Melodías matemáticas: estrategias para la formación de profesores en la intersección de música y matemáticas

Geraldine Bustos Barrera

Código 2020140009

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D. C., Colombia

2025

Melodías matemáticas: estrategias para la formación de profesores en la intersección de música y matemáticas

Geraldine Bustos Barrera

Código 2020140009

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Licenciada en Matemáticas

Director:

Mg. César Guillermo Rendón Mayorga

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D. C., Colombia

2025

Dedicatoria

A mis papás, faros en mi oscuridad,
raíces firmes que me enseñaron a resistir el
viento y alas que me empujaron a volar alto.
A mi hermana, mi eterna compañera
de viaje y mi abrigo en los días fríos.
Y a mis amigos, chispas que
encendieron mi motor cuando la ruta se
volvía cuesta arriba.
Este trabajo es fruto del amor que
todos ustedes me han dado. Gracias por
creer en mí, incluso cuando yo no lo hacía.

Geraldine Bustos Barrera

Agradecimientos

Primero, agradezco a Dios, por darme la vida, la fuerza y la claridad para llegar hasta aquí. Por acompañarme en los momentos de incertidumbre, sostenerme en las caídas y llenar mi camino de propósito.

A mis papás, Elizabeth y Edgar, por su amor infinito y por enseñarme que merezco comerme el mundo. Gracias por darme cada herramienta para ganármelo, por estar conmigo en cada paso y por ser mi refugio incluso en los días más difíciles. Nada de esto habría sido posible sin ustedes.

A mi hermana, Vanessa, por ser mi apoyo incondicional, mi confidente, por sostenerme cuando sentí que caía y por recordarme con su ejemplo que siempre se puede seguir adelante.

A mis amigos por llenarme de valor, motivación e inspiración. Gracias por cada palabra, cada abrazo, cada risa que me ayudó a continuar cuando las fuerzas me flaqueaban.

A mi asesor, César, por su paciencia, dedicación y por compartir generosamente sus conocimientos. Gracias por acompañarme con respeto, disposición y sabiduría en este proceso tan importante para mí.

A mi profesor de colegio, Iván, quien sin saberlo sembró en mí el deseo de enseñar. Gracias por mostrarme que inspirar a otros es una vocación hermosa y por encender esa chispa que me trajo hasta aquí.

A la Universidad Pedagógica Nacional, por abrirme las puertas al conocimiento, al pensamiento crítico y a la construcción de mi identidad profesional. Gracias por ser el escenario en el que pude crecer, equivocarme y aprender.

Este trabajo es el reflejo del amor, la fe y la confianza que tantas personas han depositado en mí.

Resumen

Este trabajo de grado propone el diseño de una secuencia de tareas con sentido profesional orientadas a la formación de futuros profesores de matemáticas, a través de la exploración de conexiones entre esta disciplina y la música. El trabajo se inscribe dentro de un enfoque cualitativo y exploratorio y recoge referentes históricos, teóricos y didácticos –desde el monocordio de Pitágoras hasta los ritmos euclidianos y la música fractal– que sustentan la relación entre música y matemáticas; se propone su uso pedagógico en escenarios de formación inicial docente. La propuesta de tareas busca no solo enriquecer el conocimiento matemático del profesor en formación, sino también fomentar su creatividad, pensamiento crítico e interdisciplinariedad. Entre los hallazgos, derivados de la prueba piloto de una de las tareas, se destaca que los futuros educadores valoran positivamente las estrategias contextualizadas que permiten resignificar conceptos matemáticos mediante la experimentación y el juego musical.

Contenido

1 Introducción 8
2 Aspectos generales 11
2.1 Justificación 11
2.2 Objetivos 13
2.2.1 General 13
2.2.2 Específicos 13
3 Marco de referencia 14
3.1 Marco matemático-musical 14
3.1.1 Pitágoras y el monocordio 15
3.1.2 Mozart y la composición aleatoria 16
3.1.3 Atonalidad y dodecafonismo 18
3.1.4 Música estocástica 20
3.1.5 Música fractal 22
3.1.6 Transformaciones geométricas 23
3.1.7 Funciones a partir de partituras 25
3.1.8 Escalas musicales y aritmética modular 36
3.1.9 Ritmos euclidianos 37
3.1.10 Sucesión de Fibonacci y razón áurea 38
3.2 Tareas con sentido profesional 40
3.3 Aspectos curriculares 42
4 Aspectos metodológicos 44
4.1 Investigación cualitativa 44
4.2 Descripción de los momentos o fases del trabajo 45
4.2.1 Fase 1: Arqueo de fuentes 45
4.2.2 Fase 2: Revisión 45
4.2.3 Fase 3: Cotejo 46
4.2.4 Fase 4: Delimitación de tarea 49
4.2.5 Fase 5: Diseño de tareas 50
4.2.6 Fase 6: Implementación 88
4.2.7 Fase 7: Análisis de resultados 89
4.2.8 Fase 8: Conclusiones 89
5 Resultados 91
6 Conclusiones 98
7 Referencias 102
8 Anexos 107
Contextualización de las matemáticas y escala diatónica (Anexo A) 107

Transportar y retrogradar (Anexo B) 110
Juego de dados de Mozart (Anexo C) 113
Música estocástica (Anexo D) 115
Respuestas de los estudiantiles (Anexo E) 117

1 Introducción

A lo largo de la historia del pensamiento humano, la relación entre la música y las matemáticas ha sido una constante fuente de inspiración, análisis y creatividad. Desde las investigaciones de Pitágoras con el monocordio, hasta las composiciones algorítmicas de Xenakis, estas dos disciplinas han dialogado en múltiples niveles, demostrando que la estructura, el ritmo, la proporción y la simetría son elementos compartidos que permiten tejer puentes entre lo numérico y lo sonoro. Esta convergencia entre lo matemático y lo musical ha sido explorada desde diversas perspectivas, revelando una profunda interdependencia entre ambas formas de conocimiento. Sin embargo, en el ámbito educativo, especialmente en la formación inicial de profesores de matemáticas, estas conexiones interdisciplinarias suelen permanecer en un segundo plano, opacadas por enfoques tradicionales, rígidos y descontextualizados.

Este trabajo de grado surge precisamente como una respuesta a dicha situación. En el marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y, en particular, a partir de la experiencia formativa de la autora se reconoce la necesidad de enriquecer el horizonte profesional del futuro profesor más allá del dominio conceptual de los contenidos matemáticos. Se plantea entonces el reto de diseñar e implementar tareas con sentido profesional que inviten al profesor en formación a explorar nuevas formas de enseñar matemáticas, incorporando elementos musicales que favorezcan una comprensión más integral y significativa del conocimiento.

El trabajo parte de una revisión documental en la que se identifican diversos puntos de cruce entre las matemáticas y la música, tales como el uso de proporciones en la afinación de escalas, la aritmética modular en la construcción de estructuras tonales, los fractales en las composiciones de Bach o Beethoven, las permutaciones en el juego de dados de Mozart, así

como las transformaciones musicales que pueden ser representadas formalmente como funciones matemáticas. A partir de estas conexiones, se construyen las bases teóricas para diseñar tareas que integren ambos lenguajes, el musical y el matemático, dentro de la formación inicial docente, permitiendo a los futuros educadores resignificar conceptos matemáticos complejos a partir de experiencias musicales.

Metodológicamente, el trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo de tipo exploratorio, con una intención interpretativa. No se busca generalizar resultados ni establecer causalidades, sino enfrentar a los futuros profesores a propuestas pedagógicas distintas a las usuales que lo invitan a pensar de forma creativa y contextualizada. Para ello, se diseñó una secuencia de tareas fundamentadas en algunas de las relaciones entre música y matemáticas; una de estas tareas fue implementada en el curso de Probabilidad de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el que se exploró cómo los futuros profesores abordan el concepto de permutaciones con repetición desde una perspectiva musical, reflexionan sobre su práctica y reconfiguran sus concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, la propuesta podría configurar una ampliación de las posibilidades formativas de la Licenciatura en Matemáticas, apostando por una mirada interdisciplinar que reconoce en la música no solo un recurso didáctico, sino también un terreno fértil para la exploración matemática, la creatividad docente y el desarrollo de pensamiento crítico. Se espera, con ello, contribuir a una formación de profesores más integral, sensible a los múltiples lenguajes que configuran el conocimiento humano y capaz de construir propuestas de enseñanza significativas, contextualizadas y transformadoras.

Este trabajo de grado se estructura en siete capítulos que guían al lector a través del desarrollo de la propuesta. El primer capítulo, dedicado a los aspectos generales, expone la

justificación y los objetivos que dan origen a la investigación, enmarcando la necesidad de integrar la música como herramienta en la formación de docentes de matemáticas.

El segundo capítulo presenta el marco de referencia, en el que se abordan los principales referentes conceptuales, desde la relación histórica entre música y matemáticas, hasta elementos como las permutaciones, transformaciones musicales y tareas con sentido profesional.

En el tercer capítulo se detallan los aspectos metodológicos, explicando el enfoque cualitativo y exploratorio que orientó la investigación, así como las fases que la componen, desde el diseño hasta la implementación de la propuesta.

El cuarto capítulo recoge los resultados obtenidos tras aplicar una de las tareas diseñadas, destacando cómo los futuros profesores resignificaron nociones matemáticas a partir de experiencias musicales. Luego, el quinto capítulo presenta las conclusiones del proceso, señalando los aprendizajes logrados y proponiendo caminos para futuros trabajos.

Finalmente, el documento incluye un apartado de referencias, con todas las fuentes consultadas y un capítulo de anexos con materiales complementarios, como partituras, escalas y recursos didácticos que respaldan la propuesta desarrollada.

2 Aspectos generales

Esta sección expone la justificación y los objetivos de una propuesta que busca integrar música y matemáticas en la formación de profesores, mediante el diseño de tareas con sentido profesional.

2.1 Justificación

A lo largo de los años de formación como futura educadora matemática de la autora se han reconocido ciertas interacciones y prácticas educativas en diferentes colegios, asociadas a enfoques tradicionales y convencionales; este asunto ya ha sido reportado previamente por autores como Villamizar et al. (2012), quienes hablan sobre una enseñanza de las matemáticas «que incluye prácticas tradicionales, memorísticas y punitivas, enseñanza sin diálogo, desligada de la vida real del aprendizaje y de otras disciplinas del conocimiento» (p. 60). De ahí que pueda ser oportuno pensar en que las matemáticas escolares se deben enseñar con contextos para ser usadas, atendiendo además a las normativas del Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006) en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Una de las intenciones de enseñar matemáticas con contexto es que los estudiantes puedan visibilizar su utilidad y le den mayor significado a las mismas.

La usual ausencia de respuestas que muestren la utilidad de lo que se enseña, solo significa que como profesores se debe saber algo más que solo matemáticas. Como profesores, al conocer sobre diversos temas que se relacionen o se puedan explicar desde las matemáticas, se puede generar una mayor articulación del conocimiento y a su vez mejorar el rendimiento académico en los estudiantes (Rico, 2004). Sin embargo, en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional el aspecto de la interdisciplinariedad no es tan fuerte, pero se puede mejorar.

Es precisamente lo anterior a lo que le apunta esta propuesta de trabajo de grado. Se propone aprovechar la relación estrecha que se ha generado desde hace muchos siglos entre las matemáticas y la música, para que los futuros educadores matemáticos tengan oportunidad de desarrollar otros conocimientos, aparte de los exclusivamente matemáticos. La idea es poder cerrar un poco más la brecha de lo que un profesor puede articular en sus clases de matemáticas relacionándolo con otras áreas, en este caso la música, sin pretender que el profesor se convierta en experto en otros campos. Específicamente, se propone el diseño de una secuencia de tareas dirigidas a profesores de matemáticas en formación a través de las cuales puedan reconocer y utilizar distintas conexiones existentes entre las matemáticas y la música (por ejemplo, la proporcionalidad y los sonidos de la escala música, el juego de dados aleatorios de Mozart).

Si bien la relación música-matemáticas ha existido desde hace milenios, en los últimos años es un tema del que se han generado múltiples estudios: desde transformaciones musicales con geometría (Diciembre, 2019), hasta análisis de datos topológicos de la música coreana en Jeongganbo (Lan Tran et al., 2023); diferentes eventos como la Conferencia Internacional sobre Matemáticas y Computación en la Música (MCM) en 2024; así como la existencia de revistas académicas que se encargan de estudiar las relaciones existentes y nacientes entre estas dos áreas (*Journal of Mathematics and Music, Musicae Scientiae, Organised Sound*, entre otras).

Este interés globalizado y actual es el que hace pensar que proponer el diseño de tareas para la formación de profesores para aprender sobre la relación música-matemáticas es un asunto de actual importancia y que contribuiría a una formación más integral de los futuros profesores. Así, a continuación, se presentan los objetivos del trabajo de grado que guiarán la propuesta.

2.2 Objetivos

2.2.1 General

Diseñar una secuencia de tareas dirigidas a la formación de profesores de matemáticas en las que se presenten relaciones entre la música y las matemáticas, a través del estudio de diferentes investigaciones existentes sobre el tema, para potenciar la formación de los futuros educadores matemáticos.

2.2.2 Específicos

1) Identificar distintas conexiones existentes entre la música y las matemáticas a través de una revisión documental.
2) Elaborar un conjunto de tareas con sentido profesional para profesores en formación en las que se evidencien relaciones entre la música y las matemáticas.
3) Realizar el pilotaje de al menos de una de las tareas diseñadas con el fin de obtener algunas conclusiones generales.

3 Marco de referencia

El presente capítulo desarrolla los fundamentos conceptuales y teóricos que sustentan la propuesta, explorando las múltiples conexiones entre la música y las matemáticas a lo largo de la historia. Se abordan referentes teóricos que permiten entender cómo nociones como proporción, simetría, probabilidad, transformación y modularidad han sido compartidas y reinterpretadas por ambas disciplinas. Este recorrido no solo evidencia la riqueza de la relación música-matemáticas, sino que ofrece un marco sólido para el diseño de tareas orientadas a la formación de futuros profesores de matemáticas. Asimismo, se presentan elementos clave sobre qué se entiende por tareas con sentido profesional y cómo pueden articular conocimientos matemáticos, didácticos y contextuales en la formación inicial de profesores. Finalmente, se consideran aspectos curriculares relevantes que permiten vincular esta propuesta con las orientaciones del sistema educativo colombiano.

3.1 Marco matemático-musical

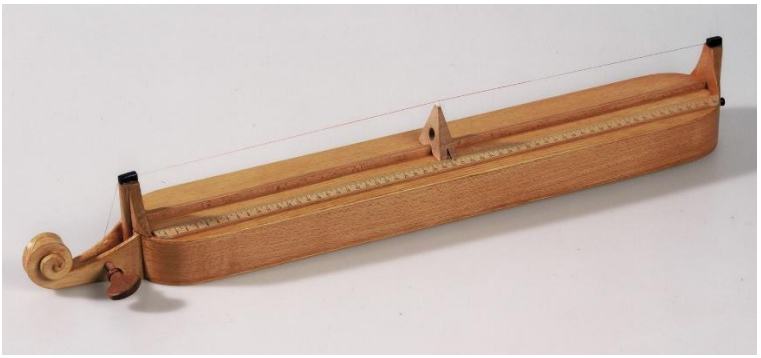
La relación entre la música y las matemáticas tiene una historia larga y fascinante, llena de descubrimientos que van desde los patrones más básicos de la armonía, hasta complejos sistemas de composición. Pitágoras (570 a. C. - 490 a. C.), por ejemplo, descubrió que los sonidos podían entenderse mediante proporciones matemáticas usando un simple monocordio. Más tarde, Mozart (1756 - 1791) incorporó el azar en su música con un juego de dados, creando piezas únicas en cada tirada. A lo largo de los siglos, los compositores han explorado formas creativas de aplicar conceptos matemáticos: Schönberg (1874 - 1951) introdujo el dodecafonismo para dar igualdad a cada nota, mientras Xenakis (1922 - 2001) empleó probabilidades para componer piezas musicales aleatorias. Desde las proporciones en las

composiciones de Bartók (1881 - 1945), hasta los ritmos generados por algoritmos inspirados en Euclides, este marco teórico relata ejemplos que muestran cómo las matemáticas han sido fuente de ideas para la música. Además, es una prueba de que conceptos como la probabilidad, la simetría o las series pueden explorarse de forma creativa, despertando el interés y la curiosidad en quienes aprenden sobre estas conexiones.

3.1.1 Pitágoras y el monocordio

Según Gonzáles (2006), Pitágoras (570 a. C. - 490 a. C.) fue una de las primeras personas en indagar sobre relaciones entre música y matemáticas. Él utilizó un instrumento llamado monocordio, que consistía en una sola cuerda estirada sobre un marco con un puente móvil (Figura 1). Pitágoras descubrió que, al dividir la cuerda en diferentes longitudes, se producían diferentes sonidos.

Figura 1
Monocordio



Nota. La imagen muestra un antiguo instrumento de cuerda utilizado tradicionalmente para estudios acústicos y musicales. Se compone de una caja de resonancia, una única cuerda tensa, un puente móvil para dividir la cuerda en diferentes proporciones y una regla o escala graduada.

Así, Pitágoras concluyó que la relación entre las longitudes de las cuerdas y las frecuencias de los sonidos se podía expresar mediante razones. Por ejemplo, una cuerda cuya longitud es la mitad de otra produce una nota que es una octava más alta. Pitágoras identificó

varias proporciones fundamentales que se convirtieron en la base de la teoría musical occidental: Octava (1:2), Quinta (2:3) y Cuarta (3:4).

Sin embargo, esto también reveló una limitación llamada «coma pitagórica», que se refiere a la diferencia en la afinación al sumar quintas justas[1] y restar octavas. Esta discrepancia se convirtió en un problema práctico para los músicos, afectando la afinación de instrumentos y la armonía. La solución a esta problemática la presentó Marin Mersenne en el siglo XVII. Él propuso una escala cromática[2] en la que los intervalos eran iguales, permitiendo así transposiciones más fluidas entre tonalidades y resolviendo las dificultades derivadas de la afinación pitagórica. Como señala Fuentes y Sandoval (2017), los pitagóricos descubrieron que las consonancias musicales —como la cuarta, la quinta y la octava— podían expresarse como razones entre longitudes de cuerdas tensadas, siendo el monocorde el instrumento central en estos experimentos. Estas razones no solo representaban relaciones numéricas, sino también intervalos físicos medibles, y dieron origen a conceptos fundamentales de la teoría de las proporciones en la matemática griega.

3.1.2 Mozart y la composición aleatoria

La obra «Juego de dados» de Amadeus Mozart (1756-1791) ilustra cómo los principios de la aleatoriedad pueden integrarse en la composición musical. En este juego, Mozart creó 176 compases para los minuetos[3] y 96 compases para los tríos[4]. Los compases fueron numerados y organizados estratégicamente en tablas, de modo que los jugadores, al lanzar los dados, pudieran

[1] Las justas en música son intervalos que suenan estables y agradables, como la cuarta, la quinta y la octava. Se llaman así porque históricamente se consideran "correctas" o "puras" al oído.
[2] Es una sucesión de doce sonidos consecutivos separados por semitonos.
[3] Un minueto es una pieza musical corta, escrita en compás de 3 tiempos (3/4) al igual que un vals, que se usaba mucho en los siglos XVII y XVIII. Tiene un ritmo elegante y moderado.
[4] Un trío en música es una sección que contrasta con el minueto y suele colocarse entre dos repeticiones del mismo. Generalmente, es más suave o ligero que el minueto.

seleccionar y clasificar fragmentos previamente compuestos por Mozart, según lo indicado en la Tabla 1. Esta actividad resulta en un espacio muestral de 6616 combinaciones para posibles piezas, lo que prácticamente garantiza una nueva pieza en cada jugada. Este enfoque resalta la naturaleza lúdica de la música en la época de Mozart y sugiere un método innovador para la creación musical (Gonzáles, 2006).

Tabla 1

Tablas dados de Mozart

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII		IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	96	22	141	41	105	122	11	30	**2**	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	**3**	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	**4**	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	**5**	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	**6**	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	**7**	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	**8**	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	**9**	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	**10**	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	**11**	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	**12**	35	20	108	92	12	124	44	131

Nota. La tabla es una herramienta para seccionar el compás en orden, dependiendo de los lanzamientos de los dados.

Además, Pérez (2020) menciona que la actividad «Juego de dados de Mozart» no solo permite a los estudiantes explorar la creatividad a través de la música, sino que también enseña conceptos matemáticos fundamentales. Al analizar el espacio muestral y la distribución de probabilidad, los estudiantes pueden comprender mejor las matemáticas involucradas en la composición musical. Además, la pieza musical generada, completamente única, cumple con una estructura de toda una obra musical con incertidumbre y resolución. A su vez, esta actividad invita a la reflexión sobre la naturaleza de la creatividad y la interacción social en la música. A continuación, se presenta un enlace (Figura 2) al vídeo titulado «El juego de los dados de Mozart» para ver la composición de una obra siguiendo este método (minuto 10:30):

Figura 2

Video «El juego de los dados de Mozart»

Nota. La imagen muestra una ilustración que hace referencia a un video sobre «El juego de los dados de Mozart». En ella se encuentra el vínculo al video https://www.youtube.com/watch?v=aV4vE2a47ac .

Figura 3

QR «El juego de los dados de Mozart»

Nota. La imagen muestra un código QR que dirige al video «El juego de los dados de Mozart».

3.1.3 Atonalidad y dodecafonismo

El desarrollo de la atonalidad y el dodecafonismo en el siglo XX, impulsado por compositores como Arnold Schoenberg (1874-1951), marcó un cambio radical en la música occidental (Gonzáles, 2006). La atonalidad se refiere a la ausencia de una tonalidad central en una composición musical; esto significa que no hay una nota o acorde que funcione como un «centro» en el que las demás notas giren, lo que resulta en una música que puede sonar más libre y menos predecible. Arnold Schönberg, uno de los principales exponentes de la atonalidad, buscó nuevas formas de expresión que rompieran con la tradición tonal. En su obra, especialmente en sus primeras piezas atonales, se puede observar una clara ruptura con el sistema tonal, promoviendo la idea de que la música podía existir sin una jerarquía de notas (Almarza, 2018).

Almarza (2018) además explica que el dodecafonismo, también desarrollado por Schönberg, es un sistema que utiliza las 12 notas de la escala cromática[5] dándoles el mismo nivel de importancia, formando una serie que sirve como base para la composición. Este método

[5] Las 12 notas de la escala cromática son: do, do sostenido, re, re sostenido, mi, fa, fa sostenido, sol, sol sostenido, la, la sostenido, si. La expresión «sostenido» significa que se aumenta en medio tono la nota original.

establece que todas las notas deben ser usadas antes de repetir alguna, lo que garantiza que ninguna nota tenga un protagonismo especial, a diferencia de las estructuras tonales tradicionales.

Este enfoque permite a los compositores explorar nuevas sonoridades y texturas, aunque se basa en principios matemáticos subyacentes. Las relaciones entre las notas y su organización en la serie dodecafónica pueden entenderse a través de la teoría de conjuntos, demostrando cómo la música puede ser interpretada a través de herramientas matemáticas. Según De la Vega (2020), cada conjunto de 12 notas es tratado como un conjunto de elementos que se pueden manipular mediante operaciones o transformaciones como la transposición, inversión y retrogradación. Estos procesos son análogos a las operaciones en teoría de conjuntos, en las cuales se pueden realizar transformaciones sin alterar la «identidad» del conjunto.

En este contexto, cada nota se representa con un valor numérico dentro del sistema módulo 12, permitiendo que estas transformaciones actúen como funciones sobre el conjunto. Por ejemplo, la transposición puede verse como una suma modular: si a la nota do se le suma 2 semitonos, se obtiene re. La inversión sería como reflejar las distancias: si una melodía sube de do a mi (4 semitonos), su inversión bajaría de do a la♭ (también 4 semitonos en dirección opuesta). La retrogradación, en cambio, consiste en tocar la melodía al revés: si la secuencia es do–re–mi, su retrogradación será mi–re–do.

