos ángulo – ángulo – lado. Entonces partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. [Luego los segmentos FA y DC son congruentes].

Ahora bien, dentro de este tipo de acciones también consideramos si los estudiantes logran encadenar de manera deductiva dos o más afirmaciones usando como garantías enunciados del sistema teórico y organizan la cadena deductiva en un texto comunicable a dos columnas. Esta acción también puede darse bajo la guía de la profesora, quién en ocasiones, recogiendo los aportes de los estudiantes, va escribiendo los pasos de la demostración en el tablero.

2.2. CALIDAD DE LA PARTICIPACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEOREMA

La calidad de la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema puede ser vista desde diferentes posiciones. En nuestro caso, nos posicionamos bajo la premisa de que el aprendizaje es visto como participación en una comunidad de práctica; como lo mencionan Camargo y Gutiérrez (2010) tenemos en cuenta que

La participación en la actividad demostrativa [entendida según el constructo propuesto por el grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$] conforma con la materialización de la actividad, en forma de producción de un conjunto de postulados, definiciones y teoremas con sus correspondientes demostraciones, una relación de complementariedad que da significado a la práctica que se lleva a cabo en una clase de geometría euclidiana plana de nivel universitario, en la que se tiene como meta construir colectivamente una porción de un sistema [teórico]. (Camargo & Gutiérrez, 2010, p. 247)

Consideramos cuatro características para valorar cómo participan los estudiantes en la construcción de un teorema. Estas características están en estrecha relación con la formación en valores democráticos, tal y como lo describen Ortiz y Perafán (2004). A continuación mencionamos y describimos cada una de estas características, basándonos en las tipologías trabajadas por Camargo y Gutiérrez, (2010) y Molina et al. (2011). En cada una de estas, hacemos alusión al trabajo de los estudiantes por parejas y al trabajo en gran grupo y definimos cuándo el grado de participación es *poco* o *bastante* según cada característica. En el caso de que no haya un tipo de participación, simplemente no se menciona.

- **Original:** Consideramos que la participación de un estudiante es original cuando esta es creativa y con ideas propias (Camargo & Gutiérrez, 2010). El estatus de originalidad lo otorgamos de acuerdo a la comparación con el trabajo de los demás estudiantes y de la generalidad del grupo. Es decir, en cuanto al trabajo en parejas, entendemos que la participación de los estudiantes es original cuando las ideas planteadas, por ejemplo por un grupo de estudiantes, son diferentes respecto a lo que la mayoría de estudiantes realizaron.

Entendemos que el grado de originalidad es *poco* cuando, aún con ideas propias, la actividad desarrollada por los estudiantes, en el trabajo por parejas, se corresponde con la generalidad del trabajo realizado por la mayoría de los estudiantes. De manera similar, entendemos que el grado de originalidad es *bastante*, cuando las ideas propuestas por un estudiante, o grupo de estudiantes, se salen de lo común en comparación al trabajo de los demás miembros de la comunidad.

También, tenemos en cuenta si los estudiantes proponen y desarrollan ideas que el profesor no tenía programado abarcar en las sesiones de clase. En caso de que este tipo de participación surja con la guía inicial del docente, por ejemplo, a partir de una pregunta que el docente hizo, catalogamos la originalidad como *poca*. Si por el contrario, el estudiante propone ideas que al profesor no se le habían ocurrido o que no

estaban dentro de lo que este último tenía planeado y por ende, se alejan de lo esperado por el profesor, entonces determinamos que la originalidad es *bastante*.

- **Autónoma:** Al igual que Camargo y Gutiérrez (2010) caracterizamos la participación en términos de autónoma, al referirnos a esta como espontánea, con un interés personal y por iniciativa propia. Molina et al. (2011) plantean que en este tipo de participación “se activan recursos propios para comunicar y justificar las ideas propias, y para confrontar y entender las de los demás” (Molina, et al., 2011, p. 75).

En el trabajo de los estudiantes por parejas nos referimos a participación autónoma, con relación al par, cuando el estudiante intenta tomar la iniciativa e intenta asumir una postura de líder. Tenemos en cuenta si el estudiante solicita ayuda de su compañero y toma en cuenta sus aportes al proceder en la actividad, para catalogar el grado de autonomía como *poco*. En caso de no requerir la ayuda de su par y tomar la iniciativa o intentar convencer al compañero de sus propios planteamientos, consideramos que el grado de autonomía es *bastante*.

Respecto al trabajo de los estudiantes en gran grupo consideramos que su participación es *poco* autónoma con relación al profesor, cuando los aportes que realizan están mediados por las preguntas que lanza el docente, mas no por una iniciativa propia. Cuando el estudiante procede sin la ayuda del profesor y asume una postura de líder, consideramos su participación como *bastante* autónoma.

- **Genuina:** Molina et al. (2011) consideran que la participación de los estudiantes es genuina cuando estos asumen “una disposición de compromiso y se muestra interés auténtico en busca de lograr la producción de un teorema” (Molina, et al., 2011, p. 76). Concordamos y nos posicionamos bajo esta caracterización de participación genuina. Camargo y Gutiérrez (2010) mencionan respecto a la genuinidad, que los estudiantes son conscientes de la responsabilidad que tienen con las tareas o actividades que se llevan a cabo, en función de la apropiación de las normas del curso y tienen fundamentos para los aportes que brindan. Entendemos que ese fundamento y

apropiación de las normas son indicadores que nos permiten establecer si un estudiante participa de manera genuina. Por tanto, declaramos que el grado de genuinidad de la participación de un estudiante, en cuanto al trabajo en parejas, es *poco*, si sus intervenciones reflejan parcialmente la apropiación de las normas compartidas en la clase y, es *bastante*, cuando el estudiante asume con responsabilidad y compromiso el desarrollo de la actividad teniendo plena consciencia de estas normas compartidas.

Adicionalmente, si el estudiante intenta desarrollar la actividad con responsabilidad y fundamento, es decir tratando de asumir todas las normas del curso, pero necesita la guía del profesor para proceder respecto a una determinada norma, consideramos que la participación es *poco* genuina. Ahora bien, si las intervenciones del estudiante reflejan un compromiso con el desarrollo de la actividad y del seguimiento de las normas del curso, de modo que no necesita del profesor para proceder frente a una determinada norma porque él mismo entiende y se ha apropiado del sistema de normas compartido en la clase, entonces su participación es *bastante* genuina.

- **Relevante:** Entendemos la participación de un estudiante como relevante si esta resulta ser esencial o útil para el desarrollo de las actividades propuestas (Camargo & Gutiérrez, 2010). En este sentido, Molina et al. (2011) mencionan que la participación de un estudiante es relevante si hace contribuciones que tienen algún desarrollo y son útiles para la actividad en la que los estudiantes se encuentran involucrados. Igualmente, Molina et al. comentan que un estudiante puede participar de manera relevante incluso si tiene errores en su intervención, pero aun así logra generar un aporte para el desarrollo exitoso de la actividad. Consideramos que en el trabajo en parejas la participación de un estudiante es *poco* relevante cuando sus aportes solo se limitan a cuestionar o verificar las ideas de su par. En caso de que los aportes sean pertinentes o útiles para el desarrollo de la actividad, catalogamos el grado de relevancia como *bastante*.

En cuanto al trabajo en gran grupo, determinamos que la participación de los estudiantes es *poco* relevante si sus intervenciones hacen pequeños aportes al desarrollo

de la actividad, pero sus propuestas no prosperan debido a que no son viables. Cuando estos aportes son pertinentes y gracias a estos se logra esclarecer el camino de la ruta de la demostración o se soluciona algún problema en relación a la construcción del teorema, consideramos la relevancia como *bastante*.

Esta caracterización nos permite pensar en la calidad de la participación de los estudiantes y también nos permite afirmar que en estas características se encuentra el foco de lo que entendemos como valores democráticos¹. Ortiz y Perafán (2004), hacen una recopilación de lo que algunos autores entienden por democracia y su relación con valores como el respeto, la autonomía y la solidaridad. Adoptamos la posición de Maturana (1994, citado por Ortiz & Perafán, 2004) quién menciona que la democracia es un proyecto común, pues se va configurando de manera conjunta a cada momento en la convivencia. Es así que, en concordancia con los autores mencionados, entendemos que algunos valores democráticos son necesarios en los seres humanos para que estos actúen conforme a los ideales de la democracia. Por ende, además de la relación entre las finalidades de participación y el trabajo bajo un sistema de reglas compartidas, adaptamos algunos de los planteamientos de Ortiz y Perafán (2004) respecto a valores democráticos y los complementamos con las tipologías usadas por Camargo y Gutiérrez (2010).

Así, consideramos que la originalidad refleja el derecho que tiene el estudiante a hacer uso de su creatividad en la clase de matemáticas y ser reconocido a la par de su maestro, en el sentido de que todos somos iguales y que esto se constituye en una de las características pilares de la democracia (Ortiz & Perafán, 2004). En cuanto a la autonomía, concordamos con estos autores en que esta tiene que ver con hacer lo que hay que hacer por convicción y no por obligación. El estudiante es responsable de sus ideas a través de la autonomía intelectual y de sus actos mediante la autonomía en la acción. Igualmente, consideramos

¹ Sin desconocer que la relación entre democracia y educación matemática puede abarcar otros elementos desde diferentes enfoques, nosotros nos centramos en la formación en valores democráticos a partir de la participación en una comunidad de práctica, en donde los valores relacionados con ser original, autónomo, genuino y relevante ayudan a formar ciudadanos responsables que van a contribuir en la toma consensuada de decisiones.

que la genuinidad hace hincapié en la responsabilidad y conciencia de las ideas propias en función de aportar para resolver un problema de manera conjunta con actitudes de corresponsabilidad (Camps, 1994 citado por Ortiz & Perafán, 2004). Y en cuanto a la relevancia, esta se manifiesta en la contribución y en los aportes a solucionar problemas compartidos que obedecen a necesidades comunes.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Este estudio es de índole cualitativo, se corresponde con un estudio de caso y hace uso de los datos experimentales¹ de la tesis doctoral de Camargo (2010), para interpretarlos y analizarlos a la luz de otro marco de referencia y con otro objetivo. Esa investigación tenía como meta describir la conformación de una comunidad de práctica, de futuros docentes de matemáticas, interesada en construir parte de un sistema axiomático de geometría euclidiana. La presente investigación se enfoca específicamente en la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema, aspecto no documentado a profundidad por Camargo (2010).

Como recurso metodológico se emplean técnicas de análisis retrospectivo como la confrontación, la evocación y el recuerdo (Leblanc, et al., 2001), aprovechando que el autor de la tesis fue estudiante del curso objeto de estudio de Camargo (2010) y a su vez, la asesora de esta tesis, fue observadora no participante de ese curso. De esta manera, al revisar los videos y transcripciones de las clases del curso de geometría de 2007, para escoger los fragmentos con los cuales se lleva a cabo el análisis en el presente estudio, hemos tenido en cuenta aspectos relevantes de la experiencia vivida por estudiante y asesora en el experimento de enseñanza en cuestión. Esta experiencia ha servido para interpretar la actividad matemática de los estudiantes cuando participan de la construcción de un teorema, vista a la luz de la conceptualización de Mariotti et al. (1997).

Específicamente usamos estas técnicas de análisis retrospectivo (Leblanc, et al., 2001), durante el estudio de las intervenciones de los estudiantes que hacen parte del estudio de caso. Confrontamos lo que recordamos de esas experiencias en función de entender el trabajo de los estudiantes y la forma en que participan en la construcción de un teorema.

¹ Tomados en un curso de geometría plana en el segundo semestre de 2007. Aspectos de este curso se describen en la sección 3.1.

También usamos la evocación, al revisar los videos y así poder determinar las razones que llevaron a que los sucesos de la clase se desarrollaran en la forma en que se dieron.

A continuación se hace referencia a la población y el contexto. Después se describen el proceso de construcción del conjunto de datos y los instrumentos para la descripción, interpretación y análisis de la información.

3.1. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN Y EL CONTEXTO

La información para construir el conjunto de datos corresponde a las grabaciones en audio y video de todas las sesiones de clase desarrolladas durante el curso de Geometría Plana implementado en el segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2007. Los estudiantes del curso tenían edades aproximadas entre los dieciocho y veintitrés años. En el curso se realizó un experimento de enseñanza cuyo objetivo era que los estudiantes aprendieran a demostrar y ampliaran su visión tanto de la demostración como del papel que esta tiene en el quehacer matemático en función de desarrollar sus habilidades de argumentación (Perry, et al., 2012a). En el análisis realizado por Camargo, ella hizo una selección de episodios en donde centró su interés investigativo. Las transcripciones de algunos de estos episodios hacen parte del material analizado en la presente investigación, aunque también se hicieron transcripciones de otras sesiones de clase.

La construcción colectiva del sistema axiomático local de geometría euclidiana plana en el experimento de enseñanza (Camargo, 2010), implicaba que todo lo que se demostrara en la clase se hacía de común acuerdo por todos los integrantes de la misma y haciendo uso exclusivamente de los postulados, definiciones y teoremas que se habían incluido en el sistema teórico del curso. Es decir que no se admitían demostraciones que hicieran uso de otros teoremas que conocieran los estudiantes o que se encuentran en libros de texto, que no se hubieran demostrado con los elementos del sistema teórico construido. Por otra parte, las tareas que usualmente se proponían son descritas por Perry et al. así:

Casi siempre se trata de situaciones que involucran a los estudiantes en una actividad demostrativa completa; es decir, ellos tienen que comenzar por generar conjeturas que, luego de ser verificadas y aceptadas por la comunidad como tales, son validadas dentro del sistema axiomático con el que cuentan. (Perry, et al., 2012a, p. 136)

En este sentido, el grupo de estudiantes junto con la profesora se constituyó en una comunidad de práctica según la perspectiva de Clark (2005, citado por Camargo, 2010) y esta comunidad se rigió bajo unas normas sociales y socio-matemáticas en relación con la justificación de todas las ideas que se planteaban y el respeto de los argumentos propuestos por cada estudiante (Perry, et al., 2012a). Por ende, este ambiente es propicio para identificar cómo fue el proceso de construcción de un teorema según el constructo propuesto por Mariotti et al. (1997).

La actividad matemática que desarrollaron los estudiantes se vio demarcada, en algunos momentos de la clase, por el trabajo que realizaban en parejas y haciendo uso de geometría dinámica con el software Cabri. Esto con el fin de lograr una construcción conjunta mediante el diálogo, favoreciendo así la interacción social, la cual se consideraba clave para el aprendizaje de la demostración (Camargo, 2010). También hay momentos de la clase en que se construyó el contenido geométrico de manera colectiva a través de la presentación que hacían los estudiantes de las conjeturas planteadas y su discusión.

El contexto mencionado permitió anticipar que había suficiente información para caracterizar la participación de los estudiantes en la construcción de teoremas a partir de los tres aspectos, enunciado, demostración y sistema teórico, que Mariotti et al. (1997) consideran para el constructo teorema.

3.2. PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE DATOS

3.2.1. Selección inicial de datos

El conjunto inicial de información consiste en aproximadamente ochenta horas de grabación en audio y video de las clases, correspondientes a los datos de la tesis de Camargo (2010). De ese total, en este trabajo, y a partir de una cuidadosa revisión, se hizo

una reducción de la información al escoger aquellos videos en donde se pudiera rastrear la construcción del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes¹, elegido por el autor de este trabajo, porque desde su experiencia como estudiante de ese curso y por otro lado, porque producto de su bagaje como docente de matemáticas, considera que este teorema es fundamental en un curso de geometría ya que su demostración permite relacionar varios teoremas importantes, que se mencionarán en el análisis. Además, teniendo en cuenta las características de este estudio, en la revisión inicial realizada se rastrearon elementos interesantes en este teorema respecto a la participación de los estudiantes en cada componente del mismo.

Una vez rastreados y seleccionados los videos, se vio necesario realizar algunas transcripciones no hechas por Camargo (2010), sobre el trabajo desarrollado por algunos grupos específicos. Por ejemplo, en la actividad por parejas del proceso de exploración de conjeturas relacionadas con el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes, se tenía la transcripción de un solo grupo y fue necesario realizar la transcripción de los otros dos grupos que desarrollaron la actividad en la misma sesión, para tener mayor riqueza en la información.

3.2.2. Construcción del conjunto de datos

Los datos son fragmentos del trabajo de los estudiantes relacionados con los componentes: enunciado, demostración y sistema teórico que se consideran en la construcción de un teorema (Mariotti, et al., 1997). El conjunto principal de datos corresponde al trabajo de tres grupos de estudiantes y la respectiva socialización, en relación al teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes. Sin embargo, es válido aclarar que en la dinámica del análisis pueden mencionarse otros teoremas que intervienen en la construcción pero que no son el foco específico de la investigación. Por ejemplo:

¹ El nombre del teorema se basa en el nombre asignado en la investigación de Camargo (2010), de acuerdo a los nombres acordados por la comunidad de aprendizaje que se constituyó en el curso objeto de estudio.

T. Criterio de congruencia lado – ángulo – ángulo: Toda correspondencia lado – ángulo – ángulo entre dos triángulos es una congruencia.

T. Medida ángulo externo: La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

Después de identificar los segmentos de las transcripciones en los que se desarrolla el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes, que corresponden a seis sesiones de clase, se realiza una reconstrucción del trabajo de los estudiantes en este teorema, dividiéndolo así en un total de veinte episodios. En cada episodio se codifican los fragmentos correspondientes a un determinado componente: enunciado, demostración o sistema teórico. Esta información se constituye en los datos principales de esta investigación. A continuación se describen los instrumentos para codificar, describir, interpretar e inferir resultados de la participación de los estudiantes a la luz del marco de referencia en cada episodio.

3.3. INSTRUMENTOS PARA LA DESCRIPCIÓN, INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS EPISODIOS

Como ya se dijo en el marco teórico, el referente principal que se maneja en la investigación corresponde al constructo teorema, según Mariotti et al. (1997). Para analizar la participación de los estudiantes en cada uno de los componentes de este constructo se tienen en cuenta para el enunciado y la demostración: las fases propuestas por Boero (1999) y la categorización realizada por Luque y Robayo (2011). En cuanto al sistema teórico, proponemos un tipo de acciones de participación tomando como referente la axiomatización descriptiva que plantea de Villiers (1986). Con esta perspectiva se procede a construir una rejilla para efectuar el análisis de cada episodio. Para ello, se establecieron unas categorías preliminares con sus respectivos indicadores de análisis. Estos se fueron modificando a medida que se iban revisando los episodios.

El ejercicio analítico de cada episodio se hizo a partir de una selección inicial de fragmentos que correspondieran a cada uno de los componentes del constructo teorema

según Mariotti et al. (1997). Esos fragmentos se señalaban con un color que fue asignado de la siguiente forma: amarillo para lo relacionado con el enunciado, verde para lo relacionado con la demostración y azul para lo referente al sistema teórico. Una vez identificados los fragmentos, describimos e interpretamos lo que sucedió y establecimos inferencias sobre la participación de los estudiantes. El listado de indicadores y de significados asociados a cada indicador se fue mejorando cada vez más, a medida que el análisis avanzaba en los niveles descriptivo, interpretativo e inferencial. En repetidas ocasiones se corroboró si los indicadores se estaban usando.

En esta revisión también se usaron técnicas de interpretación y recuerdo (Leblanc, et al., 2001) para la interpretación y el análisis de los datos. En algunas ocasiones se revisaron nuevamente los videos para constatar las evidencias obtenidas. Por momentos se trabajó de forma separada, de modo que el autor y la asesora analizaban, individualmente, los fragmentos con la rejilla y luego se cotejaba la información para identificar posibles diferencias.

Para el manejo de la información se hizo uso de los paneles de navegación en Word. Cada título de un episodio se escribió con el mismo nivel de títulos en Word, de modo que al hacer uso del panel de navegación, se tenía fácil acceso a cualquiera de los episodios. Esto permitió comparar episodios entre sí y encontrar semejanzas y diferencias en el trabajo realizado por los estudiantes durante los diferentes momentos de construcción del teorema. En el análisis de cada episodio se hizo referencia a este tipo de comparaciones. Así mismo al usar los colores en la codificación, con el zoom que permite realizar Word se efectuaron vistas panorámicas del desarrollo del trabajo de los estudiantes en la construcción de un teorema y esto permitió realizar inferencias respecto a la participación de los estudiantes en cada componente del teorema.

En la siguiente imagen (Figura 2) se aprecia el panel de navegación al lado izquierdo y en la parte derecha se ve cómo el zoom hacia afuera permite tener una visión general de la participación de los estudiantes en cada componente de la construcción del teorema, de acuerdo a la distribución de colores nombrada previamente.

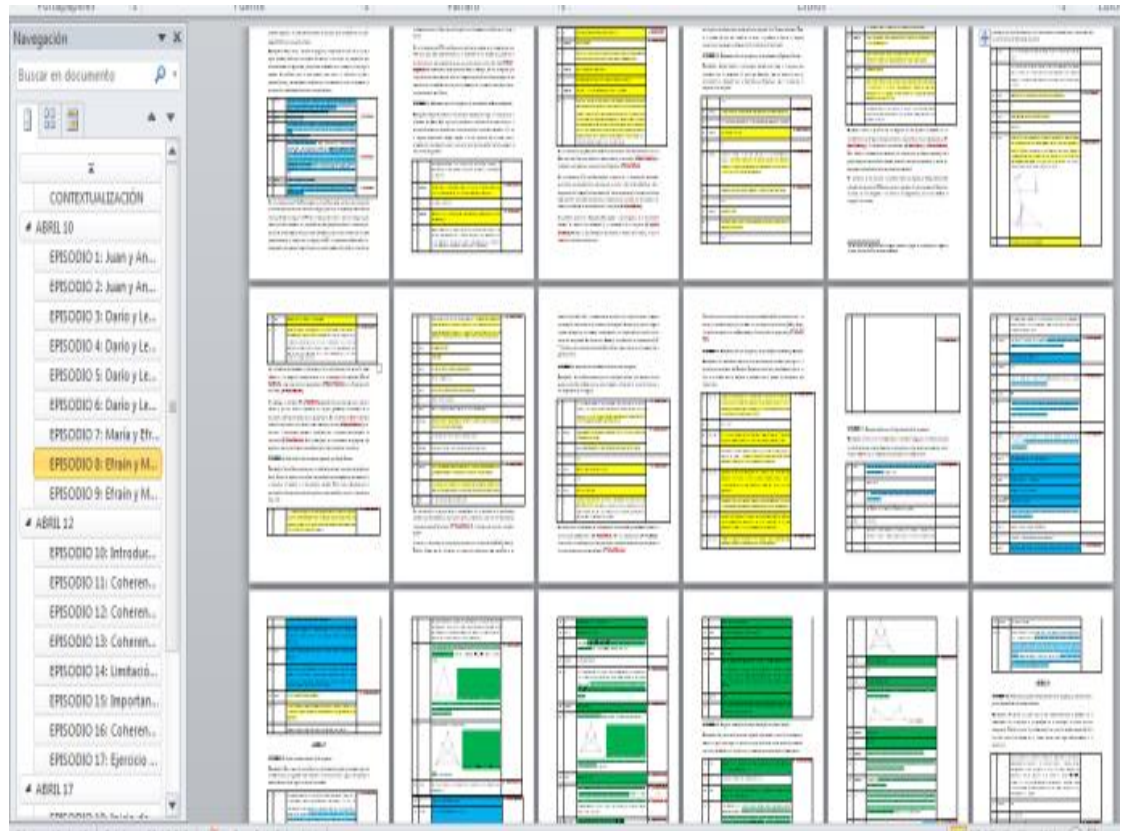


Figura 2.

La rejilla de análisis con las categorías y los indicadores finales respecto a la participación de los estudiantes en cada componente del teorema se presenta a continuación. Esta se divide en tres secciones, cada una haciendo énfasis en el componente del constructo teorema al cual se hace referencia. Luego, cada sección se divide en dos columnas así: en la primera, se plantean las categorías de participación en la construcción de teoremas que definimos y en la segunda, se nombran los indicadores correspondientes a cada categoría con su respectivo código. Para la codificación de estos indicadores, tuvimos en cuenta la primera letra como E, D o S indicando el componente respectivo (Enunciado, Demostración o Sistema Teórico). Seguidamente, una abreviación de la primera palabra de cada categoría usando las cinco primeras letras y por último, una abreviación de una o dos palabras claves en la descripción del indicador, utilizando entre tres a cinco letras.

