

**UNA TRANSFORMACIÓN INSPIRADA EN LA INVERSIÓN RESPECTO A
LA ELIPSE**

**LIZETH GERALDIN FIGUEROA LEGUIZAMÓN
COD. 2013140073**

Tesis de Grado para optar el título de Licenciada en Matemáticas

Asesor:

GIL ALBERTO DE JESÚS DONADO NUÑEZ

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.**

2017

UNA TRANSFORMACIÓN INSPIRADA EN LA
INVERSIÓN RESPECTO A LA ELIPSE

Lizeth Geraldin Figueroa Leguizamón

*Dedicado a Ludovina y Jorge,
mi mayor felicidad
fue tenerlos a ustedes como papás.*

AGRADECIMIENTOS


Quiero agradecer de manera muy especial a:

★ La Universidad Pedagógica Nacional por darme la oportunidad de estudiar y creer en mí para progresar en la sociedad como profesora de matemáticas.

★ Todos los profesores del Departamento de Matemáticas que hicieron parte de mi formación y me ayudaron a crecer como persona, a modo moral y académico. En especial al profesor Alberto Donado, por su paciencia y apoyo en el desarrollo de este trabajo.

★ Mi familia en general, su apoyo fue incondicional durante toda mi formación académica. Ambar y Maryuri, quiero seguir su ejemplo.


★ De manera especial quiero agradecerle a Sten, un gran apoyo en mi vida desde que lo conocí, gracias.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 3	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una transformación inspirada en la inversión respecto a la elipse
Autor(es)	Figueroa Leguizamón, Lizeth Geraldin
Director	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 65 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	INVERSIÓN; TRANSFORMACIÓN; CURVA Y ELIPSE.

2. Descripción
<p>El trabajo de grado que propone UNA POSIBLE TRANSFORMACIÓN INVERSIÓN RESPECTO A LA ELIPSE, resulta ser un estudio relacionado al interés del estudiante que se acercó al hacer matemáticas. Esta monografía está compuesta de dos partes principales, la primera es el acercamiento que se realiza a todas las temáticas que contribuyeron a realizar esta propuesta de inversión (la inversión y las transformaciones) y la segunda es el estudio que se desarrolló de esta propuesta, se generaliza la transformación para cualquier elipse y a partir de esta se trata de generalizar cada una de las propiedades que se encontraron de la misma, fue donde básicamente se realizaron conjeturas y luego las posibles justificaciones de las mismas. Finalmente se concluye que la transformación T no es una inversión, aun así, T no deja de ser una transformación con unas propiedades inesperadas.</p>

3. Fuentes
<p>Para el desarrollo de este documento se acudió a consultar 11 referencias bibliográficas, de las cuales se señalarán cuatro de las más relevantes. El lector puede acudir a revisar la bibliografía en caso de querer observar con más detenimiento las referencias consultadas.</p> <p>Cárdenas, R. Parra, W. (2013), <i>Estudio de la métrica de Manhattan. Segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista</i>. Tesis de pregrado en licenciatura de matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia: Bogotá D.C.</p> <p>Coronel, A. (2010), <i>Transformaciones en el plano</i>. Alianza de Matemáticas y Ciencias del Turabo, Puerto Rico: Gurabo.</p> <p>Fuller, G. y Tarwater, D. (1999), <i>Geometría Analítica</i>, Séptima edición, Pearson Educación, México.</p> <p>Lehmann, C. (1978), <i>Geometría Analítica</i>. LIMUSA, México: Utheta.</p> <p>Montes, S. (2012), <i>Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego Pacman</i>. Trabajo para</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 3

optar como magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia, Colombia: Bogotá D.C.

Ramírez, J. (2007), *Una generalización de la transformación inversión respecto a la cónica elipse (Tesis pregrado)*. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Ramírez, J. y Rubiano, G. (2015), *A generalization of the spherical inversión. International Journal of mathematical Education (Science and Technology)*, Vol. 48 (1), 132-149.

Ramírez, J. Rubiano, G. Jurcic, B. (2015), *Generating fractal patterns by using p-circle inversión*. World Scientific, Vol. 23(4), 1550047.1-1550047.13.

Rubiano, G. (2010), *Topología general [Un primer curso]*. Editorial UN, Colombia: Bogotá.

Smogorzhevski, S. (1978), *Acerca de la Geometría de Lobachevski*. Lecciones populares de Matemáticas, Editorial MIR. Moscú.

Uzcátegui, C. (2013), *Los números reales y el infinito*. Uniandes, Colombia: Bogotá.

4. Contenidos


Primero se desarrolló una búsqueda bibliográfica para tener claridad en conceptos que se manejarían en el resto del trabajo (Capítulo 1: Marco Referencial), procedente a ello se estudia sobre la transformación T respecto a una elipse, teniendo como referencia la usual (Smogorzhevski, 1978) y la planteada por Ramírez (2007), que resulta ser el objetivo general, dentro de los objetivos específicos del trabajo está:

1. Generalizar la transformación T respecto a una elipse, para cualquier elipse.
2. Conjeturar y demostrar algunos hallazgos respecto a la transformación T respecto a la elipse.
3. Dejar expresadas en términos algebraicos o geométricos algunas de las transformaciones T de rectas y circunferencias.
4. Estudiar algunas propiedades de T .

El objetivo 1 está evidenciado en el capítulo 2 (Transformación T), y respecto a los objetivos 2 y 3, se encuentran evidenciados en el capítulo 3 (Transformación T aplicada a curvas) y finalmente el objetivo 4 se evidenciará en el capítulo 4 (Algunas características de la transformación T).

5. Metodología

Para realizar este trabajo, se aplicó una metodología coherente frente a lo que se quería estudiar, puesto que primero se indagó en la temática que se abordaría, todo lo referente a transformaciones e inversión, después se pasó a definir la transformación T en una elipse general, por construcción geométrica y algebraica (para la construcción algebraica se tuvo muy en cuenta el uso del software Derive para reducir cálculos grandes a medida que se iban hallando las generalidades), luego con ayuda del software Geogebra, se pasó a explorar transformaciones T de rectas y circunferencias para generar conjeturas y

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 3	

así mismo buscar la forma de demostrar tales curvas encontradas; finalmente después de la exploración y la actividad demostrativa se empezó a estudiar la transformación T como función, encontrando el dominio y el posible rango.

6. Conclusiones

Fue un trabajo que dejó vivenciar el hacer matemáticas en cuanto permitió explorar, conjeturar y demostrar; sin embargo al momento de demostrar se tuvieron dificultades que impidieron verificar formalmente diversas propiedades encontradas.

Luego de indagar si la transformación T era una inversión, se siguió investigando para descubrir propiedades que llevaron a resultados inesperados, extraños y a algunas formas conocidas.

Frente a los software que se mencionaron en el transcurso del trabajo: Geogebra y Derive, fueron sumamente importantes en este proceso, éstos, facilitaron y ayudaron a explorar, reducir cuentas y permitieron plantear conjeturas.

Se descubrió la generalización de la transformación T para el dominio establecido para esta transformación, además de plantear la construcción geométrica de la transformación para un punto interno a la elipse, se llegó a la conclusión de que la transformación T no es inversión bajo la definición 9 (Inversión usual). Al momento de estudiar las transformaciones de las rectas y las circunferencias se notó que bajo ciertas especificaciones en cada una, se transformarán en curvas conocidas, como elipses, circunferencias o hipérbolas, que llevaron a conclusiones sobre si se trataba de una transformación isométrica o no; finalmente se encontró que se trataba de una transformación no inyectiva, ni sobreyectiva (por supuesto tampoco biyectiva) para luego pasar a hablar finalmente del dominio de la función.

Elaborado por:	Figuerola Leguizamón, Lizeth Geraldin
Revisado por:	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús

Fecha de elaboración del Resumen:	23	02	2018
--	----	----	------



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN
DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: "**Una transformación inspirada en la inversión respecto a la elipse.**", elaborado por la estudiante:

Lizeth Geraldin Figueroa Leguizamón - código 2013140073
Cédula 1022408975

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **46** Puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna Meritoria Laureada

En constancia se firma a los 20 días del mes de febrero de 2018.

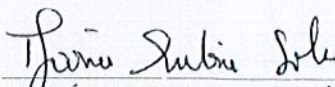
Director del Trabajo:

Profesor


ALBERTO DONADO NUÑEZ

Jurado:

Profesora


MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Índice general

LISTA DE FIGURAS	V
INTRODUCCIÓN	VIII
OBJETIVOS	IX
1. MARCO REFERENCIAL	1
1.1. Transformaciones	1
1.1.1. Función	1
1.1.2. Transformación en el plano cartesiano	2
1.2. Inversión	8
1.2.1. Inversión Usual	8
Construcción geométrica	8
Definiciones y teoremas	11
1.2.2. Inversión Elíptica	16
Construcción geométrica	16
Definiciones y teoremas	18
2. LA TRANSFORMACIÓN T	21
2.1. Construcción geométrica de la Transformación T	21
2.2. Construcción algebraica de la Transformación T	22
2.2.1. Construcción rectas tangentes a κ por A	22
2.2.2. Construcción rectas normales a las rectas tangentes por los puntos	
(x_o, y_o)	28

3. TRANSFORMACIÓN T APLICADA A CURVAS	33
3.1. ¿En qué se transforman las rectas?	33
3.2. ¿En qué se transforman las circunferencias?	40
3.2.1 Circunferencia cuyo centro coincide con el de la elipse	40
3.2.2 Circunferencia cuyo centro no coincide con el de la elipse	45
4. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA TRANSFORMACIÓN T	49
CONCLUSIONES	55
PROYECCIONES	56
BIBLIOGRAFÍA	57

Índice de figuras

1.1. Simetría Axial del punto A	3
1.2. Simetría Central del punto A respecto al punto M	4
1.3. Casos para la demostración de la isometría en la Rotación.	5
1.4. Rotación de un punto A respecto a un ángulo θ	6
1.5. Traslación de un punto A respecto a un vector	7
1.6. Similaridad del punto A a partir del segmento \overline{OM} y la constante k	7
1.7. Construcción del punto inverso de A (externo) parte uno	9
1.8. Construcción del punto inverso de A (externo) parte dos	9
1.9. Construcción del punto inverso de A (interno) parte uno	10
1.10. Construcción del punto inverso de A (interno) parte dos	10
1.11. Inversión de Un punto.	12
1.12. Inversa de la recta n donde $O \notin n$	13
1.13. Inversión de una circunferencia η donde $O \in \eta$	13
1.14. Circunferencias ortogonales	14
1.15. Circunferencias con $p = 1, 2, 4, \infty$	15
1.16. Inversión de la circunferencia q a través de la circunferencia k	16
1.17. Inversiones de las circunferencias con centro diferente al origen	16
1.18. Construcción del punto inverso de A bajo la elipse k parte uno	17
1.19. Construcción del punto inverso de A bajo la elipse κ parte dos	17
1.20. Inversión elíptica de la recta n tal que $O \notin n$	19
1.21. Inversión elíptica de una circunferencia q	19
1.22. Inversion Elíptica tridimensional de una esfera	20

2.1. Construcción geométrica Transformación \mathbf{T}	22
2.2. Dos valores en x_o por cada valor y_o	25
2.3. Zonas de la elipse	25
2.4. Zonas según coordenadas.	26
2.5. Zona de las rectas	27
3.1. Transformación \mathbf{T} de la recta m paralela al semieje mayor y ningún punto de la recta m está en la elipse o en su interior.	34
3.2. Transformación \mathbf{T} de la recta $y = 2$ respecto a la elipse t .	35
3.3. Transformación \mathbf{T} de la recta m paralela al semieje mayor con puntos de la recta m en la elipse o en su interior	37
3.4. Bajo la transformación \mathbf{T} la recta m , donde m no es paralela a uno de los ejes de la elipse k , y ningún punto de la recta m está en la elipse o en su interior.	38
3.5. Bajo la transformación \mathbf{T} la recta m , donde m no es paralela a uno de los ejes de la elipse k , y puntos de la recta m están en la elipse o en su interior.	38
3.6. La transformación T de la recta m que pasa por el centro de la elipse.	39
3.7. Transformación de la circunferencia e cuyo radio es b , bajo la elipse k .	41
3.8. Transformación \mathbf{T} de circunferencias con un radio r tal que $b < r < a + b$.	42
3.9. La circunferencia e , por medio de la transformación T , se convierte en una circunferencia.	42
3.10. Representación de la curva $\alpha(t)$ mencionada en el ejemplo 3.2.1.3 de la presente sección.	44
3.11. Transformación \mathbf{T} de la circunferencia e cuyo radio está restringido por $r > a + b$.	44
3.12. Parte del plano abarcado por la transformación \mathbf{T} cuando el radio de la circunferencia es un r tal que $0 < r < b$ o $0 < r < a$	45
3.13. Transformación \mathbf{T} de la circunferencia q con centro en O , donde O está en la recta que contiene a s .	46
3.14. Transformación \mathbf{T} de la circunferencia q con centro en O , donde O está en la recta que contiene a s y q tiene puntos en el interior de k .	46

3.15. Transformación \mathbf{T} de la circunferencia q con centro en O , donde O no está en la recta que contiene a s .	47
3.16. Transformación \mathbf{T} de la circunferencia q con centro en O , donde O no está en la recta que contiene a s y q tiene puntos en el interior de k .	47
3.17. Rastro de las curvas según su transformado \mathbf{T}	48
4.1. Transformación \mathbf{T} de tres puntos cuya imagen es la misma	50
4.2. Construcción transformación \mathbf{T} punto A interno a k . (Parte 1)	51
4.3. Construcción transformación \mathbf{T} punto A interno a k . (Parte 2)	51
4.4. Rango según la recta perpendicular m al eje x (Zona morada)	52
4.5. Rango según la recta m perpendicular al eje y (Zona morada)	53
4.6. La transformación \mathbf{T} de las elipse C mayores (en un intervalo de $-a < x < a$ y $-b < y < b$) a la elipse k de transformación, es el lugar geométrico presentado (Zona rosada)	54

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo es una exploración sobre la transformación \mathbf{T} como posible inversión respecto a la elipse. La idea de esta transformación surgió a partir de la inversión, que menciona Lobachevski en Smogorzhevski (1978), donde se reconoce que la inversión está relacionada con sus puntos de tangencia y el centro de la circunferencia. Partiendo de esta inversión cabe preguntarse qué sucedería si en vez de una circunferencia de inversión, fuese una elipse, así que se investiga que se ha realizado de inversión elíptica, donde aparece Ramírez (2007), él realiza una generalización de inversión respecto a la elipse, bajo toda esta información, se propone realizar una construcción diferente que me pueda llevar a ser una posible inversión, allí aparece la transformación \mathbf{T} , que asigna a cada punto del plano el corte de las normales provenientes de las tangentes a la elipse.

Luego de buscar todas las referencias necesarias para hablar de la inversión y transformación se procede a estudiar la transformación \mathbf{T} . Se construirá tal transformación desde la geometría, y a partir de esta se realizará la construcción algebraica, donde primero se llevará a cabo una generalización de la transformación elipse para cualquier elipse y luego se empieza a observar las transformaciones de algunos objetos geometricos, finalmente a partir de todo esto se estudiará la transformación \mathbf{T} como función, donde se observará el dominio y cómo se podría definir el codominio de la misma.

En resumen, lo que se verá de la transformación \mathbf{T} en este trabajo, será el estudio de \mathbf{T} como función, se observarán las propiedades que cumple y algunos lugares geometricos junto con demostraciones de algunos casos específicos de transformaciones \mathbf{T} de rectas y circunferencias.

OBJETIVOS

Objetivo General

Estudiar la transformación T , teniendo como referencia la inversión y la transformación inversión en la elipse.

Objetivos Especificos

1. Generalizar la transformación T respecto a una elipse, para cualquier elipse.
2. Conjeturar y demostrar algunos hallazgos respecto a la transformación T respecto a la elipse.
3. Dejar expresado en términos algebraicos o geométricos algunas de las transformaciones T de rectas y circunferencias.
4. Estudiar algunas propiedades de T .

Capítulo 1

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se expondrá sobre el concepto de transformación e inversión en el plano. Todo esto tomado como base de la investigación para el desarrollo de la transformación T que se trabajará a lo largo de este estudio.

1.1. Transformaciones

Se realizará una exposición de las transformaciones en el plano cartesiano -esto como contexto y fundamento de lo que se tratará más adelante-, para así pasar a la inversión usual¹ y la posible inversión a conocer. De la misma forma se definirá transformación, algunas propiedades y dónde se usan las transformaciones.