Estas operaciones preservan ciertas propiedades del conjunto original, como la disposición relativa de los intervalos y el orden de aparición de las notas, lo que permite estudiar la serie dodecafónica no solo como una secuencia musical, sino como una estructura matemática que puede ser analizada formalmente. Así, la música atonal se convierte en un campo fértil para aplicar conceptos como permutaciones, simetrías y clases de equivalencia, lo cual refuerza la

idea de que la composición musical también puede ser una forma de razonamiento lógico y abstracto. Para profundizar en este asunto se sugiere leer a Pachón (2015).

3.1.4 Música estocástica

Iannis Xenakis (1922-2001) llevó la relación entre matemáticas y música a nuevas alturas con su enfoque estocástico. La música estocástica se caracteriza por el uso de procesos aleatorios en la composición, permitiendo un grado de indeterminación en la ejecución. Xenakis aplicó teorías matemáticas para crear obras que exploraban la relación entre el azar y el control compositivo. En lugar de estructurar la música mediante métodos deterministas, la música estocástica se basa en cálculos probabilísticos, utilizando funciones matemáticas como las distribuciones de probabilidad para definir parámetros musicales como ritmo, altura, y densidad sonora (Gonzáles, 2006).

Xenakis describía esta técnica como una manera de liberar la composición de las limitaciones tradicionales y exploraba el uso de procesos estocásticos como el ruido blanco, las cadenas de Markov y los procesos de Poisson. Esta metodología dio lugar a obras que parecían estar al borde del caos, pero que eran resultado de cálculos precisos que ofrecían una nueva experiencia sonora (Vázquez, 2008). Además, Gonzáles (2006) plantea que en obras como «Metástasis», Xenakis utiliza modelos matemáticos para crear «masas de sonido» en las que la distribución de elementos individuales es impredecible, pero el comportamiento del conjunto sigue un patrón comprensible.

Enseguida, se presentan enlaces para escuchar algunas de las obras de Xenakis (Figura 4 y Figura 6):

Figura 4

Obra de Xenakis 1

Nota. La imagen muestra una imagen de un video de una orquesta de cuerdas tocando una composición de Xenakis. En ella se encuentra el vínculo al video https://www.youtube.com/watch?v=SCe25-TXbFk .

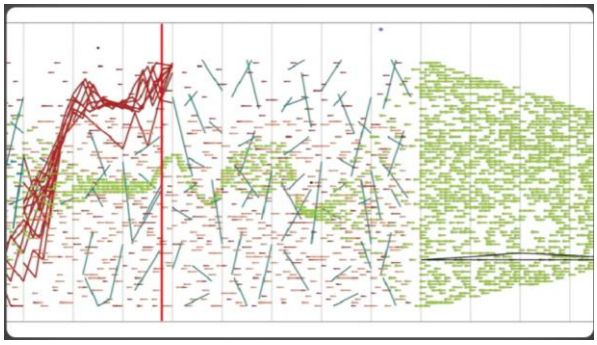
Figura 5

QR Obra de Xenakis 1

Nota. La imagen muestra un código QR que dirige a un video de una orquesta de cuerdas tocando una composición de Xenakis.

Figura 6

Obra de Xenakis 2



Nota. La imagen muestra una partitura gráfica, un tipo de notación musical alternativa que utiliza símbolos visuales no convencionales para representar sonidos. En ella se encuentra el vínculo al video correspondiente a dicha imagen https://www.youtube.com/watch?v=nvH2KYYJg-o.

Figura 7

QR Obra de Xenakis 2

Nota. La imagen muestra un código QR que dirige a un video de una composición de Xenakis.

Este enfoque refleja una comprensión profunda de la teoría de probabilidades y la estadística, integrando conceptos matemáticos en la creación musical. Xenakis también aplicó principios geométricos en su música, utilizando formas y espacios para estructurar sus composiciones, lo que destaca aún más la relación entre estas disciplinas. Para profundizar en este asunto se sugiere leer a Tiburcio (2006).

3.1.5 Música fractal

La música fractal se define por la repetición de patrones y estructuras autosimilares[6], características que se encuentran en la naturaleza y las matemáticas. Compositores como Johann Sebastian Bach (1685-1750), Ludwig van Beethoven (1770-1827) y Wolfgang Amadeus Mozart (1756 - 1791) incorporaron estos patrones en sus obras (Gonzáles, 2006). En el documento de Degazio (1986) se describe cómo la geometría fractal puede aplicarse en la música a través de la creación de estructuras autosimilares y complejas. Básicamente, la idea es utilizar patrones repetitivos y escalables que aparecen en los fractales para formar melodías y ritmos. Estas estructuras permiten que una pequeña sección de la composición tenga características similares a la totalidad de la obra, generando una coherencia interna que puede ser tanto armónica como rítmica.

Degazio (1986) menciona métodos específicos para aplicar los fractales en la música, como el uso de algoritmos que generan secuencias basadas en patrones fractales, tales como el conjunto de Mandelbrot. De esta manera, al dividir una melodía o ritmo en secciones y aplicar un proceso de autosimilitud, se crean variaciones que mantienen un tema constante, pero a diferentes escalas, logrando así una progresión rítmica o melódica que se percibe familiar pero siempre cambiante.

Por ejemplo, en la «Primera *Escossaien*» de Beethoven, la estructura de 32 compases se organiza en secciones y períodos binarios, mostrando una clara jerarquía. Estas estructuras reflejan la naturaleza de los fractales, en los cuales los patrones simples pueden combinarse para formar composiciones complejas. El uso de motivos repetitivos en obras de Bach también se

[6] Es una propiedad por la cual una figura o estructura se repite a sí misma a diferentes escalas.

puede analizar desde esta perspectiva, resaltando cómo la música puede ilustrar principios matemáticos (Gonzáles, 2006).

Esta metodología permite que la música obtenga una calidad similar a la de los patrones naturales, brindando un sentido de unidad y variación en el tiempo. Es un enfoque que, como señala Degazio (1986), proporciona nuevas posibilidades para los compositores interesados en integrar conceptos matemáticos y geométricos en su trabajo creativo. Enseguida un enlace para escuchar un fragmento de la obra «*Allegro vivace*» (Figura 8) en la que está presente la música fractal:

Figura 8

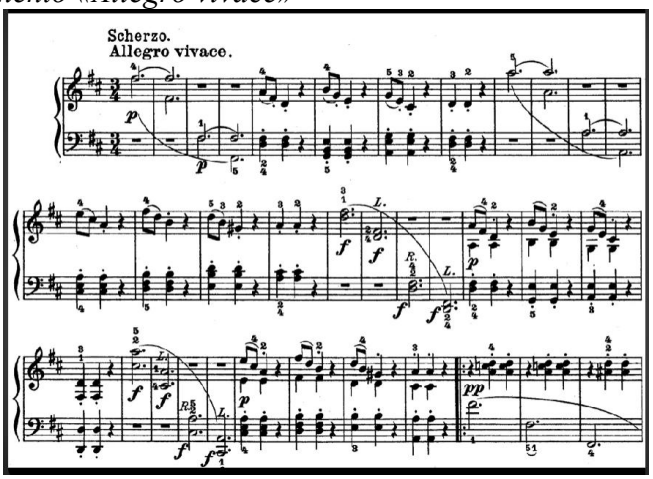
Fragmento «Allegro vivace»

Nota. La imagen muestra un fragmento de video en el que se reproduce *«Allegro vivace» con su* partitura. En ella se encuentra el vínculo al video https://www.youtube.com/watch?v=obCaI57OXbY&t=66s .

Figura 9

QR Fragmento «Allegro vivace»

Nota. La imagen muestra un código QR que lleva al video en el que se reproduce *«Allegro vivace» con su* partitura.

3.1.6 Transformaciones geométricas

Las transformaciones geométricas como traslación, reflexión y rotación son elementos que se pueden observar en muchas partituras. Según García (2005) consisten en aplicar estos conceptos de geometría en la traslación musical, la inversión, la retrogradación y la ampliación para modificar estructuras musicales. Gonzáles (2006) comenta que estas técnicas permiten

explorar la relación entre la música y la simetría matemática, generando variaciones y complejidad en la composición. Compositores como Joseph Haydn (1732-1809) y Ludwig van Beethoven (1770-1827) utilizaron estas transformaciones para desarrollar temas y motivos a lo largo de sus obras. Por ejemplo, en la «Sonata *Hammerklavier*» de Beethoven se pueden identificar reflexiones en la estructura de la obra.

La traslación, por ejemplo, desplaza las notas de una serie musical hacia arriba o hacia abajo en la escala cromática, mientras que la inversión implica la reproducción de una serie de notas de modo reflejado, creando un efecto de «espejo». La retrogradación organiza las notas en orden inverso, desde el final al principio, y la ampliación alarga los valores rítmicos y melódicos para crear una versión expandida de la secuencia original. Estos métodos son especialmente destacados en la música serial y en el dodecafonismo de Schönberg, las cuales permiten la construcción de una estructura coherente y simétrica dentro de la composición musical (García, 2005). A continuación, se presenta un ejemplo de traslación en un fragmento musical (Figura 10) y una reflexión (Figura 11).

Figura 10

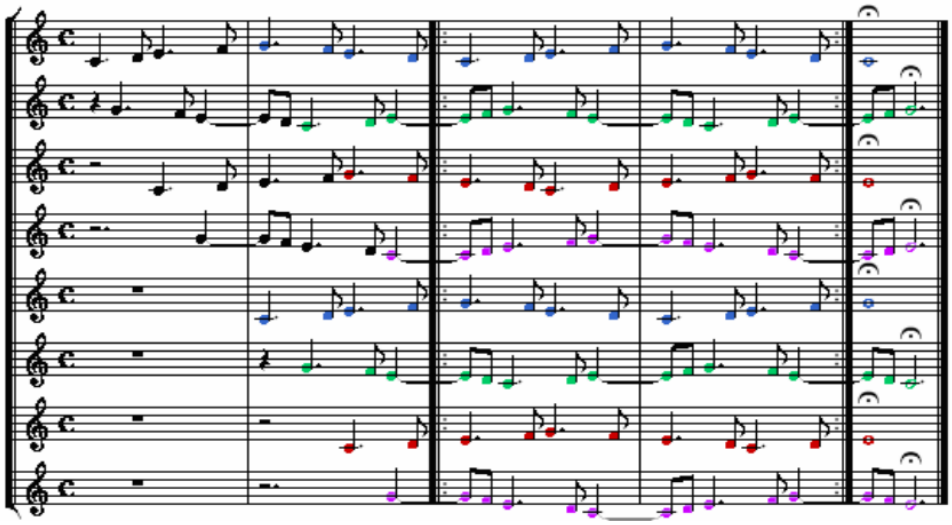
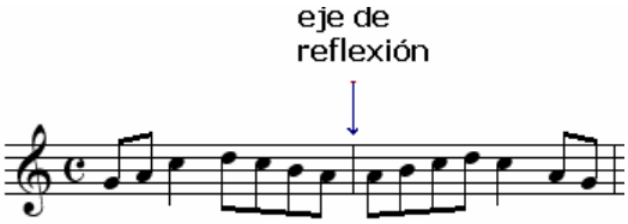
Ejemplo traslación

Nota. En la imagen se muestra una partitura en la que las filas de notas azules se pueden ver como una traslación, lo mismo para las filas de notas verdes, rojas y moradas.

Figura 11
Ejemplo reflexión

Nota. En la imagen se muestra una partitura que se ve reflejada respecto al tiempo, la línea señalada es el eje de reflexión de los compases.

La música palíndroma, se refiere a aquellas composiciones que pueden leerse igual de adelante hacia atrás, es decir, tienen una estructura simétrica que permite que el material musical se reproduzca de forma idéntica en ambas direcciones. Esta técnica está presente en la música desde el período barroco hasta el contemporáneo, y uno de sus usos más complejos fue desarrollado en el siglo XX por compositores como Anton Webern (1983-1945), quien exploró la simetría en piezas como su «Variaciones para piano Op. 27», en las que implementa secuencias palíndromas que logran una estructura formal única (Pérez, 2019). Según Pérez (2020), obras de compositores como Mozart presentan estas características. La exploración de la simetría y las funciones en la música permite ver la conexión entre la interpretación musical y conceptos matemáticos.

3.1.7 Funciones a partir de partituras

Gonzáles (2006) describe transformaciones de notas musicales comunes en la teoría musical usando matemáticas para representar y manipular notas en composiciones musicales y aplicables en piezas musicales tanto populares como académicas. Estas transformaciones incluyen funciones como transportar (subir o bajar una melodía manteniendo las mismas distancias entre las notas), octavar (subir o bajar de octava[7] una nota), retrogradar (revertir el orden de notas en una melodía), inversiones tonales (reorganización de notas dentro de un

[7] Es la distancia entre dos notas con el mismo nombre pero que suenan más agudas o más graves

acorde) y reales (los ascensos se convierten en descensos y viceversa, manteniendo las mismas distancias en semitonos). Estas serán explicadas con mayor detalle más adelante.

De igual forma, Gonzáles (2006) introduce un método para traducir partituras a una notación matemática. Esto implica asignar a cada nota una terna ordenada (Orden (O), Altura (A) y Duración (D)), creando un conjunto referencial M de combinaciones posibles, en las que cada terna representa características específicas de la pieza musical. Define los conjuntos referenciales de cada coordenada de la siguiente manera:

- $O = \{a | \ 1 \leq a \leq n, \ a, n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto representa el «Orden», es decir la posición de cada nota dentro de la partitura o pieza musical.
- $A = \{b | 0 \leq b \leq 85, \ b \in \mathbb{N}\}$ de manera que los valores de b se corresponden con lo que se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Tabla altura de las notas

1	DO 1	25	DO 3	49	DO 5	73	DO 7
2	DO# 1	26	DO# 3	50	DO# 5	74	DO# 7
3	RE 1	27	RE 3	51	RE 5	75	RE 7
4	RE# 1	28	RE# 3	52	RE# 5	76	RE# 7
5	MI 1	29	MI 3	53	MI 5	77	MI 7
6	FA 1	30	FA 3	54	FA 5	78	FA 7
7	FA# 1	31	FA# 3	55	FA# 5	79	FA# 7
8	SOL 1	32	SOL 3	56	SOL 5	80	SOL 7
9	SOL# 1	33	SOL# 3	57	SOL# 5	81	SOL# 7
10	LA 1	34	LA 3	58	LA 5	82	LA 7
11	LA# 1	35	LA# 3	59	LA# 5	83	LA# 7
12	SI 1	36	SI 3	60	SI 5	84	SI 7
13	DO 2	37	DO 4	61	DO 6	85	DO 8
14	DO# 2	38	DO# 4	62	DO# 6	0	SILENCIOS
15	RE 2	39	RE 4	63	RE 6		
16	RE# 2	40	RE# 4	64	RE# 6		
17	MI 2	41	MI 4	65	MI 6		
18	FA 2	42	FA 4	66	FA 6		
19	FA# 2	43	FA# 4	67	FA# 6		
20	SOL 2	44	SOL 4	68	SOL 6		
21	SOL# 2	45	SOL# 4	69	SOL# 6		
22	LA 2	46	LA 4	70	LA 6		
23	LA# 2	47	LA# 4	71	LA# 6		
24	SI 2	48	SI 4	72	SI 6		

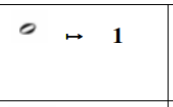
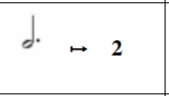
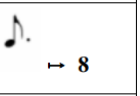
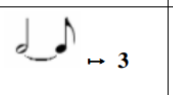
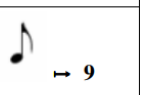
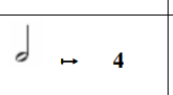
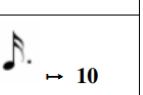
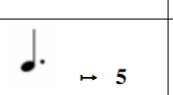
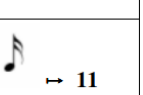
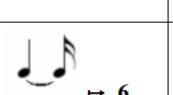
Nota. En la tabla se muestra la correspondencia entre números y alturas de notas musicales, según Gonzáles (2006).

Este conjunto A representa la «Altura», es decir la percepción de cuán agudo o grave es un sonido, siendo do 1 lo más grave y do 8 lo más agudo.

- $D = \{c | 1 \leq c \leq 11,\ c \in \mathbb{N}\}$ de manera que los valores de c se corresponden con lo que se muestra en la tabla 3.

Tabla 3

Tabla duración notas musicales

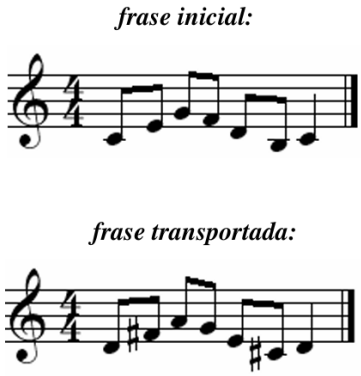
Nota. En la tabla se muestra la correspondencia entre números y las posibles duraciones de las notas musicales, según Gonzáles (2006).

Este conjunto D, la Duración, indica el tiempo que dura la nota al ser interpretada. Se toma una unidad de tiempo arbitraria y esta se divide o amplifica para que dure el doble de dicho tiempo, el triple, cuádruplo, etc., o la mitad, la cuarta parte, la octava o la decimosexta, etc. En notación musical estas duraciones, al ser representadas en un pentagrama[8], se dibujan a través de las figuras musicales presentadas en la Tabla 3.

A continuación, se describen algunas de las transformaciones musicales en términos de funciones de Gonzáles (2006), utilizando ternas ordenadas para representar cada nota en la

[8] Es un conjunto de cinco líneas y cuatro espacios donde se escriben las notas musicales. Cada línea y espacio representa un sonido diferente según la clave que se use, como la clave de sol. El Anexo F muestra como ubicar las notas musicales en el pentagrama con clave de sol.

partitura. La primera de ellas es la **transportación**, que consiste en cambiar una pieza musical o una melodía de una tonalidad a otra. Es decir, se suben o bajan en el pentagrama todas las notas de una composición manteniendo las mismas relaciones entre ellas, pero comenzando desde una nota diferente. En la Figura 12 se ilustra cómo se modifica un compás al aplicar esta transformación. Así, se define la función transportar (t), donde P representa la partitura.

Figura 12
Ejemplo transportar

Nota. En la imagen se muestra un compás o frase antes y después de ser transportado (subido o bajado una cantidad de semitonos), tomado de Gonzáles (2006). Los #[9] significan sostenidos, un semitono arriba de la nota que indica.

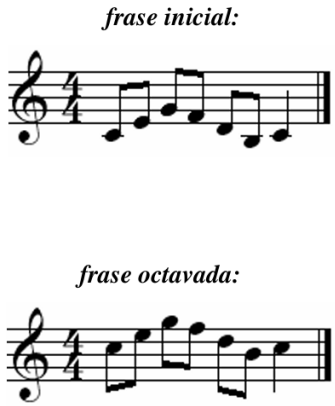
- Transportar: t: $P \rightarrow T(P) \subseteq O \times A \times D$

  $(a, b, c) \mapsto (a, b + k, c)$, para algún $|k| < 12, k \in \mathbb{Z}$ y de tal modo que $1 \leq b + k \leq 85$.

Como se observa, en esta función el único parámetro de la terna original que se modifica es el de la altura. En particular, en la Figura 12 se reconoce que la melodía inicial y la transportada mantienen las mismas duraciones y distancias, lo único que se cambió fueron las notas; la frase inicial era: do-mi-sol-fa-re-si-do, mientras que la frase transportada es: re-fa sostenido-la-sol-mi-do sostenido-re. Es decir, se subió un tono la frase inicial.

[9] # se lee sostenido y significa que está medio semitono arriba o más agudo y ♭ se lee bemol y significa que está medio semitono abajo o más grave.

La segunda transformación es **octavar**, que implica desplazar una nota o un grupo de notas una octava hacia arriba o hacia abajo. Es decir, se toca la misma nota, pero en un registro más agudo (octava arriba) o más grave (octava abajo). La imagen correspondiente (Figura 13) muestra un ejemplo visual de esta modificación aplicada a un compás. A partir de esto, se define la función octavar (o), siendo P la partitura original.

Figura 13
Ejemplo octavar

Nota. La imagen muestra un compás o frase antes y después de ser octavado (subido o bajado una octava o 12 semitonos), tomado de Gonzáles (2006).

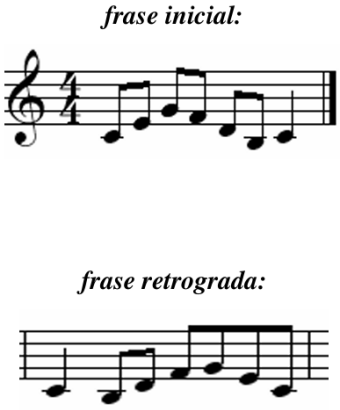
- Octavar: $o: P \rightarrow O(P) \subseteq O \times A \times D$

  $(a, b, c) \mapsto (a, b + k, c),\ |k| = |12n|, k \in \mathbb{Z}$ y de tal modo que $1 \leq b + k \leq 85$.

Aunque la palabra *octava* sugiere ocho notas, en realidad al octavar se suben 12 sonidos porque el sistema musical occidental divide la octava en 12 semitonos iguales, no en ocho. la confusión viene de contar solo las notas naturales (do, re, mi, fa, sol, la, si, do), pero entre esos dos do hay también sostenidos y bemoles. Por eso, subir una octava equivale a avanzar 12 pasos cromáticos, no 8.

Por su parte, **retrogradar** hace referencia a invertir el orden de los sonidos de una secuencia o fragmento musical, tocándolos o escribiéndolos al revés en el tiempo. Es decir, se reproduce una serie de notas desde la última hasta la primera, como si se leyera «de atrás hacia

adelante». La Figura 14 permite visualizar cómo se transforma el compás bajo esta operación. De esta manera, se introduce la función retrogradar (r), tomando como base la partitura P.

Figura 14
Ejemplo retrogradar

Nota. La imagen muestra un compás o frase antes y después de que se le aplique una retrogradación (reorganizar las notas desde la última hasta la primera), tomado de Gonzáles (2006).

Como se observa, la frase inicial era do-mi-sol-fa-re-si-do; mientras que la frase retrograda es do-si-re-fa-sol-mi-do.

- Retrogradar: $r: P \rightarrow R(P) \subseteq O \times A \times D$

  $(a, b, c) \mapsto (n - a + 1, b, c), n$ el orden de P.

Como el objetivo de esta función es reescribir las notas desde la última hasta la primera, esta afecta únicamente el valor del orden. Para ello, toma el valor de la última nota del fragmento musical, le resta el valor de la posición de la nota en cuestión y le suma uno, ya que de no hacerlo la primera nota tendría un orden de cero, el cual no está definido en la función.

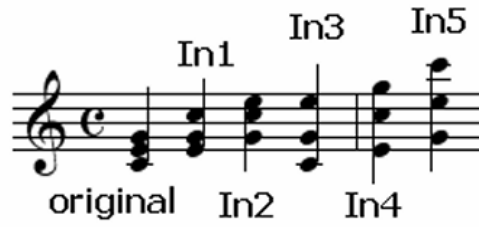
Cada una de las anteriores transformaciones se representa como una función matemática sobre un conjunto de ternas, en las que los resultados de las transformaciones pueden superponerse o combinarse. De manera que también refiere a la composición de funciones y exhibe la asociatividad y conmutatividad para la composición entre cualquiera de las tres funciones.

Las propiedades anteriormente mencionadas para la composición de funciones se pueden demostrar. Por ejemplo, la conmutatividad entre las funciones retrogradar (r) y octavar (o), lo que es igual a $r(o) = o(r)$. Primero, se evalúa $r\big(o(a,b,c)\big)$ como $o(a,b,c) = (a,b+k,c)$, entonces $r\big(o(a,b,c)\big) = r(a,b+k,c)$, que al aplicar la función retrogradar es igual a $r(a,b+k,c) = (n-a+1,b+k,c)$. Luego, parte de que $o\big(r(a,b,c)\big)$ de forma que $r(a,b,c) = (n-a+1,b,c)$, entonces $o\big(r(a,b,c)\big) = o(n-a+1,b,c)$, que al aplicar la función octavar es igual a $o(n-a+1,b,c) = (n-a+1,b+k,c)$. Al ver el resultado de $r\big(o(a,b,c)\big)$ y $o\big(r(a,b,c)\big)$ se nota que los resultados son iguales, quedando demostrado que $r\big(o(a,b,c)\big) = o\big(r(a,b,c)\big)$.