SISTEMA TEÓRICO	
Categorías	Indicadores
Selección y organización de elementos centrales en relación al teorema.	<i>S- Selec-IdenPart</i> : Identificación de elementos del sistema que deben hacer parte para que la construcción o el enunciado tengan sentido. <i>S- Selec-AsegDedu</i> : Aseguramiento de que la conjetura es deducible en el sistema.
ENUNCIADO	
Categorías	Indicadores
Interpretación del enunciado	<i>E-Inter-IdenObj</i> : Identificación de objetos geométricos involucrados. <i>E-Inter-AludProp</i> : Alusión a las propiedades de los objetos geométricos involucrados. <i>E-Inter-RepDado</i> : Representación de los objetos geométricos dados y las relaciones indicadas. <i>E-Inter-FormEst</i> : Formulación de una o varias estrategias de resolución. <i>E-Inter-AntiSol</i> : Anticipación de una posible solución.
Exploración libre de una representación geométrica en Cabri	<i>E-Explo-HerrEval</i> : Uso o comunicación del uso de herramientas de Cabri para evaluar la representación. <i>E-Explo-HerrIden</i> : Uso o comunicación del uso de herramientas de Cabri para identificar nuevas propiedades. <i>E-Explo-HerrRela</i> : Uso o comunicación del uso de herramientas de Cabri para establecer relaciones entre propiedades.
Identificación de regularidades claves para solucionar el problema	<i>E-IdentReg-Det</i> : Detección de un invariante clave. <i>E-IdentReg-Rela</i> : Identificación de relaciones claves entre invariantes.
Identificación de argumentos para la plausibilidad de la relación detectada	<i>E-IdentArg-PropComp</i> : Determinación de propiedades complementarias en la representación o en la teoría para darle soporte a una identificación.
Formulación del enunciado a manera de conjetura	<i>E-Formu-AnteCons</i> : Establecimiento del antecedente y del consecuente de la conjetura. <i>E-Formu-Enun</i> : Planteamiento de la conjetura. <i>E-Formu-Concor</i> : Establecimiento de la concordancia entre la construcción y la conjetura. <i>E-Formu-Revis</i> : Revisión del enunciado de la conjetura para perfeccionarlo.
DEMOSTRACIÓN	
Categorías	Indicadores
Exploración del contenido y los límites de validez de la conjetura.	<i>D-Explo-RepAnte</i> : Representación geométrica que hace explícitas las propiedades del antecedente de la conjetura que se va a demostrar. <i>D-Explo-IdenProp</i> : Identificación de propiedades complementarias que permiten darle soporte deductivo a la conclusión. <i>D-Explo-UsConclu</i> : Uso de la conclusión como guía para buscar el camino a la demostración. <i>D-Explo-EncadPro</i> : Encadenamiento de propiedades para argumentar acerca de la validez del enunciado.
Selección y encadenamiento de argumentos teóricos en una cadena deductiva.	<i>D-Selec-EstaRela</i> : Anticipación de la cadena deductiva a través del establecimiento de relaciones lógicas entre enunciados. <i>D-Selec-EncadDedu</i> : Encadenamiento deductivo de dos o más afirmaciones usando como garantías enunciados del sistema.

Acto seguido, presentamos una segunda rejilla para analizar la calidad de la participación de los estudiantes en cada uno de los componentes del teorema. Esta se divide en cuatro secciones referidas a las características del modo de participación de los estudiantes. Para cada una de estas secciones se describen dos indicadores del grado de participación (*poco* o *bastante*). Así mismo, en cada aspecto de la calidad de la participación de los estudiantes se hace referencia a dos tipos de trabajo (por parejas y en gran grupo). Cada uno de los indicadores se codifica así: la primera letra hace referencia al grado de participación, la segunda letra a la calidad de la participación y la tercer parte al tipo de trabajo. Así, *Par* se asigna al trabajo en parejas y *Gran* se corresponde con el trabajo en gran grupo.

	INDICADORES DEL GRADO DE PARTICIPACIÓN	
CARÁCTERÍSTICA	<i>Poco</i> (+)	<i>Bastante</i> (++)
Original	<i>P-O-Par</i> : Planteamiento de ideas que se corresponden con la generalidad del trabajo de los demás estudiantes.	<i>B-O-Par</i> : Planteamiento de ideas que se salen de lo común en comparación al trabajo de los demás estudiantes.
	<i>P-O-Gran</i> : Desarrollo de ideas, bajo la guía inicial del profesor, que no estaban dentro de lo esperado por el docente.	<i>B-O-Gran</i> : Bosquejo de ideas que no estaban dentro de lo planeado por el docente.
Autónoma	<i>P-A-Par</i> : Pretensión de tomar un rol dominante procediendo en la actividad con la ayuda del par.	<i>B-A-Par</i> : Apropiación y liderazgo al proceder en la actividad tomando la iniciativa o convenciendo a su par.
	<i>P-A-Gran</i> : Mediación por las preguntas que hace el docente en los aportes generados.	<i>B-A-Gran</i> : Apropiación y liderazgo al proceder sin solicitar ayuda del docente.
Genuina	<i>P-G-Par</i> : Apropiación parcial de las normas compartidas en la clase.	<i>B-G-Par</i> : Apoderamiento y apropiación de las normas compartidas en la clase.
	<i>P-G-Gran</i> : Desarrollo de la actividad con responsabilidad y fundamento requiriendo en momentos de la ayuda del docente.	<i>B-G-Gran</i> : Compromiso con el desarrollo de la actividad teniendo consciencia de las normas compartidas en la clase sin requerir del docente.
Relevante	<i>P-R-Par</i> : Limitación de los aportes en cuanto a únicamente cuestionar o verificar las ideas de su par.	<i>B-R-Par</i> : Pertinencia de los aportes de modo que resultan útiles y cruciales para el desarrollo de la actividad.
	<i>P-R-Gran</i> : Generación de aportes que ayudan al desarrollo de la actividad pero no prosperan debido a la poca viabilidad.	<i>B-R-Gran</i> : Generación de aportes que permiten que el desarrollo de la actividad prospere.

En el análisis de cada episodio se articulan tres aspectos. En primer lugar, el análisis descriptivo, el cual permite caracterizar y contextualizar al lector sobre qué se está trabajando y qué están haciendo los estudiantes en referencia a alguno de los componentes del teorema según el constructo de Mariotti et al. (1997), puesto que en la codificación también se hizo una breve descripción de lo que se observaba en relación con el enunciado, la demostración o el sistema teórico.

En segundo lugar, el análisis interpretativo, en donde se señalan con indicadores las intervenciones correspondientes a un componente. Este tipo de análisis tiene lugar al hacer uso de las categorías de análisis establecidas y aclarar con los indicadores descritos la actividad de los estudiantes en relación con su participación en la construcción de un teorema y la calidad de esta participación. Esto se hace a partir de los códigos y en la explicación del por qué hemos puesto ciertos indicadores a determinadas intervenciones. Además se valora la calidad de la participación de cada estudiante en los diferentes episodios.

En tercer lugar, un análisis inferencial de los resultados, mediante el cual se pretenden realizar algunas deducciones sobre cómo la participación de los estudiantes en la construcción de un teorema se ve favorecida o no por algunos de los aspectos mencionados en los referentes teóricos. Este tipo de análisis se muestra con profundidad en el capítulo de resultados.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS

4.1. RECONSTRUCCIÓN DEL TEOREMA TRIÁNGULO ISÓSCELES – ALTURAS CONGRUENTES

4.1.1. Contextualización

El trabajo relacionado con este teorema se lleva a cabo en algunos momentos de las sesiones de clase desarrolladas durante los días 10, 12, 17, 19, 24 y 26 de abril de 2007. La actividad que da inicio a la construcción del teorema es la siguiente:

Escriba el proceso de construcción y las conjeturas que se establecen a partir de la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes?

En la clase del 10 de abril los estudiantes trabajan por parejas haciendo uso de calculadoras o computadoras con el software Cabri. Cada grupo realiza un trabajo de construcción y exploración en Cabri y formula una conjetura en relación a la pregunta planteada. En dos de los grupos los estudiantes discuten sobre qué van a llamar *altura de un triángulo* en el sistema teórico. De esta sesión se analiza el trabajo simultáneo de tres parejas.

En la clase del 12 de abril se socializan, en gran grupo y bajo la dirección de la profesora, las conjeturas planteadas por las parejas de estudiantes para verificar si son plausibles y si hay correspondencia, entre las conjeturas y las construcciones realizadas. Se da inicio a los primeros intentos de demostrar la conjetura C1: *Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces dos de sus alturas son congruentes*. También, se incluyen en el sistema teórico las definiciones de rectas perpendiculares y segmentos perpendiculares, además del teorema de existencia de la recta perpendicular a otra por un punto externo a esta. Este último, es demostrado colectivamente, debido a la necesidad de justificar la existencia de los elementos que hacen parte del antecedente de la conjetura C1, es decir, de las alturas, que para ese momento no se habían hecho explícitas en el antecedente.

En la clase del 17 de abril se continúa con los intentos de demostración, en gran grupo, de la conjetura C1 y se hace uso del teorema del triángulo isósceles¹, demostrado previamente de acuerdo a las ideas propuestas por los estudiantes. Se concluye que es necesario el uso de otro teorema, el criterio de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Ángulo, aún no incluido en el sistema, para culminar la demostración. Esto lleva a que la demostración de la conjetura C1 quede pendiente.

En la clase del 19 de abril los estudiantes y la profesora revisan detalladamente, en gran grupo, los pasos que tienen hasta el momento en la demostración de la conjetura C1 y perfeccionan, de común acuerdo, el enunciado para tener mayor claridad respecto a lo que está dado por hipótesis y que para aquel momento no requiere justificación alguna. Se hace énfasis en el resultado que deben deducir y resaltan nuevamente que la demostración requiere del uso del teorema criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo, aún no incluido en el sistema teórico.

En la clase del 24 de abril, después de haber demostrado el teorema del ángulo externo², con el cual pueden demostrar el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo, se hace uso de este último y se culminan los pasos de la demostración, en gran grupo, considerando concluida la demostración de la conjetura y su inclusión en el sistema teórico. Los estudiantes quedan así convencidos de haber construido el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes.

Finalmente, en la clase del 26 de abril, uno de los estudiantes descubre que en la demostración del Teorema, se asumió como dado que las alturas congruentes del triángulo intersecan los lados congruentes debido a la representación visual de la figura, mas no porque se tuvieran las garantías de que esa condición siempre se diera. Se socializa este hallazgo en gran grupo y se hace una restricción de la demostración del teorema, hecha en la clase anterior, únicamente para el caso de triángulos isósceles acutángulos.

¹ Teorema del triángulo isósceles: Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

² Teorema del ángulo externo: Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.

4.1.2. Síntesis de la participación

En la siguiente tabla se presentan los títulos de cada uno de los diecinueve episodios en los que se dividió la reconstrucción del teorema¹.

Trabajo	Episodio	Nombre
En parejas	1	Juan y Ana buscan una estrategia de resolución.
En parejas	2	Juan y Ana hacen la representación y proponen una conjetura.
En parejas	3	Darío y Leopoldo se cuestionan sobre la inclusión del objeto altura.
En parejas	4	Darío y Leopoldo discuten sobre lo que se pide en el problema.
En parejas	5	Darío y Leopoldo negocian la definición de altura.
En parejas	6	Darío y Leopoldo exploran y conjeturan.
En parejas	7	María y Efraín deciden hacer una exploración por casos.
En parejas	8	Efraín se cuestiona sobre la inclusión del objeto altura en el enunciado del problema.
En parejas	9	Efraín y María exploran para verificar, a partir de la toma de medidas, y conjeturan.
En gran grupo	10	Introducción en el sistema de la definición de rectas perpendiculares y del teorema de la existencia de la recta perpendicular por un punto externo.
En gran grupo	11	Correspondencia entre la conjetura y la construcción/exploración de Darío y Leopoldo.
En gran grupo	12	Correspondencia entre la conjetura y la construcción/exploración de Juan y Ana.
En gran grupo	13	Limitación de la conjetura propuesta por Luz y Marina.
En gran grupo	14	Ejercicio preliminar a la demostración de la conjetura.
En gran grupo	15	Inicio de demostración de la conjetura.
En gran grupo	16	Surge la necesidad de ampliar el sistema teórico.
En gran grupo	17	Perfeccionamiento del enunciado de la conjetura.
En gran grupo	18	Finalización de la demostración del teorema.
En gran grupo	19	Restricción del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes.

¹ Por dificultades de espacio, los episodios 7, 8 y 9 se presentan en el Anexo 2 y los episodios 10, 11, 12 y 13 se presentan en el Anexo 3. Sin embargo, durante todo el análisis conservamos la numeración de estos episodios tal y como se muestra en la tabla de síntesis de la participación.

En los primeros diez episodios, el trabajo es organizado en parejas. Los once episodios restantes corresponden al trabajo en gran grupo. Para efectos del análisis cada episodio está organizado de la manera en que se describe a continuación. Inicialmente se presenta una breve descripción. Seguidamente, se muestran las respectivas intervenciones de estudiantes o profesora en el episodio y los códigos en la parte derecha muestran el tipo de acciones de participación de los estudiantes en cada componente del teorema. Posteriormente, se comentan dichas acciones de participación y, en ocasiones, algunas acciones de la profesora en función de promover la participación de los estudiantes. Finalmente, se otorga una valoración a la calidad de la participación de los estudiantes en el episodio. Cuando esa valoración tiene el grado de *bastante*, solo se menciona la característica. Es decir, si un estudiante tiene una participación, por ejemplo, bastante relevante durante uno de los episodios del trabajo en parejas, solo mencionamos que su participación es relevante, seguida del código (*B-R-Par*). En el caso en que la participación tenga, por ejemplo, el grado de *poco* relevante, sí incluimos la palabra *poco* y el código (*P-R-Par*).

Aclaremos que los códigos de calidad no se incluyen en la parte derecha de las intervenciones, porque la calidad de la participación de los estudiantes se mira de manera global en cada episodio. En algunos casos, se cita la línea de intervención respectiva como un fragmento representativo de la calidad de participación del estudiante, pero siempre teniendo en cuenta la globalidad del episodio. Por esta razón, estos códigos aparecen únicamente en los comentarios posteriores a las intervenciones presentadas en cada episodio. No se incluyen de manera puntual en una línea de intervención específica, en la parte derecha, como sí lo hacemos con los códigos referidos al tipo de acciones de participación de los estudiantes en cada componente del teorema.

ABRIL 10

EPISODIO 1: Juan y Ana buscan una estrategia de resolución.

Descripción: Una vez leído el enunciado del problema, Juan propone construir un triángulo, a partir de dos segmentos congruentes que serán las alturas. Se valen del programa de geometría dinámica para arrastrar los segmentos a una posición adecuada con

respecto a lo que serán los lados y vértices del triángulo. Para ello, Juan guía a Ana en la construcción.

- 2 Ana: Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad.
- 3 Juan: Es un tipo de triángulo. Un triángulo que tenga la propiedad donde dos alturas sean congruentes. [Empieza a hacer un dibujo de un triángulo rectángulo en el cuaderno]. *E-Inter-RepDado*
- Es decir, cuando hago un triángulo [rectángulo] *E-Inter-AntiSol*
- este [cateto] es perpendicular a este [cateto] y esta [uno de los catetos] es la altura del triángulo, en un triángulo rectángulo. Esta es la altura del triángulo con respecto a esta recta, la recta contiene al lado opuesto. En un triángulo rectángulo aparentemente yo creo que sí. Son isósceles, este y este [En el video no se ve lo que señala el estudiante cuando dice que son isósceles, pero parece ser que intenta decir que si el triángulo rectángulo es isósceles, entonces los catetos son las alturas congruentes.] Perpendicular a esta recta. Y para ahora la otra altura, viene esta perpendicular. Hagámoslo en la calculadora. *E-Inter-AludProp*
- 4 Ana: ¿Se construye primero el triángulo?
[Empieza la construcción en la calculadora con tres puntos que nombran así: A, B y C. Luego construye las rectas que pasan respectivamente por cada par de los tres puntos.] *E-Inter-RepDado*
- 5 Juan: Nunca cambia ¿sí o no? [Señala un dibujo previo que tenían en el cuaderno. En este se tienen dos puntos equidistantes a una recta dada y en semiplanos diferentes. El dibujo luce de la siguiente forma:
-
-] *E-Inter-IdenObj*
- Eso fue lo que nosotros vimos. Por lo tanto es como si fueran las alturas de un triángulo. [Señala los dos segmentos perpendiculares a la recta FG, cuya longitud es la distancia de cada punto, E y C, a la recta.]
- Ahora si vamos a mirar el triángulo completo, este sería una altura del triángulo [señala uno de los segmentos], tocaría girar la recta acá y [no se entiende] quedaría un solo triángulo [...]. *E-Inter-FormEst*
- 6 Juan: ¿Hiciste la altura? *E-Inter-RepDado*
- 7 Ana: La altura de A a este lado [señala el lado opuesto al vértice A del triángulo construido y la recta perpendicular a ese lado que pasa por A]
- 8 Juan: Tienes que hacer las perpendiculares más bien primero. *E-Inter-FormEst*
- 9 Ana: Por eso. Esta es la perpendicular. [Continúa señalando la misma recta perpendicular.]

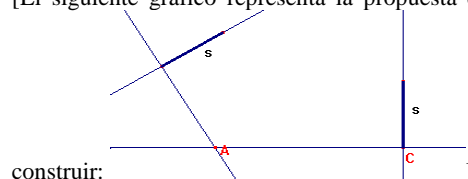
- 10 Juan: Pero no que pase por A necesariamente. Osea, ese punto lo vamos a tener que correr luego. Eso es lo que vamos a mirar.
- 11 Ana: Por eso, por eso, es que yo puedo correr este como yo quiera [Señala el punto A y lo mueve en la construcción.]
- 12 Juan: Pero no con respecto a la recta. Es que si tú lo sigues a la recta no. Traza una perpendicular por acá. [Señala la parte derecha de la pantalla.] Una distancia. Y traza otra perpendicular por acá, [Señala la parte izquierda de la pantalla] en otra recta, en otra distancia y un punto en el que vamos a empezar a mover y verá que es lo que ocurre. ¿Me hago entender? Borra la recta que pasaste por ese punto. [Señala el punto A.] Por ejemplo mira, yo ahora voy a pasar una perpendicular por acá. [Primero borra la recta perpendicular que pasaba por A] Mira. Esta va a ser mi recta AC y a esta, para encontrar la altura tengo que encontrar una perpendicular. Porque ahí está el segmento [que será una de las alturas]. Entonces [...]

E-Inter-FormEst

tracemos la perpendicular. [Construye una recta perpendicular a la recta AC, en la parte derecha de la pantalla.] Acá. Esta es perpendicular. Esta es mi recta perpendicular, ¿sí o no? Entonces aquí [en la recta perpendicular a AC] tomemos una distancia. Tomemos la distancia a un punto. Un punto, ummm llamémoslo H. Ahora tomemos la distancia que hay de acá a acá. [Se refiere a la distancia de H a la recta AC. Nombran el segmento que tiene esa distancia como s.] Entonces de acá hasta acá, [toma la distancia en Cabri] 5.04 centímetros. Ahora vamos a tomar toda la recta BC o la recta AB, ¿cuál de las dos quieres?

E-Inter-RepDado

[El siguiente gráfico representa la propuesta de Juan de acuerdo a lo que pretende



- 13 Ana: Cualquiera
- 14 Juan: Esta que está lejitos. [Escoge la recta AB] Debería tener colores esta cosa. [Construye una perpendicular a la recta AB] Y ahora transferimos [s] ¿Listo? Entonces [busca la herramienta de transferir medida en Cabri y traslada la medida.] Ya tenemos dos segmentos localizados. [Ambas alturas tienen longitud s. Luego comienzan a arrastrar la construcción, de manera que las dos alturas congruentes con medida s queden en un mismo triángulo.] Hasta por acá
- 15 Ana: Toca hacer coincidir los puntos. [Se refiere al pie de las alturas congruentes y los vértices A y C del triángulo de modo que las alturas correspondan al mismo triángulo.]
- 16 Juan: Los tenemos que hacer coincidir para que las dos alturas sean las mismas. [En un mismo triángulo. Los estudiantes arrastran para hacer coincidir los vértices del triángulo con los pies de las alturas].

E-Inter-RepDado

En la intervención [3] Juan anticipa una posible solución (*E-Inter-AntiSol*) al problema, sugiriendo que la relación se cumple en un triángulo rectángulo isósceles y alude a algunas de las propiedades de este en relación con sus alturas (*E-Inter-AludProp*). Dicha

anticipación no es tenida en cuenta para la construcción ya que, él y su compañera no construyen un triángulo rectángulo isósceles.

Los estudiantes inicialmente no se entienden entre ellos, pues están partiendo de dos propuestas diferentes de representación (*E-Inter-RepDado*). En las intervenciones [3-6] Juan desea comenzar la construcción partiendo de las alturas congruentes del triángulo y Ana desea comenzar por la construcción de un triángulo. Juan alude a la representación de dos segmentos que serán las alturas (*E-Inter-IdenObj*), en una construcción auxiliar [5] y así en las intervenciones [4-11] los estudiantes difieren de opinión en cuanto a cuál debe ser la ubicación de las rectas perpendiculares que contienen las alturas del triángulo. Juan propone como estrategia de resolución (*E-Inter-FormEst*) partir de dos segmentos congruentes que serán las alturas del triángulo y, a partir de ellos, construir el triángulo tal y como se vislumbra en la intervención [12]. Sin embargo, Ana está pensando en que deben empezar con el triángulo y, a partir de este, construir las alturas. Por ello, en las intervenciones [4, 7, 9 y 11] Ana se centra en las rectas perpendiculares ya construidas a partir del triángulo.

La estrategia de Ana es convencional, en contraste con la construcción semirrobusta que propone Juan. En la intervención [15] Ana acepta la propuesta de Juan y concuerda con él para hacer coincidir las alturas y los lados de tal forma que sean parte del mismo triángulo. Al seguir esta estrategia, los estudiantes llegan a la conjetura: Si en un triángulo dos alturas son congruentes, entonces el triángulo es isósceles. No sabemos a qué conjetura habrían llegado si hubieran procedido con la estrategia de Ana, debido a que ella decide seguir la estrategia de Juan.

En general, en este primer episodio los estudiantes se centran en la interpretación del enunciado y los indicadores *E-Inter-AntiSol*, *E-Inter-RepDado*, *E-Inter-FormEst*, *E-Inter-AludProp* y *E-Inter-IdenObj* aparecen por primera vez en el análisis de la participación de los estudiantes en la construcción del teorema. En concordancia con ese acercamiento inicial que ellos realizan al enunciado, se presentan acciones como identificar los objetos geométricos, aludir a propiedades de estos, representarlos de manera blanda o robusta a

través de Cabri, formular estrategias de resolución y anticipar posibles soluciones al problema planteado.

La participación de Ana en este episodio es poco relevante (*P-R-Par*), ya que a pesar de diferir inicialmente con su compañero en la estrategia de resolución, termina acomodándose a la propuesta de Juan y sus aportes se limitan a cuestionar y verificar las ideas de él. En la intervención [4] Ana no está segura sobre cómo proceder y pregunta a su compañero si deben empezar por la construcción del triángulo. Seguidamente, en las intervenciones [7, 9 y 11] vemos que Ana no comprende del todo la idea de Juan y cuestiona sus planteamientos. En la intervención [13] Ana termina siguiendo la propuesta de Juan por lo cual su estrategia no es tenida en cuenta.

La participación de Juan en este episodio es relevante (*B-R-Par*), pues es él quien brinda los aportes y las ideas que resultan útiles para el desarrollo de la actividad. Desde el momento en que los estudiantes leen el problema, Juan intenta anticipar una solución [3] y después recurre a una situación geométrica similar en cuanto a la congruencia de dos segmentos [5], para generar su propuesta de empezar la construcción por las alturas congruentes y no por el triángulo. En la intervención [12] Juan se encarga de convencer a Ana de la pertinencia de su propuesta y del camino que deben seguir para el desarrollo de la actividad. Por ello, también consideramos que la participación de Juan es autónoma (*B-A-Par*). Además, vale la pena resaltar la disposición de Juan para explicarle a Ana su idea y preguntarle sobre cuál recta quiere escoger para continuar con la construcción y localizar el segundo segmento como altura del triángulo [12]. Esto, nos permite vislumbrar la intención por parte de Juan de llevar a cabo la construcción de manera compartida con su compañera.

EPISODIO 2: Juan y Ana hacen la representación y proponen una conjetura.

Descripción: A partir de la idea de Juan, respecto a resolver el problema comenzando por dos segmentos congruentes y cada uno perpendicular a las rectas que contienen dos lados del triángulo, los estudiantes hacen una representación semirrobusta de un triángulo, pues

se basa en dos segmentos que se arrastran para lograr un triángulo cuyas alturas sean esos segmentos. Una vez lograda la construcción, proponen la conjetura.

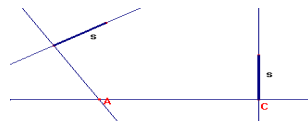
17 Juan: Todas [las alturas] tienen que intersectar.

*E-Inter-
AludProp*

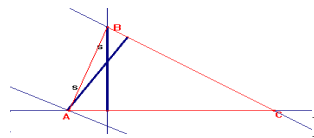
18 Ana: [Arrastran una de las alturas construidas para que quede en el interior del triángulo ABC, de manera que un extremo de la altura casi coincide con el vértice A.] Por eso, es que lo que debemos hacer es construir la perpendicular. [Arrastran la altura y hacen que uno de los extremos de esta coincida con el vértice A del triángulo.] Ah sí, y ese va a ser nuestro A.

*E-Explo-
HerrEval*

[Los estudiantes discuten si deben borrar una de las rectas que contiene los lados del posible triángulo. Luego deciden arrastrar las alturas de modo que el vértice A coincida con el extremo de una altura y el vértice B con el extremo de la otra. La idea que tiene Juan es pasar de esta figura:



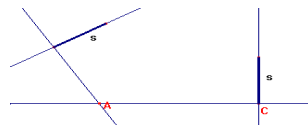
a esta:



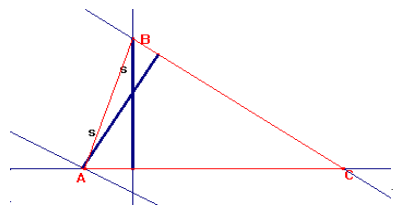
22 Ana: ¿Y cuál es el triángulo?

23 Juan: El triángulo, hasta el momento tenemos solamente este lado [señala la recta AC].

*E-Inter-
RepDado*



Este [señala el punto B], debe ser el vértice [del triángulo.] [Los estudiantes modifican la figura, de modo que las rectas que contienen los pies de las alturas congruentes son ahora las rectas AC y BC. Al finalizar el arrastre obtienen la siguiente figura:]



[Finalmente, toman las medidas de las dos alturas y de los lados BC y AC del triángulo verificando, mediante el arrastre, que las dos alturas queden congruentes.