1.1.1. Función

Para presentar aclaraciones acerca de las transformaciones en el plano, es necesario comprender qué es función y los tipos de función que hay.

Definición 1 (Función): *Dados dos conjuntos A y B no vacíos, si a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B , se dice que esa correspondencia es una función f .*

¹Se le da el nombre de *inversión usual* de aquí en adelante a la inversión que menciona Lobachevski en su geometría.

El conjunto A recibe el nombre de dominio de la función f y el conjunto B codominio o rango de la función f . El subconjunto de los elementos de B que son imágenes de los elementos de A , se denomina el recorrido de la función f y se denota por $f(A)$. Hay tres tipos de funciones, definidas de la siguiente forma:

Definición 2 (Función Inyectiva): *Sea f una función de A en B . Sucede que f es inyectiva si dados $a, a' \in A$ con $a \neq a'$, se tiene que $f(a) \neq f(a')$.*

Definición 3 (Función sobreyectiva): *Sea f una función de A en B . Se dice que f es sobreyectiva si dado $b \in B$ existe algún $a \in A$ tal que $b = f(a)$.*

Definición 4 (Función biyectiva): *Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

1.1.2. Transformación en el plano cartesiano

Una transformación geométrica es aquella que logra convertir una figura en otra por medio de una(s) operación(es), es decir que una transformación t en el plano, es aquella que aplica una función $f : R^2 \rightarrow R^2$, donde a cada figura del plano en R^2 le corresponde una en el codominio R^2 ; bajo estas afirmaciones:

Definición 5 (Transformación): *Una transformación o función $t : S \rightarrow T$, de un conjunto S a un conjunto T no vacíos, es una regla t que asigna a cada elemento $p \in S$ un único elemento $t(p) \in T$, p se llama elemento original y $t(p)$ se llama elemento imagen.*

Con esta definición, se aclara que una transformación resulta ser una función. Dentro de las temáticas a tratar en el estudio de la transformación T , se mencionará la isometría como objeto guía para esclarecer diversas conjeturas, se definirá isometría y se mencionarán algunos ejemplos que la identifican.

Definición 6 (Isometrías): Sea t una transformación en un plano, P y Q puntos cualesquiera donde $t(P) = P'$ y $t(Q) = Q'$, t es una isometría si y sólo si $PQ = P'Q'$.

Se exponen algunos ejemplos de isometrías, tales como la Simetría Axial, la Simetría Central, la Rotación y la Traslación.

Ejemplo 1: (Simetría Axial): Sea una recta $m \in R^2$ y un punto $A \in R^2$, cada punto A del plano tiene una transformación t tal que $t(A) = A'$ y A' es simétrico Axial de A si y sólo:

1. Si $A \in m$ entonces $t(A) = A' = A$.
2. Si $A \notin m$ entonces m es mediatriz del segmento $\overline{AA'}$.

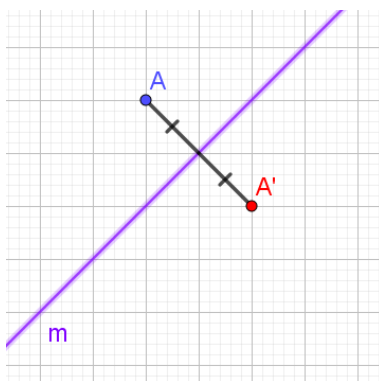


Figura 1.1: Simetría Axial del punto A

Demostración:

En el caso del inciso (1) se plantea que $A, B \in m$ con $t(A) = A' = A$ y $t(B) = B' = B$, es decir que $A' = A$ y $B' = B$, por ser el mismo punto se expone que $d(A, B) = d(A', B')$, por tanto cumple la isometría. Para el inciso (2) se plantea que $A, B \notin m$ donde además m es mediatriz de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, lo cual lleva a dos casos, donde están los cuadriláteros $\square ABB'A'$ y $\square AB'BA'$ y ambos resultan ser trapecios isósceles, de donde se concluye que $d(A, B) = d(A', B')$, por tanto es isometría.

□

Como se demostró, se preserva la distancia en esta transformación -tal como se estableció en la isometría-, teniendo en cuenta que la transformación aquí presentada tiene como vía

de transformación a la recta m , puede ir a la imagen [1.1](#) donde se especifica que la transformación t del punto A es A' bajo la recta m .

Ejemplo 2 (Simetría Central): Sea un punto M en un plano y un punto A en el mismo plano, el transformado t del punto A será A' , es decir $t(A) = A'$ si y sólo:

1. Si $M = A$ entonces $t(A) = M = A$
2. Si $M \neq A$ entonces M es punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

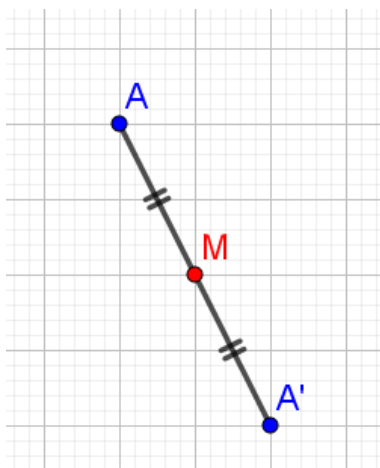


Figura 1.2: Simetría Central del punto A respecto al punto M

Demostración:

Dado un $A, B \in R^2$. En el inciso (1) por definición: $t(A) = M = A$ y $t(B) = M = B$ y $M = A = B$, siendo los mismos puntos, se concluye que $d(A, B) = d(A', B') = 0$, por tanto es isometría. En el caso del inciso (2) se plantea $M \neq A \neq B$ con $t(A) = A'$ y $t(B) = B'$, de donde se reconoce de manera inmediata que por definición y por congruencia de ángulos opuestos por el vértice se establece $\triangle AMB \cong \triangle A'MB'$ de donde se deduce que $d(A, B) = d(A', B')$ por tanto es también una isometría.

⊠

Para poder llevar a cabo la transformación se debe tener en cuenta el punto sobre el cual se hará la transformación, en el caso de la imagen [1.2](#) el punto sobre el cual se realizará la transformación, es el punto M .

Ejemplo 3 (Rotación): Sea $M \in R^2$ y θ un ángulo dirigido hacia el sentido contrario a las manecillas del reloj. Una rotación de ángulo θ con centro M , es una transformación que hace corresponder a cada punto A un punto $A' \in R^2$, tal que:

1. Si $M = A$ entonces $t(A) = M = A' = A$
2. Si $M \neq A$ entonces $AM = A'M$ y $m\angle AMA' = \theta$.

Demostración:

Se reconoce un $A, B \in R^2$. Para el ítem (1) por definición: $t(A) = M = A' = A$ y $t(B) = M = B' = B$, de dónde se deduce $d(A, B) = d(A', B') = 0$ dado que son el mismo punto, por tanto es isometría. Para el inciso (2) donde se especifica $M \neq A \neq B$, con la definición se obtiene $d(M, A) = d(M, A')$ con $m\angle AMA' = \theta$ y $d(M, B) = d(M, B')$ con $m\angle BMB' = \theta$. Aquí se presentan dos casos, tal como se expone en la imagen [1.3\(a\)](#), donde $\angle AMB < \theta$ y en la imagen [1.3\(b\)](#), donde $\angle AMB > \theta$. En el caso (a) se reconoce a $B \in \text{int}\angle AMA'$ y $A' \in \text{int}\angle BMB'$, en el caso (b) se observa a $A' \in \text{int}\angle AMB$ y $B \in \text{int}\angle A'MB'$, para llegar por ambos casos que $m\angle AMB = m\angle A'MB'$, deducir luego $\triangle AMB \cong \triangle A'MB'$ y finalmente concluir $d(A, B) = d(A', B')$, por tanto es isometría.

□

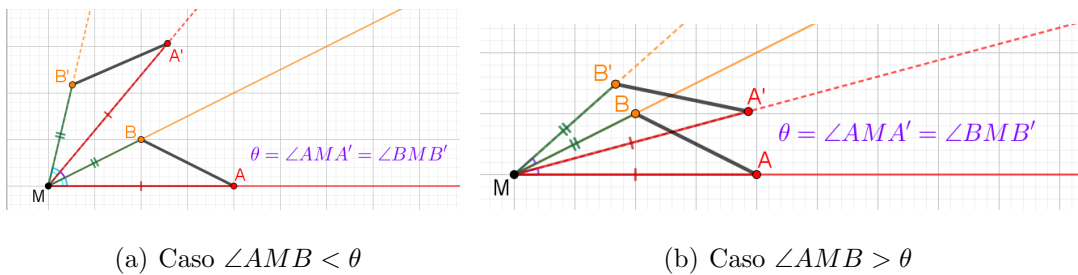


Figura 1.3: Casos para la demostración de la isometría en la Rotación.

Bajo la definición de Rotación se demuestra que mantiene la distancia como lo pide la isometría, según el punto que se escoga en el plano, se realiza la rotación especificada bajo un ángulo pedido. Tal como se muestra en la figura [1.4](#), se dice que $t(A) = A'$ respecto al punto M , cumpliendo la definición planteada.

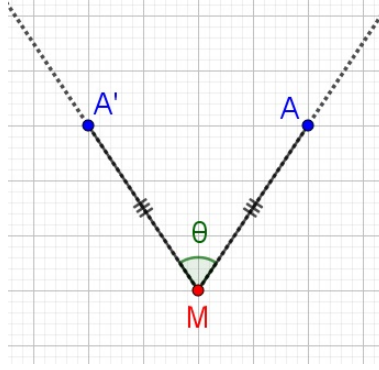


Figura 1.4: Rotación de un punto A respecto a un ángulo θ

Definición 7 (Traslación): Sea \vec{v} un vector del plano R^2 . Una traslación según \vec{v} es una transformación que hace corresponder a cada punto $A \in R^2$ un punto $A' \in R^2$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$. El vector \vec{v} se llama vector de traslación.

Demostración:

Dados $A, B \in R^2$ tal que $A \neq B$ y \vec{v} un vector en R^2 . Por la definición se tiene que $t(A) = A'$ y $t(B) = B'$ con $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{BB'} = \vec{v}$, al trazar \overline{AB} y $\overline{A'B'}$ se construye el cuadrilátero $\square ABB'A'$ que es paralelogramo por las características que cumplen los vectores iguales, bajo las propiedades del paralelogramo se concluye $d(A, B) = d(A', B')$ lo cuál implica que cumple la isometría.

⊠

En la traslación, para exponer que $t(A) = A'$, tiene que existir un vector \vec{v} que hará posible tal transformación, y dependiendo de la ubicación de los puntos A , aparecerá la traslación de los mismos; como se muestra en la figura 1.5, sucede $t(A) = A'$ respecto al vector \vec{v} .

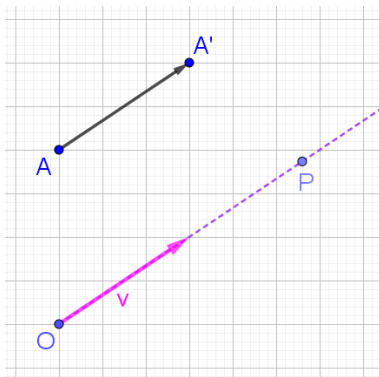


Figura 1.5: Traslación de un punto A respecto a un vector

Definición 8 (Similaridad): Sea \overline{OM} un segmento del plano y k ($k \neq 0$) un número real positivo. Una similaridad es una transformación que hace corresponder a cada punto A de α algún punto A' (a conveniencia) de α tal que $AA' = k \cdot OM$.

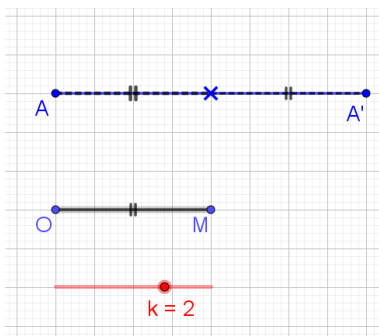


Figura 1.6: Similaridad del punto A a partir del segmento \overline{OM} y la constante k

En la definición 8 se puede notar que esta hace parte de una transformación no isométrica, puesto que ya no preserva la distancia, tal como se muestra en la figura [1.6](#), consiste en reproducir k veces el segmento \overline{OM} en el mismo plano, de tal forma que alcance una medida $\overline{AA'}$, se observa que el A' , varía según el k escogido. Otro ejemplo de una transformación no isométrica, es la homotecia.

Se han mencionado diversas transformaciones en el plano, es necesario reconocer qué es una transformación y así mismo comprender en qué se pueden ver estas transformaciones, tal como se presenta anteriormente; ahora, partiendo de las transformaciones, se acude a la inversión, tema orientador en este trabajo.

1.2. Inversión

La inversión fue introducida por L. J. Magnus en 1831 según Coxeter (1971), pero se menciona que Apolonio halló unos teoremas básicos de la inversión y Simón A. J L'Huller en 1808 mostró casos especiales de este teorema, así lo menciona Ramírez (2007); esto muestra que no hay claridad en el origen específico de la inversión, pero si ha sido claro que la investigación de ésta ha sido enriquecida con el paso del tiempo, e incluso ha sido usada para la solución de proposiciones en la teoría de elasticidad por Heves en 1969 (Ramírez, 2007).

Se presentará información general de la Inversión Usual², qué se ha estudiado en ésta, se tratarán algunos de los teoremas -sin adentrarnos en su teoría formal-, que han surgido a partir de la inversión usual e incluso las investigaciones que han aparecido con el paso del tiempo partiendo de la inversión usual.

1.2.1. Inversión Usual

Se explicará la construcción de un punto inverso para cualquier punto del plano, y a partir de esta construcción se establecerá su definición formal y algunas propiedades de la misma.

Construcción geométrica

La construcción geométrica depende del punto que se invertirá y una circunferencia en específica que hará el papel de circunferencia de inversión, se plantea entonces la construcción según la ubicación del punto que se invertirá, es decir, tal que el punto esté externo o interno a la circunferencia de inversión. Se llevará a cabo la construcción de ambos casos.

Inverso por el Punto A externo a la circunferencia κ : Dada la circunferencia κ con radio r y centro en O y un punto A externo a ella en el mismo plano. Se trazan las rectas n y m tangentes a la circunferencia κ por A , tal como muestra la figura [1.7](#) y se nombra $\{X_1\} = m \cap \kappa$ y $\{X_2\} = n \cap \kappa$.

²Tal como se mencionó en la pagina 1, se le dará el nombre de inversión usual a la inversión trabajada por Lobachevski en su geometría.

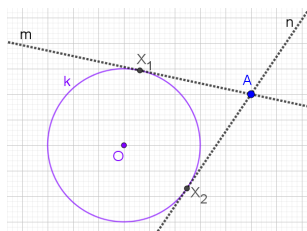


Figura 1.7: Construcción del punto inverso de A (externo) parte uno

Se traza el segmento $\overline{X_1X_2}$ y el rayo \overrightarrow{OA} , tal como lo muestra en la figura 1.8, y procedente a ello se plantea que $\{A'\} = \overline{X_1X_2} \cap \overrightarrow{OA}$.

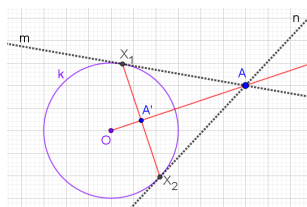


Figura 1.8: Construcción del punto inverso de A (externo) parte dos

Se expone ahora la demostración de que el ángulo³ $\angle X_1A'A$ es recto, teniendo en cuenta todos los datos de la construcción que ya se realizó.

Demostración:

Se reconoce que las rectas n y m son tangentes a la circunferencia κ , por tanto los ángulos $\angle OX_1A$ y $\angle OX_2A$ son rectos.

Se sabe que $\overline{OX_1} \cong \overline{OX_2}$ puesto que $OX_1 = OX_2 = r$, se traza el segmento \overline{OA} que es congruente con sí mismo y teniendo en cuenta que $m\angle OX_1A = m\angle OX_2A = 90$, se llega a $\triangle OX_1A \cong \triangle OX_2A$.

Ahora, se traza el segmento $\overline{X_1X_2}$, como $\triangle OX_1A \cong \triangle OX_2A$, y por construcción se sabe que $O - A' - A$, entonces $\angle X_1OA' \cong \angle OX_2A'$, para llegar a $\triangle OX_1A' \cong \triangle OX_2A'$.

Se deduce que $m\angle X_1A'A = 90$, por par lineal y congruencia de sus ángulos, por tanto $\angle X_1A'A$ es recto y queda demostrada tal perpendicularidad.