Si se desea demostrar la asociatividad entre las funciones transportar (t), retrogradar (r) y octavar (o) se puede hacer, por ejemplo, de la siguiente manera $r[o(t)] = [r(o)]t$. Primero, se evalúa $r[o(t(a,b,c))]$ como $t(a,b,c) = (a,b+k,c)$, entonces $r[o(t(a,b,c))] = r[o(a,b+k,c)]$. Pero, $o(a,b,c) = (a,b+k,c)$ y k de transportar es distinto al k de octavar por ende la k de octavar para la demostración será l, entonces $o(a,b,c) = (a,b+l,c)$, lo que implica $r[o(a,b+k,c)]= r(a,(b+k)+l,c)$, que al aplicar la función retrogradar es igual a $r[a,(b+k)+l,c] = (n-a+1,(b+k)+l,c)$.

Luego, se evalúa $\big[r\big(o(a,b,c)\big)\big]t$ teniendo en cuenta que $o(a,b,c) = (a,b+l,c)$, entonces $\big[r\big(o(a,b,c)\big)\big]t =[r(a,b+l,c)]t$. Si a lo anterior se le aplica la función retrogradación, $[r(a,b+l,c)]t = (a,(\,b+l)+k,c)t$ y se evalúa la función transportar queda $(a,(\,b+l)+k,c)t = (n-a+1,(\,b+l)+k,c)$. Al aplicar propiedad conmutativa y asociativa al resultado anterior resulta $(n-a+1,(\,b+k)+l,c)$, lo que es igual al resultado de $r[o(t(a,b,c))]$. Así queda demostrado que $r[o(t(a,b,c))] = \big[r\big(o(a,b,c)\big)\big]t$.

Luego, la **inversión tonal** se refiere al cambio en el orden de las notas dentro de un acorde[10], manteniendo la misma tonalidad. Es decir, no se altera el acorde en sí (ni sus notas fundamentales), sino cuál de sus notas ocupa la parte más grave (el bajo) o cómo se reorganizan las alturas que lo componen. A continuación, en la Figura 15 se presenta un ejemplo de una inversión tonal de un acorde de tres notas.

Figura 15
Ejemplo inversión tonal

Nota. La imagen muestra un compás o frase antes y después de que se le aplique una inversión tonal (reorganizar las notas de un acorde)*,* tomado de Gonzáles (2006).

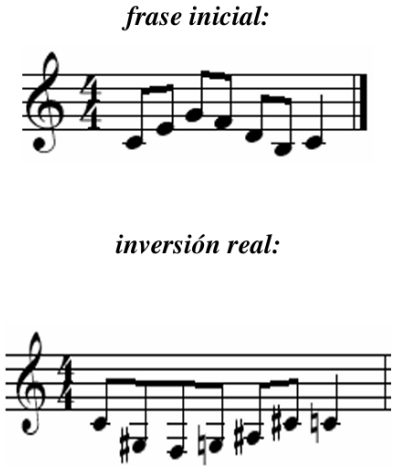
Como se observa, el acorde original era do-mi-sol (estas notas, al interpretarse de manera simultánea se denominan acorde mayor de do); la inversión 1 (In1) son las notas mi-sol-do, con el do en una octava arriba; la inversión 2 (In2) son sol-do-mi, con el do y mi en una octava arriba; la inversión 3 (In3) son do-sol-mi, con el mi en una octava arriba; la inversión 4 (In4) son las notas mi-do-sol, con el do y sol en una octava arriba; y por último, la inversión 5 (In5) es el acorde sol-mi-do, con el mi una octava arriba y el do dos octavas arriba.

Desde un enfoque matemático, estos acordes pueden representarse mediante estructuras como $(a, (b1, b2, b3), c)$ para acordes de tres notas, cuyas inversiones corresponden a todas las permutaciones posibles de sus alturas (seis en total). Para acordes de cuatro notas, se utiliza la forma $(a, (b1, b2, b3, b4), c)$, que permite obtener hasta 24 inversiones.

[10] Es un conjunto de tres o más notas que suenan al mismo tiempo y forman una unidad armónica.

La quinta transformación es la **inversión real**, que consiste en tomar un fragmento melódico y reflejarlo verticalmente respecto a la altura de la primera nota: cada intervalo que suba en la melodía original ahora baja en la misma proporción, y viceversa. La Figura 16 muestra un ejemplo de esta modificación aplicada a un compás.

Figura 16
Ejemplo inversión real



Nota. En la imagen se muestra un compás o frase antes y después de que se le aplique una inversión real (reflejar las notas respecto a la tónica como eje de reflexión horizontal), tomado de Gonzáles (2006).

Como se observa, en la frase de «inversión real» las notas se reflejan respecto a la primera nota que es do. La segunda (mi) estaba cuatro semitonos arriba de do, entonces baja lo mismo respecto a do quedando en sol#. La tercera (sol) estaba siete semitonos arriba de do, entonces baja lo mismo quedando en fa. La cuarta (fa) estaba cinco semitonos arriba de do, entonces baja lo mismo quedando en sol. Así sucesivamente, hasta la sexta nota (si) que estaba medio semitono debajo de do, entonces sube medio semitono respecto a do y queda do#. Como la última nota es do y la distancia de do respecto do es cero semitonos entonces la nota de esa posición sigue siendo do.

A partir de esto, se define la función inversión real (In_R), siendo P la partitura original.

- Inversión real: $\text{In}_\text{R}: P \rightarrow In_R(P) \subseteq O \times A \times D$

$$(a,b,c) \mapsto \begin{cases} (a,b,c), & a = 1 \\ (a, |b^1 - b| + b^1, c), & a \neq 1 \wedge b^1 > b \\ (a, b^1 - |b^1 - b|, c), & a \neq 1 \wedge b^1 < b \end{cases}$$

b^1 altura de la primera nota.

Para las transformaciones posteriores introduce la siguiente notación que genera un cambio en la terna, especialmente en el componente de la altura (b):

do	do#	re	re#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$(a, b_K, c), 1 \leq K \leq 12, K \in \mathbb{Z}$ K tónica o altura de la primera nota.

Por su parte, pasar de modo mayor a menor implica cambiar el carácter de una pieza o fragmento musical, de un sonido alegre, brillante y estable —típico del modo mayor— a uno más melancólico, oscuro o introspectivo, característico del modo menor. En ese sentido, se pasa de un modo con la estructura Tono–Tono–Semitono–Tono–Tono–Tono–Semitono que se utiliza para construir las denominadas escalas mayores, a uno con la estructura Tono–Semitono–Tono–Tono–Semitono–Tono–Tono, empleado para construir las llamadas escalas menores naturales. A continuación, se presenta un ejemplo (Figura 17) de cómo se transforma una escala, bajo esta operación. Posteriormente, se introduce la función modo mayor a menor (Ma_m).

Figura 17

Ejemplo pasar de modo mayor a modo menor

Fase inicial (modo mayor): do-re-mi-fa-sol-la-si-do ***Modo menor:*** do-re-re#-fa-sol-sol#-la#-do

Nota. En la imagen se muestra una escala antes y después de que se le aplique un cambio de modo de mayor a menor.

Como se muestra en la Figura 13, en la fase inicial es el modo mayor de do, de manera que entre do y re hay un tono; entre re y mi hay un tono; entre mi y fa hay un semitono; entre fa y sol un tono; entre sol y la, un tono; entre la y si, un tono y entre si y do, otro semitono. Pero

después de pasar a modo menor de do, entre do y re hay un tono; entre re y re# hay un semitono; entre re# y fa hay un tono; entre fa y sol, un tono; entre sol y sol#, un semitono; entre sol# y la#, un tono y entre la# y do, otro tono.

- Modo mayor a menor: $\text{Ma}_\text{m}: P \rightarrow \text{Ma}_\text{m}(P) \subseteq O \times A \times D$

  $(a, b_K, c) \mapsto (a, b_K - 1, c)$ tal que $b_K = K + 4 + 12p \; o \; b_K = K + 9 + 12p$ para $0 \leq p \leq 7, p$ la octava de la nota y $1 \leq K \leq 12$

La séptima transformación es pasar de modo menor a mayor. Esto implica el proceso inverso al anterior. En ese sentido, se pasa de un modo con la estructura Tono–Semitono–Tono–Tono–Semitono–Tono–Tono a uno con la estructura Tono–Tono–Semitono–Tono–Tono–Tono–Semitono. A continuación, se presenta un ejemplo de cómo se transforma una escala bajo esta operación (Figura 18). Posteriormente, se introduce la función modo menor a mayor (Me_M).

Figura 18

Ejemplo pasar de menor a modo mayor

Fase inicial (modo menor): re-mi-fa-sol-la-la#-do-re ***Modo mayor:*** re-mi-fa#-sol-la-si-do#-re

Nota. En la imagen se muestra una escala antes y después de que se le aplique un cambio de modo de menor a mayor.

Como se muestra en la Figura 18, en la fase inicial es el modo menor de re, de manera que entre re y mi hay un tono; entre mi y fa hay un semitono; entre fa y sol hay un tono; entre sol y la hay un tono; entre la y la#, un semitono; entre la# y do hay un tono y entre do y re, otro tono. Pero después de pasar al modo mayor de re, entre re y mi hay un tono; entre mi y fa# hay un tono; entre fa# y sol hay un semitono; entre sol y la, un tono; entre la y si, un tono; entre si y do#, un tono y entre do# y re, otro semitono.

- Modo menor a mayor: $\text{Me}_\text{M}: P \rightarrow Me_M: (P) \subseteq O \times A \times D$

$$(a, b_K, c) \mapsto (a, b_K + 1, c)$$

Tal que $b_K = K + 3 + 12p \; o \; b_K = K + 8 + 12p$ para $0 \leq p \leq 7 \; y \; 1 \leq K \leq 12, K \in \mathbb{N}$

3.1.8 Escalas musicales y aritmética modular

Según Pardo (2004), en el sistema musical occidental una octava se divide en 12 semitonos, formando un ciclo en el que las notas se repiten. Esto permite asociar las notas con los números del 0 al 11, trabajando con el conjunto $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, así:

- do = 0
- do# = 1
- re = 2
- re# = 3
- mi = 4
- fa = 5
- fa# = 6
- sol = 7
- sol# = 8
- la = 9
- la# = 10
- si = 11

En este sentido se simplifica la comprensión de intervalos musicales. Si subimos un intervalo de 7 semitonos desde do (0), llegamos a sol (7). Si repetimos este salto desde sol, alcanzamos re (2). Si se analiza desde la aritmética modular, se podría pensar como $7 + 7 = 2 \; mod(12)$.

Las escalas musicales se construyen siguiendo patrones definidos de intervalos entre notas. Por ejemplo, la escala mayor utiliza la secuencia de tonos y semitonos: $0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 0\ (mod\ 12)$. Este patrón genera las notas de la escala mayor de do: do, re, mi, fa, sol, la, si, do. El uso de la aritmética modular permite visualizar las escalas como un ciclo, en el que las notas están organizadas de manera repetitiva y estructurada, lo que es clave para entender su simetría y armonía (Miranda, 2009).

Por su parte, Fernández (2017) comenta que una de las ventajas de usar la aritmética modular es que facilita las transposiciones. Para trasladar una escala a otra tonalidad, basta sumar un número fijo a todas las notas, respetando la operación módulo 12. Por ejemplo, al transponer la escala mayor de do (+5 semitonos), obtenemos la escala mayor de Sol: $(0 + 5,\ 2 + 5,\ 4 + 5,\ 5 + 5, 7 + 5, 9 + 5,\ 11 + 5)\ mod(12) = 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 0,\ 2,\ 4$. Esto demuestra cómo la matemática modular se integra de manera intuitiva al análisis y la composición musical.

Todo lo anterior partiendo de la escala cromática; sin embargo, también funciona con la escala diatónica. Puesto que Miranda (2009) afirma que la escala diatónica, base de la música tonal, consta de siete notas diferentes dentro de una octava, organizadas según patrones de tonos y semitonos. Por ejemplo, en la escala mayor de do, las notas son: do, re, mi, fa, sol, la, si. En términos numéricos, estas notas pueden representarse como números en $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, asignando el 0 a do, el 1 a re, y así sucesivamente. Como el sistema opera de manera cíclica, la siguiente octava comienza de nuevo en 0 (do).

3.1.9 Ritmos euclidianos

La relación llamada «ritmos euclidianos» se centra en la creación de patrones rítmicos mediante el máximo común divisor (MCD). Utilizando el algoritmo de Euclides, los estudiantes aprenden a calcular el MCD y cómo este se aplica en la música (Pérez, 2020). El algoritmo de

Bjorklund, que se inspira en los patrones de Euclides, fue desarrollado por Godfried Toussaint (1944 – 2019), logrando distribuir eventos (como golpes de percusión) de manera equitativa en una secuencia dada. En música, se utiliza para crear patrones rítmicos cíclicos que pueden adaptarse a diferentes compases y estructuras, siendo especialmente relevante en músicas con raíces tradicionales o en géneros que exploran polirritmias y secuencias complejas (Toussaint, 2005).

Ejemplos como el tresillo[11] y el cinquillo[12] demuestran cómo se han utilizado patrones rítmicos a lo largo de la historia musical.

3.1.10 Sucesión de Fibonacci y razón áurea

La sucesión de Fibonacci y la razón áurea son conceptos matemáticos que han capturado la atención de compositores a lo largo de la historia. La sucesión aparece en la música de compositores como Béla Bartók (1881-1945) y Ludwig van Beethoven (1770-1827). En la obra «Música para cuerdas, percusión y celesta» de Bartók, se observa una estructura que refleja la proporción áurea. El primer movimiento, con 88 compases, está organizado en secciones que culminan en un clímax en el compás 56, y concluye 34 compases después, sugiriendo una relación con la proporción áurea (Gonzáles, 2006).

Enstitüsü (2020) habla de otros casos, como en los preludios de Frédéric Chopin (1810-1849), en los que se han identificado momentos culminantes que coinciden con estas proporciones. Sin embargo, es importante mencionar que, aunque algunos compositores han utilizado intencionadamente estas estructuras, muchas relaciones son a menudo circunstanciales y no necesariamente planificadas. A continuación, se presentan enlaces para escuchar obras relacionadas con la sucesión de Fibonacci (Figura 19 y Figura 21):

[11] Es un grupo de tres notas tocadas en el tiempo de dos.
[12] Es un grupo de cinco notas ejecutadas en el tiempo de cuatro o de dos.

Figura 19

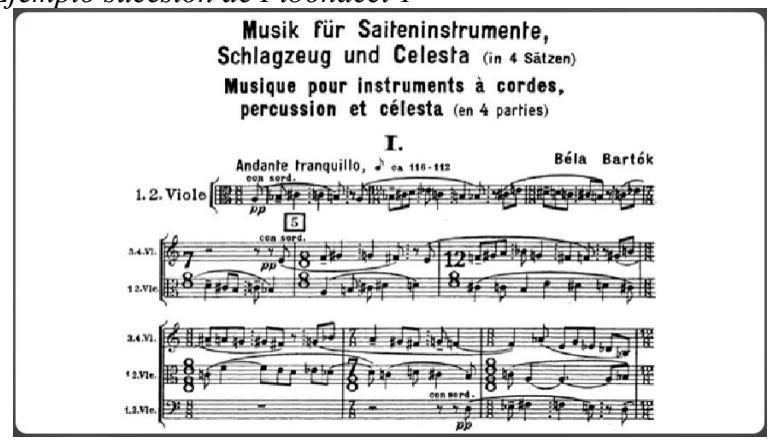
Ejemplo sucesión de Fibonacci 1

Nota. En la imagen se ve un fragmento de partitura y en ella se encuentra un vínculo a un video relacionado a la sucesión de Fibonacci. https://www.youtube.com/watch?v=QElT9KD4uX8 .

Figura 20

QR Ejemplo sucesión de Fibonacci 1

Nota. La imagen muestra un código QR que dirige a un video relacionado a la sucesión de Fibonacci con la partitura de fondo.

Figura 21

Ejemplo sucesión de Fibonacci 2

Nota. En la imagen se ven unas manos tocando piano y en ella encuentra un vínculo a un video relacionado a la sucesión de Fibonacci. https://www.youtube.com/watch?v=CU9RgI9j7Do .

Figura 22

QR Ejemplo sucesión de Fibonacci 2

Nota. La imagen muestra un código QR que dirige a un video de alguien tocando una pieza musical relacionada a la sucesión de Fibonacci.

En resumen, la conexión entre música y matemáticas ha sido una fuente de creatividad para los compositores a lo largo del tiempo. Desde Pitágoras, experimentando con el monocordio y descubriendo relaciones numéricas en las notas, hasta Mozart y su Juego de Dados, en las cuales el azar y las combinaciones matemáticas crean nuevas piezas. En cada época, estos

personajes han explorado cómo los números pueden darle estructura y variedad a la música. Luego, con ideas como el dodecafonismo de Schoenberg y la música estocástica de Xenakis, se ve cómo las matemáticas abren la puerta a nuevos sonidos y enfoques en la composición. Y al hablar de música fractal o la proporción áurea en obras como las de Bartók, se nota cómo los patrones y secuencias matemáticas crean piezas con una coherencia y belleza propias. Todo esto muestra que los números no solo están en las fórmulas, sino también en las melodías y ritmos que se escuchan, uniendo de una forma divertida y creativa el mundo de las matemáticas y el arte.

A continuación, como parte de este marco de referencia, se presentan elementos para conceptualizar lo que se entenderá en este trabajo de grado por tarea con sentido profesional para la formación de profesores de matemáticas.

3.2 Tareas con sentido profesional

Una tarea con sentido profesional en la formación inicial de profesores de matemáticas se entenderá como una demanda estructurada que ofrece oportunidades de aprendizaje significativo al integrar conocimientos matemáticos y didácticos con la práctica docente. Su propósito es desarrollar competencias profesionales fundamentadas en la investigación en Educación Matemática y en experiencias auténticas de enseñanza (Rendón et al., 2023; Mora et al., 2023). Estas tareas articulan teoría e investigación con la práctica, permitiendo que los futuros profesores comprendan y apliquen el conocimiento matemático para la enseñanza en contextos reales. Además, abordan problemáticas auténticas de la enseñanza de las matemáticas, facilitando experiencias cercanas a la realidad escolar (Morales y Rendón, 2023).

Asimismo, este tipo de tareas fomentan la reflexión y el desarrollo profesional al promover la construcción del conocimiento a partir del análisis de la práctica, el trabajo

colaborativo y la exploración de diversas estrategias didácticas; también incentivan la exploración de múltiples enfoques y soluciones, permitiendo que los futuros profesores reconozcan y valoren diferentes formas de abordar el aprendizaje matemático (Rendón et al., 2023). Un aspecto central de estas tareas es el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» la enseñanza, que implica analizar situaciones de aula, identificar evidencias del aprendizaje y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas.

Para su desarrollo, las tareas con sentido profesional siguen una metodología estructurada en seis fases: inicial, individual, grupal, teórica, de reajuste e institucional (Mora et al., 2023). En la fase inicial se plantea la situación de enseñanza y se establece el problema o contexto matemático que guiará la tarea. Luego, en la fase individual, cada participante analiza la situación a partir de preguntas dirigidas que le permitan relacionarla con el conocimiento matemático para la enseñanza. Posteriormente, en la fase grupal, se fomenta la discusión colectiva sobre el análisis individual, favoreciendo el intercambio de ideas y estrategias. La fase teórica consiste en la revisión de resultados (parciales o totales) asociados a investigaciones en Educación Matemática relacionadas con la tarea, lo que permite ampliar la comprensión del problema a partir de fundamentos teóricos. En la fase de reajuste se contrastan las reflexiones individuales y grupales con los hallazgos teóricos, ajustando y profundizando el análisis de la tarea. Finalmente, en la fase institucional, se sistematizan los aprendizajes obtenidos, integrando los conocimientos adquiridos en la práctica docente.

Cabe aclarar que en este trabajo de grado se realizan ajustes a esta propuesta original. En primer lugar, no se incluye una fase inicial diferenciada, sino que esta se articula directamente con la fase individual. Además, la fase teórica no contempla la revisión de documentos de investigación en Educación Matemática, sino que se orienta a la profundización de conceptos

matemático-musicales. Por último, el propósito de las tareas diseñadas en esta investigación no es necesariamente didáctico, sino que se centran en la enseñanza de contenidos que articulan la matemática con la música.

3.3 Aspectos curriculares

El documento titulado «Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas» del MEN de Colombia (2006) establece un marco orientador para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los niveles de educación básica y media. A lo largo del texto, se enfatiza que los estándares son herramientas para mejorar la calidad educativa, pues definen los aprendizajes esenciales que todos los estudiantes deben alcanzar, sin importar la región o institución educativa a la que pertenezcan del país. No constituyen un currículo rígido, sino que ofrece un referente común que respeta la autonomía escolar y busca fomentar procesos pedagógicos flexibles y contextualizados.

Los estándares están organizados de manera progresiva y articulada desde primero hasta undécimo grado y se presentan estructurados en torno a cinco conocimientos básicos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Cada uno de estos pensamientos representa un eje clave del desarrollo del razonamiento matemático y de la aplicación de conocimientos en contextos reales. Además, se promueve que el estudiante no solo adquiera procedimientos y fórmulas, sino que también comprenda, argumente, comunique y conecte conceptos matemáticos con su entorno, desarrollando una competencia matemática integral.

En suma, el documento no solo presenta qué competencias deben desarrollar los estudiantes, sino que también sugiere cómo estas pueden lograrse dentro de una perspectiva

crítica y participativa, subrayando el papel del profesor como mediador y del estudiante como constructor de sentido. En palabras del MEN (2006) «…los estándares no pretenden uniformar la enseñanza, sino garantizar el derecho de todos los estudiantes a una educación de calidad, que les permita desarrollar su pensamiento matemático y participar de manera competente en la sociedad actual».

Aunque las tareas diseñadas en este trabajo están dirigidas a profesores en formación, se toman en cuenta los estándares escolares porque ellos permiten proyectar la enseñanza desde una mirada situada en la realidad educativa del país. La formación docente no puede desligarse de los referentes oficiales que guían el trabajo pedagógico en el aula escolar. Por tanto, considerar los estándares no solo posibilita que el futuro profesor tenga claridad sobre los aprendizajes esperados en sus estudiantes, sino que también favorece una reflexión crítica sobre cómo enseñar esos contenidos de forma contextualizada, creativa y pertinente.

4 Aspectos metodológicos

Este apartado tiene como finalidad presentar de manera general la metodología que orientó el desarrollo del trabajo. Para ello, se describe el tipo de indagación que se llevó a cabo y las razones por las cuales se consideró adecuado para el propósito del estudio. No se busca aquí profundizar en aspectos teóricos o técnicos, sino más bien ofrecer una caracterización breve que permita entender el enfoque asumido y que sirva como sustento para los planteamientos desarrollados posteriormente.

4.1 Investigación cualitativa

El presente trabajo se enmarca en el enfoque cualitativo de investigación educativa, ya que busca comprender cómo los futuros profesores de matemáticas se relacionan con una propuesta didáctica interdisciplinar entre música y matemáticas. No se pretende generalizar resultados ni medir variables cuantificables, sino interpretar experiencias, significados y transformaciones en las prácticas de enseñanza que surgen a partir de una tarea innovadora.

Según Hernández et al. (2014), la investigación cualitativa se caracteriza por centrarse en «la comprensión de los fenómenos en su contexto natural y desde la perspectiva de los participantes» (p. 364), lo cual resulta coherente con el propósito de este estudio, que busca explorar nuevas formas de enseñar combinatoria a partir de una mirada crítica, reflexiva y contextualizada.

En este sentido, se opta por una metodología cualitativa, de corte exploratorio, que permite abrir nuevas preguntas sobre la formación docente, el papel de la creatividad en la enseñanza de las matemáticas y la potencialidad de la música como recurso pedagógico interdisciplinar.