*E-Explo-
HerrIden*

Se dan cuenta que los lados AC y BC resultan con igual medida y escriben la conjetura: Si en un triángulo dos de sus alturas son congruentes, entonces dicho triángulo es isósceles y los lados congruentes son aquellos que están contenidos en las rectas perpendiculares a las alturas respectivas.] *E-IdentReg-Det*
E- Formu-Enun

En la intervención [18] Ana percibe que la construcción que propone Juan no es totalmente robusta, al mencionar que deben construir una recta perpendicular, y parece que desea retomar su propuesta de partir de un triángulo y las rectas perpendiculares que contienen las alturas. Sin embargo, al avanzar en la construcción y verificar (*E-Explo-HerrEval*) que la idea de Juan lleva a una representación de un triángulo con dos alturas congruentes [22-23], Ana la acepta.

En general, en este episodio los estudiantes avanzan de una interpretación del enunciado a una exploración libre de la representación que realizaron, en función de identificar o descubrir propiedades no mencionadas en el enunciado (*E-Explo-HerrIden*). Así, se dan cuenta de que al tener dos alturas congruentes el triángulo resulta ser isósceles (*E-IdentReg-Det*) y formulan su conjetura (*E- Formu-Enun*).

La construcción que hicieron los estudiantes es semirrobusta, aunque no surgen indicadores en relación a identificar regularidades claves para solucionar el problema o detectar argumentos para la plausibilidad de la relación detectada. Los indicadores *E-Explo-HerrEval*, *E-Explo-HerrIden*, *E- Formu-Enun* y *E-IdentReg-Det* aparecen por primera vez en este episodio debido al proceso de exploración que llevan a cabo los estudiantes.

Es de resaltar que este tipo de estrategia propuesta por Juan es novedosa y se sale de lo esperado por el profesor, como se aprecia en el episodio 13¹. Luego, la participación de Juan es original (*B-O-Par*) ya que su propuesta de empezar la construcción por las alturas congruentes para luego armar el triángulo, es una forma creativa de estudiar el problema y sobresale en comparación a las propuestas de los demás grupos. Esta propuesta resalta que en el desarrollo del curso un estudiante puede estar a la par de la profesora y no hay una

¹ En el episodio 12 Juan socializa su propuesta a toda la clase y se resalta que su estrategia no había sido considerada por la profesora.

imposición por parte de ella respecto a los posibles caminos de solución que tomen los estudiantes.

Así mismo, Juan es quien lidera (*B-A-Par*) y guía a Ana en la construcción. Por ejemplo, a partir de la diferencia de ideas que ambos tuvieron al empezar la resolución del problema, respecto a cómo representar la situación propuesta en el enunciado, se evidencia que Ana intenta cuestionar a Juan (*P-R-Par*) y después se convence de los planteamientos que él realiza. En este episodio Ana se limita a seguir las indicaciones de Juan para efectuar la construcción [22], por ende su participación es poco relevante. En cambio, la participación de Juan es autónoma (*B-A-Par*) al asumir el liderazgo y apropiarse de la dinámica de resolución. Ana ejecuta en Cabri las indicaciones que Juan le brinda y a su vez, Juan responde [23] a las dudas de Ana respecto a la estrategia de resolución.

EPISODIO 3: Darío y Leopoldo se cuestionan sobre la inclusión del objeto altura.

Descripción: Los estudiantes leen el enunciado del problema y se cuestionan por la inclusión del objeto altura en este. Le manifiestan esta inquietud a la profesora.

- | | | | |
|---|-----------|---|--------------------------------|
| 2 | Darío: | Toca preguntarle [a la profesora] qué es altura. | <i>S- Seleccionar-IdenPart</i> |
| 3 | Leopoldo: | [Dirigiéndose a la profesora] ¿Por qué tú hablas de altura si eso no lo hemos incluido? | |
| 4 | P: | ¡Nadie más lo ha dicho! | |
| 5 | Leopoldo: | Lo hacemos con lo que sabemos [...] o | |
| 6 | P: | Ahora lo discutimos. Estoy esperando que algunos más se den cuenta. [...] | <i>S- Seleccionar-IdenPart</i> |
| 8 | Leopoldo: | Hagamos una cosa, construyámoslo primero los dos en el computador y después usted lo pasa a la calculadora. | |
| 9 | Darío: | No porque la profesora dijo que dejáramos tiempo para adivinar a ver qué cosas salían. | |

En las intervenciones [2-3] Darío y Leopoldo se cuestionan por la inclusión del objeto altura en el enunciado y le manifiestan esta inquietud a la profesora. Los estudiantes hacen alusión a este elemento del enunciado porque, hasta el momento, no se ha incluido en el

sistema teórico del curso (*S- Selec-IdenPart*) y en este sentido, se entrevé que han entendido la dinámica de construcción colectiva de un sistema teórico y se sienten responsables del cumplimiento de las normas alusivas a dicha construcción. Ellos saben que los objetos geométricos usados deben estar definidos en el sistema teórico. Por su parte, la profesora da un poco de tiempo para que los demás grupos caigan en cuenta de ello [6].

El episodio es corto en función de resaltar la preocupación de los estudiantes por usar únicamente elementos dentro de la teoría que están elaborando en el curso. En este episodio se ejemplifica, por primera vez, que no hay un orden especial para participar en alguna de las acciones que caracterizan los tres componentes de un teorema. Esto, debido a que, de manera global, la participación de los estudiantes en la construcción del teorema en estos primeros episodios está centrada sobre el enunciado, pero este episodio, en particular, se centra en el sistema teórico. Así aparece por primera vez el indicador *S- Selec-IdenPart*.

La participación de Darío y Leopoldo es genuina (*B-G-Par*), puesto que en las intervenciones [2 y 3] ambos se cuestionan por un elemento que aún no ha sido incluido en el sistema teórico y ello refleja el interés y la conciencia que tienen ambos estudiantes por respetar las reglas acordadas en la realización de la tarea que van a llevar a cabo, utilizando únicamente elementos validados por la comunidad de clase. Por consiguiente, Darío y Leopoldo muestran evidencia de un empoderamiento y apropiación de las normas de la clase, al cuestionar la inclusión del objeto altura en el problema sin antes haberlo definido e incluido en el sistema teórico local del curso. Incluso Leopoldo, en la intervención [5], manifiesta su duda respecto a si deben proseguir sin que el objeto sea incluido en el sistema, violando así una de las normas del curso.

EPISODIO 4: Darío y Leopoldo discuten sobre lo que se pide en el problema.

Descripción: Los estudiantes realizan una interpretación errónea del enunciado e intentan analizar qué sucede si dos triángulos tienen dos de sus alturas respectivamente congruentes. Indagan sobre ello hasta que se dan cuenta que el problema alude a un solo triángulo con un par de alturas congruentes. Luego, plantean una posible solución.

- 11 Leopoldo: Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad. *E-Inter-IdenObj*
- 12 Darío: Si dos de las alturas son congruentes, de pronto son semejantes los triángulos... de pronto son congruentes. *E-Inter-AntiSol*
- 13 Leopoldo: Espere [...] ¿Se pueden hacer triángulos de una vez [en Cabri]?
- 14 Darío: Polígono. Polígono regular [...] ah, no, polígono. [construyen un triángulo usando polígono]
- 15 Leopoldo: ¿Cuál es la altura? ¿Qué es la altura? Un segmento que va desde un vértice [...] y una perpendicular [...] digamos que esa fuera [...] ¿o la hago perpendicular? *E-Inter-AludProp*
- 16 Darío: Primero hagámosla [...] el bosquejo [...] en un cuaderno. ¿Qué se tiene? *E-Inter-IdenObj*
- 17 Leopoldo: Un triángulo y las alturas.
- 18 Darío: ¿Dos triángulos?
- 19 Leopoldo: Sí. Dos triángulos [...] uy, pero no. [Los estudiantes realizan una exploración entendiendo erróneamente el enunciado. Piensan que se piden dos triángulos con dos pares de alturas congruentes.]
- 21 Darío: [Hacen un bosquejo en papel.]Tenemos dos vértices. Estos dos triángulos tienen dos de sus alturas congruentes. *E-Inter-RepDado*
- 22 Leopoldo: ¿Cómo son los triángulos?
- 23 Darío: El triángulo sería este.
- 24 Leopoldo: Mire, la altura de acá a acá, [señala un vértice y el lado opuesto] sería esta [...] de acá a acá sería esta [señala otro vértice y el otro lado opuesto] y de acá a acá sería esta [señala otro vértice y el lado opuesto en el otro triángulo.] *E-Inter-IdenObj*
- 25 Darío: Pero [...] no va a tener relación cada uno. *E-Inter-AntiSol*
- 26 Leopoldo: No, no tienen ninguna. Mire, la idea es que si usted construye dos triángulos que tengan dos alturas congruentes, de pronto son congruentes los triángulos, o semejantes, pero ya vimos que no.
- 27 Darío: ¿Para qué tipo de triángulo es la propiedad? *E-Inter-IdenObj*
- 28 Leopoldo: Entre esta propiedad y el tipo de triángulo.
- 29 Darío: ¡Ah! Pues por eso, equilátero [...] Es que dice qué tipo de triángulo [...] tenemos un triángulos con dos alturas *E-Inter-AntiSol*

Este episodio se centra en la interpretación del enunciado. En la intervención [12] Darío hace una anticipación (*E-Inter-AntiSol*) que resulta ser equivocada debido a la incorrecta interpretación del enunciado por parte de ambos estudiantes [18-21]. Al creer que se pide

construir dos triángulos con dos alturas congruentes, los estudiantes realizan una representación [21] en lápiz y papel de la situación (*E-Inter-RepDado*). Sin embargo, Darío se da cuenta del error al no encontrar alguna relación geométrica interesante entre dos triángulos con una altura congruente [24-26], hecho que los lleva a releer el enunciado del problema. Al revisar el enunciado de nuevo, corrigen el rumbo y Darío [29] anticipa que la propiedad se cumple en los triángulos equiláteros (*E-Inter-AntiSol*) y que el problema alude a un solo triángulo con dos alturas congruentes.

Por otra parte, al hacer referencia a la altura, los estudiantes intentan aludir a algunas de sus propiedades (*E-Inter-AludProp*), de acuerdo a la mención de esta en el enunciado (*E-Inter-IdenObj*). No obstante, los estudiantes no llegan a formular una estrategia de resolución del problema en este episodio, quizás en parte por el hecho de haber realizado una interpretación errónea del enunciado. Llama la atención la dificultad para comprender un enunciado puesto que, en ocasiones, este tipo de incomprensiones genera fracaso en el trabajo que realizan los estudiantes. En este caso, es de resaltar que uno de los estudiantes es quién corrige el error y no necesariamente tiene que ser el profesor. Esto hace hincapié en la igualdad entre profesora y estudiantes como miembros de la comunidad de clase.

Consideramos que la participación de Darío en este episodio es relevante (*B-R-Par*), ya que gracias a su anticipación [29] los estudiantes pueden avanzar en la tarea. En caso de que Darío no hubiera detectado que el problema se refería a un solo triángulo con dos alturas congruentes, quizás los estudiantes no habrían podido proseguir en el planteamiento de su conjetura. Por ende, resaltamos la pertinencia del aporte de Darío. De otro lado, a lo largo del episodio Darío intenta asumir un rol de liderazgo (*B-A-Par*) y toma la iniciativa tanto para anticipar de manera errada una posible solución al problema, como para corregir la interpretación errónea. Es así que los estudiantes inicialmente interpretaron mal el enunciado debido a la intervención de Darío [12], quien entendió que el problema aludía a dos triángulos, pero así mismo es Darío quién evidencia el error [29] y se da cuenta, sin que medie la profesora o Leopoldo, que el problema se refiere a un triángulo con dos alturas congruentes. En este sentido la participación de Darío es autónoma (*B-A-Par*).

EPISODIO 5: Darío y Leopoldo negocian la definición de altura.

Descripción: Los estudiantes dan sentido a la definición de altura a partir de la representación realizada y los casos analizados en su construcción. Darío guía a Leopoldo en la construcción de las alturas.

- | | | | |
|----|-----------|---|-------------------------|
| 31 | Leopoldo: | [Construye en Cabri un triángulo y dos segmentos con extremos en vértices del triángulo y los correspondientes lados opuestos. Arrastra los vértices del triángulo] | <i>E-Inter-RepDado</i> |
| | | Es que me dan dos líneas y ellas quedan volando. Ni siquiera se intersecan en tal lado, o algo así. Venga, expongámosle [a la profesora] nuestra idea. | <i>E-Inter-AludProp</i> |
| 32 | Darío: | No. ¿Qué va a preguntar? [hablan en susurros; no saben qué hacer; pasan más de tres minutos] | |
| 34 | Darío: | [...] Sáquele las alturas a ese triángulo. Pero acuérdesse que si va a hallar la perpendicular no es al segmento, sino a la recta. [Nuevo silencio]. | <i>E-Inter-AludProp</i> |
| 35 | Leopoldo: | Vea que cuando el triángulo se vuelve obtusángulo, se desaparece una altura. | <i>E-Explo-HerrEval</i> |
| 36 | Darío: | Por qué está mal. Apuesto a que usted la sacó perpendicular al lado. Es a la recta. | |
| 37 | Leopoldo: | ¿Eso es lo que me estaba diciendo ahorita? [...] | |
| 39 | Leopoldo: | Vea que si [el triángulo] es recto no hay alturas. | |
| 40 | Darío: | ¿Cómo no va a haber! ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Vea, las alturas son [estas; señala los catetos del triángulo]. | |
| 41 | Leopoldo: | Si se vuelve recto, las alturas coinciden, [...] coincide con el lado y eso tocaría demostrarlo [...] me imagino | <i>E-Inter-AludProp</i> |
| | | [Repiten la construcción con un triángulo ABC y dos de sus alturas construidas correctamente. Luego arrastran los vértices y caen en cuenta que cuando el triángulo es obtusángulo las alturas quedan por fuera del triángulo.] | <i>E-Explo-HerrIden</i> |
| 43 | Darío: | Las alturas están afuera. | |
| 44 | Leopoldo: | Ah, ya lo pillé. | |

En este episodio, se encuentran dos indicadores correspondientes a la categoría de interpretación del enunciado (*E-Inter-RepDado*) y (*E-Inter-AludProp*), y dos correspondientes a la categoría de exploración libre del enunciado (*E-Explo-HerrEval*) y (*E-Explo-HerrIden*). Aunque inicialmente los estudiantes intentan hacer una construcción en relación a un triángulo y sus alturas [31], consideramos que el trabajo se centra en

entender la tarea asignada. La interpretación se dificulta porque Leopoldo construye las alturas con relación a los lados del triángulo y no a la recta que los contiene [34-37]. Esto hace que, eventualmente, al arrastrar los vértices del triángulo, las alturas desaparezcan en la construcción y el estudiante dude de su existencia. Se entrevé que Leopoldo tiene una imagen conceptual restringida de la altura, lo cual le podría dificultar su participación en la construcción del teorema ya que, sin las aclaraciones de Darío respecto a la forma de construir apropiadamente las alturas del triángulo, quizás Leopoldo habría planteado una conjetura más limitada debido a la restricción de la construcción con triángulos cuyas alturas intersecan los lados del triángulo, excluyendo así la exploración de triángulos obtusángulos y rectángulos.

En las intervenciones [39-43], aunque los estudiantes no se refieren a la relación solicitada, están centrados en el antecedente, ya que están descubriendo, en el caso de Leopoldo, o verificando, en el caso de Darío, propiedades de las alturas (*E-Inter-AludProp*) según el tipo de triángulo. Es interesante distinguir el nivel de conocimiento de cada estudiante y cómo Darío actúa como guía para Leopoldo. Esta actitud de Darío evidencia una corresponsabilidad en el propósito de resolver la tarea de manera conjunta.

No ubicamos indicadores en relación a la identificación de regularidades porque los estudiantes no están atentos a un invariante, sino que están construyendo una representación para acercarse al enunciado. En este episodio, resulta muy favorable el trabajo en parejas para Leopoldo, ya que logra aclarar sus dudas respecto a las propiedades de la altura de un triángulo [35, 37, 39, 41 y 44].

Luego, Darío asume un rol de líder en este episodio (*B-A-Par*) y aunque no intenta convencer a Leopoldo de las propiedades que él ya conoce sobre las alturas, sí toma la iniciativa y dirige la actividad de exploración. En la intervención [34 y 36] Darío le da unas indicaciones a Leopoldo y lo corrige diciéndole que las alturas se construyen con rectas perpendiculares respecto a la recta que contiene el lado del triángulo y no respecto al lado como tal. Para Leopoldo no era clara tal indicación de Darío por lo cual en la intervención [37] hace referencia a que ahora sí entiende lo que indicaba Darío.

La participación de Darío es autónoma (*B-A-Par*) porque asume el liderazgo en el desarrollo de la actividad y corrige los errores de su compañero aunque no intente convencerlo para que caiga en cuenta del error. En ese sentido, Darío solo tiene en cuenta la construcción que realizó Leopoldo, bajo sus indicaciones, para verificar que las alturas quedan por fuera [43] cuando el triángulo es obtusángulo.

EPISODIO 6: Darío y Leopoldo exploran y conjeturan.

Descripción: Darío indica a Leonardo cómo usar el arrastre y medir la longitud de las alturas para descubrir en qué casos estas resultan congruentes en la construcción que han hecho. Luego de ello, plantean la conjetura.

46	Darío:	Dos de sus alturas son congruentes [leyendo]. Póngale cuidado. Póngale cuidado. Este es un triángulo	<i>E-Inter-IdenObj</i>
47	Leopoldo:	Escaleno.	
48	Darío:	No, acutángulo [...] por los ángulos. Entonces construyamos otro así. ¿Cuándo estas alturas son congruentes? Esta altura y esta altura y esta altura.	<i>E-Inter-FormEst</i>
49	Leopoldo:	¿Cómo hacemos para que estas alturas sean congruentes? [Pausa] ¿Cómo le tomo la medida?	<i>E-Explo-HerrIden</i>
50	Darío:	Escoja este [distancia y longitud] y mida los segmentos.	
51	Leopoldo:	[Usa la herramienta en Cabri para mostrar la longitud de las alturas]	
52	Darío:	Vaya corriendo A más para allá [cuadran la longitud al ojo]	
53	Leopoldo:	Listo, Darío. [Tienen la configuración de un triángulo isósceles y parecen darse cuenta de ello.]	<i>E-Explo-HerrRela</i>
54	Darío:	¿Hay otra posibilidad de que sean congruentes? Cuando es equilátero [...] también ¿recto? no. [Hacen uso del arrastre en el triángulo para que sea equilátero.]	
55	Leopoldo:	Recto sí. Pero que sea isósceles.	
56	Darío:	Pero que los lados que forman el ángulo recto sean congruentes. [...]	
58	Leopoldo:	Listo, entonces la conjetura es [...]	
62	Darío:	La conjetura es: Si el triángulo tiene al menos dos lados que son congruentes, entonces dos de sus alturas son congruentes.	<i>E-Formu-Enun</i>
63	Leopoldo:	El procedimiento fue: construimos el triángulo y luego dos de sus alturas. Y mediante el arrastre, se logró que dos de sus alturas fueran congruentes.	<i>E-Inter-FormEst</i>

En este episodio Darío y Leopoldo están procediendo de manera diferente a pesar de que parecen trabajar colaborativamente. Darío revisa el enunciado [46] y decide que el consecuente de la conjetura es la propiedad alturas congruentes [48]; por ello sugiere una exploración en busca de triángulos que cumplan esa condición. Por su parte, Leopoldo entiende la exploración como la búsqueda del consecuente para el cual lo dado es que las alturas son congruentes [49]. Esto hace que los indicadores en las intervenciones de Darío, (*E-Inter-IdenObj*) y (*E-Inter-FormEst*), estén centrados en la interpretación del enunciado ya que él busca, según su conocimiento, qué tipo de triángulos le permiten hacer esa conclusión. Por otra parte, los indicadores en las intervenciones de Leopoldo, (*E-Explo-HerrIden*) y (*E-Explo-HerrRela*), están centrados en descubrir propiedades y explorar.

La participación de Darío a través de los indicadores de la categoría de exploración libre de una representación en Cabri [50 y 52], se constituye en guía para Leopoldo. Aunque Darío piensa de manera diferente, al tener en cuenta la propiedad alturas congruentes como consecuente de la conjetura, dirige la exploración de Leopoldo, quién descubre que el triángulo puede ser isósceles. Así Leopoldo continúa razonando bajo la premisa de que la propiedad alturas congruentes es el antecedente de la conjetura.

Posteriormente, Leopoldo ayuda a Darío a pensar en diferentes tipos de triángulos [54-56], según la medida de sus lados, que puedan cumplir la propiedad alturas congruentes. De esta forma, en las intervenciones [58-62] los estudiantes terminan formulando la conjetura (*E-Formu-Enun*) de acuerdo a lo que pensaba Darío, es decir que la propiedad alturas congruentes sea el consecuente. Sin embargo, ninguno de los estudiantes es consciente de que la conjetura formulada no se corresponde con la construcción que realizaron¹. El indicador *E-Explo-HerrRela* aparece por primera vez en este episodio, cuando en las intervenciones [53-56] los estudiantes hacen uso del arrastre para relacionar dos propiedades de un triángulo. Tales propiedades aluden a tener un ángulo recto y ser

¹ La coherencia entre la conjetura que realizó este grupo y la construcción que hicieron en Cabri se detalla a profundidad en el episodio 11.

isósceles, en función de identificar todos los posibles casos en que las alturas de un triángulo resulten congruentes.

La participación de Darío y Leopoldo es relevante (*B-R-Par*), puesto que ambos aportan ideas para la formulación de la conjetura, a pesar de que cada uno estaba razonando de manera distinta respecto a la concepción del antecedente y el consecuente de la conjetura que plantearon. En las intervenciones [54-55] se evidencia cómo ambos van aportando ideas al desarrollo de la actividad. Darío menciona que cuando el triángulo es equilátero también se cumple la propiedad de las alturas congruentes y Leopoldo menciona que en el caso de los triángulos rectángulos también se cumple, pero el triángulo rectángulo debe ser isósceles. Ambos aportes son útiles y cruciales para el planteamiento de la conjetura que finalmente redactan [63]. Luego, es de resaltar que en la forma como se enfrenta un problema, a veces no se tiene consciencia de lo que cada estudiante está pensando, tanto por parte de los estudiantes como del docente. Este episodio es un ejemplo de un “disfraz de trabajo en grupo”. Sin embargo, los estudiantes logran llevar a cabo la resolución del problema de manera conjunta atendiendo a una necesidad común: el planteamiento de la conjetura.

ABRIL 12

EPISODIO 14¹: Ejercicio preliminar de demostración de la conjetura.

Descripción: Al dar inicio a la demostración, la profesora indaga por las ideas que tuvieron los estudiantes para intentar demostrar sus conjeturas y se hace explícito que necesitan incluir nuevos elementos en el sistema teórico para desarrollar la demostración, como la definición de triángulo isósceles y el teorema del triángulo isósceles.

92 Daniel: Profe, es que yo hice unas cosas, pero es que, en esas cosas hay cosas que tengo que demostrar. [todos se ríen]

*S- Selec-
AsegDedu*

93 P: ¿Qué? [...] ¿Qué?

94 Daniel: Pues yo hice una demostración, pero en esa demostración hay tres cosas que tocaría demostrar.

¹ Los episodios 7, 8 y 9 se encuentra en el Anexo 2 y los episodios 10, 11, 12 y 13 se encuentra en el Anexo 3.

- 95 P: ¿Ah! ¿Y cuál era tu conjetura? ¿La primera [Si el triángulo ABC es isósceles con los lados BA y BC congruentes, entonces las alturas correspondientes a estos lados son congruentes] o la segunda [El recíproco de la primera conjetura]?
- 96 Daniel: La primera.
- 97 P: ¿Quién más trató de demostrar la primera? Si es isósceles, tiene dos alturas congruentes. ¿Quién?... Bueno, entonces vamos a tratar de mirar esa demostración.
- 99 P: [...] Bueno, vamos a demostrar la primera. Henry va a escribir las afirmaciones y nosotros decimos las justificaciones [...] casi todos establecieron esta conjetura, luego su demostración debía ser esa.
- 100 Ignacio: [Se acerca y le habla pasito a la profesora] Profesora: es que todavía no entiendo si podemos usar el criterio de congruencia lado – ángulo – ángulo. *S- Seleccionada*
- 101 P: No lo tenemos, no lo puedes usar.
- 102 Ignacio: Paila.
- 103 P: [Pasa un tiempo. María y Henry están reproduciendo una figura en el tablero] Bueno, ¿y ya definimos triángulo isósceles? [Varios estudiantes dicen que no]. *S- Seleccionada*
- 105 P: ¿Y cuál va a ser nuestra definición? Un triángulo [...] ¡ajo!, queda como definición de triángulo isósceles, aquel triángulo que tiene dos lados congruentes. No se vayan a inventar otras definiciones después. [...]
- 110 Henry: [Aún no habían escrito nada en el tablero. La profesora les hace un gesto interrogativo] Es que nosotros partimos de que un triángulo isósceles tiene sus dos ángulos congruentes *S- Seleccionada*
- 111 María: Los ángulos opuestos a los lados congruentes
- 112 P: ¡No!
- 113 Henry: Entonces desde ahí la tenemos mal.
- 114 P: Entonces está mal [...] ¿Ustedes?
- 115 Alguien: ¿Por qué está mal esa?
- 116 P: Porque la definición de [triángulo] isósceles la tomaron con dos ángulos congruentes, pero es con dos lados congruentes.
- 117 Melisa: Nosotros también tenemos otro problema
- 118 P: ¿También la tomaron con dos ángulos congruentes?
- 119 Daniel: No, pero después usamos una propiedad [...] también, pues dijimos que si era triángulo isósceles tendría dos ángulos congruentes. *S- Seleccionada*
- 120 P: Bueno, bueno, entonces [...] ya varias de las personas que comenzaron la demostración me están diciendo que tenemos un grave problema ¿Qué es cuál?