⊠

³El ángulo que se mencionará se puede notar en la figura 1.8

Partiendo de esta perpendicularidad, se puede deducir que $\triangle OX_1A' \sim \triangle OX_1A$ de donde se establece que $\frac{OX_1}{OA'} = \frac{OA}{OX_1}$, por tanto se llega a $(OX_1)^2 = OA' \cdot OA$. Observe que OX_1 es el radio de la circunferencia κ , eso quiere decir que $OA' \cdot OA = r^2$.

Ahora cabe preguntarse si se puede construir el inverso por un punto interior a κ .

Inverso por el Punto A interno a la circunferencia κ : Dada la circunferencia κ con radio r , centro en O y un punto A en el interior de la circunferencia κ en el mismo plano, se traza el rayo \overrightarrow{OA} y una recta m perpendicular al mismo por el punto A , es decir que $m \perp \overrightarrow{OA}$ y $\{A\} = m \cap \overrightarrow{OA}$, ahora se nota que $m \cap \kappa = \{X_1, X_2\}$, tal como lo muestra la figura 1.9.

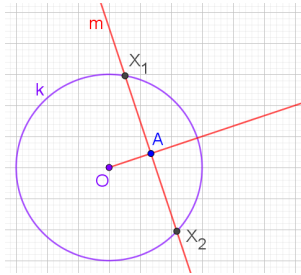


Figura 1.9: Construcción del punto inverso de A (interno) parte uno

Ahora se construyen los segmentos $\overline{OX_1}$ y $\overline{OX_2}$, se procede a trazar las rectas s y t , tal que $s \perp \overline{OX_1}$ por el punto X_1 y que $t \perp \overline{OX_2}$ por el punto X_2 ; finalmente4 se concluye que $s \cap t = \{A'\}$, tal como lo muestra la figura 1.10, es decir que A' será el inverso del punto A .

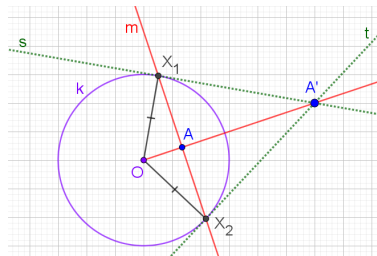


Figura 1.10: Construcción del punto inverso de A (interno) parte dos

⁴Resultan las rectas s , t y el rayo \overrightarrow{OA} concurrir en el punto A' , pero será algo que no se demostrará en este trabajo.

Definiciones y teoremas

Bajo la construcción anterior se ha llegado a la definición de inversión usual, donde plantea un producto que genera una constante:

Definición 9 (Inversión Usual): *Dada una circunferencia κ con centro en O y radio r en un plano. Sea un punto A diferente de O en el mismo plano, en la semirrecta \overrightarrow{OA} hay un punto A' , tal que A' es inverso de A si y sólo si $OA \cdot OA' = r^2$. Se notará $i(A) = A'$ donde i hace referencia a la inversión.*

Dentro de las generalizaciones⁵ que se han realizado a través del tiempo, se llegó a que para cada punto $A(x, y)$ en el plano, y dada la circunferencia κ de radio r y centro en $O(a, b)$, el inverso del punto A es A' , donde:

$$i(x, y) = \left(a + \frac{(x - a)r^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, b + \frac{(y - b)r^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \right)$$

Al observar las figuras 1.8 y 1.10, se puede observar que en esta inversión todos los puntos A del plano externos a la circunferencia κ , al hallar su inverso A' , este resulta estar en el interior de la circunferencia; mientras que los puntos A del plano internos a la circunferencia κ , el inverso A' estará en el exterior de la circunferencia κ .

Esto cobra sentido cuando usamos una circunferencia κ centrada en $O(0, 0)$ con radio r y teniendo un punto $A(x, y)$, usando la generalidad presentada en 8, se plantean las siguientes conjeturas:

1. Si $x^2 + y^2 < r^2$ entonces $\frac{x^2 r^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 r^4}{(x^2 + y^2)^2} > r^2$.

Para demostrarla suponemos que:

$$\frac{x^2 r^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 r^4}{(x^2 + y^2)^2} < r^2$$

⁵La información que se leerá a continuación puede ser corroborada en Ramírez, Rubiano y Jurcic (2015).

de donde se deduce que $(x^2 + y^2)r^4 < r^2(x^2 + y^2)^2$ para llegar a $r^2 < (x^2 + y^2)$, pero esto contradice nuestro antecedente, luego $\frac{x^2r^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2r^4}{(x^2+y^2)^2} > r^2$ y queda demostrado.

2. Si $x^2 + y^2 > r^2$ entonces $\frac{x^2r^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2r^4}{(x^2+y^2)^2} < r^2$.

Se demuestra de manera análoga a la primera conjetura.

Así queda demostrado que los puntos externos a la circunferencia κ se van al interior, y los puntos internos a la misma, se van al exterior de la circunferencia κ .

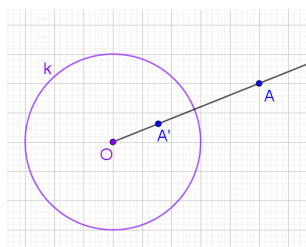


Figura 1.11: Inversión de Un punto.

Si quiere observar más detalladamente la inversión de un punto como la presentada en la figura 1.11 y el cumplimiento de las conjeturas que se presentaron puede ingresar a <https://ggbm.at/Dra5pcvb>.

Aquí es importante reconocer que quién realiza tal inversión es la circunferencia κ , ahora ¿por qué llamarlo inversión?, en el caso específico en que $r = 1$, resultaría $OA \cdot OA' = 1$, lo cual implicaría que OA' es el inverso de OA .

Se puede preguntar en que se invierten algunos objetos matemáticos, dentro de ello están las rectas y las circunferencias, el estudio de estas inversiones ya está escrito y demostrado⁶, sin embargo se mencionará algo de ello.

Inversión de Rectas: Dada la circunferencia κ con centro en O y radio r .

1. Para las rectas n tal que $O \in n$, se cumple que $i(n) = m$ y $m = n$.
2. Para las rectas n tal que $O \notin n$, se cumple que $i(n) = \eta$ y η es una circunferencia con $O \in \eta$.

⁶Puede leerlo en la geometría de Lobachevski o en Ramírez (2007).

En la figura [1.12](#) se puede notar que el punto A que recorre la recta n se transforma en la circunferencia conformada por el recorrido A' , indicando que $i(A) = A'$. Puede entrar al link <https://ggbm.at/kQTaHx7j> y explorar la inversión de tales rectas.

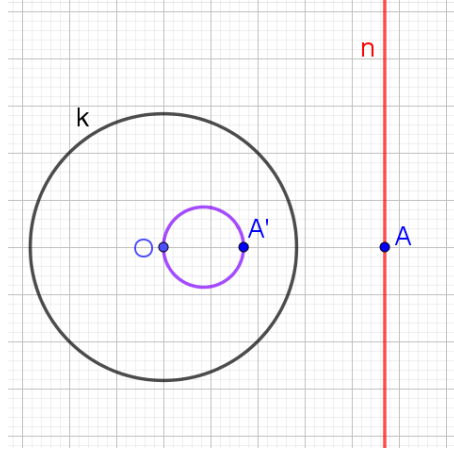


Figura 1.12: Inversa de la recta n donde $O \notin n$

Ahora se presentará la inversión de circunferencias, bajo algunas propiedades que se mencionan en la Geometría de Lobachevski.

Inversión de Circunferencias: Dada la circunferencia κ de inversión con centro en O y radio r .

1. Para la circunferencia η donde $O \in \eta$, su inversión será una recta n , tal que $O \notin n$.
2. Para la circunferencia η donde $O \notin \eta$, su inversión será una circunferencia.

Hay propiedades dentro de esta teoría que se omitirá, dado que no es el objetivo principal, pero se presentará una de ellas, relacionado con las circunferencias ortogonales.

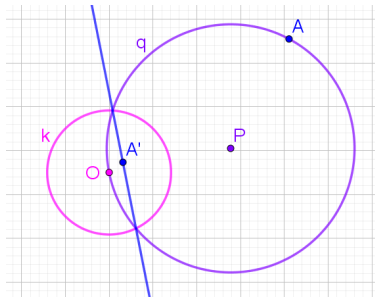


Figura 1.13: Inversión de una circunferencia η donde $O \in \eta$

Teorema 1: Circunferencias Ortogonales): *Dada una circunferencia η y la circunferencia κ en un mismo plano, si los puntos $A, A' \in \eta$, tal que A y A' son simétricos respecto a la circunferencia κ de inversión, entonces κ y η son ortogonales (Smogorzhevski, 1978).*

Se le llama circunferencias ortogonales a aquellas que las tangentes a cada una de ellas que pasa por el centro de las mismas, son perpendiculares entre si, tal como se muestra en la figura [1.14](#)

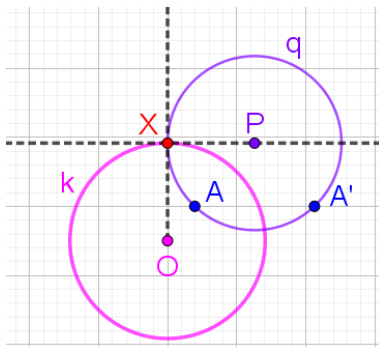


Figura 1.14: Circunferencias ortogonales

Inclusive, se ha llegado a estudiar la inversión usual en unas métricas diferentes a la usual, hay que recordar la métrica del taxista⁷ y observar que ha surgido a partir de esta.

Definición 10 (Métrica)⁸: *Una métrica d para un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow R \geq 0 = [0, \infty)$ —toma valores en los números reales positivos— que satisface las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$:*

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.⁹
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Hay diferentes métricas, mencionando unas conocidas, está la métrica del taxista y la métrica usual; se puede hablar de una "p-distancia", donde se define:

⁷Si se quiere reconocer o saber más información de esta métrica, puede leer en Cardenas y Parra (2013), de donde se estudia la métrica del taxista de manera detallada.

⁸Información tomada de Rubiano (2010, p.28)

⁹Donde d denota la distancia.

Definición 11 (p-distancia): Para $p \geq 1$, la p -distancia de $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^2$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^2$ se define como:

$$d(x_n, y_n) = [(x_1 - x_2)^p + (y_1 - y_2)^p + \dots + (x_{n-1} - x_n)^p + (y_{n-1} - y_n)^p]^{1/p}$$

$$d(x_n, y_n) = \left[\sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^p + (y_i - y_{i-1})^p \right]^{1/p}$$

Cada una de estas p -distancias con $p \geq 1$ son métricas bajo la definición 10, se omite la demostración de que esta distancia es efectivamente métrica para cualquier p mayor o igual a 1, ya que no es algo en lo que se quiera indagar.

Usando la definición 11 se conoce que la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, bajo la métrica del taxista sabiendo que $p = 1$ está definida como $d(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ y la métrica usual donde $p = 2$ se dice entonces que $d(A, B) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$

Bajo circunstancias de la definición 11, se expone que la circunferencia κ de inversión, con centro en $O(a, b)$ y radio r , un número $p \geq 1$, se cumple que $(|x - a|^p + |y - b|^p)^{1/p} = r^2$ y se representan tal como se muestra en la figura [1.15](#).

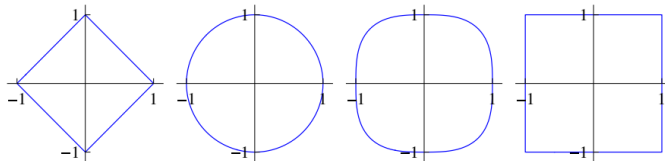


Figura 1.15: Circunferencias con $p = 1, 2, 4, \infty$

Ahora observemos un ejemplo de inversión teniendo en cuenta la definición 11; se tiene una circunferencia κ de inversión con $p = 1$ y centrada en O , se realiza una circunferencia η de radio $\frac{1}{2}$ con $p = 2$, centrada en O y con $p = 2$; ahora se halla la inversión de la circunferencia η respecto a la circunferencia κ , que resulta ser la estrella roja que aparece en la imagen [1.16](#).

¹⁰La información que se muestra en el presente párrafo junto con los siguientes que mencionan la inversión en otras métricas, junto con las imágenes presentadas de esta información (Imágenes [1.15](#), [1.16](#) y [1.17](#)), ha sido tomado de Ramírez, Rubiano y Jurcic (2015).

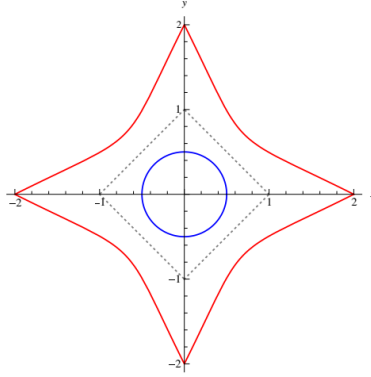


Figura 1.16: Inversión de la circunferencia q a través de la circunferencia k

Y si se tiene una circunferencia κ de inversión centrada en $(0, 0)$ con $p = 1$, se realiza una circunferencia η de radio $\frac{1}{2}$, centrada en $(1, 0)$ con $p = 2$, al hallar la inversión respecto a κ , aparecen figuras como lo que surge en la imagen [1.17](#).

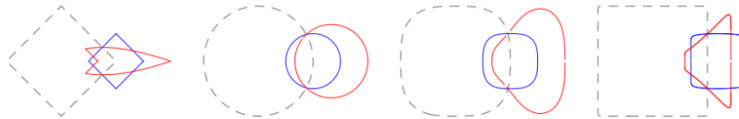


Figura 1.17: Inversiones de las circunferencias con centro diferente al origen

Sin adentrarse a investigar más sobre la inversión usual, se pasa a conocer una nueva inversión, bajo la misma definición de inversión usual, pero ya no será una circunferencia de inversión, sino una elipse de inversión.

1.2.2. Inversión Eliptica

Construcción geométrica

Esta inversión fue estudiada por Ramírez (2007), de aquí en adelante se presentarán fragmentos de los resultados que obtuvo en su trabajo.

Inverso por el Punto A externo a la elipse κ : Dada la elipse κ con centro en O y un punto A externo a ella en el mismo plano. Se trazarán las rectas n y m tangentes a la elipse κ , tal como muestra la figura [1.18](#) y se nombrará $\{X_1\} = m \cap \kappa$ y $\{X_2\} = n \cap \kappa$.

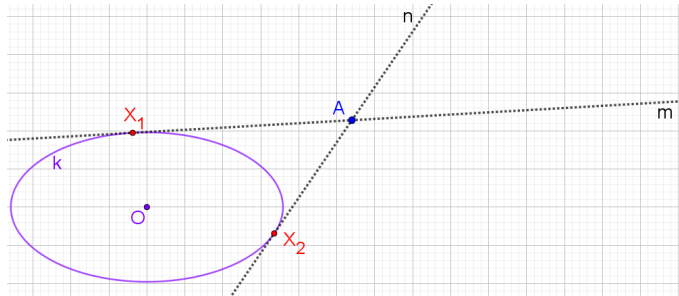


Figura 1.18: Construcción del punto inverso de A bajo la elipse k parte uno

Hay que recordar que para un punto (c, d) externo a la elipse κ expresada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sólo pasan dos tangentes, esto sucede dado que todas las posibles tangentes de la elipse κ tienen como pendiente $m = -\frac{b^2x}{a^2y}$ y bajo la definición de punto pendiente obtenemos $(y-d) = \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)(x-c)$,¹¹ de donde se llega a $a^2y^2 - (a^2d)y + b^2x(x-c) = 0$ y se reconoce de inmediato que hay sólo dos posibles soluciones en y por la solución cuadrática. En conclusión sólo hay dos tangentes por un punto externo a la elipse.

Luego se traza el segmento $\overline{X_1X_2}$ y el rayo \overrightarrow{OA} , y el punto A' será: $\{A'\} = \overline{X_1X_2} \cap \overrightarrow{OA}$; donde se identifica a A' como el inverso del punto A , bajo la elipse κ , tal como se muestra en la figura [1.19](#).

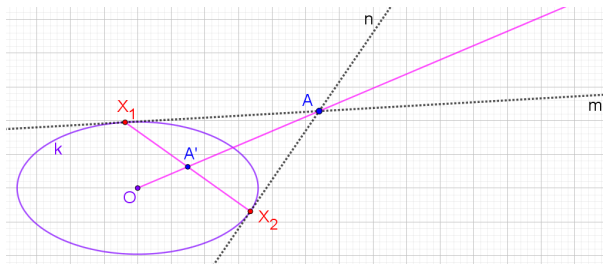


Figura 1.19: Construcción del punto inverso de A bajo la elipse κ parte dos

Se puede notar que la construcción que se presenta en la inversión elíptica está relacionada con la inversión usual, cabe preguntarse si cumple las mismas propiedades que la inversión usual.

