

**MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS  
MEDIDAS DE POSICIÓN**



María Camila Riveros Carvajal

Anderson Camilo Ballesteros Samboní

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencia y Tecnología  
Departamento de Matemáticas  
Licenciatura en Matemáticas  
Bogotá, D.C.

2025

# MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE POSICIÓN



María Camila Riveros Carvajal  
Código: 2020140043

Anderson Camilo Ballesteros Samboní  
Código: 2020140004

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
Licenciado y Licenciada en Matemáticas

Director:  
Felipe Jorge Fernández Hernández  
Magister en Estadística

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencia y Tecnología  
Departamento de Matemáticas  
Licenciatura en Matemáticas

Bogotá  
2025

## DEDICATORIA

*Este trabajo se lo dedico a mi mamá Sol Carvajal, por formarme como el ser humano que soy, por su comprensión, por su amor, por su empeño en hacer de mí una persona profesional y por brindarme todas las herramientas necesarias para serlo, a mi familia y a mi amigo Anderson Ballesteros.*

*Camila Riveros*

*Este trabajo se lo quiero dedicar, en primer lugar, a mi hermana, Angie Ballesteros, por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida. Gracias por ser la persona que más confía en mí, que me alienta a ser mejor cada día, y por inspirarme con su valentía y plenitud. Todo lo que soy en la actualidad te lo debo. Agradezco tus consejos, tu calidez y el amor que me das todos los días.*

*En segundo lugar, quiero dedicar este logro a Camila Riveros, mi compañera en este trabajo de grado y una muy querida amiga. Gracias por tu paciencia, compromiso y apoyo durante el desarrollo de este documento y en el camino que hemos recorrido juntas en la carrera. Admiro profundamente tu determinación y dedicación, y me siento muy afortunado de haber compartido este proceso contigo.*

*Camilo Ballesteros*

## AGRADECIMIENTOS

*Con todo el amor a mi mamá Sol Carvajal por darme todas las oportunidades necesarias, por su cariño, por brindarme su apoyo incondicional y por su notable esfuerzo. A Dios, por darme la sabiduría y el vigor necesarios para la realización del presente trabajo. A mis tíos y tías: Diego, Carlos, Dora, Johanna y Claudia por su gran ayuda durante toda mi carrera. A mi abuelita María Ortiz por haber sido de las mujeres más fuertes que conozco y por enseñarnos a ser unidos como familia. A las demás personas de mi familia, por contribuir a mi formación como persona. A mi gata Tara por acompañarme en todas mis noches en vela. Sin lugar a duda, agradezco inmensamente a mi compañero y gran amigo Anderson Ballesteros, por hacer de este trabajo una realidad, por poner su esencia en cada una de las páginas, por dar y darme lo mejor de sí, y por su linda amistad. Camila R.*

*A mi familia, por ser el pilar fundamental de mi vida, a mi papá y a mi mamá, por su amor y cariño, a mi hermana Angie y a mi sobrino Santiago, por toda la ayuda brindada. A mi más cercana amiga, Camila Riveros, por su compañía incondicional, su amor y sinceridad, además de que, sin su creatividad, dedicación y talento, este trabajo no podría haber sido realizado. Camilo B.*

*A Angie Ballesteros por su colaboración constante y por brindar siempre su mejor esfuerzo para que este trabajo se realizara de la mejor manera, dando los mejores consejos.*

*Con cariño a Miguel Montealegre por brindarnos su apoyo en la adquisición de los materiales necesarios y por tener siempre la mejor disposición para ayudarnos.*

*A nuestros amigos y nuestras amigas: Andrea Martínez, Laura Barbosa, Laura Mirquez, Oscar Torres, Pedro Celis, Sandra Villamil, Paola Palacios y demás personas que nos acompañaron a lo largo de la carrera y contribuyeron de múltiples formas en el desarrollo de este documento.*

*Al profesor Felipe Fernández, por brindarnos sus conocimientos y por acompañarnos en este proceso y a la Universidad Pedagógica Nacional y en especial, al Departamento de Matemáticas, ya que contribuyeron en nuestro desarrollo personal y profesional.*

## CONTENIDO

1. Preliminares.....	10
1.1. Introducción.....	10
1.2. Descripción de la problemática .....	12
1.3. Justificación .....	14
1.4. Objetivos.....	19
1.4.1. Objetivo General.....	19
1.4.2. Objetivos Específicos .....	19
2. Marco de referencia.....	20
2.1. Medidas de Posición.....	20
2.1.1. Medidas de posición desde la Estadística.....	20
2.1.1.1. Definición de cuantil .....	21
2.1.1.2. Cálculo de un cuantil para datos no agrupados .....	23
2.1.1.3. Cálculo de un cuantil para datos agrupados .....	25
2.1.1.4. Cuartiles.....	29
2.1.1.5. Deciles y Percentiles.....	32
2.1.2. Medidas de posición desde la enseñanza.....	33
2.1.2.1. Errores reportados en la literatura .....	33
2.1.2.2. Medidas de posición en los textos escolares .....	37
2.1.3. Medidas de posición desde el marco curricular.....	48
2.1.3.1. Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (LCM).....	48
2.1.3.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM).....	50
2.1.3.3. Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (DBA) .....	51
2.2. Materiales Didácticos .....	52
2.3. Secuencia de actividades .....	54

3.	Diseño del material didáctico y de la secuencia de actividades .....	57
3.1.	Material didáctico: Cuantilízalo en Parche.....	57
3.1.1.	Descripción del Material .....	58
3.1.2.	Propósitos del material .....	63
3.1.3.	Posibles errores de uso .....	63
3.2.	Secuencia de actividades .....	64
3.2.1.	Actividad 1: Acercádonos a los cuartiles .....	65
3.2.2.	Actividad 2: Descubramos la fórmula para determinar cuantiles.....	69
3.2.3.	Actividad 3: Apliquemos la fórmula para determinar deciles .....	76
4.	Implementación de la prueba piloto .....	81
4.1.	Población .....	81
4.2.	Descripción de la implementación .....	81
4.3.	Análisis de la implementación.....	82
4.3.1.	Desarrollo de las guías.....	83
4.3.1.1.	Observaciones Guía 1 .....	83
4.3.1.2.	Observaciones Guía 2.....	89
4.3.1.3.	Observaciones Guía 3.....	97
4.3.1.4.	Uso del material.....	102
5.	Resultados .....	107
6.	Conclusiones y recomendaciones.....	118
	Referencias .....	121
	Anexos .....	128

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Puntaje ICFES.....	16
<b>Figura 2.</b> Posición de los cuantiles en una muestra de $N$ datos donde $N = s - 1 + 2 + m * s$ .....	23
<b>Figura 3.</b> Histograma de frecuencias absolutas acumuladas .....	26
<b>Figura 4.</b> Estructura curricular.....	49
<b>Figura 5.</b> Criterios para clasificar los materiales según su utilidad.....	53
<b>Figura 6.</b> Clasificación del material Cuantilízalo en Parche .....	58
<b>Figura 7.</b> Elementos que conforman el material didáctico diseñado .....	59
<b>Figura 8.</b> Foto del carril posicionador .....	59
<b>Figura 9.</b> Ficha para escribir cada dato.....	60
<b>Figura 10.</b> Pinzas para identificar cuartiles cuando estos son datos.....	60
<b>Figura 11.</b> Pinzas para identificar cuartiles cuando estos son el resultado de un promedio	61
<b>Figura 12.</b> Pinzas para identificar deciles cuando estos son datos .....	61
<b>Figura 13.</b> Pinzas para identificar deciles cuando estos son el resultado de un promedio ..	62
<b>Figura 14.</b> Separadores .....	62
<b>Figura 15.</b> Uso de la pinza verde para identificar el dato central .....	84
<b>Figura 16.</b> Afirmación incorrecta realizada por un grupo .....	84
<b>Figura 17.</b> Respuesta parcial realizada por un grupo .....	84
<b>Figura 18.</b> Respuesta incorrecta del ítem dos del segundo punto.....	85
<b>Figura 19.</b> Error de identificación del número entre dos cuartiles. ....	85
<b>Figura 20.</b> Error de generalización mal realizada.....	86
<b>Figura 21.</b> Error de lenguaje.....	86
<b>Figura 22.</b> Respuesta incorrecta del ítem seis del sexto punto .....	86
<b>Figura 23.</b> Respuesta incorrecta del ítem uno del séptimo punto .....	87
<b>Figura 24.</b> Error al asignar un valor porcentual específico a un valor .....	87
<b>Figura 25.</b> Ubicación de separadores excluyendo el $Q2$ .....	88
<b>Figura 26.</b> Error al comunicar la respuesta.....	90
<b>Figura 27.</b> Respuesta que no atienden a lo pedido .....	90
<b>Figura 28.</b> Respuesta no acorde a la solicitud .....	91
<b>Figura 29.</b> Error de comunicación en la respuesta .....	91

<b>Figura 30.</b> Error de reconocimiento en el octavo punto .....	93
<b>Figura 31.</b> Error de reconocimiento en el octavo punto .....	93
<b>Figura 32.</b> Error de reconocimiento en el octavo punto .....	94
<b>Figura 33.</b> Error cometido en el octavo punto .....	94
<b>Figura 34.</b> Error en el octavo punto .....	95
<b>Figura 35.</b> Error en el octavo punto .....	95
<b>Figura 36.</b> Respuesta incorrecta del séptimo ítem del noveno punto .....	96
<b>Figura 37.</b> Respuesta incorrecta del séptimo ítem del noveno punto .....	96
<b>Figura 38.</b> Respuesta incorrecta del octavo ítem del noveno punto .....	96
<b>Figura 39.</b> Afirmación errónea dada por un grupo .....	97
<b>Figura 40.</b> Error de comunicación en la respuesta .....	98
<b>Figura 41.</b> Error al confundir la notación .....	98
<b>Figura 42.</b> Afirmación errónea con la notación.....	98
<b>Figura 43.</b> Error en la identificación de los valores asociados con la notación.....	99
<b>Figura 44.</b> Error en la selección de los datos por uso incorrecto de la fórmula .....	100
<b>Figura 45.</b> Error en la organización de los datos .....	101
<b>Figura 46.</b> Error cometido por un grupo al tomar el valor posicional.....	101
<b>Figura 47.</b> Error al comunicar la respuesta.....	102
<b>Figura 48.</b> Error en la asociación de la cantidad porcentual.....	102
<b>Figura 49.</b> Error al excluir el segundo cuartil.....	103
<b>Figura 50.</b> Cálculo correcto de la posición de un decil .....	104
<b>Figura 51.</b> Error en la organización de los datos .....	104
<b>Figura 52.</b> Error en la elección de la pinza requerida.....	105
<b>Figura 53.</b> Uso inadecuado de la pinza.....	106
<b>Figura 54.</b> Uso inadecuado de los separadores.....	106
<b>Figura 55.</b> Respuesta al segundo ítem del segundo punto de la Guía #1 .....	107
<b>Figura 56.</b> Respuesta al tercer punto de la Guía #3 .....	107
<b>Figura 57.</b> Respuesta al octavo punto de la Guía #3 .....	108
<b>Figura 58.</b> Respuesta al sexto punto de la Guía #3.....	109
<b>Figura 59.</b> El material ‘Cuantilízalo en Parche’ siendo usado adecuadamente por un grupo de estudiantes.....	110

<b>Figura 60.</b> Respuesta al tercer ítem del octavo punto de la Guía #2 .....	110
<b>Figura 61.</b> Apoyo visual al discurso de una respuesta del punto cuatro de la Guía #2 .....	111
<b>Figura 62.</b> Beneficio del uso de los separadores .....	112
<b>Figura 63.</b> Acción realizada por una estudiante en la conversación con la FEM.....	113
<b>Figura 64.</b> Cuantilízalo en Parche con los datos de la actividad 1 .....	114

## 1. PRELIMINARES

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Actualmente la estadística se posiciona como una disciplina sumamente importante en todos los ámbitos, no solo educativos, sino también sociales, tecnológicos, políticos, entre otros. Por esta razón, es de vital importancia formar personas cultas estadísticamente pues de esta manera se contribuye a generar ciudadanas<sup>1</sup> críticas para la sociedad, que participen de manera activa en el desarrollo del país.

Teniendo en cuenta lo mencionado el Ministerio de Educación Nacional colombiano (MEN) (2002, citado por Garzón, 2018) y la experiencia personal de las docentes en formación a cargo de este documento se puede afirmar que, aún con el crecimiento y relevancia que ha tomado la estadística en los últimos años, se evidencia una clara deficiencia en el sistema educativo colombiano con respecto a dicha disciplina. Pues, muchas veces esta se aborda desde el currículo de la asignatura de Matemáticas lo que genera - como se explicará con más detalle en la sección de definición de la problemática - que sea estudiada en el último periodo escolar o prácticamente no sea enseñada.

En suma, al realizar una revisión documental utilizando las fases descritas por Martínez y Palacios (2023) se evidenció que, entre los objetos estadísticos de la educación, los cuantiles o las medidas de posición<sup>2</sup> son relegadas, pues en su mayoría los documentos relacionados con el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística se enfocan en las medidas de tendencia central (MTC); como se evidencia en los trabajos de Barragán (2011), Pinzón (2012), Santa (2015), Vallejo y Fernández (2022), Reyes, et al (2013), Farigua (2016), Grijalba (2021), Ramírez y Ramírez (2023), Zapata (2018), Zorrilla, et al (2022), Fernández, et al (2007), Ramírez, et al (2024), Arias y Silva (2012) y García y Sánchez (2023).

---

<sup>1</sup> Con el objetivo de hacer una lectura más fluida, a lo largo del documento se ha recurrido a escribir solamente pronombres y sustantivos femeninos, sin ignorar, que se está incluyendo a todos los géneros, esta aclaración es importante para no reconocer todas las presencias.

<sup>2</sup>En este documento, los cuantiles se denominan medidas de posición y se entiende que estas últimas pertenecen a las medidas de localización.

A pesar de ello, en los referentes curriculares de educación colombiana, se evidencia que las medidas de posición sí deben ser abordadas, al menos, desde noveno grado. Por ello, con este documento se busca aportar información acerca de la enseñanza y el aprendizaje de estas en estudiantes de educación básica secundaria y media.

Con este fin, y teniendo en cuenta lo mencionado por Navarrete (2017) y Arrieta (1998), quienes afirman que los materiales didácticos brindan beneficios que facilitan a las alumnas centrarse en los procesos de razonamiento, para el desarrollo de este trabajo se propone el diseño y validación de un material didáctico que aporte a la enseñanza y promueva un aprendizaje significativo de las medidas de posición, al facilitar la interpretación de estos, por medio de la visualización.

Este documento está organizado en cinco capítulos. En el primer capítulo, se encuentra esta introducción, la descripción de la problemática, la justificación y los objetivos del trabajo. En el segundo capítulo, se realiza una identificación de los aspectos teóricos asociados a las medidas de posición desde la disciplina Estadística y se exponen los posibles errores y dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de estas.

En el tercer capítulo, se describe el diseño del material y se presenta la realización de una secuencia de actividades en pro de introducir la noción de cuantil, construir la fórmula que determina la posición de este, emplear la misma para identificarlo en un conjunto de datos e interpretarlo. Posteriormente, en el cuarto capítulo, se exponen aspectos relacionados con la implementación de la propuesta a fin de validar el material por medio de la realización de un análisis derivado de la aplicación de dichas actividades. Luego, en el quinto capítulo se presentan los resultados provenientes principalmente de dicha implementación. Se finaliza el trabajo, en el sexto capítulo, con la presentación de conclusiones y recomendaciones, en donde se refiere entre otros aspectos, a la pertinencia de utilizar el material didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición y al aporte de este trabajo respecto a la insuficiencia de información tanto disciplinar como didáctica relativa al abordaje de dichas medidas para la educación básica secundaria y media.

## 1.2. DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Al analizar el actual papel de la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en la educación en Colombia se puede notar que no se le da la importancia necesaria. Para respaldar esta información, en primer lugar, se resalta que, desde la experiencia propia de las docentes en formación a cargo de este documento, adquirida en los diferentes espacios académicos de práctica, en distintos colegios públicos, se evidenció que, en la mayoría de estos, la Estadística se aborda en el último periodo del año escolar o no se trabaja. Esto se puede corroborar con algunos autores:

En las orientaciones curriculares colombianas direccionadas por el Ministerio de Educación Nacional se encuentra el desarrollo del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, lo cual se abarca y define en la gran mayoría de instituciones educativas como la asignatura de Estadística o Probabilidad. En algunas instituciones le dan campo aparte como materia independiente, pero esto no es el común. En otras, en cambio, usualmente se trabaja como parte del currículo de la asignatura de Matemáticas, pero ello hace que en algunos casos se relegue a lo último (MEN, 2002, como se citó en Garzón, 2018, p. 3)

En segundo lugar, Salcedo et al. (2020) mencionan que la Estadística no se incorpora en los primeros años del currículo, siendo enseñada generalmente a partir del noveno grado. Esta falta de consideración limita el desarrollo de habilidades estadísticas cruciales en las estudiantes, lo cual podría mejorar si se incluyera en etapas tempranas del proceso educativo.

Dicho esto, dado que la Estadística es en general relegada en el currículo de matemáticas, con mayor razón las medidas de posición no son abordadas, pues el poco tiempo que se dedica a la Estadística se enfoca en las medidas de tendencia central; por ejemplo, en un estudio realizado por Santa (2015) al preguntar: ¿De las siguientes herramientas estadísticas cuales conoce? el 100% de las estudiantes encuestadas de grado noveno afirman conocer las medidas de tendencia central, mientras que el 0% afirman conocer las medidas de posición y las medidas de desviación.

En suma, con base en las fases mencionadas por Martínez y Palacios (2023) se realiza una revisión documental con el objetivo de respaldar el hecho de que la posición prácticamente no son estudiadas en las aulas escolares. En esta se tuvieron en cuenta las siguientes bases de datos:

Google Académico, International Association for Statistical Education (IASE), Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada (GEEUG), Journal STORage (JSTOR) y Repositorios de algunas universidades colombianas<sup>3</sup>; se utilizaron las siguientes palabras claves: “enseñanza y aprendizaje de las medidas de localización”, “enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición” “enseñanza y aprendizaje de los cuantiles” “enseñanza y aprendizaje de cuartiles”, “material didáctico estadística”, “medidas de posición” “medidas de localización” “cuartiles, deciles y percentiles”, “cuantiles” y “estadística”; se definió un rango de tiempo de publicación del año 2007 al año 2024. Un resumen de los resultados arrojados se muestra en las siguientes tablas, si el lector quiere más información relacionada puede dirigirse al Anexo A.

**Tabla 1**

*Tipo de textos revisados*

<b>Documentos</b>	<b>Cantidad</b>
Artículos académicos	4
Tesis de pregrado	10
Tesis de maestría	4
Tesis de especialización	1
Documentos universitarios	1

**Tabla 2**

*Medidas estadísticas abordadas en los textos*

<b>Temática</b>	<b>Cantidad</b>
MTC	14
Medidas de posición	1
Medidas de localización	2
Medidas de dispersión	2

<sup>3</sup> Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional de Colombia, Universidad de los Andes, Universidad Distrital.

*Nota.* Gracias a la tabla se evidencia el dominio de las MTC en comparación a otras medidas estadísticas, a pesar de que ninguna de las palabras clave estaban directamente relacionadas con estas, es más, varias de las palabras clave estaban directamente relacionadas con las medidas de posición. Mientras que el 70% de los textos revisados aborda las MTC solo el 5% aborda las medidas de posición.

En resumen, dicha revisión soportó la supremacía de las MTC. Si bien, en algunos se menciona que trabajan las medidas de localización<sup>4</sup>, solo se enfocan en las medidas de localización centralizadas, lo que puede generar la idea errónea de que estas son las únicas medidas o las más adecuadas de usar. En este sentido, esta revisión permitió evidenciar, primero, la falta de investigación o propuestas relacionadas con las medidas de localización no centralizadas, es decir, las medidas de posición y segundo, evidenciar el predominio que tienen las medidas de tendencia central dentro de la categoría de medidas de localización.

Por todo lo anterior, a modo de aportar en parte de la solución a esta problemática se hace útil diseñar un material didáctico, el cual favorezca y potencie la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición, en especial los cuartiles y los deciles. La realización de una serie de actividades específicas con un determinado material didáctico constituye el punto de inflexión para la comprensión de determinados conceptos matemáticos.

### **1.3. JUSTIFICACIÓN**

Tomando como referente el Ministerio de Educación Nacional colombiano (MEN) se puede mencionar que la Estadística ha tomado importancia en el último siglo. Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del MEN (1998), algunos de los dominios de la Estadística han

---

<sup>4</sup> En Sarmiento y Fernández (2012) se menciona que “Algunos ejemplos de medidas de localización son: el máximo de los datos, el mínimo de los datos, la media aritmética, los cuantiles y la moda.” (p. 87), por lo cual se puede notar que dentro de las medidas de localización se encuentran las medidas de posición (o cuantiles) y las medidas de tendencia central (como la media y la moda).

favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística, entre otras, y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática.

Además, es evidente que el mundo actual reclama ciudadanas cultas estadísticamente. Esto se ve reflejado en el artículo de Batanero (2000), quien se respalda en varios autores para mostrar la importancia de la educación estadística. Ottaviani (1998) y Holmes (1980) (citados en Batanero, 2000), refieren, como un primer ejemplo de esta importancia, que el estudio de la estadística ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva. Otros ejemplos son:

La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Para orientarse en el mundo actual, ligado por las telecomunicaciones e interdependiente social, económica y políticamente, es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados. (Holmes, 1980, como se citó en Batanero, 2000, p. 1)

Es el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas ha tenido hasta hace unos años, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: "En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico". (Fischbein, 1975, como se citó en Batanero, 2000, p. 1)

Teniendo clara la importancia de la educación estadística, es relevante observar que objetos estadísticos son incluidos en el aula escolar. Entre dichos objetos, se pueden encontrar las medidas de posición, las cuales "son puntuaciones que se escogen para establecer la ubicación de un subgrupo de datos en relación al resto y son especialmente útiles en la interpretación porcentual de la información" (Esquivel et al., 2017, párr. 1). Estas medidas se traen a colación, debido a su importancia, ya que son utilizadas en la metodología de numerosas herramientas estadísticas para resolver problemas de gran variedad de campos del conocimiento. Por ejemplo,

simulación estadística (método de Montecarlo), campos aleatorios (selección de umbrales) o análisis de valores extremos (periodos de retorno). (Esquivel et al., 2017.)

De la misma manera, se puede mencionar que otro de los papeles importantes que desempeñan las medidas de posición, es el de ser usadas para mostrar los resultados de diferentes pruebas realizadas por las estudiantes, por ejemplo, “PISA presenta los resultados en tres modalidades diferentes para cada una de las áreas evaluadas ... distribución de las y los participantes en percentiles según su puntaje” (Icfes, 2024, p. 16). Otro ejemplo de ello son los resultados de la prueba SABER 11 (Figura 1).

**Figura 1.**

*Puntaje ICFES*



*Nota.* En la Figura al observar la respuesta a la pregunta “¿EN QUÉ PERCENTIL SE ENCUENTRA?” Se evidencia el uso de las medidas de posición para dar a conocer los resultados del ICFES (SABER 11) a el estudiante con respecto a todos los demás estudiantes que

presentaron la prueba ese mismo año. Tomado de Galán (2020), Facebook

<https://web.facebook.com/clasesconjuan/photos/a.313171366137953/876679666453784/>

Adicional a esto, al revisar los documentos curriculares dispuestos por el MEN, se encontró que, al menos curricularmente, las medidas de posición sí deben ser estudiadas en la educación básica secundaria y media. Por ejemplo, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] para décimo y undécimo grado se encontró el estándar: “Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización<sup>5</sup>, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)”(MEN, 2006, p. 89); en los Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] para noveno grado de la educación se menciona el derecho: “Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.” (MEN, 2016, p. 71). Así los documentos curriculares mencionan que se deben usar y comprender estas medidas, además, se deben comparar sus diferentes tipos, poder representarlas y describirlas.

En relación con el párrafo previo, se puede afirmar que lo ordenado por el MEN (usar y comprender las medidas de posición) se ve reflejado en los textos escolares utilizados en la educación colombiana como se evidencia en la sección *Medidas de posición desde la enseñanza*. En resumen, según los textos, las medidas de posición deben ser estudiadas desde grado octavo hasta grado undécimo de la educación.

En suma, lo que se viene hablando es respaldado por Lucrecia y Gordillo (2012) quienes afirman que se tiene una vinculación con las medidas de tendencia central, pues, la enseñanza de estas es más común durante el bachillerato. Adicionalmente, mencionan que el enseñar otras medidas distintas a las MTC es una oportunidad de extender el panorama de aplicación en la educación estadística.

Por todo lo anterior se puede concluir que es necesario darle una mayor importancia a la estadística dentro del currículo de la educación colombiana. Segundo, (teniendo en cuenta lo

---

<sup>5</sup> Algunos documentos curriculares como los EBCM (2006) y los DBA (2016) nombran a las medidas de posición como medidas de localización.

presentado en la Tabla 2 y lo que se viene afirmando), hay que darle protagonismo a medidas estadísticas diferentes de las MTC como lo son las medidas de posición.

Así, teniendo el enfoque en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición, se puede contemplar el uso de materiales didácticos para favorecer el desarrollo de dicho proceso. En un primer lugar, se toma en cuenta la opinión del MEN, el cual hace referencia a dichos materiales en los EBCM:

Los recursos didácticos pueden ser materiales estructurados con fines educativos que [...] proponen nuevos retos y perspectivas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas [...] Todo esto facilita a los alumnos centrarse en los procesos de razonamiento propio de las matemáticas y, en muchos casos, puede poner a su alcance problemáticas antes reservadas a otros niveles más avanzados de la escolaridad. (MEN, 2006, p. 75)

En un segundo lugar, Navarrete (2017) declara que el uso de materiales didácticos genera numerosos beneficios tanto en el desarrollo personal y social del alumnado como en su nivel intelectual y que, por lo tanto, la realización de actividades específicas con un determinado material didáctico constituye el punto de inflexión para la comprensión de determinados conceptos matemáticos.

Adicionalmente, algunos de los beneficios que genera el utilizar materiales didácticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje son: ofrecer actividades matemáticas atractivas y motivadoras para hacer cambiar la actitud del alumnado hacia el ámbito de las matemáticas; permitir al alumnado participar activamente y realizar actividades de manera autónoma; contribuir a proporcionar un entorno idóneo para la implantación de situaciones- problema, así como situaciones de aprendizaje significativas y entretenidas; generar la producción de interacciones entre el alumnado posibilitando, el dialogo, debate y colaboración. (González, 2010, como se citó en Navarrete, 2017)

Por lo tanto, en este trabajo se propone realizar el diseño de un material didáctico que propicie el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición (en especial los cuartiles y

los deciles), facilitando la comprensión de la definición conceptual de las mismas por medio de la visualización.

#### **1.4. OBJETIVOS**

##### ***1.4.1. Objetivo General***

Planificar, elaborar y validar un material didáctico para promover la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición (en especial cuartiles y deciles<sup>6</sup>) en el aula escolar, dirigido a estudiantes de grado noveno, décimo o undécimo.

##### ***1.4.2. Objetivos Específicos***

- ✓ Presentar aspectos teóricos relevantes asociados a las medidas de posición desde la disciplina Estadística.
- ✓ Identificar posibles errores o dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición reportadas en la literatura, para valorar el uso del material.
- ✓ Diseñar un material didáctico que fomente la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición, consonante con dificultades y aspectos teóricos identificados en los referentes.
- ✓ Proponer una secuencia de actividades que ilustre algunos ejemplos de cómo utilizar el material didáctico.
- ✓ Poner a prueba el material didáctico diseñado, por medio de la implementación de las actividades planificadas, para valorar el aporte a la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición.

---

<sup>6</sup> Por la naturaleza del material no se contemplan los percentiles

## 2. MARCO DE REFERENCIA

El presente capítulo tiene como objetivo establecer el marco de referencia teórico y conceptual que fundamenta tanto la elaboración del material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición como el diseño de la secuencia de actividades que permite su implementación.

### 2.1. MEDIDAS DE POSICIÓN

En esta sección se presenta el estudio realizado en torno a las medidas de posición. Inicialmente, se revisan dichas medidas desde una perspectiva disciplinar, y se exponen algunas de las definiciones que han dado diferentes autores. Luego, se presenta cómo se han abordado las medidas de posición en la educación colombiana a través de una revisión realizada a varios textos escolares. Por último, se exhibe lo que plantean algunas políticas de educación en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de estas medidas.

#### 2.1.1. *Medidas de posición desde la Estadística*

Las medidas o resúmenes numéricos surgen de la necesidad de modelar la variación estadística en diferentes aspectos: localización, dispersión, forma y concentración. Si bien para Mendenhall et al. (2009) estas medidas son una de las herramientas que se tienen para hacer inferencias acerca de una población a partir de la información contenida en una muestra, para así poder construir una imagen mental de los datos, los resúmenes numéricos también son utilizados con mucha frecuencia para la descripción de datos sin pretensiones inferenciales. En el presente trabajo se centra la atención en los cuantiles, medidas que pueden ser calculadas para variables estadísticas cuantitativas. En este documento, los cuantiles se denominan medidas de posición y se entiende que estas últimas pertenecen a las medidas de localización.

Por ello, en este apartado se muestra el estudio realizado acerca de las medidas de posición desde la disciplina de la Estadística. Se inicia con la exposición de algunas definiciones de cuantiles, así como de los procedimientos utilizados para su cálculo. Luego, se muestran definiciones de cuartiles, deciles y percentiles, que como se verá, están contenidos en la definición de cuantiles

debido a que son casos particulares de estos. Adicional a ello, a la par de la definición de cuartiles, se muestran algunos métodos para su cálculo.

#### *2.1.1.1. Definición de cuantil*

Por un lado, Sarmiento y Fernández (2012) describen los cuantiles como aquellos valores de la variable estadística que, ordenados de menor a mayor, dividen a la distribución de datos en partes, de tal manera que cada una de ellas contiene la misma frecuencia. Adicional a esto, afirman que entre los cuantiles más conocidos se encuentran los Cuartiles ( $Q_i$ ), los Deciles ( $D_i$ ) y los Percentiles ( $P_i$ ).

La definición anterior es quizá general. Para dar precisión a ésta, se menciona a Fernández y Fuentes (1995) quienes afirman que los cuantiles son los  $s - 1$  valores de una variable que dividen una distribución de frecuencias absolutas en  $s$  partes con idéntica frecuencia. Estos autores, también afirman que si se quiere dividir el conjunto ordenado de valores de una variable  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$  (algunos de los cuales pueden ser iguales) en  $s$  partes con igual frecuencia, debe haber igual número de datos entre el valor inicial  $x_1$  (dato mínimo) y el primer valor de división  $C_1(s)$  (primer cuantil), que entre el  $i - \text{ésimo}$  valor divisorio  $C_i(s)$  ( $i - \text{ésimo}$  cuantil) y el siguiente, con  $i = 2, 3, \dots, s - 1$ . Se puede resaltar que, el  $s - \text{ésimo}$  cuantil coincide con el valor  $x_N$  (dato máximo).

Por otro lado, Luceño y González (2015) definen que un cuantil de orden  $\alpha$  (para cualquier valor  $\alpha$  entre 0 y 1) es cualquier valor  $x_\alpha$  que cumpla las dos desigualdades siguientes  $fr(x_i \leq C_\alpha) \geq \alpha$  y  $fr(x_i \geq C_\alpha) \geq 1 - \alpha$ . En otras palabras, un cuantil de orden  $\alpha$  es un valor que divide en dos partes específicas la distribución de datos a partir de una proporción o una frecuencia relativa que establece el  $\alpha$ . Esta proporción se puede evidenciar de la siguiente manera: la primera desigualdad: ' $fr(x_i \leq C_\alpha) \geq \alpha$ ' indica que al menos una proporción  $\alpha$  o la frecuencia relativa correspondiente a ese valor de los datos, es menor o igual a ese valor  $C_\alpha$ ; la segunda ' $fr(x_i \geq C_\alpha) \geq 1 - \alpha$ ' indica que al menos una proporción  $1 - \alpha$  o la frecuencia relativa correspondiente a ese valor, es mayor o igual a  $C_\alpha$ . Por ejemplo, si  $\alpha$  es 0.25 (un cuartil), entonces el cuantil de orden 0.25 es un valor tal que al menos el 25% de los datos es menor o igual a este valor, y al menos el 75% de los datos es mayor o igual a este valor.

Para profundizar en la definición dada por , Luceño y González (2015), se revisa a Fernández y Fuentes (1995), quienes mencionan que, en la representación gráfica de las variables estadísticas, los diagramas acumulativos de frecuencias relativas tratan de dar una aproximación de la curva de distribución teórica, a esta gráfica se denomina función de distribución (también conocida como “ojiva”),  $F(x)$ . Si esta función fuera continua, un cuantil de orden  $\alpha$  (con  $0 \leq \alpha \leq 1$ ), sería un valor  $x_\alpha$  de la variable cuya frecuencia relativa acumulada fuera igual a  $\alpha$ , dicho de otra manera,  $x_\alpha$  sería la solución de la ecuación  $F(x) = \alpha$ . Teniendo en cuenta lo anterior, Fernández y Fuentes (1995) señalan que cuando se plantea dicha ecuación en términos de la función de distribución empírica  $F^*(x) = f_r(X \leq x)$ , en la que  $f_r(X \leq x)$  indican la proporción de individuos cuyo carácter  $X$  no puede superar al valor  $x$ , la ecuación  $F^*(x) = \alpha$ , no tiene en general, solución.

Por todo esto, es necesario establecer algunos convenios para determinar las medidas de posición. Los convenios que plantean Fernández y Fuentes (1995) son:

- a) Se elegirá un valor que satisfaga la definición del cuantil, aunque dicho valor no sea uno de los de la variable.
- b) Se asumirá que la distribución de los datos dentro de cada clase es uniforme, procediendo, por ello, al cálculo de los cuantiles por interpolación lineal, en el caso de una distribución continua.<sup>7</sup>
- c) A partir de ahora, y para dar un carácter general al tratamiento de las medidas de posición de las variables discretas, aproximaremos el valor de la mediana y, en general, de los cuantiles (p. 137)

Para la aproximación referida procede de la siguiente manera: para el caso de variables continuas, la solución a la ecuación  $F^*(x) = \alpha$  es la abscisa que corresponde a una ordenada  $\alpha$  del diagrama acumulativo, y se resuelve con base en un razonamiento proporcional que se explica más adelante en el apartado llamado “Cálculo de un cuantil para datos agrupados”; para el caso de variables

---

<sup>7</sup> En el caso en el que la distribución de datos dentro de cada clase no sea uniforme, puede ocurrir una sobrestimación o subestimación de los cuantiles al utilizar una interpolación lineal. La elección del número de clases con la que se agrupa una distribución, así como de la longitud de cada clase debe ser sopesada con cuidado por el analista de datos.

discretas, no siempre existe solución a las condiciones  $fr(x_i \leq C_\alpha) \geq \alpha$  y  $fr(x_i \geq C_\alpha) \geq 1 - \alpha$  (Fernández y Fuentes, 1995) y una propuesta de aproximación se plantea en el siguiente apartado.

Así, para el desarrollo de este documento se entiende que los cuantiles son  $s - 1$  valores (no necesariamente datos de la variable) que dividen una distribución de frecuencias absolutas en  $s$  partes, de tal manera que cada una de ellas contiene la misma frecuencia. En ese sentido, teniendo en cuenta los vacíos en la definición presentados por Fernández y Fuentes (1995) se decide acoger los convenios plantados por dichos autores.

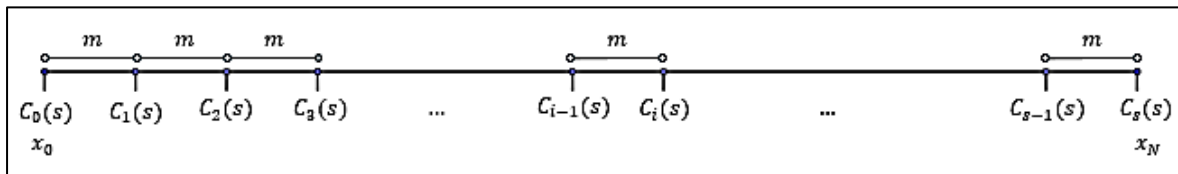
### 2.1.1.2. Cálculo de un cuantil para datos no agrupados

Con el fin de plantear el cálculo de los cuantiles en datos no agrupados se toma como base la propuesta de Fernández y Fuentes (1995). Para determinar un cuantil se inicia calculando la posición, es decir, el lugar que ocupa cada uno de los cuantiles  $C_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s - 1$ , que como se mencionó en las definiciones, dividen en  $s$  partes iguales al conjunto ordenado de valores  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$  de una variable.