- 121 Daniel: Que necesitamos poder decir que un triángulo isósceles tiene dos ángulos congruentes.
- 122 P: Entonces necesitamos propiedades. Hasta ahora no tenemos ninguna propiedad. Tenemos ya la definición de triángulo isósceles como un triángulo con dos lados congruentes. [Escribe la definición en el tablero] Entonces ¿cuál teorema quieren?
- 123 Daniel: Si un triángulo es isósceles entonces [...]
- 124 P: [Escribe en el tablero el teorema: Si un triángulo es isósceles entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes]

*E- Formu-
AnteCons*

[DEMOSTRACIÓN TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES]

El episodio se centra en dos aspectos que tienen que ver con la posibilidad de demostrar la conjetura en el marco de un sistema teórico. Por un lado, la necesidad de asegurarse de que los objetos geométricos que se enuncian en la conjetura hayan sido incluidos al sistema para poder hacer referencia a ellos (*S- Selec-IdenPart*) y por el otro, la necesidad de que se puedan tener las garantías teóricas para construir la cadena deductiva (*S- Selec-AsegDedu*).

Con relación al primer aspecto, la profesora resalta a los estudiantes [103-105], que es necesario definir triángulo isósceles e introduce su definición (*S- Selec-IdenPart*). En las intervenciones [110,113], Henry cae en cuenta de que la propuesta para el comienzo de la demostración que va a exponer a los compañeros no es pertinente porque se introdujo una definición diferente (*S- Selec-IdenPart*) a la que se acaba de introducir en el sistema. María le aclara cuál definición debía haber usado [111], pero un compañero no ve que la idea de Henry sea errada [115], lo cual conduce a la profesora a volver a mencionar la definición que van a adoptar en el sistema teórico.

Respecto al segundo asunto, se aprecian dos tipos de participación diferentes. De una parte, la participación de Daniel, quien desde las dos primeras intervenciones [92, 94] señala que la demostración requiere usar teoremas que aún no se han incluido en el sistema (*S- Selec-AsegDedu*) y luego se refiere explícitamente a la necesidad de tener el teorema del triángulo isósceles [119, 121]. De otra parte, la participación de Ignacio, quien menciona de forma explícita no saber si puede usar o no un teorema que aún no está incluido en el sistema

[100]; su pregunta refleja que aún no tiene claro cómo proceder a la hora de escoger garantías para justificar las afirmaciones que se quieren demostrar (*S- Selec-AsegDedu*).

En el episodio también se aprecia que la profesora es quien regula a los estudiantes en la inclusión de nuevos enunciados al sistema. En este caso, acepta la inclusión de la definición de triángulo isósceles y del teorema del triángulo isósceles pero no el criterio de congruencia de triángulos mencionado por Ignacio [100]. Esto se debe a que la demostración de este criterio requiere de la introducción de más elementos en el sistema teórico, los cuales desviarían la atención en el teorema del triángulo isósceles.

La participación de Daniel es autónoma (*B-A-Gran*), genuina (*B-G-Gran*) y relevante (*B-R-Gran*) puesto que él por su propia cuenta intentó desarrollar una demostración para el teorema y aunque, en su intento usó elementos que no hacían parte del sistema teórico en ese momento, lo hizo con plena conciencia de que esos elementos debían ser posteriormente incluidos, acción que refleja la responsabilidad con que llevó a cabo la tarea. Además su participación es relevante, en el sentido de que el intento de Daniel contribuyó a resaltar la necesidad de incluir más propiedades en el sistema teórico del curso, en función de poder avanzar en la demostración.

La participación de Henry es genuina (*B-G-Gran*), ya que el estudiante reconoce [110 y 113] que en su demostración partieron de otra definición para triángulo isósceles, diferente a la incluida en el sistema teórico del curso, lo cual conlleva a que su intento de demostración no sea válido. En su intervención, Henry manifiesta tener conciencia y responsabilidad de estar comprometido con respetar las normas compartidas del curso y llevar a cabo sus aportes sin quebrantar tales normas.

La participación de Ignacio es poco genuina (*P-G-Gran*), puesto que en la intervención [100] refleja que aún no tiene muy claro si es válido usar un teorema que aún no se ha incluido en el sistema teórico del curso, para así avanzar en la demostración. Esto es muestra de que aún no se ha apropiado de manera completa de las normas compartidas de la comunidad de clase y aunque actúa con responsabilidad, al preguntar sobre la pertinencia

de su idea, no refleja un sentido de conciencia y empoderamiento del sistema de reglas en función de llevar a cabo un fin común de manera conjunta.

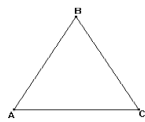
ABRIL 17

EPISODIO 15: Inicio de demostración de la conjetura.

Descripción: Bajo la guía de la profesora los estudiantes construyen los primeros pasos de la demostración y se generan ideas respecto a las posibles rutas a seguir, anticipando la cadena deductiva para llegar a la conclusión deseada.

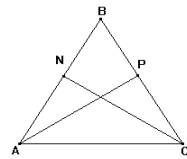
131 P: Bien, comenzamos con triángulo ABC, o sea que mi primer paso es triángulo ABC con AB congruente a BC. [Escribe: 1. $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Hace el siguiente dibujo

D- Explo-RepAnte



] mi siguiente paso... voy a tratar de demostrar la conjetura... trazo las alturas, entonces, ¿qué digo? Sea... digamos CN y AP alturas del triángulo. ¿Sabemos que existen? Sí, ya lo tenemos demostrado que existen. Entonces voy a ponerlas.

132 P: [Agrega elementos a la representación



y escribe: 2. Sea \overline{CN} altura y \overline{AP} altura del $\triangle ABC$] ¿Qué hago ahora?

133 Jaime: Por la definición de altura entonces [en] el triángulo está este segmento [señala \overline{AP}] perpendicular a BC

D- Explo-EncadPro

134 P: ¿Cuál es la definición de altura?

S- Selec-AsegDedu

135 Jaime: Es el segmento perpendicular a la recta

136 Daniel: AP es perpendicular a [...]

D- Explo-EncadPro

138 Daniel: AP es perpendicular a BC

139 P: AP perpendicular a la recta, ¿no? y

140 Melisa: CN perpendicular a BA

- 141 P: [Escribe: 3. $\overline{AP} \perp \overline{BC}$; $\overline{CN} \perp \overline{BA}$] Esa es la definición de altura. Me da la perpendicularidad. El siguiente paso... ¿Antonio? ¿Cuál será? *D-Selecc-EncaDedu*
- 142 Antonio: Estoy como perdido.
- 143 P: ¿Estás como perdido? [Se ríen] Hasta ahora he nombrado que esta es perpendicular a este lado... y... o sea, puedo añadir esto... Bueno, hagamos lo que siempre hemos dicho. ¿Esto es lo que necesito, no? [Escribe al lado de la figura: $\overline{NC} \cong \overline{AP}$] y de la altura saqué esto... paso 3 ¿Qué puedo concluir? *D-Explo-UsConclu*
- 144 Antonio: Que son rectos. *D-Selecc-EstaRela*
- 145 P: Qué hay algún ángulo recto. Bueno, entonces ¿los nombramos con números?
- El diagrama muestra un triángulo ABC con vértices A, B y C. Se traza la altura AP desde el vértice A perpendicular a BC, y la altura CN desde el vértice C perpendicular a AB. Los ángulos en los puntos de intersección están etiquetados: el ángulo 1 está en N, el 2 en A, el 3 en P y el 4 en C.
- [] Entonces, ángulo 1... solo tengo derecho a un ángulo recto... por definición de perpendicular... pero si quiero los otros, entonces también puedo decirlo... ¿por qué?
- 146 Daniel: Forman par lineal *D-Explo-IdenProp*
- 147 P: Por el teorema que dice que si se forma un ángulo recto, se forman cuatro. [Escribe: 4. $\angle 1$ y $\angle 3$ son rectos. 5. $\angle 2$ y $\angle 4$ son rectos.] Bueno, ahí vamos. ¿Cuál es el objetivo? Mostrar que CN y PA son congruentes... ese es el objetivo [Profesora observa las caras y llama a los estudiantes]... ¿Ignacio? ¿Quieres sugerir algo?... ¿William? *D-Selecc-EncaDedu*
D-Explo-UsConclu
- 148 William: Segmento AC congruente a AC. [Escribe: 6. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$] *D-Explo-IdenProp*
- 149 P: Bueno, podemos decir eso... de pronto nos sirve... ¿Henry?
- 150 Henry: No se... el triángulo BAP es congruente con el triángulo BCN porque tenemos... un ángulo que es el mismo... de los dos... el B... *D-Selecc-EstaRela*
- 151 P: O sea, ¿me faltaría qué paso?
- 152 Henry: Decir que son congruentes los dos triángulos.
- 153 P: ¿Cuáles?
- 154 Henry: BAP y BCN
- 155 P: BAP es congruente con BCN [Escribe: 8. $\triangle BAP \cong \triangle BCN$] Una posibilidad es tratar de demostrar si estos dos triángulos son congruentes. Y entonces usaríamos el ángulo B... es información que podemos añadir. Otra posibilidad es mostrar otra

cosa... Aquí ya nos varamos ¿Qué otra cosa? [muchos murmullos] ΔCN con

156 Germán: ACP

157 P: Y ahí [Tacha lo que había escrito en el paso 8 y escribe: $\Delta ACN \cong \Delta ACP$]... ¿qué información tenemos? [murmillos]

En este episodio por primera vez se hacen intentos para demostrar la conjetura usando el formato a dos columnas. Se aprecian, por una parte, todos los indicadores de acciones de exploración del contenido y los límites de validez de la conjetura, (*D- Explor-RepAnte*), (*D- Explor-IdenProp*), (*D- Explor-UsConclu*) y (*D- Explor-EncadPro*) y por otra, todos los indicadores en relación a la selección y encadenamiento de argumentos teóricos en una cadena deductiva, (*D- Selec-EstaRela*) y (*D- Selec-EncaDedu*). Por ende estos indicadores también aparecen por primera vez en la construcción del teorema. No se tiene éxito en la empresa porque las propuestas llevan a la necesidad de usar el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo que no se tiene a disposición.

A partir de una representación del enunciado de la conjetura y la escritura de los dos primeros pasos de la demostración, que la profesora dibuja y escribe en el tablero, (*D- Explor-RepAnte*) Jaime [133] propone escribir una primera afirmación (*D- Explor-EncadPro*) relacionada con la perpendicularidad de las rectas que contienen las alturas, afirmación que es considerada por Daniel y Melisa [136 y 140] en sus intervenciones para indicar qué rectas son perpendiculares a cuáles. Esto, lo hacen después de que la profesora y Jaime [134-135] aseguran que la definición de altura sí permite afirmarlo (*S- Selec-AsegDedu*) y lleva a la profesora [141] a escribir el tercer paso de la demostración (*D-Selec-EncaDedu*), de acuerdo a lo deducido por Jaime, Daniel y Melisa.

Para orientar a los estudiantes sobre cómo avanzar en la demostración, la profesora [143] los invita a pensar hacía donde van, teniendo presente la conclusión a la que quieren llegar (*Explor-UsConclu*) y mirando qué provecho pueden sacar al paso 3. La sugerencia da frutos pues Antonio [144] tiene la idea de afirmar que los ángulos formados entre las alturas y los lados del triángulo son rectos (*D- Selec-EstaRela*), con lo cual se avanza en nuevos pasos

de la demostración, aprovechando la información complementaria (*D-Explo-IdenProp*) proporcionada por Daniel, [146], al mencionar la existencia de ángulos rectos [145 y 147]. La profesora escribe los nuevos pasos encadenando deductivamente las afirmaciones que se tienen (*D- Selec-EncaDedu*) y pide pensar de nuevo en la conclusión a la que hay que llegar [147] para imaginar nuevos pasos de la demostración (*Explo-UsConclu*). William y Henry identifican (*D-Explo-IdenProp*) y seleccionan propiedades complementarias (*D-Selec-EstaRela*), que apuntan a la congruencia de partes correspondientes de dos triángulos [148, 150, 152 y 154] y parece que llegan al criterio Lado-Ángulo-Ángulo, el cual no han demostrado aún. Debido a esto, la profesora afirma que por esa vía no pueden seguir e intenta que se fijen en otra opción [155 y 157].

La participación de Antonio, Daniel y Henry es relevante (*B-R-Gran*), pues aportan ideas cruciales que son consideradas como pasos de la demostración o posibles estrategias. Antonio [144] menciona que entre las alturas y los lados del triángulo se forman ángulos rectos y con el aporte de Daniel [146] se avanza en la demostración. Henry se apoya en el aporte de William [148] para sugerir que se demuestre la congruencia entre dos triángulos para concluir así la congruencia entre las alturas [150, 152 y 154]. Vale la pena resaltar la dinámica de participación mediante la cual cada estudiante escucha y legitima la opinión de los demás compañeros, para tener en cuenta los demás aportes y pensar en ideas que puedan apoyar el fin común que tienen respecto a encajar deductivamente todos los pasos de la demostración usando únicamente elementos del sistema teórico del curso.

EPISODIO 16: Surge la necesidad de ampliar el sistema teórico.

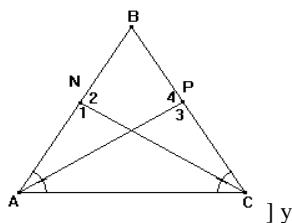
Descripción: A partir de la identificación de los ángulos rectos, los estudiantes continúan lanzando ideas respecto a las posibles estrategias y caminos a seguir para llegar a la conclusión, pero se dan cuenta que necesitan usar otros teoremas aún no incluidos en el sistema teórico para culminar la demostración.

158 Juan: Podemos usar el teorema que [dice que] si dos lados son congruentes, los ángulos opuestos a las alturas son congruentes.

*D- Explo-
IdenProp*

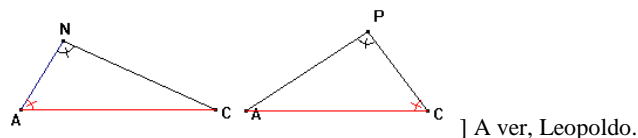
- 159 P: ¡Pero eso es lo que estoy tratando de mostrar! ...
- 160 Juan: No... yo no me refiero a lados congruentes, alturas congruentes. Yo me refiero al teorema del triángulo isósceles.
- 161 P: ¡Ah! Podemos usar el [teorema del] triángulo isósceles. Entonces estás diciendo es que digamos que el ángulo BAC es congruente con BCA... teorema del triángulo isósceles [Borra lo que había escrito en el paso 8 y escribe: $\angle BAC \cong \angle BCA$] Ese es el primer obstáculo que presentaron algunos de ustedes y que ya lo podemos aceptar, entonces... este con este... [Completa la representación:

*D- Selec-
EncaDedu*



- 162 Juan: Ángulo – Lado – Ángulo. [...]
- 164 Juan: Mírelos separados y verá
- 165 P: Los pongo separados. Tenemos, el triángulo NAC con un ángulo recto [ángulo N]... el ángulo [A] este... y este lado [AC]... con el [mismo] [

*D- Explo-
IdenProp*



- 166 Leopoldo: Es una idea.
- 167 P: Una idea.
- 168 Leopoldo: Podemos tomar y nombrar el punto de intersección de las dos alturas.
- 169 P: ¿Y estamos seguros de que se cortan? [Se ríen] Yo puedo, en este caso... darle un nombre. ¿Pero estoy seguro de que se cortan?
- 170 Leopoldo: [Inaudible. Se refiere a que si eso es parecido a que de pronto las alturas no caen en los lados del triángulo]
- 171 P: Es factible. Por eso tengo que tener cuidado y por eso ahí puse recta BC... porque no necesariamente corta en el segmento. Por eso tengo que tener cuidado y no usar cosas de la figura que no pueda yo asegurar que se cumplan sin importar el tipo de triángulo isósceles que miramos. [Germán alza la mano] Germán:
- 172 Germán: Ayer, cuando estábamos pensando cómo hacer esa demostración, pensamos en un teorema que habíamos visto antes, que era el teorema hipotenusa – cateto
- 173 Ignacio: Criterio de congruencia.

*D- Explo-
IdenProp*

- 174 P: ¿Dónde lo vieron?
- 175 Ignacio: El semestre pasado.
- 176 P: ¡Ah ya! Pero en esta clase no. Definitivamente parece que nuestro sistema necesita ampliarse. Que no lo vamos a lograr. Que necesitamos el criterio, dices: hipotenusa – cateto, o criterio lado – ángulo – ángulo, que algunos de ustedes sugieren que usemos. Bueno, nos vemos el jueves para terminar esto. Vamos a ver cómo ampliamos nuestro sistema porque parece que llegamos a un punto en el que parece que no podemos seguir ¿Sí?

En general en este episodio, Juan, Leopoldo y Germán sugieren propiedades complementarias con las cuales avanzar en la demostración (*D- Explo-IdenProp*), pero estas no son fructíferas ya sea porque son incorrectas o llevan a usar teoremas no incluidos en el sistema teórico. En las intervenciones [158 y 160] Juan propone usar el teorema del triángulo isósceles y la profesora formula el paso de demostración correspondiente (*D- Selec-EncaDedu*) de acuerdo a la deducción que Juan intenta comunicar. Luego, Juan [162] sugiere usar de forma equivocada el teorema Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo, que ya tienen en el sistema teórico (*D- Explo-IdenProp*), puesto que él considera que pueden deducir la congruencia de los triángulos con ese criterio. La profesora [165] hace una representación para que se aprecie que la vía propuesta por Juan conduce nuevamente al criterio Lado-Ángulo-Ángulo y descartan la opción.

Leopoldo [168] propone usar el punto de intersección de las alturas (*D- Explo-IdenProp*), pero no completa su idea pues se da cuenta, gracias a la guía de la profesora [169 y 171] de que no pueden garantizar que las alturas se corten. Germán propone usar el criterio hipotenusa-cateto estudiado en un curso anterior [172], lo que lleva a la profesora a referirse a la necesidad de usar como garantías solo elementos incluidos en el sistema teórico en construcción (*S- Selec-AsegDedu*) y deja abierta la necesidad de ampliar el sistema.

La participación de Juan es relevante (*B-R-Gran*) pues, gracias a su intervención [160] se logra incluir el teorema del triángulo isósceles como una de las garantías en los pasos de la demostración. A pesar de que Juan intenta anticipar de manera errónea, el uso de un criterio

de congruencia, su anticipación permite abrir un poco el camino en la ruta de la demostración.

La participación de Germán es genuina (*B-G-Gran*) ya que, a diferencia de Ignacio¹, Germán plantea la posibilidad de usar un teorema que no ha sido incluido en el sistema teórico del curso pero su intervención [172] refleja la consciencia que tiene Germán respecto a ese uso en relación con las normas del curso. Es decir, Germán tiene claro que aún no pueden usar ese criterio y solo lo menciona como un aporte para resaltar la necesidad de que es necesario ampliar el sistema teórico del curso, como efectivamente lo corrobora la profesora [176].

Además, consideramos que la participación de Leopoldo es poco relevante (*P-R-Gran*) en este episodio, debido a que, cuando intenta mencionar propiedades complementarias para darle soporte deductivo a la conclusión, hace referencia a hechos geométricos, en la representación visual de la conjetura, cuyas garantías no se tienen y por ende su aporte no prospera. Sin embargo, gracias a la intervención de Leopoldo la profesora aclara a los demás [171] que no deben usar elementos de la figura que no se puedan garantizar para cualquier tipo de triángulo, sin importar el tipo de representación visual. Luego, este es un ejemplo de cómo en la busca de un fin común, los aportes de cada uno de los miembros de la comunidad son valiosos ya sea para avanzar en la empresa común o para retroalimentar y aprender del error.

ABRIL 19

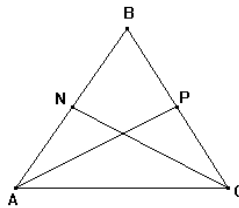
EPISODIO 17: Perfeccionamiento del enunciado de la conjetura.

Descripción: Se realiza una revisión del enunciado de la conjetura para aclarar qué datos corresponden al antecedente y cuáles corresponden al consecuente.

¹ En el episodio 14 Ignacio no tenía claro si podía usar o no el criterio de congruencia Ángulo – Ángulo – Lado y se lo manifiesta a la profesora explícitamente. Ese criterio no hacía parte en el momento del sistema teórico del curso. En cambio, Germán menciona la posibilidad de usar un criterio de congruencia aún no incluido en el sistema, pero percibimos que él tiene claro que no es válido usarlo y por ello solo lo plantea como una posibilidad.

1 P: Bien. Estábamos en el teorema o... conjetura... porque todavía no lo hemos podido demostrar... que dice: si un triángulo es isósceles,... entonces las alturas a los lados congruentes son congruentes. [Escribe: Si un triángulo es isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) entonces las alturas a los lados congruentes son congruentes]

4 P:



]... ¿qué más habíamos puesto? ¡Ah! Que CN y AP son alturas, como dado... Eso es una cosa. ¿Las alturas se supone que están dadas? Aquí, cuando lo escribo así... tenemos un teorema que nos dice que las alturas existen, pero cuando yo escribo este teorema así [como lo escribí en el tablero]... ¿se supone que tengo las alturas dadas?, ¿o no?

*D- Explo-
RepAnte*

5 Orlando: ¿Ahí?

6 P: Sí... ahí.

7 Orlando: Sí. Porque ahí nos dice: y las alturas

*E- Formu-
Revis*

8 Orlando: ¡Ah no!

9 Alguien: Está después del entonces.

10 P: Está después del entonces pero yo no digo: entonces existen las alturas y son congruentes. Yo digo: entonces las alturas son congruentes. [...]

12 P: Lo que no está dado es la congruencia, ¿sí? Entonces... eso sucede a veces. Es decir, si realmente quisiéramos separar con el entonces... toda la hipótesis... deberíamos decir: si un triángulo es isósceles y CN y AP son las alturas a los lados congruentes... entonces, son congruentes. Entonces deberíamos decir así: [Corrige la conjetura que estaba escrita en el tablero borrando trozos y agregando otros. Queda escrito: Si un triángulo es isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) y CN y AP son las alturas a los lados congruentes, entonces son congruentes.]... Yo ya puedo hablar de las alturas porque ya sabemos que existen. Entonces aquí [en el paso dos] sería dado. Y, llegamos a que... eh... nombramos un ángulo recto. [Los estudiantes y la profesora repasan los pasos que habían realizado de la demostración en la sesión anterior hasta el punto en que llegaron a que necesitaban algo más para poder continuar con la demostración, en alusión al criterio Lado-Ángulo-Ángulo]

23 P: Para llegar a ese algo más, fue que les dimos otros problema en el taller 6 ¿Se acuerdan?

[SE INICIA LA DISCUSIÓN Y DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERNO Y DEL CRITERIO LAA]

En este episodio se hace énfasis en la revisión del enunciado de la conjetura C1 que se está demostrando (*E- Formu-Revis*) y la profesora [12] recalca la importancia de incluir en el

antecedente los objetos involucrados en el enunciado, en este caso las alturas, de modo que no sea necesario justificar su existencia en la demostración debido a que ya están dados por la hipótesis de la conjetura.

En las intervenciones [1-4] la profesora recuerda a los estudiantes la representación geométrica que tenían para hacer explícitas las propiedades del antecedente de la conjetura C1 que están intentando demostrar (*D- Explo-RepAnte*) y pregunta a los estudiantes si la existencia de las alturas está dada. Ante esto, Orlando y uno de sus compañeros [5-9], comentan que así como está formulada la conjetura la existencia de las alturas pertenece al consecuente y no estaría dada, lo cual conlleva a una revisión del enunciado de la conjetura (*E- Formu-Revis*).

En las intervenciones [10-12] la profesora retoma las ideas de Orlando y reescribe el enunciado de la conjetura C1 de modo que la existencia de las alturas quede garantizada como dada en la hipótesis. La participación de Orlando en este episodio es autónoma (*P-A-Gran*) en el sentido que su aporte permite evidenciar que la conjetura estaba mal redactada y él se da cuenta de ello por sí mismo. A pesar de que Orlando intentaba responder una pregunta de la profesora, él nota, sin mediación alguna por parte de la docente, que en la redacción inicial de la conjetura las alturas no están dadas y por ende estas harían parte del consecuente de la misma. A partir de la reacción de Orlando [8] la profesora aclara a los demás [10 y 12] que para garantizar la existencia de las alturas como dadas, estas deben hacer parte del antecedente en la escritura de la conjetura.

ABRIL 24

EPISODIO 18: Finalización de la demostración del teorema.

Descripción: Haciendo uso del teorema criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo, previamente introducido en el sistema teórico, se culmina la demostración del teorema y su inclusión en el sistema teórico. La demostración se realiza haciendo explícitas las relaciones lógicas entre enunciados para generar la cadena deductiva, mas no se escribe de

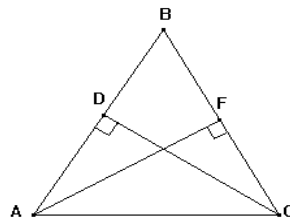
manera formal organizada en un texto a dos columnas. Dicha organización la realizan los estudiantes en sus cuadernos.