¹¹La letra y en este caso hace referencia a la coordenada y de los puntos de tangencia en la elipse κ .

Definiciones y teoremas

Bajo la construcción que se presentó y la definición 9, se construyó la definición 12, teniendo en cuenta que se buscaba seguir el hilo de la inversión usual.

Definición 12 (Inversión Elíptica): *Dada una elipse κ con centro en O y un punto $A \neq O$ en el plano, sea $\{Q\} = k \cap \overrightarrow{OA}$; A' es el inverso de A respecto a la elipse κ si y sólo si se cumple que $OA' \cdot OA = (OQ)^2$.*

Efectivamente Ramírez (2007) demuestra que la inversión elíptica cumple la definición de inversión usual, además de ello, muestra en coordenadas cartesianas que para cualquier punto del plano $A(u, v)$, con el semieje menor b y semieje mayor a en la elipse k de inversión decimos que:

$$t(u, v) = \left(\frac{a^2 b^2 u}{b^2 u^2 + a^2 v^2}, \frac{a^2 b^2 v}{b^2 u^2 + a^2 v^2} \right)$$

Se presentarán algunas inversiones de las rectas y las circunferencias en la inversión elíptica, donde asegura Ramírez (2007) que la inversión elíptica cumple de manera analoga, las mismas propiedades que la inversión usual, pero serán detalles que no se especificarán en este trabajo; sin embargo, se exponen applets donde se podrá visualizar algunos de los resultados de su estudio.

Inversión elíptica de Rectas: Dada la elipse κ de inversión con centro en O .

1. Si la recta n cumple que $O \in n$ entonces $i(n) = n$, es decir que su inversión es la misma recta.
2. Si la recta n cumple que $O \notin n$ entonces la recta n se transforma en una elipse η tal que $O \in \eta$.

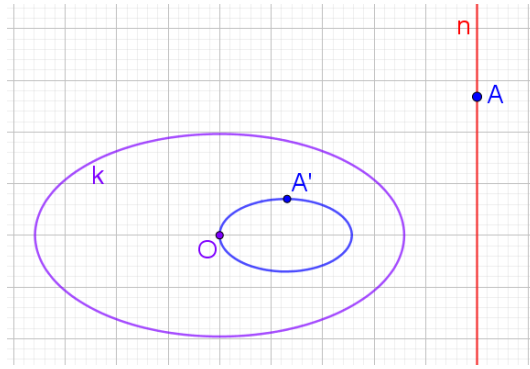


Figura 1.20: Inversión elíptica de la recta n tal que $O \notin n$

Al igual que con la inversión usual, es de notar que la inversión depende directamente de si la recta n pasa o no por el centro de la elipse, en el siguiente link <https://ggbm.at/R7ef5yQE> puede explorar tales inversiones.

De manera analoga, veremos en qué se invierten las circunferencias.

Inversión Elíptica de Circunferencias: *Dada la elipse k de inversión con centro en O y la circunferencia q tal que esta circunferencia esta en el mismo plano, la inversión de esta circunferencia no pasa por O .*

En la figura [1.21](#) se puede ver un ejemplo de una circunferencia q y su inversión elíptica, si quiere explorar como actua esta inversión en la elipse puede ingresar a <https://ggbm.at/GJj6t2aY>.

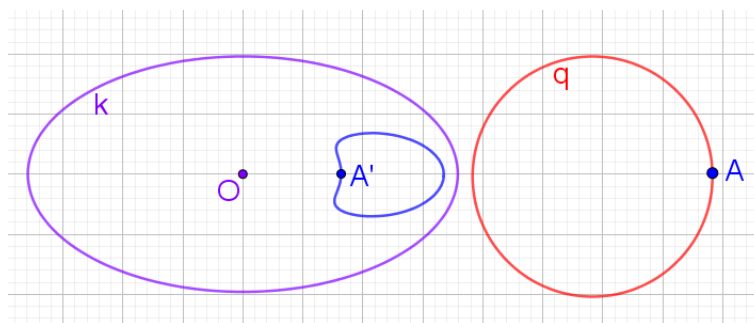


Figura 1.21: Inversión elíptica de una circunferencia q

Esta inversión ha llegado tan lejos que se ha podido estudiar de ella no en un plano, sino en el espacio, redefinir la inversión usual y la inversión elíptica para el espacio, cosa que han

venido realizando Ramírez y Rubiano (2017) y se pueden presentar entonces inversiones en el espacio de figuras tridimensionales, que aparezcan imagenes como en la figura¹² 1.22.

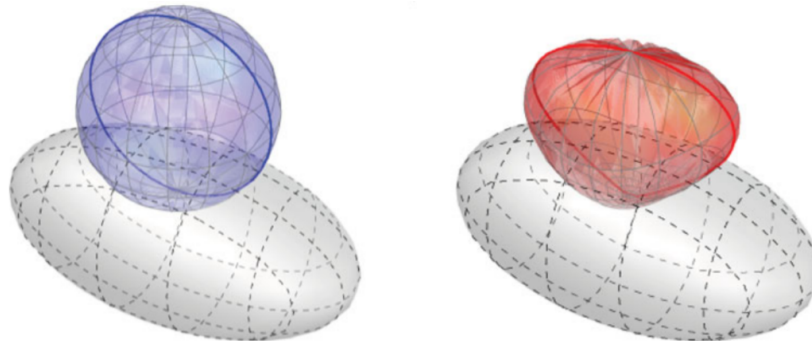


Figura 1.22: Inversion Eliptica tridimensional de una esfera

Se puede observar que en la inversión usual, la inversión de ciertas rectas era una circunferencia, se decía que las rectas se irían en circunferencias, pero en el caso de inversión elíptica, donde el objeto de inversión es una elipse, la recta se convierte en elipse, esto podría llevar a pensar que si cambiamos el objeto de inversión a una parábola, probablemente la inversión de una recta pueda resultar ser una parábola; pero no es algo en lo que se adentrará a investigar, sólo es una hipótesis con poco fundamento; la gran pregunta sería qué pasaría si se cambia la construcción de inversión y se trata de observar si tal construcción lleva a una transformación que podría ser una posible inversión.

¹²Esta información y la imagen presentada aquí se ha tomado de Ramírez y Rubiano (2017).

Capítulo 2

LA TRANSFORMACIÓN T

Al momento de construir la transformación T se tuvo en cuenta las tangencias, ya que son de suma importancia en la inversión usual y elíptica, se notó que si se realizan tales tangencias en una circunferencia y las normales por los puntos de tangencia, cualquier punto del plano sería enviado inmediatamente al centro de la circunferencia, pero en una elipse, esto no pasaría, pensando de esta forma se plantea la siguiente construcción.

2.1. Construcción geométrica de la Transformación T

Se construye una elipse

$$\kappa : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ con } a \neq b, b \neq 0, a \neq 0 \quad (2.1.1)$$

con un punto A en el plano fuera de la elipse, tal como se muestra en la figura [2.1](#).

Se construyen ahora las rectas tangentes l y m a la elipse que pasen por el punto A . Sea $l \cap \kappa = \{B\}$ y $m \cap \kappa = \{C\}$, tal como se muestra en la figura [2.1](#).

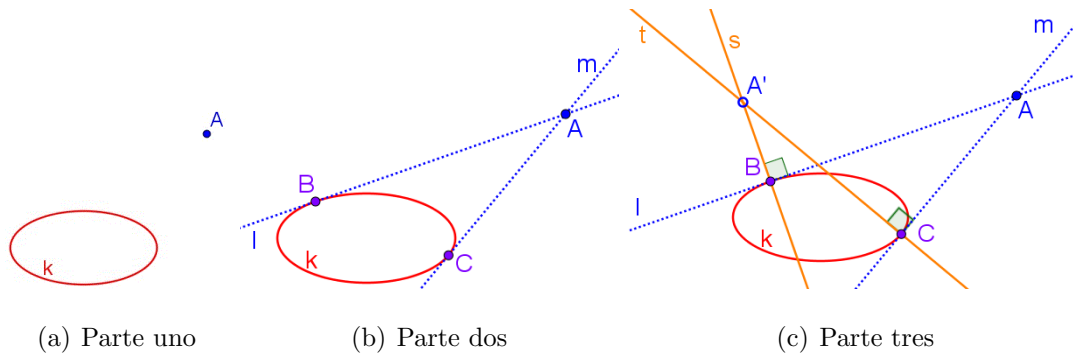


Figura 2.1: Construcción geométrica Transformación T

Luego, sea $s \perp l$ por B y $t \perp m$ por C y el punto $\{A'\} = s \cap t$, este punto A' , resultante de la intersección entre perpendiculares, es la imagen de A bajo la transformación T respecto a la elipse κ , es decir que $T(A) = A'$ tal como muestra la figura 2.1.

2.2. Construcción algebraica de la Transformación T

Ya se encontró cuál es la transformación del punto A bajo T por medio de la construcción geométrica, ahora, se realizará la misma construcción, pero algebraicamente, para encontrar a la transformación T de un punto del plano $A(x, y)$, es decir hallar $A'(x', y')$.

2.2.1. Construcción rectas tangentes a κ por A

Se tiene una elipse κ , cuya ecuación está dada por 2.1.1, y sea un punto $A(c, d) \notin \kappa$ con sus respectivas coordenadas en el plano.

Las rectas tangentes, pasarán por (c, d) y los puntos (x_o, y_o) tal que $(x_o, y_o) \in \kappa$, es decir que (x_o, y_o) son los puntos de tangencia.

Siendo así, las rectas tangentes tendrán como pendiente:

$$m_t = \frac{d - y_o}{c - x_o} \quad (2.2.1)$$

¹De aquí en adelante se notará cualquier transformación realizada por T en un conjunto x , como $T(x) = x'$.

A partir de la derivada de la ecuación (2.1.1) surge:

$$2a^2x + 2b^2yy' = 0$$

$$-b^2yy' = a^2x$$

$$y' = -\frac{a^2x}{b^2y} \quad (2.2.2)$$

Se sabe que la ecuación (2.2.1) es igual a la ecuación (2.2.2), entonces:

$$\frac{d - y_o}{c - x_o} = -\frac{a^2x_o}{b^2y_o}$$

$$b^2y_o(d - y_o) = a^2x_o(x_o - c)$$

$$b^2dy_o - b^2y_o^2 = a^2x_o^2 - a^2cx_o$$

$$a^2x_o^2 - a^2cx_o^2 - b^2dy_o + b^2y_o^2 = 0$$

$$x_o = \frac{a^2c \pm \sqrt{a^4c^2 - 4(a^2)(-b^2dy_o + b^2y_o^2)}}{2a^2}$$

$$x_o = \frac{a^2c \pm \sqrt{a^4c^2 + 4a^2b^2dy_o + 4a^2b^2y_o^2}}{2a^2}$$

$$x_o = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^2(a^2c^2 + 4b^2dy_o + 4b^2y_o^2)}}{2a^2}$$

$$x_o = \frac{ac \pm \sqrt{a^2c^2 + 4b^2y_o(d + y_o)}}{2a} \quad (2.2.3)$$

Se hallará ahora y_o a partir de la ecuación (2.2.3) y (2.1.1), obteniendo así:

$$a^2 \left(\frac{ac \pm \sqrt{a^2c^2 + 4b^2y(d + y)}}{2a} \right)^2 + b^2y_o^2 = a^2b^2$$

Se usa el software Derive 6 para resolver esta ecuación y dejar la variable y_o en términos de a, c, b, d , resulta:

$$y_o = \frac{a^2(b^2d \pm c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2})}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.4)$$

De y_o aparece y_1 y y_2 , teniendo en cuenta que:

$$y_1 = \frac{a^2(b^2d - c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2})}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.5)$$

$$y_2 = \frac{a^2(b^2d + c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2})}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.6)$$

Ahora sustituyo en la ecuación [2.1.1](#) en la ecuación [2.2.4](#) para dejar la variable x_o en términos de a, b, c, d , resulta:

$$a^2x_o^2 + b^2 \left(\frac{a^2(b^2d \pm c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2})}{a^2c^2 + b^2d^2} \right)^2 = a^2b^2$$

Nuevamente se usa el software Derive 6 para resolver esta ecuación, resultan 4 posibles resultados para x_o , donde x_1 y x'_1 son valores establecidos por y_1 y los valores x_2 y x'_2 son valores establecidos por y_2 :

$$[7] \ x_1 = + \frac{b^2 \sqrt{2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.7)$$

$$[7] \ x'_1 = - \frac{b^2 \sqrt{2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.8)$$

$$[8] \ x_2 = + \frac{b^2 \sqrt{-2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.9)$$

$$[8] \ x'_2 = - \frac{b^2 \sqrt{-2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.10)$$

Esto tiene sentido, puesto que en la elipse κ (ecuación [2.1.1](#)), para cada valor de y_o existen 2 valores en x_o , tal como muestra la figura [2.2](#):

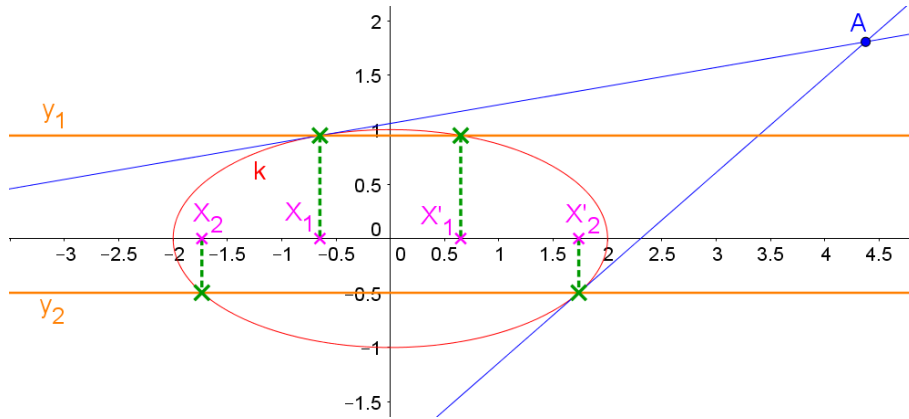


Figura 2.2: Dos valores en x_o por cada valor y_o

Para encontrar los puntos x_o adecuados de cada valor y_o , será necesario dividir en zonas el plano cartesiano, identificando que según la posición del punto $A(c, d)$, le corresponden determinados (x_o, y_o) .

Primero se notarán las zonas en la elipse, tal como se muestra en la figura [2.3](#):

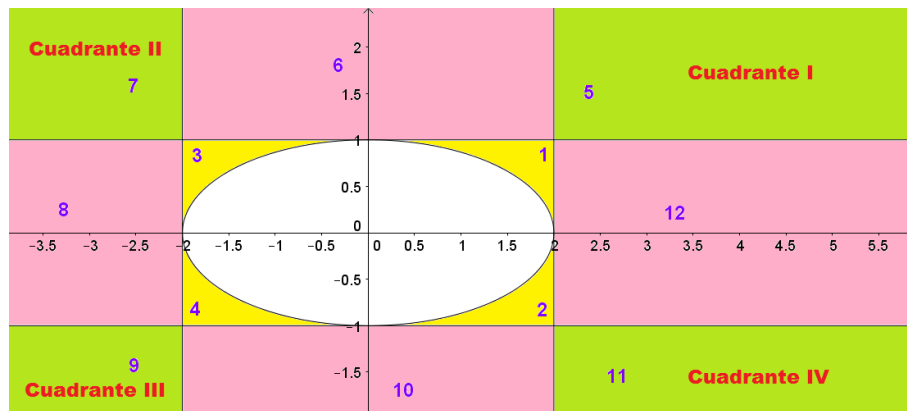


Figura 2.3: Zonas de la elipse

Se identifica que cuando el punto A se encuentra en determinada zona que se especifica en la figura [2.3](#), los puntos de tangencia tendrán determinada coordenada:

- Si el punto A se encuentra en la zona 1, 2 y 12 entonces los puntos tangentes tendrán coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2)
- Si el punto A se encuentra en la zona 3, 4 y 8 entonces los puntos tangentes tendrán coordenadas (x'_1, y_1) y (x'_2, y_2)

- Si el punto A se encuentra en la zona 5, 6 y 7 entonces los puntos tangentes tendrán coordenadas (x_1, y_1) y (x'_2, y_2)
- Si el punto A se encuentra en la zona 9, 10 y 11 entonces los puntos tangentes tendrán coordenadas (x'_1, y_1) y (x_2, y_2)

Siendo así, se clasificarán ahora las zonas según las coordenadas de los puntos tangentes, se concluye que las zonas serán tal como se muestra en la figura [2.4](#).