Entre cada dos cuantiles consecutivos debe haber la misma cantidad de datos (sin incluir los cuantiles mismos). Si este número se denota como  $m$ , y se tienen  $N$  valores de la variable, entonces en total habrá:  $s - 1$  cuantiles, un valor inicial  $x_1$  o  $C_0(s)$ , un valor final  $x_N$  o  $C_s(s)$ , y  $m * s$  valores intermedios (los otros valores de la variable que no son cuantiles) (Figura 2). Por esto,  $s - 1 + 2 + m * s = N$ .

**Figura 2.**

*Posición de los cuantiles en una muestra de  $N$  datos donde  $N = s - 1 + 2 + m * s$*



*Nota.* Apoyo visual para la comprensión del cálculo de  $R[C_i(s)]$ .

Si se toma esta última igualdad y se despeja  $m$  como se muestra a continuación, obtenemos que la expresión que indica la cantidad de datos que hay entre cada par de cuantiles consecutivos es

$$n = \frac{N-1}{s} - 1.$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{N - (s - 1) - 2}{s} \rightarrow n = \frac{N - s + 1 - 2}{s} \rightarrow n = \frac{N - s - 1}{s} \rightarrow n = \frac{N}{s} - \frac{s}{s} - \frac{1}{s} \\ &\rightarrow n = \frac{N}{s} - \frac{1}{s} - 1 \rightarrow n = \frac{N - 1}{s} - 1 \end{aligned}$$

Ahora bien, a cada cuantil  $C_i(s)$  le corresponde una posición, la cual se denotará por  $R[C_i(s)]$ .

Para hallar esta posición inicialmente se debe tener en cuenta cuál es la cantidad de datos anteriores al cuantil de interés  $C_i(s)$ , para ello: primero, hay que tener presentes todos los cuantiles que están ubicados a la derecha de  $C_i(s)$ , es decir, desde  $C_1(s)$  hasta  $C_{i-1}(s)$  esto es  $i - 1$  cuantiles; segundo, se pueden considerar todos los datos que no son cuantiles, y que son menores a  $C_i(s)$ , es decir  $m * i$  datos; tercero, se debe de tener en cuenta el dato mínimo  $x_1$  o  $C_0(s)$ . Luego, es necesario contar al mismo cuantil  $C_i(s)$ , es decir un dato más.

En resumen, se tienen  $i - 1$  más  $m * i$  más uno (el mínimo), datos antes del cuantil  $C_i(s)$ , y como se hace necesario contar la posición del mismo cuantil ' $C_i(s)$ ' entonces  $R[C_i(s)] = (i - 1) + m * i + 2$ , o reescribiendo  $R[C_i(s)] = m * i + 2 + (i - 1)$  (evocar Figura 2).

Como se tiene que  $R[C_i(s)] = m * i + 2 + (i - 1)$  y  $m = \frac{N-1}{s} - 1$ , si se sustituye  $m$  en  $R[C_i(s)]$  se obtiene que  $R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} R[C_i(s)] &= \left( \frac{N-1}{s} - 1 \right) \cdot i + 2 + (i - 1) \rightarrow R[C_i(s)] = \frac{(N-1-s)i}{s} + 2 + (i - 1) \\ \rightarrow R[C_i(s)] &= \frac{(N-1-s)i + s(2 + (i - 1))}{s} \rightarrow R[C_i(s)] = \frac{Ni - 1i - si + s2 + si - s}{s} \\ \rightarrow R[C_i(s)] &= \frac{Ni + s - i}{s} \rightarrow R[C_i(s)] = \frac{Ni - i}{s} + \frac{s}{s} \rightarrow R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1 \end{aligned}$$

Después de determinar la posición, para calcular el cuantil  $C_i(s)$  se deben de considerar dos casos:

- i. Si  $R[C_i(s)]$  es un número entero, el cuantil  $C_i(s)$  es el dato que se encuentra en la posición  $R[C_i(s)]$ .
- ii. Si  $R[C_i(s)]$  es un número decimal, se toma la parte entera de este, ' $\llbracket R[C_i(s)] \rrbracket$ ', y el cuantil  $C_i(s)$  es el promedio de los datos que se encuentran en la posición  $\llbracket R[C_i(s)] \rrbracket$  y  $\llbracket R[C_i(s)] \rrbracket + 1$ .

Toda la información presentada en esta sección se utiliza para la creación de las actividades que evidencian el uso de material didáctico. En particular, en la *Actividad 2* los estudiantes construyen la fórmula para determinar la posición de un cuantil siguiendo un proceso supremamente similar.

### 2.1.1.3. Cálculo de un cuantil para datos agrupados

Fernández y Fuentes (1995) afirman que cuando se trabaja con datos agrupados se da por hecho que los datos se distribuyen uniformemente dentro de cada clase. Además, mencionan que con ayuda de la interpolación lineal se llega a la expresión que se encuentra a continuación, esta expresión se puede utilizar para calcular un cuantil  $C_i(s)$ .

$$C_i(s) = L_{i-1} + \frac{i \cdot N - F_{i-1}}{f_i} * a_i, \text{ cuando } i = 1, 2, \dots, s - 1.$$

Ahora, para comprender mejor el uso de esta expresión, a continuación, se explica la notación de cada uno de sus términos, y luego, se realiza una descripción de los mismos utilizando una representación gráfica como apoyo visual. Se tiene que:  $C_i(s)$  es el *i-ésimo* cuantil de un conjunto de  $N$  datos ( $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ ) resultante de dividir la distribución de frecuencias absolutas en  $s$  partes de idéntica frecuencia, con  $i = 1, 2, \dots, s - 1$ ;  $L_{i-1}$  es límite inferior de la clase correspondiente al  $C_i(s)$ ;  $F_{i-1}$  es la frecuencia absoluta acumulada de la clase anterior al  $C_i(s)$ ;  $f_i$  designa la frecuencia absoluta de la clase del  $C_i(s)$ ;  $a_i$  hace referencia a la amplitud del intervalo de la clase a la que pertenece el *i-ésimo* cuantil.

Inicialmente se quiere identificar la posición en la que se encuentra el dato ' $C_i(s)$ ' que comprende cierta cantidad porcentual con respecto al total de los datos, este cálculo se puede realizar mediante una regla de tres de la siguiente manera: por un lado, se tiene una distribución con un



correspondiente a la  $F_i$ . Todo lo anterior, se realiza con el fin de identificar la clase a la que pertenece  $C_i(s)$ .

Utilizando como apoyo la Figura 3, se observa que, en el histograma, el eje de las ordenadas representa las frecuencias acumuladas y el eje de las abscisas representa los datos que toma la variable. Como se mencionó  $F_{C_i(s)}$  se interpreta como la frecuencia acumulada de  $C_i(s)$ , entonces como ya se conoce la ubicación de  $F_{C_i(s)}$  en el eje  $y$ , a esta le corresponde un único  $C_i(s)$  ubicado en el eje  $x$ .

Como se puede observar en la Figura 3 el valor de  $C_i(s)$  es igual a la suma de la distancia entre el origen y el límite inferior de la clase a la que pertenece el cuantil buscado ' $L_{i-1}$ ' o ' $x_d$ ', más la distancia que hay desde  $x_d$  hasta  $C_i(s)$ . La distancia del origen a ' $L_{i-1}$ ' es el mismo  $L_{i-1}$ , por ende, ya se conoce. Ahora, solo hace falta calcular la distancia que hay desde  $x_d$  hasta  $C_i(s)$  para determinar el valor de  $C_i(s)$ .

Si se tienen los puntos  $A(x_d, F_{i-1})$  y  $B(x_e, F_i)$  y se realiza una interpolación lineal, se obtiene la recta  $AB$  y de ella el segmento  $AB$ . Adicional a esto, es necesario notar las siguientes intersecciones, las rectas  $x = x_d$  y  $y = F_{C_i(s)}$  se intersecan en el punto  $D(x_d, F_{C_i(s)})$ ; las rectas  $x = x_d$  y  $y = F_i$  en el punto  $D(x_d, F_{C_i(s)})$ ; la recta  $y = F_{C_i(s)}$  y el segmento  $AB$  se intersecan en el punto  $E$  que como se deduce de todo lo anterior tiene como coordenadas  $C_i(s)$  y  $F_{C_i(s)}$ , es decir,  $E(C_i(s), F_{C_i(s)})$ . Teniendo estos puntos identificados se pueden construir los triángulos  $\Delta CAB$  y  $\Delta DAE$ .

Recordando que lo que se quiere hallar es la distancia desde  $x_d$  hasta  $C_i(s)$  se observa que esta es igual a la longitud del segmento  $DE$ , entonces, con todo lo anterior se afirma que  $C_i(s) = L_{i-1} + DE$ . Por ende, se procede a calcular la longitud del segmento  $DE$  y para ello se utiliza la semejanza del  $\Delta CAB$  y del  $\Delta DAE$  como se muestra a continuación.

Teniendo en cuenta uno de los criterios de la definición de semejanza de triángulos, es correcto afirmar que  $\frac{DE}{DA} = \frac{CB}{CA}$ , entonces  $DE = \frac{CB}{CA} * DA$ . Adicionalmente, con ayuda de la Figura 3 se puede evidenciar que la longitud del segmento  $CB$  es igual a la amplitud de la clase ' $a_i = L_i - L_{i-1}$ ' a la que pertenece el cuantil buscado. También es importante notar que  $CA$  es la diferencia

$F_i - F_{i-1}$  y como se había dicho anteriormente  $F_i = F_{i-1} + f_i$ , entonces  $F_i - F_{i-1} = f_i$ . Por último, en cuanto al segmento  $DA$ , se había dicho que  $R = F_{C_i(s)} = \frac{i*N}{s}$ , si se observa la Figura 3 se puede evidenciar que esa es la distancia entre el origen y  $R$  o  $F_{C_i(s)}$ , adicional a esto, se puede divisar que  $F_{C_i(s)} = F_{i-1} + DA$ . Con ello, si se despeja  $DA$  y se realiza una sustitución se obtiene que  $\frac{i*N}{s} - F_{i-1} = DA$ .

A continuación, se sustituyen  $DA$ ,  $CB$  y  $CA$  en la expresión  $DE = \frac{CB}{CA} * DA$ , dando como resultado que  $DE = \frac{a_i}{f_i} * \frac{i*N}{s} - F_{i-1}$  o reescribiendo,  $DE = \frac{i*N - F_{i-1}}{f_i} * a_i$ . Finalmente, para calcular el  $i$ -ésimo cuantil,  $DE$  se reemplaza en la igualdad ' $C_i(s) = L_{i-1} + DE$ ', obteniendo que  $C_i(s) = L_{i-1} + \frac{i*N - F_{i-1}}{f_i} * a_i$ .

De otra manera, encontrando la ecuación de la recta  $AB$ , partiendo de que  $A(x_d, F_{i-1})$  y  $B(x_e, F_i)$  o que  $A(L_{i-1}, F_{i-1})$  y  $B(L_i, F_i)$ , se obtiene la pendiente de la  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $M_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{F_{i-1} - F_i}{L_{i-1} - L_i}$ , pero  $F_{i-1} - F_i = -f_i$  y  $L_{i-1} - L_i = -a_i$ , entonces  $M_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{f_i}{a_i}$ . A partir de la pendiente y utilizando el punto  $A$  se puede determinar la ecuación de la recta, pero en este caso como se busca encontrar el valor de  $C_i(s)$  y se tienen la correspondencia  $(C_i(s), F_{C_i(s)})$  o, en otros términos, el punto  $E$ , y ya se conoce el  $F_{C_i(s)}$ , es decir el valor que pertenece al eje  $y$ , entonces la incógnita sería el valor que pertenece al eje  $x$ , por lo cual no se despejará  $y$ , sino  $x$ , esto se realiza de la siguiente manera:

$$y - F_{i-1} = \frac{f_i}{a_i} (x - L_{i-1})$$

$$y - F_{i-1} + \frac{f_i}{a_i} L_{i-1} = \frac{f_i}{a_i} x$$

$$\frac{a_i}{f_i} \left( y - F_{i-1} + \frac{f_i}{a_i} L_{i-1} \right) = x$$

$$\frac{a_i}{f_i} y - \frac{a_i}{f_i} F_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} * \frac{f_i}{a_i} L_{i-1} = x$$

$$\frac{a_i}{f_i} y - \frac{a_i}{f_i} F_{i-1} + L_{i-1} = x$$

$$\frac{a_i}{f_i} (y - F_{i-1}) + L_{i-1} = x$$

Pero, conociendo que  $y = F_{C_i(s)} = \frac{i * N}{s}$  y que  $x = C_i(s)$ , se reemplaza.

$$\frac{a_i}{f_i} \left( \frac{i * N}{s} - F_{i-1} \right) + L_{i-1} = C_i(s)$$

Obteniendo la fórmula que se muestra a continuación, y que se ha mostrado anteriormente para calcular el *i*-ésimo cuantil.

$$\frac{\frac{i * N}{s} - F_{i-1}}{f_i} * a_i + L_{i-1} = C_i(s)$$

#### 2.1.1.4. Cuartiles

Varios autores coinciden en las definiciones de cuartiles (ver Fernández y Fuentes (1995); Sarmiento y Fernández (2012); Mendenhall et al. (2010); Montgomery y Runger, 2003)). Estos afirman que los cuartiles son estadísticos con los cuales se identifican valores de la variable que dividen una distribución de datos, previamente ordenados de menor a mayor, en cuatro partes equitativas, cada una abarcando el 25% de los datos. Estos valores identificados se representan de la siguiente manera:  $Q_1$  es el primer cuartil, expresa el valor de la variable que es mayor a una cuarta parte de las mediciones y menor que el resto, o, en otras palabras, es el valor que es precedido por el 25% de los datos, dejando el 75% restante después de él;  $Q_2$  es el segundo cuartil, coincide con la mediana, por ende, divide los datos dejando el 50% a cada lado de él;  $Q_3$  es el tercer cuartil, exhibe el valor de la variable mayor que tres cuartas partes de las mediciones y menor que la cuarta parte restante, es decir, es el valor que es precedido por el 75% de los datos, dejando el 25% restante después de él.

Debido a que los cuartiles son los cuantiles más usados, existen diferentes métodos para calcularlos o determinarlos, y que en cada uno de estos métodos se consideren diferentes acuerdos. Esta diferenciación entre un acuerdo y otro surge por lo ya mencionado en la sección

de *Definición de Cuantil* en cuanto a que la ecuación  $F^*(x) = \alpha$  no tiene solución general. Por ello, explicitar algunas, de esta variedad de propuestas que se presenta a continuación, resulta enriquecedor, ya que, de fondo explica porque de un texto a otro, o de un software de análisis de datos respecto de otro, se detecten diferencias en los cálculos de los cuartiles, especialmente cuando se consideran muestras con pocos datos.

Behar y Grima (2004) exponen cuatro métodos para determinar los cuartiles:

- **Método de Tukey.** Este método consiste en identificar las medianas de los datos que resultan por encima y por debajo de la mediana de toda la distribución de datos. En cada uno de los “grupos” (encima y debajo de la mediana) de datos, se incluye la mediana si el total de datos es impar, por el contrario, si el total de datos es par, no se incluye.
- **Método de Moore y McCabe.** Este método resulta muy similar al método de Tukey, salvo que en este la mediana de toda la distribución de datos no es incluida en los grupos determinados, por lo cual, cuando el número de datos es par coincide con el método de Tukey, pero no coincide cuando el número de datos es impar.
- **Método de Minitab.** En este *Software*, para determinar las posiciones del primer y tercer cuartil ( $Q_1$  y  $Q_3$ ) se utilizan unos posicionadores, los cuales se expresan de la siguiente manera, para  $Q_1$ , se utiliza  $0,25(n + 1)$  y para  $Q_3$ ,  $0,75(n + 1)$ ; cabe resaltar que  $n$  equivale a la cantidad de observaciones. Una vez se identifica la posición, a partir del valor que arroja cada posicionador, se tiene que, si  $k$  es la parte entera de la posición y  $x_k$  el valor de la variable en la posición  $k$ , entonces, el cuartil que se busca está entre  $x_k$  y  $x_{k+1}$ . Para encontrar el valor de los cuartiles se debe realizar una interpolación, en esta se hace una distinción: para un total de datos par, la interpolación se hace de la siguiente manera,  $Q_1 = x_k + 0,25(x_{k+1} - x_k)$  y  $Q_3 = x_k + 0,75(x_{k+1} - x_k)$ ; para un total de datos impar se interpola de la siguiente manera,  $Q_1 = x_k + 0,5(x_{k+1} - x_k)$  y  $Q_3 = x_k + 0,5(x_{k+1} - x_k)$ .
- **Método de Excel.** Excel determina las posiciones a partir de los siguientes posicionadores, para  $Q_1$ , se utiliza  $0,25(n - 1) + 1$  y para  $Q_3$ ,  $0,75(n - 1) + 1$ , en este caso, al igual que en Minitab, se debe realizar una interpolación realizando una distinción para un número par de datos y para un número impar de datos. Para un número par, se

interpola de la siguiente manera  $Q_1 = x_k + 0,75(x_{k+1} - x_k)$  y para  $Q_3 = x_k + 0,25(x_{k+1} - x_k)$ . Para un número impar, el posicionador proporciona una posición exacta.

Además, en Calcuvio (s. f.) se enuncian dos métodos adicionales, los cuales se exponen enseguida.

- **Método de Mendenhall y Sincich.** En este método de cálculo de cuartiles, la posición del primer cuartil se calcula a partir de la siguiente expresión  $P = \frac{n+1}{4}$ . Si  $P$  es un número decimal, se escoge como posición del cuartil el número entero que esté más “cerca”. Si la parte decimal de  $P$  es exactamente "0.5" se escoge como posición el siguiente número entero. De esta manera, el dato que se encuentre en esta posición determinada por  $P$  será el primer cuartil. De forma similar, la posición del tercer cuartil se calcula como:  $T = \frac{3(n+1)}{4}$ , de la misma manera, si  $T$  es decimal se hace el redondeo correspondiente para cada caso, resultando así que el tercer cuartil se encontrará en la posición que determine  $T$ .
- **Método de Freund y Perles.** Este método tiene relación con el método de Moore y McCabe, pero, en caso de obtener una posición decimal, este utiliza una interpolación entre dos datos del conjunto. Para determinar la posición, se utiliza en el primer cuartil:  $P = \frac{n+3}{4}$  y para el tercer cuartil:  $T = \frac{3n+1}{4}$ . Los valores que se encuentren en estas posiciones serán el primer y tercer cuartil, respectivamente.  
Ahora, dado el caso que  $P$  sea un número decimal, se hace una interpolación entre el valor que se encuentra entre la posición de la parte entera de dicho número decimal  $P$  y el dato se encuentra en la posición de esa parte entera más uno. De esta manera, si esa parte entera es  $i$ , se obtiene:  $x_P = x_i + 0.25(x_{i+1} - x_i)$ , finalmente este será el primer cuartil. Ahora, para el tercer cuartil, de la misma manera si  $i$  es la parte entera de  $T$ , la interpolación queda así:  $x_T = x_i + 0.75(x_{i+1} - x_i)$ .

En este último las fórmulas utilizadas para determinar las posiciones de los cuartiles son equivalentes a la fórmula presentada en la sección *Cálculo de un cuantil para datos no*

*agrupados*, es decir, son equivalentes a la fórmula que se espera que utilicen las estudiantes para calcular dichas medidas al utilizar el material. Sin embargo, luego de calculada la posición, ninguno de los métodos expuestos utiliza la misma técnica de aproximación para determinar los cuartiles planteada en la sección mencionada.

#### *2.1.1.5. Deciles y Percentiles*

Sarmiento y Fernández (2012) explican que los deciles son valores que dividen una distribución de datos en 10 partes iguales, donde cada parte comprende el 10% de las observaciones, en total hay 9 deciles. Para completar esta definición se puede mencionar a Fernández y Fuentes (1995) quienes afirman que “el primer decil le precederá el 10% de los valores; el segundo decil, el 20%, y al noveno decil, el 90%” (p. 136).

Los percentiles son valores que dividen a una distribución de datos reacomodados en orden de magnitud en 100 partes iguales; cada una de las cuales engloba el 1% de las observaciones. El  $p$  –ésimo percentil es el valor que es mayor o igual a  $p\%$  de las observaciones y es menor o igual que el restante  $(100 - p) \%$  tal que  $p = 1, 2, 3, \dots, 99$ . Obviamente, en total hay 99 percentiles. Esta definición ha sido plasmada con palabras similares por algunos autores como Anderson et al (2008), Sarmiento y Fernández (2012), Mendenhall et al. (2010) y Montgomery y Runger (2003).

Como conclusión de lo abordado en esta sección, resaltamos lo siguiente:

- En la mayoría de las autoras no hay una clara distinción en las definiciones de cuantiles, dependiendo del tipo de variables que se aborde (continua o discreta) ni respecto al manejo diferenciado entre cuantiles para datos agrupados o sin agrupar.
- Se considera que, para el caso de la realización de una propuesta de enseñanza, para el nivel en el que se implementa (grado décimo), proponer el abordaje con datos agrupados no es pertinente pues se prefiere buscar contextos de las mismas estudiantes, en los cuales generalmente hay pocos datos, que no requieren métodos de agrupación.

### *2.1.2. Medidas de posición desde la enseñanza*

Las medidas de posición como se ha mencionado anteriormente son poco o nada abordadas en las aulas de clase. No obstante, desde la literatura consultada, en esta sección se realiza en una primera parte, una revisión a los posibles errores, dificultades y obstáculos que se pueden presentar en la enseñanza de estas medidas, y en una segunda parte, se presenta una revisión de algunos textos escolares para reconocer la manera en la que se propone su enseñanza, al revisar aspectos generales de lo propuesto y del desarrollo de las actividades que involucran las medidas de posición.

#### *2.1.2.1. Errores reportados en la literatura*

En esta sección se realiza una revisión sobre documentos, trabajos, artículos o proyectos que abordan la enseñanza de las medidas de posición para identificar errores que pueden cometer las estudiantes. Esta revisión arroja poca información relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición, salvo un documento escrito por Valenzuela et al. (2021), en donde se exponen brevemente algunos de los errores que pueden cometer las estudiantes al momento de estudiar dichas medidas. Además, también se encuentran algunos documentos que se centran en las medidas de localización, en donde la información conseguida se enfoca en las MTC se decide hacer entonces una recopilación de los errores que pueden existir en la enseñanza de tales medidas e inferir los que puedan llegar a ocurrir en la enseñanza de las medidas de posición.

Para poder realizar dicho abordaje, primero es necesario definir lo que se entiende por error en este documento. Con este fin, se cita a Rico (1998, como se cita en Arias y Silva, 2012), quien afirma que el error constituye un elemento esencial en el proceso de adquisición del conocimiento, ya que suele originarse de nociones incompletas o poco sólidas, lo que da lugar a conceptualizaciones parciales. Además, agrega que los errores desempeñan un papel clave en el aprendizaje de un contenido específico. De esta manera, el autor propone un cambio de enfoque: en lugar de considerar los errores como fallos atribuibles a la estudiante, deben ser entendidos como oportunidades que pueden anticiparse y abordarse con estrategias adecuadas. Así, el análisis de errores en matemáticas se convierte en una herramienta fundamental para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo a la docente identificar las dificultades y diseñar

intervenciones que faciliten su superación. Por tanto, Un error cometido por una estudiante en el aprendizaje matemático puede entenderse como una manifestación observable de una comprensión parcial, confusa o inadecuada de un concepto, procedimiento o idea.

En coherencia con la postura anterior, Arias y Silva (2012) señalan que, para lograr un mayor aprovechamiento de los estudios sobre el error, es fundamental analizar las dificultades que le subyacen, pues son estas las que revelan las lagunas cognitivas y conceptuales que afectan la comprensión de los objetos matemáticos. De este modo, tomando como base estas autoras, una dificultad se puede entender como una condición subyacente de tipo conceptual o cognitivo que origina errores, y que se manifiesta cuando la estudiante enfrenta obstáculos para construir significados adecuados. Identificar dichas dificultades permite al docente diseñar intervenciones que no solo corrijan el procedimiento, sino que atiendan el origen del error.

Durante la recopilación se identifica un documento escrito por Valenzuela et al. (2021) en el que mencionan que un error común que presentan las estudiantes radica que confunden el valor posicional con la medida de posición, a este error le asocian la dificultad de comprender el concepto de valor posicional. Por lo general, ellas asumen que el valor posicional corresponde directamente al valor de la medida de posición en lugar de entender que este representa la ubicación en la que se encuentra el valor de la variable en un conjunto de datos ordenado o en una tabla de frecuencias. Carvalho (2001, que es citado en Valenzuela et al., 2021) también identifica esta confusión, observando que las estudiantes suelen equiparar el lugar de la medida con su valor real. En el mismo sentido, algunas estudiantes, incluso comprendiendo el significado del valor posicional, no ordenan correctamente el conjunto de datos para determinar el valor del percentil (Mayén et al., 2009, como se cita en Valenzuela et al., 2021). Además, puede presentarse el error en que las estudiantes confundan las frecuencias acumuladas con las frecuencias simples, al cual asocian la dificultad de no comprender el concepto de frecuencia acumulada. Estos errores y dificultades asociadas son los encontrados en cuanto a las medidas de posición directamente.

Ahora bien, se expone la posición encontrada en diversos documentos sobre algunas experiencias de enseñanza de MTC. Además, cabe resaltar que estas experiencias se realizaron en territorio colombiano, por tanto, dada la naturaleza del material y de la propuesta didáctica, que se plantean

más adelante, se considera enriquecedor tomar experiencias cercanas al contexto para el cual se desarrolla este trabajo.

De Carvalho (2001, como se cita en Zapata, 2018) se seleccionaron algunos errores de la mediana como no ordenar los datos para encontrar la mediana y equivocarse al encontrar el valor central. Además, Barr (1980, como se citó en Zapata, 2018) expresa que una dificultad que presentan las estudiantes es que suelen interpretar la mediana como el "centro" de algo, aunque a menudo no comprenden a qué se refiere ese "algo". Esto indica que no entienden que la mediana es un estadístico que depende de un conjunto de datos ordenado. Incluso cuando se les proporciona los datos en forma de lista, no ven la necesidad de organizarlos para calcular correctamente la mediana.

La siguiente tabla presenta una síntesis de los errores identificados en torno al cálculo y comprensión de las MTC, con base en el análisis realizado por Grijalba (2021). Junto a cada error se relaciona la dificultad conceptual o cognitiva que podría estar asociada, considerando la importancia de comprender estos aspectos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística en el aula.

**Tabla 3**

*Tabla de errores-dificultades evidenciadas en el documento de Grijalba (2021)*

<b>Error identificado</b>	<b>Dificultad asociada</b>
No se incluyen todos los datos al calcular la media.	Comprensión incompleta del algoritmo para calcular la media.
Uso incorrecto del divisor (dividen entre número incorrecto).	No comprensión del procedimiento de cálculo de la media.
Confusión o desconocimiento del símbolo de la media.	Dificultad con el lenguaje matemático y la simbología.
No identifican la moda en una gráfica de barras.	Dificultad para interpretar representaciones gráficas.
Desconocen que la media se ve afectada por todos los datos.	Dificultad para comprender propiedades fundamentales de la media.
No reconocen que la suma de desviaciones respecto a la media es cero.	Dificultad conceptual respecto a la propiedad de equilibrio de la media.

No reconocen que la media está entre los valores extremos.	Desconocimiento de la ubicación relativa de la media.
--	---

Por su parte en Ramírez y Ramírez (2023) se presentan algunos errores y dificultades reportados en su implementación. En el análisis presentado por estas autoras, se observa que muchos de estos errores y dificultades no están relacionados exclusivamente con el ámbito estadístico, sino que involucran principalmente errores algebraicos, aritméticos y de notación. Estos se presentan a continuación:

- Las estudiantes encuentran dificultad al comprender que la media aritmética puede resultar en un valor decimal en algunas situaciones, lo que a menudo desafía su expectativa de un número entero. (Batanero, 2000, como se cita en Ramírez y Ramírez, 2023)
- Entre las alumnas existe una dificultad para entender el significado del valor de una variable cuando se desconoce o se confunde el contexto en el que dicha variable se utiliza, lo cual afecta la interpretación de los resultados. (Guerrero y Torres, 2017, como se cita en Ramírez y Ramírez, 2023)
- Las estudiantes presentan dificultades para darle un significado o interpretar el dato obtenido, lo que limita su capacidad para conectar el resultado con el contexto del problema. (Becerril et al., 2019, como se citó en Ramírez y Ramírez, 2023)
- Se evidencia un error en el manejo de la colocación de la coma decimal al realizar operaciones básicas, lo que genera resultados inexactos y dificulta el cálculo correcto. (Moñino, 2013, como se cita en Ramírez y Ramírez 2023)
- Existe una ausencia de notación matemática en los procedimientos realizados por las estudiantes, lo cual complica la claridad y estructura de los cálculos y puede llevar a interpretaciones incorrectas de los resultados. (Estrada et al., 2017, como se cita en Ramírez y Ramírez, 2023)

A partir del análisis de los errores y dificultades identificados en torno a las MTC, es posible establecer conexiones significativas con los procesos implicados en la enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición. Ambas comparten características esenciales como el trabajo con datos

ordenados, la interpretación del valor posicional y la necesidad de contextualizar el resultado obtenido. Por ello, dificultades como no reconocer la importancia del orden en los datos, confundir el valor con la posición, o no interpretar adecuadamente representaciones gráficas o simbólicas, pueden también surgir al abordar los cuantiles. Esto permite anticipar posibles percances en el aprendizaje de las medidas de posición y facilita la planificación de intervenciones didácticas que puedan ocurrir en la propuesta que se expone más adelante.

### *2.1.2.2. Medidas de posición en los textos escolares*

Para el desarrollo de este apartado se realizó un análisis de las medidas de posición en dos colecciones de textos escolares correspondientes a editoriales de amplio reconocimiento en Colombia, con el fin de evidenciar parte del cómo se espera que se enseñen estas medidas en los colegios del país. Para ello se tuvieron en cuenta una muestra de seis textos escolares, tres de la editorial Santillana, y dos del MEN. Se identifican aspectos generales de cada texto, como: editorial, edición, título y grado. Se presenta una breve descripción de la sección en la que se abordan las medidas de posición, y el cómo se maneja el abordaje de estas. Adicionalmente, los autores realizan algunos comentarios u opiniones durante el desarrollo de este análisis y al finalizar se presenta una conclusión de lo observado.

#### **Texto 1: Los Caminos del Saber – Matemáticas 8**

**Editorial:** Santillana, **Año:** 2013, **Grado:** octavo

#### ***Abordaje***

Las medidas de posición se abordan en la subunidad titulada ‘Caracterización de variables cuantitativas para datos no agrupados’ (pág.296). En esta, se analiza el comportamiento de cada uno de los datos, y a este análisis se le denomina caracterización de forma no agrupada. Para realizar dicha caracterización, se utilizan las medidas de localización y las medidas de dispersión. En este libro, las medidas de localización son: media, mediana, moda, percentiles, cuartiles y deciles. Además, se realiza una división de estas en, medidas de localización central (media, mediana y moda) y medidas de posición (percentiles, cuartiles y deciles).

En cuanto a las medidas de posición, se realiza la respectiva explicación en dos apartados: Percentiles; Deciles y cuartiles. En el primer apartado, se inicia dando una definición, se describe cómo se puede interpretar un percentil y se proporciona un uso que se le puede dar en un entorno laboral. Luego, se presenta un método para determinar un percentil, seguido de este, un ejemplo, en el cual se muestra cómo aplicar dicho método a un ejercicio particular, en el que se propone un conjunto de datos y se pide determinar el valor de algunos percentiles e interpretarlos.

En el segundo apartado, Deciles y cuartiles, se inicia mencionando los deciles, y al igual que en el apartado anterior se provee una definición y una interpretación. Se continúa explicando los cuartiles, presenta la definición y una interpretación en la que ahonda un poco más a detalle cada cuartil, además, agrega una gráfica. Seguido de esto, proporciona algunas de las equivalencias más usuales entre cuartiles, percentiles y deciles, sin alguna explicación o justificación del porqué se cumplen dichas equivalencias. Debido a esto último, se afirma que para calcular un decil o un cuartil se usa el mismo procedimiento que para calcular un percentil y se presenta un ejemplo de ello. Para *terminar, propone una serie de actividades.*

### ***Definiciones***

Los **percentiles** son los valores de la variable que dividen a un conjunto ordenado de los datos en 100 partes porcentualmente iguales.

- Los **deciles** son indicadores que dividen el grupo de datos en 10 partes porcentualmente iguales
- Los **cuartiles** son medidas que dividen la muestra en cuatro partes porcentualmente iguales. Cada una de estas guarda el 25% de los datos.

### ***Métodos para determinar cuantiles***

Propone realizar el cálculo de los cuantiles con el método que se brinda para calcular los percentiles, apoyándose de las equivalencias entre percentiles, cuartiles y deciles. Para determinar un percentil se sugiere: primero, se ordenan los datos de forma ascendente; luego, se calcula el coeficiente  $i = \left(\frac{k}{100}\right)n$  donde  $k$  es el número del percentil que se va a encontrar y  $n$  es el número de datos de la muestra. Por último, se presentan dos opciones a partir del resultado de calcular  $i$ :

si  $i$  es un entero, se busca en el conjunto de datos los que están en las posiciones  $i$  e  $i + 1$ , el percentil buscado será el promedio de los dos datos encontrados; si  $i$  es un número decimal, se aproxima este valor al entero inmediatamente superior; luego, se busca en el conjunto de datos aquel que ocupa esta posición; dicho valor el percentil buscado.

### ***Actividades***

Tiene 25 preguntas, en las cuales el o la estudiante debe: realizar cálculos de medidas de tendencia central (MTC) y de medidas de posición; interpretar y comparar dichas medidas; complementar los resultados de los dos tipos de medidas entre sí, para poder dar la respuesta requerida; escoger la medida más pertinente dependiendo del objetivo; justificar las respuestas. El texto proporciona un contexto y un conjunto de datos para poder dar respuesta a las preguntas.

### **Texto 2: Los Caminos del Saber – Matemáticas 9**

**Editorial:** Santillana, **Año:** 2013, **Grado:** noveno

### ***Abordaje***

Las medidas de posición se abordan en la subunidad titulada “Métodos numéricos para la caracterización de variables” (pág.309). En esta, como su nombre lo indica se proponen métodos que proporcionan otras alternativas para analizar los datos. Estos métodos son las medidas de localización y las medidas de variabilidad. A su vez, esta subunidad se divide en dos apartados, el primero Medidas de localización y el segundo Medidas de variabilidad. El primer apartado, contiene seis subtítulos los cuales son Media, Mediana, Moda, Percentiles, Cuartiles y Deciles. Por ende, en este libro estos son las medidas de localización.

En cuanto a los percentiles, inicia mostrando la definición y un párrafo acerca de la interpretación. Luego, presenta un método para calcular un percentil, seguido de este, un ejemplo, en el cual se muestra cómo aplicar dicho método a un ejercicio particular en el que se presenta un conjunto de datos con un determinado contexto, se pide determinar el valor de un percentil particular y se le da una interpretación a este.

En relación con los cuartiles, inicia presentando una definición, y en esta menciona las equivalencias que tienen estos con los respectivos percentiles, indicando que los cuartiles son

casos especiales de los percentiles. Luego, explica que para calcular un cuartil se utiliza el mismo método que para calcular un percentil, y proceden a dar un ejemplo de este cálculo.

Acerca de los deciles, se da una definición y se menciona que para realizar el cálculo de estos se utiliza el mismo método que para calcular los percentiles, salvo que, en este se cambia la fórmula del índice. Para terminar, propone una serie de actividades.