- 1 P: Bien, entonces... eh... ¿por qué estábamos hablando de este teorema? [El Teorema del ángulo externo] Porque recuerden que todavía tenemos una tarea inconclusa. Estábamos tratando de demostrar un hecho que descubrimos hace como dos semanas, yo creo. Que si el triángulo es isósceles, las alturas a sus lados congruentes son congruentes. Pero todos llegamos a un punto en que queríamos echarle mano a cosas que no podíamos. Entonces, ¿cómo lo vamos a resolver? Dada la dinámica nuestra que es trabajar en un sistema axiomático que hemos venido construyendo. ¡Claro! Nosotros... muchos sabemos que hay muchos hechos geométricos que nos han dicho toda la vida que son verdaderos, pero que no los podemos usar porque todavía nosotros no hemos podido demostrarlos. Y la otra idea que es... ¿tengo que introducir un concepto nuevo? O puedo demostrar los teoremas con los conceptos que tenemos hasta ahora. Eso es lo que he estado haciendo... es como frenando a algunos que quieren hablar ya de otros conceptos que no quiero todavía abordar. Bien, Pero este teorema del ángulo externo... nos va a permitir demostrar el criterio de congruencia que quieren usar algunos de ustedes que es ¿cuál?... lado – ángulo – ángulo. Razón por la cual me sacan del sombrero un teorema que no quiero ni mencionar ¿Sí? [Risas] Porque no lo podemos usar. Pero, ya tenemos todo lo que necesitamos.

*S- Selec-
AsegDedu*

[...]DEMOSTRACIÓN CRITERIO DE CONGRUENCIA L-A-A

- 123 P: O sea que criterio lado – ángulo – ángulo es criterio de congruencia de triángulos. Entonces, mi pregunta es si ahora podemos continuar y terminar con la demostración [del teorema que dice que si un triángulo es isósceles, las alturas a los lados congruentes son congruentes. La profesora ya había hecho la representación como esta, antes de la intervención de Orlando:



] [Orlando alza la mano] ¿De este?

- 124 Orlando: Sí.
- 125 P: ¿Cuál es?
- 126 Orlando: Sabemos que [Orlando pasa al tablero] [...]
- 128 Orlando: [Los lados] AB y BC son congruentes.
- 129 P: [Los lados] AB y BC son congruentes, sí.
- 130 Orlando: Entonces ya tenemos que este ángulo [BFA] es congruente con este [BDC], y que este ángulo [DBC o FBA] es congruente consigo mismo. Entonces ya tenemos

*D- Selec-
EstaRela*

- 133 Melisa: [...] FBA [Orlando escribe en el tablero: $\Delta BDC \cong \Delta BFA$]
- 134 Orlando: Los dos triángulos son congruentes, entonces tenemos ángulo – ángulo – lado. Entonces partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. [Luego los segmentos FA y DC son congruentes]
- 135 P: Entonces si es isósceles... las alturas [FA y DC] son congruentes.

Una vez asegurada la deducibilidad (*S- Selec-AsegDedu*) de las afirmaciones que llevan a demostrar el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo [1-123], necesario para culminar la demostración de la conjetura C1, Orlando anticipa cómo va a quedar la cadena deductiva (*D- Selec-EstaRela*) señalando las afirmaciones principales con sus respectivas garantías [126, 128, 130, 134].

En este episodio se da por concluida la demostración de la conjetura C1 y su inclusión en el sistema teórico. Queda así construido el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes. La demostración se finaliza a manera de anticipación de la cadena deductiva, debido a que los estudiantes ya tenían claro que aceptando el uso del criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo en la demostración, el problema quedaba resuelto. Sin embargo, aunque en el episodio no se realiza la escritura de la demostración en el formato a dos columnas (*D- Selec-EncaDedu*), esta es una tarea que los estudiantes realizan posteriormente en sus cuadernos.

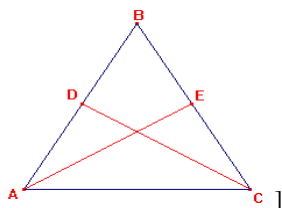
La participación de Orlando es relevante (*B-R-Gran*) debido a que es él quien se encarga de articular y establecer las relaciones lógicas entre las afirmaciones de modo que los pasos generales de la demostración de la conjetura quedan desglosados deductivamente. Este esbozo general de la demostración es la estructura central que los estudiantes presentan posteriormente en la demostración formal con el formato a dos columnas donde cada paso tiene su correspondiente justificación. Orlando sintetiza y hace uso de los teoremas incluidos previamente en el sistema teórico del curso. Así, él contribuye para que el fin común de la comunidad de práctica quede finalizado y el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes sea incluido en el sistema.

EPISODIO 19: Restricción del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes.

Descripción: Darío hace una aclaración respecto a los triángulos isósceles y la posibilidad de que las alturas correspondientes a los lados iguales intersequen dichos lados. Debido a este hallazgo, se dan cuenta que la demostración que hicieron del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes es válida solo para el caso de los triángulos isósceles acutángulos.

- 1 Darío: Profe una pregunta.
- 2 P: ... [Darío alza la mano] ¿Darío?
- 3 Darío: ... ¿Cómo podemos asegurar que la altura corta con el lado? [Se refiere al caso de un triángulo isósceles y sus alturas]
- 4 P: ... ¿Cómo sabemos que el punto D, que creo que lo usamos... está entre B y A?... Ese era el pequeño problema... muy bien Darío. Entonces, ¿cómo analizamos? ...]

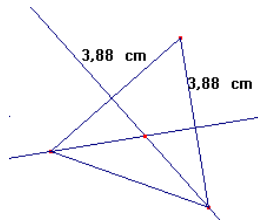
*D- Explo-
IdenProp*



[Discuten respecto a las posibles intersecciones que podrían darse con los puntos A, D y B en la representación de un triángulo isósceles y sus alturas como se muestra en la figura. Hacen una demostración de que en un triángulo isósceles las alturas a los lados congruentes cortan a los lados. Sin embargo, Darío tiene un no ejemplo.]

- 59 P: Bien, Darío [Le hace gestos para que pase al tablero] Darío... me tenía un comentario, que vamos a pedirle que se lo haga a toda la clase, para que determinemos las consecuencias de lo que Darío nos va a decir.
- 60 Darío: [Darío pasa al tablero, conecta su calculadora al view – screen, en donde se ve una figura como la siguiente:

*D- Explo-
RepAnte*



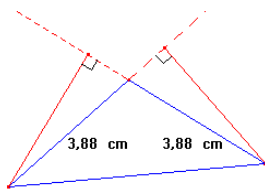
] Es que pues... habíamos dicho que... que había un teorema... para... demostrar esta congruencia entre las alturas. Entre las alturas.

- 61 P: ¿En un triángulo?
- 62 Darío: En un triángulo isósceles, las alturas correspondientes a los ángulos de los lados congruentes, eh... eh... cortan al lado opuesto, en el triángulo isósceles.
- 63 P: En el segmento.
- 64 Darío: En el segmento. Entonces, pues... a mí me había quedado la duda, porque yo había visto un triángulo que era isósceles, pero que no cortaba precisamente a... al segmento. Entonces, empecé a hacerlo y entonces, sí, encontré uno que... pues cuando este ángulo era... era mayor. Entonces, pues, las alturas cortaban en
- 65 P: ¿Ese ángulo era qué? Eso es importante saberlo
- 66 Darío: Obtuso
- 67 P: Entonces... ¿es cuando es obtuso que sucede eso?
- 68 Darío: Es mayor que 90 el ángulo que forman los lados [congruentes]
- 69 P: ... Entonces, esa es una de las alturas. [delinea con rojo la proyección en el tablero] Este es el ángulo recto, y esta es la otra. Y el triángulo original, isósceles, es este [lo resalta con azul]. O sea que esta es la prolongación de un lado y esta es la prolongación del otro lado. [lo sobresalta con rojo, punteado]

*D- Explo-
IdenProp*

*D- Explo-
IdenProp*

*D- Explo-
RepAnte*



] Entonces, consecuencia... ¿qué sucede? ¿En qué nos afecta lo que acaba de decir Darío?

- 70 Daniel: Toca modificar el teorema.
- 71 P: Toca modificar el teorema.
- 72 Daniel: Con algunas condiciones. [...]
- 92 P: ¿Y cómo fue el proceso para la demostración de eso?
- 93 Orlando: Por triángulos congruentes.

*D- Explo-
IdenProp*

[Repasan los pasos de la demostración del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes, y verifican que en uno de los pasos la justificación es diferente debido a que las alturas pueden caer dentro o fuera de los lados congruentes del triángulo. Debido a esto el teorema es restringido para el caso de triángulos acutángulos y lo reescriben de la siguiente forma: Si un triángulo ABC es isósceles acutángulo con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y \overline{CD} y \overline{AE} son las alturas a los lados congruentes, entonces esas alturas son congruentes]

Este episodio se centra en el análisis del contenido y los límites de validez de la demostración del teorema respecto al triángulo isósceles y sus alturas congruentes. Aparecen los indicadores *D- Explor-IdenProp* y *D- Explor-RepAnte* debido a que Darío encuentra un no ejemplo para la condición de que en todo triángulo isósceles las alturas cortan a los lados del triángulo. Repasan la demostración del teorema y debido a que una de las justificaciones depende de asumir esa condición como cierta, restringen el teorema para el caso de triángulos isósceles acutángulos.

Darío [3] manifiesta su inquietud respecto a cómo garantizar que en un triángulo isósceles siempre las alturas cortan a los lados (*D- Explor-IdenProp*) y esto lleva a una discusión en gran grupo en la que se concluye que en todo triángulo isósceles las alturas siempre cortan a los lados. Sin embargo, Darío encuentra un no ejemplo [59-60] y pasa al tablero para mostrar una construcción en la que están representadas las condiciones del antecedente del teorema (*D- Explor-RepAnte*) y luego a través del arrastre le muestra al grupo el caso en que en un triángulo isósceles las alturas no intersecan a los lados iguales [69].

En las intervenciones [64-68] Darío describe como su duda respecto a la condición de que las alturas siempre cortaran a los lados lo llevó a pensar en propiedades complementarias como el hecho de que si el ángulo que forman los lados congruentes en un triángulo isósceles es obtuso, entonces las alturas tienen puntos en el exterior del triángulo. (*D- Explor-IdenProp*).

La profesora [69] pregunta qué consecuencias tiene este hecho para demostración del teorema y Daniel [70-72] afirma que hay que modificar el teorema con ciertas condiciones, puesto que el no ejemplo hace que el soporte deductivo de la conclusión varíe (*D- Explor-*

IdenProp). Finalmente, entre todos restringen el teorema para el caso de triángulos acutángulos.

La participación de Darío es relevante (*B-R-Gran*) y autónoma (*B-A-Gran*), puesto que el estudiante por su propia cuenta buscó un caso en que no se cumpliera la condición asumida como cierta por el grupo, respecto a los triángulos isósceles y el caso en que las alturas intersequen los lados iguales. Al encontrar un no ejemplo y mostrarlo en la clase, este permitió evidenciar que en la demostración realizada para el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes no se había tenido en cuenta la situación en que las alturas tuvieran puntos en el exterior del triángulo y por ello el teorema se restringió a solo triángulos acutángulos.

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

En este capítulo presentamos una discusión de los resultados del análisis llevado a cabo en este estudio. Para la organización de esta, hacemos uso de algunas tablas de frecuencia y de gráficos de representación para la interpretación de la información obtenida.

Exponemos dos secciones de discusión de resultados. En la primera parte, hacemos alusión a la participación general de los estudiantes respecto a cada componente¹ del teorema. Para esto tenemos en cuenta la variedad en la participación de los estudiantes a lo largo de la reconstrucción del teorema; nos centramos en la participación de los estudiantes en los asuntos que se trabajaron en cada componente del teorema y en cada episodio. Detallamos la cantidad de códigos correspondientes a las categorías de análisis que aparecen en los episodios según las acciones de participación de los estudiantes y analizamos qué tipo de acciones por parte de los estudiantes son las más representativas respecto a cada componente del teorema². En la segunda parte, detallamos la participación de cada estudiante según sus acciones decodificadas de acuerdo al tipo de participación. Intentamos establecer algunos perfiles de participación, comparando y contrastando los resultados de aquellos estudiantes que sobresalen en el conteo de códigos respecto a los tipos de acciones de participación y frente a la calidad con la que efectúan tales participaciones.

5.1. PARTICIPACIÓN GENERAL DE LOS ESTUDIANTES SEGÚN LOS COMPONENTES DEL TEOREMA

5.1.1. Variedad en la participación de los estudiantes en la construcción del teorema

Al hacer un zoom hacia afuera, haciendo uso del procesador de texto Word, en los fragmentos de participación de los estudiantes en la reconstrucción del teorema Triángulo

¹ Como lo mencionamos en el marco teórico, entendemos el teorema desde la perspectiva de Mariotti et al. (1997) y nos fijamos en los siguientes componentes de un teorema: Enunciado, Demostración y Sistema Teórico.

² Por dificultades de espacio, este tipo de acciones representativas se presentan en el Anexo 5.

isósceles –alturas congruentes en los 19 episodios analizados se obtiene la siguiente imagen (Figura 3). En ella no nos interesa mostrar el contenido sino los colores que sobresalen. Como se mencionó en el capítulo de metodología, cada color tiene que ver con las acciones de participación de los estudiantes en un componente del teorema de la siguiente forma: amarillo para enunciado, verde para demostración y azul para sistema teórico.

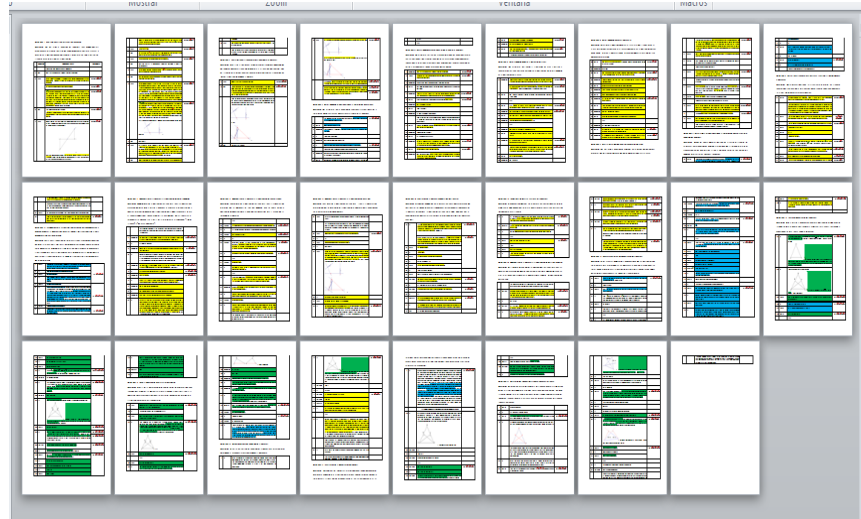


Figura 3.

En esta vista global se evidencia que no hay total linealidad en la participación de los estudiantes relacionada con cada componente del teorema. No hay un estricto orden y, como se aprecia en la figura 3, el color azul aparece distribuido a lo largo de los episodios, a veces después del color amarillo y otras veces después del color verde. Esto significa que los estudiantes pueden participar con acciones relacionadas con el sistema teórico en cualquier momento, sin distinguir que estén trabajando en el enunciado o en la demostración del teorema. El color amarillo también aparece en algunas partes después del color azul y en otras partes después del color verde. Por ende, vemos que no necesariamente los estudiantes participan en un orden específico respecto a los tres componentes del teorema, sino que los asuntos relacionados con cada componente surgen en diferentes momentos de la interacción.

Igualmente, resaltamos la variedad de la participación de los estudiantes entre estos tres componentes. De hecho, tal variedad nos muestra que los estudiantes actúan bajo un

sistema de reglas compartido que les brinda unas condiciones de igualdad como miembros de la comunidad de práctica y les otorga la libertad de “poder optar, preferir, elegir... [y] no tener una senda previamente marcada” (Ortiz & Perafán, 2004). Además, la aparición dispersa del color azul a lo largo de los episodios refleja que dentro de las condiciones de la comunidad de práctica, está la posibilidad de intervenir en cualquier momento para señalar asuntos, relacionados con el sistema teórico, necesarios para desarrollar la actividad demostrativa respetando las normas establecidas en el curso.

5.1.2. Participación de los estudiantes por episodio y por componente del teorema

En la siguiente tabla sintetizamos el zoom global de la figura 3 resaltando únicamente el o los componentes del teorema en los que participaron los estudiantes en cada episodio. Así, se tiene una correspondencia entre el orden de aparición de colores en todos los episodios a través de la figura 3 y de la tabla 1.

Episodio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Componente	Yellow	Yellow	Blue	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Blue	Yellow	Blue	Yellow	Yellow	Yellow	Blue	Green	Green	Green	Blue	Green
														Yellow	Blue	Blue	Yellow	Green	

Tabla 1.

La tabla 1 nos permite apreciar que en los episodios, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12 y 13 los estudiantes únicamente participaron con acciones relacionadas con el enunciado. En los episodios 3, 8 y 10 la participación fue en relación al sistema teórico exclusivamente y en el episodio 19 la participación se centró solo en la demostración. Sin embargo, en los demás episodios los estudiantes participaron con acciones ubicadas en más de un componente. Por ejemplo, en el episodio 14 los estudiantes participaron mediante acciones relacionadas tanto con el enunciado como con el sistema teórico. Luego, como se mencionó previamente, no hay una linealidad en las acciones de participación de los estudiantes, respecto a los tres componentes, a lo largo de la reconstrucción del teorema. No obstante, mediante la tabla 1 se pueden ver algunas condiciones que detallamos a continuación.

En primer lugar, es importante que los estudiantes realicen un trabajo inicial principalmente relacionado con el enunciado, antes de comenzar a construir la demostración del teorema. Tanto en la tabla 1 como en la figura 3 se puede detallar que, en términos generales, la mayoría de acciones de participación de los estudiantes en un principio tienden a centrarse en el enunciado y en la parte final tienden a agruparse en torno a las acciones de demostración. Esto hace hincapié en la importancia de que los estudiantes primero exploren propiedades y relaciones geométricas, sin que ello implique que no puedan participar en otras acciones, para que así puedan tener un convencimiento personal respecto a sus hallazgos, planteen conjeturas y después busquen una justificación por convicción propia (Perry, et al., 2012a). Esta convicción es relevante para la toma de conciencia de cada estudiante respecto a su papel en la comunidad de práctica y en relación a ser autónomos, entendiendo esta autonomía como hacer lo que se debe hacer por convicción y no por obligación (Ortiz & Perafán, 2004).

En segundo lugar, como las acciones de participación de los estudiantes en el enunciado y en la demostración están permeadas a lo largo de la reconstrucción del teorema, por acciones participativas referentes al sistema teórico, se tiene una coherencia entre el trabajo realizado por los estudiantes y los procesos de conjeturación y justificación desarrollados en la actividad demostrativa, según la propuesta del grupo $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$. Luego, es factible “promover la comprensión del contenido matemático implicado tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones y [...] apuntar a la validación de dichos enunciados, en el marco de un sistema teórico en construcción” (Perry, et al., 2012a, p. 132).

Por último, la tabla 1 permite apreciar la diversidad de combinaciones posibles, de acciones de participación de los estudiantes en dos componentes, en un mismo episodio. Por ejemplo, en el episodio 14 los estudiantes participan en relación al enunciado y al sistema teórico, en los episodios 15 y 16 participan en acciones que tienen que ver con la demostración y con el sistema teórico, y en el episodio 17 participan en la demostración y en el enunciado. Llama la atención que no hay un episodio en el que los estudiantes

participen en los tres componentes del teorema. Creemos que esto se debe a “la complejidad inherente al aprendizaje de la demostración [...] [Esta] complejidad incluye aspectos como la comprensión de la dependencia entre propiedades, del formato usual en el que se formulan los teoremas (implicación), del proceso deductivo necesario para construir demostraciones” (Perry, et al., 2012a, p. 130).

5.1.3 Frecuencias de participación de los estudiantes por componente del teorema

En la siguiente tabla representamos las frecuencias de los códigos de participación de cada componente del teorema, en todos los episodios, contabilizando los códigos referentes a un tipo de acción de participación del mismo componente. Por ejemplo, en el episodio 1 los estudiantes únicamente tuvieron acciones de participación en el enunciado y en el análisis que desarrollamos en ese episodio aparecieron 11 códigos de esa categoría.

Episodio \ Componente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Enunciado	11	6	0	9	6	6	6	0	8	0	5	3	5	1	0	0	1	0	0
Demostración	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	4	1	1	6
Sistema Teórico	0	0	2	0	0	0	0	2	0	3	0	0	0	5	1	1	0	1	0

Tabla 2.

Al tener en cuenta las frecuencias de códigos con los que los estudiantes participaron en un determinado episodio, podemos identificar en qué componente hubo mayor participación de los estudiantes. Por ejemplo, en el episodio 18 los estudiantes participaron de igual manera con acciones relacionadas a la demostración y al sistema teórico del teorema, con 1 código respectivamente en cada componente. Pero en el episodio 15 los estudiantes participaron en una mayor proporción con acciones relacionadas con la demostración (11 códigos) y en una menor parte con acciones respecto al sistema teórico (1 código).

La gráfica que detallamos a continuación, (Figura 4), se basa en la anterior tabla de frecuencias (tabla 2). Mediante esta gráfica realizamos algunas inferencias respecto a la proporción de participación de los estudiantes por componente en cada episodio.

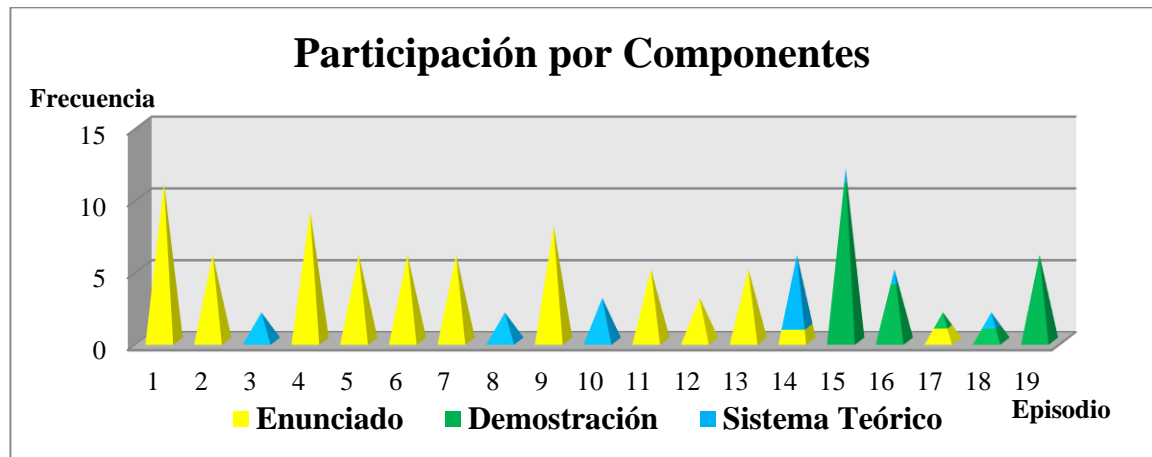


Figura 4.

En los primeros 13 episodios la participación de los estudiantes es preponderante en el enunciado del teorema. Exceptuando los episodios 3, 8 y 10, en estos 13 episodios las acciones de los estudiantes se centran exclusivamente en interpretar el enunciado, realizar exploraciones con Cabri, identificar regularidades claves y posibles argumentos para la plausibilidad de la conjetura, y realizar una formulación adecuada del enunciado de la conjetura que van a demostrar. Esta primera sección se corresponde con el proceso inmerso en la actividad demostrativa que tiene como fin “llegar a establecer conjeturas de las que se tiene un alto grado de seguridad y que, por tanto son candidatas a entrar en un proceso de justificación que las valide dentro del sistema [teórico]” (Perry, et al., 2012a, p. 132).

En el episodio 14 se realiza el primer intento de demostrar la conjetura y para ello los estudiantes indagan respecto a qué necesitan del sistema teórico para inferir un resultado que es clave en la demostración¹. Por ello, tiene sentido que la mayor parte del episodio 14 tenga acciones de participación referentes al sistema teórico. En los episodios 15 y 16, el énfasis de las acciones de participación de los estudiantes se da en la demostración, puesto que en el episodio 14 ya habían determinado los elementos que hacían falta en el sistema teórico para poder continuar con los pasos de la demostración. En el episodio 17 se hace un

¹ En el episodio 14 los estudiantes necesitan hacer uso del teorema del Triángulo isósceles, el cual aún no había sido incluido en el sistema teórico del curso, para continuar con los pasos de la demostración.

perfeccionamiento del enunciado de la conjetura, en función de que los estudiantes tengan claro, para la demostración, qué está dado por el antecedente y qué hechos geométricos hacen parte del consecuente. Así en los episodios 18 y 19 se finalizan los pasos de demostración de la conjetura y esta es incluida como teorema en el sistema teórico. Esta segunda sección se corresponde con el proceso de la actividad demostrativa cuya meta es “producir un discurso argumentativo de carácter deductivo que valide la conjetura dentro del sistema [teórico] [...] en el que se está trabajando” (Perry, et al., 2012a, p. 132).

5.2. PERFILES DE PARTICIPACIÓN

5.2.1. Tipo de acciones de participación por estudiante en el trabajo por parejas

En la siguiente tabla presentamos el conteo de códigos por estudiante durante los primeros 9 episodios de la reconstrucción del teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes.