4.2 Descripción de los momentos o fases del trabajo

4.2.1 Fase 1: arqueo de fuentes

En principio se determinó que la búsqueda de información primaria debía ser sobre las relaciones entre música y matemáticas. Para ello, se adelantó una revisión documental en la que se consultaron diversos repositorios de universidades (como la Universidad del Valle, la Universidad Nacional y la Universidad Pedagógica Nacional) y en bases de datos como Springer, Google Scholar, Dialnet, JStor, entre otras. Como resultado de esta búsqueda se encontraron 25 artículos de revista, cinco libros o capítulos de libros, 10 tesis (cinco de pregrado, cuatro de maestría, una de doctorado), una revista y una página web. Un segundo paso fue obtener la información en formatos electrónico. Se podría decir que este fue un primer filtro ya que la información debía ser de fácil acceso.

4.2.2 Fase 2: revisión

Una vez obtenidos los archivos en formato electrónico, se procedió a tomar aquellos que más pudiesen aportar a la elaboración de este trabajo. Para ello, se analizaron los datos de publicación, bibliografía, tabla de contenido, resumen, palabras claves y las conclusiones de los documentos adquiridos, los cuales proporcionaron una idea de los temas incluidos en dichas obras. Los criterios de exclusión que se aplicaron a las fuentes fueron:

i. Deben ser válidos académicamente (tener referentes teóricos).
ii. Deben ser relativamente vigentes (publicados de 2000 en adelante).
iii. Debe tratar relaciones que implique tópicos matemáticos no tan complejos, considerando que las tareas serán para la formación de profesores de matemáticas escolares.

Después de ese proceso de selección el número de fuentes se redujo sustancialmente; solo quedaron las siguientes referencias (Tabla 4):

Tabla 4
Referentes seleccionados

Tipo de fuente	Autor (es)	Año	Título de la fuente
Tesis	González	2006	Las matemáticas como una herramienta para la composición musical
	Pérez	2020	Trabajo fin de máster: matemáticas y música
	Fonseca	2021	La composición algorítmica y su aplicación en la generación de timbres, reverberación y espacialización.
Artículo	Liern	2008	La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida
	Pastor	2008	Matemáticas en la música
	Yöre	2020	*Investigation of applications of Fibonacci sequence and golden ratio in music*
	Aguado y Rivas	2023	Sistemas de afinación en música desde el punto de vista de las matemáticas
	Lugos	2023	Sobre la matemática de los compases musicales y su relación con la geometría
	Tomasini	2007	El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas

Nota. En la tabla se muestran los referentes de relaciones entre música y matemáticas que se escogieron como punto de partida para el trabajo de grado.

4.2.3 Fase 3: cotejo

Se estudiaron las relaciones que cada referente establece entre la música y las matemáticas. Las fuentes reseñadas en la Tabla 5 fueron examinadas con el propósito de compararlas y contrastarlas entre ellas, lo que permitió identificar, por una parte, distintos enfoques teóricos que sustentan ciertas relaciones, y por otra, una serie de objetos matemáticos

comunes que atraviesan las diversas propuestas y que podrían servir para el posterior diseño de las tareas.

Cabe aclarar que no todos los referentes seleccionados en la fase anterior están presentes en la tabla, ya que algunos de ellos contenían relaciones en común con los aquí incluidos, pero abordadas de manera menos específica o con menor profundidad respecto al objeto de estudio de este trabajo.

Tabla 5
Clasificación referentes

Autor	Objeto musical	Objetos matemáticos
Gonzáles (2006)	Monocordio y escalas (Pitágoras)	• Razones • Proporciones
	Juego de dados y composición aleatoria (Mozart)	• Probabilidad • Combinatoria • Espacio muestral • Distribución de probabilidad
	Atonalidad y dodecafonismo (Schönberg)	• Permutaciones • Combinaciones • Grupos en teoría de conjuntos • Aritmética modular
	Música estocástica (Xenakis)	• Probabilidad • Combinatoria • Espacio muestral • Distribución de probabilidad
	Música fractal	• Patrones • Simetrías • Autosimilitud • Proporciones • Secuencias • Series

		• Transformaciones en el plano
	Reinterpretación de transformaciones de composiciones musicales (transportar, octavar, retrogradar, inversiones tonales, reales, cambiar modo y tono)	• Transformaciones en plano • Funciones • Composición de funciones • Cambios de representación de funciones
Enstitüsü (2020)	Belleza en la estructura de algunas composiciones musicales	• Sucesión de Fibonacci • Razón Áurea
Miranda (2009)	Escalas musicales	• Aritmética modular • Bases numéricas • Divisibilidad
Pérez (2020)	Transformaciones de composiciones musicales (transportar, octavar, retrogradar, inversiones tonales y reales)	• Transformaciones en el plano
	Ritmos Euclidianos	• Combinaciones • Permutaciones • Grafos • Congruencias • Patrones • Máximo común divisor

Nota. En la tabla se muestran como se organizaron los referentes seleccionados para analizar conexiones.

La Tabla 5 muestra cómo se pueden relacionar ideas de la música con temas de matemáticas. Al revisar las propuestas, se notó que varios conceptos matemáticos se repiten, lo que indicaba que podían ser especialmente útiles es la elaboración de las tareas. Por ejemplo, el tema de las proporciones aparece en varias partes, como en el uso del monocordio pitagórico y en la música fractal. Esto tiene que ver con cómo se organizan los sonidos en diferentes escalas o estructuras.

También se repiten ideas como el azar y las posibilidades de combinación, que se usan en composiciones aleatorias y en la música estocástica. Estos conceptos permiten jugar con lo impredecible dentro de una obra musical.

Otro punto importante son las transformaciones, como la rotación o reflexión, que ayudan a entender cómo se pueden modificar ciertas partes de una melodía o patrón musical manteniendo cierta lógica.

Además, la aritmética modular, que tiene que ver con contar en ciclos, aparece en propuestas como el dodecafonismo y el estudio de escalas.

4.2.4 Fase 4: delimitación de las tareas

Con el fin de construir adecuadamente las tareas, se realizó una revisión de lo que se entiende por una tarea con sentido profesional, tomando como base tres documentos de profesores de la Universidad Pedagógica Nacional. Estos sirvieron como referentes para elaborar una definición. No obstante, la definición propuesta en dichos documentos no se ajustaba completamente a los propósitos de este trabajo, ya que pone un énfasis particular en los aspectos pedagógicos y curriculares, los cuales no son centrales en este caso. Por ello, como se mencionó antes, fue necesario modificar y acotar la definición original, adaptándola al enfoque específico del trabajo. El resultado fue una versión más acorde con los objetivos planteados, que se presentan a continuación.

Una tarea con sentido es una actividad estructurada que parte de una situación concreta vinculada a la enseñanza de las matemáticas, y que plantea un desafío auténtico que exige análisis, interpretación y toma de decisiones fundamentadas. Estas tareas conectan el conocimiento matemático con experiencias reales del ámbito educativo, favoreciendo la reflexión crítica, el trabajo colaborativo y la construcción de criterios profesionales. Su

desarrollo se organiza en una secuencia de fases articuladas: en la fase individual, cada participante analiza la situación desde sus propias interpretaciones y saberes. En la fase grupal se promueve el intercambio de ideas para enriquecer las perspectivas iniciales mediante el diálogo y la argumentación. La fase de reajuste permite confrontar y reorganizar las ideas a la luz de las discusiones previas y los aportes teóricos específicos, generando una comprensión más profunda. Finalmente, en la fase de institucionalización, se sistematizan los aprendizajes construidos y se elaboran productos que integran los distintos niveles de análisis abordados. En conjunto, estas tareas permiten desarrollar procesos de indagación, análisis crítico y toma de decisiones contextualizadas, contribuyendo a la formación profesional desde una perspectiva situada y reflexiva.

4.2.5 Fase 5: diseño de tareas

Siguiendo la definición modificada de tarea con sentido profesional y tomando como base las relaciones más comunes y recurrentes identificadas en la Tabla 5, se construyeron tres tareas que se presentan a continuación.

Tarea 1. Perspectivas sobre la enseñanza de la aritmética modular. Presentación.

Esta tarea tiene como propósito principal promover una reflexión teórico-crítica sobre la enseñanza de la aritmética modular a través del reconocimiento de una posible relación entre este concepto matemático y un tipo de escala musical: la diatónica. Se busca que los futuros profesores de matemáticas puedan identificar nuevas formas de abordar la aritmética modular desde una perspectiva no convencional, integrando elementos musicales que permitan resignificar su enseñanza. A partir del análisis de una experiencia personal de aprendizaje y del estudio de las estructuras de escalas musicales en relación con la aritmética modular, se espera que los estudiantes:

- Examinen su experiencia personal aprendiendo el concepto de aritmética modular o teoría de congruencias, reconociendo aciertos, dificultades y posibles aprendizajes.
- Analicen la estructura de las escalas diatónicas y evalúen cómo estas pueden modelarse mediante operaciones en módulo 12.
- Diseñen y argumenten estrategias para enseñar aritmética modular integrando elementos musicales como herramienta de representación matemática.
- Reflexionen sobre la práctica docente, contrastando una propuesta personal con otra basada en la relación entre música y matemáticas.

La tarea se organiza en distintas fases que combinan el trabajo individual, la discusión grupal y la socialización, con el fin de favorecer un aprendizaje crítico, colaborativo y significativo. A continuación, se describen las fases que componen la tarea.

Fase individual

El formador planteará distintas preguntas relacionadas con las experiencias de aprendizaje de los estudiantes sobre la aritmética modular. Específicamente, se les pedirá a los futuros profesores lo siguiente:

Responda las siguientes preguntas de forma escrita e individual en los espacios designados:

1. Bajo la mirada que tiene hoy, como futuro educador matemático, ¿qué experiencias recuerda cuando aprendió por primera vez sobre aritmética modular o teoría de congruencias? Describa la situación, el contexto y qué elementos facilitaron o dificultaron su comprensión.
2. ¿Considera que la forma en que aprendió este concepto fue adecuada para lograr una comprensión profunda?, ¿por qué sí o por qué no?

3. ¿Cree usted que sería pertinente que se enseñen elementos de la aritmética modular en la escuela?, de ser así, ¿cuáles? Argumente su respuesta.
4. Si tuviera la oportunidad de enseñar asuntos de aritmética modular en un contexto escolar, ¿cómo lo haría? ¿qué aspectos de su experiencia conservaría y cuáles cambiaría?

Se espera que, desde la perspectiva como futuro educador matemático, el estudiante pueda identificar y describir experiencias significativas relacionadas con su primer encuentro con la aritmética modular o la teoría de congruencias. Esto incluye el contexto en el que se abordó (secundaria, universidad, cursos extracurriculares), las estrategias didácticas utilizadas, y los factores que facilitaron o dificultaron su comprensión, como el uso (o ausencia) de ejemplos concretos, contextos significativos o explicaciones claras.

En cuanto a la forma en que aprendió este concepto, se espera que evalúe críticamente si los métodos empleados promovieron una comprensión profunda o si, por el contrario, se limitaron a una enseñanza mecánica. De esta manera, se busca que reconozca la importancia de abordar estos contenidos desde una perspectiva comprensiva y no meramente técnica.

Respecto a la enseñanza en la escuela, se espera que argumente si considera pertinente incluir elementos de la aritmética modular —por ejemplo, nociones básicas de congruencia, residuos o aplicaciones cotidianas como relojes o ciclos— y que justifique su respuesta en términos del valor formativo, la conexión con otros saberes o su potencial para desarrollar pensamiento algebraico.

Finalmente, si tuviera la posibilidad de enseñar estos contenidos, se espera que proponga una estrategia didáctica basada en su propia experiencia: conservando aquellos aspectos que facilitaron su comprensión (como el uso de representaciones visuales o problemas contextualizados) y modificando aquellos que resultaron confusos o abstractos. En este punto,

debería emerger una postura reflexiva sobre su propio aprendizaje y una proyección de cómo este puede ser transformado en una enseñanza más significativa para sus futuros estudiantes.

Estas preguntas tienen como propósito generar una reflexión en torno a las formas en que se ha enseñado la aritmética modular y cómo dicha experiencia podría incidir en la futura práctica docente de los participantes. Se espera que los futuros profesores examinen críticamente sus experiencias sobre este concepto, tomando como punto de partida tanto su formación matemática actual como sus conocimientos en didáctica de las matemáticas.

Aunque la aritmética modular no hace parte explícita del currículo de matemáticas escolares, se considera pertinente incluir este tema en la formación de profesores, ya que permite explorar conexiones profundas entre estructuras matemáticas abstractas y su potencial didáctico. En particular, la aritmética modular ofrece oportunidades para pensar en nuevas formas de representar, comunicar y contextualizar ideas matemáticas, lo que resulta clave para enriquecer la mirada pedagógica de los futuros docentes.

Cabe aclarar que esta tarea solo tiene sentido con profesores en formación que ya hayan cursado previamente asignaturas como Teoría de Números o Aritmética Modular, ya que se parte del supuesto de un conocimiento previo que facilite ir más allá de lo procedimental y abrir espacios de reflexión conceptual y didáctica.

El objetivo es que los futuros profesores puedan reconocer aciertos, así como identificar limitaciones o aspectos mejorables de la experiencia vivida con el aprendizaje de la aritmética modular. Este ejercicio busca motivar a los participantes a pensar en estrategias didácticas que promuevan una comprensión más profunda y significativa del concepto.

Se prevé que esta fase tenga una duración aproximada de 20 minutos.

Fase grupal

El formador organizará a los estudiantes por parejas y les pedirá socializar las respuestas generadas durante la fase individual, haciendo especial énfasis en la cuarta pregunta. Esta socialización busca propiciar un intercambio de perspectivas que enriquezca la reflexión personal, a partir de los distintos enfoques y experiencias vividas, cuestionen y analicen el valor de esas estrategias didácticas, considerando su potencial para enriquecer la enseñanza y generar aprendizajes. Este espacio de análisis y argumentación está diseñado para que los estudiantes exploren nuevas formas de concebir y planificar sus futuras clases.

Se estima que esta actividad tenga una duración aproximada de 20 minutos.

Fase teórica

El formador entregará a cada grupo un documento que trata sobre contextualización de las matemáticas y la escala diatónica (aparece a continuación o Anexo A). Se les pedirá a los estudiantes que registren en sus apuntes los aspectos que consideren más relevantes de la lectura, ya que esto servirá como base para la actividad que sigue. Además, con el fin de comprender mejor el funcionamiento del tipo de escala musical asignado, deberán cambiar la tónica de una escala y explorar cómo suena a través del uso de un sintetizador virtual (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/).

Contextualización de las matemáticas y escala diatónica

En la actualidad, cada vez resulta más evidente la necesidad de repensar la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva más cercana a la realidad del estudiante mostrando una aplicabilidad. En este sentido Villadiego (2024) comenta lo siguiente:

> El aprendizaje de situaciones contextualizadas guarda una estrecha relación con la comprensión que los estudiantes tienen sobre las ideas que rodean sus

> propias concepciones y el caso de estudio. En este sentido, las matemáticas se benefician al explorar numerosas situaciones del entorno estudiantil y docente, permitiendo abordar teorías y teoremas desde una perspectiva centrada en casos y representaciones que fusionan los números con las intenciones del observador. Con el propósito de fomentar la creatividad de los estudiantes, resulta esencial que las clases incorporen situaciones de la realidad en sus planes y currículos. De acuerdo con los estudios de Miranda y Mamede (2022), las dificultades comunes que los estudiantes enfrentan suelen atribuirse a la incapacidad de interpretar adecuadamente el contexto de la problemática que necesitan investigar. […] En consecuencia, la clase de matemáticas se convierte en una construcción de realidades a partir de hechos que se resumen en situaciones desafiantes que requieren un pensamiento reflexivo para encontrar soluciones. Es fundamental que los estudiantes comprendan las representaciones presentadas por el docente para lograrlo. […] Considerando que la contextualización de situaciones medibles en matemáticas motiva al estudiante a encontrar sentido en su estudio, como se destaca en la investigación de Pérez y Palacio (2022), resulta esencial comprender la intrínseca relación entre el pensamiento matemático y la organización de ideas. En este sentido, el pensamiento algorítmico desempeña un papel crucial al representar situaciones del contexto. La estrategia de enseñanza debe proporcionar una estructura clara y fomentar el desarrollo de habilidades de pensamiento. Asimismo, Tupouniua (2023) enfatiza la importancia de generar discusiones contextuales que permitan a los estudiantes utilizar interpretaciones mediante algoritmos matemáticos, comprender sus acciones, proponer soluciones y analizar posibles errores para corregir enfoques. En consecuencia, los docentes que planifican clases de matemáticas con una integración contextual necesitan estimular su creatividad para concebir situaciones que fomenten una interpretación matemática más efectiva. (p. 52)

En ese sentido se habla de la escala diatónica para considerar su pertinencia como método de contextualización para introducir la aritmética modular.

Escala diatónica

Una escala es una serie de sonidos organizados en un orden específico. En la música occidental hay un sistema que tiene 12 sonidos distintos y las escalas se construyen eligiendo algunos de esos sonidos y poniéndolos en un patrón repetitivo. Estos patrones se usan para crear canciones, melodías o acompañamientos. Una escala diatónica es un tipo muy común de escala que tiene siete sonidos diferentes antes de volver a repetirse. La más conocida es la escala de do mayor, que es: do – re – mi – fa – sol – la – si.

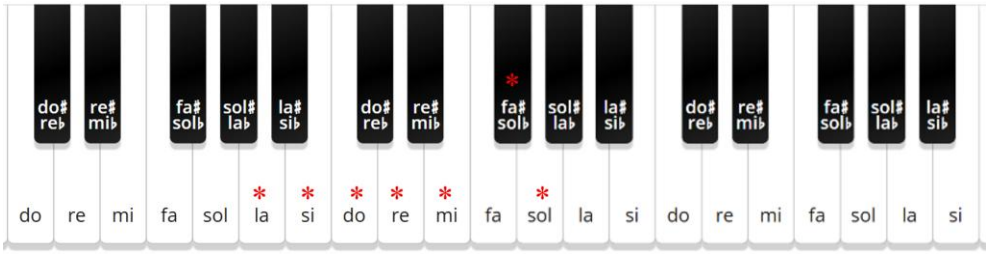
¿Cómo cambiar la tónica de una la escala diatónica en un piano?

La tónica es la nota por la que empieza una escala, y que le da su nombre. Por ejemplo, en la escala de do mayor la tónica es do.

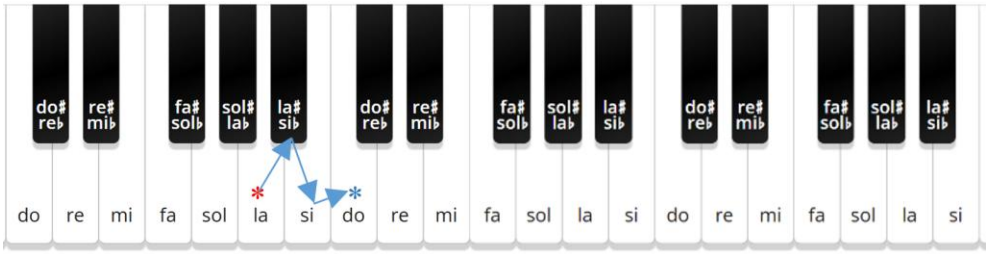
1. Reconocer la tónica y las notas de la escala inicial.
2. Elegir la nueva tónica (nota base) deseada.
3. Contar las teclas entre la tónica inicial y la nueva tónica.
4. Moverse respecto a cada nota de la escala la misma cantidad de teclas que hay entre la tónica original y la nueva tónica, procurando moverse hacia el mismo lado del teclado.

Ejemplo*:*

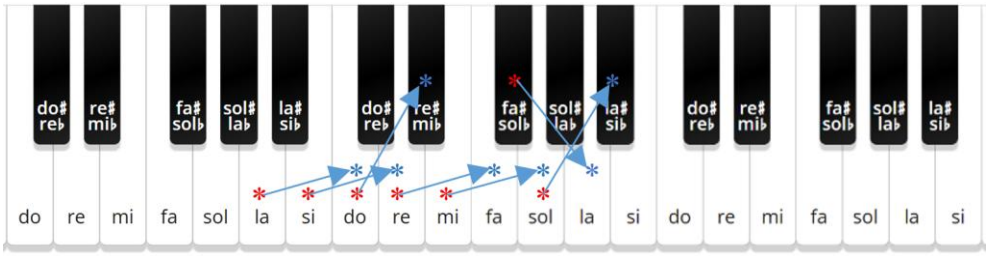
Partiendo de la escala la – si – do – re – mi – fa# – sol, marcamos con asteriscos las teclas que representan las notas de nuestra escala, así:



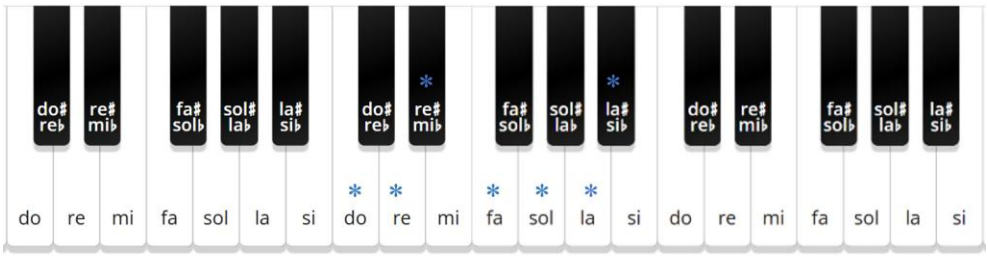
Para cambiar la tónica a do, contamos las teclas entre la y do.



Como nos corrimos tres teclas a la derecha, entones debemos desplázanos tres teclas a la derecha por cada nota inicial, así:

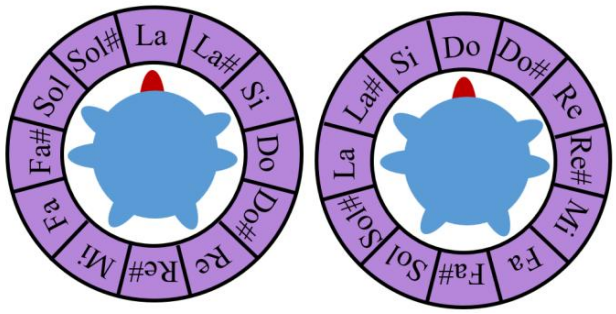


Quedándonos así:



Al traducir esos resultados obtenemos la siguiente escala:

do – re – re# – fa – sol – la – la#, que conserva exactamente la misma estructura que la original. A continuación, una imagen de cómo se puede ver más claramente:



Tu turno:

A la escala, re – mi – fa – sol – la – si – do – re, cámbiale la tónica, después interprétala y grábala en el sintetizador (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/) para que posteriormente lo puedas escuchar.

Con esto presente, se le solicita a cada grupo que:

Lean el documento asignado, tomen apuntes de todo aquello que consideren relevante de su lectura, generen una escala musical con el método explicado y pruébenla en el sintetizador.

Esta parte tiene como propósito que los estudiantes profundicen en el estudio de uno de los tipos de escalas musicales (diatónica). A cada grupo se le asignará el documento específico con el objetivo de que comprenda a fondo el método de cambio de tónica de la escala diatónica. Mediante la toma de apuntes sobre los aspectos más relevantes del texto, se busca que los estudiantes reúnan elementos que sirvan como base para un momento posterior, con la ventaja adicional de que al ser un trabajo de parejas está enriquecido por distintas miradas.

Además, se incluye una experiencia práctica en la que podrán deducir y reproducir una escala utilizando un sintetizador virtual, permitiendo aplicar los conceptos aprendidos y explorar el impacto sonoro de dicha estructura. Se estima un tiempo de 60 minutos para esta fase de lectura y revisión grupal.

Fase de reajuste

En los grupos de trabajo y teniendo en cuenta lo estudiado, se les solicitará discutir las propuestas iniciales de abordaje de aritmética modular que reportaron en la cuarta pregunta de la fase individual, escoger una y hacer las modificaciones que se consideren necesarias integrando las escalas musicales tras haber aprendido algo al respecto. Se estima que este momento de trabajo tenga una duración aproximada de 40 minutos.

Esta actividad busca promover una reflexión sobre la relación entre las escalas musicales y la aritmética modular. Se espera que los estudiantes valoren cómo está escala puede ser útil para enseñar este concepto matemático y exploren formas de integrarlas en propuestas didácticas.