### ***Definiciones***

- Un **percentil** se simboliza como  $p$ , presenta información sobre cómo se distribuyen los datos en 100 partes porcentualmente iguales.
- Es frecuente dividir el conjunto de datos en cuatro partes porcentualmente iguales, cada una de las cuales contiene una cuarta parte de ellos (el 25%). A los puntos de división se les llama **cuartiles** y se representan con  $Q$ .

Se definen así:

- ❖  $Q_1 = \text{Primer cuartil} = \text{Percentil } 25 = p_{25}$ .
- ❖  $Q_2 = \text{Segundo cuartil} = \text{Percentil } 50 = p_{50}$ .
- ❖  $Q_3 = \text{Tercer cuartil} = \text{Percentil } 75 = p_{75}$ .
- Los **deciles** corresponden a la división del grupo de datos en diez partes porcentuales iguales.

### ***Métodos para determinar cuantiles***

Propone realizar el cálculo de los cuantiles con base en el método para calcular los percentiles, apoyándose de las equivalencias entre percentiles y cuartiles, salvo que en los deciles cambia la fórmula del índice que se utiliza.

- **Percentiles:** Para calcular el  $p$  –ésimo percentil. Primero, se ordenan los datos de manera ascendente. Luego, se calcula índice  $i: i = \left(\frac{p}{100}\right)n$ , en donde  $p$  es el percentil buscado y  $n$  es el número de datos. Finalmente, se tienen en cuenta dos opciones a partir del resultado  $i$ : si  $i$  no es entero, se redondea, el valor entero inmediato mayor que  $i$  indica la posición del  $p$  –ésimo percentil; si  $i$  es entero, el  $p$  –ésimo percentil es el promedio de los valores de los datos ubicados en los lugares  $i$  e  $i + 1$ .

- Cuartiles: Para calcular los cuartiles se utiliza el mismo método planteado en percentiles, salvo que para encontrar el índice se debe remplazar el cuartil deseado ( $Q_n$ ) por su equivalencia en percentil.
- Deciles: El cálculo del índice para el decil se puede realizar mediante la expresión:  $i = \left(\frac{j}{10}\right)n$  donde  $j = 1, \dots, 9$ . Y se procede de forma análoga como se hace con los percentiles y los cuartiles.

### ***Actividades***

Tiene 14 preguntas, en las cuales en su mayoría la estudiante debe realizar cálculos de medidas de localización y medidas de variabilidad. En algunas debe interpretar dichas medidas y en muy pocas ocasiones responder preguntas abiertas en las que necesiten justificar sus respuestas y relacionar los dos tipos de medida. El texto proporciona un contexto y un conjunto de datos para poder dar respuesta a las preguntas.

### **Texto 3: Los Caminos del Saber – Matemáticas 10**

**Editorial:** Santillana, **Año:** 2013, **Grado:** Décimo

### ***Abordaje***

Las medidas de posición se abordan en la subunidad titulada “Resumen de los cinco datos” (pág.296). En esta, se brindan herramientas que permiten analizar el comportamiento de los datos en una distribución. Se abordan algunas medidas de posición junto con otros estadísticos en un grupo llamo el resumen de los cinco datos, los cuales son: Valor mínimo, Primer cuartil ( $Q_1 = P_{25}$ ), Mediana ( $\tilde{x} = Q_2 = P_{50}$ ), Tercer cuartil ( $Q_3 = P_{75}$ ) y Valor máximo.

Luego de mencionar estos cinco datos se describe un método para determinarlos. Seguido de este, se da un ejemplo, en el cual se muestra cómo aplicar dicho método a un ejercicio particular, en el que se presenta un conjunto de datos y se determina e interpreta el valor de algunos percentiles. Para terminar, propone una serie de actividades.

### ***Definiciones***

No presentan definición de ninguna medida de posición.

### *Métodos para determinar cuantiles*

Propone un método para hallar el resumen de los cinco datos. Para ello, primero, se ordenan los datos en forma ascendente, para esto resulta bastante útil el diagrama de tallo y hojas. Luego, se identifican los valores mínimo y máximo. Finalmente, se calculan los cuantiles, teniendo en cuenta que  $i = \frac{P}{100} n$ .

### *Actividades*

Tiene 37 preguntas, en las cuales la estudiante debe: hallar los cinco puntos; construir diagramas de cajas y bigotes; interpretar y compara dichas medidas; decir sí una medida es una buena representante o no de cierto conjunto de datos; justificar algunas las respuestas. El texto proporciona un contexto y un conjunto de datos para poder dar respuesta a las preguntas.

### **Texto 4: Vamos a aprender – Matemáticas 9**

**Editorial:** MEN, **Año:** 2017, **Grado:** Noveno

### *Abordaje*

Las Medidas de posición se abordan en la subunidad titulada “Medidas de posición no central” (pág.108). Esta subunidad se divide en tres partes ‘Saberes previos’, ‘Analiza’ y ‘Conoce’. En ‘Saberes previos’, este texto propone realizar el cálculo de ciertos porcentajes de algunos valores específicos. En ‘Analiza’, establece la conexión entre el conocimiento previo y las medidas de posición. Presenta una situación problema proporcionando los respectivos datos y un interrogante, este último, se puede responder haciendo uso de las medidas de posición. En ‘Conoce’, desarrolla y sintetiza los conceptos básicos de las medidas de posición. Se inicia planteando que para resolver el interrogante propuesto en el ítem Analiza, se deben organizar los datos en manera ascendente, y calcular las frecuencias. Seguido de esto definen los cuantiles y se mencionan los más importantes. Luego, se realiza una explicación más amplia de los cuantiles.

### *Definiciones*

- Los **cuantiles** son medidas que dividen el conjunto de datos en grupos con la misma frecuencia.

- Los **percentiles** dividen los datos en cien grupos de la misma cantidad. Esta medida da los valores correspondientes al 1%, 2%, 3%, hasta el 99% de los datos.
- Deciles: Dividen los datos en diez grupos con la misma cantidad de datos. Ellos indican el 10%, el 20%, el 30%, hasta el 90% de los datos.
- Cuartiles: Dividen el conjunto de datos en cuatro grupos iguales. Indican el 25%, el 50% y el 75%. Este es uno de los tipos de cuantiles que más se utilizan. Hay tres cuartiles que se pueden definir así:
  - ❖ Cuartil 1 ( $Q_1$ ): primer valor que supera o iguala una cuarta parte de los datos.
  - ❖ Cuartil 2 ( $Q_2$ ): primer valor que supera o iguala la mitad de los datos. Coincide con la mediana del conjunto.
  - ❖ Cuartil 3 ( $Q_3$ ): primer valor que supera o iguala las tres cuartas partes de los datos.

### ***Métodos para determinar cuantiles***

Este método solo se enfoca en la determinación de los cuartiles, además en este no se muestra ni se hace uso de ninguna fórmula. Propone un método que se basa en realizar una tabla de frecuencia para utilizar la frecuencia acumulada e identificar el cuartil requerido. Primero se deben organizar los datos de menor a mayor. Luego, se calculan las frecuencias absolutas y acumuladas. El libro presenta los resultados, pero, no se logra evidenciar de forma clara la manera de llegar a estos.

### ***Actividades***

Tiene 5 ejercicios, uno de ejercitación, dos de razonamiento, uno de comunicación y uno de evaluación de aprendizajes. Estos ejercicios pretenden desarrollar procesos cognitivos como: memoria, análisis, aplicación y evaluación. Ahora bien, las estudiantes deben realizar el cálculo de los cuartiles, de las frecuencias o las MTC, realizar comparaciones entre las MTC y las medidas de posición no central, además deben elaborar interpretaciones o conclusiones y justificar las mismas.

## Texto 5: Vamos a aprender – Matemáticas 10

**Editorial:** MEN, **Año:** 2017, **Grado:** Décimo

### *Abordaje*

Las Medidas de posición se abordan en la subunidad titulada “Medidas de posición” (pág.224). Esta subunidad se divide en tres partes ‘Saberes previos’, ‘Analiza’ y ‘Conoce’. En ‘Saberes previos’, este texto plantea una pregunta sobre el control de crecimiento de una niña, esta pregunta se desarrolla a lo largo de la subunidad.

En ‘Analiza’, establece la conexión entre el conocimiento previo y las medidas de posición. Presenta una situación en la que se puede llegar a una respuesta para la pregunta abordada en Saberes previos, en esta situación y ayudándose de gráficas provee una manera de encontrar la respuesta. Proporciona los respectivos datos, la descripción de la información presentada y un interrogante, en este último interpreta la información que acaba de presentar.

En ‘Conoce’, desarrolla y sintetiza los conceptos básicos de las medidas de posición. Inicia explicando la información que presenta el ítem Analiza, define cuantiles. Seguido menciona y define los más importantes. Luego realiza un esquema donde se puede observar cada cuartil definido previamente, todos sobrepuestos uno sobre otro, de esta manera quiere dar a entender que todos los cuantiles se relacionan entre sí. Por último, presenta dos ejemplos para afianzar la interpretación y mostrar cómo se calculan los cuantiles.

### *Definiciones*

- Los **cuantiles** son medidas posición que dividen los datos de la distribución en funcionamiento de otras cuantías. En otras palabras, el cuartil de orden  $r$  es el valor de la variable  $x_r$ , que hace una división en la distribución, de modo que una proporción  $r$  de los valores de la población es menor o igual a  $x_r$ .
- Se conocen como **cuartiles** a los 3 valores que dividen la serie de datos en cuatro partes iguales. Se representan con  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ .
- Se denominan **deciles** a los nueve valores que dividen la serie de datos en 10 partes iguales.

- Se conocen como **percentiles** a los 99 valores que dividen la serie de datos en 100 partes iguales. Se designan por  $P_1, P_2, \dots, P_{99}$ , y se llaman percentil primero, segundo..., nonagésimo noveno, respectivamente.

### ***Métodos para determinar cuantiles***

En este no se muestra el uso de ninguna fórmula. Propone un método que se basa en realizar una tabla de frecuencia para utilizar la frecuencia acumulada e identificar el decil o percentil requerido. Primero, el libro menciona que se calculan las frecuencias absolutas y acumuladas. Luego, muestra algunos cálculos, y los resultados finales, pero, no se logra evidenciar la manera de llegar a estos cálculos y resultados.

### ***Actividades***

Se presentan 5 actividades, dos de ejercitación, una de razonamiento, una de resolución de problemas, y un ejercicio a modo de evaluación. En estas, las estudiantes deben calcular aparte de cuantiles y otras medidas estadísticas, como: medidas de dispersión, MTC y rango, además, en ninguno de los ejercicios las estudiantes deben interpretar las medidas según el contexto dado, sino que se limita únicamente al cálculo de ellas.

### **Texto 6: Vamos a aprender – Matemáticas 11**

**Editorial:** MEN, **Año:** 2017, **Grado:** Undécimo

### ***Abordaje***

La primera mención de las medidas de posición se hace en la subunidad titulada “Estudios estadísticos”, en la cual se dice que, estas medidas hacen parte de los estadígrafos más importantes, junto con las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión. La siguiente mención que se hace de las medidas de posición está ubicada en la subunidad titulada “Cuartiles y percentiles para datos agrupados por clases” en la cual profundizan acerca de las mismas.

La subunidad se divide en tres partes: ‘Saberes previos’, ‘Analiza’ y ‘Conoce’. En ‘Saberes previos’, este texto plantea una situación del uso de los deciles (no de forma explícita) en un

contexto sobre una prueba nacional, deja preguntas para quien lee, para que se indague y se inicie al tema abordado en la subunidad.

En ‘Analiza’, presenta una actividad en la cual se pide que se calcule el primer cuartil de una distribución de datos, esta actividad se desarrolla a lo largo de ‘Conoce’. En esta última, se responde la situación anterior a partir de una tabla de frecuencias, en la que se divide el total de los datos en 4, sin más explicación, este cociente es el valor de la frecuencia y a partir de él se determina el cuartil y se interpreta. Continúa presentando la definición de cuartiles y un método para hallarlos cuando son datos agrupados, presenta una fórmula generalizada y la explica. Dado esto, define percentiles y propone una fórmula que es similar a la anterior, pero, ajustada a percentiles, para finalizar presenta un ejemplo que trata sobre las calificaciones de un examen de ingreso a una universidad, en este expone una tabla de frecuencias y el proceso para hallar los cuartiles y percentiles.

### ***Definiciones.***

- Los **cuartiles** son los valores que dividen la serie de datos en cuatro partes iguales. Los tres cuartiles se simbolizan como  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ .
  - ❖ El primer cuartil,  $Q_1$ , deja por debajo el 25% de los datos de la distribución.
  - ❖ El segundo cuartil,  $Q_2$ , coincide con la mediana y deja por debajo de él 50% de los datos.
  - ❖ El tercer cuartil,  $Q_3$ , deja por debajo el 75% de los datos de la distribución.
- Los **percentiles** son cada uno de los 99 valores que dividen la serie de datos en 100 partes iguales.

### ***Métodos para determinar cuantiles***

- Cuartiles: Para calcular un cuartil para datos agrupados por clases, primero se determina en qué intervalo se ubica el dato de la posición  $\frac{K \cdot N}{4}$ , donde  $k$  es el cuartil que se debe hallar y  $N$  es el tamaño de la muestra. Luego, se aplica la expresión:

$$Q_k = L_k + A \cdot \left( \frac{\left( \frac{K \cdot N}{4} - F_{k-1} \right)}{f_k} \right)$$

$L_k$  es límite inferior del intervalo que contiene el cuartil,  $A$  la amplitud del intervalo,  $F_{k-1}$  la frecuencia acumulada anterior al intervalo que contiene el cuartil y  $f_k$  la frecuencia absoluta del intervalo.

- Percentiles: Para calcular un percentil para datos agrupados por clases, primero se determina en qué intervalo se ubica el dato de la posición  $\frac{k \cdot N}{100}$ , donde  $k = 1, 2, \dots, 99$ . Luego, se aplica la expresión:

$$P_k = L_k + A \cdot \left( \frac{k \left( \frac{N}{100} \right) - F_{k-1}}{f_k} \right)$$

### **Actividades**

Se presentan 2 actividades. En la primera se pide determinar algunas medidas de posición a partir de un gráfico de barras, sin solicitar interpretación. En la segunda se brinda un contexto y una tabla de datos agrupados y se realiza una pregunta que requiere determinar un cuartil.

#### 2.1.2.2.1. Conclusiones del análisis de textos

Como resultado de lo abordado en esta sección, primero, se destaca que en varios textos se pide a las estudiantes comparar las medidas de posición con otras medidas estadísticas, hecho que ayuda a que las educandas puedan diferenciar las utilidades de las respectivas medidas estadísticas. Segundo, se menciona que en algunos textos escolares se le da prioridad al cálculo de los cuantiles por encima de la interpretación de estos, sin embargo, la mayoría de los textos sí dedican algunos párrafos a explicar cómo se realiza dicha interpretación. Tercero, se resalta que la estructura de todos los textos revisados es bastante similar, se presenta una definición de las medidas, luego la forma de calcularlas y en algunos casos de interpretarlas, se exponen algunos ejemplos y por último se proponen una serie de ejercicios para practicar lo aprendido (muy pocos de estos ejercicios son preguntas abiertas). Cuarto, es de resaltar el hecho de que en ninguno de los libros que presentan la fórmula para determinar los cuantiles en datos no agrupado explican dicha fórmula, mostrando así varios símbolos matemáticos relacionados entre sí, pero generando una dificultad para darle un sentido a dichos símbolos.

Por lo mencionado en el párrafo anterior, en el presente documento se pretende realizar una propuesta de actividades innovadora. Pues, se espera que la introducción a los cuantiles se dé de forma intuitiva, las definiciones se introduzcan naturalmente mientras las estudiantes realizan una serie de tareas, el cómo se interpretan los mismos lo deduzcan las estudiantes a medida que vayan realizando las tareas propuestas y no que sea algo dado o impuesto, y adicionalmente se quiere que ellas sean quienes construyan la fórmula, dando así, un sentido a cada uno de los símbolos presentes en esta. Se tiene como expectativa que se logre todo lo mencionado gracias al apoyo visual que se espera brinde el material didáctico.

### ***2.1.3. Medidas de posición desde el marco curricular***

Desde el marco legal colombiano se reconocen tres grandes referentes curriculares en la enseñanza de las matemáticas, los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2016). En estos documentos se describen las áreas del conocimiento, los procesos, pensamientos y diferentes aspectos que orientan la educación en el estado colombiano. En estos documentos las medidas de posición se tratan en el Pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Teniendo en cuenta estos documentos como referentes curriculares se revisará las menciones que se hagan respecto a las medidas de posición, con el fin de caracterizar, ubicar curricularmente e identificar saberes previos cuando se estudian se estudian las medidas de posición.

#### ***2.1.3.1. Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (LCM)***

En los LCM se describen las directrices y los principios fundamentales para la enseñanza del área de Matemáticas. Además, estos se utilizan para guiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los niveles educativos escolares. Dichos lineamientos proporcionan un marco de referencia para las docentes y las instituciones educativas, ayudándoles a planificar y desarrollar programas de estudio coherentes y efectivos en el área de matemáticas.

A su vez, estos lineamientos buscan que la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas sean significativos en el desarrollo de las estudiantes, que sean más duraderos y que tengan mayor alcance que los aprendizajes tradicionales (MEN, 1998). Para esto se propone una estructura curricular (Figura 4.) en la cual se exponen procesos y conocimientos básicos a partir de algunos contextos específicos fuera de los ámbitos netamente escolares.

**Figura 4.**

*Estructura curricular*

*Nota.* Adaptación (MEN, 1998).



Ahora bien, la educación estadística y la probabilística se estudian en el Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, en este pensamiento se describe la importancia y la utilidad del pensamiento estadístico. El papel que ha jugado la estadística a lo largo de la historia ha hecho que se convierta en una disciplina que ha ido creciendo en relevancia en muchas ciencias y en las matemáticas mismas. La recolección de datos y su análisis, la formulación de hipótesis, y la interpretación de resultados, entre otras, han sido clave para reclamar su lugar en la enseñanza de

las matemáticas escolares, puesto que resulta una actividad enriquecedora y sumamente constructiva en el desarrollo integral de las estudiantes (MEN, 1998).

Además, el MEN (1998) se señala la importancia de abarcar este estudio por medio de un contexto que permita desarrollar los procesos requeridos, puesto que la exploración, manipulación e interpretación de los datos hacen que la disciplina estadística sea tan versátil y útil en el desarrollo de las estudiantes. El reconocer la naturaleza de los datos, lo que se quiere hacer con estos y el cómo abordarlos hace que el propósito de la enseñanza y el aprendizaje tome un fin para las educandas, por tanto, el implementar este pensamiento por medio de un material o situación que resulte de interés para las estudiantes hace que su desarrollo se potencialice y sea aún más significativo.

### *2.1.3.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM)*

Los estándares definen las habilidades, conocimientos y competencias que se espera que las estudiantes desarrollen. Se diseñan con el fin de proporcionar una guía clara y coherente para las docentes y las instituciones educativas, con el objetivo de promover una enseñanza de calidad y mejorar los resultados de aprendizaje en Matemáticas. Estos estándares van de la mano con los LCM y se utilizan como referencia para la formulación de programas de estudio, la elaboración de evaluaciones estandarizadas y la evaluación del desempeño académico de las estudiantes en matemáticas.

Los EBCM, en su intención de mejorar la calidad de la educación, abordan y reconocen la importancia del Pensamiento aleatorio y sistemas de datos como herramienta que ayuda para tal propósito. Para ello, expone claramente la importancia de desarrollar en las educandas, las habilidades, conceptos y procedimientos necesarios para que las estudiantes desarrollen de la mejor manera este pensamiento y que lo puedan utilizar adecuadamente en su vida.

Los EBCM están organizados por cinco ciclos:

- De primero a tercero.
- De cuarto a quinto.
- De sexto a séptimo.
- De octavo a noveno
- De décimo a undécimo

Cada ciclo tiene cinco columnas, cada una de las columnas tiene asignado uno de los pensamientos (evocar la Figura 4.) cada columna tiene varios estándares. Las medidas de posición están ubicadas en el sexto estándar del Pensamiento aleatorio y sistemas de datos en el ciclo “De decimo a undécimo grado”. Este estándar dice “Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).” (MEN, 2006, p. 89). Se ve entonces, que tal estándar trata sobre las medidas de localización y especifica algunas de ellas, entre estas se encuentran las medidas de posición, dando así por entendido que estas medidas son importantes y deben ser estudiadas al menos desde décimo grado.

### *2.1.3.3. Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (DBA)*

Los DBA son un documento en el que se exponen habilidades, conocimientos y actitudes que las estudiantes deberían aprender y desarrollar en cada grado escolar. En estos se proponen derechos que pretenden garantizar la calidad y establecer las bases fundamentales para la matemática educativa del país. Cada uno de los derechos contiene: un enunciado, una o unas evidencias de aprendizaje y, por último, un ejemplo. Además, cada grupo de derechos corresponde a un grado escolar.

Al hacer la revisión del documento de los DBA (MEN, 2016) se evidencia que las medidas de posición se mencionan en el derecho número nueve de grado noveno. El enunciado dice “Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.” (MEN, 2016, p. 71). En este derecho, se entiende las medidas de posición como medidas de localización y las evidencias que hacen referencia a las medidas de localización son las siguientes:

- Construye diagramas de caja y a partir de los resultados representados en ellos describe y compara la distribución de un conjunto de datos.
- Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización. (MEN, 2016)

Por esta razón, se evidencia que las estudiantes (al menos en grado noveno) deberían estudiar y comprender las medidas de posición. Desde los DBA se promueve el estudio de estas, fomentando una educación de calidad y brindando herramientas que permitan el desarrollo integral para las educandas.

## **2.2. MATERIALES DIDÁCTICOS**

Respecto al significado de material didáctico no parece haber un consenso en las referencias consultadas. Por ejemplo, mientras que para Morales (2012), un material didáctico puede ser un apoyo didáctico, un recurso didáctico o un medio educativo, sugiriendo que todas estas nominaciones son sinónimas, para Navarrete (2017) hay en principio, bastantes definiciones acerca de estos conceptos, con notable diferencia entre ellos, en especial, en lo que hace referencia a los términos “recurso” y “material didáctico”.

Para Coriat (1997, citado en Gonzáles, 2010, citado en Navarrete, 2017), los materiales didácticos son creados y diseñados específicamente con fines educativos, mientras que los recursos son instrumentos que no se crearon únicamente para el aprendizaje de determinado concepto o noción. Una clasificación similar es realizada por Torres y Casallas (2018, citado en Niño y Romero, 2023), quienes indican que los materiales didácticos pueden catalogarse en estructurados o no estructurados; los materiales didácticos estructurados hacen referencia a los objetos que son diseñados para el aprendizaje y los materiales didácticos no estructurados aluden a los objetos manipulativos que no fueron pensados para enseñar o aprender.

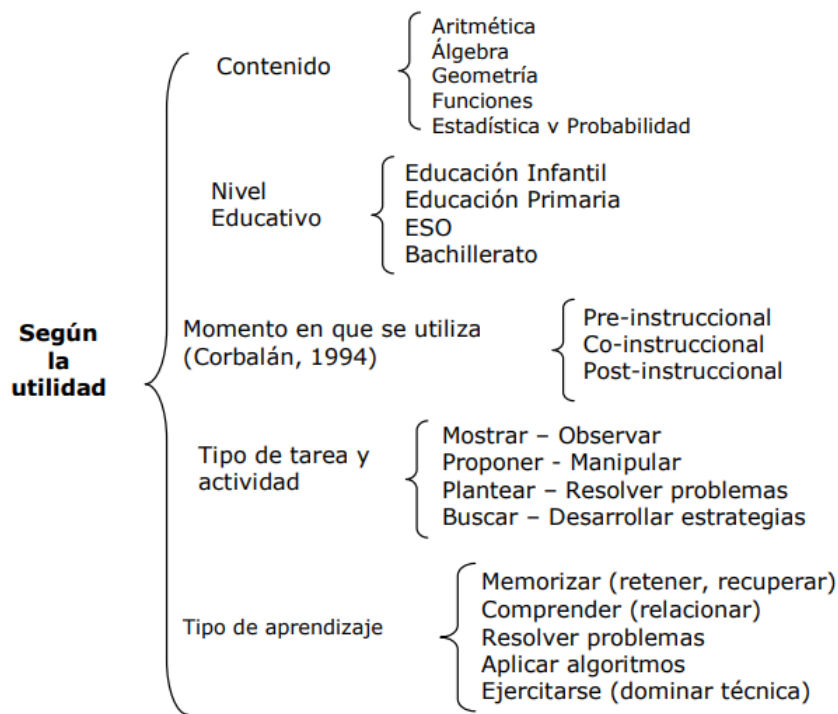
Una vez expuesta la discrepancia en torno a los términos ‘recurso’ y ‘material’, para el desarrollo de este trabajo se toma como referente a Morales (2012), quien entiende ‘material didáctico’ como el “conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje” (p. 10). Además, Morales (2012) menciona que, estos pueden ser físicos o virtuales, deben captar el interés de las estudiantes y facilitar la actividad docente.

Por su parte, Flores et al. (2011) realizan una tipificación de materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Particularmente, presenta la utilidad del material como uno de los criterios para clasificarlo. En esta, los materiales se diferencian según su

contenido, el nivel educativo para el que fue diseñado, el momento adecuado para utilizarlo en la enseñanza, el tipo de tarea o actividad y el tipo de aprendizaje que potencia.

**Figura 5.**

*Criterios para clasificar los materiales según su utilidad*



*Nota.* Adaptado de *Materiales y recursos en el aula de matemáticas* (p.43), por Flores et al., 2011, Universidad de Granada.

En relación con el momento en el que se utiliza el material en el aula, Niño y Romero (2023) realizan una explicación más detallada, basándose en Angarita y Palacios (2015). Ellos sugieren que, un material Pre-instruccional se utiliza al momento de introducir un concepto, y da prioridad a la exploración por parte de las estudiantes. Un material Co-instruccional se emplea durante la enseñanza de un concepto y sirve como apoyo durante ese proceso. Un material Post-instruccional se usa luego de dada la instrucción con el propósito de fortalecer el aprendizaje del concepto enseñado.

Por otra parte, se resalta que en este trabajo se considera importante incorporar los materiales didácticos en el aula de clases, en especial los materiales físicos, debido a que dichos materiales, como apoya Arrieta (1998) facilitan y favorecen la comprensión e incluso la comunicación - porque permite referirse a un soporte físico; favorecen la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática, convirtiendo su uso en el punto de partida para la construcción del conocimiento; facilitan la visualización, entendida como el proceso de formación de imágenes mentales o materiales, que es clave en la comprensión de conceptos.

Entonces, para este trabajo se asume el diseño y elaboración, de un material didáctico físico de contenido estadístico, para el nivel educativo de bachillerato (básica secundaria y básica media), que se pueda utilizar principalmente de forma Co-instruccional y permita la manipulación mediante el tacto. Además, se espera que logre desarrollar varios tipos de aprendizaje, haciendo énfasis en comprender, pero sirviendo como apoyo para cada uno de los demás tipos mencionados.

### **2.3. SECUENCIA DE ACTIVIDADES**

En esta sección se expone el análisis realizado sobre el diseño de actividades y secuencias didácticas. Se describen algunas ideas respecto a las sugerencias identificadas para organizar y desarrollar una secuencia de actividades, y mostrar las componentes que la configuran. Además, se justifica la pertinencia de realizar e implementar una secuencia didáctica, como una herramienta que favorece y enriquece la mediación pedagógica en el aula.

Se entenderá, de acuerdo con el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires et al. (2018), que una secuencia didáctica es un conjunto de actividades de enseñanza y aprendizaje o una secuencia de clases, que tiene un propósito específico dentro de un periodo de enseñanza, de algún contenido o proceso previamente establecido. En pocas palabras, una secuencia didáctica es un conjunto o una secuencia de actividades conectadas con un fin específico.

En consonancia con las ideas expresadas en Gómez (2023) y en el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires et al. (2018), para la formulación de una secuencia didáctica, en este escrito se consideran tres tipos de actividades de inicio, de desarrollo y de cierre, de modo que las autoras antes mencionadas concuerdan en que:

- **Inicio.** Estas actividades tienen como finalidad que la estudiante exprese sus ideas previas en torno a los temas a tratar, reconociendo así la necesidad de ampliar o transformar sus conocimientos. Se busca generar un cambio en sus esquemas de pensamiento, impulsado por el conflicto cognitivo inicial. Para ello, la docente debe definir indicadores prácticos fundamentados en su experiencia, en el enfoque curricular adoptado y en los saberes matemáticos que se espera desarrollar. Esta etapa requiere crear un momento detonante que active el aprendizaje, establecer metas claras y reconocer las posturas iniciales de las estudiantes frente al contenido por abordar.
- **Desarrollo.** Estas actividades buscan promover la reflexión sobre la importancia de adquirir nuevos conocimientos, permitiendo a las estudiantes contrastarlos con sus saberes previos, identificar sus beneficios y transformar sus esquemas mentales tras superar conflictos cognitivos iniciales. La construcción del conocimiento se da con el acompañamiento de la docente y la interacción entre compañeras. Es importante considerar cómo se abordan los contenidos y su vínculo con la realidad social, institucional y contextual, para que el aprendizaje sea significativo y desafiante. Las estudiantes deben reconocer conexiones con su entorno y experiencias previas. Para lograrlo, se requieren instrucciones claras, actividades variadas y secuenciales que movilicen distintos saberes, así como espacios de retroalimentación y orientación que favorezcan una construcción profunda del aprendizaje.
- **Cierre.** Estas actividades tienen como objetivo utilizar los conocimientos adquiridos en diferentes situaciones y ampliar lo aprendido, para posibilitar el trabajo en nuevos contextos. Este tipo de actividad se realiza con el fin de sistematizar lo aprendido, institucionalizar conocimientos, rectificar conceptualizaciones, afianzar ideas, realizar autoevaluaciones y/o planificar acciones para el futuro. En suma, se sugiere que este tipo de actividades permitan concluir la secuencia.

Si bien esta estructura presenta el orden y la manera en la que debería ligarse la secuencialidad en las actividades, el reconocer y determinar los principales componentes de cada momento o conjuntos de actividades es de vital importancia para diseñar la propuesta. Como menciona Gómez (2023) el hecho de que se reconozca la naturaleza de cada etapa facilita que las

estudiantes pasen de manera espontánea de una fase inicial a una fase avanzada o de la misma manera, de algo concreto a algo abstracto, para procurar que la estudiante sea el foco principal y que la docente sea solo una orientadora.

Dentro de las principales características de una secuencia didáctica, Gómez (2023) menciona que las actividades deben fomentar la investigación y la exploración, incluir una variedad de contextos que se conecten con los conocimientos previos de las estudiantes, y facilitar tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo. Esto permite promover la argumentación y la valoración de diversos puntos de vista, con el fin de desarrollar en las estudiantes la capacidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que ya saben, relacionando los nuevos conocimientos con sus experiencias previas para aplicarlos en la solución de problemas. La docente debe actuar como una persona facilitadora, proponiendo actividades que amplíen la comprensión de la alumna, y aunque las clases expositivas o de prueba pueden utilizarse, no deben ser el centro del proceso, sino herramientas complementarias.

Para finalizar, se evidencia que el diseño de una secuencia didáctica debe estructurarse de tal forma que permita a las estudiantes transitar de manera natural entre las distintas fases de esta, asegurando que la docente desempeñe un papel de una persona orientadora, mientras las educandas asumen un rol activo en su propio proceso de construcción del conocimiento. Ahora bien, para la propuesta que se aborda en capítulos siguientes se pretende generar una secuencia didáctica que apoye y muestre un uso que se le puede dar al material que se propone más adelante, así las actividades que se planteen vayan en concordancia con lo que exponen las autoras antes mencionadas, buscando que las estudiantes sean el foco principal del aprendizaje y que tanto la docente como las actividades sean una orientación hacia el conocimiento que se quiere adquirir.

### **3. DISEÑO DEL MATERIAL DIDÁCTICO Y DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES**

En esta sección se presenta el material diseñado. Con este fin se describe cada uno de los elementos del material concreto, se crea un manual de uso, se exhiben los propósitos de material; se prevén posibles errores que pueden cometer las estudiantes al momento de utilizarlo y se plantea una serie de actividades que se pueden implementar para potenciar sus beneficios del material. Además, se resalta que tanto el material como la secuencia de actividades están diseñados para la enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición y está pensado para estudiantes de educación básica y media.

#### **3.1. MATERIAL DIDÁCTICO: CUANTILÍZALO EN PARCHE**

En este apartado se describen los elementos que conforman el material didáctico diseñado con el objetivo de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición y llamado *Cuantilízalo en Parche*. Adicionalmente, se presentan los propósitos de naturaleza didáctica y disciplinar que se espera que dicho material cumpla.

Es importante resaltar que el material fue diseñado con el propósito de que los datos a estudiar estadísticamente los proporcionen las mismas estudiantes. De esta manera, cada alumna aporta su propia información, y para este conjunto de datos se determinarán los cuantiles correspondientes. El material incluye 40 fichas, lo que permite abarcar a un máximo de 40 estudiantes, asegurando una participación integral y representativa de todo el grupo en el que se implemente.

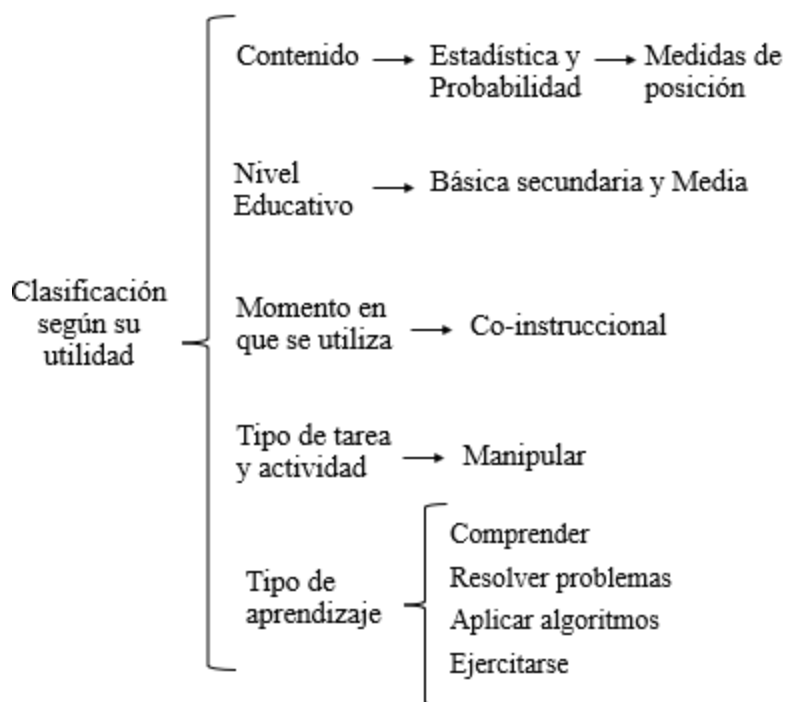
En relación con lo anterior, dado que el material permite analizar un máximo de 40 datos, se espera que facilite el cálculo y la comprensión de cuartiles y deciles. A través de su uso, las estudiantes podrán familiarizarse con estos conceptos y su cálculo. Aunque el material se centra en cuartiles y deciles, se espera que las habilidades y conocimientos adquiridos proporcionen una base para extender el aprendizaje al cálculo de percentiles u otros cuantiles. De este modo, las estudiantes pueden aplicar los mismos principios y metodologías aprendidas para comprender y calcular los cuantiles en general.

### 3.1.1. Descripción del Material

Teniendo en cuenta los referentes teóricos presentados en el segundo capítulo y siguiendo la tipificación realizada por Flores et al. (2011), se puede clasificar al material Cuantilízalo en Parche como se presenta a continuación (ver Figura 6).

**Figura 6.**

*Clasificación del material Cuantilízalo en Parche*



*Nota.* Adaptado de *Materiales y recursos en el aula de matemáticas* (p.43), por Flores et al., 2011, Universidad de Granada.

A continuación, se presenta una descripción del material didáctico que se diseñó. Para ello se exponen cada uno de los siete elementos que lo conforman (Figura 7) junto con una fotografía de los mismos para que el lector pueda identificarlos.