	Juan	Ana	Darío	Leopoldo	María	Efraín
<i>E-Inter-IdenObj</i>	1	0	3	4	1	1
<i>E-Inter-AludProp</i>	2	0	1	3	1	0
<i>E-Inter-RepDado</i>	5	3	1	1	3	2
<i>E-Inter-FormEst</i>	3	1	1	1	2	0
<i>E-Inter-AntiSol</i>	1	0	3	1	1	1
<i>E-Explo-HerrEval</i>	0	1	1	1	1	0
<i>E-Explo-HerrIden</i>	1	1	2	2	0	0
<i>E-Explo-HerrRela</i>	0	0	1	1	0	0
<i>E-IdentReg-Det</i>	1	1	0	0	0	0
<i>E-IdentReg-Rela</i>	0	0	0	0	1	0
<i>E-IdentArg-PropComp</i>	0	0	0	0	1	0
<i>E- Formu-Enun</i>	1	1	1	0	1	1
<i>S- Selec-IdenPart</i>	0	0	1	1	0	2

Tabla 4.

Debido a que en esta primera fase de trabajo en el teorema, los estudiantes debían plantear, por parejas, una conjetura a partir del problema presentado, en la tabla 4 no aparecen códigos relativos a la demostración, pues los estudiantes aún no estaban pensando en demostrar la conjetura. Igualmente, los códigos *E- Formu-AnteCons*, *E- Formu-Concor* y *E- Formu-Revis*, tampoco aparecen en los primeros 9 episodios.

Para interpretar los resultados que nos arrojan estas frecuencias de la tabla 4, hacemos uso del siguiente diagrama radial, en el cual representamos la frecuencia con que cada estudiante intervino código por código en el trabajo en parejas.

Participación en el trabajo en parejas

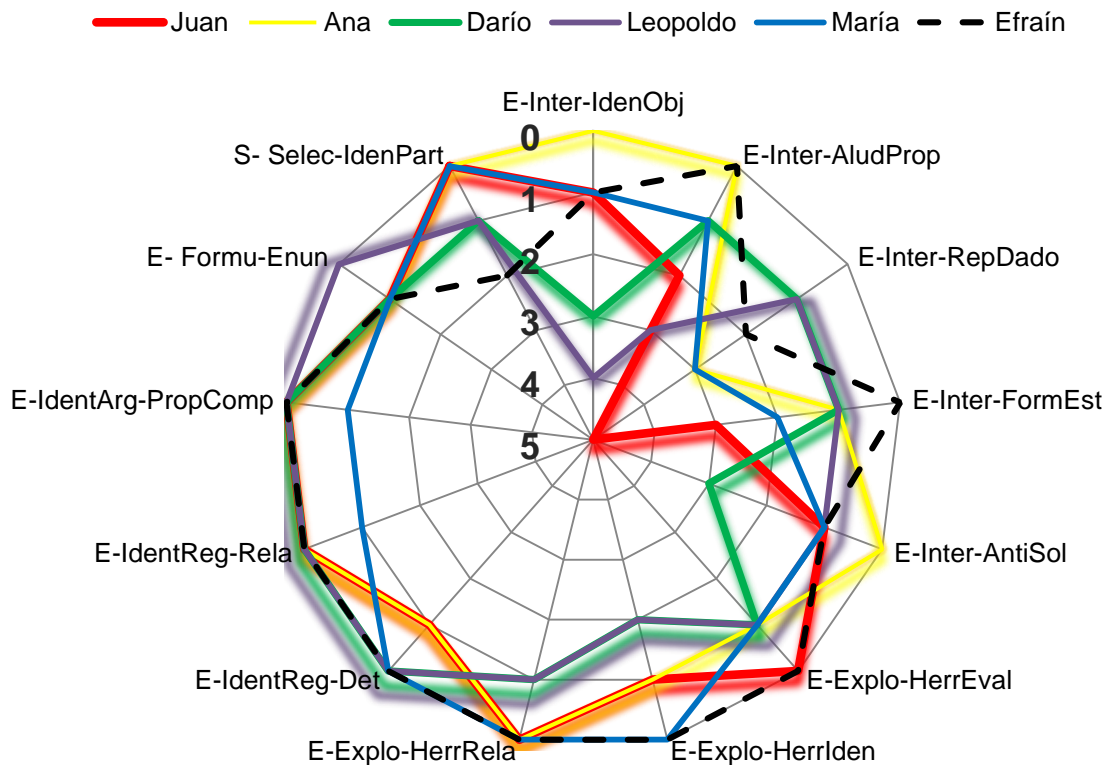


Figura 5.

La escala de frecuencias la presentamos invertida en el diagrama, para poder diferenciar mejor el comportamiento de cada estudiante respecto a los códigos que muestran sus acciones de participación en la reconstrucción del teorema. Es así que a cada estudiante le corresponde un polígono con su correspondiente color como aparece en la figura 5. Cada uno de los vértices del polígono se encuentra relacionado con uno de los códigos alrededor del diagrama. Si el vértice está en el borde quiere decir que el estudiante no participó con ese indicador y entre más se acerque el vértice al centro de la figura, más alta fue la

frecuencia del código hasta llegar al 5 en el centro, el cual fue la frecuencia más alta registrada en esta sección. A continuación describimos el perfil de cada estudiante.

Respecto a Juan vemos que sobresale en las acciones de representación de los objetos geométricos dados y en la formulación de estrategias de resolución. Es un estudiante que centra su atención de una forma muy detallada en la interpretación del enunciado y a partir de este, imagina un plan de resolución tal y como lo hizo en los dos primeros episodios de la reconstrucción del teorema. Juan es hábil para buscar relaciones entre objetos geométricos a partir de la alusión a propiedades complementarias.

Ana es una estudiante que tiene un perfil bajo en cuanto a la cantidad de intervenciones relacionadas con los tipos de acciones de participación descritos en este trabajo. Consideramos que ello se debe, quizás, al rol de liderazgo que asumió Juan en el trabajo con ella y que probablemente repercutió en que la posición de Ana fuera más pasiva y se limitara a seguir las instrucciones de Juan.

Darío es un estudiante que se destaca por su capacidad para identificar los objetos geométricos involucrados en el enunciado y a partir de estos, anticipar posibles soluciones al problema. Destacamos que sus conocimientos le permiten ser muy ágil y rápido a la hora de pensar en una respuesta al problema y confirmar o descartar sus planteamientos de una manera eficaz. También se preocupa porque los elementos que hagan parte del enunciado tengan sentido en cuanto a su pertenencia al sistema teórico del curso.

Leopoldo sobresale por su capacidad para identificar los objetos geométricos involucrados en el enunciado y aludir a las propiedades de estos. Es un estudiante cuidadoso en los detalles de las construcciones geométricas realizadas, de modo que él mismo pueda estar seguro y convencido de las propiedades que identifica en tales construcciones con la ayuda de su compañero. En caso de tener dudas respecto a la inclusión de algún objeto geométrico en el sistema teórico del curso, lo pone de manifiesto y también intenta sacar el mayor provecho de la geometría dinámica para identificar nuevas propiedades a partir de las herramientas que ofrece el software.

María se destaca sobre los demás estudiantes, en el trabajo por parejas, en que logra identificar propiedades complementarias en la representación que hizo, en Cabri, para darle soporte a su descubrimiento e identifica relaciones claves entre invariantes. Consideramos que, en parte, esto se debe al estudio de casos que realizaron con su compañero en la exploración del problema y en las construcciones que hicieron. Al tener diferentes tipos de triángulos y comparar lo que sucedía en cada caso, respecto a las alturas, María evidencia que es una estudiante rigurosa y sistemática al momento de representar objetos geométricos, aludir a las propiedades de estos, formular estrategias de resolución e identificar posibles invariantes y relaciones entre tales invariantes.

Finalmente, en cuanto a Efraín, vemos que es un estudiante muy comprometido con respetar las normas del curso. Sobresale en la identificación de elementos del sistema que deben hacer parte para que tanto el enunciado como la construcción tengan sentido. En la construcción que realizaron con su compañera Efraín se cuestionó sobre la posibilidad de construir una recta perpendicular a otra por un punto externo debido a que no tenían un teorema que garantizara tal construcción. Así mismo, Efraín cuestionó si debían proseguir con la construcción a pesar de no tener el teorema que necesitaban, lo cual llevó a que la profesora les comentara a los estudiantes que podían validar ese teorema¹ temporalmente mientras más adelante lo incluían en el sistema teórico.

5.2.2. Valoración de la participación de los estudiantes en el trabajo por parejas

A continuación se relaciona la calidad de la participación de cada estudiante y se resume, de manera general, cómo se desarrolló esa participación a lo largo de los primeros nueve episodios. Si las intervenciones de un estudiante no reflejan las características de los indicadores del grado de participación por parejas, la casilla correspondiente aparece vacía. Si el grado de participación es *poco* aparece + y si es *bastante* aparece ++.²

¹ En ese momento del curso no se había incluido el teorema de la existencia de la recta perpendicular por un punto externo, el cual les permitía a los estudiantes justificar la construcción de una altura de un triángulo.

² Por dificultades de espacio, la valoración de la participación de los estudiantes en gran grupo se presenta en el Anexo 4.

	VALORACIÓN DE LA PARTICIPACIÓN			
ESTUDIANTE	Original	Autónoma con relación a su par	Genuina	Relevante
Juan	++	++		++
Ana				+
Darío		++	++	++
Leopoldo			++	++
Efraín			++	++
María		++		++

Tabla 5.

Consideramos que la participación de Juan es autónoma y original, ya que su propuesta de empezar la construcción por las alturas congruentes para luego armar el triángulo es una forma creativa de estudiar el problema y sobresale en comparación a las propuestas de los demás grupos. También es relevante, ya que sus aportes permiten llegar al planteamiento de la conjetura final que formula este grupo. En contraste, la participación de Ana es poco relevante, pues ella se limita a seguir las ideas de Juan y eventualmente cuestiona algunos puntos de la construcción que Juan propone. En general, Juan asume la postura de líder y guía a Ana en el desarrollo del trabajo de construcción y exploración.

La participación de Darío y Leopoldo es genuina, puesto que ambos se cuestionan por un elemento que aún no ha sido incluido en el sistema teórico y ello refleja su interés y conciencia de la tarea que van a llevar a cabo, en función de utilizar únicamente elementos validados por la comunidad de clase. También es relevante en el sentido que ambos aportan ideas para la formulación de la conjetura, a pesar de que cada uno estaba razonando de manera distinta respecto a la concepción del antecedente y el consecuente de la conjetura que plantearon. En algunos pasajes del trabajo de este grupo Darío asume el rol de líder, ya que guía a Leopoldo en la construcción de las alturas de un triángulo, e intenta tomar la iniciativa respecto a la actividad de exploración y respecto a la anticipación de posibles soluciones al problema. En ese sentido, la participación de Darío es autónoma.

La participación de Efraín es genuina, ya que sus intervenciones reflejan la apropiación y conciencia que tiene acerca de respetar las reglas del curso y de justificar cada resultado con elementos que hagan parte del sistema teórico construido colectivamente. María tiende a ser la líder en este grupo y su participación es autónoma en ese sentido. Ella toma la iniciativa en algunos pasajes del trabajo desarrollado por ambos estudiantes. Sin embargo, Efraín también complementa y apoya con sus aportes los avances que realizan en las construcciones ambos estudiantes para dar solución al problema. Por ello, consideramos que la participación de María y Efraín es relevante. Como se señaló en el análisis, este trabajo en grupo es más equilibrado en comparación con los roles más dominantes que toman Darío y Juan frente a Leopoldo y Ana, respectivamente.

5.2.3. Tipo de acciones de participación por estudiante en el trabajo en gran grupo

En la siguiente tabla presentamos el conteo de códigos por estudiante durante los episodios 10 al 19, correspondientes al trabajo en gran grupo, de la reconstrucción del teorema.

	María	Leopoldo	Ignacio	Juan	Orlando	Germán	Daniel	Henry	Darío
<i>E-Inter-RepDado</i>	0	0	0	1	0	0	0	0	0
<i>E-Explo-HerrIden</i>	0	2	0	1	0	0	0	0	0
<i>E-Formu-Enun</i>	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<i>E-Formu-AnteCons</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0
<i>E-Formu-Concor</i>	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<i>E-Formu-Revis</i>	1	0	0	0	3	1	0	0	0
<i>D-Explo-RepAnte</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>D-Explo-IdenProp</i>	0	1	0	2	0	1	2	0	3
<i>D-Explo-EncadPro</i>	0	0	0	0	0	0	1	0	0
<i>D-Selec-EstaRela:</i>	0	0	0	0	1	1	0	1	0
<i>S-Selec-IdenPart</i>	2	0	0	0	0	0	0	1	0
<i>S-Selec-AsegDedu</i>	0	0	2	0	0	0	3	0	0

Tabla 6.

En esta fase de trabajo sobre el teorema, los estudiantes discuten las conjeturas a las que llegaron mediante el trabajo por parejas y, a través de los aportes que se van dando en la discusión en gran grupo, construyen los pasos de la demostración de la conjetura y el teorema es incluido en el sistema teórico del curso. El énfasis en estos episodios está en la

demostración de la conjetura y por eso la mayoría de códigos son relativos a este componente. Los seis códigos relacionados con el enunciado, son producto del esfuerzo de estudiantes y profesora por formular el enunciado de la conjetura de una manera adecuada para su demostración, diferenciando de forma clara el antecedente y el consecuente.

Respecto a la interpretación del enunciado únicamente aparece un código debido a que Juan mostró a sus compañeros en el tablero la propuesta que llevó a cabo con Ana para explorar el problema, mediante una representación de su idea en el tablero (*E-Inter-RepDado*). De manera similar, el código *E-Explo-HerrIden* aparece debido a que, en la socialización de sus conjeturas, algunos estudiantes comunicaban a los demás el uso que hicieron de las herramientas en Cabri para identificar nuevas propiedades. Para interpretar los resultados que nos arrojan las frecuencias de la tabla 6, hacemos uso del siguiente diagrama radial, en el cual representamos la frecuencia con que cada estudiante intervino código por código en el trabajo en gran grupo.

Participación en el trabajo en gran grupo

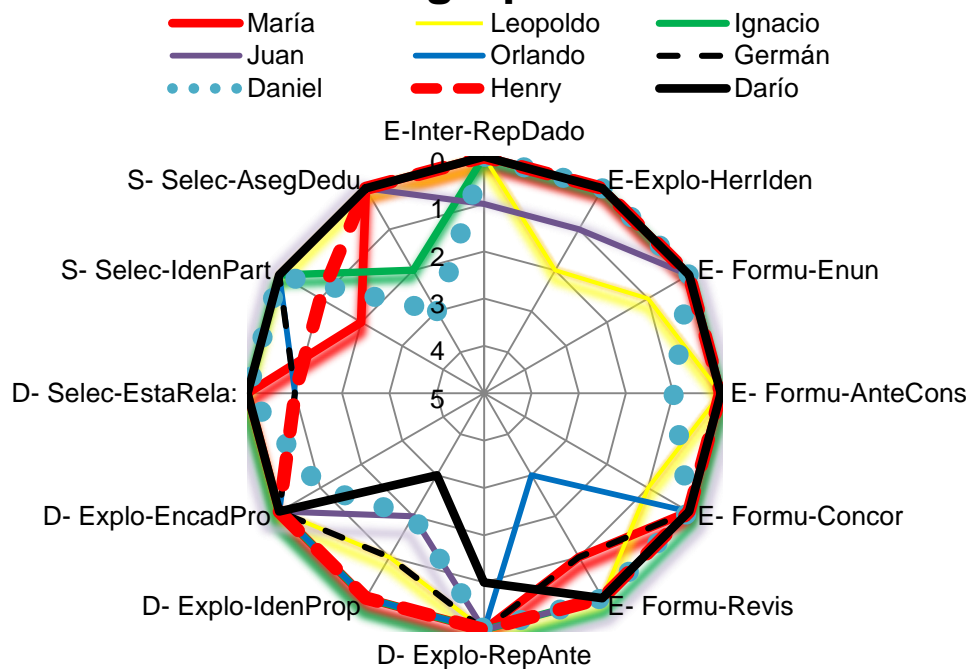


Figura 6.

De manera análoga a la figura 5, en la figura 6 presentamos la escala de frecuencias invertida en el diagrama, para poder diferenciar mejor el comportamiento de cada estudiante respecto a los códigos que dan cuenta de sus acciones de participación en la reconstrucción del teorema. A cada estudiante le corresponde un polígono con su correspondiente color y tipo de línea como se aprecia en la figura 6. Del total de 15 estudiantes que intervienen en el trabajo en gran grupo, solo incluimos a los 9 estudiantes que aparecen en la figura 6, debido a que ellos, en esta sección del trabajo en el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes, fueron quienes tuvieron un mayor número de intervenciones para nuestro análisis¹. En lo que sigue, describimos el perfil de cada estudiante.

En esta fase de trabajo en el teorema, María sobresale por identificar elementos que deben hacer parte del sistema teórico para que el enunciado tenga sentido, a diferencia de su participación en parejas, que estaba centrada en aspectos relacionados con el componente enunciado. En la parte inicial de la discusión en grupo, María le hace caer en cuenta a la profesora de que aún no han definido rectas perpendiculares en el sistema teórico del curso. A partir de su intervención se incluye esta definición en el sistema. María es una estudiante cuidadosa y, al igual que en la sección del trabajo en parejas, sus intervenciones reflejan que es sistemática y rigurosa al aportar para el desarrollo de la clase, en miras de contribuir al fin común de construir la demostración de la conjetura.

Leopoldo sobresale, en el trabajo en gran grupo, por comunicar de forma clara y concisa el proceso que llevaron a cabo con Darío, para la construcción geométrica que les permitió plantear su conjetura. A partir de la descripción que Leopoldo realiza y bajo la guía de la profesora, Leopoldo cae en cuenta de que la conjetura que formularon con su compañero no se corresponde con la construcción que realizaron en Cabri. Es así que Leopoldo reconoce cómo debe ser la concordancia esperada entre una conjetura y la construcción que la

¹ Los estudiantes Efraín, Luz, Jaime, Melissa, Antonio y William, tienen a lo sumo dos intervenciones cada uno, en el total de episodios en gran grupo, por lo cual consideramos que no tenemos evidencia suficiente de ellos para referirnos a su perfil de participación con el marco teórico propuesto en esta investigación.

origina. El caso de Leopoldo y su compañero sirve como ejemplo ilustrativo para los demás miembros del grupo, en relación a la concordancia que debe haber entre una conjetura y la construcción correspondiente realizada en Cabri.

Ignacio se destaca por su intención de usar un teorema que aún no había sido incluido en el sistema teórico del curso. En un primer momento de la discusión en gran grupo, Ignacio no tiene muy claro si puede usar algunos elementos como garantías de justificación, así estos no pertenezcan al sistema. Posteriormente, insiste en que es necesario usar un teorema¹ que él ya conocía por una experiencia de otro curso. Este aporte contribuye a establecer la necesidad de ampliar el sistema teórico del curso para seguir avanzando en la demostración de la conjetura y concuerda con el de otros compañeros. Su insistencia en el uso de un elemento, que no hacía parte del sistema teórico, ayuda a que este sea incluido para que la demostración de la conjetura sea factible.

Juan se destaca, en el trabajo en gran grupo, por identificar propiedades complementarias que permitan darle un soporte deductivo a la conclusión. De manera similar a su desempeño durante el trabajo en parejas, evidenciamos que Juan es un estudiante hábil para buscar relaciones entre objetos geométricos y de hecho, en sus intervenciones intenta anticipar algunos pasos de la demostración. Gracias a sus aportes, se comienza a usar el teorema del triángulo isósceles en la demostración que está construyendo el curso.

Orlando resalta sobre los demás estudiantes por su detenimiento y rigurosidad para revisar el enunciado y corregir detalles de este. En diferentes momentos de la discusión él participa con aportes que tienen que ver con aspectos del enunciado y su escritura. Por una parte, señala en algunos casos, condiciones que limitan la generalidad de la conjetura y la hacen muy local. De otro lado, Orlando contribuye al perfeccionamiento del enunciado de la conjetura al darse cuenta de que la existencia de las alturas ya está dada y por ende, en la escritura del enunciado, las alturas deben hacer parte del antecedente y no del consecuente.

¹ Ignacio ya conocía el Criterio de congruencia de triángulos Ángulo – Ángulo – Lado.

Germán es un estudiante que, aunque no tiene muchas intervenciones, genera aportes importantes para la discusión en el grupo respecto a la demostración en desarrollo. Por una parte, contribuye a la revisión del enunciado de la conjetura, señalando posibles limitaciones de esta. Por otra parte, al igual que Ignacio, su participación tiene eco en que es necesario ampliar el sistema teórico del curso, al mencionar como posible propiedad complementaria para un paso de la demostración, el uso del criterio de congruencia Hipotenusa – Cateto. Sin embargo, en su intervención Germán menciona que ese es un teorema de un curso anterior y él solo hace referencia a la posibilidad de usarlo, entendiendo que este aún no se ha incluido en el sistema teórico del curso y considerando la opción de que se incluya.

Daniel es un estudiante que sobresale por su ingenio para intentar desarrollar toda la demostración y exponer su idea al grupo. En sus intervenciones refleja que aun cuando usó elementos que no hacían parte del sistema teórico del curso, tenía plena conciencia de ello y su objetivo era tener una ruta clara para la demostración. Él menciona de forma clara qué elementos usó, que no hacen parte del sistema, de manera que estos puedan ser incluidos. Su aporte es crucial para hacer ver a los demás que es necesario tener más propiedades y más elementos en el sistema teórico para poder proseguir con los pasos de la demostración.

Henry es un estudiante que se preocupa por seguir las normas del curso y se da cuenta, con plena consciencia, de que su intento inicial de demostración está errado debido a que usa una definición diferente para triángulo isósceles. Sin embargo, esto se da debido a que la definición de triángulo isósceles se introdujo después de que él ya había realizado una propuesta de demostración. Así mismo Henry aporta ideas para los pasos restantes de la demostración y es quien orienta a los demás en la estrategia, que llevan a cabo, de demostrar la congruencia de dos triángulos para llegar a la conclusión de la conjetura.

Darío tiene un papel crucial en la demostración construida por el curso, ya que gracias a él se evidencia que los estudiantes tomaron por dado un hecho visual de la representación

geométrica de la conjetura¹, el cual no estaba garantizado por las normas del sistema de reglas compartido del curso. A partir de su aporte, es necesario restringir la demostración que hicieron para el caso exclusivo de triángulos isósceles acutángulos. Esto en parte se da, debido a la habilidad de Darío para identificar propiedades complementarias que puedan darle un soporte deductivo a la conclusión. Darío había quedado con la duda de que en un triángulo isósceles las alturas siempre cortaran al lado opuesto del triángulo y por ello, encontró que esto no siempre sucedía y esto repercutió en la demostración realizada.

5.2.4. Correlación entre finalidades de participación y calidad de participación

Teniendo en cuenta los perfiles de participación de cada estudiante en la reconstrucción del teorema y la calidad de sus intervenciones, de acuerdo a las categorías de análisis descritas en el marco teórico, a continuación presentamos algunas relaciones entre los resultados obtenidos al contrastar el tipo de acciones de participación y la valoración de las mismas.

Respecto al trabajo por parejas: En los primeros nueve episodios, Darío, Leopoldo y Efraín son los únicos estudiantes que tuvieron una participación genuina (*B-G-Par*), debido a su empoderamiento y apropiación de las normas de clase. Igualmente, estos tres estudiantes fueron los únicos que, en ese trabajo por parejas, realizaron acciones relacionadas con identificar en el sistema teórico elementos que hicieran falta para darle un sentido al enunciado o a la construcción (*S- Selec-IdenPart*).

Esto nos permite inferir que la selección y organización de elementos centrales en relación a un teorema, a partir del uso de un sistema teórico local y en el marco de una clase de geometría, normada por un sistema de reglas compartido, favorece el desarrollo de la genuinidad en los estudiantes. Un aspecto fundamental para esto radica en “la importancia que se le da a la voz de los estudiantes al centrar el trabajo en clase, en el estudio colectivo de las conjeturas propuestas por ellos, cuando resuelven problemas de un cierto tipo

¹Los estudiantes tomaron como dado que el triángulo isósceles que construyeron como representación del problema siempre era acutángulo y este hecho influyó en la manera como elaboraron la demostración. En el sistema de reglas compartido del curso no es válido justificar un hecho geométrico solo por la representación geométrica visual que tienen de este.

planteados por el profesor dentro de un marco bien definido como lo es un sistema teórico de referencia” (Perry, et al., 2013, p. 20).

Respecto al trabajo en gran grupo: En los episodios restantes resaltamos las participaciones de Orlando, Darío y Daniel, pues ellos sobresalen porque sus intervenciones fueron autónomas con relación al profesor (*B–A–Gran*) y relevantes (*B–R–Gran*). Además, cada uno de ellos se destacó sobre los demás, en el trabajo en gran grupo, en un tipo de acción correspondiente a cada componente del teorema. Orlando sobresalió en la revisión del enunciado de la conjetura para perfeccionarlo (*E- Formu-Revis*), Darío se destacó por su habilidad para identificar propiedades complementarias en función de darle un soporte deductivo a la conclusión (*D- Explo-IdenProp*) y Daniel relució por la pertinencia de sus aportes para asegurarse de que la conjetura fuera deducible en el sistema teórico del curso (*S- Selec-AsegDedu*).

De esto, inferimos que promover el aprendizaje de teoremas en estudiantes de un curso de geometría plana de nivel universitario, con las características descritas en este estudio y de acuerdo a la aproximación metodológica señalada, teniendo en cuenta el constructo teorema de Mariotti et al. (1997), permite favorecer el desarrollo de la autonomía en los estudiantes, a través de “la participación individual en las tareas colectivas” (Camps, 1994, p.111, citado por Ortiz & Perafán, 2004) como parte de los intereses y necesidades de los demás miembros de una comunidad. Además, resaltamos que la empresa común del curso no es centrarse únicamente en la demostración formal como producto final. Por el contrario, prevalecen también otros aspectos cruciales como la identificación de patrones, la generación de conjeturas y las diferentes formas de razonamiento que se pueden llevar a cabo en una demostración (Stylianides, 2007).