A través del diálogo y la escritura, los participantes podrán identificar conexiones entre la estructura cíclica del sistema musical temperado y las operaciones en módulo 12. Además, se

espera que analicen la viabilidad de enfoques no tradicionales en la enseñanza de las matemáticas.

Fase de institucionalización

Se plantea que esta fase esté orientada por el formador y tenga una duración aproximada de 30 minutos. Durante este espacio, se revisarán las propuestas desarrolladas por los grupos para abordar la aritmética modular, con el propósito de valorar si los participantes comprenden cómo es posible estudiar esta temática a partir de dos tipos de escalas musicales. A partir de dicha revisión, se espera que el formador formule preguntas que promuevan la reflexión y el intercambio de ideas con los futuros docentes. Algunas preguntas orientadoras podrían ser:

- ¿En qué medida la propuesta diseñada en clase para trabajar la aritmética modular difiere del enfoque que conocieron durante su formación escolar o universitaria?
- ¿Qué elementos podrían incorporarse o mejorarse en la propuesta elaborada?

La socialización de estas ideas busca propiciar un espacio para contrastar, complementar y enriquecer los distintos planteamientos de enseñanza de la aritmética modular, favoreciendo el análisis crítico y la argumentación entre los participantes. Al compartir sus perspectivas, los futuros educadores tendrán la oportunidad de reconocer la variedad de estrategias posibles, analizar sus fortalezas y debilidades, y reflexionar sobre su aplicabilidad en diversos contextos educativos. Este ejercicio también apunta a fortalecer su capacidad para tomar decisiones pedagógicas fundamentadas, promoviendo una enseñanza de la aritmética modular más significativa, contextualizada y flexible frente a las necesidades reales del aula.

En esta fase se busca institucionalizar la idea de que la aritmética modular puede enseñarse desde contextos musicales, reconociendo que conceptos como los residuos o las clases de equivalencia adquieren mayor sentido cuando se vinculan con estructuras cíclicas como las

escalas. También se afianza la noción de que existen múltiples formas válidas de diseñar propuestas didácticas significativas y contextualizadas.

Características asociadas

A lo largo de la tarea propuesta se pueden reconocer, de manera directa, las siguientes características de las tareas con sentido profesional que favorecen la formación profesional inicial del profesor de matemáticas:

Abordar [posibles] prácticas o problemas profesionales del profesor de matemáticas

Los futuros profesores explorarán formas no convencionales de enseñar la aritmética modular, a partir del análisis y la construcción de escalas musicales como la diatónica y la pentatónica. Al relacionar estas estructuras sonoras con conceptos como la congruencia y las operaciones módulo 12, se enfrentan al reto profesional de diseñar propuestas didácticas que articulen saberes matemáticos y recursos interdisciplinarios con el propósito de enriquecer el aprendizaje.

Poner en juego las creencias, concepciones y conocimientos de los futuros profesores de matemáticas

La actividad invita a los participantes a revisar críticamente cómo aprendieron la aritmética modular en su formación escolar y universitaria, confrontando ese recuerdo con nuevas maneras de abordarla desde las estructuras musicales. Esta comparación impulsa una reflexión sobre sus concepciones previas y sugiere posibles transformaciones en la manera como entienden y enseñan este concepto.

Propiciar un rol activo por parte de los futuros profesores de matemáticas

Durante la actividad, los estudiantes participan activamente en la lectura de documentos, el análisis individual, la discusión en grupos, la creación de escalas musicales y la elaboración

colaborativa de propuestas de enseñanza. Este enfoque favorece la autonomía, la colaboración y la toma de decisiones fundamentadas en la práctica docente.

Potenciar el desarrollo personal de los futuros profesores de matemáticas a partir de las interacciones con otros

El trabajo colaborativo y la socialización en plenaria permiten que los estudiantes intercambien ideas, argumenten desde diferentes perspectivas y ajusten sus propuestas a partir del diálogo. Estas experiencias fortalecen tanto las habilidades comunicativas como la capacidad de adaptación a diversos contextos escolares.

Permitir a los futuros profesores de matemáticas modificar su conocimiento

La incorporación de escalas musicales como recurso didáctico para enseñar aritmética modular ofrece una oportunidad para resignificar el conocimiento matemático y didáctico de los participantes. A partir del análisis, la experimentación y la discusión, los estudiantes pueden ampliar su comprensión sobre modularidad y descubrir nuevas formas de hacerla accesible y significativa para sus futuros estudiantes.

Adicionalmente, la tarea apunta parcialmente a las siguientes características:

Permitir exhibir el conocimiento matemático, didáctico, curricular y pedagógico de los futuros profesores de matemáticas

El diseño de una propuesta de enseñanza basada en tipos de escalas musicales y su conexión con la aritmética modular exige poner en juego conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares. Si bien la actividad se centra en el concepto de congruencia, su abordaje requiere considerar cómo este puede ser tratado desde otras disciplinas para potenciar su comprensión.

Tarea 2. Perspectivas sobre la enseñanza de las funciones

Presentación

Esta tarea tiene como objetivo principal fomentar una reflexión teórico-crítica sobre la enseñanza del concepto de función, a partir de la exploración de su relación con dos transformaciones musicales: transportar y retrogradar. Se busca que los futuros profesores reconozcan cómo estas transformaciones pueden ser representadas y analizadas desde una perspectiva matemática, permitiendo abrir nuevas posibilidades para su enseñanza.

Mediante el análisis de definiciones de función, tomadas de diferentes libros de texto, el estudio de las transformaciones musicales y la articulación con saberes matemáticos, se espera que los participantes:

- Examinen críticamente las definiciones presentadas de función, identificando similitudes, diferencias y posibles ambigüedades.
- Profundicen en el significado de cada transformación musical y exploren posibles relaciones con el concepto de función.
- Elaboren y argumenten estrategias didácticas que integren elementos musicales en la enseñanza de funciones, considerando su valor formativo.
- Reflexionen sobre la toma de decisiones que ponen en juego su saber matemático aplicado a enfoques que incorporan lo artístico.

La tarea se desarrolla en varias fases que combinan el trabajo individual, el intercambio en pequeños grupos y la socialización colectiva, con el propósito de propiciar un aprendizaje crítico y significativo del concepto de función. A continuación, se detallan las fases que componen la actividad.

Fase individual

El formador presentará definiciones de función tomadas de diferentes libros de texto escolares y preguntas sobre las cuales trata la tarea. Específicamente se les pedirá a los futuros profesores lo siguiente:

Considere las siguientes definiciones de función, tomadas de diferentes libros de textos escolares de grados noveno y undécimo:

Según Padilla, Samper y Moreno (2008):

Sea A y B conjuntos de números reales. Una ***función*** *f de A en B, es una "****regla****" de correspondencia que asigna a cada elemento* ***x*** *del conjunto A exactamente un elemento* ***y*** *en el conjunto B.*

El conjunto A es el ***dominio*** *de la función f, y el conjunto B el* ***codominio.***

El conjunto $\{f(x) \in B : x \in A\}$ *es el* ***rango*** *de la función f.*

La función f de A en B se simboliza $f : A \to B$, $x \to f(x)$, *x es la entrada y f(x) la salida de la función.*

Según Centeno, Centeno y Ruiz (1994):

Dados dos conjuntos A y B, diferentes de vacío, se define una función F de A en B, como el conjunto de parejas ordenadas (x,y), en el cual dos parejas ordenadas distintas no tienen la misma primera componente. Es bueno recordar que el dominio de F es todo el conjunto A.

Y según Centeno, Centeno y Jiménez (1997):

Dados dos conjuntos A y B, diferentes de vacío, una relación F de A en B es una ***función****, si el dominio de F es todo el conjunto A y a cada elemento de A le corresponde uno y sólo un elemento de B.*

Con base en las definiciones presentadas, responda las siguientes preguntas de forma escrita e individual.

1. ¿Qué elementos comunes y diferentes encuentra entre las tres definiciones?
2. Bajo la mirada que tiene hoy, como futuro educador matemático, ¿qué aspectos considera que pueden ser poco claros o confusos para los estudiantes en cada definición?
3. ¿Qué les haría falta a las definiciones para lograr una buena comprensión del concepto?, ¿por qué?

Se espera que el FEM reconozca que las tres definiciones tienen elementos comunes, como la noción de correspondencia entre dos conjuntos (A y B), el hecho de que a cada elemento de A le corresponde uno y solo un elemento de B, y la mención del dominio como el conjunto de partida. Como diferencias, puede destacar que algunas definiciones son más formales (por ejemplo, la de 1994, que se apoya en pares ordenados), mientras que otras introducen términos como "regla" o hacen explícita la simbología funcional (como en Padilla, Samper y Moreno, 2008).

Además, se espera que desde perspectiva actual como futuro profesor identifique aspectos que pueden resultar confusos para los estudiantes, como el uso de lenguaje técnico sin ejemplos, como “parejas ordenadas distintas no tienen la misma primera componente”, la introducción simultánea de varios términos nuevos (dominio, codominio, rango), o la ambigüedad en el uso de palabras como “regla”, que puede no ser suficientemente precisa.

Finalmente, se espera que proponga mejoras orientadas a una mejor comprensión, como complementar las definiciones con ejemplos concretos, representaciones visuales (diagramas, tablas o gráficas), y un lenguaje más accesible para el nivel escolar. También podría sugerir que las definiciones sean construidas de manera progresiva, partiendo de situaciones contextualizadas que permitan a los estudiantes atribuir sentido a la idea de función antes de formalizarla. Esto fomentaría una comprensión más profunda, significativa y duradera del concepto.

El propósito de estas preguntas es generar una reflexión sobre formas tradicionales en que se han enseñado las funciones en el ámbito escolar y cómo esas experiencias pueden influir en la futura labor docente de los participantes. Se espera que los futuros profesores analicen de

manera crítica las definiciones presentadas en torno a este concepto, tomando como punto de partida su formación actual en matemáticas y en didáctica de las matemáticas.

En especial, se busca que reconozcan tanto los elementos que consideran acertados, como las posibles limitaciones o aspectos que podrían mejorarse dentro de una enseñanza a partir de definiciones. Este ejercicio pretende motivar a los participantes a pensar en estrategias didácticas que promuevan un aprendizaje más significativo del concepto de función.

Se estima que esta actividad tenga una duración aproximada de 30 minutos.

Fase grupal

El formador configurará las parejas de trabajo, si la cantidad de estudiantes es impar, entonces quedaría conformado un grupo de tres estudiantes. A continuación, el formador asignará a cada grupo un documento que aborda dos tipos de transformaciones musicales: transportar y retrogradar (a continuación o Anexo B). Se les pedirá a los estudiantes que tomen apuntes de los aspectos que consideren más relevantes durante la lectura, ya que esa información será la base para el trabajo colaborativo que se propone a continuación. Además, con el fin de afianzar la comprensión de las transformaciones asignadas, deberán crear un compás musical, aplicarle las transformaciones correspondientes y utilizar un sintetizador virtual para explorarlo de forma práctica. (https://flat.io/es/)

Transportar y retrogradar

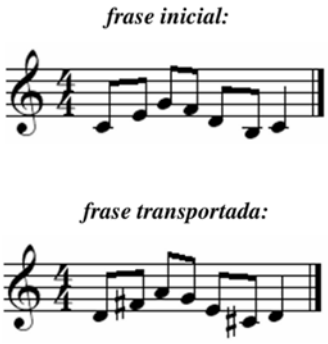
Transportar

La transportación es una transformación musical que consiste en trasladar una pieza o una melodía completa de una tonalidad a otra. En términos prácticos, implica subir o bajar todas las notas de una composición manteniendo inalteradas las relaciones interválicas entre ellas. Es decir, aunque la pieza comienza desde una nota diferente, conserva su estructura melódica y armónica original.

¿Cómo transportar una pieza musical?

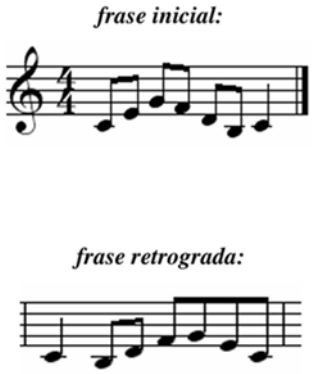
1. Identificar la tónica original.
2. Decidir la tonalidad a la que se desea transportar.
3. Determinar la distancia entre las dos tonalidades.
4. Aplicar ese mismo intervalo a todas las notas de la melodía.

Ejemplo:

En la imagen se representa la transportación de un compás de siete notas. En la parte superior se encuentra el fragmento original, y debajo aparece el fragmento transportado. El compás original tiene como tónica la nota do, mientras que en la versión transportada la nueva tónica es re, ambas en la misma octava. Esto indica una transposición de un tono completo hacia arriba, por lo tanto, todas las notas han sido elevadas un tono, dando como resultado el compás que aparece en la parte inferior.

Retrogradar

Retrogradar es una transformación musical que consiste en invertir el orden de las notas de una melodía, de modo que se reproduzcan en sentido contrario al original. Es decir, la última nota pasa a ser la primera, la penúltima la segunda, y así sucesivamente. Aunque se invierte la dirección temporal de la frase, se conservan el ritmo y los valores de duración de cada nota, lo que da lugar a una versión reflejada en el tiempo.

¿Cómo retrogradar una pieza musical?

1. Identificar cada nota y su duración.
2. Reordenar las notas en sentido inverso, manteniendo sus respectivas duraciones.

En la imagen se representa una retrogradación de un compás compuesto por siete notas. En la parte superior se encuentra el fragmento original, mientras que en la parte inferior aparece el mismo fragmento retrogradado. El compás original finaliza con una negra en do, que en la retrogradación se convierte en la primera nota. La penúltima nota, una corchea en si de la octava inferior, pasa a ocupar el segundo lugar. Le sigue una corchea en re, que se convierte en la tercera nota, y luego una corchea en fa, ahora la cuarta. La quinta nota es una corchea en sol, seguida por una corchea en mi como penúltima, y finalmente una corchea en do, que en el original era la primera nota, se convierte en la última del fragmento retrogradado.

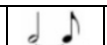
Funciones para las transformaciones

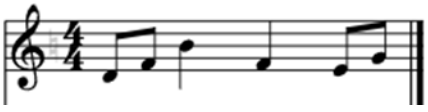
Estas transformaciones pueden representarse como funciones de la siguiente manera:

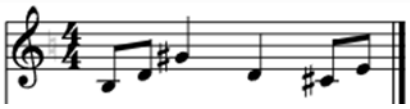
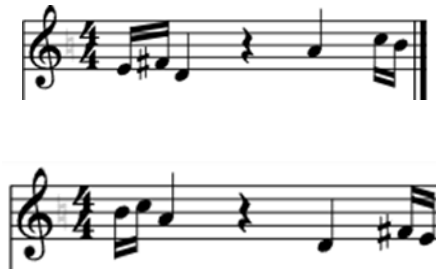
1. Asignar a cada nota una terna ordenada (Orden, Altura y Duración), siendo los conjuntos referenciales de cada coordenada así:
   a. $O = \{a | \ 1 \leq a \leq n, \ a, n \in \mathbb{N}\}$
   b. $A = \{b | 0 \leq b \leq 85, \ b \in \mathbb{N}\}$ de manera que

0	Silencio	**18**	fa 2	**36**	si 3	**54**	fa 5	**72**	si 6
1	do 1	**19**	fa# 2	**37**	do 4	**55**	fa# 5	**73**	do 7
2	do# 1	**20**	sol 2	**38**	do# 4	**56**	sol 5	**74**	do# 7
3	re 1	**21**	sol# 2	**39**	re 4	**57**	sol# 5	**75**	re 7
4	re# 1	**22**	la 2	**40**	re# 4	**58**	la 5	**76**	re# 7
5	mi 1	**23**	la# 2	**41**	mi 4	**59**	la# 5	**77**	mi 7
6	fa 1	**24**	si 2	**42**	fa 4	**60**	si 5	**78**	fa 7
7	fa# 1	**25**	do 3	**43**	fa# 4	**61**	do 6	**79**	fa# 7
8	sol 1	**26**	do# 3	**44**	sol 4	**62**	do# 6	**80**	sol 7
9	sol# 1	**27**	re 3	**45**	sol# 4	**63**	re 6	**81**	sol# 7
10	la 1	**28**	re# 3	**46**	la 4	**64**	re# 6	**82**	la 7
11	la# 1	**29**	mi 3	**47**	la# 4	**65**	mi 6	**83**	la# 7
12	si 1	**30**	fa 3	**48**	si 4	**66**	fa 6	**84**	si 7
13	do 2	**31**	fa# 3	**49**	do 5	**67**	fa# 6	**85**	do 8
14	do# 2	**32**	sol 3	**50**	do# 5	**68**	sol 6		
15	re 2	**33**	sol# 3	**51**	re 5	**69**	sol# 6		
16	re# 2	**34**	la 3	**52**	re# 5	**70**	la 6		
17	mi 2	**35**	la# 3	**53**	mi 5	**71**	la# 6		

   c. $D = \{c | 1 \leq c \leq 11, \ c \in \mathbb{N}\}$ de manera que

1		**3**		**5**		**7**		**9**		**11**	
2		**4**		**6**		**8**		**10**			

2. Seleccionar la función de la transformación a realizar.
   a. **Def. Transportar:** t: $P \rightarrow T(P) \subseteq O \times A \times D$
      $(a, b, c) \mapsto (a, b + k, c)$,
      para algún $|k| < 12, k \in \mathbb{Z}$ y de tal modo que $1 \leq b + k \leq 85$.
   b. **Def. Retrogradar:** r: $P \rightarrow R(P) \subseteq O \times A \times D$
      $(a, b, c) \mapsto (n - a + 1, b, c), n$ el orden de P.
3. Aplicar la función a cada terna ordenada.
   Ejemplo transportar:

Al compás de la imagen se asignan las siguientes ternas ordenadas (1, 39, 9), (2, 42, 9), (3, 48, 7), (4, 42, 7), (5, 41, 9) y (6, 44, 9). Para aplicar

la función de transportar, definimos $k = -3$ porque la tónica original es Re 4= 39, la nueva es Si 3= 36 y $36 - 39 = -3$. Al aplicar la función de transportar a cada terna resulta (1, 36, 9), (2, 39, 9), (3, 45, 7), (4, 39, 7), (5, 38, 9) y (6, 41, 9). Al reescribir en términos musicales queda el siguiente compás.

Ejemplo retrogradar:

Al compás de la imagen se asignan las siguientes ternas ordenadas (1, 41, 11), (2, 43, 11), (3, 39, 7), (4, 0, 7), (5, 46, 7), (6, 49, 11) y (7, 48, 11). Al aplicar la función de retrogradar a cada terna resulta (7, 41, 11), (6, 43, 11), (5, 39, 7), (4, 0, 7), (3, 46, 7), (2, 49, 11) y (1, 48, 11). Reorganizando quedan las siguientes ternas ordenadas: (1, 48, 11), (2, 49, 11), (3, 46, 7), (4, 0, 7), (5, 39, 7), (6, 43, 11) y (7, 41, 11). Al reescribir en términos musicales queda el siguiente compás.

Tu turno:

Compón, reproduce tu propio compás, luego transpórtalo reprodúcelo, retrográdalo y reprodúcelo en el siguiente sintetizador con partitura online (https://flat.io/es/).

Con esto presente, se le solicita a cada estudiante que:

Lea el documento asignado, tome apuntes de todo aquello que considere relevante de la lectura, genere un compás, aplíquele las transformaciones explicadas y pruébelas en el sintetizador correspondiente.

Esta tarea tiene como propósito que los estudiantes profundicen en el estudio de dos transformaciones musicales: transportar y retrogradar. A cada grupo se le asigna dicho documento con el fin de que logre una comprensión detallada de las transformaciones que les corresponden. Mediante la toma de apuntes sobre los aspectos más relevantes de la lectura, se busca generar los insumos necesarios para una puesta en común enriquecida por diferentes perspectivas. Además, los estudiantes tienen la posibilidad de experimentar con la creación de un compás musical, su transformación y posterior reproducción en un sintetizador virtual, lo que

permite aplicar los conceptos de forma práctica y explorar cómo cada transformación impacta el proceso creativo. Se estima un tiempo de 60 minutos para el desarrollo individual de esta actividad de lectura y análisis.

Fase de reajuste

En los grupos de trabajo, y teniendo en cuenta lo estudiado, se solicitará a los grupos lo siguiente:

Lean, discutan y respondan lo siguientes de forma escrita y en los espacios designados.

1. Grafiquen el ejemplo de transportar plasmado en el documento entregado. Tener en cuenta las siguientes sugerencias:
    a. ¿Está en el plano o en el espacio?
    b. ¿Cuál es el dominio y el rango?
    c. ¿Cuándo no es función?
    d. ¿Qué tipo de figura se transporta?
    e. ¿Conserva el gráfico sus propiedades?
2. ¿Lo expuesto en las lecturas puede ser una forma útil o pertinente para reconocer relaciones de funciones? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí, expliquen cómo lo harían.
3. ¿Qué conocimientos requiere el profesor, si desea usar la transportación y retrogradación para abordar el tema de funciones?
4. ¿Requiere saberes previos el estudiante? ¿Cuáles?

Todas las preguntas están orientadas a que los participantes movilicen sus conocimientos sobre el concepto de función, sus implicaciones y características. El propósito es que puedan llegar a una representación gráfica de la función (posiblemente no única), evaluando si cumple con las condiciones propias de una función. Las preguntas no buscan respuestas cerradas, sino

que actúan como una guía para suscitar reflexiones y sembrar inquietudes en torno a este concepto.

El propósito de estas preguntas es invitar a una reflexión sobre la relación entre las transformaciones y las funciones. En particular, se pretende que los estudiantes analicen si estos métodos pueden constituir una herramienta adecuada para la enseñanza de este concepto y, en caso afirmativo, cómo podrían integrarse dentro de una propuesta didáctica.

Mediante la discusión y la escritura, los participantes tendrán la oportunidad de identificar vínculos entre la estructura de las transformaciones musicales y las funciones matemáticas, valorar la pertinencia de este enfoque en el contexto escolar y reconocer los conocimientos que tanto docentes como estudiantes requerirían para una implementación efectiva.

Del mismo modo, se busca que los futuros educadores matemáticos cuestionen la utilidad de estrategias no convencionales en la enseñanza de las matemáticas. Este espacio de análisis y argumentación pretende abrir nuevas perspectivas en el diseño de sus futuras clases. Se estima que esta actividad tenga una duración aproximada de 30 minutos.

Fase de institucionalización

Se prevé un trabajo sea liderado por el formador y estima que el tiempo para la realización de esta fase sea de 30 minutos.

Se revisarán las propuestas de abordaje de funciones planteadas por los grupos con el fin de evaluar si los participantes comprenden que a través de cuatro tipos de transformaciones musicales se pueden estudiar funciones. A propósito de tal revisión se espera que el formador proponga algunas preguntas que susciten la reflexión y socialización con los futuros profesores, por ejemplo:

- ¿Qué tan distintas son las gráficas de la función de cada grupo? ¿Por qué?
- ¿Qué tan distinta es la propuesta de abordaje de funciones diseñada en clase del plan de estudios vivenciado en su etapa escolar o en la universidad?
- ¿Qué haría falta en la propuesta de abordaje de funciones diseñada?

Se espera que esta institucionalización permita contrastar y enriquecer las diferentes propuestas de abordaje de las funciones, fomentando el análisis crítico y la argumentación entre los participantes. Al compartir y discutir sus enfoques, los futuros educadores matemáticos podrán reconocer la diversidad de estrategias posibles, valorar sus ventajas y limitaciones y reflexionar sobre la pertinencia de cada una en distintos contextos educativos. Además, este ejercicio busca fortalecer su capacidad para tomar decisiones fundamentadas en su futura práctica docente, promoviendo una enseñanza de funciones que sea significativa y adaptable a las necesidades del aula.

En esta fase se espera institucionalizar es la función como una herramienta que no solo se representa gráficamente o se define formalmente, sino que se puede usar para evaluar relaciones, reconocer estructuras, y desarrollar una comprensión más profunda del concepto y sus implicaciones. A través del trabajo con transformaciones musicales, los participantes consolidan la idea de que enseñar funciones puede ir más allá de la manipulación algebraica: implica comprender su comportamiento, su representación en distintos registros y su potencial para describir fenómenos de manera significativa y contextualizada.