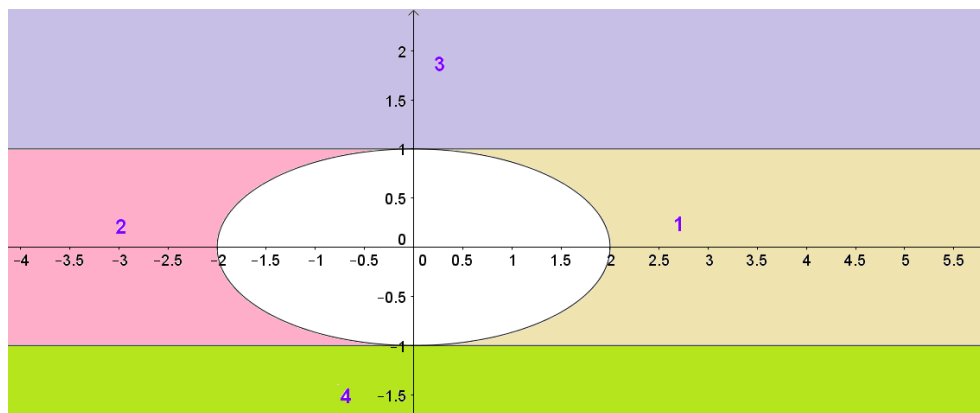


Figura 2.4: Zonas según coordenadas.

Donde el punto A que se ubique en:

- La zona 1 los puntos tangentes tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2)
- La zona 2 los puntos tangentes tienen coordenadas (x'_1, y_1) y (x'_2, y_2)
- La zona 3 los puntos tangentes tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x'_2, y_2)
- La zona 4 los puntos tangentes tienen coordenadas (x'_1, y_1) y (x_2, y_2)

Puede explorar en el siguiente link <https://ggbm.at/XHY2jBTh> las ecuaciones y el funcionamiento de los puntos tangentes según la zona.

Si el punto A se ubica en algunas de las semirectas h, i, j, k representados en la figura [2.5](#) se tiene lo siguiente.

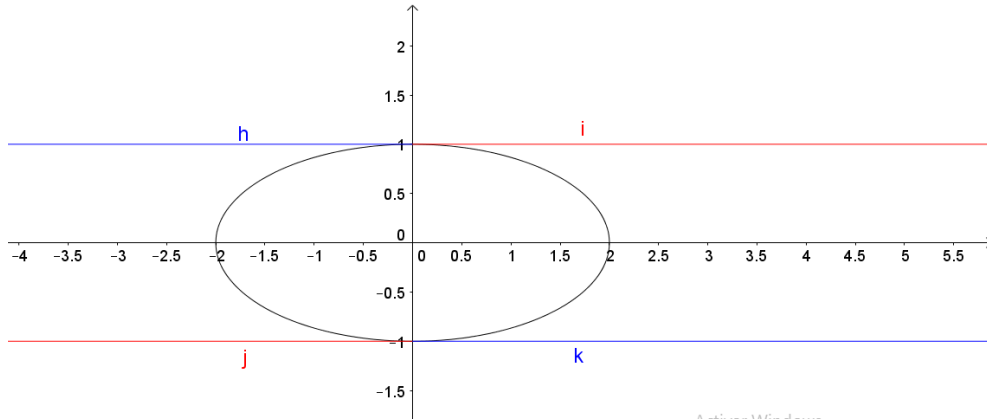


Figura 2.5: Zona de las rectas

Para el punto A ubicado en:

- La semirecta i se tienen los puntos tangentes con coordenadas $(x_2, y_2) = (x'_2, y_2)$ y (x_1, y_1)
- La semirecta j se tienen los puntos tangentes con coordenadas $(x_2, y_2) = (x'_2, y_2)$ y (x'_1, y_1)
- La semirecta h se tienen los puntos tangentes con coordenadas $(x_1, y_1) = (x'_1, y_1)$ y (x'_2, y_2)
- La semirecta k se tienen los puntos tangentes con coordenadas $(x_1, y_1) = (x'_1, y_1)$ y (x_2, y_2)
- En el eje y sin el intervalo $[a, -a]$, se tendrán las tangentes con coordenadas:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ y } (x'_1, y_1) = (x'_2, y_2)$$

Así pues concluimos que sólo hay 4 coordenadas para los puntos tangentes, se hallarán las 4 pendientes de estas.

Cabe hacerse la pregunta, ¿Existe una forma diferente, donde los posibles puntos de tangencia no dependan de la zona donde se encuentra el punto externo a la elipse? La respuesta es NO, dado que si suponemos que para cualquier recta $y = mx + b$ tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, le corresponde sólo un punto de la elipse, se puede decir entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2 + 2mxb + b^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2bmx &= 0 \\ (b^2 + a^2m^2)x^2 + (2a^2bm)x + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Cómo queremos hallar el valor de x , realizamos:

$$x = \frac{-2a^2bm \pm \sqrt{4a^4b^2m^2}}{2(b^2 + a^2m^2)}$$

Para que sólo de un valor en x , entonces $\sqrt{4a^4b^2m^2} = 0$, es decir que $m = 0$, lo cuál nos indica que es necesario hallar las tangentes a la elipse por un punto externo a ella, determinando la zona del punto en el plano, según la posición de elipse.

Se reconoce que una recta tangente que pasa por un punto (x_o, y_o) de la elipse $a^2x + b^2y = a^2b^2$, tiene como ecuación:

$$a^2x_o x + b^2y_o y = a^2b^2$$

Luego, a partir de esto, aparece:

$$y = -\frac{a^2x_o}{b^2y_o}x + \frac{b^2}{y_o}$$

Donde se puede reconocer que la pendiente en tales rectas tienen para cualquier punto (x_o, y_o) la pendiente:

$$m = -\frac{a^2x_o}{b^2y_o}$$

A partir de esto, se prosigue a construir las rectas normales por los puntos (x_o, y_o) identificados según la zona en donde se ubique el punto $A(c, d)$.

2.2.2. Construcción rectas normales a las rectas tangentes por los puntos (x_o, y_o)

Dado que se necesita de las normales de tales pendientes, se reconoce que dos rectas con pendientes m_a y m_b son perpendiculares² si $1 + m_a m_b = 0$ o $m_b = -\frac{1}{m_a}$; así pues resulta entonces:

$$m = \frac{b^2y_o}{a^2x_o} \tag{2.2.11}$$

Siendo así, las normales tendrán como ecuación:

$$y = \frac{b^2y_o}{a^2x_o}x + h \tag{2.2.12}$$

²Esto se menciona en (Fuller y Tarwater, 1999) [3], pág 18].

De la ecuación (2.2.12) se reconoce que h es la incognita de la recta normal. Los puntos (x_o, y_o) que aparecen en la ecuación (2.2.12), se tienen ya identificados en las ecuaciones (2.2.4), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9) y (2.2.10).

Las ecuaciones de las rectas normales a la elipse, partiendo de la ecuación (2.2.12) por los puntos de tangencia especificos son:

En el caso de la recta 1, que pasa por el punto (x_1, y_1) , su pendiente es:

$$m_1 = -\frac{c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} - b^2d}{\sqrt{2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}$$

se halla el h y aparece entonces la recta normal 1:

$$y = -\frac{c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} - b^2d}{\sqrt{2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}x + \frac{(b^2 - a^2)(c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} - b^2d)}{(a^2c^2 + b^2d^2)} \quad (2.2.13)$$

En el caso de la recta 2, que pasa por el punto (x_2, y_2) , su pendiente es:

$$m_2 = \frac{c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + b^2d}{\sqrt{-2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}$$

se halla el h y aparece entonces la recta normal 2:

$$y = \frac{c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + b^2d}{\sqrt{(-2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4)}}x + \frac{(a^2 - b^2)(c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + b^2d)}{(a^2c^2 + b^2d^2)} \quad (2.2.14)$$

En el caso de la recta 3, que pasa por el punto (x'_1, y_1) , su pendiente es:

$$m_3 = -\frac{b^2d - c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2}}{\sqrt{2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}$$

se halla el h y aparece entonces la recta normal 3:

$$y = \frac{b^2d - c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2}}{\sqrt{2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}x + \frac{(a^2 + b^2)(b^2d - c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2})}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.15)$$

En el caso de la recta 4, que pasa por el punto (x'_2, y_2) , su pendiente es:

$$m_4 = -\frac{c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + b^2d}{\sqrt{-2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}$$

se halla el h y aparece entonces la recta normal 4:

$$y = -\frac{c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + b^2d}{\sqrt{-2a^2cd\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}}x + \frac{(a^2 - b^2)(c\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} + b^2d)}{a^2c^2 + b^2d^2} \quad (2.2.16)$$

Para reducción en espacio, se notará que:

$$s = \sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2}$$

$$t = \sqrt{2a^2cds + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}$$

$$n = \sqrt{-2a^2cds + a^4c^2 + a^2d^2(c^2 - b^2) + b^2d^4}$$

Según la construcción geométrica, se intersecarán las normales que pasan por los puntos tangentes -dependiendo de las zonas identificadas en la figura [2.4](#) y así se obtienen los puntos de la transformación \mathbf{T} , surge entonces:

Definición 13 (La transformación \mathbf{T}): *Sea la elipse de transformación T y un punto $A(x, y)$ fuera de ella, existe un punto $A'(x_o, y_o)$, tal que A' es la transformación del punto A , respecto a la elipse T de transformación, tal que:*

- Cuando A esté en la zona 1, el transformado \mathbf{T} de A es A' , cuyas coordenadas en x_a y y_a son:

$$x_a = \frac{(a^2 - b^2)tn [n(cs - b^2d) - t(cs + b^2d)]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^3}$$

$$y_a = \frac{(b^2 - a^2) [a^2c^2(b^2 - c^2) + b^4d^2 - b^2c^2d^2] [tn - a^4c^2 - a^2d^2(b^2 + c^2) - b^2d^4]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^3}$$

-Cuando A está en la zona 2, el transformado \mathbf{T} de A es A' , cuyas coordenadas en x_b y y_b son:

$$x_b = \frac{(b^2 - a^2)tn [n(cs - b^2d) - t(cs + b^2d)]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^3}$$

$$y_b = y_a$$

-Cuando A está en la zona 3, el transformado \mathbf{T} de A es A' , cuyas coordenadas en x_c y y_c son:

$$x_c = \frac{(a^2 - b^2)tn [n(cs - b^2d) + t(cs + b^2d)]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^3}$$

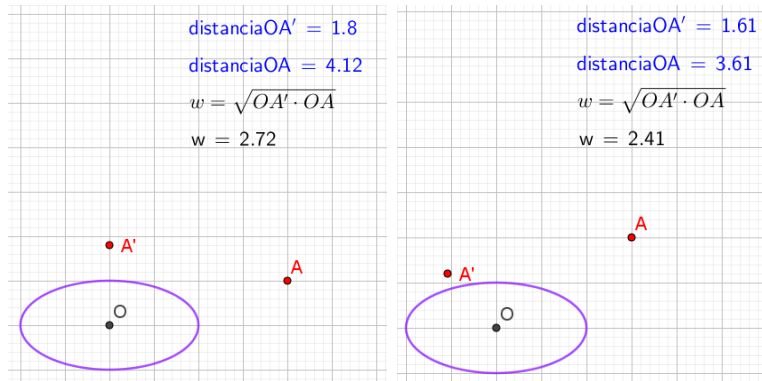
$$y_c = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) [tn + a^4c^2 + a^2d^2(b^2 + c^2) + b^2d^4]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^2}$$

-Cuando A está en la zona 4, el transformado \mathbf{T} de A es A' , cuyas coordenadas en x_d y y_d son:

$$x_d = \frac{(b^2 - a^2)tn [n(cs - b^2d) + t(cs + b^2d)]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^3}$$

$$y_d = y_c$$

La transformación \mathbf{T} resulta ser una transformación, basandonos en la definición 5, se reconoce que a cada punto A del plano le corresponde un A' en el mismo plano bajo la transformación \mathbf{T} . Si quiere explorar el cumplimiento de la definición 13, puede ingresar a los siguientes links: <https://ggbm.at/JVNqxf5u>, <https://ggbm.at/hEt9F2wR>, <https://ggbm.at/dcH3BH8Y> y <https://ggbm.at/p46wXEFf>.



(a) Contra ejemplo 1

(b) Contra ejemplo 2

Al querer saber si la transformación T es una inversión, se llegó a la respuesta no, bajo la definición 9, la relación que se realiza entre el centro del objeto inversión junto con el punto A y su transformado A' , esto no se cumple, bajo la definición 12, se reconoce que el producto de distancias del centro al punto imagen y preimagen, debía ser una constante al cuadrado, en la imagen [2.2.2](#) podemos notar que bajo la diferente posición de A , cambia A' , pero el producto de las distancias no varía de forma constante como debía ser, en el link <https://ggbm.at/kSeeYHun> puede explorar la información; aquí se puede rescatar que si el punto A se ubica en la rectas que contienen los segmentos de los semiejes de la elipse, entonces si se cumple la inversión³ (Esto lo puede verificar en el link <https://ggbm.at/kSeeYHun>), pero como T no cumple la definición 12 para todo punto del plano, entonces no es una inversión.

Cabe resaltar que A' es único, dado que ya se demostró que hay únicamente dos rectas tangentes a la elipse por un punto externo, lo cual implica que hay sólo dos rectas normales por los puntos de tangencia y la intersección entre estas rectas perpendiculares será un único punto.

Pasemos a indagar en propiedades de la transformación T .

³Queda como pregunta abierta: ¿Qué curva describiría los puntos que cumplen la definición de la inversión usual en la transformación T ?

Capítulo 3

TRANSFORMACIÓN T APLICADA A CURVAS

Se observará la imagen de algunos objetos geométricos mediante la transformación T y se buscará formalizar en casos específicos algunas conjeturas, reconociendo que se trabajará con la elipse κ (ecuación [3.0.1](#)).

$$\kappa : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ con } a \neq b, b \neq 0, a \neq 0 \quad (3.0.1)$$

3.1. ¿En qué se transforman las rectas?

Aquí se mostrará que algunas rectas se transforman en ciertas curvas conocidas, tal como se expresa el ítem 1 y el ítem 5. Hay cinco posibles transformaciones para una recta, esto depende de su posición, es decir:

***Ejemplo 3.1.1** Si la recta a transformar es paralela a uno de los semiejes de la elipse y no tiene puntos en la elipse o en su interior, entonces su transformación T será una elipse, tal como se muestra en la figura [3.1](#). Puede verificar esto en el link <https://ggbm.at/crZFesdx> o en <https://ggbm.at/j6x8eS26>.*

Demostremos del ejemplo **3.1.1** para un caso específico.

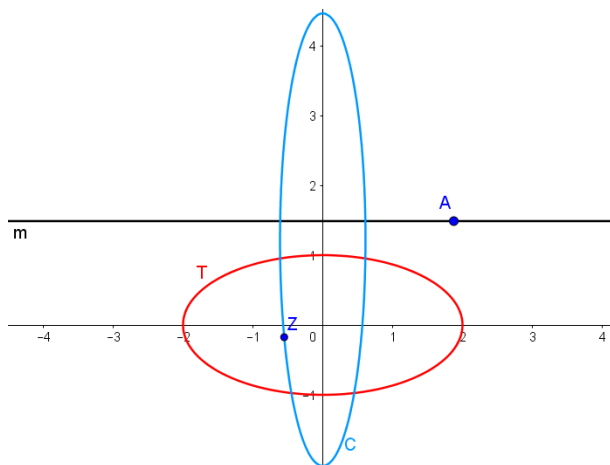


Figura 3.1: Transformación \mathbf{T} de la recta m paralela al semieje mayor y ningún punto de la recta m está en la elipse o en su interior.

Demostración:

Para la elipse $t : x^2 + 4y^2 = 4$, teniendo un punto A con coordenadas (c, d) , que cumple las restricciones de la transformación \mathbf{T} , le corresponde un A' , donde $T(A) = A'$, decimos que:

$$(c, d) \rightarrow \left(\frac{3c(1 - d^2)}{c^2 + 4d^2}, \frac{3d(c^2 - 4)}{c^2 + 4d^2} \right)$$

Para la recta $y = 2$, a cada punto $(x, 2)$, al aplicarle el transformado \mathbf{T} obtenemos:

$$T(x, 2) = \left(\frac{-9x^2}{x^2 + 16}, \frac{6x^2 - 24}{x^2 + 16} \right)$$

Usando a x como un parámetro, se puede decir que esto corresponde a una curva que se puede expresar de la forma:

$$\propto (t) = \left\langle \frac{-9t^2}{t^2 + 16}, \frac{6t^2 - 24}{t^2 + 16} \right\rangle \quad (3.1.2)$$

Por medio del Software Geogebra notamos que esta parametrización es una elipse, tal como muestra la figura [3.2](#).