**Figura 7.**

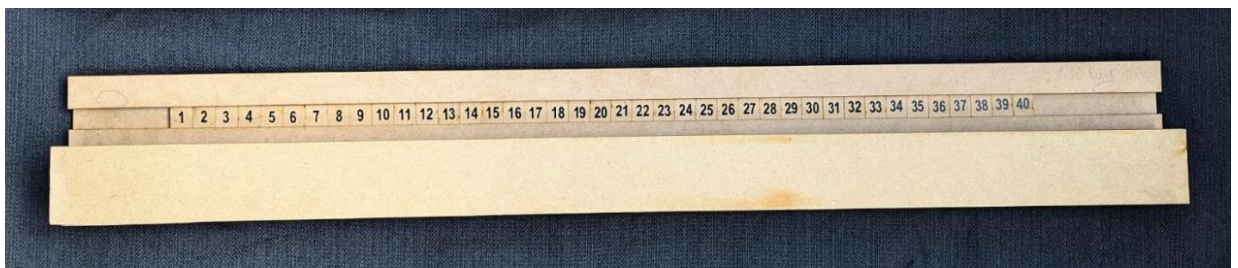
*Elementos que conforman el material didáctico diseñado*



- 1) **Carril posicionador.** Pieza de madera cuya utilidad es organizar los datos de forma ascendente. En esta se puede visualizar la posición de cada dato usando los cuadrados numerados del 1 al 40 (Figura 8), los cuales se pueden deslizar para asegurar la correspondencia entre cada uno de estos y su posición.

**Figura 8.**

*Foto del carril posicionador*

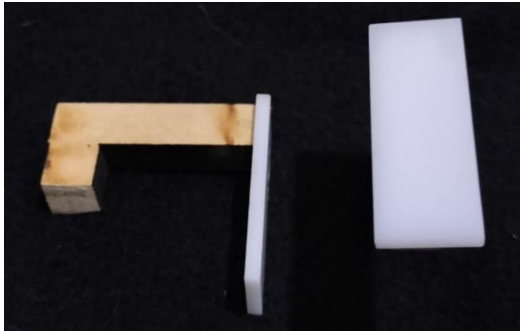


- 2) **Fichas.** Cada ficha está conformada por una pieza de madera en forma de L unida a un rectángulo de acrílico (Figura 7, el material cuenta con 40 unidades). En cada ficha se escribe un dato del conjunto de datos a estudiar. Gracias al acrílico el material puede utilizarse para estudiar cualquier conjunto de 40 o menos datos, puesto que es una lámina borrable. Las fichas se deslizan por el carril, además, cualquiera de las fichas puede

sacarse individualmente y ponerse donde se desee, permitiendo la organización de los datos necesaria para el cálculo de los cuantiles.

**Figura 9.**

*Ficha para escribir cada dato*



- 3) **Pinzas verdes.** Tres pinzas de madera, color verde, marcadas con  $Q_1$ ,  $Q_2$  o  $Q_3$  respectivamente (Figura 10). Su utilidad es identificar los cuantiles de un conjunto de datos, cuando estos son un dato de la distribución.

**Figura 10.**

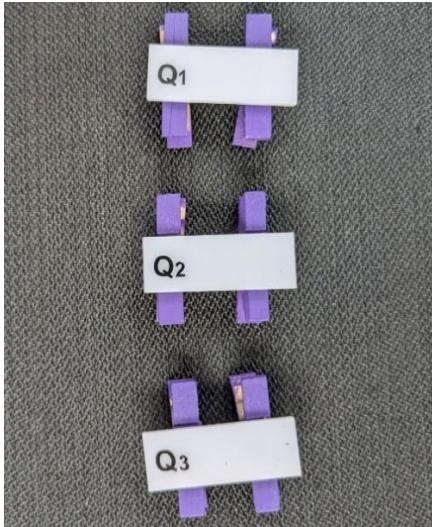
*Pinzas para identificar cuantiles cuando estos son datos*



- 4) **Pinzas moradas.** Tres pares de pinzas moradas. Cada par está unido por un rectángulo de acrílico y marcado con  $Q_1$ ,  $Q_2$  o  $Q_3$  respectivamente (Figura 11). Su utilidad es identificar los cuantiles de un conjunto de datos, cuando estos no son precisamente un dato de la distribución, sino que se calculan realizando el promedio entre dos datos; cada uno de estos es seleccionado con una de las pinzas, y el resultado del cuartil se escribe en el acrílico.

**Figura 11.**

*Pinzas para identificar cuartiles cuando estos son el resultado de un promedio*



- 5) **Pinzas azules.** Nueve pinzas de madera, color azul, marcadas con  $D_1, D_2, \dots, D_9$  respectivamente (Figura 12). Estas facilitan la identificación de los deciles de un conjunto de datos, cuando estos son un dato de la distribución.

**Figura 12.**

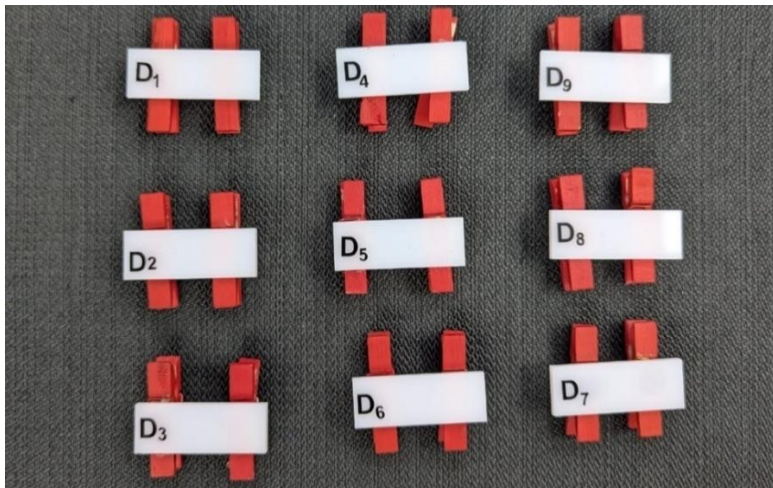
*Pinzas para identificar deciles cuando estos son datos*



- 6) **Pinzas rojas.** Nueve pares de pinzas rojas. Cada par está unido por un rectángulo de acrílico y marcado con  $D_1, D_2, \dots, D_9$  respectivamente (Ficha 13). Su utilidad es identificar los deciles de un conjunto de datos, cuando estos no son precisamente un dato de la distribución, sino que son el resultado de realizar un promedio entre dos datos; cada uno de estos es seleccionado con una de las pinzas, y el acrílico se utiliza para escribir el valor del decil correspondiente.

**Figura 13.**

*Pinzas para identificar deciles cuando estos son el resultado de un promedio*



- 7) **Separadores.** Dos piezas de madera color azul, con una forma similar a la de la letra U invertida (Figura 14). Su función es facilitar la visualización de ciertas agrupaciones en la distribución.

**Figura 14.**

*Separadores*



Para asegurar el uso correcto de cada uno de los elementos del material, se elaboró un manual de uso detallado (Anexo B). Este manual proporciona instrucciones para maximizar los beneficios educativos del recurso y guiar a las usuarias en su implementación.

### ***3.1.2. Propósitos del material***

A continuación, en este apartado se enuncian los propósitos para los cuales fue diseñado *Cuantilzalo en Parche*. Al usar el material didáctico se espera que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje se logre:

- ✓ Adquirir, mejorar o evaluar la comprensión de las medidas de posición.
- ✓ Facilitar la interpretación de los cuantiles por medio de la visualización.
- ✓ Desarrollar la habilidad para calcular cuantiles.
- ✓ Facilitar la identificación de la posición relativa de un valor dentro de un conjunto de datos.
- ✓ Mejorar las habilidades en el análisis de datos al permitir observar directamente las particiones de los cuantiles en la distribución.
- ✓ Proveer una representación visual del conjunto de datos y las particiones causadas por los cuantiles.
- ✓ Reducir el nivel de abstracción requerido para la comprensión del concepto estadístico.
- ✓ Causar motivación en el aprendizaje.

### ***3.1.3. Posibles errores de uso***

Pensando en la utilidad del material se previeron algunos errores que pueden cometer las estudiantes. Los cuales se presentan a continuación:

1. No acomodar el cuadrado de posición con la ficha del dato correspondiente. la alumna no recuerda que a cada dato le corresponde una posición específica, por tal motivo, no le asigna el cuadrado respectivo a cada ficha. También puede suceder que, al momento de intervenir con algún otro elemento del material, como pueden ser los separadores, no reorganiza los cuadrados de las posiciones con las fichas correspondientes, es decir, no se deja el espacio correspondiente para el separador.
2. No asignar la pinza o las pinzas correctas al dato o los datos al momento de identificar un cuantil. Este error puede suceder principalmente de dos formas. La primera, ocurre en el instante en el que, en vez de ubicar una pinza sencilla, azul o verde se ubica una pinza doble, morada o roja, o viceversa, según sea el caso. Por ejemplo, cuando el estudiantado

usa la fórmula general  $\left(R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1\right)$  para hallar la posición de un cuartil, y esta da como resultado un número decimal, la estudiante toma la parte entera del resultado como la posición del cuartil, o bien realiza una aproximación, y pone la pinza individual en el dato cuya posición es el número entero más cercano.

La segunda forma en la que este error ocurre es cuando, la alumna utiliza una pinza que no corresponde a su misma naturaleza, es decir, utiliza una pinza que identifica un decil cuando se está identificando un cuartil, o en el caso contrario, utiliza una pinza que identifica un cuartil cuando se está identificando un decil.

3. En la pinza doble, no escribir el promedio de los dos datos correspondientes, sino, el valor de la posición dado por la fórmula general.
4. Ubicar los separadores de forma incorrecta. En ocasiones porque se incluyen dentro del subconjunto formado, más datos de los que se quiere. O bien, porque no se incluyen algunos de los datos que son necesarios en el subconjunto formado.

### **3.2. SECUENCIA DE ACTIVIDADES**

El material didáctico descrito en la sección anterior ofrece una representación visual de la distribución de datos y de las particiones generadas por los cuantiles, incluyendo cuartiles y deciles. Es aplicable para cualquier ejercicio que implique conjuntos de datos no agrupados con una cantidad de datos menor o igual a 40. Aunque dicho material se puede utilizar en una amplia variedad de ejercicios con las características mencionadas, se creó una secuencia de actividades para ilustrar su uso y facilitar la comprensión de este.

La secuencia cuenta con tres actividades, la primera se realiza con el fin de que las estudiantes comprendan cómo identificar un cuartil en un conjunto de datos, y cómo se realiza su interpretación. La segunda actividad lleva a que las alumnas construyan la fórmula para el cálculo de las posiciones de los cuantiles. En la tercera actividad se busca que las estudiantes utilicen la fórmula construida en la actividad anterior para calcular las posiciones de los deciles, luego identificarlos, y por último interpretarlos.

Para el desarrollo de las tres actividades, además del material didáctico, se utilizaron como recurso varias guías. Estas últimas, contienen breves explicaciones de los conocimientos previos

que necesitan las alumnas para abordar las actividades, como definiciones de promedio, dato máximo, dato mínimo, entre otros términos o procedimientos. Las respuestas esperadas a cada una de las guías dependen del conjunto de datos que la docente decida utilizar, por ende, no es posible presentarlas en este apartado.

A continuación, se describe cada una de las actividades, junto con su propósito, algunas recomendaciones para la docente que desee implementarlas, las guías necesarias, y posibles errores que pueden cometer las estudiantes al momento de desarrollarlas.

### **3.2.1. Actividad 1: Acercándonos a los cuartiles**

Esta actividad tiene dos objetivos. El primero es que las estudiantes interioricen las “reglas” necesarias para hacer un uso correcto del material mediante su exploración. El segundo es que aprendan a calcular los cuartiles de un conjunto de datos de manera intuitiva, acercándolas al concepto de forma natural.

Para la realización de esta primera actividad, se recomienda recolectar previamente las notas definitivas del curso en la asignatura de Matemáticas en el periodo inmediatamente anterior o algunas calificaciones. Con dicha información, a cada pareja de estudiantes se le hace entrega del listado de las notas del curso de forma anónima, es decir, en el listado no deben estar los nombres de las estudiantes a las cuales les corresponde cada nota, todo esto para respetar la privacidad de cada una de las participantes. Junto con este listado se debe realizar la entrega de cada uno de los elementos del material y de la guía correspondiente (Guía 1).

## **Guía 1.**

**Nombres:** \_\_\_\_\_

1. Escriban cada dato en una de las fichas y ubiquen estas en el carril organizando los valores de menor a mayor.
2. Identifiquen el valor o los valores (máximo dos) que se encuentran en la posición central; para marcarlo(s) ayúdense con una pinza verde o morada.
  - Este valor es: \_\_\_\_\_

- ¿Qué pueden decir sobre la cantidad de datos que hay a la derecha de este valor en comparación con la cantidad de datos que hay a su izquierda?


\_\_\_\_\_

3. Utilicen los separadores para demarcar el primer grupo, el cual irá desde el primer dato hasta el valor identificado en el punto 2 (incluyéndolos).
  - Identifiquen el valor o los valores (máximo dos) centrales de este grupo; para marcarlo o marcarlos ayúdense con una pinza verde o morada según sea el caso.
  - Este valor o valores son: \_\_\_\_\_

Retiren los separadores utilizados

4. Utilicen los separadores para demarcar el segundo grupo, el cual va desde el valor identificado en el punto 2 hasta el último dato (incluyéndolos).
  - Identifiquen el valor o los valores (máximo dos) centrales de este grupo; para marcarlo o marcarlos ayúdense con una pinza verde o morada según sea el caso.
  - Este valor o valores son: \_\_\_\_\_

Retiren los separadores utilizados



**¿Sabían qué?**

En cualquier conjunto de datos existen tres “datos” importantes, a los cuales se les denomina **cuartiles**, a estos números se les denota  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  y se leen primer cuartil, segundo cuartil y tercer cuartil, respectivamente.

Para determinar los cuartiles del conjunto de datos inicialmente se tendrá en cuenta los valores que identificaron en los puntos anteriores, de la siguiente manera: para determinar el primer cuartil ( $Q_1$ ) se deben apoyar de la información recolectada en el tercer punto, para determinar el segundo cuartil ( $Q_2$ ) en la información recolectada en el segundo punto y para determinar el tercer cuartil ( $Q_3$ ) utilizaremos la información obtenida en el cuarto punto. **Luego, se debe de tener en cuenta la siguiente condición: si se tiene un único valor para cualquiera de los cuartiles, dicho cuartil será igual a ese valor, pero si se**

tienen dos valores, el cuartil correspondiente será igual al promedio de dichos valores.

El promedio o media aritmética se calcula sumando todos los números y dividiendo el resultado por la cantidad de elementos en el conjunto.



5. Teniendo en cuenta la anterior información determinen los cuartiles del conjunto de datos que están analizando. Si se realizó algún promedio escriban ese resultado en el espacio correspondiente de la pinza morada.

$Q_1 =$

$Q_2 =$

$Q_3 =$



**Tengan presente que ...**

El **mínimo** es el menor valor en el conjunto de datos ordenado.

El **máximo** es el mayor valor en el conjunto de datos ordenado.

6. Atendiendo a las instrucciones del docente, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos datos hay desde el valor mínimo hasta el primer cuartil?

\_\_\_\_\_

- ¿Cuántos datos hay desde el primer cuartil hasta el segundo cuartil? \_\_\_\_\_


- ¿Cuántos datos hay desde el segundo cuartil hasta el tercer cuartil? \_\_\_\_\_

- ¿Cuántos datos hay desde el tercer cuartil hasta el valor máximo?

\_\_\_\_\_

- ¿Cómo es la cantidad de datos que hay desde el primer cuartil hasta el segundo cuartil en comparación con la cantidad de datos que hay desde el segundo cuartil hasta el tercer cuartil? \_\_\_\_\_

- Teniendo en cuenta las anteriores repuestas, los cuartiles dividen al conjunto en partes con \_\_\_\_\_ cantidad de datos.




### Tengan presente que ...

El 100% es una referencia que indica la totalidad del conjunto de datos que se está considerando. En otras palabras, el 100% de un conjunto de datos equivale a la cantidad total de elementos que tiene el mismo. Por ende, si no se tiene en cuenta a todos los datos, solo se estaría considerando una porción de ese 100%.

7. Utilizando la información dada, sin hacer cálculos y empleando como apoyo visual el material, completen la siguiente información.

- La cantidad de datos que equivale al 100% en nuestro conjunto de notas es \_\_\_\_\_.
- Desde el dato inicial \_\_\_\_\_ hasta el dato \_\_\_\_\_ se encuentra el 50% de la información.
- Desde el dato inicial \_\_\_\_\_ hasta el dato \_\_\_\_\_ se encuentra el 25% de la información.
- Desde el dato inicial \_\_\_\_\_ hasta el dato \_\_\_\_\_ se encuentra el 75% de la información.



### ¿Para qué sirven estas medidas?

Los cuartiles son medidas estadísticas que ayudan a obtener información porcentual de los datos que se están analizando.

8. Analicen las notas de su curso

- El 25% de los estudiantes obtuvieron una nota menor a \_\_\_\_\_
- El 25% de los estudiantes obtuvieron una nota mayor a \_\_\_\_\_
- El 50% de los estudiantes sacaron una nota mayor a \_\_\_\_\_
- El 50% de los estudiantes sacaron una nota menor a \_\_\_\_\_
- El 75% de los estudiantes sacaron una nota menor a \_\_\_\_\_
- El 75% de los estudiantes sacaron una nota mayor a \_\_\_\_\_

A continuación, se prevé que algunos errores que las estudiantes pueden cometer durante esta actividad, estos en concordancia con los reportados en la literatura se asociarán en capítulos posteriores, algunos de los errores que pueden llegar a ocurrir son:

1. En los puntos 2, 3 y 4 tomar el valor central como el dato que se encuentra en la posición determinada por  $\frac{\text{Total de datos}}{2}$  o el resultado de esta expresión en sí.<sup>8</sup>
2. Debido al orden en el que se hallaron los cuartiles, creer que el cuartil dos es el primer cuartil y que el segundo cuartil es el primero.
3. Cometer diferentes errores en el cálculo de los cuartiles, ya sea al momento de calcular promedios o tomar más o menos datos de los que son.
4. Seleccionar de manera incorrecta los datos entre los que se encuentra el porcentaje solicitado. Por ejemplo, asociar el 25% al primer cuartil, sin tener en cuenta que este porcentaje puede representar diferentes particiones del conjunto de datos.

Cuando las estudiantes finalicen esta primera guía, a modo de cierre se propone realizar una socialización, en la cual, se aborden preguntas como: teniendo en cuenta los resultados del análisis ¿Cómo creen que fue el desempeño general del curso en las clases de *matemáticas* en ese periodo? ¿Con que información estadística pueden apoyar esta afirmación? ¿A qué razones creen que se pudo deber dicho desempeño?

### ***3.2.2. Actividad 2: Descubramos la fórmula para determinar cuantiles***

El objetivo principal de esta actividad es guiar a las estudiantes en la construcción de la fórmula general para determinar la posición de cualquier cuantil dentro de un conjunto de datos ' $R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1$ '.<sup>9</sup> Para lograr esto, se utiliza el material didáctico como apoyo visual y se parte del conocimiento del cálculo intuitivo de cuantiles.

Para ello, se utiliza la Guía 2, en la cual el tema de la recolección de datos son los “casi algo”. Por ende, antes de hacer entrega de la guía 2 se recomienda hacer una encuesta en la que se le

---

<sup>8</sup> Esto debido a que las estudiantes, por lo general, asocian el centro con la mitad, y la mitad con la operación de dividir por dos, ya que usualmente es utilizada en otros contextos matemáticos para encontrar puntos medios en longitudes, cantidades, intervalos, etc.

<sup>9</sup> En el marco de referencia de este trabajo se explica el cómo se obtiene la fórmula general para determinar la posición de un cuantil.

pregunte a cada una de las estudiantes cuántos “casi algo” o parejas ha tenido en su vida, y las cantidades que estas proporcionen serán el conjunto de datos con el cual se trabajará.

Si bien en este caso el tema no es particularmente atractivo desde una perspectiva social o de relevancia local, en la implementación se buscaba optimizar el trabajo. Por este motivo, se eligió un tema que fuera más receptivo para las estudiantes, permitiendo una mejor acogida y participación del público. No obstante, en futuras implementaciones, se podrían considerar temas alternativos que también permitan un análisis estadístico significativo. Algunas opciones incluyen:

- Tiempo promedio diario en redes sociales, para explorar patrones de uso y posibles relaciones con otros aspectos como el rendimiento académico o el bienestar digital.
- Número de horas de sueño, lo que permite estudiar con recomendaciones médicas y poder llevar un mejor control en la salud.
- Cantidad de veces que consumen comida rápida en una semana, para analizar tendencias en hábitos alimenticios y su impacto en la salud.
- Frecuencia de práctica de ejercicio físico a la semana, lo que puede relacionarse con la salud y el estilo de vida de las estudiantes.
- Número de veces que han faltado a clase, lo que podría permitir analizar posibles factores asociados a la asistencia.

Además de lo anterior, se aconseja que la cantidad del conjunto de datos para la realización de esta actividad sea de 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 o 37 datos. Esto debido a que, con esta cantidad los tres cuartiles son datos de la distribución, lo que facilita tanto la visualización como la comprensión de la fórmula.

## Guía 2

**Nombres:** \_\_\_\_\_

1. Escriban cada dato en una de las fichas y ubiquen estas en el carril organizando los valores de menor a mayor y determinen los cuartiles, haciendo uso de la pinza predeterminada para cada uno de ellos.

2. A partir de la información identificada en el primer punto, ¿en qué posición se encuentra el primer cuartil, segundo cuartil y tercer cuartil?

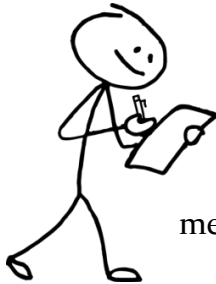
Posición del  $Q_1$ : \_\_\_\_\_ Posición del  $Q_2$ : \_\_\_\_\_ Posición  $Q_3$ : \_\_\_\_\_

Si se comparan las posiciones de los cuartiles, ¿notan algo acerca de estas posiciones con respecto al total de datos? Escriban la relación a continuación.

\_\_\_\_\_

3. Respondan lo siguiente

- ¿Cuántos datos hay entre el valor mínimo y el primer cuartil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos datos hay entre el primer cuartil y el segundo cuartil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos datos hay entre el segundo cuartil y el tercer cuartil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos datos hay entre el tercer cuartil y el valor máximo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tienen en común cada una de estas cantidades? \_\_\_\_\_



### Tengan presente que ...

De aquí en adelante en cualquier conjunto de datos, a este valor (la cantidad de datos que hay entre un cuartil y su consecutivo, o entre los otros datos específicos mencionados en el punto anterior) se le denominará  $m$

4. Para el conjunto de datos  $m =$  \_\_\_\_\_

### ¿Sabían qué?

Se usa la notación  $Q_i$  para referirse a los cuartiles en general, donde  $i$  puede tomar el valor de 1, 2 o 3.  $Q_1$  es el primer cuartil,  $Q_2$  es el segundo cuartil, y  $Q_3$  es el tercer cuartil.



5. Para cada cuartil respondan.

- Cantidad de veces que se repite  $m$  antes de  $Q_1$ : \_\_\_\_\_
- Cantidad de veces que se repite  $m$  antes de  $Q_2$ : \_\_\_\_\_
- Cantidad de veces que se repite  $m$  antes de  $Q_3$ : \_\_\_\_\_

- ¿Encuentran algún “patrón” con respecto a la cantidad de veces que se repite el  $m$  con el cuartil buscado? Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_
- Intenten expresarlo a continuación:

---



---



---

6. Completen la siguiente tabla

Cuartil $Q_i$	Cantidad de cuartiles antes de $Q_i$	Número de cuartil ( $i$ )	Diferencia entre el número de cuartil y cuartiles antes de $Q_i$
$Q_1$			
$Q_2$			
$Q_3$			

7. Encuentran alguna relación matemática entre el número de cuartil con la cantidad de cuartiles que hay antes de él. Formulen una expresión para cada una:

- $Q_1$ :
- $Q_2$ :
- $Q_3$ :

8. Completen la tabla que se muestra a continuación.

$Q_i$	$m$	$i$	$m * i$	$i - 1$	$(m * i) + (i - 1)$	Posición
$Q_1$						
$Q_2$						
$Q_3$						

- ¿Cuál es el número exacto que le falta al valor ' $(m * i) + (i - 1)$ ' de cada uno de los cuartiles para ser igual al valor de la posición del cuartil respectivo?  
\_\_\_\_\_
- La expresión que representa la posición de cada cuartil es:

9. A partir de la información recolectada realicen lo siguiente

- Primer cuartil ( $Q_1$ ):

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta  $Q_1$  cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con color azul, colorean los valores que se encuentran después del mínimo y antes de  $Q_1$ .
- Con color rojo, colorean el cuartil o los cuartiles que haya antes de  $Q_1$ .
- Con color amarillo, colorean los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_  
¿A qué corresponden dentro del conjunto de datos?  
\_\_\_\_\_
- Basándose en la tabla del punto 7, ¿a qué elementos coloreados corresponde cada parte de la expresión obtenida en ese mismo punto?  
✓ “ $(m * i)$ ” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_  
✓ “**2**” corresponde a los elementos de color: \_\_ \_\_\_\_\_
- Con la fórmula (expresión obtenida en el punto 8) “reemplacen” cada valor que conozcan para la posición de  $Q_1$  **sin operar**, después, realicen las operaciones correspondientes.

- Segundo cuartil ( $Q_2$ ):

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta el  $Q_2$ , cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con color azul, colorean los valores que se encuentren:  
✓ Después del mínimo y antes del  $Q_1$ .  
✓ Después del  $Q_1$  y antes del  $Q_2$ .
- Con color rojo, colorean el cuartil o los cuartiles que haya antes de  $Q_2$ .
- Con color amarillo, colorean los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_  
¿A qué corresponden puntualmente dentro del conjunto de datos? \_\_\_\_\_




10. Completen lo siguiente:

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta el máximo, cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con color azul, coloreen los valores que se encuentren:
  - Después del mínimo y antes del  $Q_1$ .
  - Después del  $Q_1$  y antes del  $Q_2$ .
  - Después del  $Q_2$  y antes del  $Q_3$ .
  - Después del  $Q_3$  y antes del máximo.
- Con un color rojo, coloreen los cuartiles.
- Con un color amarillo, coloreen los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_ ¿A qué corresponden puntualmente dentro del conjunto de datos?  
\_\_\_\_\_
- Cuenten la cantidad de valores que hay de cada color:
  - Color azul: \_\_\_\_\_
  - Color rojo: \_\_\_\_\_
  - Color amarillo: \_\_\_\_\_
- Si sumamos estas tres cantidades, el resultado obtenido es igual a:  
\_\_\_\_\_
- En la Guía 1, en el punto 6, determinaron que los cuartiles dividen el conjunto de datos en partes iguales, a partir de la representación, ¿en cuántas partes iguales dividen los cuartiles el conjunto de datos? \_\_\_\_\_



**Tengan en cuenta que ...**

De aquí en adelante denotaremos como “s” al número de particiones o partes iguales en las que se divide el conjunto de datos. Por ejemplo, para cuartiles  $s = 4$ . Si se dividen en más o menos partes, el valor de “s” cambiará.

- En cuartiles  $s =$  \_\_\_\_\_, por ende, si se quiere expresar la cantidad de cuartiles que existen en cualquier conjunto de datos **en términos de s** lo correcto sería decir que, la cantidad de cuartiles de un conjunto de datos es igual a \_\_\_\_\_.

- Se denomina a la cantidad total de datos de un conjunto como “ $N$ ”, formulen una expresión que sea equivalente a dicha  $N$ , expresen cada valor que conozcan utilizando la notación general (que funcione para cualquier conjunto de datos), además, usen la menor cantidad de números posibles. Escríbanla a continuación:

$$N =$$

11. De la última expresión, despeje  $m$  y reemplace este valor en la fórmula de posición determinada en el punto 8.

$$\text{Posición de } Q_i =$$

Se prevé que algunos errores que las estudiantes pueden cometer durante esta actividad son:

1. Confundir la posición con el dato que se encuentra en esta.
2. En lugar de colocar las veces que se repite  $m$ , se escribe la cantidad de números que hay antes el cuartil implicado, excluyendo los cuartiles anteriores a este y el valor mínimo. Por ejemplo, si  $m$  es 6, antes del cuartil 2,  $m$  se repite dos veces, esto es, escribir 12 en vez de 2.
3. En los puntos 8 y 9 colorear incorrectamente cada dato, esto puede deberse a que no se reconoce el término con el que se denominan ciertos elementos de un conjunto de datos.
4. En los puntos 8 y 9 no reconocer la relación entre la representación general (p. ej. “ $m * i$ ”) y algunos elementos particulares del conjunto de datos.
5. En el punto 10, cometer errores algebraicos y/o aritméticos al despejar la ecuación.

Es importante aclarar que en la Guía 2 no se incluyó ninguna actividad de interpretación, debido a que el objetivo principal de esta es llevar a las estudiantes a la construcción de la fórmula general. Sin embargo, si la docente lo desea puede agregar algunas preguntas abiertas que conlleven a la interpretación de los cuartiles.

### 3.2.3. Actividad 3: Apliquemos la fórmula para determinar deciles

Esta última actividad se realiza con el fin de que las estudiantes comprendan el concepto de deciles, aprendan a utilizar la fórmula general ‘ $R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1$ ’ para calcular las posiciones de estos, y con estas identificar los deciles de cualquier conjunto de datos. Para su realización se puede preguntar a las educandas ¿Cuánto dinero gastan diariamente? Reservando siempre el

anonimato de la información recolectada. Además de utilizar como apoyo el material didáctico para la implementación de esta tercera actividad, es necesario utilizar la Guía 3, la cual se muestra a continuación.

## Guía 3

Nombres: \_\_\_\_\_

1. Escriban cada dato en una de las fichas y ubiquen estas en el carril organizando los valores de menor a mayor.

### Recuerden que

La posición de los cuantiles puede ser calculada con la siguiente fórmula:

$$R[C_i(s)] = i \frac{N - 1}{s} + 1$$

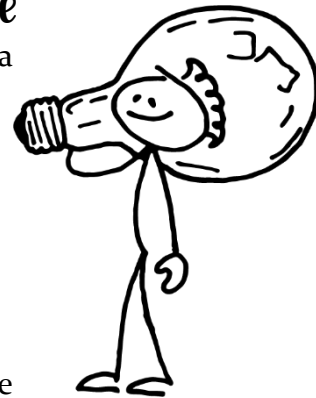
Donde:

- $N$  es el número total de datos en el conjunto.
- $s$  es la cantidad de en las que se divide el conjunto de datos.
- $i$  es el índice del cuantil que estamos buscando. Puede ser:

$$i = 1, 2, 3, \dots, s - 1.$$

Además, una vez identificada la posición, se debe determinar el  $C_i(s)$ , para esto se debe tener en cuenta los siguientes criterios.

- Si  $R[C_i(s)]$  es un número entero, el cuantil  $C_i(s)$  es el dato que se encuentra en la posición  $R[C_i(s)]$ .
- Si  $R[C_i(s)]$  es un número decimal, se toma la parte entera de este ' $\llbracket R[C_i(s)] \rrbracket$ ' y el cuantil  $C_i(s)$  es el promedio de los datos que se encuentra en la posición  $\llbracket R[C_i(s)] \rrbracket$  y  $\llbracket R[C_i(s)] \rrbracket + 1$



2. ¿Cuántos cuantiles hay en una distribución de datos?  
\_\_\_\_\_.
3. ¿Qué relación matemática tiene la cantidad de cuantiles con la cantidad de partes en la que dividen el conjunto de datos?  
\_\_\_\_\_.
4. Teniendo en cuenta la Guía # 2, para cuantiles: \_\_\_\_\_.

- $s = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Generalmente  $i$  puede tomar más de un valor, ¿cuáles son los valores que puede tomar  $i$  en los cuartiles?  
 $i = \underline{\hspace{4cm}}$ .

5. A partir de lo identificado anteriormente, si se divide el conjunto de datos en 10 partes iguales:

- $s = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Generalmente  $i$  puede tomar más de un valor, ¿cuáles son los valores que puede tomar  $i$  si se hace una división en 10 partes iguales?  
 $i = \underline{\hspace{4cm}}$ .

6. Si en cada una de las posiciones " $R[C_i(s)]$ " se encuentra el dato o los datos que "marcan" la división del conjunto, entonces empleando la fórmula, estas posiciones son:

Posición	Procedimiento para calcular la posición
$R[C_1(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_2(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_3(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_4(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_5(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_6(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_7(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_8(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_9(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	

### Tengan presente que ...



$R[C_i(s)]$  es la posición del cuantil  $C_i(s)$ , antes cuando  $s = 4$ , a  $C_i(4)$  se les llama cuartiles y se les denotan con  $Q_i$ , ahora, cuando  $s = 10$ , a  $C_i(10)$  se les llama deciles y se les denota con  $D_i$ . Adicionalmente ambas expresiones son equivalentes, es decir, se puede usar  $C_i(10)$  o  $D_i$  en el caso de los deciles, y  $C_i(4)$  o  $Q_i$  para los cuartiles.

7. Teniendo en cuenta las posiciones identificadas anteriormente, las condiciones que se enunciaron en la primera nota y el trabajo que se venía realizando con las pinzas, determine cada decil y ubique (según sea el caso) la pinza correspondiente, ya sea roja o azul.

Decil	Procedimiento para calcular o identificar el decil
$D_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_8 = \underline{\hspace{2cm}}$	
$D_9 = \underline{\hspace{2cm}}$	

¿Qué condición o cuál parámetro siguió al momento de ubicar cada pinza?

---

---

8. ¿Qué afirmaciones pueden hacer sobre el dinero que gastan las personas del curso? Utilicen la información porcentual y justifiquen sus respuestas haciendo uso de los deciles determinados en los puntos anteriores.

---

---

---

---

Se prevé que algunos errores que las estudiantes pueden cometer durante esta actividad son:

1. Asignar a  $i$  los valores desde 1 hasta  $s$ , en otras palabras, no notar que el mayor valor que toma  $i$  es  $s - 1$ .
2. Puede que, al determinar las posiciones, no “reemplacen” los valores correctos o que seleccionen los que no corresponden al conjunto de cuantiles solicitados.
3. Al utilizar la fórmula para determinar las posiciones de los deciles “ $R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1$ ” cometer errores aritméticos.

## **4. IMPLEMENTACIÓN DE LA PRUEBA PILOTO**

Con el propósito de validar la utilidad, el funcionamiento e identificar posibles aspectos de mejora del material didáctico *Cuantilízalo en Parche* se realiza una implementación de las actividades presentadas en el anterior capítulo. En consecuencia, en este capítulo se presenta una breve caracterización de la población con la cual se realizó la gestión, la descripción de algunos datos importantes de la misma y un análisis de las respuestas brindadas por las estudiantes en el desarrollo de cada una de las guías, con esta información se realiza la validación que se presenta en el siguiente capítulo.

### **4.1. POBLACIÓN**

La secuencia de actividades fue gestionada en un colegio distrital ubicado en la localidad de Kennedy en la ciudad de Bogotá. Particularmente, teniendo en cuenta los referentes curriculares colombianos, en los cuales se explicita que las medidas de posición se deben estudiar entre los grados noveno y décimo, esta se realizó con 29 estudiantes de décimo grado, con un rango de edad entre los 14 y 16 años. Es importante resaltar que las estudiantes del colegio no cuentan con clase de Estadística, y los tópicos de esta disciplina tampoco son incluidos en el plan de estudios del área de matemáticas. Esto se concluye al hacer una revisión de la malla curricular y de conversaciones mantenidas con las profesoras a cargo del área de Matemáticas de educación básica secundaria y media.

### **4.2. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN**

Inicialmente, se realizó un cuestionario a las estudiantes, con el fin de recopilar algunos de los datos (calificación final de cada estudiante del tercer periodo, cantidad de “casi algo” o parejas y dinero que gastan normalmente en un día) a utilizar en las actividades planteadas. Además, se dieron a conocer las personas que dirigieron la gestión (las futuras educadoras matemáticas “FEM”) y se comentó a las estudiantes qué se iba a realizar durante las siguientes clases de matemáticas.

Adicionalmente, se realizó la implementación de las 3 actividades, abarcando 10 horas de clases. De las 10 horas mencionadas, 3 fueron dedicadas a la primera actividad, 5 a la segunda y 2 a la tercera.