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos de manera sucinta las conclusiones de nuestro trabajo. A continuación nos referimos a la globalidad de los tipos de acciones de participación de los estudiantes y a la calidad de dicha participación en una clase de geometría regida por un sistema de reglas compartido; el objetivo del trabajo y a la pregunta de investigación; la proyección de este estudio; y, a algunos aspectos de nivel personal y profesional del autor de la tesis.

La participación de los estudiantes es diversa a lo largo de la producción del teorema. En las diferentes intervenciones de los estudiantes distinguimos aspectos que nos permiten concluir que la participación de algunos tiene calidad, en términos de relevancia, autonomía, originalidad y genuinidad. Así mismo, resaltamos la riqueza en la actividad demostrativa en la que se ven inmersos la mayoría de los estudiantes y, en particular, el trabajo que desarrollan en la exploración del problema y en la formulación del enunciado de la conjetura. Cada grupo presenta una propuesta diferente. Una mirada detallada de ello se da en los capítulos 4 y 5 del presente estudio.

Igualmente, consideramos que sí es posible que los estudiantes construyan un saber valorado social y culturalmente como lo es la producción de un teorema. El hecho de que en la comunidad de clase estudiantes hayan logrado llevar a cabo este fin común de manera colectiva, contribuye al desarrollo de los valores democráticos en ellos. El fomento de la autonomía, la originalidad y la genuinidad, gracias a la aproximación metodológica, conlleva a que los estudiantes generen aportes relevantes en la toma consensuada de decisiones.

Frente a los objetivos del trabajo, nos propusimos, de manera general, describir, interpretar y analizar cómo participan los estudiantes en la construcción de un teorema teniendo en cuenta el constructo propuesto por Mariotti et al. (1997). Para ello, abarcamos y cumplimos

objetivos específicos relacionados con la decantación en la literatura de referentes teóricos, que nos permitieran construir categorías de análisis, para mostrar la participación de algunos estudiantes e inferir algunos resultados. Seleccionamos un estudio de caso, a partir de una revisión minuciosa de videos de una clase de geometría plana, y pudimos desarrollar un análisis de participación de los estudiantes y de la calidad de esa participación. Luego, efectivamente cumplimos los objetivos en su totalidad.

Respecto a la pregunta de investigación, indagamos sobre cómo participan estudiantes de segundo semestre de un programa de formación de profesores de matemáticas, en un curso de geometría plana, regido por un sistema de reglas compartido, que promueve el aprendizaje como participación en una práctica valorada socialmente. A lo largo del trabajo se fue abarcando la pregunta paulatinamente y al final podemos decir que, efectivamente, este estudio la responde, pues se han podido identificar finalidades y características de la calidad de la participación de los estudiantes.

Sobre la proyección de este trabajo nos surgen algunas inquietudes y nos quedan varias preguntas. Por ejemplo, en nuestro estudio no se entró en detalle sobre qué tan convencidos quedaron los estudiantes de que el teorema que construyeron era cierto. Sería interesante indagar si una vez demostrado, los estudiantes aceptan su validez como necesaria. De hecho, Stylianides (2007) señala que el conocimiento que se puede considerar como compartido en una comunidad no refleja necesariamente la comprensión individual de cada estudiante.

Dada la especificidad del análisis realizado, también podría ser importante estudiar si con otros teoremas, incluso del mismo tipo, la participación de estudiantes sería similar a nuestro estudio de caso. ¿Cómo sería la calidad de la participación si escogiéramos otro teorema? ¿Habríamos encontrado los mismos códigos en cuanto a las finalidades de participación? ¿Los estudiantes que analizamos tendrían diferentes perfiles de participación con otros teoremas? ¿Los códigos con menor frecuencia habrían tenido mayor frecuencia en otros teoremas? ¿Podríamos generalizar perfiles de participación de un estudiante contrastando finalidades y calidad de la participación?

De manera similar, se podría ahondar en la interacción entre grupos de estudiantes, sin ningún apoyo del profesor y hacer una mayor profundización en los posibles nexos entre estas interacciones y la construcción de valores democráticos, en el marco de una comunidad de aprendizaje con un fin común. Además podría hacerse énfasis en el papel que jugó el soporte tecnológico en la participación de los estudiantes y si tuvo alguna relación con la formación de valores en esa comunidad.

Finalmente, en cuanto a la formación profesional del autor de la tesis, esta ha sido una experiencia muy enriquecedora porque me ha permitido tener una visión más amplia de mi práctica como docente, al salirme un poco del rol de maestro en el aula de clases e indagar por aspectos que solo a la luz de una teoría de referencia específica un investigador puede distinguir. A nivel personal, considero que este estudio me sirvió para crecer como persona en el sentido de poner a prueba mi rigurosidad, perseverancia y exigencia conmigo mismo en el logro de una meta.

REFERENCIAS

- Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica (M. Acosta, Trad.) *Recherches en didactique des mathematiques*, 8(3), 267-312. Recuperado en Septiembre de 2013 de <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Arsac/Arsac2002.pdf>.
- Back, R. J., Mannila, L., & Wallin, S. (2009). Student justifications in high school mathematics. *CERME 6–WORKING GROUP 2*, 291.
- Bartolini Bussi, M. G. (2000). *Early approach to mathematical ideas related to proof making*. Contribution to: Proof and Proving in Mathematics Education. ICME9 TSG 12. Tokyo/Makuhari, Japan.
- Boero, P. (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education* (P. Herbst, Trad.) International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Recuperado el 1 de Septiembre de 2013 de <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html>.
- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (Tesis de doctorado no publicada). Universitat de València. España.
- Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 245-258). Lleida: SEIEM.
- de Villiers, M. D. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*: University of Stellenbosch Stellenbosch. Recuperado el 8 de Octubre de 2013 de <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf>.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Netherlands: Sense Publishers.
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22nd PME Conference*, 2, 345-352.

- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, 9(1), 20-25.
- Leblanc, S., Saury, S., Seve, C., Durand, M., & Theureau, J. (2001). An analysis of a user's explorations and learning on a multimedia instruction system. *Computers and Education*, 36, 59-82.
- Luque, C., & Robayo, L. (2011). *Emergencia de un ambiente de actividad demostrativa con estudiantes en edad extraescolar* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 25-53.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204.
- Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition*. Reporte presentado en Proceedings of the 21st PME Conference, Lathi, Finland.
- Molina, O., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración*, 20(1), 73-96.
- Ortiz, F., & Perafán, B. (2004). La democracia: una vivencia posible en la clase de matemáticas. *Revista Ema*, 9(2), 129-164.
- Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012a). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En L. Camargo (Ed.), *Investigaciones en educación geométrica* (pp. 127-148). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012b). La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa *Épsilon*, 29(3), 41-56.
- Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2013). Actividad Instrumentada y Mediación Semiótica: Dos Teorías para Describir la Conjeturación como Organizador Curricular *Aportes investigativos para el desarrollo curricular en geometría y estadística*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Sfard, A. (1996). On acquisition metaphor and participation metaphor for the mathematics learning (P. Perry, Trad.). En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 397-411). Sevilla: Selected Lectures.

- Skovsmose, O., & Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En P. Valero & O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1-23). Bogotá: Una empresa docente.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Anexo 1

Cuestionario sobre creencias respecto a la utilidad de enseñar teoremas en la clase de geometría

El instrumento consistió en un cuestionario de cinco preguntas y fue propuesto en un Colegio Bilingüe privado en Bogotá, a cinco docentes del área de Matemáticas. A continuación se muestra una síntesis de las respuestas obtenidas, resaltando los aspectos más relevantes en cuanto a la dilucidación del problema en este estudio.

Pregunta	Consolidado de las Respuestas	Síntesis
1) ¿Qué es una demostración?	En general, los profesores hacen referencia a procesos deductivos o inductivos para justificar ideas	A pesar de que se hace referencia a procesos deductivos, estos aluden a una definición de demostración mas no es explícita una conexión con los teoremas.
2) ¿Usted realiza demostraciones en sus clases de Geometría?	Cuatro docentes respondieron a veces y uno respondió nunca	Se puede apreciar que la demostración de teoremas no es algo muy común en las clases de Geometría en la escuela.
3) ¿Para qué puede realizarse una demostración en el aula?	<ul style="list-style-type: none"> • Para mostrar de donde sale la información • Para responder al ¿por qué? de los estudiantes más aplicados • Potenciar la capacidad propositiva y analítica del estudiante, • Evidenciar que “algo” funciona. 	En este sentido, este tipo de respuestas no muestran alguna conexión con la idea de teorema.

Pregunta	Consolidado de las Respuestas	Síntesis
<p>4) ¿Qué factores considera más relevantes al momento de enseñar un teorema?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Que el estudiante tenga claro la hipótesis y la consecuencia • Comprensión de la simbología y lenguaje matemático • Posibilidad de generalizar un concepto a través de sus características • El tiempo, las diferentes representaciones del teorema y los posibles usos o aplicaciones • Las formas de comunicación y las discusiones que se puedan dar 	<p>Se hace énfasis en el enunciado del teorema y se prioriza notablemente respecto a otros aspectos del mismo.</p>
<p>5) ¿Cree que es importante enseñar la demostración de un teorema o alguna idea de la demostración? ¿Por qué?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sí, porque se justifican las ideas • Sí, siempre y cuando haya el tiempo suficiente para lograr una comprensión completa por los estudiantes • Es importante pero la estructura curricular de Colombia prioriza otras habilidades, relegando la demostración al uso y enseñanza de docentes apasionados que van más allá • Sí porque solo cuando el estudiante comprende el porqué de lo que hacemos, realmente entiende el tema • Sí, porque alimenta la competencia argumentativa de los estudiantes y potencia la curiosidad en ellos 	<p>Los docentes hacen alusión a las dificultades que se tienen para incluir teoremas y sus demostraciones en el aula de clases de la escuela.</p>

Anexo 2

EPISODIO 7: María y Efraín deciden hacer una exploración por casos.

Descripción: Una vez leído el enunciado del problema, los estudiantes deciden explorar diferentes tipos de triángulos. Empiezan por decidir cómo van a construir las alturas.

		[Inicialmente los estudiantes construyen en Cabri cuatro triángulos diferentes. Dos de ellos son escalenos, uno es equilátero y el otro es rectángulo isósceles]	<i>E-Inter-RepDado</i>
2	María:	Un [triángulo] rectángulo, pero ahora quiero hacer un [triángulo] rectángulo que no necesariamente sea isósceles.	<i>E-Inter-FormEst</i>
3	Efraín:	Pues entonces haz este rayo [en realidad se refiere a la hipotenusa que hace falta para construir el triángulo rectángulo. Luego construyen el segmento restante]	
5	María:	Ese es un [triángulo] rectángulo isósceles, y hacemos un rectángulo [se refiere al triángulo rectángulo que no sea isósceles] bueno, [Deciden empezar a construir las alturas], ahora construimos las alturas. [Modifican uno de los triángulos inicialmente construido para que sea claramente escaleno]	<i>E-Inter-FormEst</i>
7	María:	Ese es escaleno [señala el primer triángulo construido.] Este es equilátero [Se refiere al tercer triángulo, construido con la herramienta polígono, para asegurar que los 3 lados son iguales.] Este es escaleno [señala el segundo triángulo construido.]	<i>E-Inter-IdenObj</i>
8	Efraín:	Y este es isósceles [señala el último triángulo construido.]	
9		[Comienzan a indagar sobre la forma de construir las alturas]	
10	María:	Mira, lo que tenemos que hacer nosotros es, [señala el primer triángulo escaleno] construir la perpendicular que va por aquí [señala por donde iría la recta que contiene un lado del triángulo escaleno] hasta este punto [señala el vértice opuesto]	<i>E-Inter-AludProp</i>
11		[Primero construyen la recta que contiene al lado elegido del triángulo]	<i>E-Inter-RepDado</i>
12	María:	Una perpendicular, pero que llegue a este punto [señala el vértice opuesto al lado que está contenido en la recta que acaban de construir]	

Inicialmente, los estudiantes construyen cuatro tipos diferentes de triángulos (*E-Inter-IdenObj*) para empezar a representar los objetos dados en el enunciado (*E-Inter-RepDado*). A diferencia de las parejas conformadas por Juan y Ana, y Darío y Leopoldo, Efraín y María eligen una estrategia de resolución (*E-Inter-FormEst*) estática, la cual se centra en el análisis de los casos, según el tipo de triángulo, como se podría hacer en lápiz y papel. En este sentido, se saca poco provecho de la geometría dinámica.

En las intervenciones [5, 10 y 12] María toma la iniciativa respecto a construir las alturas y le explica a Efraín como hacerlo, de acuerdo a la interpretación que ella tiene sobre la altura. Para esto, tiene en cuenta construir la perpendicular a la recta que contiene el lado del triángulo y el vértice opuesto, aludiendo así a las propiedades de la altura (*E-Inter-AludProp*). Luego, la participación de María en este episodio es autónoma (*B-A-Par*). Además, ella se preocupa por explicarle a su compañero, lo cual evidencia su actitud de corresponsabilidad para que ambos logren su cometido de manera conjunta.

Los indicadores en este episodio están en la categoría de interpretación del enunciado porque, de manera global, los estudiantes deciden una estrategia, representan los objetos geométricos y las relaciones indicadas en el enunciado, y aluden a algunas de las propiedades que reconocen. Por ello, aún no emergen indicadores en relación a la exploración libre de una representación a diferencia de las demás parejas en mención.

EPISODIO 8: Efraín se cuestiona sobre la inclusión del objeto altura en el enunciado del problema.

Descripción: Después de repasar cómo se construye una altura de un triángulo, los estudiantes leen el enunciado del problema y Efraín se cuestiona por la inclusión en este de un elemento que aún no hace parte del sistema teórico del curso. Al igual que Darío y Leopoldo, Efraín manifiesta esta inquietud a la profesora.

- | | | | |
|----|---------|---|------------------------|
| 14 | Efraín: | ¿Por qué no le preguntamos? [...] Profe, una pregunta, eh, vamos a construir la altura de este triángulo pero solo tenemos este punto [señala el vértice] ¿podemos trazar esta perpendicular? | <i>S- Seleccionada</i> |
| 15 | P: | Sí | |
| 16 | Efraín: | Pues, sabemos que podemos, pero como no nos han dado la [...] [Se refiere a la inclusión en el sistema del teorema de la existencia de la recta perpendicular a otra por un punto externo] | |
| 17 | P: | Ah, el teorema | |
| 18 | Efraín: | Pero, ¿lo hacemos? | <i>S- Seleccionada</i> |
| 19 | P: | Sí, sí, sí, esperamos que ahora validemos eso. [Los estudiantes hacen la construcción de la recta perpendicular] | |

En este episodio también se ejemplifica, al igual que en el episodio 3, que no hay un orden especial para participar en algunas de las acciones que caracterizan los tres aspectos de un teorema. Incluso, antes de comenzar a resolver el problema los estudiantes manifiestan su inquietud sobre cómo justificar la construcción de las alturas de los triángulos [14], puesto que en el sistema teórico aún no se ha incluido un teorema que garantice la existencia de una recta perpendicular a otra por un punto externo determinado. Sin embargo, a diferencia de Darío y Leopoldo, quienes señalaron la no inclusión de la definición de altura en el sistema, Efraín expresa su preocupación por la imposibilidad de garantizar la existencia de la altura. En este sentido, codificamos los fragmentos coloreados de este episodio y del episodio 3 con el mismo indicador, (*S- Selec-IdenPart*), ya que, a pesar del foco diferente, en ambos casos se están señalando aspectos de la consistencia del sistema teórico.

En las intervenciones [18-19], de acuerdo a la indicación de la profesora, los estudiantes aceptan dejar pendiente la validación de la existencia de la altura y la asumen como garantizada provisionalmente. En general, la participación de los estudiantes en el episodio se centra en el sistema teórico, al identificar elementos que deben hacer parte del sistema para que la construcción que pretenden realizar tenga sentido en este.

Consideramos que la participación de Efraín es genuina (*B-G-Par*), ya que refleja la apropiación y conciencia que tiene acerca de respetar las reglas del curso y de justificar cada resultado con elementos que hagan parte exclusivamente del sistema teórico construido de manera colectiva. Por ende, al respetar las normas compartidas Efraín es consciente de que sus ideas deben aportar a la solución del problema de una manera responsable frente a lo que está establecido como válido en el curso.

EPISODIO 9: Efraín y María exploran para verificar, a partir de la toma de medidas, y conjeturan.

Descripción: Los estudiantes construyen las alturas en cada uno de los triángulos representados y verifican con el arrastre en qué tipo de triángulos se mantienen congruentes las alturas. Posteriormente, plantean su conjetura.

21	Efraín:	Y [construimos] este segmento [señala la parte de la recta perpendicular construida, en donde debe ir el segmento correspondiente a la altura. Seguidamente, asignan nombres a los vértices del triángulo y construyen el segmento altura. Luego hacen el mismo proceso para otro lado del triángulo, teniendo así dos alturas construidas en el triángulo escaleno. Seguidamente, construyen dos alturas en el triángulo equilátero y por último, en el triángulo rectángulo isósceles construyen la altura correspondiente al vértice opuesto a la hipotenusa.]	<i>E-Inter-RepDado</i>
23	María:	[Al intentar construir otra de las alturas se da cuenta que la recta perpendicular coincide con el cateto del triángulo.] Ah, es que seguramente es esta recta.	<i>E-IdentArg-PropComp</i>
24		[En el último triángulo, que también es escaleno comienzan a construir las alturas.]	<i>E-Inter-RepDado</i>
25	María:	¿Hacemos las tres alturas?	
26	Efraín:	Sí, sí.	
27		[Hacen las 3 alturas.]	
28	María:	[Señala el triángulo equilátero] Este tipo de triángulos nos da[ría] alturas congruentes. [¿Qué hacemos?] para medir distancias [Busca en Cabri la herramienta para medir distancias]	<i>E-Inter-AntiSol</i>
		[Mide y constata que las alturas son congruentes en el triángulo equilátero. Después miden las tres alturas que construyeron en el triángulo escaleno.]	<i>E-Explo-HerrEval</i>
30	María:	A mí solo me da [las alturas congruentes en] los equiláteros.	<i>E-IdentReg-Rela</i>
31	Efraín:	¿Para [alturas] congruentes? Dos de sus alturas congruentes, este sí tiene dos alturas congruentes. [Señala el triángulo rectángulo isósceles.] Si haces estas rectas, la altura de este va a ser congruente con la altura de este. [Mediante el arrastre del triángulo rectángulo isósceles comprueban que las alturas se mantienen congruentes. Luego construyen un triángulo rectángulo más, en el que sus lados tienen medidas diferentes.]	<i>E-Inter-AntiSol</i>
33	María:	La única que me está dando es la del triángulo equilátero [le dice a otro grupo]	
34		[Los estudiantes escriben la siguiente conjetura: Si se tiene un triángulo isósceles, dos de sus alturas son congruentes y si el triángulo es equilátero sus alturas son congruentes.]	<i>E-Formu-Enun</i>

En las intervenciones [21-27] los estudiantes representan diferentes tipos de triángulos, cada uno con sus respectivas alturas (*E-Inter-RepDado*). En dicho proceso, María identifica que en el caso del triángulo rectángulo isósceles dos de las alturas coinciden con los catetos del triángulo (*E-IdentArg-PropComp*). Durante la exploración [28] María anticipa que en los triángulos equiláteros se cumple la propiedad (*E-Inter-AntiSol*) y después de medir las alturas en los triángulos escaleno y equilátero y verificar con el arrastre (*E-Explo-*

HerrEval), en efecto, identifica que la propiedad sí se cumple en los triángulos equiláteros (*E-IdentReg-Rela*).

Los indicadores *E-IdentArg-PropComp* y *E-IdentReg-Rela* aparecen por primera vez en este episodio, quizás debido a la dinámica elegida por este grupo mediante la exploración por casos, para identificar regularidades claves que les permitieran solucionar el problema e identificar propiedades complementarias que les dieran soporte a su descubrimiento. En la intervención [31] Efraín anticipa que en el caso del triángulo rectángulo isósceles también se cumple la propiedad (*E-Inter-AntiSol*) y después de que descartan el caso del triángulo rectángulo no isósceles, formulan la conjetura (*E-Formu-Enun*).

Luego, en términos generales la participación de los estudiantes en este episodio se enmarca con indicadores de la categoría de exploración libre de una representación, ya que al parecer, los estudiantes descubren la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad alturas congruentes, al visualizar todos los triángulos construidos. Finalmente, a partir de la exploración por casos que María y Efraín realizan, surge la conjetura que formulan, pues como antecedente escriben el tipo de triángulo y como consecuente, la congruencia de al menos dos alturas.

Aunque María tiende a ser la líder en este grupo, Efraín complementa y apoya las ideas de ella aportando a los avances que realizan en las construcciones para dar solución al problema. Por ello, consideramos que la participación de ambos estudiantes es relevante (*B-R-Par*) y este trabajo en grupo es más equilibrado en comparación con los roles más dominantes que toman Darío y Juan frente a Leopoldo y Ana respectivamente. En este episodio, ambos estudiantes contribuyen a la solución del problema a través de un trabajo colectivo que obedece a una necesidad común de plantear una conjetura.

Anexo 3

EPISODIO 10: Introducción en el sistema de la definición de rectas perpendiculares y del teorema de la existencia de la recta perpendicular por un punto externo.

Descripción: María señala la necesidad de incluir en el sistema algún teorema o definición que permita afirmar que si dos rectas son perpendiculares, entonces forman un ángulo recto, porque hasta el momento en el sistema no se tiene algo al respecto. La profesora guía la participación para incluir la definición de rectas perpendiculares y, adicionalmente, se hace alusión a la necesidad de incluir el teorema de la existencia de la recta perpendicular por un punto externo.

- 1 María: Profesora, teníamos que [...] llegábamos a un ángulo de 90° , pero no tenemos en nuestro sistema algo para llegar aquí [a decir que dos rectas son perpendiculares] porque tenemos [...] definición es de rayos perpendiculares.
- 2 P: ¿No hemos definido rectas perpendiculares? ¿No?
- 3 María: En nuestro sistema. *S- Selec-
IdenPart*
- 4 P: ¡Ah! entonces eso falta. Entonces, la definición de rayos perpendiculares es si forman un ángulo recto ¿Sí? Y la definición de rectas perpendiculares, ¿cómo la damos?
- 5 Daniel: Si forman un ángulo recto.
- 6 P: Igual, si forman un ángulo recto, sí. Rayos, segmento, rectas, segmentos, bueno, recuerden que si yo digo forman [...] cuando yo digo dos rectas forman un ángulo recto, lo que estoy diciendo es determinan, ¿no?, porque ya sabemos que un ángulo es la unión de dos rayos, no de dos rectas. Sí [...] segmento [...] si determinan un ángulo recto. Y entonces con esto ya existe la altura de los triángulos, porque nos demoramos bastante construyendo la definición de altura, pero ninguno se preocupó por [...]¿existen o no? Acá estamos definiendo, definiendo [...] pero ¿Sí? Recuerden que tenemos que garantizar la existencia de las cosas que definimos. Bien. *S- Selec-
AsegDedu*
- 7 Efraín: ¿Cómo llamamos a este teorema?
- 8 P: ¿Cómo se va a llamar? Pues [...] existencia de recta perpendicular por punto externo. Entonces, ya tenemos la existencia de perpendicular por un punto en la recta, y por punto externo a ella. *S- Selec-
IdenPart*

En las intervenciones [1-3], María pregunta a la profesora cómo validar la construcción de la altura correspondiente a un lado de un triángulo, pues ella y su compañero reconocen que tiene que formar un ángulo de 90° con la recta que contiene al lado del triángulo, pero saben que hasta el momento no se han definido rectas perpendiculares en el sistema teórico construido colectivamente. Aunque tienen información previa sobre la definición de rectas

perpendiculares y su relación con los ángulos de 90° , la intervención de María refleja su preocupación por respetar la regla de hacer uso exclusivamente de elementos incluidos en el sistema, para validar una construcción (*S-Selecc-IdenPart*). Esta preocupación es primordial en los procesos de argumentación que se llevan a cabo en la clase, ya que todas las demostraciones se deben realizar haciendo uso de elementos validados en el sistema teórico. Además, con su participación en este episodio María refleja la conciencia con la que asume la responsabilidad de ser parte de una colectividad en busca de un fin común.

En las intervenciones [4-8] la profesora y los estudiantes incluyen en el sistema teórico una definición para rectas perpendiculares y el enunciado de un teorema que garantiza la existencia de una recta perpendicular por un punto exterior a otra recta dada (*S-Selecc-AsegDedu*). Su demostración queda pendiente. Sin embargo, con ello se aseguran que la conjetura que van a proponer, sobre los triángulos con dos de sus alturas congruentes, sea deducible en el sistema. Luego, es la primera vez que aparece el indicador *S-Selecc-AsegDedu* en la construcción del teorema, debido a la necesidad de tener todas las garantías que se requieren o la expectativa de que sí se van a tener como sucede en este caso. Este episodio ejemplifica, de manera similar a los episodios 3 y 8, que no existe una linealidad en la participación de los estudiantes en cada uno de los componentes de un teorema, puesto que el desarrollo de este episodio se centra en la inclusión de elementos que hacen falta en el sistema teórico.