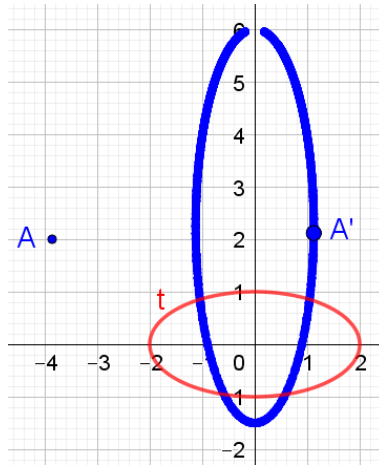


Figura 3.2: Transformación T de la recta $y = 2$ respecto a la elipse t .

Al reconocer gráficamente que la curva [3.1.2](#) es una elipse, notemos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-9t^2}{t^2 + 16} \\ x^2 &= \frac{81t^2}{(t^2 + 16)^2} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Y luego resolver que:

$$\begin{aligned} y &= \frac{6t^2 - 24}{t^2 + 16} \\ 6t^2 - 6t^2 &= -24 - 16y \\ t^2(y - 6) &= -24 - 16y \\ t^2 &= \frac{-24 - 16y}{y - 6} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Reemplazamos [3.1.4](#) en [3.1.3](#):

$$x^2 = \frac{81 \frac{-24 - 16y}{y - 6}}{\left(\frac{-24 - 16y}{y - 6} + 16\right)^2} \tag{3.1.5}$$

Al resolver la ecuación [3.1.5](#) resulta:

$$\begin{aligned}
x^2(-24 - 96)^2 &= -81(24 + 16y)(y - 6) \\
x^2(8(-3 - 12))^2 &= -81 \cdot 8(3 + 2y)(y - 6) \\
225 \cdot 8x^2 &= -81(3 + 2y)(y - 6) \\
200x^2 &= -9(3y - 18 + 2y^2 - 12y) \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

Para finalmente resolver [3.1.6](#) y obtener $200x^2 + 18y^2 - 81y - 162 = 0$, y por sus discriminantes se llega a que esto es una elipse.

⊠

Se intentó realizar la demostración para una recta $y = n$, tal que $a < n < -a$ bajo la elipse k (ecuación [2.1.1](#)), pero las cuentas se hacen extensas y programas como derive 6 lanzan resultados inconclusos. Lo mismo sucede para hablar de manera general bajo la definición 13.

Cabe resaltar en este ítem que al observar de la recta $y = n$, los puntos $x \geq 0$ de la recta, su transformado \mathbf{T} será un x' tal que $x' \leq 0$; eso quiere decir que su transformado \mathbf{T} de cualquier punto A en este ítem, lo envía al semiplano determinado por el eje y donde no está A . Además de esto, cuando se toman los puntos A de la recta $y = n$, tal que $A \rightarrow \infty$, entonces la elipse se cerrará por completo (Observa la figura [3.2](#)).

Ejemplo 3.1.2 *Si la recta a transformar es paralela a uno de los ejes cartesianos y tienen puntos en la elipse o en su interior, entonces su transformación será un trozo de elipse, tal como se muestra en la figura [3.3](#).*

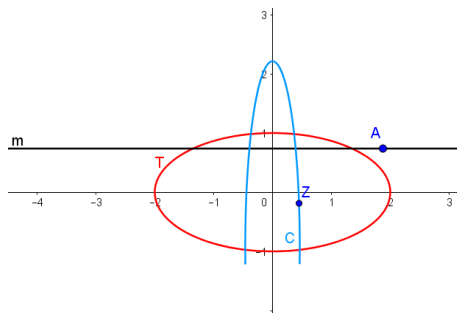


Figura 3.3: Transformación T de la recta m paralela al semieje mayor con puntos de la recta m en la elipse o en su interior

En el caso de este ejemplo, donde la recta $y = n$ toma puntos en el interior de la elipse k , cabe preguntarse por qué no se definen estos puntos en la transformación T , esta pregunta será contestada en el capítulo 4, en el estudio de la transformación T^1 .

Este ejemplo podría ser demostrado pero utilizando la transformación T de los rayos que están contenidos en la recta $y = n$ cuyo punto de origen son las intersecciones entre la elipse k y la recta $y = n$ y los puntos del interior de la elipse κ no estén en los rayos.

Ejemplo 3.1.3 Si la recta a transformar no es paralela a alguno de los ejes cartesianos y no tiene puntos en la elipse o en su interior, entonces su transformación será algo muy similar al "folium de Descartes", tal como se muestra en la figura 3.4.

¹Puede ingresar al link <https://ggbm.at/Wnswhy7m> o <https://ggbm.at/AgBdCkBM> y explorar el comportamiento de la transformación T de las rectas perpendiculares, cuando hay puntos en el interior de la elipse κ ; puede ingresar al siguiente link <https://ggbm.at/crZFesdx> y verificar por medio de geogebra que el comportamiento de las rectas planteado en el ítem 1 y 2 resultan verídicos.

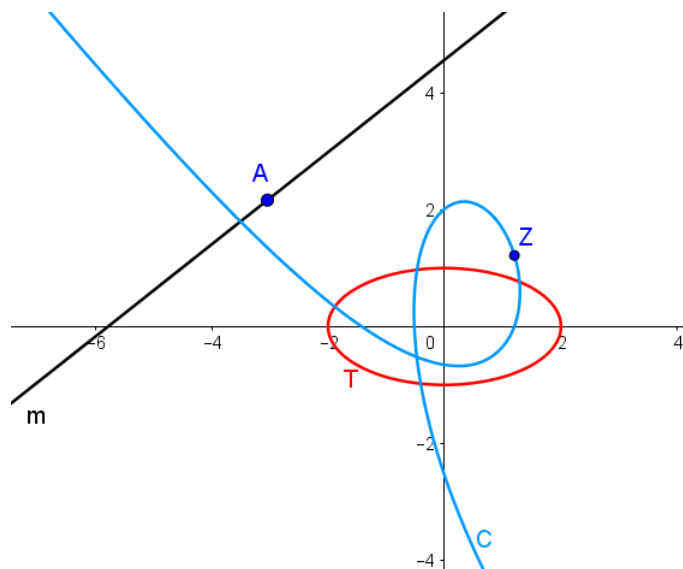


Figura 3.4: Bajo la transformación T la recta m , donde m no es paralela a uno de los ejes de la elipse k , y ningún punto de la recta m está en la elipse o en su interior.

No resulta ser un Folium de Descartes puesto que no cumple la simetría que hay en este; cabe decir que esta curva tiene una asíntota, si se descubre la ecuación de esta asíntota, posiblemente, ésta sea perpendicular a la recta m .

Ejemplo 3.1.4 Si la recta a transformar no es paralela a alguno de los ejes cartesianos y tiene puntos en la elipse o en su interior, entonces su transformación será parecido a un "folium de descartes" pero cortado, tal como lo muestra la figura [3.5](#).

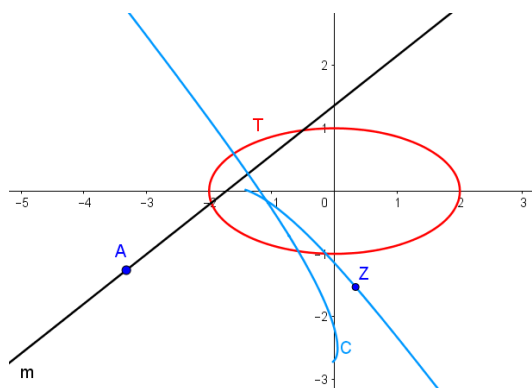


Figura 3.5: Bajo la transformación T la recta m , donde m no es paralela a uno de los ejes de la elipse k , y puntos de la recta m están en la elipse o en su interior.

Ejemplo 3.1.5 Si la recta a transformar para por el centro de la elipse, entonces su transformación tenderá a ser una hipérbola, tal como se muestra en la figura [3.6](#).

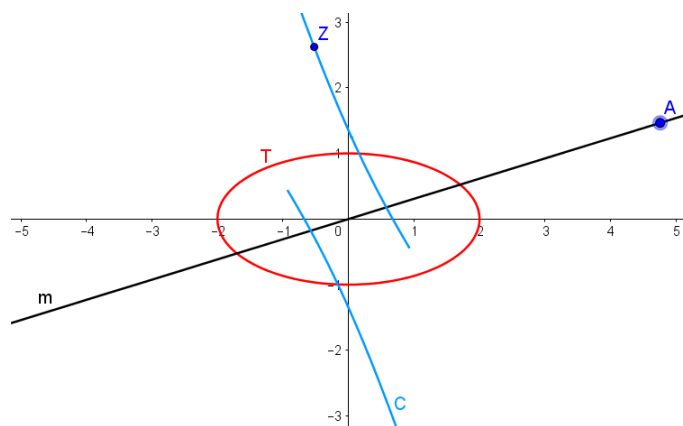


Figura 3.6: La transformación T de la recta m que pasa por el centro de la elipse.

Tal como se trató de demostrar la curva C en el ejemplo [3.1.1](#), dado que su transformación T es una curva conocida, se demostrará este ejemplo también, bajo un caso específico.

Demostración:

Se trabaja nuevamente con la elipse $t : x^2 + 4y^2 = 4$, en este caso la recta $y = 2x$ se nota como los puntos $m(x, 2x)$, bajo la transformación T :

$$m(x, 2x) \rightarrow m' \left(\frac{3x - 12x^3}{9x^2}, \frac{6x^3 - 24x}{9x^2} \right)$$

$$\propto (t) = \left\langle \frac{3t - 12t^3}{9t^2}, \frac{6t^3 - 24t}{9t^2} \right\rangle \quad (3.1.7)$$

La curva [3.1.7](#) resulta ser una hipérbola, notemos que:

$$x = \frac{3t - 12t^3}{9t^2} \quad (3.1.8)$$

$$y = \frac{6t^3 - 24t}{9t^2}$$

$$t_1 = \frac{3y - \sqrt{9y^2 + 64}}{4} \quad (3.1.9)$$

$$t_2 = \frac{3y - \sqrt{9y^2 + 64}}{4} \quad (3.1.10)$$

Reemplace [3.1.9](#) en [3.1.8](#) y se obtiene la primera parte de la hipérbola:

$$2048x - 640\sqrt{9y^2 + 64} + 2176y = 0$$

Luego se reemplaza [3.1.10](#) en [3.1.9](#) y se obtiene la segunda parte de la hipérbola:

$$2048x + 640\sqrt{9y^2 + 64} + 2176y = 0$$

Es una hipérbola rotada en el plano.

☒

Puede ingresar al link <https://ggbm.at/e2YaVHCX> para indagar en la transformación T de cualquier recta en el plano. Bajo todo lo anterior, se pudo notar que las rectas se transformaban en diferentes curvas, ninguna recta se transformaba en una recta, quiere decir (bajo la definición 6) que no es una transformación Isométrica, puesto que se puede deducir que esta transformación T no preserva la distancia y tampoco la intersección, surge entonces el Teorema 1.

Teorema 1 (Distancia en la transformación T): *Dada la elipse k y dos puntos A y B externos al elipse k . Si $T(A) = A'$ y $T(B) = B'$ entonces no necesariamente $d(A, B) = d(A', B')$.*

3.2. ¿En qué se transforman las circunferencias?

Según la posición de la circunferencia, está se transforma en distintas figuras, veamos.

3.2.1 Circunferencia cuyo centro coincide con el de la elipse

Hay 4 posibles transformaciones si la circunferencia tiene como centro el centro de la elipse, y el radio de la circunferencia sea modificado estratégicamente:

Ejemplo 3.2.1.1 Si la circunferencia a transformar tiene como radio la medida del centro al vertice del eje mayor de la elipse, se transforma en la curva C , tal como lo muestra la figura 3.7.

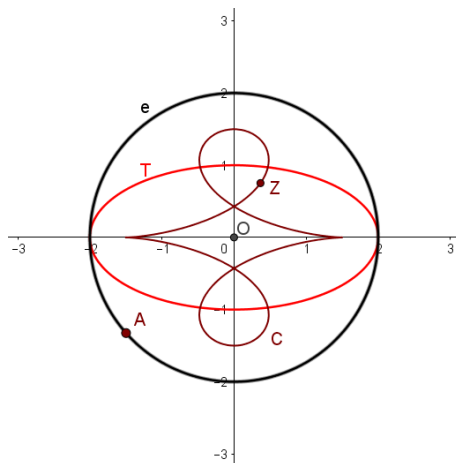


Figura 3.7: Transformación de la circunferencia e cuyo radio es b , bajo la elipse k .

En este ejemplo y en unos más de esta sección, es notorio que al realizar la transformación T , aparecen curvas desconocidas², posiblemente puedan ser expresadas bajo todas las ecuaciones que se han hallado, pero para realizar estos calculos es necesario acudir a softwares diferentes a Derive 6 o Geogebra, puesto que las cuentas resultan ser muy grandes.

Ejemplo 3.2.1.2 Si la circunferencia a transformar tiene su radio entre $b < r < a + b$, en este caso b determina el eje mayor de la elipse k (2.1.1) que realiza la transformación T , se transformará en una curva, tal y como lo muestra la figura 3.2.

²Puede ingresar al siguiente link <https://ggbm.at/mDSJSVus> e indagar en las curvas que surgen bajo la restricción de éste ítem.

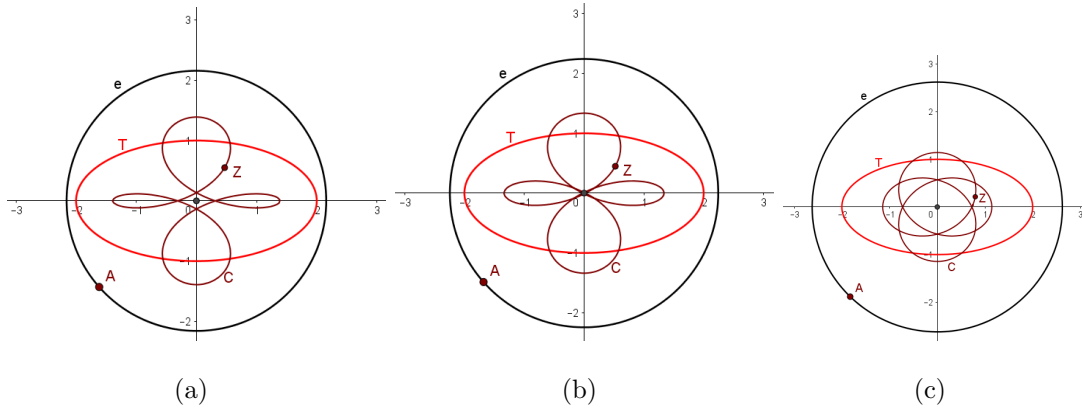


Figura 3.8: Transformación T de circunferencias con un radio r tal que $b < r < a + b$.

En este ejemplo resultaron diversas curvas bajo un mismo intervalo de radio, se trató de investigar en qué límites se cambiaba la figura, en que radio se pasaba de la figura [3.2](#), pero resultó imposible bajo las cuentas que se estaban llevando a cabo, aún tratando de demostrarse en una elipse específica fue difícil encontrar los radios específicos que debían cumplir las circunferencias; puede visualizar las curvas que surgen bajo la restricción del presente ítem en el siguiente link <https://ggbm.at/vQXJMmUu>.

Ejemplo 3.2.1.3 Si la circunferencia tiene como radio $r = a + b$, donde a, b hacen referencia a la ecuación [2.1.1](#), se transformará en una circunferencia q (cuyo radio es desconocido), tal y como lo muestra la figura [3.9](#). Puede ingresar al link <https://ggbm.at/nueVbjpY> y visualizar la razón de ser de esta conjetura.

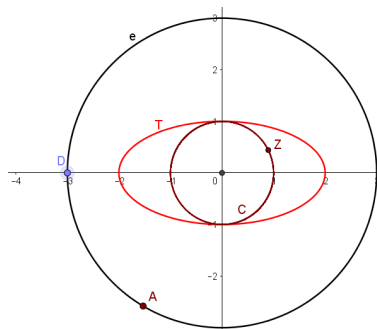


Figura 3.9: La circunferencia e , por medio de la transformación T , se convierte en una circunferencia.