Se trabajó con grupos de dos o tres estudiantes. A cada grupo se le hizo entrega del material<sup>10</sup> y la guía correspondiente. Para la primera y segunda guía se hizo entrega a cada grupo de un carril posicionador, dos separadores, tres pinzas verdes, tres pinzas moradas, 31 fichas y dos marcadores. Para la tercera guía se hizo entrega de lo mismo, pero, en lugar de las tres pinzas verdes y las tres pinzas moradas, se entregaron nueve pinzas azules y nueve pinzas rojas. Cabe destacar que, para cada una de las actividades se utilizaron conjuntos de datos diferentes; para la primera se utilizó la calificación definitiva de Matemáticas del tercer bimestre escolar, en este conjunto se tuvieron 31 datos (dos datos de más a la cantidad total de estudiantes, ya que se contó con las calificaciones de dos estudiantes retirados). En la segunda actividad, se utilizó el conjunto de “casi algo” o “parejas” que han tenido en su vida, en este conjunto se contó con 29 datos, por último, para la tercera guía el conjunto de datos utilizado fue la cantidad de dinero que se gastan normalmente en un día, se obtuvieron 26 datos. La información utilizada fue proveída por las estudiantes en el cuestionario inicial.

Es de mencionar que, con el propósito de recolectar alguna información necesaria para un análisis posterior, se tomó como evidencia, grabaciones de audio de algunas conversaciones (entre profesora y estudiantes), fotos y videos del material sin que aparecieran rostros o datos biométricos que fuesen sensibles de privacidad.

### **4.3. ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN**

A continuación, se exhiben los resultados obtenidos gracias a la implementación de las actividades. Para ello, inicialmente se realiza un análisis basado en los errores que cometieron las estudiantes durante el desarrollo de las sesiones, tanto en las guías, como en el uso del material. Además, se realizan comentarios pertinentes relacionando dichos errores con los previstos por los autores. Luego, se presentan algunas producciones y acciones realizadas por el estudiantado que dan evidencia del cumplimiento de algunos de los propósitos pensados tanto para las actividades como para el material didáctico. Se realizaron algunas transcripciones naturales<sup>11</sup> de los audios

---

<sup>10</sup> Los elementos entregados corresponden a los vistos anteriormente en la Figura 8.

<sup>11</sup> La transcripción natural se caracteriza por priorizar la fluidez del texto, corrigiendo los errores gramaticales del hablante, reestructurando frases incompletas y eliminando repeticiones o interjecciones. Asimismo, puede acortarse el contenido cuando sea necesario, siempre preservando el sentido esencial del mensaje original. (NM Traducciones, 2021)

grabados, las cuales se exponen junto con algunas fotografías. Una información más completa, sobre el análisis que se realizó se puede consultar en el del Anexo C.

#### ***4.3.1. Desarrollo de las guías***

En los siguientes apartados, se presenta una descripción basada en las actuaciones que realizaron las estudiantes al enfrentarse a las actividades usando como apoyo el material *Cuantilízalo en Parche*. Dicha descripción está basada principalmente en el reconocimiento de los errores o dificultades que se presentan en el marco de referencia y en la sección en la que se presenta la secuencia de actividades.

##### *4.3.1.1. Observaciones Guía 1*

La primera actividad, relacionada con la introducción de la noción de cuartiles y la identificación de cada uno de los elementos del material, está estructurada de tal forma que se puede evidenciar puntos tanto del cálculo de los cuartiles, como de su interpretación. Para el desarrollo de esta se realizaron 13 grupos de estudiantes y el conjunto de datos que se estudió fue: 10, 10, 14, 14, 14, 17, 27, 27, 28, 31, 33, 34, 38, 39, 40, 40, 41, 41, 42, 43, 43, 43, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 47, 48 y 48.

Al respecto se observa que la mayoría de las participantes respondió de manera adecuada a cada una de las preguntas realizadas luego de algunas intervenciones por parte de las FEM. Al analizar los resultados de esta actividad, se observa que alrededor del 74,73% de los grupos brindaron respuestas correctas y aproximadamente el 19,78% parcialmente correctas, mientras que aproximadamente el 5,49% respondieron incorrectamente. Sin embargo, se evidencia que las estudiantes tuvieron mayor dificultad al momento de enfrentar los puntos 2, 6, 7, y 8 de la Guía 1.

Con respecto al segundo punto de la guía se observa que las estudiantes cometieron errores en los dos ítems de este. En el primer ítem “Este valor es”, varios grupos asumieron que el dato central estaba ubicado en la posición 15 (Figura 15), y llegaban a esta respuesta después de dividir 31 entre 2, y tomar la parte entera del resultado. Este error fue previsto por las autoras para el caso en el que al dividir el total de datos entre dos se obtiene un número entero, pero gracias a este punto, se evidencia que ocurre algo similar cuando al realizar ese cociente resulta un número

decimal. En el segundo ítem “¿Qué pueden decir sobre la cantidad de datos que hay a la derecha de este valor en comparación con la cantidad de datos que hay a su izquierda?” 30,77% de los grupos realizaron afirmaciones correctas, pero no respondieron lo solicitado (Figuras 16 y 17) y el 8% de los grupos respondieron de forma incorrecta (Figura 18).

### **Figura 15.**

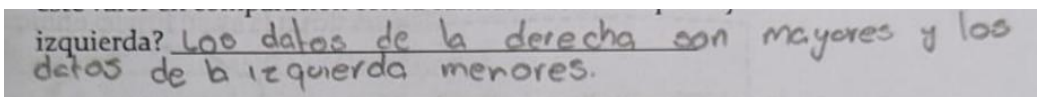
*Uso de la pinza verde para identificar el dato central*



*Nota.* Varios grupos consideran que el dato central es el que se encuentra ubicado en la posición 15, pero no se percatan que, al elegir este dato quedan 14 valores a su izquierda, y 16 valores a su derecha, incumpliendo la característica de centralidad.

### **Figura 16.**

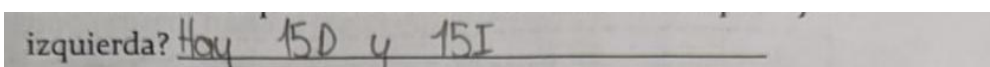
*Afirmación incorrecta realizada por un grupo*



*Nota.* Las estudiantes realizan una comparación entre el valor numérico de los datos, pero se pedía comparar la cantidad.

### **Figura 17.**

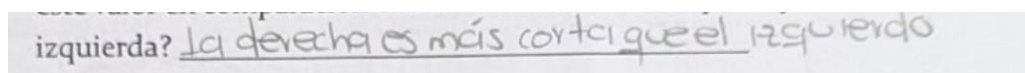
*Respuesta parcial realizada por un grupo*



*Nota.* Las estudiantes escriben una afirmación correcta, e identifican la cantidad de datos que hay al lado izquierdo y derecho del segundo cuartil, pero no realizan una comparación entre dichas cantidades.

### **Figura 18.**

*Respuesta incorrecta del ítem dos del segundo punto*



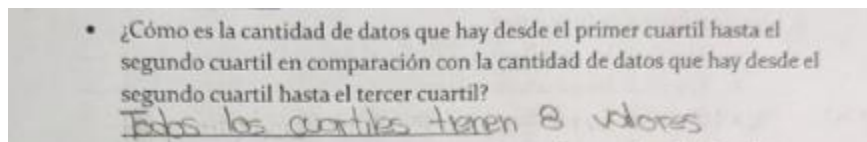
¿izquierda? La derecha es más corta que el izquierdo

*Nota.* El grupo realiza una afirmación incorrecta y utilizan palabras que no son pertinentes en el contexto como “corta”.

En relación con el sexto punto, se observa que las estudiantes presentan errores recurrentes en el quinto y sexto ítem. En el quinto, las educandas presentaron errores diversos como se muestra en las Figuras 19, 20 y 21. En el sexto ítem se evidencia que algunas estudiantes asumieron que los cuartiles siempre dividen el conjunto en partes iguales con una cantidad específica de datos “8 datos” (Figura 22). Este punto en particular resulta ser uno de los más complicados para las estudiantes, arrojando que un 46,15% de los grupos lo respondieron correctamente, mientras que el 53,85% lo respondió de forma correcta parcialmente, pues, aunque tenían la idea, la expresaron mal o se equivocaron en algunos detalles. Algunas de estas respuestas se presentan:

### **Figura 19.**

*Error de identificación del número entre dos cuartiles.*

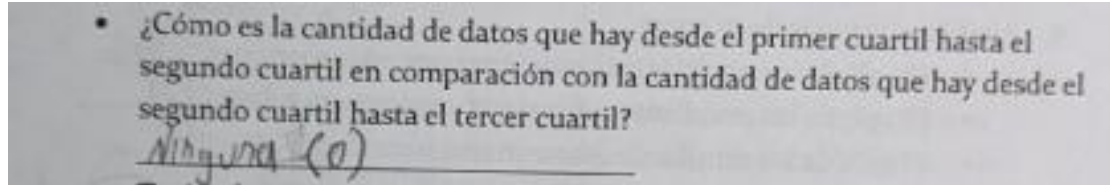


• ¿Cómo es la cantidad de datos que hay desde el primer cuartil hasta el segundo cuartil en comparación con la cantidad de datos que hay desde el segundo cuartil hasta el tercer cuartil?  
Todos los cuartiles tienen 8 valores

*Nota.* Afirmación incorrecta, ya que, no se distingue que cada cuartil no es un grupo de datos con un número fijo de elementos, sino que, es un solo dato específico.

### Figura 20.

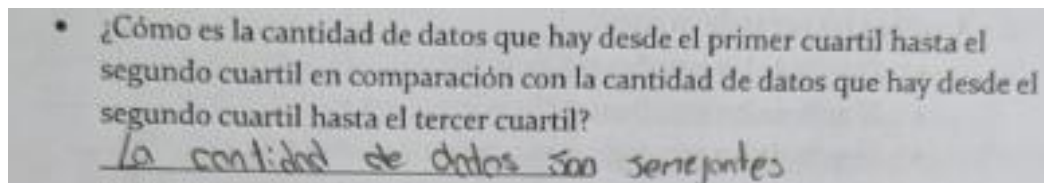
*Error de generalización mal realizada*



*Nota.* Esta respuesta pudo verse influenciada por los ítems anteriores, dado que estos hacen que el grupo asumiera que no había diferencia entre las cantidades, sin relacionar adecuadamente su respuesta con lo que pedía el ítem, ya que se esperaba que la respuesta era que la cantidad era la misma o que las cantidades eran iguales.

### Figura 21.

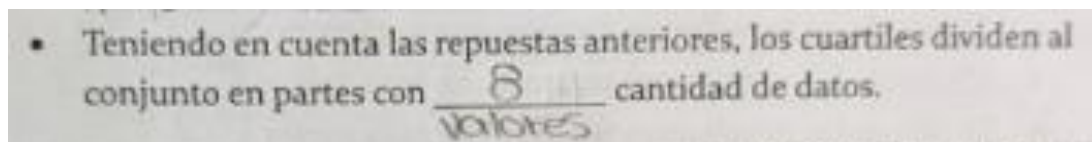
*Error de lenguaje*



*Nota.* Aunque se puede evidenciar que este grupo tiene una idea correcta, el uso de la palabra “semejante” no es el adecuado para expresarla, porque dado que son cantidades con valores específicos lo correcto sería usar palabras como igual, mayor o menor para relacionar cantidades.

### Figura 22.

*Respuesta incorrecta del ítem seis del sexto punto*

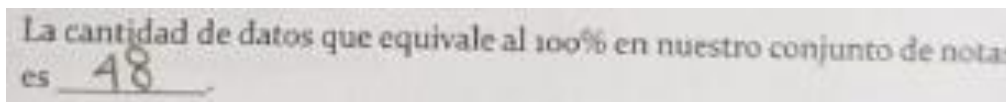


Nota. Las estudiantes, asumieron de los ítems anteriores, que los cuartiles siempre dividen el conjunto en partes con 8 datos (una cantidad específica).

Siguiendo con el análisis, al abordar las respuestas brindadas por las estudiantes, en el séptimo punto, se evidencia que el 30,77% de los grupos cometieron el mismo error al responder el primer ítem, puesto que, dijeron que la cantidad de datos que equivale al 100% es 48, cuando, como se mencionó anteriormente, se tienen en total solo 31 datos.

### Figura 23.

*Respuesta incorrecta del ítem uno del séptimo punto*



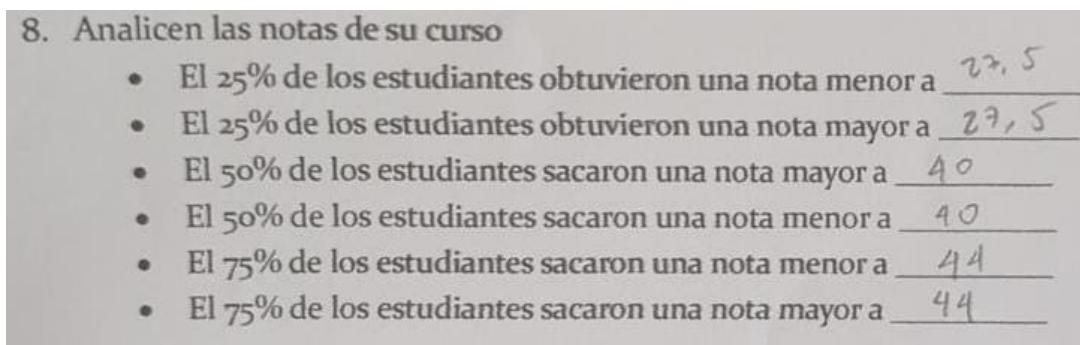
La cantidad de datos que equivale al 100% en nuestro conjunto de notas es 48

Nota. Los grupos interpretan mal el enunciado y al tener la idea de que desde el dato inicial “10” hasta el último dato “48” se abarca el 100% de los datos, afirman erróneamente que al tener 48 datos se tiene 100% de la información.

Con respecto al octavo punto de la guía, se menciona que la gran mayoría de los grupos mostraron dificultad para comprender la equivalencia porcentual de ciertos grupos de datos, cometiendo así el cuarto error previsto por las FEM, es decir, no seleccionaron correctamente los datos entre los que se encuentra el porcentaje solicitado (Figura 24).

### Figura 24.

*Error al asignar un valor porcentual específico a un valor*



8. Analicen las notas de su curso

- El 25% de los estudiantes obtuvieron una nota menor a 27,5
- El 25% de los estudiantes obtuvieron una nota mayor a 27,5
- El 50% de los estudiantes sacaron una nota mayor a 40
- El 50% de los estudiantes sacaron una nota menor a 40
- El 75% de los estudiantes sacaron una nota menor a 44
- El 75% de los estudiantes sacaron una nota mayor a 44

*Nota.* Los grupos asocian directamente el 25% con el primer cuartil, el 50% con el segundo cuartil y el 75% al tercer cuartil, dejando de lado lo que se pide en cada ítem, por tanto, piensan que todo lo que tenga que ver con un porcentaje en específico se le atribuye a un cuartil determinado, sin explorar otras posibilidades, lo cual limita la interpretación de estas medidas, se esperaba que las estudiantes lograran identificar con respecto a qué se pide la identificación de un porcentaje ya que puede ser el 25% inferior como el 25% inferior y así con cada cuartil..

Además de todo lo anterior, se hace necesario mencionar un error cometido por varios grupos durante el abordaje de algunos puntos. Debido a que dicho error fue corregido por las FEM durante desarrollo de las sesiones, no se ve reflejado en las respuestas finales, escritas en las guías, sin embargo, se describe a continuación ya que ocurrió con una frecuencia relevante durante la implementación. Este error se relaciona con la interpretación de los enunciados de los puntos 3 y 4, pues a pesar de que el enunciado manifestaba explícitamente que en el grupo se debía incluir tanto el cuartil dos como el mínimo o el máximo, las estudiantes ubicaron los separadores de tal forma que excluían alguno de dichos valores, en específico se excluía el cuartil dos (Figura 25)

**Figura 25.**

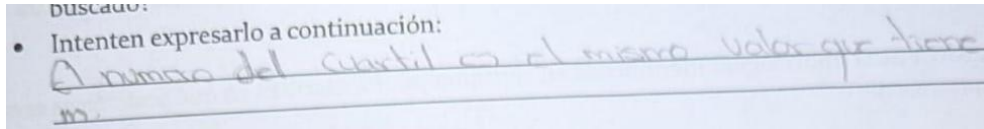
*Ubicación de separadores excluyendo el  $Q_2$*





## Figura 26.

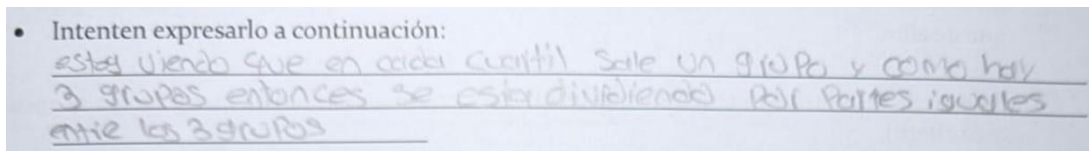
*Error al comunicar la respuesta*



*Nota.* Al interpretar la afirmación que realiza el grupo se puede entender que, el número del cuartil (1, 2 o 3) es el mismo que 6 (valor de  $m$ ). Sin embargo, las estudiantes se referían a que el número del cuartil (1, 2 o 3) es el mismo valor que las veces que se repite  $m$  antes del cuartil respectivo.

## Figura 27.

*Respuesta que no atienden a lo pedido*

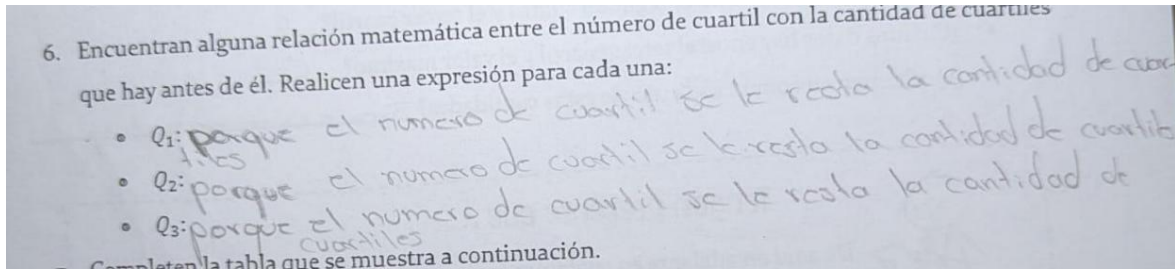


*Nota.* El grupo realiza una afirmación correcta, pero no es lo que se solicita en el enunciado del ítem.

Acerca de las respuestas brindadas por los grupos en el sexto punto, se afirma que 50% de las estudiantes respondieron de forma correcta o parcialmente correcta, mientras que, el otro 50% realizaron afirmaciones erróneas. Siendo este, el punto en el que más errores cometieron los grupos. De manera similar al cuarto punto, dichos errores, están basados en no saber comunicar las ideas acertadamente, en otras palabras, las estudiantes no son suficientemente cuidadosas con lo que escriben y realizan afirmaciones incorrectas. Además, en algunos casos, los grupos responden algo que no fue lo solicitado (Figuras 28 y 29). Esto debido a que, en el enunciado se solicita describir la relación matemática entre el número de cuartil y la cantidad de cuantiles que hay antes de él.

## Figura 28.

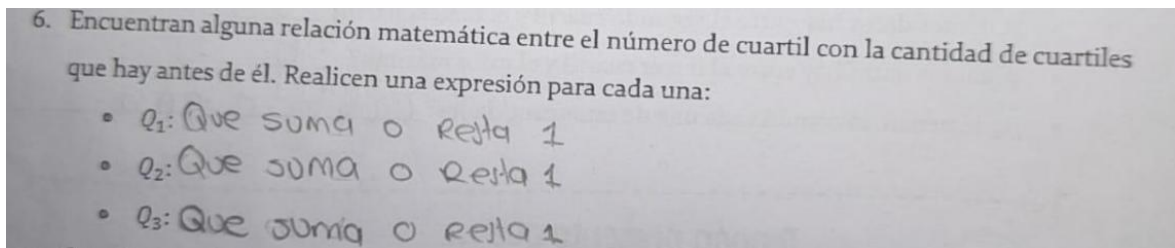
*Respuesta no acorde a la solicitud*



*Nota.* Dos grupos describen lo que se realizó en el quinto punto, pero no responden a lo solicitado.

## Figura 29.

*Error de comunicación en la respuesta*



*Nota.* A pesar de que el grupo identifica la relación matemática, al expresarla no son lo suficientemente específicas (p. ej. no aclaran a qué se le suma qué para que de qué) permitiendo que se realicen afirmaciones incorrectas. Además, no realizan la expresión para cada cuartil.

Acerca de los errores que se cometieron en el octavo punto, se puede decir que el 66,67% de los grupos respondieron de una manera correcta o parcialmente correcta y que 33,33% contestó de manera errónea. Es importante destacar que en este punto se evidencian seis tipos de errores, dos de los cuales fueron previstos, mientras que los otros no. Se comienza por uno de los errores que se tenían previstos y es el no reconocer la relación entre la representación general y algunos elementos particulares del conjunto de datos, esto causa que, al momento de asignar a cada dato o

grupo de datos coloreados, su representación general, no lo realizaban correctamente, como se puede ver en las Figuras 30, 31 y 32.

El otro error que se tenía previsto es que, un grupo no seleccionó correctamente los datos que se debían colorear, lo que indica que no reconocen los términos con los que se nombran a ciertos elementos del conjunto de datos (Figura 33). Por otra parte, se identificó un error en el que algunas estudiantes colorearon más datos de los requeridos al solicitarles que marcaran en amarillo únicamente los datos que aún no tenían color. Este error sucede a raíz de una confusión con el enunciado, ya que este no especifica que, si una “ficha” o “casilla” no contiene un dato, no debe ser coloreada. Como resultado, las estudiantes colorearon todas las casillas que no tenían color de amarillo, sin importar que tuvieran o no un dato escrito (Figura 34).

Puede agregarse que, en este punto, al igual que en el sexto punto de la “Guía 1”, algunos grupos también incurrieron en pensar que un cuartil es un grupo de datos en vez de un único dato, como lo deja ver la Figura 35, en la cual se evidencia un error que trae a colación lo antes mencionado. Otro error cometido, ocurrió en el octavo punto, específicamente en los ítems donde se debía identificar a qué hacen referencia los valores coloreados con amarillo. Estos valores representan el dato mínimo y el cuartil correspondiente; por ejemplo, para el primer cuartil, como se muestra en la Figura 34, no hay datos posteriores a la posición ocho, donde se encuentra este cuartil. Algunas estudiantes, al intentar identificar estos datos, afirmaron erróneamente que uno de ellos correspondía al máximo, basándose en que la representación gráfica no mostraba valores posteriores. Este error surgió porque el enunciado no aclaraba que los datos debían identificarse en el conjunto inicial, no en el representado.

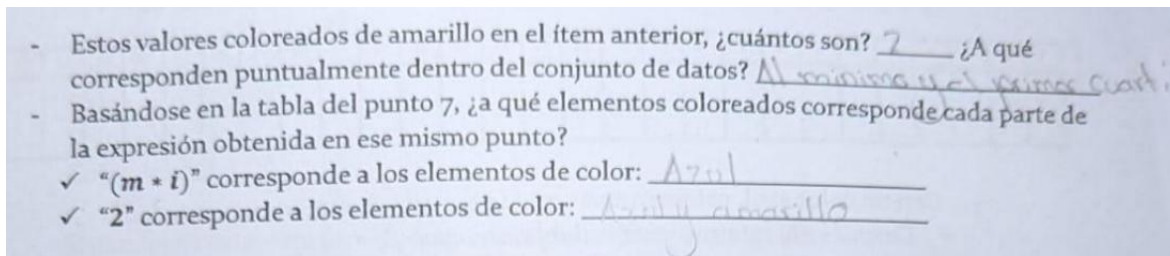
El siguiente diálogo, tomado de la interacción de la FEM con un grupo de estudiantes, sirve como evidencia de este error:

- Camila: Vuelva a leer aquí [*señala la guía, en el segundo punto*].
- Estudiante 1: Cuántos datos hay entre el valor mínimo.
- Camila: ¿Cuál es el valor mínimo?
- Estudiante 1: El primero.

- Camila: ¿Entonces? ¿Cómo se le llama a este? [señala el valor mínimo en la figura coloreada]
- Estudiante 1: Valor mínimo.
- Camila: ¿Y a este? [señala el primer cuartil en la figura coloreada]
- Estudiante 2: Valor máximo.
- Estudiante 1: Primer cuartil.

**Figura 30.**

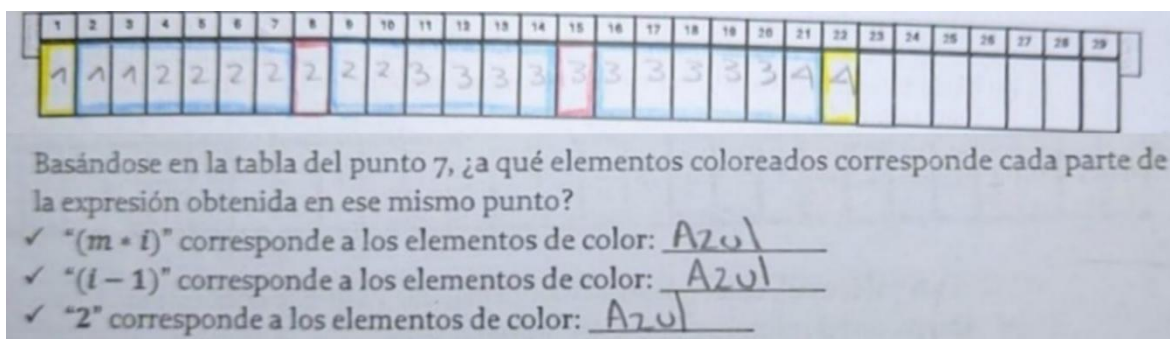
*Error de reconocimiento en el octavo punto*



*Nota.* El grupo no logra identificar la relación entre lo coloreado y su respectiva representación, aunque previamente habían dicho cuales datos eran y qué color tenían, al asignarle un color al elemento "2" coloca azul y amarillo evidenciando que no relaciona lo coloreado con el elemento.

**Figura 31.**

*Error de reconocimiento en el octavo punto*



*Nota.* Estas estudiantes asignan el color azul a todos los elementos, dejando ver que no relacionan los valores coloreados de rojo o amarillo con algún elemento.

**Figura 32.**

*Error de reconocimiento en el octavo punto*

• Tercer cuartil:  
- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta el tercer cuartil, cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4								

- Basándose en la tabla del punto 7, ¿a qué elementos coloreados corresponde cada parte de la expresión obtenida en ese mismo punto?

- ✓ " $(m + i)$ " corresponde a los elementos de color: Azul
- ✓ " $(i - 1)$ " corresponde a los elementos de color: Amarillo
- ✓ " $2$ " corresponde a los elementos de color: Rojo

*Nota.* Aquí el grupo de estudiantes asignan el color rojo a "2" y el amarillo a " $i - 1$ " lo cual, según la representación, se entiende debido a que son dos datos en ambos casos, sin embargo, dejan de lado la razón por la cual se colorearon los elementos de rojo o amarillo.

**Figura 33.**

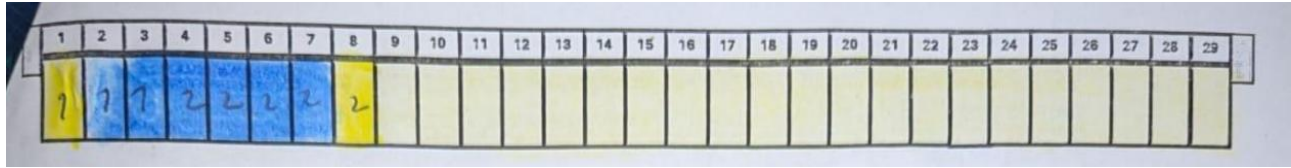
*Error cometido en el octavo punto*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3															

*Nota.* Este grupo colorea de rojo el segundo cuartil y de amarillo el mínimo y el primer cuartil, aunque en las instrucciones se menciona que se debe de colorear de rojo los cuartiles que hay antes del segundo cuartil, por lo cual se evidencia que no atiende a lo solicitado en el punto.

### Figura 34.

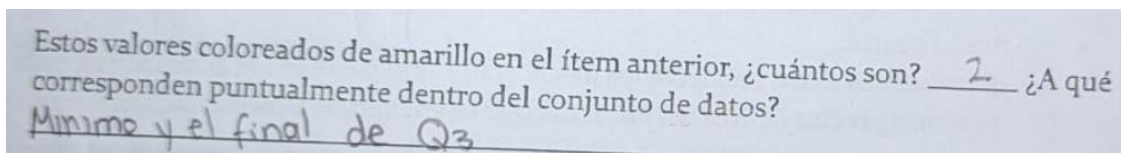
*Error en el octavo punto*



*Nota.* Las estudiantes colorean de amarillo todas las “fichas” después de la posición ocho debido a que el enunciado no es lo suficientemente preciso, dejando permisibles ambigüedades como esta.

### Figura 35.

*Error en el octavo punto*



*Nota.* Este grupo responde “el final de  $Q_3$ ” lo que indica que piensan que el tercer cuartil es más de un dato, este error guarda relación con el error expuesto en la Figura 19, en el cual las estudiantes afirman que un cuartil tiene una cantidad fija de datos.

Ahora bien, en cuanto a el análisis realizado en el noveno punto, al tomar en cuenta todos los ítems, el 91,67% de los grupos proporcionaron respuestas parcialmente correctas y solo un grupo (el 8,33%) no alcanzó a responder dicho punto. No obstante, al mirar cada uno de los ítems, el 75% de los grupos respondieron erróneamente el séptimo ítem (Figura 36 y 37) a pesar de que la nota que se encontraba inmediatamente después contenía la respuesta correcta. De manera similar, el 100% de los grupos respondieron erróneamente el octavo ítem (Figura 38), puesto que, como ha ocurrido en varios momentos, las estudiantes no responden lo solicitado, a pesar de realizar afirmaciones correctas.

### Figura 36.

*Respuesta incorrecta del séptimo ítem del noveno punto*

- En la guía uno, en el punto 6, determinaron que los cuartiles dividen el conjunto de datos en partes iguales. Apoyándose visualmente del material ¿en cuántas partes iguales dividen los cuartiles al conjunto de datos? 3

*Nota.* Cinco grupos creen que los cuartiles dividen el conjunto de datos en 3 partes iguales, pero no son conscientes que a pesar de que son 3 cuartiles causan un número distinto de divisiones.

### Figura 37.

*Respuesta incorrecta del séptimo ítem del noveno punto*

- En la guía uno, en el punto 6, determinaron que los cuartiles dividen el conjunto de datos en partes iguales. Apoyándose visualmente del material ¿en cuántas partes iguales dividen los cuartiles al conjunto de datos? 6 iguales

*Nota.* Cuatro grupos confunden los conceptos afirmando que los cuartiles dividen al conjunto de datos en 6 partes iguales, cuando en realidad se realidad en el conjunto de datos estudiados cada una de estas partes contenía 6 elementos.

### Figura 38.

*Respuesta incorrecta del octavo ítem del noveno punto*

- En cuartiles  $s = \underline{4}$ , por ende, si se quiere expresar la cantidad de cuartiles que existen en cualquier conjunto de datos en términos de  $s$  lo correcto sería decir que, la cantidad de cuartiles de un conjunto de datos es igual a 3.

*Nota.* Las estudiantes realizan una afirmación correcta “la cantidad de cuartiles de un conjunto de datos es igual a 3”, sin embargo, el ítem pedía escribir esta cantidad en términos de  $s$ .

A modo de cierre y en relación con los errores previstos por parte de las FEM en el desarrollo de esta guía, se resalta que, ninguno de los grupos confundió la posición con el dato correspondiente, ni cometieron errores algebraicos y/o aritméticos al despejar la ecuación. Esto

último se debió a la forma en la que las FEM decidieron abordar el décimo punto, la cual se mencionó en el primer párrafo de este apartado.

#### 4.3.1.3. Observaciones Guía 3

La tercera actividad pretende que las estudiantes utilicen la fórmula para identificar las posiciones de los deciles en un conjunto de datos, y adicionalmente, que interpreten estos últimos. Con este fin, al igual que para el desarrollo de la primera actividad se realizaron 13 grupos.

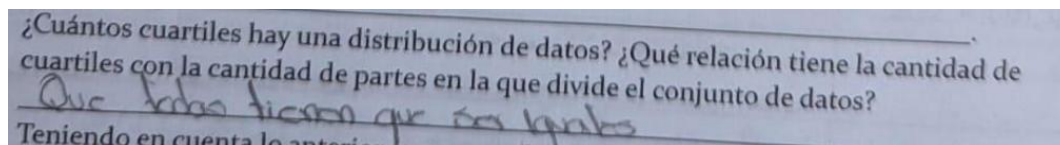
Adicionalmente, el conjunto de datos que se utilizó fue: 0, 0, 1.000, 2.000, 2.000, 2.000, 2.000, 2.000, 2.000, 3.000, 4.000, 5.000, 5.000, 5.000, 5.000, 5.000, 5.000, 6.000, 7.500, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 12.000 y 20.000.

Se observa que la mayoría de la población respondió de manera adecuada a las preguntas realizadas. Pues, al analizar los resultados de esta actividad, se observa que 43,33% de los grupos brindaron respuestas correctas y 22,22% parcialmente correctas, mientras que solo el 34,44% respondieron incorrectamente (de nuevo, un aumento con respecto a la guía anterior). En suma, se manifiesta que las estudiantes tuvieron mayor dificultad al momento de abordar los puntos 3, 5, 6, 7 y 8 de la *Guía 3*.

Al estudiar las respuestas brindadas al tercer y quinto punto, se obtiene que el 76,92% de los grupos proporcionaron una respuesta correcta o parcialmente correcta, pero el 23,08% cometieron errores significantes. como muestran las Figuras 38, 40, 41 y 42.

#### **Figura 39.**

*Afirmación errónea dada por un grupo*

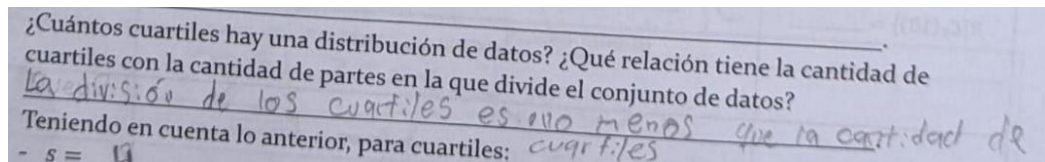


*Nota.* Las estudiantes afirman que la cantidad de cuartiles es igual a la cantidad de partes iguales en las que estos dividen el conjunto de datos, mostrando que no comprenden que a pasar de que

se tienen 3 cuartiles, estos dividen al conjunto de datos en 4 partes con igual cantidad de elementos.

#### Figura 40.

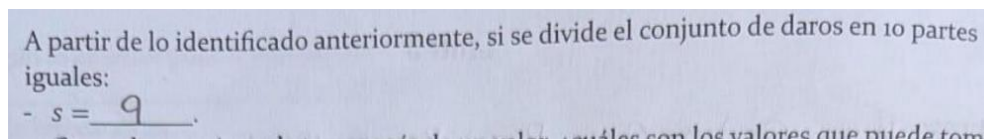
*Error de comunicación en la respuesta*



*Nota.* Las estudiantes realizan la información de forma contraria, pues, la forma correcta sería que se dijera que la cantidad de cuartiles es uno menos que la división.

#### Figura 41.

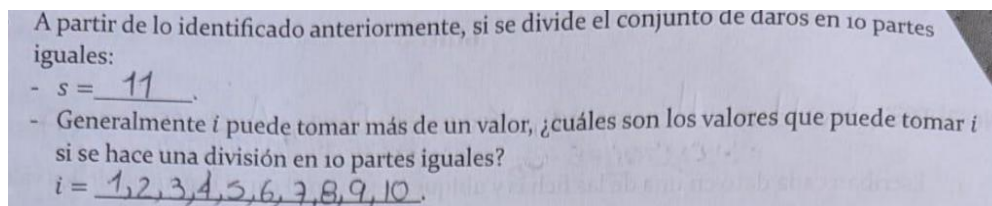
*Error al confundir la notación*



*Nota.* El grupo confunde la cantidad de deciles con la cantidad de particiones que estos realizan.