Consideramos que la participación de María es genuina (*B-G-Gran*), al hacer énfasis en que en el sistema local del curso [3] aún no se han definido rectas perpendiculares. Esta es una inquietud propia que refleja su preocupación por la importancia de que los resultados que se deduzcan se hagan usando, exclusivamente, elementos del sistema teórico que están construyendo. Por ende, María contribuye a la apropiación y el respeto por las normas compartidas de la clase y su anticipación surge por su propio compromiso con la actividad, sin requerir la ayuda de la profesora para llegar a su cuestionamiento.

EPISODIO 11: Correspondencia entre la conjetura y la construcción/exploración de Darío y Leopoldo.

Descripción: Leopoldo describe la construcción realizada para llegar a la conjetura que plantearon con Darío. Bajo la guía de la profesora, el estudiante se da cuenta de que la conjetura planteada no concuerda con la construcción que la soporta y representa. Al usar el lenguaje proposicional indagan respecto a las dos opciones que se tienen para el antecedente y el consecuente, a partir de la relación entre las propiedades “tipo de triángulo” y “dos alturas congruentes”.

- | | | | |
|----|-----------|--|-------------------------|
| 11 | Leopoldo: | Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo [...] y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. Conjetura [...] | <i>E-Explo-HerrIden</i> |
| 12 | P: | Sí. Ahora la conjetura. | |
| 13 | Leopoldo: | Conjetura. Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes. | <i>E-Formu-Enun</i> |
| 14 | P: | Bueno, entonces [...] mira. Vamos a determinar ahí, dos cosas. Una, vamos a llamar p [...] eh [...] lados congruentes del triángulo ¿no? Y q [...] alturas congruentes y q alturas congruentes. [Escribe en el tablero: p: lados congruentes del triángulo y q: alturas congruentes] [...] léanme otra vez la construcción. | |
| 15 | Leopoldo: | Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo [...] y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. Conjetura [...] | <i>E-Explo-HerrIden</i> |
| 16 | P: | O sea que ustedes obligaron a qué, ¿A p o a q? | <i>E-Formu-AnteCons</i> |
| 17 | Leopoldo: | Eh [...] la segunda. | <i>E-Formu-Concor</i> |
| 18 | P: | A q [...] ¿Sí? Esto es lo que ustedes obligaron ¿Qué pasa? [Leopoldo hace expresión de haber caído en cuenta de algo] ¿Qué pasa Leopoldo? A ver [...] | |
| 19 | Leopoldo: | No sé. Creo que de q dedujimos p. | |
| 20 | P: | De q dedujeron p [...] ¿Y cuál fue la conjetura que me estableciste? | |
| 21 | Leopoldo: | Pues que si las alturas son congruentes [...] ah, sí, p entonces | |
| 22 | P: | [...] y esto no les pasó solo a ellos. Muchos hicieron lo mismo. La construcción de ellos fue obligar a que se cumpliera q [...] y se dieron cuenta que entonces se daba p. Pero la conjetura que me escribieron fue: si p entonces q. Esto es muy importante. Muy importante porque en el teorema la hipótesis es aquello que sabemos cómo válido. Y lo que ustedes sabían como válido era la congruencia de las alturas, porque eso era lo que ustedes estaban buscando que sucediera. Entonces digamos que la conjetura no corresponde a tú construcción. | |

En la intervención [11] Leopoldo comunica la construcción realizada mediante el uso de Cabri para identificar propiedades no mencionadas en el enunciado (*E-Explo-HerrIden*) y de acuerdo a esta menciona la conjetura que formularon (*E- Formu-Enun*). En la intervención [14] la profesora enfoca la atención en la estructura del enunciado condicional, que corresponde a la conjetura, y se le da el status de antecedente (p : lados congruentes del triángulo) y de consecuente (q : alturas congruentes) a las proposiciones que hacen parte del enunciado condicional y se relacionan en el proceso de construcción, en términos de establecer su concordancia con la conjetura (*E- Formu-Concor*). La profesora cuestiona a Leopoldo [16] respecto a qué obligaron en la construcción en términos del antecedente y el consecuente de la conjetura (*E- Formu-AnteCons*). Es decir, lo que se fuerza por construcción o arrastre será lo dado y lo que se descubre o verifica es la conclusión.

En ese orden de ideas, Leopoldo se da cuenta [19-21] de que la conjetura que realizaron no se corresponde con su construcción, ya que en la conjetura plantearon q entonces p , pero la construcción que desarrollaron corresponde a p entonces q . Como es la primera vez que esto sucede en el curso, la profesora se basa en el lenguaje proposicional para apoyar la comprensión de la estructura del enunciado. Igualmente, los indicadores *E- Formu-AnteCons* y *E- Formu-Concor* aparecen por primera vez en la construcción del teorema, quizás debido al momento de la clase en que la profesora intenta guiar a los estudiantes para que reconozcan la concordancia que debe haber entre construcción y conjetura. Esta guía se da para que todos los miembros de la comunidad tengan clara la norma respecto a esta concordancia y así puedan proceder en llevar a cabo el fin común de la comunidad.

De manera general, en este episodio las participaciones de los estudiantes se centran en la formulación del enunciado, bajo la guía de la profesora para identificar el antecedente y el consecuente de esta, en función de establecer la concordancia entre la conjetura y la construcción realizada por el grupo de Darío y Leopoldo. La participación de Leopoldo en este episodio es poco autónoma (*P-A-Gran*), ya que él se da cuenta de la inconsistencia entre su conjetura y su construcción a partir de la guía de la profesora, quién, a través de las

relaciones lógicas de un enunciado condicional, le hace notar el error que cometieron con Darío al plantear la conjetura de manera recíproca a la construcción que realizaron.

EPISODIO 12: Correspondencia entre la conjetura y la construcción/exploración de Juan y Ana.

Descripción: Juan describe la construcción realizada para llegar a la conjetura que plantearon con Ana. La descripción de la construcción es coherente con el enunciado que los estudiantes plantearon como conjetura.

41 Juan: Para el caso de nosotros... nosotros no construimos el triángulo. Construimos dos rectas. [El estudiante explica que partieron de las dos alturas congruentes para después con ellas formar un triángulo y determinar que propiedades tenían. Como no encuentra el archivo de la construcción en la calculadora, pasa al tablero a explicar su idea.]

49 Juan: Tomo una recta y un punto exterior... y una recta perpendicular.

E-Inter-RepDado

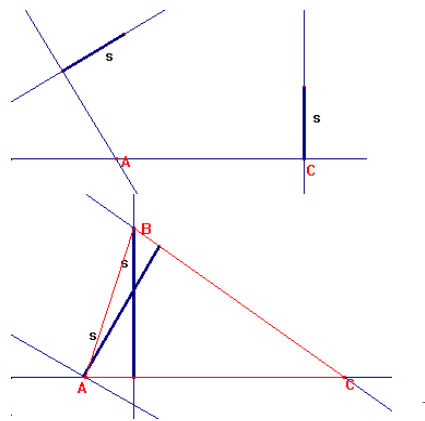
50 P: Sí.

51 Juan: Luego tomo por acá otra recta que pase por A.

52 P: Cualquiera.

53 Juan: Y por acá otra recta perpendicular. Y sobre esa perpendicular tomo un segmento que sea congruente con este. Luego, comencé a correr las dos rectas corriendo este punto y este punto... buscando que en algún momento se coincidieran. Entonces en un momento... por acá... se forma el vértice. Pero son las alturas las que estoy construyendo... pero como las alturas van a un vértice. [Las siguientes representaciones reflejan lo que hizo Juan en el tablero:

E-Explo-HerrIden



54 P: ¡Las moviste hasta que se intersecaron!

- 55 Juan: Entonces aquí va a quedar el triángulo ABC.
- 56 P: Ah bueno, entonces, según como me las estás describiendo [la construcción] sí corresponde con la conjetura que establecieron [mira la hoja del grupo D y verifica la conjetura planteada por ellos: Si en un triángulo dos de sus alturas son congruentes, entonces dicho triángulo es isósceles y los lados congruentes son aquellos que están contenidos en las rectas perpendiculares a las alturas respectivas]. Bueno, ¡muy bien!... *E-Formu-Concor*

Los indicadores que enmarcan la participación de los estudiantes en este episodio hacen referencia a las categorías correspondientes a la interpretación del enunciado (*E-Inter-RepDado*), la exploración de una representación (*E-Explo-HerrIden*) y a la formulación del enunciado (*E-Formu-Concor*). Luego, el episodio en general consiste en la descripción que Juan realiza sobre la construcción, para llegar a la conjetura propuesta, y el reconocimiento de la coherencia que se evidencia entre ambas.

El indicador *E-Inter-RepDado* aparece debido a que Juan explica su idea en el tablero [41-52] y por ello vuelve a representar los objetos geométricos involucrados en el enunciado, en función de comunicar su representación. En la intervención [53] el estudiante describe la exploración que llevaron a cabo mediante el arrastre (*E-Explo-HerrIden*) y en este caso, la construcción realizada sí concuerda con la conjetura que plantearon los estudiantes (*E-Formu-Concor*). Es el primer grupo, en la socialización en gran grupo, que muestra un caso en que hay una concordancia entre la construcción y la conjetura.

La profesora reconoce la originalidad de la idea de Juan [54 y 56] y solo le pregunta a él por algunos pasos en la descripción de su construcción. Al parecer la profesora no había tenido en cuenta esta forma de construir una representación del problema. Por ende, consideramos la participación de Juan como original (*B-O-Gran*) ya que, además de mostrar una propuesta que no había sido considerada por la profesora, para el momento de la clase su descripción se constituye en un ejemplo de la concordancia esperada entre una construcción efectuada y su correspondiente conjetura. Por ende, Juan actúa en este episodio a la par de la profesora en cuanto a mostrar un ejemplo aclaratorio a sus compañeros. Ello evidencia la igualdad de condiciones de los miembros de la comunidad y que no necesariamente es la profesora quién despeja las dudas del grupo.

EPISODIO 13: Limitación de la conjetura propuesta por Luz y Marina.

Descripción: La profesora propone que los estudiantes analicen la conjetura planteada por Luz y Marina, en términos de verificar la concordancia entre antecedente y consecuente de la conjetura, de acuerdo a la construcción realizada. Entre todos concluyen que el enunciado de dicha conjetura está restringido a un caso específico y por ello la conjetura es muy local.

- 58 P: [...] Lo que quiero mostrarles es que cuando me reporten la conjetura, asegúrense que me están poniendo como hipótesis [...] todo aquello que ustedes obligaron a que sucediera y como tesis lo que descubrieron, como resultado. Entonces vamos a mirar algunas de las conjeturas. *E- Formu- Concor*
- Y van ustedes a analizar [La siguiente conjetura:] Si ABC es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90 y los lados que determinan este ángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes. Quiero que examinen la propuesta de ellas y me digan qué piensan. *E- Formu- Revis*
- 59 María: Es como muy local.
- 60 P: ¿Muy local?
- 61 María: Sí, obliga a que el triángulo sea mayor que 90.
- 62 P: Miren la propuesta, ¿y?
- 63 María: O sea, eso se cumple, pero para ese caso específico.
- 64 P: ¿Qué es lo que se cumple?
- 65 María: Que el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes.
- 66 Orlando: Lo que pasa que es que no puede ser cualquier triángulo isósceles sino uno con la característica de que el ángulo donde, *E- Formu- Revis*
- 67 P: El ángulo del vértice, se llama [...] el ángulo del vértice.
- 68 Orlando: Tiene que ser mayor a 90, el [ángulo] que forma los lados iguales. *E- Formu- Revis*
- 69 P: Sí.
- 70 Germán: Estaría diciendo que eso no se cumple para el resto de triángulos porque estaría diciendo que cuando el triángulo tenga el vértice igual a 90 no se cumple. *E- Formu- Revis*

71 P: El ángulo del vértice. Según ellas, no parecería que se cumpliera. Entonces es una conjetura, que como dice María, está muy localizada. Y no lo más general posible.

72 Luz: Sí. Pero fue lo que nosotros encontramos.

En este episodio la revisión entre la concordancia de la conjetura y la construcción realizadas por Luz y Marina, (*E- Formu-Concor*), lleva a que el análisis se centre en la revisión del enunciado de la conjetura para perfeccionarlo (*E- Formu-Revis*). Es la primera vez que este indicador aparece y ello tiene que ver con que la conjetura planteada por este grupo está restringida a un caso muy específico. En general, a través del episodio los estudiantes aportan ideas para señalar las limitaciones que conlleva la conjetura, a partir de la indicación de la profesora [58] respecto a hacer una revisión detallada de esta, en términos de su concordancia con la construcción.

Al revisar el enunciado de la conjetura, María [59-63] afirma que en la hipótesis se tienen unas condiciones muy específicas (*E- Formu-Revis*) y Orlando menciona [66 y 68] que en términos de aplicabilidad, si se demostrara esa conjetura, solo se podría usar con triángulos que cumplan la condición de ser isósceles y obtusángulos. Es decir que, para un triángulo isósceles rectángulo o un triángulo isósceles acutángulo, no se podría concluir que dos de sus alturas son congruentes (*E- Formu-Revis*). En este sentido, Germán y la profesora en las intervenciones [70-71] aluden a que la conjetura está planteada de forma muy local y no de la manera más general posible (*E- Formu-Revis*).

Consideramos que la participación de María, Orlando y Germán es autónoma (*B-A-Gran*) y genuina (*B-G-Gran*), en la medida en que cada uno aporta ideas propias para convencer a los demás de porqué la conjetura está muy restringida y no permitiría abarcar una gama de casos de manera más general. María es quién primero manifiesta que la conjetura es muy local [59] por obligar a que el ángulo sea mayor que noventa grados [61]. Orlando prosigue y complementa el aporte de María [66] enfatizando en que la conjetura no se podría usar en triángulos que no sean obtusángulos. Germán, por su parte explica por qué la conjetura está restringida a un caso muy específico y que no podría aplicarse a los triángulos rectángulos y acutángulos [70]. Cada uno de ellos manifiesta tener conciencia de lo que implica el

hecho de que la conjetura esté muy localizada. Esto es relevante para la discusión y así mismo, cada estudiante participa por iniciativa propia y no bajo el incentivo de la profesora. En este episodio se da un discurso compartido, donde cada miembro de la comunidad de clase que interviene escucha al otro e intenta brindar un aporte en miras de determinar de manera común el problema que tenía la conjetura propuesta por Luz y Marina. En la intervención [72] Luz también interviene y manifiesta su punto de vista. Se puede inferir que ella no está muy conforme con las críticas a su conjetura, pero no por ello se siente limitada a manifestar su opinión.

Anexo 4

Valoración de la participación de los estudiantes en el trabajo en gran grupo

A continuación se relaciona la calidad de la participación de cada estudiante en el trabajo en gran grupo y se resume grosso modo cómo se desarrolló esa participación a lo largo de los episodios correspondientes en esta sección de trabajo en el teorema. De manera similar a la tabla 5, en la tabla 7 la casilla aparece vacía si las intervenciones de un estudiante no reflejan las características de los indicadores del grado de participación en gran grupo. Así mismo usamos los símbolos + y ++ para indicar el grado de participación como *poco* o *bastante*.

ESTUDIANTE	TIPO DE PARTICIPACIÓN			
	Original	Autónoma con relación al profesor	Genuina	Relevante
María		++	++	
Leopoldo		+		+
Ignacio			+	
Juan	++			++
Orlando		++	++	++
Germán		++	++	
Daniel		++	++	++
Henry			++	++
Darío		++		++

Tabla 7.

Consideramos que la participación de María es genuina, pues en un momento de la discusión, ella hace énfasis en que en el sistema local del curso aún no se han definido rectas perpendiculares. Esta es una inquietud propia que refleja su preocupación por la

importancia de que los resultados que se deduzcan se hagan usando, exclusivamente, elementos del sistema teórico que están construyendo. Las intervenciones de María también nos llevan a considerar su participación como autónoma. Ella manifiesta tener conciencia de lo que implica el hecho de que una conjetura esté muy localizada y sus aportes se dan por iniciativa propia.

La participación de Leopoldo es poco autónoma, ya que él se da cuenta de la inconsistencia entre su conjetura y su construcción a partir de la guía de la profesora, quién, a través de las relaciones lógicas de un enunciado condicional, le hace notar el error que cometieron al plantear la conjetura de manera recíproca a la construcción que realizaron con Darío. Igualmente, la participación de Leopoldo es poco relevante debido a que al intentar mencionar propiedades complementarias para darle soporte deductivo a la conclusión de la conjetura, hace referencia a hechos geométricos de la representación visual de la misma. Tales hechos no tienen garantías y por ende su aporte no prospera.

Consideramos que la participación de Ignacio es poco genuina debido a que él refleja en sus intervenciones que no tiene muy claro si es válido usar un teorema, aún no incluido en el sistema teórico del curso, para avanzar en la demostración. Esto nos lleva a deducir que no se ha apropiado de las reglas del curso, pues en más de un episodio insiste en usar un criterio de congruencia que no hace parte del sistema teórico local.

En el episodio 12 la profesora reconoce la originalidad de la idea de Juan y le pregunta por algunos pasos en la descripción de su construcción. Por ende, consideramos su participación como original, ya que en sus intervenciones muestra una propuesta que no había sido considerada por la profesora y esta se constituye en un ejemplo de la concordancia esperada entre una construcción efectuada y su correspondiente conjetura. Así mismo, la participación de Juan es relevante puesto que, en el episodio 16, propone usar un teorema ya incluido en el sistema teórico que aún no se había usado, y este hecho permite deducir un resultado que previamente los estudiantes habían intentado concluir pero que los elementos del sistema no lo permitían en ese momento. Tal acción permite avanzar en la demostración.

Consideramos que la participación de Orlando es autónoma y genuina, en la medida en que, él intenta aportar ideas propias para convencer a los demás de porqué algunas de las conjeturas analizadas, en gran grupo, no permiten abarcar una gama de casos de manera más general. Sus aportes reflejan el grado de conciencia que tiene, respecto a la formulación del enunciado de una conjetura a manera condicional, de modo que reconoce cuando un elemento hace parte del antecedente o del consecuente, según la redacción de la conjetura. En el episodio 18 Orlando anticipa, de acuerdo a las reglas del curso, la manera en que se va a organizar la cadena deductiva para la demostración del teorema, teniendo en cuenta el orden de los condicionales y reflejando que es consciente de la importancia de tener todas las garantías en cada uno de los pasos de la demostración. Por esto, consideramos que su participación también es relevante.

La participación de Germán es autónoma y genuina, pues él también aporta ideas propias para convencer a los demás de porqué una de las conjeturas analizadas, en gran grupo, está muy restringida y no abarca una mayor generalidad. En sus intervenciones manifiesta tener conciencia de lo que implica el hecho de que una conjetura esté muy localizada.

La participación de Daniel es autónoma, genuina y relevante puesto que, él por su propia cuenta intentó desarrollar una demostración para el teorema y aunque en su intento usó elementos que no hacían parte del sistema teórico en ese momento, lo hizo con plena conciencia de que esos elementos debían ser posteriormente incluidos, acción que refleja la responsabilidad con que llevó a cabo la tarea. Además es relevante, en el sentido de que el intento de Daniel contribuyó a resaltar la necesidad de incluir más propiedades en el sistema teórico del curso, en función de poder avanzar en la demostración.

La participación de Henry es genuina, ya que el estudiante reconoce que en su intento de demostración de la conjetura partieron de una definición diferente para triángulo isósceles, en relación con la incluida en el sistema teórico del curso, lo cual conlleva a que su intento de demostración no sea válido. Igualmente, los aportes que Henry hace son útiles para el desarrollo de la demostración y sus intervenciones permiten llegar a un punto en que los

estudiantes son conscientes de que deben deducir de alguna forma la congruencia entre un par de triángulos para llegar al resultado deseado de manera colectiva.

Por último, consideramos que la participación de Darío es relevante y autónoma. En el episodio 19, el estudiante por su propia cuenta buscó un caso en que no se cumpliera la condición asumida como cierta, respecto a los triángulos isósceles y el caso en que las alturas caen en los lados. Al encontrar un contraejemplo y mostrarlo en la clase, su intervención permitió evidenciar que la demostración realizada para el teorema Triángulo isósceles – alturas congruentes no había tenido en cuenta el caso en que las alturas estuvieran por fuera del triángulo y por ello el teorema se restringió a solo triángulos acutángulos.

Anexo 5

Frecuencias de participación de los estudiantes por códigos

En la siguiente tabla presentamos la cantidad de veces que aparece cada uno de los códigos, correspondientes a los tipos de acciones de participación de los estudiantes, en los 19 episodios que comprenden la reconstrucción del teorema. Estos códigos hacen parte de las categorías de análisis. Los códigos en amarillo corresponden a los indicadores de las categorías relacionadas con el enunciado, los códigos en verde corresponden a los indicadores pertenecientes a la demostración y los códigos en azul corresponden a los indicadores relacionados con el sistema teórico.

Episodio Código	Episodio																			Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
<i>E-Inter-IdenObj</i>	1	0	0	4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
<i>E-Inter-AludProp</i>	1	1	0	1	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
<i>E-Inter-RepDado</i>	5	1	0	1	1	0	2	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	13
<i>E-Inter-FormEst</i>	3	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
<i>E-Inter-AntiSol</i>	1	0	0	3	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
<i>E-Explo-HerrEval</i>	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
<i>E-Explo-HerrIden</i>	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	6
<i>E-Explo-HerrRela</i>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>E-IdenReg-Det</i>	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>E-IdenReg-Rela</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>E-IdenArg-PropComp</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<i>E- Formu-AnteCons</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2
<i>E- Formu-Enun</i>	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
<i>E- Formu-Concor</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
<i>E- Formu-Revis</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	1	0	0	5
<i>D- Explo-RepAnte</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	4
<i>D- Explo-IdenProp</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	0	0	4	9
<i>D- Explo-UsConclu</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2
<i>D- Explo-EncadPro</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2
<i>D- Selec-EstaRela:</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	3
<i>D- Selec-EncaDedu</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	3
<i>S- Selec-IdenPart</i>	0	0	2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	8
<i>S- Selec-AsegDedu</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	1	1	0	1	0	7

Tabla 3.

Respecto al enunciado, los códigos más representativos son *E-Inter-RepDado*, *E-Inter-IdenObj*, *E-Inter-AludProp*, *E-Inter-FormEst*, *E-Inter-AntiSol* y *E-Explo-HerrIden*. Consideramos que el primer código (*E-Inter-RepDado*), alusivo a la representación de los objetos geométricos dados, es el que más aparece debido a que los estudiantes necesitan tener una representación inicial del objeto geométrico sobre el cual van a indagar. Por lo general, vemos que en la construcción de tal representación, los estudiantes identifican los objetos geométricos involucrados (*E-Inter-IdenObj*). Posterior a esta construcción y haciendo uso de la geometría dinámica, los estudiantes llevan a cabo las demás acciones representativas en este componente tales como aludir a las propiedades de los objetos involucrados (*E-Inter-AludProp*), formular posibles estrategias de resolución (*E-Inter-FormEst*), hacer anticipaciones de las posibles soluciones (*E-Inter-AntiSol*) y usar herramientas en Cabri para identificar nuevas propiedades (*E-Explo-HerrIden*).

A partir de estos códigos representativos de las acciones de participación de los estudiantes en el enunciado del teorema vemos que “la geometría dinámica es un elemento más que favorece la generación de un ambiente de indagación, en el que su uso para explorar y experimentar la convierte en herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración” (Perry, et al., 2012a, p. 130). Sin embargo, resaltamos que los códigos *E-Explo-HerrRela*, *E-IdentReg-Det*, *E-IdentReg-Rela* y *E-IdentArg-PropComp*, solo aparecen 1 vez. Estos códigos tienen en común que tratan sobre hallar regularidades o patrones claves entre propiedades ya identificadas en la construcción geométrica y, a nuestro parecer, la poca aparición de este tipo de acciones se debe al proceso de familiarización que llevaron a cabo los estudiantes con el software Cabri. Es decir, a la par que los estudiantes del curso objeto de estudio fueron partícipes de una comunidad de práctica y aprendieron a demostrar, también fueron aprendiendo a usar el programa de geometría dinámica, pues no tuvieron una inducción previa sobre el manejo de este software.

En cuanto a la demostración, el código que más aparece es *D-Explo-IdenProp* y su frecuencia es bastante amplia respecto a los demás códigos de esa categoría. Consideramos que esto se debe a la construcción colectiva que se lleva a cabo en el curso de las

demostraciones que se realizan en gran grupo. El hecho de que cada estudiante pueda ejercer su derecho a opinar, respetando el punto de vista de los demás compañeros, hace hincapié en dos aspectos. Por un lado, favorece en los estudiantes la posibilidad de aceptar que es legítima la opinión del otro (Ortiz & Perafán, 2004). Por otra parte, los estudiantes tienen la libertad de generar aportes a través de propiedades complementarias mediante las cuales, ellos creen que se puede tener un soporte deductivo para la conclusión de la demostración (*D- Explo-IdenProp*). Esto induce de manera natural la interacción social entre los miembros de la comunidad para llegar a un acuerdo común y por ende, tiene sentido que este código sea el más representativo en cuanto al tipo de acciones de esta categoría.

Por último, en los códigos referentes al sistema teórico podemos apreciar que los dos códigos de esta categoría, *S- Selec-IdenPart* y *S- Selec-AsegDedu*, tienen prácticamente la misma frecuencia a lo largo de la reconstrucción del teorema. Esto hace hincapié en la apropiación, de manera general, que tuvieron los estudiantes de las normas del curso a partir del sistema de reglas compartido. Así, el hecho de que la frecuencia de estos dos códigos, con siete y ocho apariciones como se aprecia en la tabla 3, sea una de las más altas en toda la reconstrucción del teorema, nos permite evidenciar que la genuinidad fue una de las características que más lograron adquirir los estudiantes en el desarrollo de este teorema.