Demostración:

En el caso específico, para la elipse $t : 4x^2 + y^2 = 4$, la circunferencia $q : x^2 + y^2 = 3^2$ se transformará bajo \mathbf{T} en una circunferencia.

Hay que recordar que bajo los terminos de la definición 15 y la elipse t , para cada punto $A = (c, d)$ le corresponde $A' = \left(\frac{3c(1-d^2)}{c^2+4d^2}, \frac{3d(c^2-4)}{c^2+4d^2} \right)$.

Ahora, la circunferencia q tiene la parametrización: $x = 3\cos(t)$ y $y = 3\sin(t)$, por tanto se dirá que:

$$T(3\cos(t), 3\sin(t)) = \left(\frac{9\cos(t)(1 - 9\sin^2(t))}{9\cos^2(t) + 36\sin^2(t)}, \frac{9\sin(t)(9\cos^2(t) - 4)}{9\cos^2(t) + 36\sin^2(t)} \right)$$

Usando a t como parametro, se dice entonces que:

$$\alpha(t) = \left\langle \frac{9\cos(t)(1 - 9\sin^2(t))}{9\cos^2(t) + 36\sin^2(t)}, \frac{9\sin(t)(9\cos^2(t) - 4)}{9\cos^2(t) + 36\sin^2(t)} \right\rangle \quad (3.2.11)$$

Se reducen los calculos y se expresa la curva:

$$\alpha(t) = \left\langle \frac{\cos(t)(9\cos^2(t) - 8)}{(4 - 3\cos^2(t))^2}, \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2(t)}(9\cos^2(t) - 4)}{(4 - 3\cos^2(t))^2} \right\rangle \quad (3.2.12)$$

De [3.2.12](#) se puede reconocer que:

$$x^2 = \frac{\cos^2(t)(81\cos^4(t) - 144\cos^2(t) + 64)}{(4 - 3\cos^2(t))^2} \quad (3.2.13)$$

$$y^2 = \frac{-81\cos^6(t) + 153\cos^4(t) - 88\cos^2(t) + 64}{(4 - 3\cos^2(t))^2} \quad (3.2.14)$$

Para luego deducir de [3.2.13](#) y [3.2.14](#) que:

$$x^2 + y^2 = \frac{16 - 24\cos^2(t) + 9\cos^4(t)}{(4 - 3\cos^2(t))^2} = \frac{(4 - 3\cos^2(t))^2}{(4 - 3\cos^2(t))^2} = 1 \quad (3.2.15)$$

Queda entonces demostrado que la circunferencia con radio $a + b$, bajo la transformación \mathbf{T} , se transforma en una circunferencia.

☒

Demostrar este ejemplo en casos generales resulta ser complicado por las cuentas resultantes, pero se puede comprobar tal curva en los links antes mencionados.

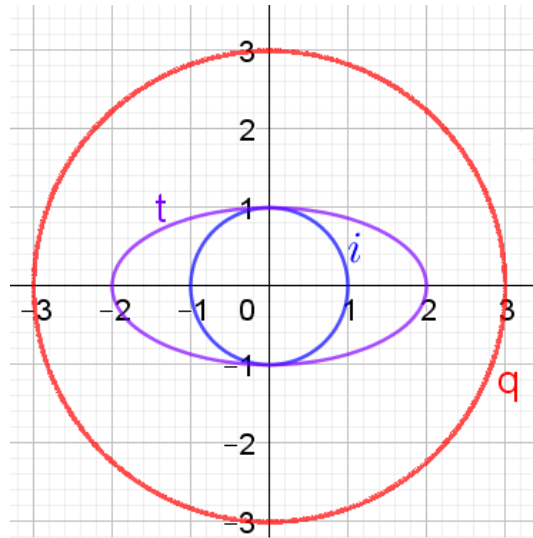


Figura 3.10: Representación de la curva $\alpha(t)$ mencionada en el ejemplo 3.2.1.3 de la presente sección.

Ejemplo 3.2.1.4 Si la circunferencia tiene su radio determinado por $r > a + b$, se transformará en una curva, tal y como lo muestra la figura [3.11](#).

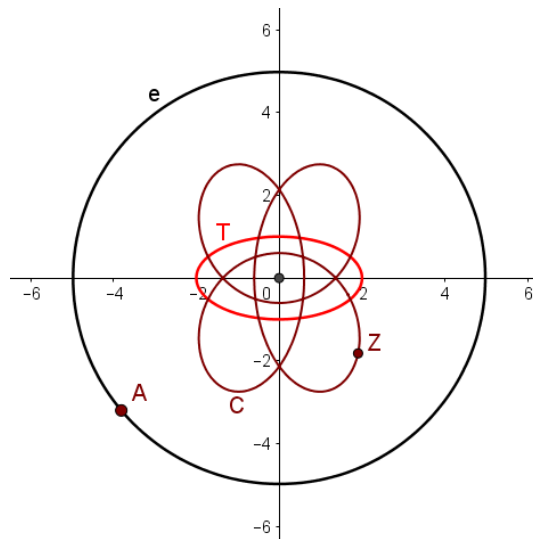


Figura 3.11: Transformación T de la circunferencia e cuyo radio está restringido por $r > a + b$.

Puede acceder al siguiente link <https://ggbm.at/TKmr2bhJ> y explorar las transformaciones relacionadas con la circunferencia con centro en el origen de la elipse κ , dónde además podrá explorar imagenes como la que aparece en la figura [3.12](#).

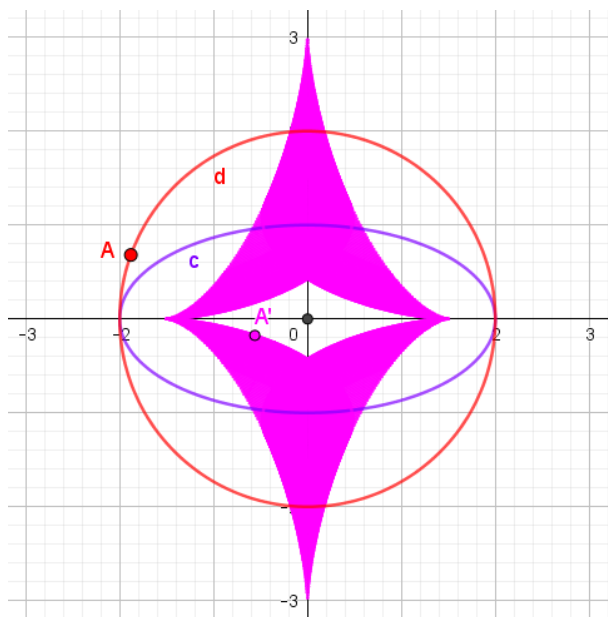


Figura 3.12: Parte del plano abarcado por la transformación T cuando el radio de la circunferencia es un r tal que $0 < r < b$ o $0 < r < a$

3.2.2 Circunferencia cuyo centro no coincide con el de la elipse

Nuevamente se reconoce que la circunferencia, según su posición, bajo la transformación T será una figura diferente, se mencionarán algunas:

Ejemplo 3.2.2.1 Dada la elipse κ con centro en P , su eje horizontal es un segmento s que pasa por P . Si la circunferencia q cuyo centro es O , está en la recta que contiene a s y no tiene puntos en el interior de k , se transformará en la curva C , tal cómo muestra la figura [3.13](#).

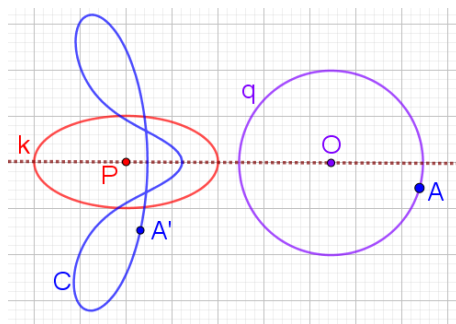


Figura 3.13: Transformación T de la circunferencia q con centro en O , donde O está en la recta que contiene a s .

Ejemplo 3.2.2.2 Dada la elipse k con centro en P , su eje horizontal es un segmento s que pasa por P . Si la circunferencia q cuyo centro es O , está en la recta que contiene a s y tiene puntos en el interior de k , se transformará en la curva C , tal cómo muestra la figura [3.14](#).

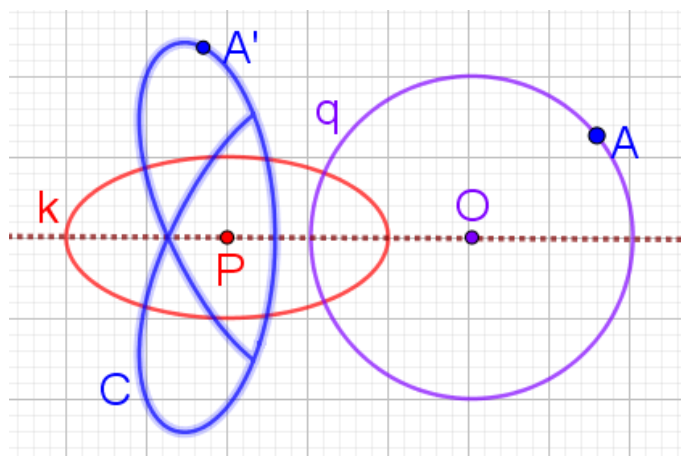


Figura 3.14: Transformación T de la circunferencia q con centro en O , donde O está en la recta que contiene a s y q tiene puntos en el interior de k .

Ejemplo 3.2.2.3 Dada la elipse κ con centro en P , su eje horizontal es un segmento s que pasa por P . Si la circunferencia q cuyo centro es O , no está en la recta que contiene a s y no tiene puntos en el interior de κ , se transformará en la curva C , tal cómo muestra la figura [3.15](#)³

³Puede explorar el comportamiento de la circunferencia el el siguiente link <https://ggbm.at/uSzw4F7j>

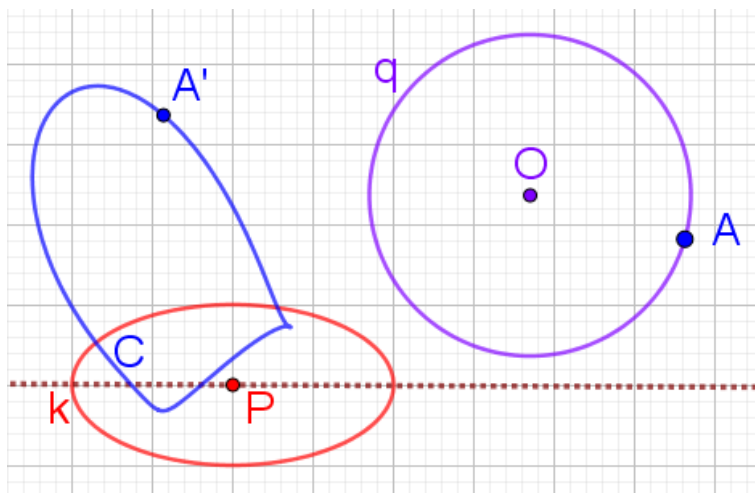


Figura 3.15: Transformación T de la circunferencia q con centro en O , donde O no está en la recta que contiene a s .

Ejemplo 3.2.2.4 Dada la elipse k con centro en P , su eje horizontal es un segmento s que pasa por P . Si la circunferencia q cuyo centro es O , no está en la recta que contiene a s y tiene puntos en el interior de k , se transformará en la curva C , tal cómo muestra la figura [4.2](#).

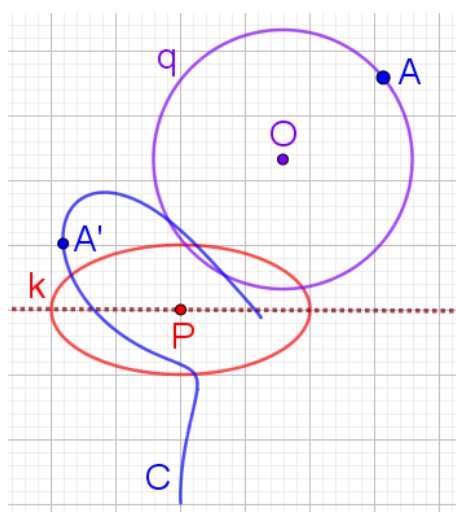


Figura 3.16: Transformación T de la circunferencia q con centro en O , donde O no está en la recta que contiene a s y q tiene puntos en el interior de k .

Dentro de las diferentes exploraciones que se realizaron en Geogebra, se pudo observar gracias a este software, diferentes curvas que al jugar con las zonas que cubrían tales lugares

geometricos aparecian formas curiosas que llamaron muchísimo la atención, esto lo puede observar en la figura 3.17 y puede explorarlos en los links <https://ggbm.at/uSzw4F7j>, <https://ggbm.at/JSYqzrej> y <https://ggbm.at/xDYccUEB>.

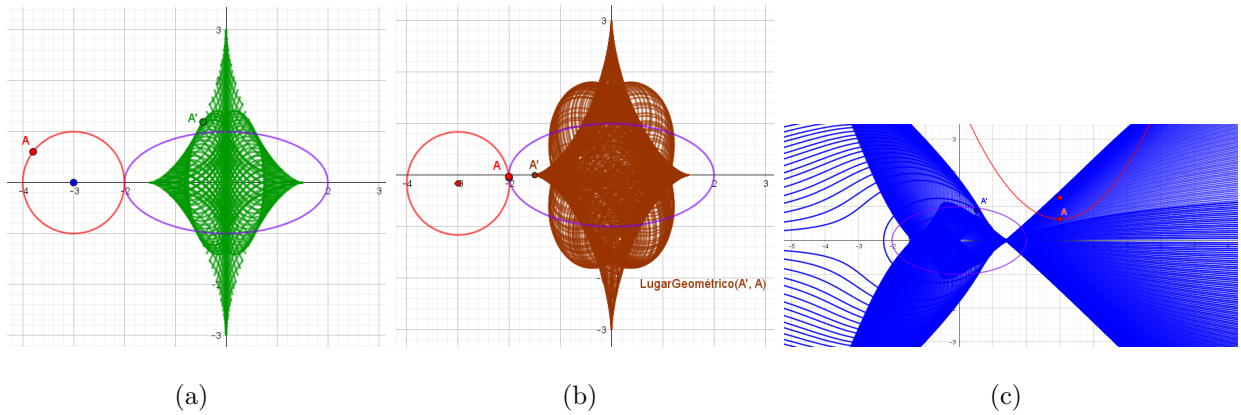


Figura 3.17: Rastro de las curvas según su transformado T

Se pudo notar que no se demostró las transformaciones T de este capítulo, para hacer tales demostraciones había que basarse en la definición 13, teniendo en cuenta las zonas de tangencia que se mencionaron en el capítulo 2, lo cuál no beneficiaba mucho las cuentas dado que habían más de 2 raíces en el transformado de A bajo T , esto complicaba aún más las demostraciones, se intentó realizar ello manualmente y usando softwares como Geogebra y Derive 6, pero saturaba el sistema; por eso se trató de mencionar y demostrar en casos específicos algunas transformaciones T en curvas conocidas⁴.

⁴Cabe resaltar que sin embargo, se usó un apoyo en applets de Geogebra para comprobar las afirmaciones realizadas.

Capítulo 4

ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LA TRANSFORMACIÓN T

Para poder hablar de esta transformación como función, debemos hablar de su dominio y su rango.

Al momento de realizar todos los cálculos de la transformación T del punto $A(c, d)$, pudimos notar diversas raíces en la transformación del punto $A'(c_o, d_o)$, hay una raíz en específico, que nos dice que puntos no podemos notar del dominio, en la ecuación [2.2.4](#) apareció la raíz: $\sqrt{a^2(c^2 - b^2) + b^2d^2} \geq 0$, observemos con atención que:

$$\begin{aligned} a^2c^2 - a^2b^2 + b^2d^2 &\geq 0 \\ a^2c^2 + b^2d^2 &\geq a^2b^2 \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

La ecuación [4.0.1](#) muestra claramente que el punto $A(c, d)$ tiene que estar en el borde de la elipse o fuera de ella¹; esto cobra sentido cuando ponemos un punto dentro de ella, la tangente a la elipse por este punto, no existe, o cuando ubicamos un punto sobre la elipse, la tangente por este punto y la normal a esta tangente sería el mismo punto, estamos exponiendo que para los puntos sobre la elipse, su transformación T , serán el mismo. Podemos concluir entonces que:

¹De la ecuación [4.0.1](#) también se puede notar que $a > 0$ y $b > 0$, aunque esto fue claro desde la ecuación [2.1.1](#)

Dominio de T : Sea D el dominio de la transformación T , donde κ es la elipse mencionada en la ecuación [2.1.1](#), entonces:

$$(c, d) \in D \leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2b^2$$

Hay que fijarse que no se especificó cómo encontrar la transformación T para los puntos internos a la elipse κ en el Capítulo 3; se quiso estudiar de una posible forma para hallar esto, pero se debía saber primero si los puntos A' en el rango, internos a la elipse κ , tenían un único punto A en el dominio, se hizo una construcción en Geogebra que llevó a descubrir que para diversos puntos en el rango, en el interior de la elipse κ , hay más de dos puntos en el dominio, tal como se muestra en la imagen [4.1](#); entonces se puede definir la transformación T de un punto interior de la elipse κ , como $T(A') = A$, pero lleva a una inconformidad frente a la definición 1, se podría entonces definir la transformación T de un punto interior a la elipse κ , pero bajo unas restricciones que no me lleven a romper la definición de función.