#### Figura 42.

*Afirmación errónea con la notación*



*Nota.* Además de que este grupo, no comprende lo que representa  $s$ , algunos grupos escriben que  $i$  puede tomar valores desde 1 hasta 10, cometiendo el primer error previsto por las FEM para esta actividad.

En relación con el sexto punto, a pesar de que el 50% de los grupos respondieron correctamente lo solicitado y el 41,67% de los grupos exhibieron respuestas parcialmente correctas, en la Figura 43 se evidencia cómo las estudiantes no remplazan de manera adecuada los valores al momento de aplicar la fórmula general, lo cual coincide con el segundo error previsto para la tercera actividad. Adicional a este error, varios grupos se equivocaron realizando cálculos aritméticos, esto es, el tercer error que se previó, un ejemplo de ello se evidencia también en la Figura 43. Este error, como lo señaló Grijalba (2021) refleja que las estudiantes no sustituyen correctamente los valores en la fórmula general. Lo que en su caso presentaba una dificultad para comprender el algoritmo para calcular la media, en este caso se convierte en una dificultad para comprender el algoritmo para calcular la posición de un cuantil.

**Figura 43.**

*Error en la identificación de los valores asociados con la notación*

$R[C_4(10)] = \underline{\quad}$	$R(4(5)) = 4 \left( \frac{26-1}{10} \right) + 1 = 11,5$
$R[C_5(10)] = \underline{13,5}$	$R(5(5)) = 5 \left( \frac{26-1}{10} \right) + 1 = 13,5$

*Nota.* Varios grupos al lado izquierdo del igual utilizaron una notación que representa el cálculo de la posición de quintiles, sin embargo, al lado derecho del igual sí escriben elementos que representan el cálculo de la posición de deciles. Lo que conlleva a concluir que las estudiantes no comprenden el significado de la notación de la fórmula. Además, realizan operaciones aritméticas erróneamente.

En cuanto a la observación realizada a las respuestas del séptimo punto de la guía, se obtiene que el 30,77% de los grupos respondieron de forma incorrecta y que también el 30,77% de los grupos no alcanzaron a responder dicho punto. Entre los errores encontrados se tiene que, las estudiantes seleccionan mal los datos que se deben promediar para calcular ciertos deciles (ver Figura 44), error similar al mencionado por Grijalba (2021), quien afirma que al seleccionar incorrectamente los datos, se afecta la precisión del resultado final. Es más, se resalta que este error también fue cometido en la primera guía, cuando se calculan los cuartiles. Otro error, es el mostrado en la Figura 45, se supone que se pudo deber a que los datos no estaban correctamente organizados. Esto se relaciona con lo señalado por Mayén et al. (2009, como se citó en Valenzuela et al., 2021), sobre cómo la falta de un orden adecuado puede generar errores al calcular un percentil. Además, Carvalho (2001, como se citó en Zapata, 2018) destacó errores similares en el cálculo de la mediana, como no ordenar los datos para identificar el valor central, lo que, como se previó resulta también de importancia de este paso para todas las medidas de posición.

Además, en este mismo punto se nota como un grupo realiza el promedio de las posiciones arrojadas por la formula, más no, de los datos que se ubican en dichas posiciones (ver Figura 46). Este error que es mencionado por Carvalho (2001, citado en Valenzuela et al., 2021) resalta la dificultad de comprender el valor posicional, pues en este caso las estudiantes toman el valor posicional en vez de tomar el valor del dato.

#### **Figura 44**

*Error en la selección de los datos por uso incorrecto de la fórmula*

$D_7 = 8,750.$	$7.500 + 10000 \div 2 = 8,750$
----------------	--------------------------------

*Nota.* El grupo selecciona los datos ubicados en las posiciones 20 y 21, cuando lo correcto es seleccionar los datos ubicados en las posiciones 19 y 20.

**Figura 45.**

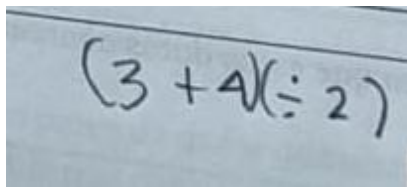
*Error en la organización de los datos*

$D_5 = 5500$	$5000 + 6000 = 11.000 \div 2 = 5500$
$D_6 = 5000$	

*Nota.* El grupo escribe que el valor del quinto decil es mayor al del sexto decil, lo que manifiesta que los datos no están organizados de la forma adecuada.

**Figura 46.**

*Error cometido por un grupo al tomar el valor posicional*

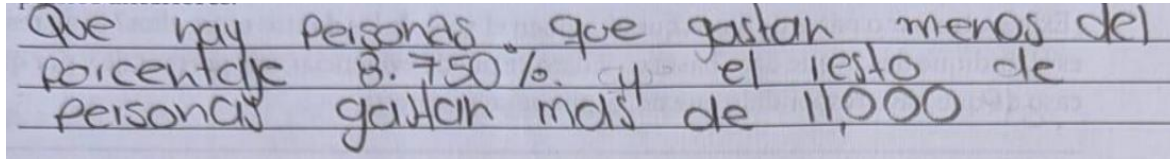

$$(3 + 4) (: 2)$$

*Nota.* Las estudiantes realizan un promedio entre posiciones en vez de realizarlo entre los datos ubicados en las mismas.

Ahora bien, en cuanto al octavo punto, los resultados que arroja el análisis dan a entender que el 61,54% de los grupos no llegaron a responderlo, y del porcentaje restante solo el 15,38% respondió correctamente. Una de las dificultades que se evidencian es que las estudiantes no comprenden el significado de los porcentajes, un ejemplo de ello se presenta en la Figura 47 donde se muestra un error cometido por un grupo. Otro error, presentado por uno de los grupos es no asociar el porcentaje correcto a cada decil (Figura 48).

### Figura 47.

*Error al comunicar la respuesta*

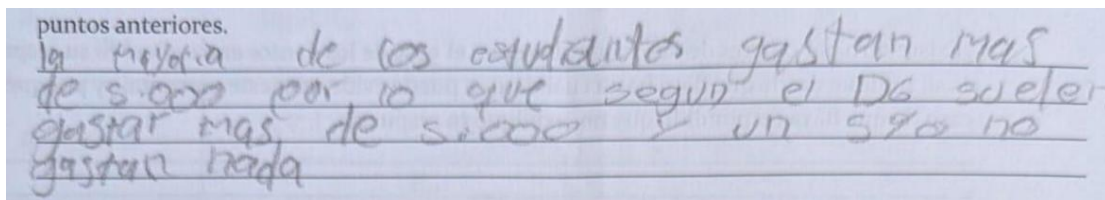


Que hay personas que gastan menos del porcentaje 8.750% y el resto de personas gastan más de 11,000

*Nota.* Las estudiantes consideran que al agregar el símbolo de porcentaje “%” a uno de los datos del conjunto, están dando información porcentual sobre la distribución.

### Figura 48.

*Error en la asociación de la cantidad porcentual*



puntos anteriores.  
la mayoría de los estudiantes gastan más de 5,000 por lo que según el D6 suelen gastar más de 5,000 y un 5% no gastan nada

*Nota.* Las estudiantes consideran que a la derecha del sexto decil se encuentra la mayoría de la información, cuando en realidad solo se tiene el 40%.

Para cerrar el análisis realizado en torno a la tercera actividad, se comentan que, también se cometieron algunos errores por falta de conocimientos previos como, creer que 5 es la parte entera de 3,5 y no recordar el significado de número entero o de número decimal.

#### 4.3.1.4. Uso del material

A continuación, se muestran algunas acciones realizadas por las estudiantes enfocadas en como usaron el material *Cuantilízalo en Parche* para dar respuesta a las guías. De manera similar a los apartados anteriores lo que se presenta en este, se basa en los errores cometidos por el estudiantado, y se realiza una comparación con los errores previstos por los autores.

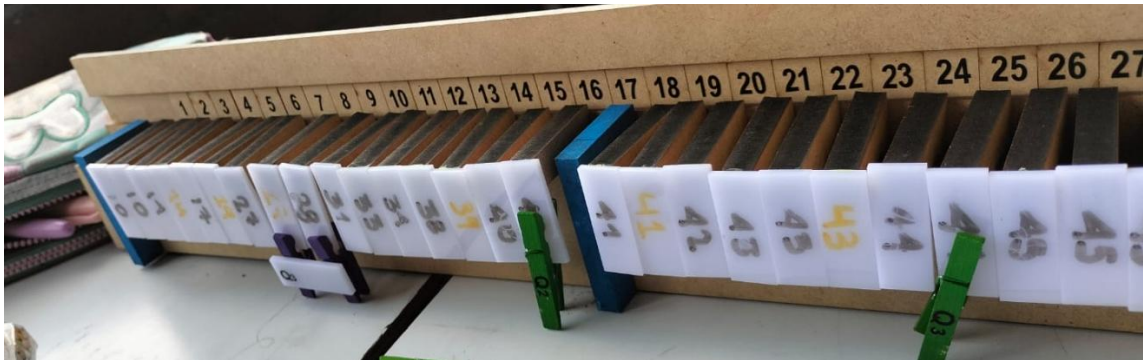
En la Figura 49 se evidencia un ejemplo de cómo un grupo de estudiantes coloca un separador, pero no reajustan las posiciones. Relacionado con ello, en la Figura 50, se muestra como otro

grupo calcula adecuadamente la posición de uno de los deciles, pero debido a que no tiene las posiciones acomodadas de forma correcta en el material selecciona como decil un dato erróneo (ver Figura 51). En resumidas cuentas, en la implementación de evidencia cómo las estudiantes cometen el primer error previsto por los autores para el uso del material, a pesar de las advertencias que las FEM realizaron durante el desarrollo de las sesiones.

Adicional, en la Figura 49, también se evidencia el cuarto error previsto por las FEM para el uso del material, pues, en el marco del ejercicio que las estudiantes estaban realizando en ese momento, se quería formar un grupo desde el segundo cuartil hasta el máximo, en el cual se incluyeran estos dos valores. En cambio, varios grupos utilizaron los separadores para formar grupos que excluían al segundo cuartil.

### **Figura 49.**

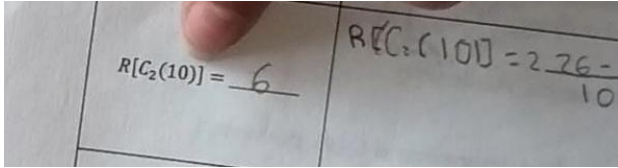
*Error al excluir el segundo cuartil*



*Nota.* El grupo coloca un separador, pero no reorganiza las posiciones, asignando así al separador la posición 17, logrando que todos los datos a la derecha de este tengan una posición de más a la que deberían. Además, al usar los separadores no forma el grupo solicitado, pues no incluye al segundo cuartil en este.

**Figura 50.**

*Cálculo correcto de la posición de un decil*



Handwritten calculations on a piece of paper. On the left, the formula  $R[C_2(10)] = 6$  is written. On the right, the formula  $R[C_2(10)] = \frac{2.76}{10}$  is written.

*Nota.* El grupo calcula de forma correcta la posición del segundo decil por medio de la fórmula.

**Figura 51.**

*Error en la organización de los datos*

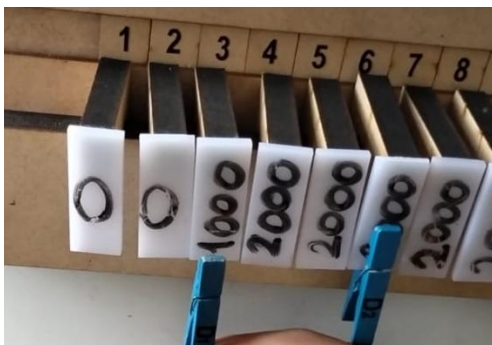


*Nota.* A pesar de que la estudiante obtiene que el segundo decil es el dato ubicado en la sexta posición (Figura 50), cuando la FEM le pregunta cuál es el segundo decil, ella señala el séptimo dato, esto se debe a que las posiciones no están organizadas de forma correcta.

Por otro lado, en cuanto a la primera forma del segundo error previsto por las FEM, se puede traer a mención un caso particular en el que, dos estudiantes utilizan la pinza incorrecta, pues tenían que utilizar una pinza roja, y en vez de ello utilizan una pinza azul. Esto gracias a que toman como posición del decil la parte entera del número obtenido con la fórmula (ver Figura 52).

**Figura 52.**

*Error en la elección de la pinza requerida*



*Nota.* El grupo no comprende el uso correcto de la fórmula, pues, no apropia el hecho de que si  $R[C_i(s)]$  es un número decimal, se toma la parte entera de este ‘ $\lceil R[C_i(s)] \rceil$ ’ y el cuantil  $C_i(s)$  es el promedio de los datos que se encuentran en la posición  $\lceil R[C_i(s)] \rceil$  y  $\lceil R[C_i(s)] \rceil + 1$ . Por tanto, al aplicar la fórmula y obtener como resultado 3,5 las estudiantes consideran que la posición del decil es 3, dando paso a que utilicen una pinza sencilla, en vez de una doble que tome los datos de las posiciones 3 y 4.

Ahora bien, la dinámica del desarrollo de las sesiones no permite traslucir la facilidad con la que se puede cometer la segunda forma del segundo error previsto por las FEM. Esto se debe a que, para las guías en las que las estudiantes debían identificar los cuartiles solo se hizo entrega de las pinzas diseñadas para estas medidas; del mismo modo, para la guía en la que las estudiantes debían identificar los deciles, se hizo entrega únicamente de las pinzas identificadoras de deciles; y no se realizó ninguna actividad en la que se tuvieran que hallar cuartiles y deciles a la vez. Por añadidura, se puede mencionar que, en cuanto al tercer error previsto por las FEM, relacionado

con no escribir el resultado del cuantil en las pinzas dobles, a pesar de que inicialmente fue cometido por algunos grupos, estos lo corrigieron rápidamente.

Para finalizar este apartado, a continuación, se muestra un error no previsto por las FEM, que es el no usar físicamente algunos elementos del material como se tenía contemplado (ver Figura 53 y 54). Adicional, se resalta que en algunos casos para las estudiantes era complejo manipular las pinzas y colocarlas en el o los datos.

### **Figura 53.**

*Uso inadecuado de la pinza*



*Nota.* Para identificar un dato el grupo sujeta la pinza a la parte de madera de la ficha, cuando esta se diseñó con el fin de ser sujeta a la parte de acrílico.

### **Figura 54.**

*Uso inadecuado de los separadores*



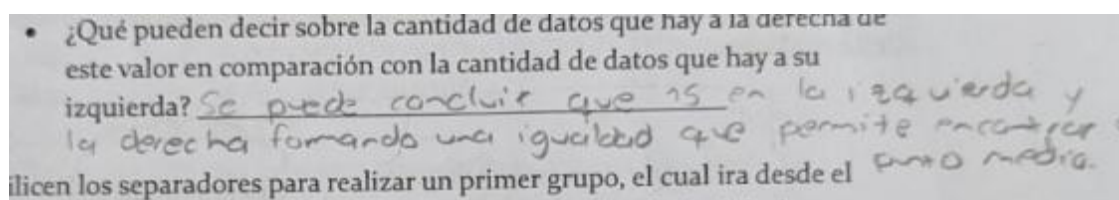
*Nota.* El grupo coloca los separadores al revés dejando el extremo más largo dentro del carril y el más corto al frente.

## 5. RESULTADOS

Aunque el análisis de la sección anterior se centró en los errores y dificultades que las estudiantes enfrentaron durante el desarrollo de las sesiones, al observar la información porcentual presentada al inicio del estudio de cada guía, se evidencia que la mayoría de las respuestas proporcionadas por los grupos fueron correctas o parcialmente correctas. Por esta razón, a continuación, se destacan algunas respuestas acertadas, así como las conversaciones y evidencias relacionadas con diferentes puntos de las guías.

### Figura 55.

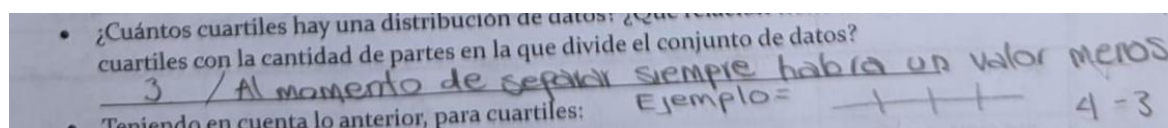
*Respuesta al segundo ítem del segundo punto de la Guía #1*



*Nota.* Las estudiantes dejan ver el razonamiento que usaron para determinar el dato central, enfocándose específicamente en comparar la cantidad de datos que hay al alrededor de este, también hace alusión al punto medio, dando destellos de que para determinar el dato central debe dejar a la “misma distancia” ambos extremos, lo que se puede traducir en que debe dejar la misma cantidad de datos en ambos lados.

### Figura 56.

*Respuesta al tercer punto de la Guía #3*

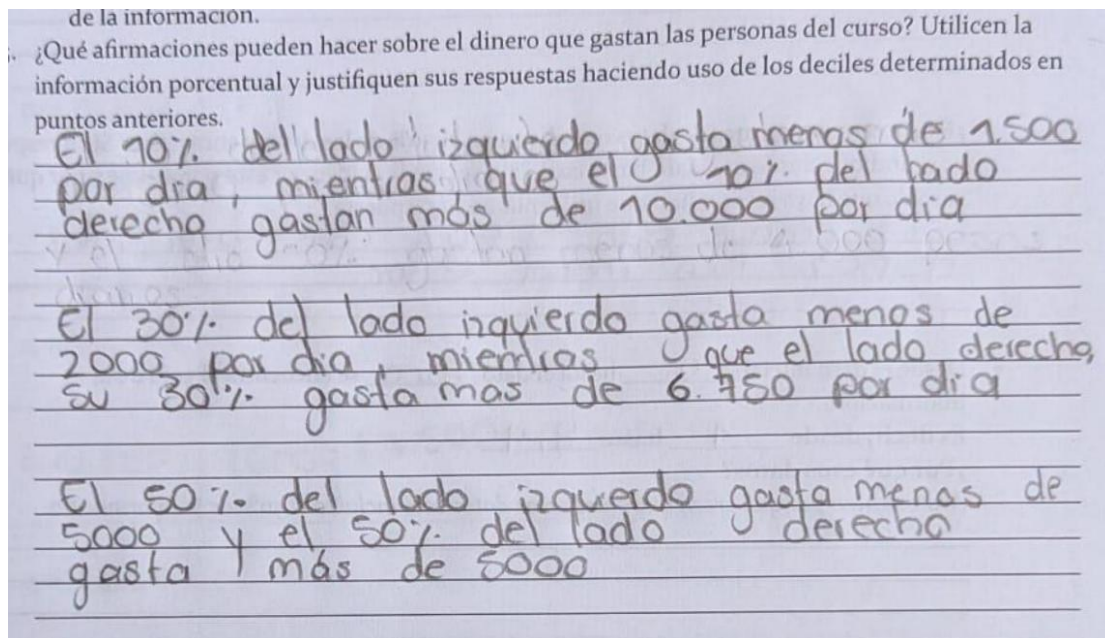


*Nota.* En esta pregunta, las estudiantes responden que la relación entre la cantidad de cuartiles en un conjunto de datos y la cantidad de partes iguales en las que este se divide radica en que

siempre “hay un valor menos”. Esto indica que, según su comprensión, independientemente del conjunto de datos, los cuartiles siempre dividen el conjunto en cuatro partes iguales y la cantidad de cuartiles que se determinan es siempre tres. Además, este grupo realiza una representación de la situación donde se evidencian las particiones y sus respectivas “marcas”, que corresponden a los cuartiles.

### Figura 57.

*Respuesta al octavo punto de la Guía #3*



*Nota.* Este grupo responde acertadamente, demostrando que no asocian el 10% únicamente al primer decil, sino que comprenden que existen otras combinaciones que también pueden representar este porcentaje. Por ejemplo, mencionan el 10% superior, que corresponde a la cantidad de datos comprendidos entre el noveno decil y el máximo. Además, generan información con otras proporciones porcentuales, lo que evidencia una comprensión adecuada de las diversas formas en las que se pueden interpretar los cuantiles. Cabe destacar que lograron

incorporar correctamente el contexto de los datos en sus afirmaciones, lo que indica que su interpretación fue acertada y se vio favorecida por el ejercicio.

**Figura 58.**

*Respuesta al sexto punto de la Guía #3*

entonces empleando la fórmula estas posiciones son:

Posición	Procedimiento
$R[C_1(10)] = 3,5$	$R[C_1(n)] = 1 \frac{26-1}{10} + 1 = (1)(26-1) \div 10 + 1 = 3,5$
$R[C_2(10)] = 6$	$R[C_2(n)] = 2 \frac{26-1}{10} + 1 = (2)(26-1) \div 10 + 1 = 6$
$R[C_3(10)] = 8,5$	$R[C_3(n)] = 3 \frac{26-1}{10} + 1 = (3)(26-1) \div 10 + 1 = 8,5$
$R[C_4(10)] = 11$	$R[C_4(n)] = 4 \frac{26-1}{10} + 1 = (4)(26-1) \div 10 + 1 = 11$
$R[C_5(10)] = 13,5$	$R[C_5(n)] = 5 \frac{26-1}{10} + 1 = (5)(26-1) \div 10 + 1 = 13,5$
$R[C_6(10)] = 16$	$R[C_6(n)] = 6 \frac{26-1}{10} + 1 = (6)(26-1) \div 10 + 1 = 16$
$R[C_7(10)] =$	

*Nota.* Las estudiantes hacen un uso adecuado de la fórmula obtenida, manejando de manera precisa la notación matemática. Esto indica que reconocieron correctamente los elementos que componen la fórmula y lograron asociarlos a otros tipos de cuantiles distintos a los cuartiles. Este

resultado evidencia que el proceso de generalización les resultó favorable y contribuyó a una comprensión más amplia del concepto.

**Figura 59.**

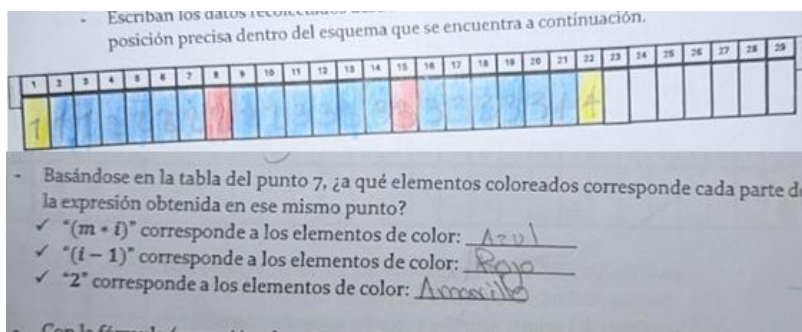
*El material 'Cuantilízalo en Parche' siendo usado adecuadamente por un grupo de estudiantes*



*Nota.* En esta imagen se puede evidenciar que las educandas ubicaron adecuadamente las pinzas, y determinaron correctamente cada decil, además se puede evidenciar que visualmente, el uso de las pinzas ayuda a organizar, facilitar y agilizar la identificación de la naturaleza de cada cuantil, lo que es conveniente a la hora de realizar el análisis o la interpretación de los datos.

**Figura 60.**

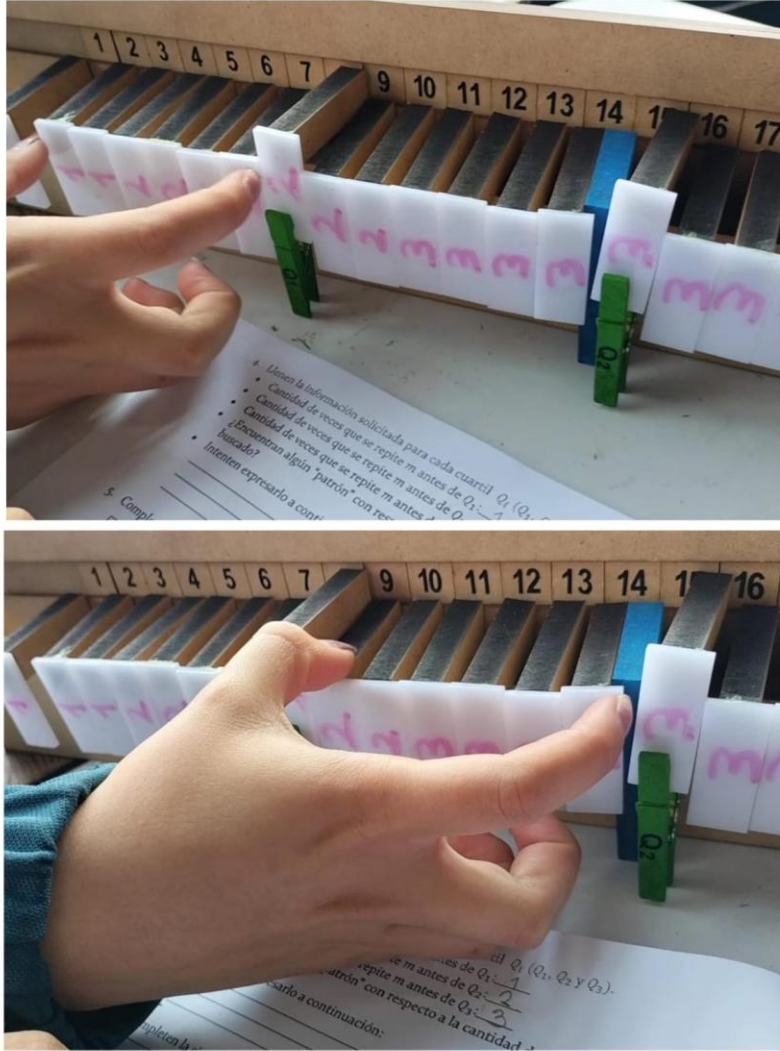
*Respuesta al tercer ítem del octavo punto de la Guía #2*



*Nota.* En esta imagen se puede evidenciar que las educandas asociaron correctamente cada grupo de datos coloreados a su respectivo elemento en la fórmula, lo que evidencia que reconocieron la expresión y sus componentes.

**Figura 61.**

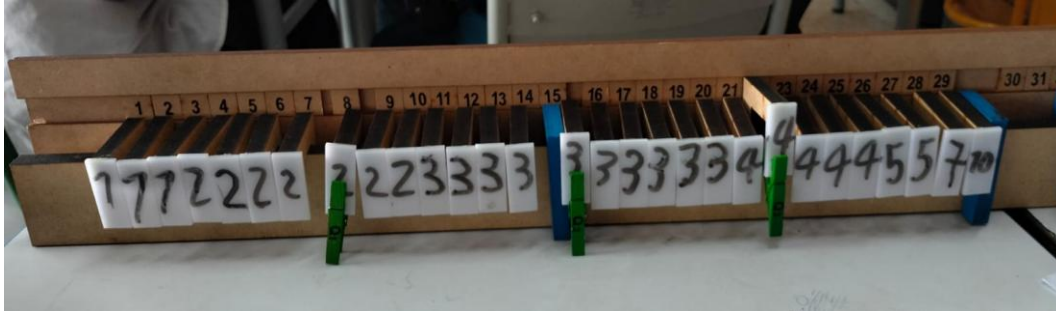
*Apoyo visual al discurso de una respuesta del punto cuatro de la Guía #2*



*Nota.* Aquí se puede evidenciar cómo un grupo de estudiantes se apoya en el material para resolver el cuarto punto (en el cual se tiene que contar las veces que se repite  $m$  antes de un determinado cuartil), y para justificar dicha respuesta, mostrando que *Cuantilízalo en Parche* es un recurso que facilita dicho conteo al permitir la visualización y la manipulación de todo el conjunto de datos.

## Figura 62.

### *Beneficio del uso de los separadores*



*Nota.* Aquí se evidencia cómo los separadores cumplen su función, y facilitan visualmente el identificar el dato central de un grupo.

Otra respuesta que vale la pena mostrar es una discusión de una de las FEM con una estudiante, sobre cómo identifica los datos que debe promediar. Esta conversación se encuentra a continuación.

- Camila: Entre estos datos ¿En cuáles calcularían un promedio?
- Estudiante: En  $D_1$ ,  $D_3$ ,  $D_5$ ,  $D_7$  y  $D_9$ . [*Señala las pinzas rojas*].
- Camila: [...] Listo, ¿de qué se apoyan ustedes Visualmente ¿Cómo identificas que son esos? (los deciles para los que se debe realizar promedio)
- Estudiante: Porque es que acá están los dos, con una misma pinza [*señala el material y hace la seña de dos pinzas con sus manos*].

Es importante destacar que esta acción, representada en la Figura 63, evidencia el rol clave de las pinzas dobles como apoyo en la identificación de los datos a los cuales se les debe calcular el promedio para determinar los cuantiles. Esta situación refuerza el proceso de aprendizaje ya que el material proporciona un medio concreto y visual para comprender la relación entre los elementos matemáticos y sus representaciones.

### Figura 63.

*Acción realizada por una estudiante en la conversación con la FEM*



*Nota.* Gesto que realiza la estudiante con sus manos para simbolizar una pinza doble al discutir con una de las FEM.

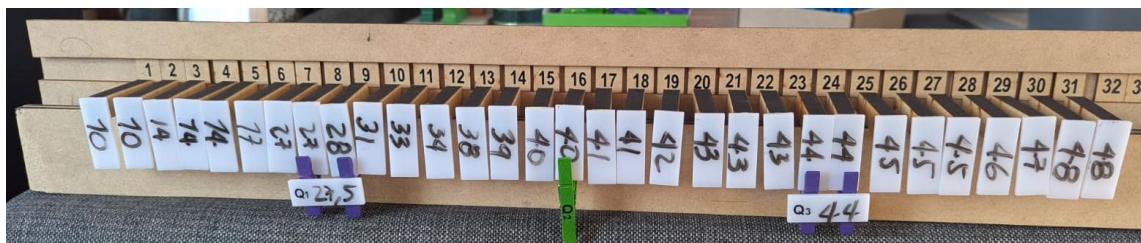
Ahora, se muestra una conversación, la cual expone una situación que ocurrió recurrentemente y es evidencia de que el material facilita no solo el aprendizaje de las medidas de posición, sino que también la enseñanza. Es un recurso útil que favorece la gestión a las docentes. Esta conversación muestra la discusión que tuvo la FEM, Camila, con unas estudiantes que estaban respondiendo el octavo punto de la primera guía. Además, con el fin de que sea más clara la situación, se sugiere a la persona lectora que complemente esta conversación con la Figura 64.

- Camila: *[lee el ítem uno del octavo punto de la primera guía]* el 25% de los estudiantes *[pausa breve]* ¿Dónde está la información del 25%?
- Estudiante 1: El 27,5.
- Camila: Espera *[lee el ítem uno del octavo punto de la primera guía]* El 25% de los estudiantes *[pausa breve]* o sea, ellos *[señala el “bloque de datos” que abarca desde el mínimo hasta el primer cuartil (27.5)]* son el 25% de los estudiantes *[lee el ítem uno del octavo punto de la primera guía]* obtuvieron una nota menor a *[pausa larga]* Estas son notas, todas *[señala las fichas]*.

- Estudiante 1: Ahh, ya entendí, bueno, okay, el 25%.
- Estudiante 2: Obtuvo una nota menor de.
- Estudiante 1: 27.
- Camila: Ajá, pero lo ideal es que dijeran 27,5.
- Estudiante 1: ¿Así en el resto?
- Camila: Sí, pero, tienen que analizar bien porque por ejemplo acá, [lee el ítem dos del octavo punto de la primera guía] el 25% de los estudiantes obtuvieron una nota mayor a.
- Estudiante 1: 27,5 ¿No?
- Camila: ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota mayor a 27,5?
- Estudiante 1: Todos estos [señala el “bloque de números” que abarca desde el primer cuartil (27,5) hasta el máximo (48)].
- Camila: ¿Creen que en todo esto está el 25%? estos [señala el “bloque de números” que abarca desde el primer cuartil (27,5) hasta el máximo (48)].
- Estudiante 2: No.
- Estudiante 1: No.
- Camila: ¿Entonces cuál es el 25% que tuvo una nota mayor a? ¿Cuál creen?
- Estudiante 2: ¿40?
- Camila: Okey, una nota mayor a 40, ¿cuántos estudiantes en porcentaje tuvieron una nota mayor a 40? En porcentaje, visualmente.
- Estudiante 1: 50%.
- Camila: 50% de los estudiantes obtuvieron una nota mayor a 40, ahora ¿el 25% de estudiantes una nota.
- Estudiante 1: 75%.
- Estudiante 2: ahhh, listo, listo.

**Figura 64.**

*Cuantilízalo en Parche con los datos de la actividad 1*



*Nota.* Complemento de la conversación previa que facilita al lector o lectora entender con mayor claridad a qué se refieren las participantes durante el diálogo.

Posteriormente, las estudiantes colocaron “44” como respuesta al valor del tercer cuartil, lo que evidencia que comprendieron la relación entre los porcentajes y las notas. Esta conversación demuestra cómo material didáctico *Cuantilízalo en Parche* facilitó el aprendizaje, permitiendo que las estudiantes desarrollaran una comprensión propia de la interpretación de los cuartiles. Gracias a la visualización y manipulación de los elementos del material, pudieron analizar de manera lógica la situación. Además, el acompañamiento de la FEM no se centró en respuestas directas, sino en guiar a las estudiantes, promoviendo su razonamiento. Aquí es importante resaltar que, como menciona Becerril et al. (2019, como se cita en Ramírez y Ramírez, 2023), en ocasiones el estudiantado presenta dificultades en la interpretación. Pero gracias a la conversación evidencia que, aunque inicialmente las estudiantes no lograban interpretar de forma porcentual los datos obtenidos mediante la gestión de la FEM y el uso del material didáctico, esta dificultad se logró subsanar.

Finalmente, se presentan algunas de las opiniones de las estudiantes ante unas preguntas que se realizaron al final de la gestión, se les preguntó ¿Qué les parecieron las sesiones? y ¿Creen que el material ayudó en el desarrollo de las guías, o consideran que habrían podido responderlas sin su apoyo?

- Estudiante 1: Siento que el material ayudó mucho en lo visual, porque solo con las fórmulas no habríamos entendido o profundizado tanto en el tema.
- Estudiante 2: Sí, fue como una guía que nos permitió entender mejor el tema.
- Estudiante 3: Usar solo la fórmula y practicar habría sido muy anticuado, ¿no? Como que no dan ganas de aprender así.
- Estudiante 4: A mí me ayudó a comprender mejor el tema y a desarrollar más lectura crítica, porque al ser más didáctico facilitaba todo.
- Estudiante 5: Sí, fue un apoyo visual que ayudó a entender las cosas más a fondo.

Ahora bien, en cuanto a la dificultad mencionada por Guerrero y Torres (2017, como citó en Ramírez y Ramírez, 2023), relacionada con que las estudiantes tienen inconvenientes para entender el significado del valor de una variable porque desconocen o confunden el contexto en el que dicha variable se utiliza y esto afecta la interpretación; se puede mencionar que gracias a que se planeó estudiar datos de las mismas estudiantes, esta dificultad no se presentó, pues conocían muy bien el contexto.

En suma, el análisis de los errores, conversaciones, respuestas y evidencias recopiladas durante las sesiones permite reconocer el cumplimiento de algunos propósitos planteados en el diseño del material, por lo cual se puede decir que utilizando como apoyo el material didáctico *Cuantilízalo en Parche* se puede llegar a que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje se logre:

- ✓ Adquirir, mejorar o evaluar la comprensión de las medidas de posición. Debido a que las estudiantes del Colegio Isabel II no habían tenido clases de estadística, con el material se logró adquirir conocimiento acerca de los cuartiles y los deciles.
- ✓ Facilitar la interpretación de los cuantiles por medio de la visualización. La visualización del material facilitó significativamente la interpretación de los cuantiles, ya que a partir de esta se permite organizar la información de manera que las estudiantes puedan manipularla e identificarla con mayor agilidad. Esto les brindó una notable facilidad para sacar conclusiones. Un ejemplo claro se observa en la Figura 61, donde se evidencia que las estudiantes recurrieron ampliamente a la información visual, lo que les permitió generalizar y argumentar basándose en lo observado en el material, destacando su utilidad. Además, una conversación centrada en el octavo punto de la primera guía refuerza esta idea, mostrando cómo el razonamiento lógico apoyado en lo visual promovió el entendimiento de la interpretación de las medidas de posición.
- ✓ Desarrollar la habilidad para calcular y analizar cuantiles. La respuesta al sexto punto de la Guía #3, demuestra cómo las estudiantes aplicaron correctamente la fórmula general de los cuantiles, manejando adecuadamente la notación matemática. Esto evidencia el desarrollo de habilidades para generalizar y trabajar con diferentes tipos de cuantiles, más allá de los cuartiles. Además, la conversación donde se identificaron las pinzas dobles (Figura 63) refleja cómo las estudiantes aprendieron a asociar elementos matemáticos con

sus representaciones concretas, esto permite ver que el material *Cuantilízalo en Parche*, contribuyó en la habilidad de calcular cuantiles y de analizarlos.