Características asociadas

A lo largo de la tarea propuesta se pueden reconocer, de manera directa, las siguientes características que favorecen la formación profesional inicial del profesor de matemáticas:

Abordar [posibles] prácticas o problemas profesionales del profesor de matemáticas

Los futuros docentes se enfrentan al reto de pensar cómo enseñar el concepto de función de una manera alternativa, integrando transformaciones musicales como transportar, retrogradar, octavar e inversión real. Esta propuesta implica diseñar actividades que trascienden el enfoque tradicional y permite que los participantes experimenten con recursos didácticos innovadores que pueden ser adaptados a diversos contextos escolares.

Poner en juego las creencias, concepciones y conocimientos de los futuros profesores de matemáticas

Al analizar las definiciones dadas y evaluarlas en un caso específico, los futuros docentes ponen en juego sus ideas previas para evaluar la pertinencia de la función presentada y sus posibles representaciones. Este análisis les permite cuestionarse cómo han sido sus propias experiencias de aprendizaje y repensar sus concepciones sobre qué significa enseñar y aprender funciones en el aula.

Propiciar un rol activo por parte de los futuros profesores de matemáticas

Durante la actividad, los participantes leen, analizan, componen fragmentos musicales y aplican transformaciones, tanto en espacios individuales, como grupales. Este proceso les exige tomar decisiones, argumentar sus propuestas y colaborar con otros, asumiendo un papel protagónico en la construcción de conocimientos y en la planificación didáctica.

Permitir que surjan nuevos cuestionamientos que potencien la perspectiva profesional del futuro profesor de matemáticas

El uso de herramientas poco convencionales como las transformaciones musicales genera preguntas sobre las relaciones entre música y matemáticas, sobre la viabilidad de enfoques interdisciplinarios y sobre el papel de la creatividad en la enseñanza. Estas inquietudes invitan a

ampliar la mirada sobre el quehacer docente y explorar nuevas formas de acercarse al contenido matemático.

Potenciar el desarrollo personal de los futuros profesores de matemáticas a partir de las interacciones con otros

El trabajo en parejas y las discusiones grupales permiten que los futuros profesores contrasten ideas, escuchen distintas formas de pensar y ajusten sus propuestas en función del diálogo. Este tipo de interacción favorece el desarrollo de habilidades comunicativas, la empatía profesional y la flexibilidad para adaptarse a distintos escenarios educativos.

Permitir a los futuros profesores de matemáticas modificar su conocimiento

La tarea propone el análisis de documentos, la elaboración de compases musicales transformados y la discusión de propuestas de enseñanza. Estas experiencias permiten ampliar la comprensión del concepto de función y explorar nuevas maneras de enseñarlo, lo que puede modificar significativamente la visión que los participantes tienen sobre su enseñanza futura.

Adicionalmente, esta tarea se vincula parcialmente con las siguientes características:

Promover la comprensión de conceptos didácticos, matemáticos, pedagógicos o curriculares

Al abordar funciones desde una perspectiva interdisciplinaria, los futuros docentes profundizan en la comprensión de este concepto matemático y reflexionan sobre su enseñanza en contextos reales. También se familiarizan con nociones pedagógicas como el uso de analogías, la exploración creativa y la transposición didáctica.

Posibilitar la reflexión sobre el quehacer del profesor de matemáticas

La propuesta lleva a los futuros docentes a cuestionar prácticas tradicionales y a valorar el potencial de enfoques alternativos. A través de la tarea, reflexionan sobre los propósitos de la

enseñanza de funciones, los tipos de actividades que podrían diseñar y los saberes necesarios para guiar el aprendizaje de sus futuros estudiantes.

Permitir exhibir el conocimiento matemático, didáctico, curricular y pedagógico de los futuros profesores de matemáticas

La elaboración y ajuste de propuestas de enseñanza sobre funciones, basadas en transformaciones musicales, pone en evidencia no solo el conocimiento matemático de los participantes, sino también su capacidad para diseñar actividades didácticas coherentes y fundamentadas. Aunque el foco principal está en el concepto de función, la tarea permite integrar diversos tipos de saberes relevantes para la práctica docente.

Tarea 3. Perspectivas sobre la enseñanza de la permutación con repetición

Presentación

Esta tarea tiene como principal propósito promover una reflexión teórico-crítica sobre la enseñanza de las permutaciones con repetición a través de reconocer la existencia de una relación entre las permutaciones con repetición y dos métodos de composición musical que se sirven de herramientas probabilísticas y, con ello, darle posibles nuevas herramientas de enseñanza a los futuros profesores. A partir del análisis de una experiencia hipotética, la articulación con la música y sus conocimientos matemáticos se busca que los futuros docentes:

- Examinen la manera en que se enseña la permutación con repetición en un caso hipotético, reconozcan aciertos y limitaciones en dicha experiencia.
- Analicen métodos de composición musical y evalúen su relación con el concepto de permutación con repetición, para que identifiquen posibles relaciones.
- Diseñen y argumenten estrategias para la enseñanza de la permutación con repetición, integrando elementos de los métodos de composición musical.

- Reflexionen sobre la toma de decisiones en la práctica docente, contrastando una propuesta tradicional con otra que tiene un enfoque de enseñanza a través de la música.

La tarea se desarrolla en diferentes fases, combinando trabajo individual, grupal y de socialización en plenaria, con el fin de fomentar un aprendizaje crítico y significativo sobre el tema. A continuación, se describen las fases que componen la tarea.

Fase individual

Esta primera fase se compone de dos momentos específicos, los cuales son:

Momento 1

El formador planteará distintas situaciones y preguntas sobre las cuales trata la tarea. Específicamente se les pedirá a los futuros profesores lo siguiente:

Considere la siguiente situación:

Javier es un profesor de matemáticas de grado décimo que debe enseñar a sus estudiantes permutaciones con repetición. Para ello, la metodología de clase del profesor Javier es escribir en el tablero el título del tema y a continuación escribir la siguiente expresión:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

Y luego mencionar a los estudiantes que n es la cantidad de elementos de un conjunto dado, k es la cantidad de elementos distintos en el conjunto. Además, n_1 es la frecuencia del primer elemento entre los k elementos distintos; n_2, la frecuencia del segundo elemento entre los k elementos distintos y sucesivamente hasta definir n_k como la frecuencia del k-ésimo elemento.

A continuación, dictar un ejemplo como este: ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra BANANA? Y escribe en tablero el siguiente procedimiento:

$$P_6^{1,3,2} = \frac{6!}{1!\,3!\,2!} = \frac{720}{12} = 60$$

Finalmente, proponer un problema, por ejemplo: tres chicas, Rosa, Ana y Lucía quieren recibir clases de piano. El profesor tiene libre los lunes, martes, miércoles y jueves. Rosa y Ana se conforman con una clase a la semana, pero Lucía quiere recibir dos clases. ¿De cuántas formas diferentes podría el profesor completar su horario para atender a las chicas?

Con base en la situación presentada, responda las siguientes preguntas de forma escrita e individual en los espacios designados.

1. Bajo la mirada que tiene hoy, como futuro educador matemático, ¿qué ventajas o aciertos reconoce en el abordaje del tema de permutación con repetición que hace el profesor Javier?, ¿por qué los reconoce como ventajas o aciertos?
2. Bajo la mirada que tiene hoy, como futuro educador matemático, ¿qué desaciertos o desventajas advierte en el abordaje del tema de permutación con repetición que hace el profesor Javier?, ¿por qué los reconoce como desaciertos o desventajas?
3. ¿Cómo abordaría la enseñanza de la permutación con repetición? ¿Qué aspectos cambiaría y cuáles conservaría de la situación presentada?

Se espera que los futuros docentes reconozcan como aciertos del profesor Javier el uso de una fórmula clara, un ejemplo conocido (BANANA) y un problema contextualizado, lo cual puede facilitar la aplicación inmediata del concepto.Sin embargo, también deben identificar limitaciones, como la falta de exploración previa, el uso prematuro de la fórmula y la escasa participación de los estudiantes, lo que puede dificultar una comprensión profunda.

Se espera que propongan un enfoque más activo y exploratorio, partiendo de situaciones concretas que permitan construir el concepto antes de formalizarlo. Podrían conservar el uso de ejemplos y problemas, pero transformarlos en oportunidades para el análisis y la reflexión.

La intención de estas preguntas es propiciar una reflexión sobre la manera en que se ha enseñado tradicionalmente la permutación con repetición en la educación escolar y cómo esta experiencia puede influir en la futura práctica docente de los participantes. Se espera que los futuros profesores analicen críticamente la situación planteada en torno a este concepto, tomando como referencia su formación actual en matemáticas y en didáctica de las matemáticas.

En particular, se busca que identifiquen elementos que consideren acertados, así como limitaciones o aspectos mejorables en una situación hipotética de enseñanza tradicional de

permutaciones con repetición. Este ejercicio invita a que los participantes reflexionen sobre estrategias didácticas que favorezcan un aprendizaje más significativo del concepto.

Se estima que este momento tenga una duración aproximada de 30 minutos.

Momento 2

Ahora, el formador asignará a cada estudiante un documento en el que se presente un sistema de composición musical: juego de dados de Mozart (a continuación o Anexo C) o música estocástica (a continuación o Anexo D). Esto se hará teniendo en mente que, para la siguiente fase, se conformarán grupos (idealmente parejas) de trabajo. La intención es que cada miembro del grupo haya tenido asignado un documento distinto para que puedan compartir sus puntos de vista desde sus propios focos.

Se solicitará a los estudiantes que tomen apuntes de aquello que consideren relevante de su lectura, por cuanto esto será el insumo para el trabajo grupal que se propone a continuación. Adicionalmente, para que comprendan cómo funciona el método que les correspondió y que puedan crear una pieza musical empleando un sintetizador virtual (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/ o https://play.google.com/store/apps/details?id=ar.com.pavanconsultores.mozart&pli=1)

Juego de dados de Mozart

El juego de dados de Mozart (o *Musikalisches Würfelspiel*) es una técnica creada en el siglo XVIII para componer música de manera aleatoria. Se le atribuye a Wolfgang Amadeus Mozart y se basa en lanzar dados para seleccionar fragmentos musicales precompuestos, los cuales se combinan en vals (género musical en compás de tres tiempos o 3/4). Cada compás fue creado por Mozart para que sea agradable al oído. Este vals tiene dos partes, la primera parte establece la idea principal, mientras que la segunda aporta contraste, variedad y resolución.

¿Cómo jugar el juego de dados de Mozart?

Material necesario:

- Un par de dados de seis caras o simulador (https://es.piliapp.com/random/dice/?num=2).
- Los acordes compuestos por Mozart (anexo de https://es.slideshare.net/slideshow/juego-de-dados-de-mozart/5953663).
- Una tabla con los fragmentos musicales numerados, separando los fragmentos de la primera parte vals y los de la segunda. Teniendo en cuenta que en números romanos refieren al orden de los compases y los números arábigos en negrilla, a los posibles resultados de los dados. Tabla como la siguiente.

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII		IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	96	22	141	41	105	122	11	30	**2**	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	**3**	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	**4**	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	**5**	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	**6**	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	**7**	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	**8**	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	**9**	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	**10**	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	**11**	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	**12**	35	20	108	92	12	124	44	131

- Un instrumento o software de notación musical (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/) para interpretar el resultado.

Pasos para jugar:

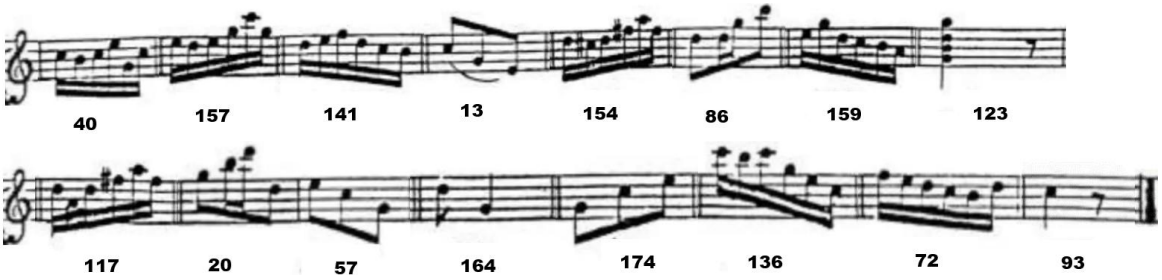
1. Se lanzan los dados 16 veces para determinar qué fragmento musical se usará en cada compás.
2. Según la suma de los dados, buscar en la tabla cuál es el fragmento musical correspondiente.
3. Anotar la secuencia de los fragmentos seleccionados.
4. Tocar la pieza en un instrumento o usar un software de música para reproducirla y escucharla.

Ejemplo*:*

Lanzamos los dados y obtenemos lo siguiente: 5, 7, 2, 4, 7, 9, 5, 10, 3, 12, 8, 11, 2, 6, 9, 6. Como en el primer lanzamiento obtuvimos 5 como resultado, al reportarlos en la tabla, marcamos la casilla correspondiente a ese compás y valor arrojado por los dados. Siguiendo ese proceso con cada uno de los 16 números obtenidos de cada lanzamiento, la tabla queda de la siguiente manera.

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tomamos los compases precompuestos correspondientes a los marcados en la tabla y los organizamos en el orden dado por la misma, queda la siguiente partitura, la cual podemos interpretar en un instrumento o sintetizador.

Tu turno:

Compón y reproduce tu propio vals, para esto descarga y usa la siguiente aplicación en Play Store: Dados de Mozart (https://play.google.com/store/apps/details?id=ar.com.pavanconsultores.mozart&pli=1)

Música estocástica

La música estocástica es un enfoque compositivo en el que se usan procesos probabilísticos para determinar diferentes aspectos de la música, como el ritmo, la melodía, la armonía y la dinámica. Fue popularizada por Iannis Xenakis, quien aplicó principios matemáticos y estadísticos para generar estructuras sonoras.

¿Cómo componer música estocástica?

- Decidir qué elementos de la música estarán sujetos al azar entre altura, duración, intensidad, timbre y estructura.
- Decidir cuáles de diferentes enfoques matemáticos usar para generar valores aleatorios como:

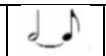
- Distribuciones uniformes: Todas las opciones tienen la misma probabilidad.
- Distribuciones gaussianas: Se centra en valores medios con menor frecuencia en los extremos.
- Procesos de Markov: La probabilidad de la siguiente nota depende solo de la anterior.
- Autómatas celulares o fractales: Generan patrones con cierto grado de aleatoriedad estructurada.

- Usar herramientas para generar números aleatorios y aplicarlos a los parámetros definidos. Se pueden usar herramientas como softwares, aplicaciones, dados, ruletas, Excel, entre otros.
- Generalmente, el compositor establece límites o reglas para que la música estocástica no suene como solo ruido.
- Aplicar los métodos escogidos y anotar la secuencia de los resultados seleccionados por el azar.
- Interpretar la pieza en un instrumento o usar un software de música para reproducirla y escucharla.

Ejemplo:

Escogemos la altura y duración como los elementos sujetos al azar. Estos elementos estarán sujetos a una distribución uniforme y seleccionados a través de una formula en Excel, "=ALEATORIO.ENTRE(inferior; superior)", la cual garantiza una distribución exclusivamente uniforme en el proceso. Para facilitar el proceso, asignamos los siguientes valores a cada una de las posibilidades de altura y de duración respectivamente.

0	Silencio	**13**	do 2	**26**	do# 3	**39**	re 4	**52**	re# 5	**65**	mi 6	**78**	fa 7
1	do 1	**14**	do# 2	**27**	re 3	**40**	re# 4	**53**	mi 5	**66**	fa 6	**79**	fa# 7
2	do# 1	**15**	re 2	**28**	re# 3	**41**	mi 4	**54**	fa 5	**67**	fa# 6	**80**	sol 7
3	re 1	**16**	re# 2	**29**	mi 3	**42**	fa 4	**55**	fa# 5	**68**	sol 6	**81**	sol# 7
4	re# 1	**17**	mi 2	**30**	fa 3	**43**	fa# 4	**56**	sol 5	**69**	sol# 6	**82**	la 7
5	mi 1	**18**	fa 2	**31**	fa# 3	**44**	sol 4	**57**	sol# 5	**70**	la 6	**83**	la# 7
6	fa 1	**19**	fa# 2	**32**	sol 3	**45**	sol# 4	**58**	la 5	**71**	la# 6	**84**	si 7
7	fa# 1	**20**	sol 2	**33**	sol# 3	**46**	la 4	**59**	la# 5	**72**	si 6	**85**	do 8
8	sol 1	**21**	sol# 2	**34**	la 3	**47**	la# 4	**60**	si 5	**73**	do 7		
9	sol# 1	**22**	la 2	**35**	la# 3	**48**	si 4	**61**	do 6	**74**	do# 7		
10	la 1	**23**	la# 2	**36**	si 3	**49**	do 5	**62**	do# 6	**75**	re 7		
11	la# 1	**24**	si 2	**37**	do 4	**50**	do# 5	**63**	re 6	**76**	re# 7		
12	si 1	**25**	do 3	**38**	do# 4	**51**	re 5	**64**	re# 6	**77**	mi 7		

1		**3**		**5**		**7**		**9**		**11**	
2		**4**		**6**		**8**		**10**			

Como límite establecemos hacer una composición de 10 notas y usar solo las octavas 2, 3 y 4 o sea de 13 a 48 en la primera tabla. Al aplicar las fórmulas de Excel obtuvimos los siguientes resultados.

Orden	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Altura (13-48)	43	21	18	19	29	46	31	44	42	27
Duración (1-11)	10	5	7	9	1	6	10	9	4	3

Tomamos las notas correspondientes y las organizamos, queda la siguiente organización, la cual podemos tocar en un instrumento o sintetizador.

Orden	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Altura	FA# 4	SOL# 2	FA 2	FA# 2	MI 3	LA 4	FA# 3	SOL 4	FA 4	RE 3
Duración										

Tu turno:

Compón y reproduce tu propio fragmento de música estocástica. Toma la altura como único elemento sujeto al azar, con distribución uniforme y selecciona a través de una ruleta virtual (https://spinthewheel.io/es). Para facilitar el proceso, básate en la tabla de alturas del ejemplo. Como límite construye un fragmento musical de 20 notas. Para terminar, interpreta y graba tu fragmento musical en el sintetizador (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/) para que posteriormente lo puedas escuchar.

Con esto presente, se le solicita a cada estudiante que:

Lea el documento asignado, tome apuntes de todo aquello que considere relevante de su lectura, genere una pieza musical con el método explicado y pruébela en el sintetizador correspondiente.

La intención de esta tarea es que los estudiantes profundicen en el estudio de dos sistemas de composición musical distintos: el juego de dados de Mozart y la música estocástica. Al asignarles un documento específico, se busca que cada estudiante adquiera una comprensión detallada del método correspondiente. A través de la toma de apuntes sobre los aspectos más relevantes de su lectura, los estudiantes podrán generar los insumos necesarios para un trabajo grupal enriquecido por perspectivas diversas. Además, se les proporciona la oportunidad de experimentar con la creación de una pieza musical utilizando un sintetizador virtual, con el fin de aplicar de manera práctica los conceptos aprendidos y explorar cómo cada método influye en el

proceso compositivo. Para este ejercicio de lectura y revisión individual se estima emplear un tiempo de 60 minutos.

Fase grupal

El formador configurará las parejas de trabajo tal que los miembros de cada grupo tengan documentos de lectura diferentes. Si la cantidad de estudiantes es impar, entonces quedaría conformado un grupo de tres estudiantes, lo indispensable es que entre los integrantes se tengan aportes sobre los dos documentos de lectura. La instrucción que sigue es:

Lean, discutan y respondan las siguientes preguntas de forma escrita y en los espacios designados.

1. Si tenemos la secuencia de notas do, do, re, mi, ¿de cuántas formas podemos organizarlas sin cambiar la cantidad de veces que aparece cada nota?
2. ¿Se pueden relacionar las permutaciones con repetición y los métodos presentados en las lecturas? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí, expliquen cómo lo harían.
3. ¿Lo expuesto en las lecturas puede ser una forma eficiente para enseñar permutaciones con repetición? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí, expliquen cómo lo harían.
4. ¿Qué conocimientos requiere el profesor si desea emplear estos métodos de composición para abordar el tema de permutación con repetición?
5. ¿Requiere saberes previos el estudiante? ¿Cuáles?
6. ¿Emplear esos métodos de composición para trabajar el tema de permutación con repetición es necesario, útil o un aporte interesante? Justifiquen.

Se espera que, ante la primera pregunta, los participantes identifiquen que se trata de un problema de permutaciones con repetición, ya que hay elementos que se repiten (dos notas do). Considerando esas repeticiones, la respuesta correcta sería: 12 formas distintas.

Respecto a la segunda y tercera pregunta, se espera que los futuros docentes reconozcan que sí es posible establecer una relación entre las permutaciones con repetición y los métodos de composición musical presentados en las lecturas, con la ventaja de que permiten representar permutaciones de manera auditiva y visual, haciendo más tangible y significativa la comprensión del concepto.

En cuanto al conocimiento requerido por el profesor, se espera que identifique la necesidad de dominar tanto el concepto matemático de permutaciones con repetición como las nociones básicas de organización y composición musical, además de tener la capacidad de traducir estos elementos en actividades didácticas coherentes y significativas.

También se espera que los participantes reconozcan que los estudiantes requieren algunos saberes previos, como el conteo básico, la noción de factorial, la identificación de elementos repetidos, así como una disposición abierta hacia el trabajo con contextos musicales o poco convencionales. Además, se espera que valoren el uso de métodos de composición como un aporte interesante y útil para enriquecer la enseñanza de las permutaciones con repetición.

La intención de estas preguntas es fomentar una reflexión en torno a la relación entre los métodos de composición musical y el concepto de permutación con repetición. En particular, se espera que los estudiantes analicen si estos métodos pueden ser una herramienta pertinente para la enseñanza de dicho concepto y, en caso afirmativo, de qué manera podrían integrarse en una propuesta didáctica.

A través de la discusión y la escritura, los participantes podrán identificar conexiones entre la estructura de la composición musical y los principios combinatorios, evaluar la pertinencia de estos enfoques en el aula y determinar los conocimientos que tanto docentes como estudiantes necesitarían para su implementación efectiva.

Así mismo, se busca que los futuros educadores matemáticos cuestionen la utilidad de estrategias no convencionales en la enseñanza de las matemáticas. Este espacio de análisis y argumentación permitirá que los estudiantes consideren nuevas perspectivas en el diseño de sus futuras clases. Se estima que este momento de trabajo tenga una duración aproximada de 30 minutos.

Fase de reajuste

En los grupos de trabajo, y teniendo en cuenta lo estudiado, se solicitará a los grupos discutir las propuestas iniciales de abordaje de permutación con repetición, que reportaron en la pregunta 3 del Momento 1 de la Fase individual, escoger una y hacer las modificaciones que se consideren necesarias tras haber aprendido acerca de los métodos de composición musical. Se estima que este momento de trabajo tenga una duración aproximada de 40 minutos.

Fase de institucionalización

Se prevé un trabajo sea liderado por el formador y se estima que el tiempo para la realización de esta fase sea de 30 minutos.

Se revisarán las propuestas de abordaje de permutación con repetición planteadas por los grupos con el fin de evaluar si los participantes comprenden que a través de dos métodos de composición musical se pueden estudiar permutaciones con repetición. A propósito de tal revisión se espera que el formador proponga algunas preguntas que susciten la reflexión y socialización con los futuros profesores, por ejemplo:

- ¿Qué tan distinta es la propuesta de abordaje de permutación con repetición diseñado en clase del plan de estudios vivenciado en su etapa escolar o en la universidad?

- ¿Qué haría falta en la propuesta de abordaje de permutación con repetición diseñada?

Se espera que esta socialización permita contrastar y enriquecer las diferentes propuestas de abordaje de la permutación con repetición, fomentando el análisis crítico y la argumentación entre los participantes. Al compartir y discutir sus enfoques, los futuros educadores matemáticos podrán reconocer la diversidad de estrategias posibles, valorar sus ventajas y limitaciones y reflexionar sobre la pertinencia de cada una en distintos contextos educativos. Además, este ejercicio busca fortalecer su capacidad para tomar decisiones fundamentadas en su futura práctica docente, promoviendo una enseñanza de la combinatoria desde una perspectiva diferente a la tradicional.