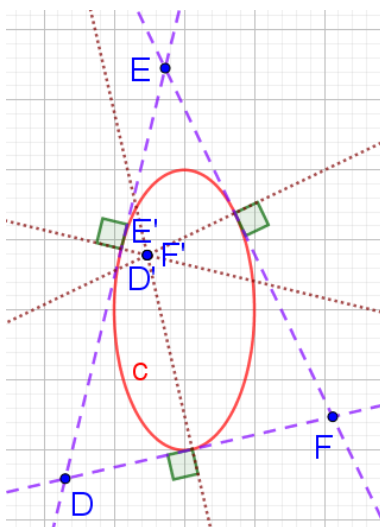


Figura 4.1: Transformación T de tres puntos cuya imagen es la misma

La figura [4.1](#) resulta ser un contraejemplo para la definición 2 (Función Inyectiva), puesto que para cada elemento del dominio hay más de una imagen en el rango, lo cual lleva a deducir que la transformación T no es inyectiva, en esta imagen se puede observar claramente esto, puesto que $T(D) = D' = T(F) = F' = T(E) = E'$, lo cual lleva a decir que a tres

puntos diferentes del plano, les corresponde el mismo punto bajo la transformación T .

Se pensó en construir entonces el transformado T de un punto A interno a la elipse k de la siguiente manera:

Dada la elipse k de transformación T y un punto A interior a k , se trazan dos circunferencias p y q tangentes a la elipse k por los puntos O y R respectivamente, tal como muestra la figura 4.2.

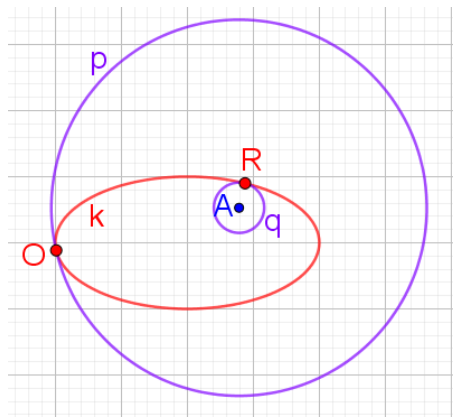


Figura 4.2: Construcción transformación T punto A interno a k . (Parte 1)

Después por los puntos de tangencia O y R se trazan las rectas tangentes m y n respectivamente a la elipse k , para luego decir que $\{A'\} = m \cap n$, donde $T(A) = A'$, tal como lo muestra la figura 4.3.

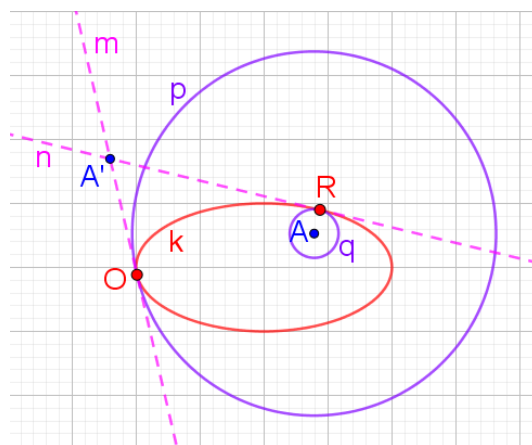


Figura 4.3: Construcción transformación T punto A interno a k . (Parte 2)

A pesar de que parece bastante sencilla esta construcción, realizarla algebraicamente y geoméricamente no es muy fácil, quizá se pueda construir la circunferencia q que aparece en la imagen [4.2](#), se puede usar un teorema que mencione la mínima distancia o un teorema de curvatura, lo cuál no es sencillo, ya que la curvatura depende de un punto en la curva, y en este caso el punto no está en la curva; la cuestión se complica aún más cuándo se quiere hallar el radio de la circunferencia p que se muestra ne la imagen [4.2](#). Dadas estas complicaciones², se decidió no extender el dominio de la transformación T .

Ahora se tratará de definir o aproximarse a conocer cuál es el codominio de esta transformación T . Es un desafío descubrir el codominio, pero para intentar acercarse un poco a él, se traza una recta perpendicular al eje x y se pondra esta recta a recorrer todo el plano; a todos los puntos de la recta perpendicular se les hará su transformado, y el rastro de este transformado hará identificar la zona que cubre del plano y así tener una cercanía al codominio de la tranformación T , puede ingresar al link <https://ggbm.at/CazfDYdW> y notar el comportamiento de la zona cubierta del plano, por la curva que surge de la transformación T .

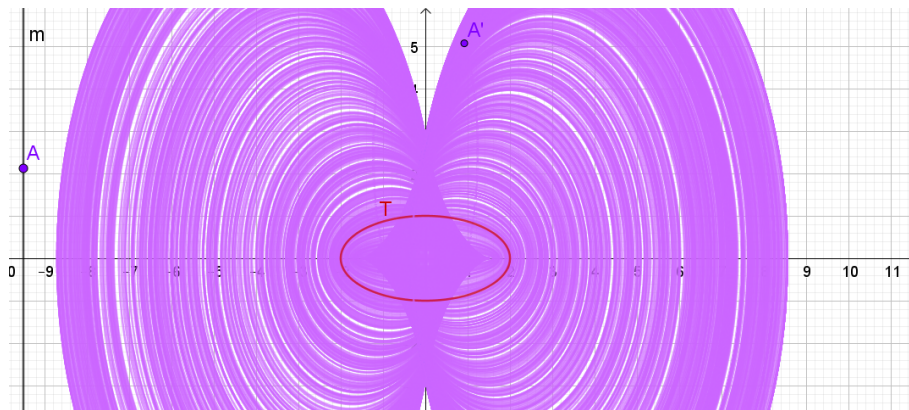


Figura 4.4: Rango según la recta perpendicular m al eje x (Zona morada)

De la figura [4.4](#), se pueden notar espacios en la parte superior de la imagen, en algún punto, estos puntos no son tomados por el transformado T ; más aún se quiso explorar el

²Quizá esto pueda realizarse algebraicamente, pero con un marco teorico aún más extenso y una investigación más detallada.

transformado T de las rectas perpendiculares al eje y , tal como lo muestra la figura 4.5 o el applet <https://ggbm.at/badUWxmM>.

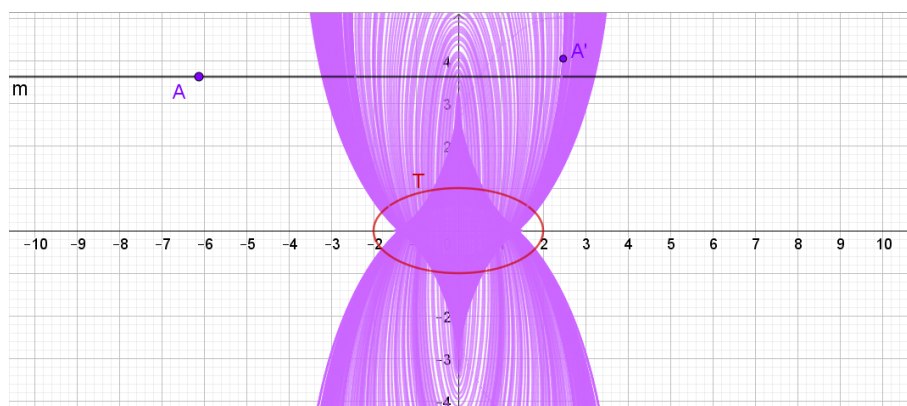


Figura 4.5: Rango según la recta m perpendicular al eje y (Zona morada)

Respecto a la figura 4.5, se puede observar que la parte que no cubría las rectas m perpendiculares al eje x , lo cubrían las rectas m perpendiculares al eje y , esto no tenía mucho sentido, porque siendo ambas rectas aquellas que recorren el plano, deberían cubrir los mismos espacios.

Inclusive, dentro de la exploración que se realizó para reconocer hasta dónde podría llegar el codominio de la transformación T , en la figura 4.4 se nota que hay puntos en la recta de eje mayor de la elipse κ que no toma en su codominio; algo similar sucede con la figura 4.5, pero allí se pudo descubrir que los puntos que nunca tocará, son los focos de la elipse κ . A partir de esto, se decide tomar todas las elipses mayores a la principal y realizar su transformado T y desde allí visualizar qué parte del plano cubriría, aparece entonces la figura 4.6, o puede ingresar al link <https://ggbm.at/abJZBJA2> y visualizar lo planteado.

De la figura 4.6, se puede observar que no toma los puntos del eje mayor y menor mencionados a partir de las figuras 4.4 y 4.5, esto supone que el codominio no es todo el plano, pero no deja de ser extraño que las rectas m perpendiculares a los ejes de elipse κ cubren partes del plano diferentes, además de no cubrir ciertos puntos.

Dado que no está definida esta transformación T para todo el plano, bajo la definición 3

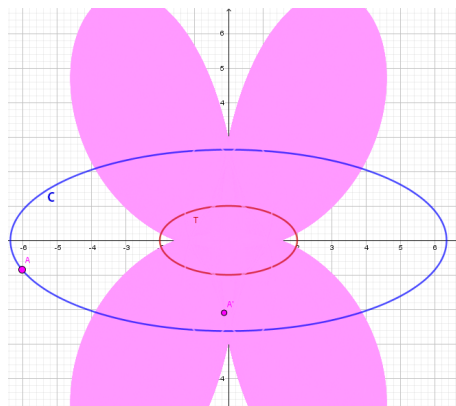


Figura 4.6: La transformación \mathbf{T} de las elipse C mayores (en un intervalo de $-a < x < a$ y $-b < y < b$) a la elipse k de transformación, es el lugar geométrico presentado (Zona rosada) (Función Sobreyectiva), esta transformación no es sobreyectiva, por lo expuesto de la figura [4.1](#), esto podría cambiar si se define adecuadamente el codominio de la transformación \mathbf{T} . Para concluir finalmente, bajo la definición 4, la transformación \mathbf{T} no es una función biyectiva.

Aquí se da por concluido el trabajo a sabiendas de que quedan diversas preguntas por realizarse, por ejemplo cabe resaltar que el rango de la función no está aún claro, para indagar en ello, se podrían hablar de límites de la transformación \mathbf{T} de la recta $y = n$ cuando $x \rightarrow \infty$ y tratar de entender porque los focos no son reconocidos en el rango.

Se sabe que los focos están definidos como: $a^2 + b^2 = x^2$, a partir de esto se puede decir que:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Al mencionar las rectas m perpendiculares al *eje* y , donde se reconoce que su transformado es la ecuación x_a con y_a y también x_d con y_d mencionadas en el capítulo de la construcción algebraica. Se puede llegar a pensar y preguntar qué pasaría si:

$$\frac{tn [(a^2 - b^2)(cs - b^2d) - (cs + b^2d)]}{2d(a^2c^2 + b^2d^2)^3} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

También cabe mencionar que la construcción algebraica de la transformación \mathbf{T} de un punto interno a la elipse está sin resolverse y hay curvas surgidas de la transformación \mathbf{T} que están sin expresar y también sin demostrar.

CONCLUSIONES

Fue un trabajo que dejó vivenciar el hacer matemáticas en cuanto permitió explorar, conjeturar y demostrar; sin embargo al momento de demostrar se tuvieron dificultades que impidieron verificar formalmente diversas propiedades encontradas.

Se generalizó la transformación T a cualquier elipse, de dónde se tuvo que generalizar las tangentes a una elipse por un punto externo, para poder llegar a la definición formal dónde se según las coordenadas cartesianas se llega al transformado T .

Luego de indagar que la transformación T no era una inversión bajo la definición 9, se siguió estudiando para descubrir que algunas transformaciones de rectas y circunferencias bajo ciertas restricciones se transforman en curvas conocidas, como lo son elipses, circunferencias e hipérbolas.

Se descubrió la generalización de la transformación T para el dominio establecido para esta transformación, además de plantear la construcción geométrica de la transformación para un punto interno a la elipse. Finalmente se encontró que se trataba de una transformación no inyectiva, ni sobreyectiva (tampoco biyectiva) para luego pasar finalmente a exponer un acercamiento al codominio de la transformación T .

Frente a los software que se mencionaron en el transcurso del trabajo: Geogebra y Derive, fueron sumamente importantes en este proceso, éstos, facilitaron y ayudaron a explorar, reducir cuentas y permitieron plantear conjeturas.

PROYECCIONES

Hay preguntas que surgieron a medida que se avanzó en el trabajo, que no se alcanzaron a investigar, pero vale mencionarlas como posibles ideas para futuros trabajos de grado.

1. Transformaciones como \mathbf{T} resultan ser transformaciones no isométricas que pueden ser temáticas interesantes para los estudiantes, se puede diseñar una propuesta didáctica que haga mención de este tema.

2. Si se siguen cambiando las construcciones de la inversión, se podría llegar a hablar de transformaciones que pueden ser posibles inversiones. Por ejemplo:

- Si se aplica la misma construcción de la transformación \mathbf{T} a una circunferencia k con centro en O y radio r , la intersección de todas esas normales a las tangentes de la circunferencia k será O , el centro de la circunferencia, es decir que $T(A) = A' = O$, por tanto $d(O, O) = 0$, y bajo la definición 9 decimos que $OA' \cdot OA = 0 \neq r^2$, por tanto no es inversión.

- Dada una elipse k con centro en O y un punto A externo a la elipse k , se trazan las tangentes a la elipse k por el punto A , y las paralelas por los puntos de tangencia respecto a cada tangente, el punto de intersección entre las paralelas construidas podría ser el punto de inversión de A .

3. Hacer exploraciones con la transformación \mathbf{T} utilizando otras métricas, como las que surgen en la p -distancia y cabe preguntarse si se mantienen las mismas propiedades que se encontraron en la métrica usual.

Bibliografía

- [1] CARDENAS, R. PARRA, W. (2013), *ESTUDIO DE LA MÉTRICA DE MANHATTAN. SEGMENTOS, RECTAS, RAYOS, CIRCUNFERENCIAS Y ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA.*. Tesis de Pregrado en Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia: Bogotá D.C.
- [2] CORONEL, A. (2010), *Transformaciones en el plano.* Alianza de Matemáticas y Ciencias del Turabo Universidad del Turabo, Puerto Rico: Gurabo.
- [3] FULLER, G. y TARWATER, D. (1999), *Geometría Analítica*, séptima edición, Pearson Educación, México.
- [4] LEHMANN, C. (1978), *Geometría Analítica.* LIMUSA, México: Utheta.
- [5] MONTES, S. (2012), *UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO CON ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO HACIENDO USO DEL ENTORNO VISUAL DEL JUEGO PAC-MAN.* Trabajo para optar como Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia, Colombia: Bogotá D.C.
- [6] RAMÍREZ, J. (2007), *Una generalización de la transformación inversión respecto a la cónica elipse.* Tesis de Pregrado en Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia: Bogotá D.C.
- [7] RAMÍREZ, J. Y RUBIANO, G. (2015), A generalization of the spherical inversion. *International Journal of Mathematical Education (Science and Technology)*, Vol. 48(1), 132-149.

- [8] RAMÍREZ, J. RUBIANO, G. Y JURCIC, B. (2015), GENERATING FRACTAL PATTERNS BY USING p -CIRCLE INVERSION. *World Scientific, Vol. 23(4)*, 1550047.1-1550047.13.
- [9] RUBIANO, G. (2010), *Topología general [Un primer curso]*. Bogotá, Colombia: UN.
- [10] SMOGORZHEVSKI, S. (1978), *Acerca de la Geometría de Lobachevski*. Lecciones populares de Matemáticas, Editorial MIR. Moscú.
- [11] UZCÁTEGUI, C. (2013), *Los números reales y el infinito*. Bogotá, Colombia: Uniandes.