- ✓ Facilitar la identificación de la posición relativa de un valor dentro de un conjunto de datos. El material didáctico facilitó la identificación de la posición relativa de un valor dentro de un conjunto de datos, esto se puede evidenciar en la Figura 56, pues se observa cómo las estudiantes comprendieron que los cuartiles dividen el conjunto en cuatro partes iguales y lograron reconocer la relación entre las particiones y las "marcas" correspondientes a los cuantiles. Esta comprensión se fortaleció gracias a las herramientas visuales del material, como se aprecia en la Figura 59, el material proporcionó un orden que agilizó la identificación de diferentes posiciones relativas dentro del conjunto de datos, evidenciando el cumplimiento de este propósito.
- ✓ Proveer una representación visual clara del conjunto de datos y las particiones causadas por los cuantiles. El uso de *Cuantilízalo en Parche*, mostrado en la Figura 59, destaca cómo las pinzas y las fichas facilitan una representación clara de los datos y los cuantiles. Gracias a esto, en la Figura 61 se evidencia que las estudiantes logran reconocer las particiones que realizan los cuantiles en el conjunto de datos.
- ✓ Fomentar el trabajo individual o grupal. Por la forma en la que se desarrollaron las sesiones y la dinámica de las mismas se logró fomentar el trabajo grupal.
- ✓ Causar motivación en el aprendizaje. En las conversaciones finales con las estudiantes, se percibe que el material didáctico generó un impacto positivo en la gestión, pues, sin él, la gestión hubiese resultado muy tediosa y aburrida, como mencionan en las opiniones Estudiante 3 y Estudiante 4.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como resultado de lo desarrollado en este trabajo alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición, en los siguientes párrafos se describen las conclusiones y algunas recomendaciones que se desprenden del análisis de la implementación de la propuesta presentada.

Para empezar, en este trabajo se consolida un marco de referencia que precisa diversos aspectos teórico-disciplinarios relacionados con las medidas de posición, así como la identificación de errores y dificultades reportadas en la literatura asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición. A pesar de que la información al respecto de ambos asuntos relacionados directamente con las medidas de posición es escasa, se logró estructurar un marco teórico coherente con los propósitos del diseño del material elaborado.

En relación con lo anterior, sorprende la identificación de falta de consensos por parte de las autoras para determinar de manera única los cuantiles, y que responde a la dificultad de definir de manera única un posible cuantil, cuando se debe recurrir a aproximaciones. Por ejemplo, esto se evidencia tanto de manera general al mostrar cómo se calcula un cuantil, como de manera particular al evidenciar las diferentes formas de calcular cuantiles. Esto llevó a una toma de decisiones al momento de proponer las actividades dirigidas a los estudiantes en términos de una apropiada transposición didáctica para la enseñanza de los cuantiles.

Por otra parte, se concretó la elaboración de un material didáctico que se considera fomentó la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición en la población implementada. En efecto, en el quinto capítulo se da evidencia cómo dicho material favoreció tanto la enseñanza como el aprendizaje de los cuantiles. Hay dos razones que principalmente justifican este hecho: la primera, que el material permite una visualización clara del conjunto de datos y de las particiones generadas por los cuantiles y los deciles; y la segunda, la manipulación que este posibilita, ya que facilita acciones como conteos, separaciones, organización de los datos, entre otras.

De la misma manera, se logró la planificación de una secuencia de actividades con la intención de ilustrar algunos ejemplos de cómo utilizar el material didáctico, esto se ve reflejado en el tercer capítulo. Paralelamente, en el quinto capítulo se da un indicio de cómo con las guías y el apoyo del material las estudiantes llegaron a: identificar los cuantiles de forma intuitiva, construir la

fórmula que determina la posición de un cuartil y generalizarla para cualquier cuartil; utilizar la fórmula para identificar los deciles de un conjunto de datos; e interpretar cuartiles y deciles.

Respecto a lo relacionado con poner a prueba el material didáctico y valorar el aporte que este realiza a la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición; se realiza una implementación en el Colegio Isabel II (IED). Como resultado de tal implementación se recopila material para abordar un análisis que se enfoca en los errores y dificultades presentados durante la gestión y de cómo se evidencia que se cumplieron varios de los propósitos para los cuales fue diseñado el material. De lo evidenciado durante dichas implementaciones se obtienen dos conclusiones:

Primero, debido a que las guías estaban diseñadas para que las estudiantes asumieran el rol protagónico en el proceso, se evidencia una situación recurrente y es que ellas pedían ayuda a las FEM para comprender cada uno de los enunciados, sin embargo, cuando estas les pedían que leyeran de nuevo el enunciado cuidadosamente y con ciertas pausas dicha estudiante se percataba de las acciones que debía realizar. Esto lleva a pensar que, las educandas no están acostumbradas a trabajar de manera autónoma; en su lugar, esperan instrucciones explícitas de una figura externa, sobre qué hacer en cada paso; por lo que las estudiantes, en muchos casos, leen las guías de manera superficial, omitiendo información clave para interpretar los enunciados y resolver las actividades.

Segundo, por la razón mencionada en el párrafo anterior, las respuestas de las estudiantes a las guías reflejan una clara deficiencia en la comunicación de las ideas, pues no están acostumbrados a argumentar, explicar o describir sus pensamientos, lo que desencadena en que las estudiantes no sean cuidadosas al momento de expresarlos, aunque se evidencia que pueden tener una idea correcta, al momento de exteriorizarla no lo realizan de la mejor manera, utilizando términos incorrectos, que no brindan la información adecuada, por lo cual, a la hora de redactar o describir dichas ideas, realizan afirmaciones incorrectas, lo que culmina en una respuesta errónea.

En suma, relacionado con lo evidenciado en la implementación, se destaca la experiencia de los autores en cuanto a la fascinación que se llevaron por el apoyo que brindó el material al momento de explicar cómo relacionar cada cuartil con su respectivo porcentaje. Evidenciando así en cómo

se diría coloquialmente carne propia, lo mencionado por Morales (2012), en cuanto a que los materiales didácticos también deben de facilitar el proceso de enseñanza.

Ahora, se hacen algunas recomendaciones para una implementación posterior, de modo que se mejore y se enriquezca el uso del material en la enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición. En primer lugar, unos aspectos de mejora para las guías radican en la corrección de algunos enunciados, en especial en el octavo punto de la segunda guía, de modo que se disipen las ambigüedades que puedan existir, tales como las vistas en la sección 7.3.1.2., de esta manera se esperan mejores resultados en las respuestas.

Paralelamente, se sugiere agregar en los puntos dos, tres y cuatro de la primera guía un ítem adicional en el que, además de registrar los datos, se especifique la posición correspondiente. Esto se debe a que, en algunos conjuntos de datos, pueden existir valores repetidos. En tales casos, si se identifica un cuantil, existe el riesgo de seleccionar un dato incorrecto que coincida en valor con el dato correcto, pero no en posición. Lo que podría llevar a interpretar erróneamente que se ha elegido la opción correcta. Además, en la primera guía se sugiere agregar un punto en el que las estudiantes reorganicen las pinzas que hayan colocado hasta el punto cinco, ya que podría ocurrir que inicialmente las hayan colocado sin tener en cuenta los subíndices de cada pinza. Entonces, si el lector desea realizar un material similar, se recomienda que tenga en cuenta el siguiente ajuste, alargar el carril verticalmente para facilitar la postura de las pinzas y la observación de las posiciones.

Finalmente, este trabajo además de aportarnos al crecimiento personal nos ayuda a nivel profesional, a comprender la importancia y relevancia de estudiar con detalle los objetos matemáticos que utiliza la estadística, para fines de facilitar el diseño de propuestas de enseñanza escolares pertinentes y significativas.

## REFERENCIAS

- Alvarez, C. y Ojeda, M. (2017). *Propuesta Metodológica para la Enseñanza de las Medidas de Tendencia Central, Posición y Dispersión, para Segundo Año de Enseñanza Media, Mediante la Utilización de Aplicaciones Móviles*. [Tesis de pregrado, Universidad Austral de Chile]. <http://cybertesis.uach.cl/tesis/uach/2017/bpma473p/doc/bpma473p.pdf>
- Anderson, D., Sweeney, D. y Williams, T. (2008). *Estadística para administración y economía* (10.<sup>a</sup> ed.). Cengage Learning.
- Arias, O. y Silva, Y. (2012). *Errores presentados por estudiantes de grado octavo en torno a problemas que requieren el uso de la media aritmética*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].  
<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/155/TO-15356.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Batanero, C. (2000). *¿Hacia dónde va la educación estadística?* Disponible en:  
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf>
- Barragán, P. (2011). *El análisis descriptivo de información estadística y la toma de decisiones objetivas en el entorno social de los estudiantes del grado séptimo*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia].  
<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/18156/Alternativa%20metodol%C3%B3gica%20para%20la%20interpretaci%C3%B3n%20de%20las%20medidas%20de%20tendencia%20central%20en%20datos%20agrupados%20utilizando%20material%20did%C3%A1ctico.pdf?sequence=1>

- Barragán, M. y Barrera, J. (2021). *El concepto estadístico de dispersión: una caracterización a partir de textos escolares colombianos*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].
- <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/16703/Conceptodedispersi%c3%b3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Behar, C. y Grima, P. (2004). *55 respuestas a dudas típicas de estadística*. Diaz de Santos, S. A.
- Calcuvio. (s. f.). *Calculadora de cuartiles* | Calcuvio. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://www.calcuvio.com/cuartiles>
- Esquivel, F., Valenzuela, S., Barrena, E., Espejo, R. y Fuentes, A. (2017). *Análisis de los significados de cuantiles en la enseñanza universitaria*. [Resumen/Póster]. Segundo Congreso Internacional Virtual Sobre el Enfoque Ontosemiótico, España.
- <https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html#posters>
- Farigua, K. (2016). *Propuesta de enseñanza para medidas de tendencia central a través de objetos virtuales de aprendizaje*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].
- <http://funes.uniandes.edu.co/12013/1/Farigua2016Propuesta.pdf>
- Fernández, C., y Fuentes, F. (1995). *Curso de estadística descriptiva: Teoría y práctica*. Ariel.
- Fernández, F., Soler, N., y Sarmiento, B. (2007). Medidas de localización y dispersión. En P. J. Rojas (Ed.), *Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. (pp. 40-44). Gaia. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/11463/>
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

- Fuentes, A. (2017). *La mediana, la hermana difícil de las medidas de tendencia central: una secuencia didáctica para su aprendizaje*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. [http://opac.pucv.cl/pucv\\_txt/txt-2500/UCC2604\\_01.pdf](http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2604_01.pdf)
- Galán, J. (2020). *Clases con Juan - ¡Ya pueden revisar su puntaje ICFES! Aquí les presento el mío, cada año realizo la prueba para obtener así mejores resultados con el curso de Preicfes que doy. PD: Recuerden que las inscripciones están abiertas y que no soy el profesor de inglés del curso | Facebook*.  
<https://www.facebook.com/photo/?fbid=876679666453784&set=a.313171366137953>
- García, D. y Sánchez, V. (2012). *Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) como medio para la enseñanza y el aprendizaje de las Medidas de Dispersión*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].  
<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/18927/Objeto%20virtual%20de%20aprendizaje%20%28OVA%29%20como%20medio%20para%20la%20ense%C3%B1anza%20y%20el%20aprendizaje%20de%20las%20medidas%20de%20dispersi%C3%B3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Garzón, D. (2018). *Análisis de materiales y recursos informáticos para la enseñanza de la Estocástica en la educación básica y media en Colombia*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/9733>
- Garzón, M. y Gordillo, M. (2012). *Diseño de un programa de apoyo para determinar el nivel de cultura estadística de un estudiante de grado undécimo en el tema medidas de dispersión*. [Tesis de especialización, Universidad Pedagógica Nacional].

<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/111/TO-15352.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Ministerio de Educación e Innovación y Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa (2018). *Modos de organizar las clases: Las secuencias didácticas n°2. 1a edición para el profesor* (1a edición). G. C. A. B. A.

Gómez F. (2023). *Los fractales, un contexto para la enseñanza de la semejanza* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Colombia.

Grijalba, N. (2021). *Dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa José María Córdoba en la comprensión y representación de las Medidas de Tendencia Central*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/b4c2203c-057a-4a03-8b4b-8ef871253e62>

Icfes. (2024). *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Informe nacional de resultados para Colombia 2022*.

Luceño, A., y González, F. (2015). *Métodos estadísticos para medir, describir y controlar la variabilidad*. Editorial Universidad de Cantabria.

Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B (2009). *Introduction to probability and statistics* (13th ed). Brooks/Cole, Cengage Learning.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional [MEN]

- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional [MEN]
- Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional [MEN]
- Montgomery, D. y Runger, G., (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineers 5th Edición*. Jonh Wiley & Sons, Inc. <http://archive.org/details/buku-stat-montgomery-5>
- Navarrete, P. (2017). *Importancia de los materiales didácticos en el aprendizaje de las matemáticas* [Trabajo de fin de grado, Universidad de Jaén]. Repositorio Institucional CREA. <https://crea.ujaen.es/handle/10953.1/5859>
- NM Traducciones. (2021, julio 14). *Cómo hacer una transcripción natural | Ejemplo en directo* [Video]. YouTube. [https://www.youtube.com/watch?v=rdl4p\\_L6KMY&list=PLoQrz-UBK3KjCp5vGWBD33mn2RdTZ1Jds&index=4](https://www.youtube.com/watch?v=rdl4p_L6KMY&list=PLoQrz-UBK3KjCp5vGWBD33mn2RdTZ1Jds&index=4)
- Pinzón, A. (2012). *Propuesta didáctica para el aprendizaje de la media aritmética, la mediana y la moda, para estudiantes del programa de psicología*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/20570/01186597.2012.pdf?sequence=1>
- Ramírez, C., Ávila, L. y Restrepo, M. (2024). *Medidas de localización central para datos agrupados*. Universidad de los Andes. <https://hdl.handle.net/1992/75392>
- Ramírez, J. y Ramírez, C. (2023). *Aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de educación básica, mediante el Enfoque Ontosemiótico*. [Tesis de pregrado,

- Universidad del Quindío]. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1313811/Ramirez2023Aprendizaje.pdf>
- Reyes, N., Monge, C., y Vega, V. (2013). Propuesta para enseñar “Medidas de tendencia central” utilizando material concreto y recursos tecnológicos. *III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Recuperado de <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1158465/Reyes2013Propuesta.pdf>
- Salcedo, M., Maldonado, L., y Vargas, L. (2020). *Importancia de la estadística desde el principio de la educación básica secundaria*. *Covalente*, 2(1), 14–21. <https://revistas.ufps.edu.co/index.php/covalente/article/view/3444>
- Santa, M. (2015). *Estrategia motivacional para generar proyectos de investigación a partir del uso de herramientas estadísticas, implementada en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Luis López De Mesa*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/54453/43259068.2015pdf.pdf>
- Sarmiento, B., y Fernández, F. (2012). *Curso básico de estadística descriptiva: Introducción al análisis de datos*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Valenzuela, S., Garzón, J., y Álvarez, R. (2021). Análisis didáctico de vídeos disponibles en Internet para el estudio de las medidas de posición. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 34(2), 582-592. [https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1770790/1806748251620708\\_Valenzuela2021Analisis.pdf](https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1770790/1806748251620708_Valenzuela2021Analisis.pdf)

- Vallejo, A. y Fernández, K. (2022). *Alternativa Metodológica para la Interpretación de las Medidas de Tendencia Central en Datos Agrupados utilizando Material Didáctico*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia].  
<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/18156/Alternativa%20metodo%20pedagogica%20para%20la%20interpretaci%C3%B3n%20de%20las%20medidas%20de%20tendencia%20central%20en%20datos%20agrupados%20utilizando%20material%20did%C3%A1ctico.pdf?sequence=1>
- Zapata, M. (2018). *El aprendizaje de las medidas de tendencia central a través de la resolución de problemas*. [Tesis de pregrado, Universidad Cooperativa de Colombia].  
<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/el-aprendizaje-de-las-medidas-de-tendencia-central-a-traves-de-la-resolucion-de-problemas/>
- Zorrilla, S., Flores, Á., y Jiménez, Y. (2022). El Aprendizaje Basado en Proyectos y su aplicación didáctica en la enseñanza de las medidas de localización. *Revista Electrónica Calidad en la Educación Superior*, 13(1), 226-249. <https://doi.org/10.22458/caes.v13i1.4043>

## ANEXOS

### ANEXO A. REVISIÓN DOCUMENTAL

<b>Datos del Texto</b>	<b>De qué trata</b>
<p><b>Título:</b> El análisis descriptivo de información estadística y la toma de decisiones objetivas en el entorno social de los estudiantes del grado séptimo. (Universidad Nacional, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2011.</p> <p><b>Autor:</b> Barragán.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Habla sobre una experiencia y una propuesta realizada y aplicada a estudiantes de grado séptimo, en esta se pretende que utilicen, diferencien y analicen las medidas de localización, para tomar decisiones informadas. Pese a que en su marco disciplinar y su resumen se menciona que se estudiarán las medidas de localización, estos se centran en específico en las MTC, no se realiza un estudio acerca del resto de las medidas de localización.</p>
<p><b>Título:</b> Propuesta didáctica para el aprendizaje de la media aritmética, la mediana y la moda, para estudiantes del programa de psicología. (Universidad Nacional, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2012.</p> <p><b>Autor:</b> Pinzón.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Se enfoca en herramientas estadísticas que se pueden utilizar en psicología, igual pese, a que en su marco disciplinar menciona las medidas de localización, en este solo se estudian en las MTC.</p>
<p><b>Título:</b> Estrategia motivacional para generar proyectos de investigación a partir del uso de herramientas estadísticas, implementada en los estudiantes de grado noveno de la Institucion Educativa Luis López De Mesa. (Universidad Nacional, Colombia).</p>	<p>Aborda un proyecto para incentivar la investigación a partir del uso de herramientas estadísticas. Una de las herramientas que menciona son las medidas de localización, y aunque su estudio se centra en las MTC, este presenta la definición y el cálculo de un percentil,</p>

<p><b>Año:</b> 2015.</p> <p><b>Autor:</b> Santa.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> ML.</p>	<p>además relaciona directamente el percentil 50 con la mediana.</p>
<p><b>Título:</b> Alternativa Metodológica para la Interpretación de las Medidas de Tendencia Central en Datos Agrupados utilizando Material Didáctico. (Universidad Pedagógica Nacional, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2022.</p> <p><b>Autor:</b> Monroy y Zambrano</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC</p>	<p>Presenta una propuesta metodológica para la interpretación de las MTC, en esta no se mencionan las medidas de posición.</p>
<p><b>Título:</b> Propuesta Metodológica para la Enseñanza de las Medidas de Tendencia Central, Posición y Dispersión, para Segundo Año de Enseñanza Media, Mediante la Utilización de Aplicaciones Móviles. (Universidad Austral, Chile).</p> <p><b>Año:</b> 2017.</p> <p><b>Autor:</b> Álvarez y Ojeda.</p> <p><b>País:</b> Chile.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Austral de Chile.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> ML.</p>	<p>Se muestra una propuesta de enseñanza sobre medidas de localización y dispersión mediante el uso de aplicaciones móviles. Incluye guías que presentan información sobre cuartiles, deciles y percentiles, aunque sin una exposición clara. Ya que, se observa que algunas fórmulas e información sobre cuantiles provienen de un libro de texto escolar de 1° medio de educación chilena (lo que en el sistema educativo colombiano es grado noveno1), pero la guía no distingue si las fórmulas determinan la posición o el cuantil en sí. Las guías deben resolverse utilizando tanto la aplicación Estadística Fácil de Software House como el cálculo manual, con ello se detecta que la fórmula empleada varía entre ambos métodos, lo que puede generar</p>

	<p>diferencias en los resultados. Finalmente, aunque el uso de aplicaciones móviles representa un apoyo, su impacto es limitado, pues solo facilitan cálculos en conjuntos pequeños de datos (30-50), que pueden resolverse manualmente. Además, aunque las actividades incluyen algunas tareas de interpretación, se enfocan en aplicar fórmulas o usar la aplicación. (Dejar lo siguiente como nota al pie: 1 Convenio Andrés Bello. (2004). Tabla de equivalencias de los estudios de educación primaria o básica y media o secundaria en los países del Convenio Andrés Bello (p. 10). Bogotá, Colombia: Convenio Andrés Bello. Recuperado de <a href="https://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/EquivalenciasCAB.pdf">https://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/EquivalenciasCAB.pdf</a>.</p>
<p><b>Título:</b> Propuesta para enseñar “Medidas de tendencia central” utilizando material concreto y recursos tecnológicos (Ministerio de Educación Pública, Costa Rica).</p> <p><b>Año:</b> 2013.</p> <p><b>Autor:</b> Reyes, Monge y Vega.</p> <p><b>País:</b> Costa Rica.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Artículo académico.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Presenta los cuartiles como medidas de tendencia central, estos son utilizados para solucionar algunas situaciones problema presentadas en seis lecciones. En las lecciones exponen las definiciones y las fórmulas respectivas de cada cuartil y se pide a las estudiantes calcular y opinar sobre los cuartiles obtenidos (esto lo tienen que hacer también con las MTC, el máximo y el mínimo).</p>
<p><b>Título:</b> Análisis didáctico de vídeos disponibles en Internet para el estudio de las medidas de posición. (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Guatemala).</p> <p><b>Año:</b> 2021.</p> <p><b>Autor:</b> Valenzuela, Garzón y Álvarez.</p> <p><b>País:</b> España.</p>	<p>Exhibe un análisis desde el punto de vista onto semiótico de algunos videos encontrados en internet sobre las medidas de posición, este busca informar sobre la pertinencia del uso de estos videos como forma de estudio, además, señala posibles errores que pueden cometer.</p>

<p><b>Tipo de investigación:</b> Artículo académico. <b>Medidas que aborda:</b> MP.</p>	
<p><b>Título:</b> Propuesta de enseñanza para medidas de tendencia central a través de objetos virtuales de aprendizaje. (Universidad Pedagógica Nacional, Colombia) <b>Año:</b> 2016. <b>Autor:</b> Farigua. <b>País:</b> Colombia. <b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. <b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Propuesta de enseñanza para las MTC, en este documento no se mencionan las medidas de posición.</p>
<p><b>Título:</b> Análisis de materiales y recursos informáticos para la enseñanza de la Estocástica en la educación básica y media en Colombia. (Universidad Pedagógica Nacional, Colombia). <b>Año:</b> 2018. <b>Autor:</b> Garzón. <b>País:</b> Colombia. <b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. <b>Medidas que aborda:</b> ML.</p>	<p>Presenta un catálogo sobre materiales y recursos para la enseñanza de la Estocástica. Al hacer una revisión, las medidas de posición solo se mencionan cuando se estudian los diagramas de caja y bigotes, en específico solo se mencionan los cuartiles.</p>
<p><b>Título:</b> La mediana, la hermana difícil de las medidas de tendencia central: una secuencia didáctica para su aprendizaje. (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile). <b>Año:</b> 2017. <b>Autor:</b> Fuentes. <b>País:</b> Chile.</p>	<p>Plantea una secuencia didáctica para el aprendizaje de las MTC en específico de la mediana, en este documento no se mencionan medidas de posición.</p>

<p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	
<p><b>Título:</b> Dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa José María Córdoba en la comprensión y representación de las Medidas de Tendencia Central. (Universidad del Valle, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2021.</p> <p><b>Autor:</b> Grijalba.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad del Valle.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Clasifica errores, dificultades y obstáculos que pueden cometer estudiantes de grado sexto cuando se estudian las MTC. Las medidas de posición en este documento no son mencionadas.</p>
<p><b>Título:</b> Aprendizaje de las medidas de tendencia central en estudiantes de educación básica, mediante el Enfoque Ontosemiótico (Universidad del Quindío, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2023.</p> <p><b>Autor:</b> Ramírez y Ramírez.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad del Quindío.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Expone una propuesta para el aprendizaje de las MTC bajo un enfoque onto semiótico, este se desarrolla a partir de la aplicación de unas tareas contextualizadas con estudiantes de grado sexto. Las medidas de posición no son mencionadas en este documento.</p>
<p><b>Título:</b> El aprendizaje de las medidas de tendencia central a través de la resolución de problemas. (Universidad Cooperativa, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2018.</p> <p><b>Autor:</b> Zapata.</p>	<p>Plantea una unidad didáctica para el aprendizaje de las MTC, Dicha unidad se enfoca en la resolución de problemas, además, al implementarla en grado noveno, se observó la capacidad de representación e interpretación de</p>

<p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Cooperativa de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>las estudiantes. Este documento no menciona las medidas de posición.</p>
<p><b>Título:</b> El Aprendizaje Basado en Proyectos y su aplicación didáctica en la enseñanza de las medidas de localización. (Revista Electrónica Calidad en la Educación Superior, Costa Rica)</p> <p><b>Año:</b> 2022.</p> <p><b>Autor:</b> Zorrilla, Flores y Jiménez.</p> <p><b>País:</b> Ecuador.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Artículo académico.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Presenta una propuesta para determinar la incidencia del Aprendizaje Basado en Proyectos en el aprendizaje de las MTC, aunque el nombre del artículo menciona que es en las medidas de localización, deja de lado el resto y solo se centra en la media, la mediana y la moda. En este documento no se estudian las medidas de posición.</p>
<p><b>Título:</b> Medidas de localización y dispersión. (8° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Colombia)</p> <p><b>Año:</b> 2007.</p> <p><b>Autor:</b> Fernández, Soler y Sarmiento.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Artículo académico.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Expone un taller en el que se pretende que las estudiantes reconozcan, utilicen y comprendan las MTC y las medidas de dispersión. Aunque en su título mencione las medidas de localización este solo tiene en cuenta la media, la mediana y la moda. En este documento no se estudian las medidas de posición.</p>
<p><b>Título:</b> Medidas de localización central para datos agrupados. (Universidad de los Andes, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2024.</p> <p><b>Autor:</b> Ramírez, Ávila y Restrepo.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Documento universitario, Universidad de los Andes.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Presenta una unidad didáctica para el aprendizaje de las MTC enfocada en que las estudiantes puedan identificar, comprender y aplicar dichas medidas en datos agrupados. Este documento no menciona las medidas de posición.</p>

<p><b>Título:</b> Errores presentados por estudiantes de grado octavo en torno a problemas que requieren el uso de la media aritmética. (Universidad Pedagógica, Colombia)</p> <p><b>Año:</b> 2012</p> <p><b>Autor:</b> Arias y Silva.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>Presentan una experiencia en la que categorizan errores cometidos por algunos estudiantes de grado octavo cuando estudian la media aritmética, se realiza la clasificación con base en una autora la cual hace una sistematización de errores para las MTC. En este documento no se estudian las medidas de posición.</p>
<p><b>Título:</b> Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) como medio para la enseñanza y el aprendizaje de las Medidas de Dispersión. (Universidad Pedagógica, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2023.</p> <p><b>Autor:</b> García y Sánchez.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MTC.</p>	<p>En este documento se presenta una experiencia con algunos entornos/aplicativos como estrategia en la enseñanza y aprendizaje de las medidas de dispersión, en esta resaltan y afirman que la enseñanza de la estadística está focalizada en las MTC, dejando de lado las medidas de posición y las medidas de dispersión. Propone una situación usando Exelearning como OVA, en el cual se estudia la varianza, la desviación y el coeficiente de variación. Aunque no se estudian las medidas de posición, se reafirma la y evidencia la falta de su estudio en los entornos escolares.</p>
<p><b>Título:</b> Diseño de un programa de apoyo para determinar el nivel de cultura estadística de un estudiante de grado undécimo en el tema medidas de dispersión. (Universidad Pedagógica, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2012.</p> <p><b>Autor:</b> Garzón y Gordillo.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de especialización, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.</p>	<p>En esta tesis se propone un cuestionario que mide el nivel de cultura estadística que tienen los estudiantes de grado undécimo en el tema de medidas de dispersión. Con base en dicho cuestionario se pretende valorar el aprendizaje obtenido sobre medidas de dispersión, si bien este documento no menciona las medidas de posición también resalta el hecho de que las MTC son el foco principal de estudio sobre estadística escolar.</p>

<b>Medidas que aborda:</b> MD.	
<p><b>Título:</b> El concepto estadístico de dispersión: una caracterización a partir de textos escolares colombianos. (Universidad Pedagógica, Colombia).</p> <p><b>Año:</b> 2021.</p> <p><b>Autor:</b> Barragán y Barrera.</p> <p><b>País:</b> Colombia.</p> <p><b>Tipo de investigación:</b> Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.</p> <p><b>Medidas que aborda:</b> MD.</p>	<p>Habla sobre una experiencia y una propuesta realizada y aplicada a estudiantes de grado séptimo, en esta se pretende que utilicen, diferencien y analicen las medidas de localización, para tomar decisiones informadas. Pese a que en su marco disciplinar y su resumen se menciona que se estudiarán las medidas de localización, estos se centran en específico en las MTC, no se realiza un estudio acerca del resto de las medidas de localización.</p>

# Manual para docentes



Material didáctico para la enseñanza  
y el aprendizaje de los cuantiles.



Camila Riveros  
Camilo Ballesteros

## Introducción

Este documento es el **Manual de uso del material didáctico "Cuantízalo en Parche"** para docentes. **Cuantízalo en parche** está diseñado como una herramienta pedagógica que facilita la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición o los cuantiles (cuartiles, deciles y percentiles), en estudiantes de grado noveno, décimo o undécimo.

Este material didáctico promueve el aprendizaje significativo a través de actividades manipulativas y prácticas. Su propósito es hacer que conceptos abstractos, como los cuantiles, sean más accesibles y comprensibles para las estudiantes, permitiéndoles desarrollar habilidades de análisis e interpretación de datos en contextos reales.

Con este objetivo, en estas páginas se ofrecen orientaciones para que las docentes puedan implementar el material de manera efectiva en sus clases. Incluye recomendaciones metodológicas, algunas actividades, y una descripción detallada de los elementos que conforman el material



# Contenido

1. ¿Qué son los cuantiles? .....4
2. ¿Para qué sirve Cuantízalo en Parche? .....5
3. Elementos del material.....6
4. ¿Cómo se usa? ..... 9
5. Actividades .....16



## ¿Qué son los cuantiles?

Los cuantiles son medidas estadísticas que pertenecen a las llamadas medidas de posición. Son aquellos valores de la variable que, ordenados de menor a mayor, dividen a la distribución de datos en partes, de tal manera que cada una de ellas contiene la misma frecuencia, o la misma cantidad de datos. Estas medidas facilitan la interpretación porcentual de la información.

Entre los cuantiles más conocidos se encuentran los **Cuartiles** ( $Q_i$ ), los **Deciles** ( $D_i$ ) y los **Percentiles** ( $P_i$ ).



## ¿Para qué sirve **CUANTILÍZALO EN PARCHE?**

- 1 Adquirir, mejorar o evaluar la comprensión de las medidas de posición.
- 1 Facilitar la interpretación de los cuantiles por medio de la visualización.
- 1 Desarrollar la habilidad para calcular y analizar cuantiles.
- 1 Facilitar la identificación de la posición relativa de un valor dentro de un conjunto de datos.
- 1 Mejorar las habilidades en el análisis de datos al permitir observar directamente los efectos de los cuantiles en la distribución.
- 1 Proveer una representación visual del conjunto de datos y las particiones causadas por los cuantiles.
- 1 Reducir el nivel de abstracción requerido para la comprensión del concepto estadístico.
- 1 Adaptar la enseñanza a diferentes estilos de aprendizaje.
- 1 Fomentar el trabajo individual o grupal.
- 1 Causar motivación en el aprendizaje.



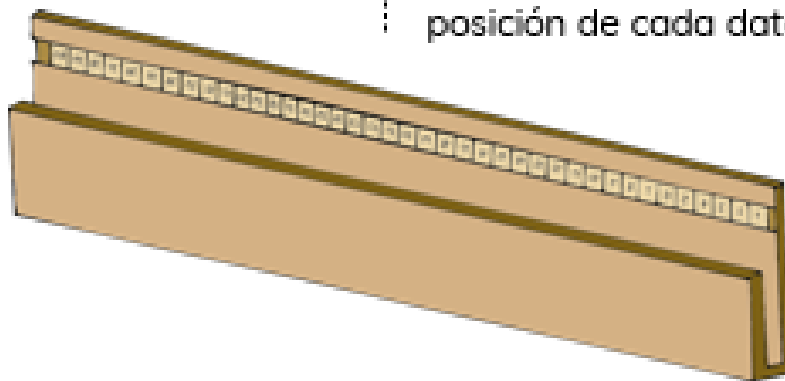
# Elementos del Material

El material cuenta con 7 elementos de diferente tipo

## 1 Carril posicionador

Pieza de madera con cuadrados deslizables numerados del 1 al 40.

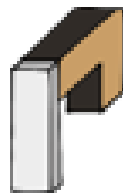
Su utilidad es organizar los datos de forma descendiente y facilitar la visualización de la posición de cada dato.



## 2 Fichas

Cada ficha está conformada por una pieza de madera en forma de L unida a un rectángulo de acrílico (cada material cuenta con 40 unidades).

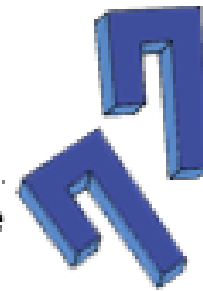
En cada ficha se escribe uno de los datos. Las fichas se deslizan fácilmente por el carril y pueden sacarse individualmente y ponerse donde se desee para facilitar la organización de los datos.



### 3 Separadores

Dos piezas de madera color azul, con forma similar a la de la letra U.

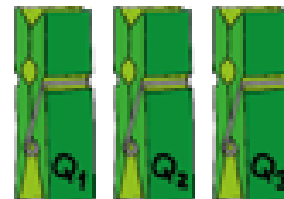
Su función es facilitar la visualización de ciertas agrupaciones en la distribución.



### 4 Pinzas verdes

Tres pinzas de madera color verde, cada una marcada con  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  respectivamente.

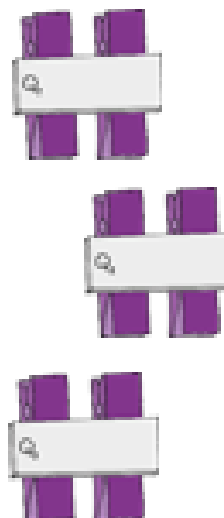
Su utilidad es identificar los cuartiles de un conjunto de datos, cuando estos son un dato de la distribución.



### 5 Pinzas moradas

Tres pares de pinzas de madera color morado, cada par está unido por un acrílico y marcado con  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  concernientemente.

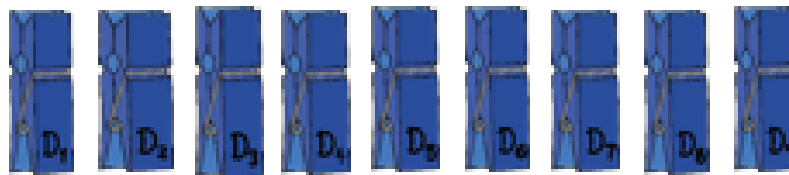
Su utilidad es identificar los cuartiles de un conjunto de datos, cuando estos no son un dato de la distribución, sino que se calculan realizando el promedio entre dos datos.



## 6 Pinzas azules

Nueve pinzas de madera color azul, cada una marcada con  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$  respectivamente.