En esta fase, lo que se desea institucionalizar es la posibilidad de comprender y enseñar las permutaciones con repetición a partir de estructuras musicales, reconociendo que ciertos procedimientos de la composición pueden ser modelados matemáticamente. También, la idea de que la combinatoria puede abordarse desde contextos no numéricos, lo cual permite generar experiencias más allá de lo operativo y culturalmente cercanas a los estudiantes, sin perder el rigor del contenido matemático.

Características asociadas

A lo largo de la tarea propuesta se pueden reconocer, de manera directa, las siguientes características que favorecen la formación profesional inicial del profesor de matemáticas:

Abordar [posibles] prácticas o problemas profesionales del profesor de matemáticas

Los futuros profesores explorarán maneras de enseñar el concepto de permutación con repetición, contrastando estrategias tradicionales con enfoques distintos que involucran métodos de composición musical. Esta reflexión se alinea con una de las responsabilidades de un docente

de matemáticas: diseñar y ajustar estrategias de enseñanza acordes a las necesidades de los estudiantes.

Poner en juego las creencias, concepciones y conocimientos de los futuros profesores de matemáticas

La tarea invita a los futuros docentes a comparar cómo aprendieron la permutación con repetición en su etapa escolar con los nuevos enfoques discutidos. Esta comparación promueve la reflexión crítica sobre sus experiencias previas y permite identificar cambios en sus concepciones acerca de la enseñanza de la combinatoria.

Propiciar un rol activo por parte de los futuros profesores de matemáticas

A lo largo de la actividad, los participantes no solo responderán preguntas individuales, sino que también trabajarán en parejas para analizar textos, generar piezas musicales y construir colectivamente una propuesta de enseñanza para la permutación con repetición. Este enfoque fomenta la autonomía, el trabajo colaborativo y la toma de decisiones fundamentadas en la práctica docente.

Permitir que surjan nuevos cuestionamientos que potencien la perspectiva profesional del futuro profesor de matemáticas

El uso de métodos de composición como el juego de dados de Mozart o la música sstocástica plantea preguntas sobre la relación entre la combinatoria y la música, la utilidad de enfoques interdisciplinarios y la manera en que los docentes pueden integrar recursos innovadores en el aula. Se espera que estas inquietudes fortalezcan una mirada crítica y flexible sobre la enseñanza de la matemática.

Potenciar el desarrollo personal de los futuros profesores de matemáticas a partir de las interacciones con otros

El trabajo en parejas y la posterior socialización en plenaria permitirán que los futuros profesores intercambien ideas, argumenten sus puntos de vista y ajusten sus propuestas en función del diálogo con sus compañeros. Estas interacciones favorecen el desarrollo de habilidades comunicativas y la capacidad de adaptación en contextos educativos diversos.

Permitir a los futuros profesores de matemáticas modificar su conocimiento

A través del análisis de los documentos y la experimentación con métodos de composición, los participantes pueden ampliar su comprensión sobre la permutación con repetición y sus aplicaciones, así como repensar las maneras en que se puede enseñar este concepto de forma más significativa para los estudiantes. Adicionalmente, la tarea apunta parcialmente a las siguientes características:

Promover la comprensión de conceptos didácticos, matemáticos, pedagógicos o curriculares

La actividad permite que los futuros docentes comprendan de manera más profunda conceptos clave como la permutación con repetición, la enseñanza basada en conexiones interdisciplinarias y el papel de la creatividad en el aprendizaje matemático.

Posibilitar la reflexión sobre el quehacer del profesor de matemáticas

A lo largo de la tarea, se espera que los futuros docentes se cuestionen sobre el papel de los enfoques innovadores en la enseñanza de la matemática, el impacto de las estrategias didácticas en la comprensión de los conceptos y las decisiones curriculares que influyen en el aprendizaje de la combinatoria en la educación escolar.

Permitir exhibir el conocimiento matemático, didáctico, curricular y pedagógico de los futuros profesores de matemáticas

El diseño de una propuesta de enseñanza sobre permutación con repetición exige que los participantes pongan en juego su conocimiento matemático sobre combinatoria. Aunque se emplea el término completo de esta característica, su aplicación se centra en el conocimiento matemático.

4.2.6 Fase 6: implementación

Por la disponibilidad de tiempos, para la implementación de las tareas, se decidió realizar un pilotaje solo de la Tarea 3, enfocada en perspectivas sobre la enseñanza de la permutación con repetición. Para ello, participaron los estudiantes registrados en el espacio académico de Probabilidad de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el semestre 2025-I. En común acuerdo con el profesor titular del espacio, la implementación de la tarea se llevó a cabo en dos sesiones de clase, cada una de dos horas. El motivo para seleccionar a los estudiantes de este espacio académico era garantizar dos aspectos: primero, que todos los participantes de la tarea fueran profesores en formación; y segundo, que ya hubieran abordado el tema de permutaciones con repetición, una de las primeras temáticas que se aborda en el curso.

La primera sesión se desarrolló de manera virtual (por razones ajenas al curso o a la ejecución de la tarea), mientras que la segunda se realizó de forma presencial. En la implementación participaron ocho profesores en formación en cada sesión y, de manera indirecta, el profesor titular del espacio quien también realizó aportes. Cada uno de los momentos de trabajo tomó aproximadamente la mitad del tiempo previsto en la fase de diseño de la tarea. La recolección de las respuestas y productos de las tareas se realizó por medio de un formulario de *Microsoft Forms* para poder facilitar su análisis.

4.2.7 Fase 7: análisis de resultados

Para el análisis de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la tarea sobre permutaciones con repetición, se emplea el método de viñetas, tal como es presentado por Camargo (2021). Esta estrategia resulta adecuada debido a que permite reconstruir momentos significativos del proceso de enseñanza y aprendizaje, a partir de la organización narrativa de fragmentos de datos seleccionados. Según la autora, "Una viñeta es una descripción no neutral, influenciada por los hallazgos, vívida y persuasiva de una serie de eventos que suceden en un lapso y que son representativos o emblemáticos del fenómeno que se estudia." (Camargo, 2021, p. 159).

En este estudio, las respuestas de los profesores en formación fueron recolectadas mediante dos formularios de *Microsoft Forms*, uno correspondiente a cada momento de la implementación. A partir de estas respuestas, se identificaron elementos claves que permitieron dar cuenta y razón de cómo los participantes interpretaron y abordaron las ideas centrales de la tarea. El método de viñetas ofreció, en este caso, una herramienta pertinente para articular los elementos contextuales, discursivos y conceptuales que emergen del análisis, sin fragmentar la complejidad propia de la experiencia educativa. Es importante señalar que este apartado es solamente descriptivo de la fase; los resultados derivados del análisis se presentan en detalle en el siguiente capítulo del trabajo.

4.2.8 Fase 8: conclusiones

La última fase del estudio correspondió a la elaboración de las conclusiones, en las que se presentan reflexiones generales en relación con la información recolectada a partir de las fuentes revisadas, así como de los resultados obtenidos durante el proceso de diseño, implementación y análisis. En este apartado, se examinó el grado de cumplimiento de los objetivos generales y

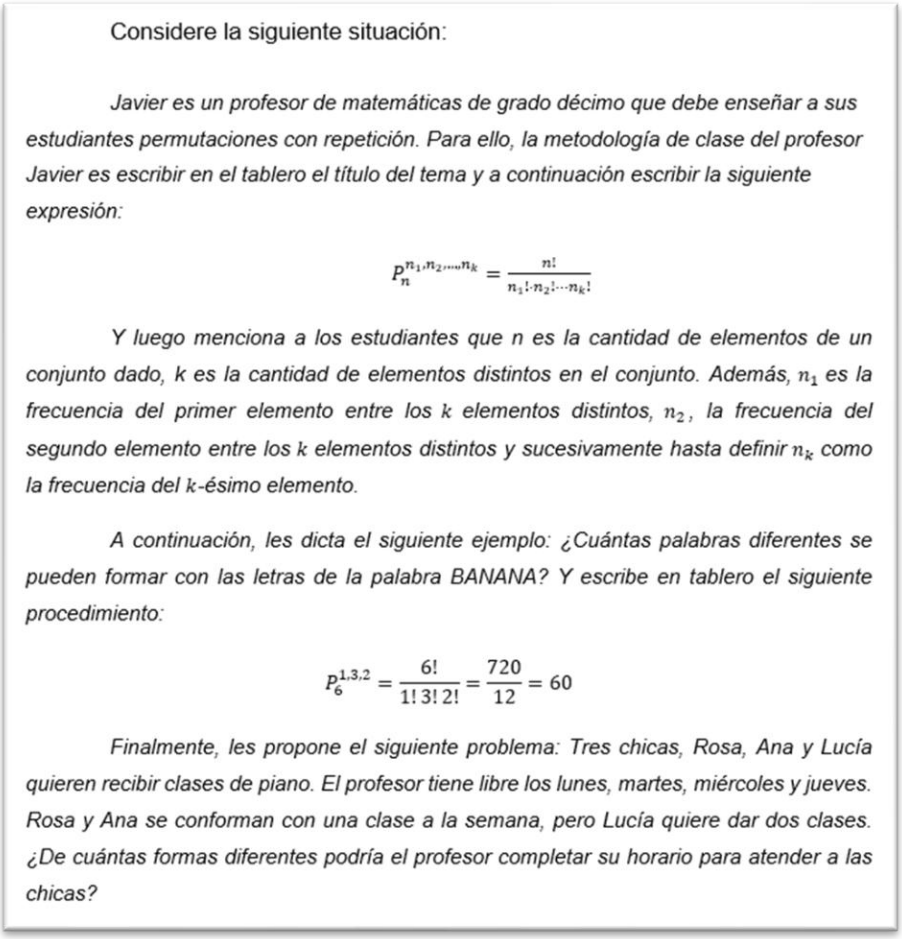
específicos propuestos al inicio del trabajo y se explicitaron los principales aportes derivados del estudio. Asimismo, se identificaron algunos aspectos relevantes que pueden ser profundizados en investigaciones futuras que sigan una línea similar.

5 Resultados

Como se mencionó con anterioridad, el análisis de los resultados de la implementación de la tarea *Perspectivas sobre la enseñanza de la permutación con repetición* se realizó mediante el método de viñetas de Camargo (2021). Las respuestas de los futuros profesores (Anexo E) se analizan a continuación.

El primer momento de la experiencia consistió en presentar a los estudiantes la situación del profesor Javier (Figura 17).

Figura 17
Situación del profesor Javier



Considere la siguiente situación:

Javier es un profesor de matemáticas de grado décimo que debe enseñar a sus estudiantes permutaciones con repetición. Para ello, la metodología de clase del profesor Javier es escribir en el tablero el título del tema y a continuación escribir la siguiente expresión:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

Y luego menciona a los estudiantes que n es la cantidad de elementos de un conjunto dado, k es la cantidad de elementos distintos en el conjunto. Además, n_1 es la frecuencia del primer elemento entre los k elementos distintos, n_2, la frecuencia del segundo elemento entre los k elementos distintos y sucesivamente hasta definir n_k como la frecuencia del k-ésimo elemento.

A continuación, les dicta el siguiente ejemplo: ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra BANANA? Y escribe en tablero el siguiente procedimiento:

$$P_6^{1,3,2} = \frac{6!}{1!\,3!\,2!} = \frac{720}{12} = 60$$

Finalmente, les propone el siguiente problema: Tres chicas, Rosa, Ana y Lucía quieren recibir clases de piano. El profesor tiene libre los lunes, martes, miércoles y jueves. Rosa y Ana se conforman con una clase a la semana, pero Lucía quiere dar dos clases. ¿De cuántas formas diferentes podría el profesor completar su horario para atender a las chicas?

Luego de leer dicha situación, cada estudiante respondió de manera individual un cuestionario en línea. La primera pregunta, ***"Bajo la mirada que tiene hoy, como futuro***

educador matemático, ¿qué ventajas o aciertos reconoce en el abordaje del tema de permutación con repetición que hace el profesor Javier?, ¿por qué los reconoce como ventajas o aciertos?", los invitaba a reflexionar sobre los aciertos que encontraban en el abordaje del profesor Javier. Se obtuvieron respuestas como las siguientes:

- "La aplicación en un contexto real sobre la asignación de horarios para clases de piano permite a los estudiantes conectar el concepto matemático con la resolución de problemas."
- "Algo que siento que es una ventaja, es el uso de ejemplos y aplicación de la fórmula para explicar, ya que puede permitir a los estudiantes relacionar ejemplos de la vida cotidiana y poder comprender la aplicación de la fórmula."
- "La fórmula general se pueden identificar los elementos claves de la fórmula *(n, k)*, propuesta de un problema para poner en práctica la fórmula."

Estas coinciden con las del grupo en considerar pertinente el uso de ejemplos contextualizados, ya que permiten evidenciar la utilidad del concepto matemático y dar sentido a cada uno de los elementos de la fórmula. Aunque cada uno expresó su argumento de forma distinta, todos resaltaron la importancia de conectar el contenido con situaciones reales.

La segunda pregunta, ***"Bajo la mirada que tiene hoy, como futuro educador matemático, ¿qué desaciertos o desventajas advierte en el abordaje del tema de permutación con repetición que hace el profesor Javier?, ¿por qué los reconoce como desaciertos o desventajas?"***, buscaba identificar posibles desaciertos o desventajas del abordaje presentado. Se identificaron respuestas como las siguientes:

- “El profesor introduce directamente la fórmula de las permutaciones sin explorar intuitivamente el concepto con ejemplos, esto puede dificultar la comprensión de los conceptos.”
- “Falta aclarar porque es una permutación con repetición, puesto que en los siguientes problemas que se parezcan a estos no se resuelvan con la permutación con repetición.”
- “Ejemplo único y poco variado con solo el ejemplo de la palabra BANANA el estudiante podría asumir que los ejercicios de permutación solo se hacen con problemas de ordenar palabras se podrían realizar otros ejemplos con números o otros objetos.”

Estas muestran acuerdo en que hubo poca exploración previa por parte de los estudiantes en la situación hipotética, lo cual limitó la posibilidad de deducir la fórmula o comprender los contextos en los que se aplica. Además, señalaron la falta de ejemplos variados que ayudaran a clarificar el uso de la fórmula.

A la tercera pregunta, ***" ¿Cómo abordaría la enseñanza de la permutación con repetición? ¿Qué aspectos cambiaría y cuáles conservaría de la situación presentada?”***, estudiantes respondieron cosas como las siguientes:

- “Comenzaría proponiendo que los estudiantes resuelvan cierto tipo de problemas que estén relacionados con repeticiones, y en base a eso llevar a cada uno de los estudiantes a descubrir el patrón que da origen a la fórmula que pienso trabajar.”
- “Presentar por qué son permutaciones con repetición, buscar que los estudiantes primero encuentren los espacios muestrales por expansión y al darse cuenta que no alcanzan a contar tan fácil la cantidad de posibilidades, les daré la fórmula con una explicación previa al por qué se hace así.”

- “Considero que es importante abordar lo que dije en el anterior punto, partiría de explicar de donde sale la formula, el por qué cada elemento representa algo puntual, explicaría en que situaciones se podría usar esta permutación y brindaría más ejemplos y que se solucionen de la mano con los estudiantes.”

Estas respuestas coinciden con las propuestas del grupo en crear una necesidad de generar una fórmula. La cual se siembra planteando espacios muestrales grandes, difíciles de manejar sin una herramienta general como lo es la fórmula. Además, varios sugieren que, antes de presentar la fórmula, se deben promover condiciones que lleven al estudiante a descubrir su utilidad. También incluirían mayor cantidad y variedad de ejemplos después de llegar a la fórmula.

Posteriormente, cada estudiante recibió uno de dos documentos: sobre música estocástica o sobre el Juego de dados de Mozart. Tras analizar su documento, se emparejaron con alguien que leyó el otro texto y respondieron un nuevo cuestionario de forma colaborativa.

A la pregunta inicial, **“Si tenemos la secuencia de notas do, do, re, mi, ¿de cuántas formas podemos organizarlas sin cambiar la cantidad de veces que aparece cada nota?”**, las respuestas fueron variadas (12, 24 y 6 formas de organizar las notas), lo que evidencia confusiones persistentes sobre el concepto de permutaciones con repetición.

En la segunda pregunta, **“¿Se pueden relacionar la permutación con repetición y lo presentado en las lecturas? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí, expliquen ¿Cómo lo harían?”**, todos los grupos respondieron afirmativamente. Sin embargo, sus formas de explicarlo difieren. Las siguientes son representantes de los dos tipos de posturas encontradas.

- “Si, en el caso de los dos documentos podemos ver una relación, en donde en el momento 1 y momentos 2 se llega a evidenciar una repetición en algunos de los resultados en los dados y en la ruleta y se puede llegar a asociar con la permutación con repetición.”
- “Si, en la música estocástica, puedes aplicar permutaciones al ordenar secuencias de notas. Por ejemplo, si tienes un conjunto de notas (A, B, C), puedes crear diferentes secuencias como ABC, ACB, BAC, etc. Cada una de estas secuencias puede ser interpretada como una variación musical. En los dados de Mozart, cada medida es independiente de las demás, lo que permite un gran número de combinaciones posibles y el orden de selección de los compases importa.”

Algunos ofrecen explicaciones claras que relacionan el orden y la repetición en música con el concepto matemático. Otros, en cambio, utilizan un lenguaje más vago o intuitivo y en algunos casos se perciben contradicciones, como afirmar que el orden no importa, lo cual entra en conflicto con la definición del concepto trabajado.

Respecto a la pregunta, ***“¿Lo expuesto en las lecturas puede ser una forma eficiente de trabajar permutaciones con repetición? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí, expliquen ¿Cómo lo harían?”***, dos grupos consideran que sí, siempre que los estudiantes tengan conocimiento previo del contexto musical. Los otros dos grupos creen que no es eficiente, ya que incluir conocimiento musical sin preparación previa puede generar confusión y sobrecarga cognitiva.

Cuando se les preguntó, ***“¿Qué conocimientos requiere el profesor si desea emplear estos métodos de composición para abordar el tema de permutación con repetición?”***, se obtuvieron respuestas como:

- “Debe tener conocimiento de cada uno de los métodos, ya que los estudiantes pueden tener preguntas acerca del tema, y si el profesor no sabe cómo responderlas, el estudiante tampoco entenderá lo que el profesor quería explicar. Además, debe conocer bien lo que es la permutación con repetición, cual es la definición, la fórmula, por qué funciona y para qué sirve.”

Todos coinciden en la necesidad de manejar con claridad el concepto de permutaciones con repetición, tener nociones básicas de música y dominar bien los métodos de composición presentados. En cuanto a la pregunta ***“¿Requiere saberes previos del estudiante? ¿Cuáles?”***, la mayoría argumentó asuntos similares a los siguientes:

- “Principios de conteo, conceptos básicos de probabilidad, ¡N!, Excel, escala musical y notación musical”

Es decir, que deben tener ideas de probabilidad básica, manejo de Excel y algo de conocimiento musical. Solo una pareja consideró que bastaba con distinguir entre permutación y combinación.

Finalmente, a la pregunta sobre si estos métodos representan un aporte útil o interesante, la mayoría opinó que sí: reconocen que puede motivar a los estudiantes, hacer el contenido más atractivo y vincularlo con otras áreas del conocimiento, como la música. Aun así, insisten en que el profesor debe tener en cuenta los conocimientos previos del grupo, como se nota en la siguiente respuesta de una pareja:

- “Es un aporte interesante para los estudiantes de como estos métodos Generan música, los estudiantes que les gusta la música, puede ayudar a llamar la atención de estos.”

En un último ejercicio, se les pidió a los grupos ajustar su propuesta inicial de enseñanza, incorporando los aprendizajes obtenidos de los métodos musicales. En todos los casos se

incluyeron elementos musicales en el abordaje del tema. Algunas propuestas empezaron enseñando conceptos musicales básicos, para luego explorar combinaciones con notas hasta generar un espacio muestral amplio que justificara el uso de la fórmula. Otras presentaban primero el contexto musical y luego la fórmula, utilizándola en ejemplos musicales como los dados de Mozart o la música estocástica.

El análisis de estas viñetas revela que, aunque los estudiantes valoran el uso de contextos reales y creativos como la música para enseñar permutaciones con repetición, también reconocen que su efectividad depende de una preparación previa tanto del docente como del estudiante. La experiencia permitió no solo fortalecer su comprensión del contenido matemático, sino también ampliar su visión sobre cómo integrar otras disciplinas en la enseñanza. A través del diálogo, la reflexión y la reformulación de sus propuestas, los futuros docentes exploraron nuevas formas de hacer significativa la enseñanza de las matemáticas, mostrando apertura a innovar, pero también conciencia sobre los desafíos que ello implica.

6 Conclusiones

La propuesta desarrollada en este trabajo de grado parte de una premisa fundamental: nuestra apuesta no está orientada a hacer más *fácil* o *didáctica* (*i. e*., lúdica) la enseñanza de contenidos como funciones, permutaciones o aritmética modular. Por el contrario, reconocemos que incorporar lo musical a menudo implica un desafío mayor tanto para quien enseña, como para quien aprende. Sin embargo, creemos firmemente que este esfuerzo vale la pena si las tareas permiten repensar esos objetos matemáticos a partir de una interacción profunda entre las matemáticas y la música. Nuestra intención no es simplificar los contenidos, sino abrir espacios para comprenderlos desde nuevas perspectivas, enriquecer su enseñanza y ampliar los horizontes formativos de los futuros profesores de matemáticas.

Las conclusiones que se presentan a continuación están organizadas en torno al cumplimiento de los objetivos específicos del estudio, los aportes conceptuales y didácticos alcanzados, la reflexión sobre el enfoque metodológico adoptado y las posibles proyecciones de esta propuesta en otros contextos educativos.

Este trabajo de grado logra cumplir con los objetivos específicos propuestos. En primer lugar, se identificaron múltiples conexiones entre la música y las matemáticas a través de una revisión documental amplia, que abarcó desde enfoques históricos hasta propuestas didácticas contemporáneas. En segundo lugar, se diseñó una secuencia de tareas con sentido profesional dirigidas a futuros profesores de matemáticas, que integran elementos musicales como recurso para abordar contenidos matemáticos específicos. Finalmente, mediante la implementación piloto de una de las tareas, se logró evaluar la pertinencia y el impacto de la propuesta en la formación docente, cumpliendo así el objetivo de valorar su potencial educativo.

Por otra parte, este trabajo constituye una apuesta por enriquecer la formación inicial de los profesores de matemáticas mediante una propuesta interdisciplinar que articula la música con el conocimiento matemático. A partir de la exploración de múltiples referentes teóricos, históricos y didácticos, se ha demostrado que es posible diseñar tareas con sentido profesional que integren elementos musicales para favorecer la comprensión de conceptos matemáticos como las permutaciones con repetición, la aritmética modular y las funciones.

Uno de los principales aportes de este estudio radica en mostrar que la música, lejos de ser un mero recurso estético o motivacional, puede constituirse en un medio riguroso y creativo para el análisis, la representación y la transformación de objetos matemáticos. Desde las transformaciones musicales (como transportar, octavar, retrogradar o invertir) hasta estructuras más complejas como las escalas, los modos o los ritmos euclidianos, se evidencia que la lógica matemática está profundamente imbricada en los procesos compositivos y de interpretación musical. Esta constatación no solo respalda la pertinencia del enfoque interdisciplinar, sino que amplía las posibilidades de enseñanza desde una perspectiva más rica, contextualizada y significativa.

Asimismo, la implementación piloto de una de las tareas diseñadas permitió constatar el potencial formativo de este enfoque. Los futuros profesores no solo lograron resignificar su comprensión de conceptos combinatorios, sino que además valoraron positivamente el uso de elementos musicales como un recurso para enriquecer la enseñanza y despertar la curiosidad matemática en el aula. Las respuestas analizadas evidencian que este tipo de propuestas puede motivar la reflexión crítica sobre la práctica docente, favorecer la creatividad en el diseño de clases y fomentar una postura más flexible, sensible y adaptativa frente a los saberes disciplinares.