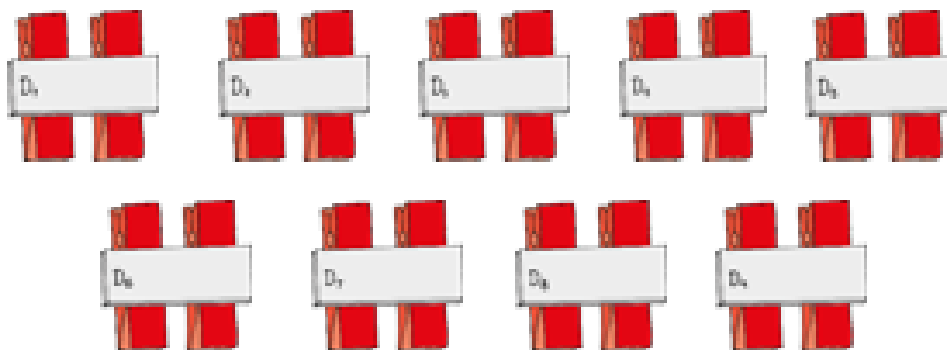
Su utilidad es identificar los deciles de un conjunto de datos, cuando estos son un dato de la distribución.



## 7 Pinzas Rojas

Nueve pares de pinzas de madera color rojo, cada par está unido por un acrílico y marcado con  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$  correspondientemente.

Su función es identificar los deciles de un conjunto de datos, cuando estos no son precisamente un dato de la distribución, sino que son el resultado de realizar un promedio entre dos datos.

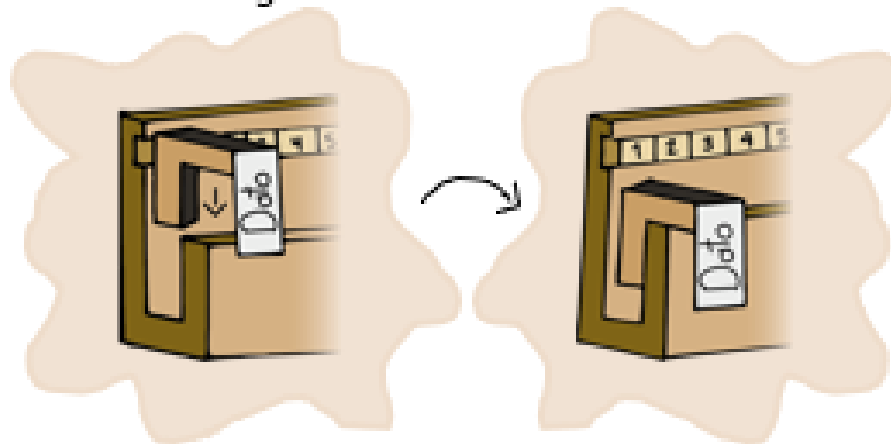


## ¿Cómo se usa?

- El material está diseñado para ser utilizado con múltiples fines en una amplia variedad de ejercicios que estudien conjuntos de 40 o menos datos (no agrupados). Puede usarse para introducir la noción de cuantiles, para construir la fórmula que determina la posición de un cuantil, para comparar los cuantiles con los deciles, o simplemente para identificar estos últimos en un conjunto de datos.

1

Haciendo uso de un marcador borrable, se escribe cada uno de los datos en una de las fichas, luego se ubica cada ficha en el carril posicionador, organizando los datos de menor a mayor.

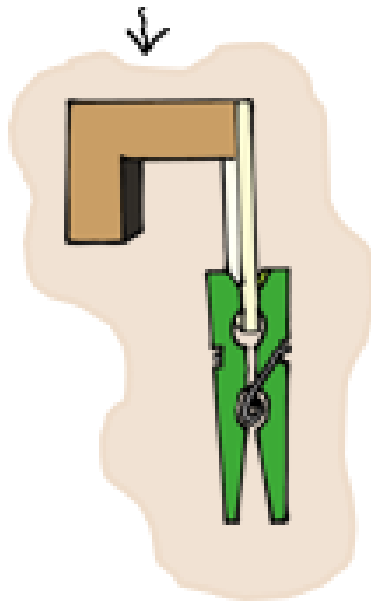


9

2

### Cuándo y cómo se usa una pinza

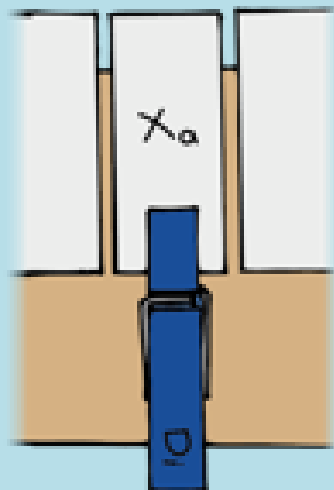
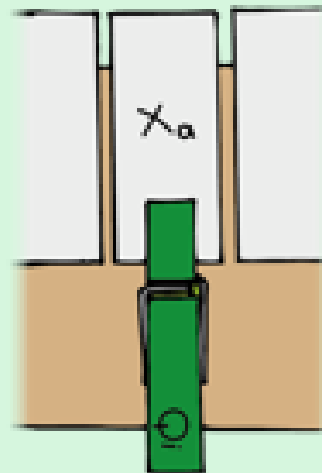
Debe sujetarse a la parte de acrílico de la ficha



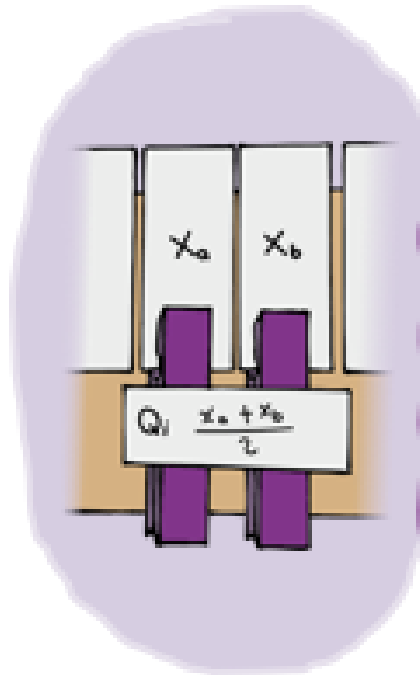
El subíndice de la letra con la que esta está marcada debe coincidir con el número de cuartil que se identificó. Por ejemplo, si se halló el **segundo** cuartil, se debe utilizar la pinza marcada con  $Q_2$



Si se determinó un cuartil y este es un dato  $x_a$  de la distribución, se sujeta una pinza verde a la ficha que tiene escrito dicho dato.

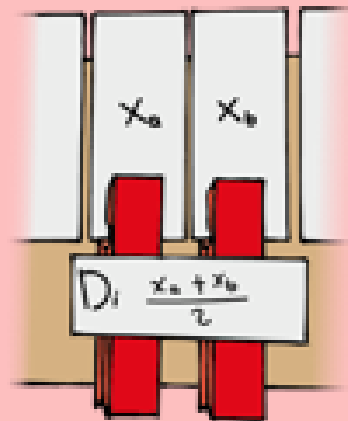


Si se determinó un decil y este es un dato  $x_a$  de la distribución, se sujeta una pinza azul a la ficha que tiene escrito dicho dato.



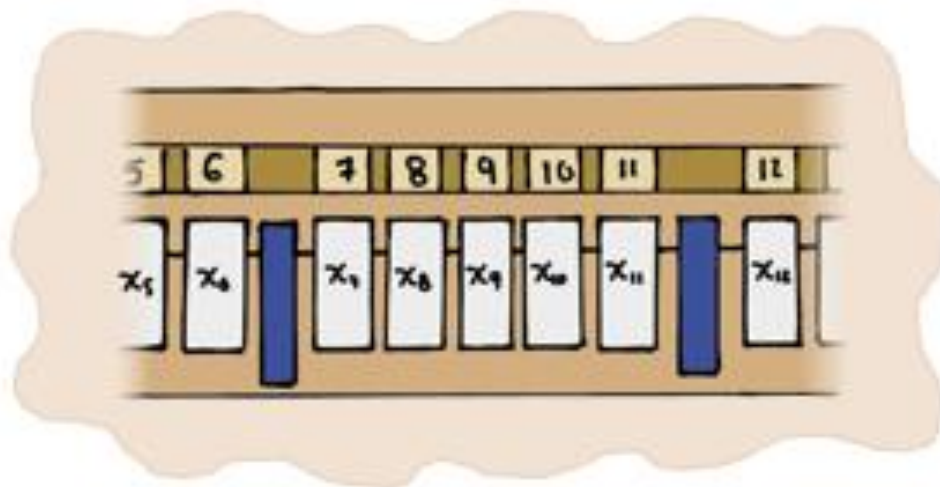
Si se determinó un cuartil y este es el resultado de calcular un promedio entre dos datos  $(x_a, x_b)$ , se debe tomar un par de pinzas moradas, sujetar cada una de estas a uno de los dos datos y escribir el resultado del promedio (el cuartil) en el acrílico que une a las dos pinzas.

Si se determinó un decil y este es el resultado de calcular un promedio entre dos datos  $(x_a, x_b)$ , se debe tomar un par de pinzas rojas, sujetar cada una de estas a uno de los dos datos y escribir el resultado del promedio (el decil) en el acrílico que une a las dos pinzas.



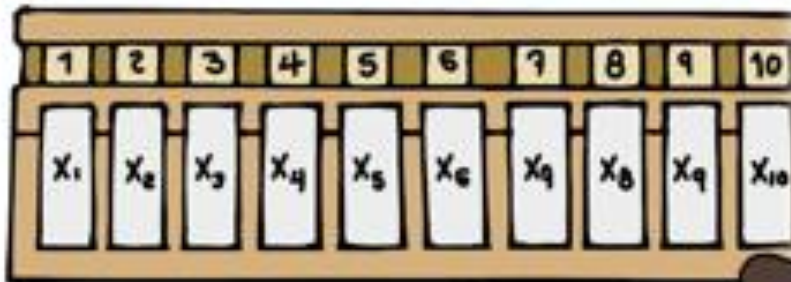
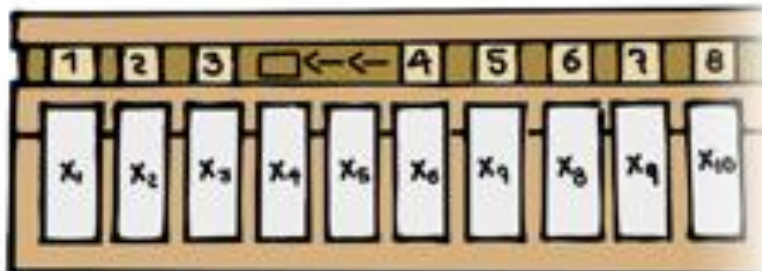
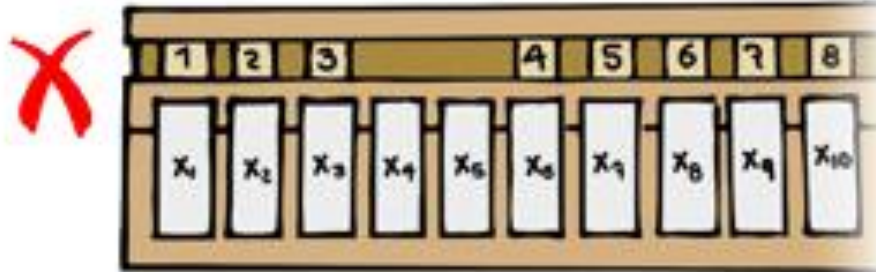
### 3

Si se quiere visualizar un subconjunto del conjunto de datos, se pueden utilizar los separadores. Para ello se toma el extremo más corto de cada separador y se introduce en el carril, ubicando todos los datos pertenecientes a este subconjunto entre los dos separadores.



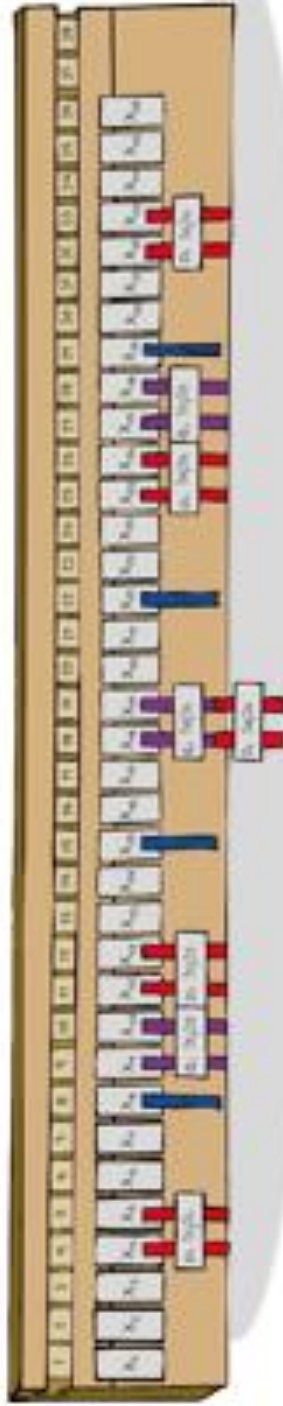
# ! Ojo

Hay que asegurar que cada dato tenga asignada la posición correspondiente. Por ello, cuando sea necesario, hay que reorganizar las posiciones al introducir los separadores.



## Ejemplo de uso

Para un mejor entendimiento del uso de cada uno de los elementos, observe la ilustración. En ella se ejemplifica el uso del carril, las pinzas, las fichas y las fichas para un conjunto de 36 datos.



# Actividades

En las siguientes páginas se presentan algunas actividades que se pueden llevar a cabo utilizando el material didáctico.

## Actividad 1

Las estudiantes se acercan a la noción de cuantil de una forma natural, identificando e interpretando cuartiles.

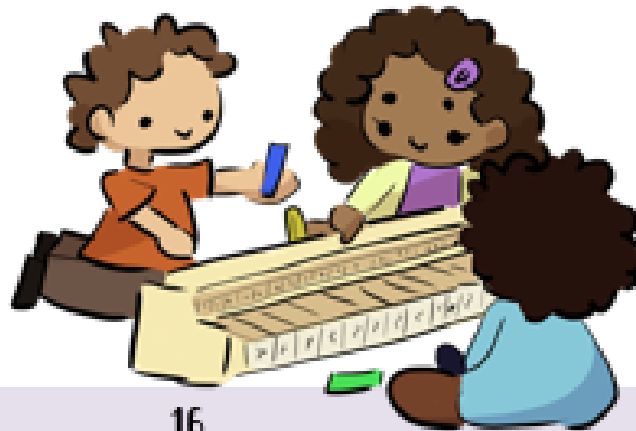
## Actividad 2

Las estudiantes construyen la fórmula general para determinar la posición de los cuantiles

$$R[C_i(s)] = i \frac{N-1}{s} + 1'$$

## Actividad 3

Las estudiantes determinan la posición de los deciles haciendo uso de la fórmula, y con ello los identifican e interpretan.



## Actividad 1 : acercándonos a los cuartiles

1. Escriban cada dato en una de las fichas y ubiquen estas en el carril organizando los valores de menor a mayor.
2. Identifiquen el valor o los valores (máximo dos) que se encuentran en la posición central; para marcarlo(s) ayúdense con una pinza verde o morada.
  - Este valor es: \_\_\_\_\_.
  - ¿Qué pueden decir sobre la cantidad de datos que hay a la derecha de este valor en comparación con la cantidad de datos que hay a su izquierda? \_\_\_\_\_
3. Utilicen los separadores para demarcar el primer grupo, el cual irá desde el primer dato hasta el valor identificado en el punto 2 (incluyéndolos).
  - Identifiquen el valor o los valores (máximo dos) centrales de este grupo; para marcarlo o marcarlos ayúdense con una pinza verde o morada según sea el caso.
  - Este valor o valores son: \_\_\_\_\_Retiren los separadores utilizados
4. Utilicen los separadores para demarcar el segundo grupo, el cual va desde el valor identificado en el punto 2 hasta el último dato (incluyéndolos).
  - Identifiquen el valor o los valores (máximo dos) centrales de este grupo; para marcarlo o marcarlos ayúdense con una pinza verde o morada según sea el caso.
  - Este valor o valores son: \_\_\_\_\_Retiren los separadores utilizados

### ¿Sabían que?

En cualquier conjunto de datos existen tres “datos” importantes, a los cuales se les denomina **cuartiles**, a estos números se les denota  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  y se leen primer cuartil, segundo cuartil y tercer cuartil, respectivamente.



Para determinar los cuartiles del conjunto de datos inicialmente se tendrá en cuenta los valores que identificaron en los puntos anteriores, de la siguiente manera: para determinar el primer cuartil ( $Q_1$ ) se deben apoyar de la información recolectada en el tercer punto, para determinar el segundo cuartil ( $Q_2$ ) en la información recolectada en el segundo punto y para determinar el tercer cuartil ( $Q_3$ ) utilizaremos la información obtenida en el cuarto punto. **Luego, se debe de tener en cuenta la siguiente condición: si se tiene un único valor para cualquiera de los cuartiles, dicho cuartil será igual a ese valor, pero si se tienen dos valores, el cuartil correspondiente será igual al promedio de dichos valores.**

El promedio o media aritmética se calcula sumando todos los números y dividiendo el resultado por la cantidad de elementos en el conjunto.

### Recordatorio



5. Teniendo en cuenta la anterior información, determinen los cuartiles del conjunto de datos que están analizando. Si se realizó algún promedio escriban ese resultado en el espacio correspondiente de la pinza morada.

•  $Q_1 =$  \_\_\_\_\_ •  $Q_2 =$  \_\_\_\_\_ •  $Q_3 =$  \_\_\_\_\_



### Tengan presente que ...

El **mínimo** es el menor valor en el conjunto de datos ordenado.

El **máximo** es el mayor valor en el conjunto de datos ordenado.

6. Atendiendo a las instrucciones del docente, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos datos hay desde el valor mínimo hasta el primer cuartil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos datos hay desde el primer cuartil hasta el segundo cuartil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos datos hay desde el segundo cuartil hasta el tercer cuartil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos datos hay desde el tercer cuartil hasta el valor máximo? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo es la cantidad de datos que hay desde el primer cuartil hasta el segundo cuartil en comparación con la cantidad de datos que hay desde el segundo cuartil hasta el tercer cuartil?  
\_\_\_\_\_
- Teniendo en cuenta las anteriores repuestas, los cuartiles dividen al conjunto en partes con \_\_\_\_\_ cantidad de datos.

### Tengan presente que ...

El 100% es una referencia que indica la totalidad del conjunto de datos que se está considerando. En otras palabras, el 100% de un conjunto de datos equivale a la cantidad total de elementos que tiene el mismo. Por ende, si no se tiene en cuenta a todos los datos, solo se estaría considerando una porción de ese 100%.



7. Utilizando la información dada, sin hacer cálculos y empleando como apoyo visual el material completen la siguiente información.
- La cantidad de datos que equivale al 100% en nuestro conjunto de notas es \_\_\_\_\_.
  - Desde el dato inicial \_\_\_\_\_ hasta el dato \_\_\_\_\_ se encuentra el 50% de la información.
  - Desde el dato inicial \_\_\_\_\_ hasta el dato \_\_\_\_\_ se encuentra el 25% de la información.
  - Desde el dato inicial \_\_\_\_\_ hasta el dato \_\_\_\_\_ se encuentra el 75% de la información.

### ¿Para qué sirven estas medidas?

Los cuartiles son medidas estadísticas que ayudan a obtener información porcentual de los datos que se están analizando.



8. Analicen las notas de su curso
- El 25% de los estudiantes obtuvieron una nota menor a \_\_\_\_\_
  - El 25% de los estudiantes obtuvieron una nota mayor a \_\_\_\_\_
  - El 50% de los estudiantes sacaron una nota mayor a \_\_\_\_\_
  - El 50% de los estudiantes sacaron una nota menor a \_\_\_\_\_
  - El 75% de los estudiantes sacaron una nota menor a \_\_\_\_\_
  - El 75% de los estudiantes sacaron una nota mayor a \_\_\_\_\_

## Actividad 2: Descubramos la fórmula

1. Escriban cada dato en una de las fichas y ubiquen estas en el carril organizando los valores de menor a mayor y determinen los cuartiles, haciendo uso de la pinza predeterminada para cada uno de ellos.
2. A partir de la información identificada en el primer punto, ¿en qué posición se encuentra el primer cuartil, segundo cuartil y tercer cuartil?
  - Posición del  $Q_1$ : \_\_\_\_\_
  - Posición del  $Q_2$ : \_\_\_\_\_
  - Posición del  $Q_3$ : \_\_\_\_\_
  - Si se comparan las posiciones de los cuartiles, ¿notan algo acerca de estas posiciones con respecto al total de datos? Escriban la a continuación.

-----  
-----

3. Respondan lo siguiente
  - ¿Cuántos datos hay entre el valor mínimo y el primer cuartil?  
-----
  - ¿Cuántos datos hay entre el primer cuartil y el segundo cuartil?  
-----
  - ¿Cuántos datos hay entre el segundo cuartil y el tercer cuartil?  
-----
  - ¿Cuántos datos hay entre el tercer cuartil y el valor máximo?  
-----
  - ¿Qué tienen en común cada una de estas cantidades?

-----

### Tengan presente que ...

De aquí en adelante en cualquier conjunto de datos, a este valor (la cantidad de datos que hay entre un cuartil y su consecutivo, o entre los otros datos específicos mencionados en el punto anterior) se le denominará  $m$



4. Para el conjunto de datos  $m =$  \_\_\_\_\_

**¿Sabían que?**

Se usa la notación  $Q_i$  para referirse a los cuartiles en general, donde  $i$  puede tomar el valor de 1, 2 o 3.  $Q_1$  es el primer cuartil,  $Q_2$  es el segundo cuartil, y  $Q_3$  es el tercer cuartil.



5. Para cada cuartil  $Q_i$ , respondan.

- Cantidad de veces que se repite  $m$  antes de  $Q_1$ :\_\_\_\_\_
- Cantidad de veces que se repite  $m$  antes de  $Q_2$ :\_\_\_\_\_
- Cantidad de veces que se repite  $m$  antes de  $Q_3$ :\_\_\_\_\_
- ¿Encuentran algún “patrón” con respecto a la cantidad de veces que se repite el  $m$  con el cuartil buscado? Sí:\_\_\_ No:\_\_\_
- Intenten expresarlo a continuación:\_\_\_\_\_

-----  
-----  
-----

6. Completen la siguiente tabla

Cuartil $Q_i$	Cantidad de cuartiles antes de $Q_i$	Número de cuartil ( $i$ )	Diferencia entre el número de cuartil y cuartiles antes de $Q_i$
$Q_1$			
$Q_2$			
$Q_3$			

7. Encuentran alguna relación matemática entre el número de cuartil con la cantidad de cuartiles que hay antes de él. Formulen una expresión para cada una:

- $Q_1$ :
- $Q_2$ :
- $Q_3$ :

8. Completen la siguiente tabla

$Q_i$	$m$	$i$	$m * i$	$i - 1$	$(m * i) + (i - 1)$	Posición
$Q_1$						
$Q_2$						
$Q_3$						

- ¿Cuál es el número exacto que le falta al valor ' $m * i + (i - 1)$ ' de cada uno de los cuartiles para ser igual al valor de la posición del cuartil respectivo? \_\_\_\_\_
- La expresión que representa la posición de cada cuartil es:  
-----

9. A partir de la información recolectada realicen lo siguiente

**Primer cuartil ( $Q_1$ ):**

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta  $Q_1$  cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con color azul, coloreen los valores que se encuentran después del mínimo y antes de  $Q_1$ .
- Con color rojo, coloreen el cuartil o los cuartiles que haya antes de  $Q_1$ .
- Con color amarillo, coloreen los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_ ¿A qué corresponden dentro del conjunto de datos?  
-----
- Basándose en la tabla del punto 8, ¿a qué elementos coloreados corresponde cada parte de la expresión obtenida en ese mismo punto?
- " $(m * i)$ " corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
- " $2$ " corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
- Con la fórmula (expresión obtenida en el punto 8) "reemplacen" cada valor que conozcan para la posición el  $Q_1$  **sin operar**, después, realicen las operaciones correspondientes.

**Segundo cuartil ( $Q_2$ ):**

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta el  $Q_2$ , cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con un color azul, coloreen los valores que se encuentren:
  - ✓ Después del mínimo y antes del primer  $Q_1$ .
  - ✓ Después del  $Q_1$  y antes del  $Q_2$ .
- Con color rojo, coloreen el cuartil o los cuartiles que haya antes de  $Q_2$ .
- Con un color amarillo, coloreen los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_ ¿A qué corresponden puntualmente dentro del conjunto de datos? \_\_\_\_\_
- Basándose en la tabla del punto 8, ¿a qué elementos coloreados corresponde cada parte de la expresión obtenida en ese mismo punto?
  - ✓ “ $(m * i)$ ” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
  - ✓ “ $(i - 1)$ ” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
  - ✓ “**2**” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
- Con la fórmula (expresión obtenida en el punto 8) “reemplacen” cada valor que conozcan para la posición del  $Q_2$  **sin operar**, después, realicen las operaciones correspondientes.

### Tercer cuartil ( $Q_3$ ):

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta el  $Q_3$ , cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con un color azul, coloreen los valores que se encuentren:
  - ✓ Después del mínimo y antes del  $Q_1$ .
  - ✓ Después del  $Q_1$  y antes del  $Q_2$ .
  - ✓ Después del  $Q_2$  y antes del  $Q_3$ .
- Con un color rojo, coloreen el cuartil o los cuartiles que haya antes del  $Q_3$ .
- Con un color amarillo, coloreen los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_ ¿A qué corresponden puntualmente dentro del conjunto de datos? \_\_\_\_\_
- Basándose en la tabla del punto 8, ¿a qué elementos coloreados corresponde cada parte de la expresión obtenida en ese mismo punto?
  - ✓ “ $(m * i)$ ” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
  - ✓ “ $(i - 1)$ ” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
  - ✓ “ $2$ ” corresponde a los elementos de color: \_\_\_\_\_
- Con la fórmula (expresión obtenida en el punto 8) “reemplacen” cada valor que conozcan para la posición el  $Q_3$  **sin operar**, después, realicen las operaciones correspondientes.

10. Completen siguiente:

- Escriban los datos recolectados desde el mínimo hasta el máximo, cada uno en la posición precisa dentro del esquema que se encuentra a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			

- Con un color azul, coloreen los valores que se encuentren:
  - ✓ Después del mínimo y antes del  $Q_1$ .
  - ✓ Después del  $Q_1$  y antes del  $Q_2$ .
  - ✓ Después del  $Q_2$  y antes del  $Q_3$ .
  - ✓ Después del  $Q_3$  y antes del máximo
- Con un color rojo, coloreen los cuartiles.
- Con un color amarillo, coloreen los valores que aún no tienen color.
- Estos valores coloreados de amarillo en el ítem anterior, ¿cuántos son? \_\_\_\_\_ ¿A qué corresponden puntualmente dentro del conjunto de datos? \_\_\_\_\_
- Cuenten la cantidad de valores que hay de cada color:
  - ✓ Color azul: \_\_\_\_\_
  - ✓ Color rojo: \_\_\_\_\_
  - ✓ Color amarillo: \_\_\_\_\_
  - ✓ Si sumamos estas tres cantidades el resultado obtenido es igual a \_\_\_\_\_
  - ✓ En la guía 1, en el punto 6, determinaron que los cuartiles dividen el conjunto de datos en partes iguales, a partir de la representación, ¿en cuántas partes iguales dividen los cuartiles el conjunto de datos? \_\_\_\_\_



**Tengan en cuenta que ...**

De aquí en adelante denotaremos como “ $s$ ” al número de particiones o partes iguales en las que se divide el conjunto de datos. Por ejemplo, para cuartiles  $s = 4$ . Si se dividen en más o menos partes, el valor de “ $s$ ” cambiará.

- En cuartiles  $s = \underline{\hspace{2cm}}$ , por ende, si se quiere expresar la cantidad de cuartiles que existen en cualquier conjunto de datos **en términos de  $s$**  lo correcto sería decir que, la cantidad de cuartiles de un conjunto de datos es igual a  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- Se denomina la cantidad total de datos de un conjunto como “ $N$ ”, formulen una expresión que sea equivalente a dicha  $N$ , expresen cada valor que conozcan utilizando la notación general (que funcione para cualquier conjunto de datos), además, usen la menor cantidad de números posibles. Escribanla a continuación.

**$N =$**

10. De la última expresión, despeje  $m$  y reemplace este valor en la fórmula de posición determinada en el punto 8.

Posición de  $Q_i =$

## Actividad 3

1. Escriban cada dato en una de las fichas y ubiquen estas en el carril organizando los valores de menor a mayor.

### Recuerden que

La posición de los cuantiles puede ser calculada con la siguiente fórmula:

$$= i \cdot \frac{N-1}{s} + 1$$

Donde:

- $N$  es el número total de datos en el conjunto.
- $s$  es la cantidad de partes en la que se divide el conjunto de datos.
- $i$  es el índice del cuantil que estamos buscando. Puede ser:  $i = 1, 2, 3, \dots, s-1$ .



Además, una vez identificada la posición, se debe determinar el  $C_i(s)$ , para esto se debe tener en cuenta los siguientes criterios:

- Si  $R[C_i(s)]$  es un número entero, el cuantil  $C_i(s)$  es el dato que se encuentra en la posición  $R[C_i(s)]$ .
- Si  $R[C_i(s)]$  es un número decimal, se toma la parte entera de este  $R[C_i(s)]$  y  $C_i(s)$  es el promedio entre los datos que se encuentran en la posición  $R[C_i(s)]$  y  $R[C_i(s)] + 1$ .

2. ¿Cuántos cuantiles hay en una distribución de datos? \_\_\_\_\_
3. ¿Qué relación matemática tiene la cantidad de cuantiles con la cantidad de partes en la que dividen el conjunto de datos?  
\_\_\_\_\_
4. Teniendo en cuenta la guía #2, para cuantiles:
  - $s =$  \_\_\_\_\_.
  - Generalmente  $i$  puede tomar más de un valor, ¿cuáles son los valores que puede tomar  $i$  en los cuantiles?  $i =$  \_\_\_\_\_.

5. A partir de lo identificado anteriormente, si se divide el conjunto de datos en 10 partes iguales:
- $s = \underline{\hspace{2cm}}$ .
  - Generalmente  $i$  puede tomar más de un valor, ¿cuáles son los valores que puede tomar  $i$  si se hace una división en 10 partes iguales?  $i = \underline{\hspace{4cm}}$ .
6. Si en cada una de las posiciones ' $R[C_i(s)]$ ' se encuentra el dato o los datos que “marcan” la división del conjunto, entonces, empleando la fórmula, estas posiciones son:

Posición	Procedimiento
$R[C_1(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_2(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_3(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_4(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_5(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_6(10)] = \underline{\hspace{2cm}}$	

$R[C_7(\mathbf{10})] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_8(\mathbf{10})] = \underline{\hspace{2cm}}$	
$R[C_9(\mathbf{10})] = \underline{\hspace{2cm}}$	

### Tengan presente que ...



$R[C_i(s)]$  es la posición del cuantil  $C_i(s)$ , antes cuando  $s = 4$ , a  $C_i(4)$  se les llama cuartiles y se les denotan con  $Q_i$ , ahora, cuando  $s = 10$ , a  $C_i(10)$  se les llama deciles y se les denota con  $D_i$ .

Adicionalmente ambas expresiones son equivalentes, es decir, se puede usar  $C_i(10)$  o  $D_i$  en el caso de los deciles, y  $C_i(4)$  o  $Q_i$  para los cuartiles.

7. Teniendo en cuenta las posiciones identificadas anteriormente, las condiciones que se enunciaron en la primera nota y en el trabajo realizado con las pinzas, determine cada decil y ubique (según sea el caso) la pinza correspondiente, ya sea roja o azul.

Decil	Procedimiento
$D_1 = \text{-----}$	
$D_2 = \text{-----}$	
$D_3 = \text{-----}$	
$D_4 = \text{-----}$	
$D_5 = \text{-----}$	
$D_6 = \text{-----}$	
$D_7 = \text{-----}$	
$D_8 = \text{-----}$	
$D_9 = \text{-----}$	



## Créditos

Este manual y el material didáctico "Cuantilízalo en Parche" han sido elaborados por **María Camila Riveros Carvajal** y **Anderson Camilo Ballesteros Samboní** bajo el marco del trabajo de grado para optar por el título de Licenciadas en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2024.

Camila y Camilo también son creadores de todas las ilustraciones presentadas en este manual. Y en relación con ello, está licenciado bajo los términos de la **Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International**. Lo que indica que, los usuarios o las usuarias deben dar crédito a los creadores y pueden distribuir, adaptar o construir sobre este material en cualquier medio o formato, exclusivamente para fines no comerciales. Si alguien modifica o adapta el material, debe licenciar la obra modificada bajo los mismos términos.

Se agradece a quienes han contribuido directa o indirectamente a la realización de este proyecto, cuyo propósito es enriquecer la enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición en el ámbito escolar.



33



ANEXO C. ANÁLISIS PORCENTUAL DE LAS RESPUESTAS A LAS GUÍAS

*Guía 1*

<b>Pregunta 2</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	5	38,46
Con sentido / Parcialmente correcto	4	30,77
No responde a lo solicitado	3	23,08
Sin sentido / no correcto	1	7,69
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 3</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	12	92,31
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	1	7,69
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 4</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	13	100,00
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 5</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	12	92,31
Con sentido / Parcialmente correcto	1	7,69
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 6</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	6	46,15
Con sentido / Parcialmente correcto	7	53,85
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 7</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	9	69,23
Con sentido / Parcialmente correcto	4	30,77
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 8</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	11	84,62
Con sentido / Parcialmente correcto	2	15,38
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Resumen</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	68	74,73
Con sentido / Parcialmente correcto	18	19,78
No responde a lo solicitado	3	3,30
Sin sentido / no correcto	2	2,20
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	91	100,00

## Guía 2

<b>Pregunta 2</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	0	0,00
Con sentido / Parcialmente correcto	12	100,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 3</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	12	100,00
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 4</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	3	25,00
Con sentido / Parcialmente correcto	4	33,33
No responde a lo solicitado	1	8,33
Sin sentido / no correcto	4	33,33
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 5</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	12	100,00
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 6</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	5	41,67
Con sentido / Parcialmente correcto	1	8,33
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	6	50,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 7</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	12	100,00
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 8</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	4	33,33
Con sentido / Parcialmente correcto	4	33,33
No responde a lo solicitado	1	8,33
Sin sentido / no correcto	3	25,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 9</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	0	0,00
Con sentido / Parcialmente correcto	11	91,67
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	1	8,33
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Resumen</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	48	50,00
Con sentido / Parcialmente correcto	32	33,33
No responde a lo solicitado	2	2,08
Sin sentido / no correcto	13	13,54
No alcanzó/no lo hizo	1	1,04
<b>Total</b>	96	100,00

### *Guía 3*

<b>Pregunta 2</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	8	61,54
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	5	38,46
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 3</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	5	38,46
Con sentido / Parcialmente correcto	5	38,46
No responde a lo solicitado	2	15,38
Sin sentido / no correcto	1	7,69
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 4</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	7	53,85
Con sentido / Parcialmente correcto	6	46,15
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	0	0,00
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 5</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	8	61,54
Con sentido / Parcialmente correcto	2	15,38
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	3	23,08
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 6</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	6	50,00
Con sentido / Parcialmente correcto	5	41,67
No responde a lo solicitado	0	0,00
Sin sentido / no correcto	1	8,33
No alcanzó/no lo hizo	0	0,00
<b>Total</b>	12	100,00

<b>Pregunta 7</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	3	23,08
Con sentido / Parcialmente correcto	2	15,38
No responde a lo solicitado	1	7,69
Sin sentido / no correcto	3	23,08
No alcanzó/no lo hizo	4	30,77
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Pregunta 8</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	2	15,38
Con sentido / Parcialmente correcto	0	0,00
No responde a lo solicitado	2	15,38
Sin sentido / no correcto	1	7,69
No alcanzó/no lo hizo	8	61,54
<b>Total</b>	13	100,00

<b>Resumen</b>	<b>Cantidad de respuestas</b>	<b>Porcentaje</b>
Muy buena / Correcta	39	43,33
Con sentido / Parcialmente correcto	20	22,22
No responde a lo solicitado	5	5,56
Sin sentido / no correcto	9	10,00
No alcanzó/no lo hizo	17	18,89
<b>Total</b>	90	100,00

**ANEXO D. FOTOS: ELABORACIÓN DEL MATERIAL**