Otro aspecto relevante es el reconocimiento de que la enseñanza de las matemáticas no debería desligarse del contexto, de la cultura ni del cuerpo. La música, como lenguaje universal, permite vincular lo abstracto con lo sensible, lo técnico con lo expresivo, lo lógico con lo intuitivo. En este sentido, se plantea que una formación docente comprometida con la diversidad de saberes debe abrirse a estas intersecciones, reconociendo que el conocimiento matemático también puede construirse desde la experiencia estética, la corporalidad, el ritmo y el sonido.

En cuanto al diseño metodológico, el enfoque cualitativo y exploratorio adoptado fue adecuado para comprender cómo los participantes se aproximan a propuestas innovadoras que desafían las formas tradicionales de enseñar. Las tareas con sentido profesional, estructuradas en fases individuales, grupales, teóricas e institucionales, permitieron articular el conocimiento matemático con la reflexión didáctica y la toma de decisiones fundamentadas. Este tipo de tareas, más allá de su componente interdisciplinar, resultan ser herramientas valiosas para fortalecer las competencias profesionales del futuro docente, en la medida en que promueven el análisis de situaciones auténticas, el trabajo colaborativo y el pensamiento crítico.

Finalmente, este trabajo deja abiertas varias líneas de proyección. Por un lado, se sugiere continuar explorando otras conexiones posibles entre música y matemáticas, no solo en combinatoria o funciones, sino también en geometría, álgebra o estadística. Por otro lado, se plantea la necesidad de fortalecer la dimensión interdisciplinar en los programas de formación docente, ofreciendo espacios sistemáticos para el cruce entre saberes, lenguajes y culturas. Asimismo, sería pertinente llevar estas propuestas a otros niveles educativos, así como ampliar las experiencias de implementación para valorar su impacto en distintos contextos escolares.

En síntesis, este trabajo reafirma que enseñar matemáticas desde la música no solo es posible, sino deseable. No como una estrategia superficial o anecdótica, sino como una forma

genuina de enriquecer la comprensión matemática, conectar con el mundo de los estudiantes y ampliar el horizonte profesional del maestro en formación. Al componer melodías matemáticas, se pretende abrir caminos para una educación más humana, más creativa y significativa.

7 Referencias

Aguado, M., y Rivas, Á. (2023). Sistemas de afinación en música desde el punto de vista de las matemáticas. *Revista de Acústica*, 54, 23–29.

Almarza, R. (2018). *Dodecafonismo y serialismo en la obra de Arnold Schönberg*. https://www.academia.edu/

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia; Universidad Pedagógica Nacional.

Centeno, G., Centeno, H., y Jiménez, N. (1994). Funciones reales (p. 39) *Matemática constructiva 11(1.ª ed.)*. Editorial Libros & Libres.

Centeno, G., Centeno, H., y Jiménez, N. (1997). Funciones reales (p. 51) *Nueva matemática constructiva 11(1.ª ed.)*. Editorial Libros & Libros.

Degazio, B. (1986). Musical aspects of fractal geometry. En *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC)*.

De la Vega, L. A. (2020). *Atonalidad y teoría de conjuntos en el dodecafonismo*. https://www.academia.edu/

Diciembre, S. (2019). *Trabajo final de máster: Relación entre música y matemáticas* [Tesis de maestría, Universidad Jaume I]. Castellón, España.

Fernández, A. (2017). *Música y matemáticas: El fascinante círculo de quintas*. Medios educativos.

Fonseca, L. A. (2021). *La composición algorítmica y su aplicación en la generación de timbres, reverberación y espacialización.* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid].

Fuentes, J. T., y Sandoval, F. Y. (2017). *Origen musical de las proporciones: Un estudio histórico-filológico a favor del conocimiento del profesor de matemáticas.* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Universidad Pedagógica Nacional.

García, J. L. (2005). *Transformaciones y simetrías en la música del siglo XX*. https://www.researchgate.net/

González, C. A. (2006). *Las matemáticas como una herramienta para la composición musical.* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw-Hill.

Lan Tran, M., Park, C., y Jung, J.-H. (2023). Topological data analysis of Korean music in Jeongganbo: A cycle structure. *Journal of Mathematics and Music, 17*(3), 403–432. https://doi.org/10.1080/17459737.2022.2164626

Liern, V. (2008). La música y el número siete: Historia de una relación controvertida. *Suma,* 58, 137–143.

Lugos, J. A. (2023). Sobre la matemática de los compases musicales y su relación con la geometría. *Revista de música de la Universidad EAFIT. RICERCARE*, 16, 27–58.

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Matemática 9.° EGB: Texto del estudiante*. SMEcuaediciones.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Matemáticas 9: Vamos a aprender*. Ediciones SM.

Miranda, A. (2009). *Matemáticas en la música: Una aproximación modular*. Editorial Académica Española.

Montiel, M. (2023). *Mathematics and Computation in Music Conferences*. Society for Mathematics and Computation in Music.

Morales, N., y Rendón, C. (2023). *Tareas con sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas: Algunos asuntos conceptuales*. Universidad de Sucre (Ed.), Un diálogo desde las prácticas, la investigación e innovación en la educación matemática (pp. 60–61). Memorias del IV Encuentro Internacional de Investigación e Innovación en Educación Matemática, Sucre, Colombia.

Mora, L., Rendón, C., y Morales, N. (2023). Un ejemplo de tarea con sentido para la formación de profesores de matemáticas alrededor de la generalización algebraica. *VII Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales* (pp. 1–5). Bogotá, Colombia.

Pachón, A. S. (2015). *Matemáticas y música: una mirada a la armonía desde la teoría de grupos.* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Padilla, S., Samper, C., y Moreno, V. (2008). Funciones reales (p. 175). *En Delta 8 (21.ª ed.).* Grupo Editorial Norma.

Pardo, J. (2004). *Matemáticas y música: Una armonía perfecta*. Editorial Nivola.

Pastor, A. (2008). Matemáticas en la música. *Suma,* (59), 17–21.

Pérez, J. (2000). *Música fractal: El sonido del caos*. Departamento de Lenguajes y Sistemas.

Pérez, L. (2019). *La simetría y el palíndromo en la música contemporánea*. https://www.researchgate.net/

Pérez, D. G., y Lastra, A. (2020). *Trabajo fin máster: Matemáticas y música.* [Tesis de maestría, Universidad de Alcalá].

Rendón, C., Mora, L., Morales, N., Morales, L., y Tirado, A. (2023). *Caracterización de tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la didáctica de la aritmética y el álgebra.* En Universidad Antonio Nariño (Ed.), Diálogos intergeneracionales para afrontar los desafíos de la innovación educativa en el siglo XXI: Memorias del VII Simposio Internacional de Formación de Educadores (pp. 1–5). Universidad Antonio Nariño.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 8*(1), 1–15.

Saavedra, M., y Medina, D. (2012). *Secundaria activa: Matemáticas 9°*. Ministerio de Educación Nacional.

Tiburcio, S. De Los A. (2006). *Algoritmos matemáticos en la composición musical.* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Autónoma De México]. Universidad Nacional Autónoma De México, México.

Tomasini, M. C. (2007). El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas. *C y T. Universidad de Palermo*, 15–27.

Toussaint, G. (2005). The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms. En *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science*. https://www.researchgate.net/.

Villadiego Luna, F. (2024). La interpretación matemática: Su importancia en el contexto educativo y la influencia docente. *Franz Tamayo - Revista de Educación, 6*(15), 51–69.

Villamizar, L., Velandia, W., Poveda, J., y Salvador. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (35)*, 254–287. Fundación Universitaria Católica del Norte.

Yöre, S., y Bakım, S. (2020). Investigation of applications of Fibonacci sequence and golden ratio in music. *Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi,* 29, 49–69.

8 Anexos

Contextualización de las matemáticas y escala diatónica (Anexo A)

En la actualidad, cada vez resulta más evidente la necesidad de repensar la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva más cercana a la realidad del estudiante mostrando una aplicabilidad. En este sentido Villadiego (2024) comenta lo siguiente:

> El aprendizaje de situaciones contextualizadas guarda una estrecha relación con la comprensión que los estudiantes tienen sobre las ideas que rodean sus propias concepciones y el caso de estudio. En este sentido, las matemáticas se benefician al explorar numerosas situaciones del entorno estudiantil y docente, permitiendo abordar teorías y teoremas desde una perspectiva centrada en casos y representaciones que fusionan los números con las intenciones del observador. Con el propósito de fomentar la creatividad de los estudiantes, resulta esencial que las clases incorporen situaciones de la realidad en sus planes y currículos. De acuerdo con los estudios de Miranda y Mamede (2022), las dificultades comunes que los estudiantes enfrentan suelen atribuirse a la incapacidad de interpretar adecuadamente el contexto de la problemática que necesitan investigar. […] En consecuencia, la clase de matemáticas se convierte en una construcción de realidades a partir de hechos que se resumen en situaciones desafiantes que requieren un pensamiento reflexivo para encontrar soluciones. Es fundamental que los estudiantes comprendan las representaciones presentadas por el docente para lograrlo. […] Considerando que la contextualización de situaciones medibles en matemáticas motiva al estudiante a encontrar sentido en su estudio, como se destaca en la investigación de Pérez y Palacio (2022), resulta esencial comprender la intrínseca relación entre el pensamiento matemático y la organización de ideas. En este sentido, el pensamiento algorítmico desempeña un papel crucial al representar situaciones del contexto. La estrategia de enseñanza debe proporcionar una estructura clara y fomentar el desarrollo de habilidades de pensamiento. Asimismo, Tupouniua (2023) enfatiza la importancia de generar discusiones contextuales que permitan a los estudiantes utilizar interpretaciones mediante algoritmos matemáticos, comprender sus acciones, proponer soluciones y analizar

> posibles errores para corregir enfoques. En consecuencia, los docentes que planifican clases de matemáticas con una integración contextual necesitan estimular su creatividad para concebir situaciones que fomenten una interpretación matemática más efectiva. (p. 52)

En ese sentido se habla de la escala diatónica para considerar su pertinencia como método de contextualización para introducir la aritmética modular.

Escala diatónica

Una escala es una serie de sonidos organizados en un orden específico. En la música occidental hay un sistema que tiene 12 sonidos distintos y las escalas se construyen eligiendo algunos de esos sonidos y poniéndolos en un patrón repetitivo. Estos patrones se usan para crear canciones, melodías o acompañamientos. Una escala diatónica es un tipo muy común de escala que tiene siete sonidos diferentes antes de volver a repetirse. La más conocida es la escala de do mayor, que es: do – re – mi – fa – sol – la – si.

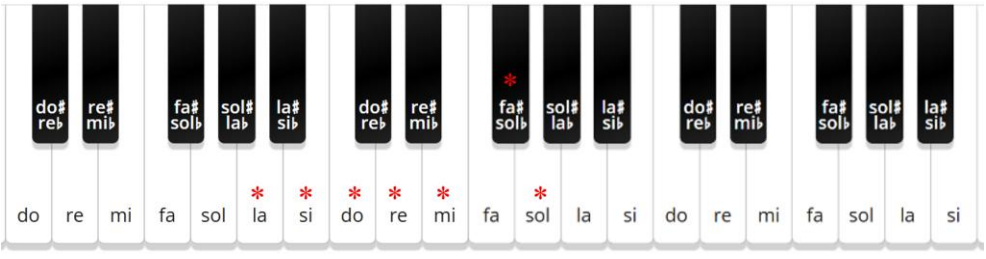
¿Cómo cambiar la tónica de una la escala diatónica en un piano?

La tónica es la nota por la que empieza una escala, y que le da su nombre. Por ejemplo, en la escala de do mayor la tónica es do.

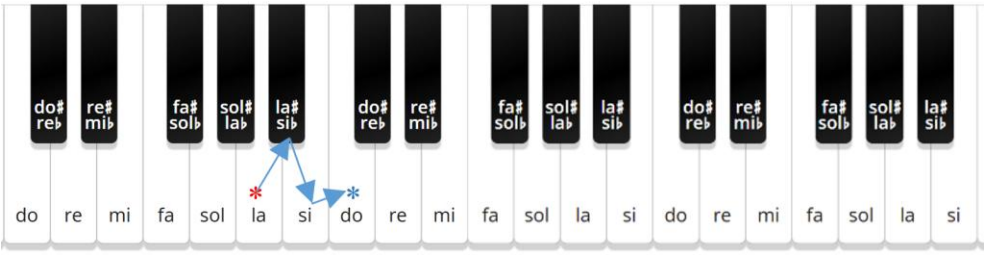
1. Reconocer la tónica y las notas de la escala inicial.
2. Elegir la nueva tónica (nota base) deseada.
3. Contar las teclas entre la tónica inicial y la nueva tónica.
4. Moverse respecto a cada nota de la escala la misma cantidad de teclas que hay entre la tónica original y la nueva tónica, procurando moverse hacia el mismo lado del teclado.

Ejemplo*:*

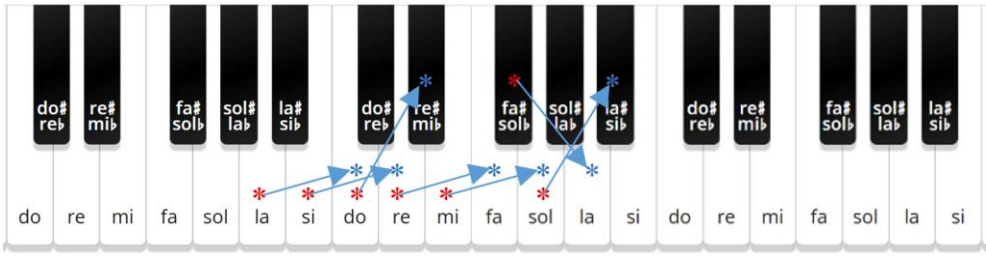
Partiendo de la escala la – si – do – re – mi – fa# – sol, marcamos con asteriscos las teclas que representan las notas de nuestra escala, así:



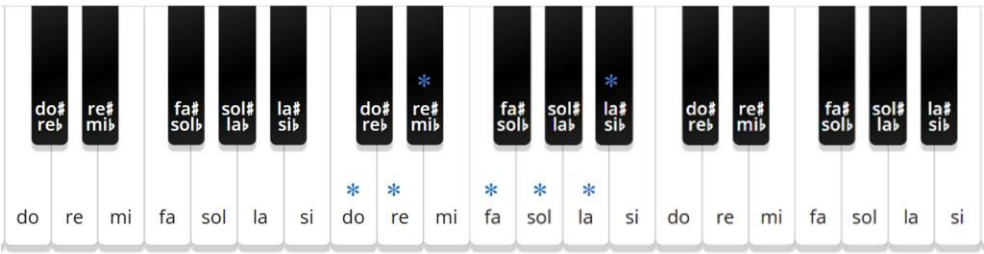
Para cambiar la tónica a do, contamos las teclas entre la y do.



Como nos corrimos tres teclas a la derecha, entones debemos desplázanos tres teclas a la derecha por cada nota inicial, así:

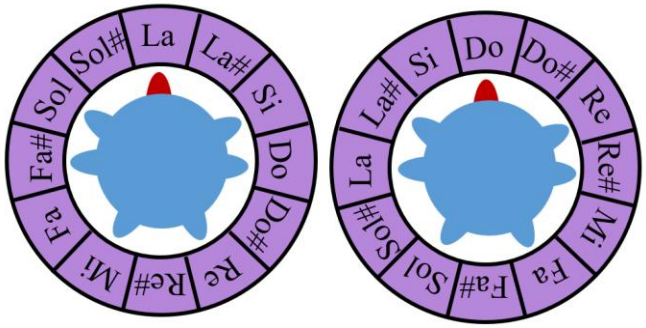


Quedándonos así:



Al traducir esos resultados obtenemos la siguiente escala:

do – re – re# – fa – sol – la – la#, que conserva exactamente la misma estructura que la original. A continuación, una imagen de cómo se puede ver más claramente:



Tu turno:

A la escala, re – mi – fa – sol – la – si – do – re, cámbiale la tónica, después interprétala y grábala en el sintetizador (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/) para que posteriormente lo puedas escuchar.

Transportar y retrogradar (Anexo B)

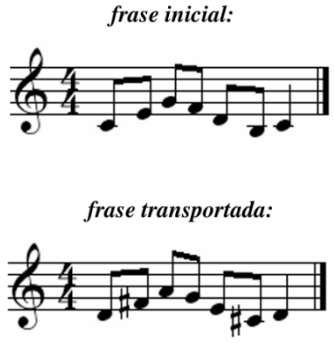
Transportar

La transportación es una transformación musical que consiste en trasladar una pieza o una melodía completa de una tonalidad a otra. En términos prácticos, implica subir o bajar todas las notas de una composición manteniendo inalteradas las relaciones interválicas entre ellas. Es decir, aunque la pieza comienza desde una nota diferente, conserva su estructura melódica y armónica original.

¿Cómo transportar una pieza musical?

1. Identificar la tónica original.
2. Decidir la tonalidad a la que se desea transportar.
3. Determinar la distancia entre las dos tonalidades.
4. Aplicar ese mismo intervalo a todas las notas de la melodía.

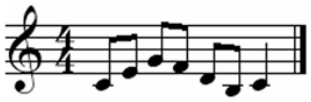
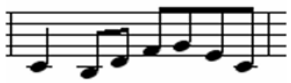
Ejemplo:

En la imagen se representa la transportación de un compás de siete notas. En la parte superior se encuentra el fragmento original, y debajo aparece el fragmento transportado. El compás original tiene como tónica la nota do, mientras que en la versión transportada la nueva tónica es re, ambas en la misma octava. Esto indica una transposición de un tono completo hacia arriba, por lo tanto, todas las notas han sido elevadas un tono, dando como resultado el compás que aparece en la parte inferior.

Retrogradar

Retrogradar es una transformación musical que consiste en invertir el orden de las notas de una melodía, de modo que se reproduzcan en sentido contrario al original. Es decir, la última nota pasa a ser la primera, la penúltima la segunda, y así sucesivamente. Aunque se invierte la dirección temporal de la frase, se conservan el ritmo y los valores de duración de cada nota, lo que da lugar a una versión reflejada en el tiempo.

¿Cómo retrogradar una pieza musical?

1. Identificar cada nota y su duración.
2. Reordenar las notas en sentido inverso, manteniendo sus respectivas duraciones.

frase inicial:

frase retrograda:

En la imagen se representa una retrogradación de un compás compuesto por siete notas. En la parte superior se encuentra el fragmento original, mientras que en la parte inferior aparece el mismo fragmento retrogradado. El compás original finaliza con una negra en do, que en la retrogradación se convierte en la primera nota. La penúltima nota, una corchea en si de la octava inferior, pasa a ocupar el segundo lugar. Le sigue una corchea en re, que se convierte en la tercera nota, y luego una corchea en fa, ahora la cuarta. La quinta nota es una corchea en sol, seguida por una corchea en mi como penúltima, y finalmente una corchea en do, que en el original era la primera nota, se convierte en la última del fragmento retrogradado.

Funciones para las transformaciones

Estas transformaciones pueden representarse como funciones de la siguiente manera:

1. Asignar a cada nota una terna ordenada (Orden, Altura y Duración), siendo los conjuntos referenciales de cada coordenada así:
   a. $O = \{a | \ 1 \leq a \leq n, \ a,n \in \mathbb{N}\}$
   b. $A = \{b | 0 \leq b \leq 85, \ b \in \mathbb{N}\}$ de manera que

0	Silencio	**18**	fa 2	**36**	si 3	**54**	fa 5	**72**	si 6
1	do 1	**19**	fa# 2	**37**	do 4	**55**	fa# 5	**73**	do 7
2	do# 1	**20**	sol 2	**38**	do# 4	**56**	sol 5	**74**	do# 7
3	re 1	**21**	sol# 2	**39**	re 4	**57**	sol# 5	**75**	re 7
4	re# 1	**22**	la 2	**40**	re# 4	**58**	la 5	**76**	re# 7
5	mi 1	**23**	la# 2	**41**	mi 4	**59**	la# 5	**77**	mi 7
6	fa 1	**24**	si 2	**42**	fa 4	**60**	si 5	**78**	fa 7
7	fa# 1	**25**	do 3	**43**	fa# 4	**61**	do 6	**79**	fa# 7
8	sol 1	**26**	do# 3	**44**	sol 4	**62**	do# 6	**80**	sol 7
9	sol# 1	**27**	re 3	**45**	sol# 4	**63**	re 6	**81**	sol# 7
10	la 1	**28**	re# 3	**46**	la 4	**64**	re# 6	**82**	la 7
11	la# 1	**29**	mi 3	**47**	la# 4	**65**	mi 6	**83**	la# 7
12	si 1	**30**	fa 3	**48**	si 4	**66**	fa 6	**84**	si 7
13	do 2	**31**	fa# 3	**49**	do 5	**67**	fa# 6	**85**	do 8
14	do# 2	**32**	sol 3	**50**	do# 5	**68**	sol 6		
15	re 2	**33**	sol# 3	**51**	re 5	**69**	sol# 6		
16	re# 2	**34**	la 3	**52**	re# 5	**70**	la 6		
17	mi 2	**35**	la# 3	**53**	mi 5	**71**	la# 6		

   c. $D = \{c | 1 \leq c \leq 11, \ c \in \mathbb{N}\}$ de manera que

1		**3**		**5**		**7**		**9**		**11**	
2		**4**		**6**		**8**		**10**			

2. Seleccionar la función de la transformación a realizar.
   a. **Def. Transportar:** t: $P \rightarrow T(P) \subseteq O \times A \times D$

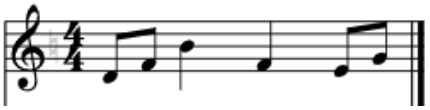
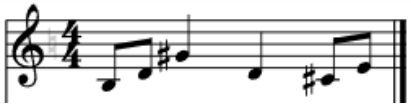
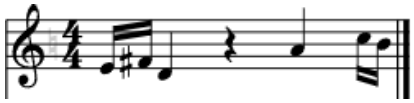
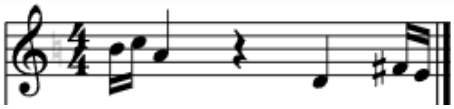
$(a, b, c) \mapsto (a, b + k, c)$,

para algún $|k| < 12, k \in \mathbb{Z}$ y de tal modo que $1 \leq b + k \leq 85$.

b. **Def. Retrogradar:** $r: P \rightarrow R(P) \subseteq O \times A \times D$

$(a, b, c) \mapsto (n - a + 1, b, c), n$ el orden de P.

3. Aplicar la función a cada terna ordenada.

Ejemplo transportar:

Al compás de la imagen se asignan las siguientes ternas ordenadas (1, 39, 9), (2, 42, 9), (3, 48, 7), (4, 42, 7), (5, 41, 9) y (6, 44, 9). Para aplicar la función de transportar, definimos $k = -3$ porque la tónica original es Re 4= 39, la nueva es Si 3= 36 y $36 - 39 = -3$. Al aplicar la función de transportar a cada terna resulta (1, 36, 9), (2, 39, 9), (3, 45, 7), (4, 39, 7), (5, 38, 9) y (6, 41, 9). Al reescribir en términos musicales queda el siguiente compás.

Ejemplo retrogradar:

Al compás de la imagen se asignan las siguientes ternas ordenadas (1, 41, 11), (2, 43, 11), (3, 39, 7), (4, 0, 7), (5, 46, 7), (6, 49, 11) y (7, 48, 11). Al aplicar la función de retrogradar a cada terna resulta (7, 41, 11), (6, 43, 11), (5, 39, 7), (4, 0, 7), (3, 46, 7), (2, 49, 11) y (1, 48, 11). Reorganizando quedan las siguientes ternas ordenadas: (1, 48, 11), (2, 49, 11), (3, 46, 7), (4, 0, 7), (5, 39, 7), (6, 43, 11) y (7, 41, 11). Al reescribir en términos musicales queda el siguiente compás.

Tu turno:

Compón, reproduce tu propio compás, luego transpórtalo reprodúcelo, retrográdalo y reprodúcelo en el siguiente sintetizador con partitura online (https://flat.io/es/).

Juego de dados de Mozart (Anexo C)

El juego de dados de Mozart (o *Musikalisches Würfelspiel*) es una técnica creada en el siglo XVIII para componer música de manera aleatoria. Se le atribuye a Wolfgang Amadeus Mozart y se basa en lanzar dados para seleccionar fragmentos musicales precompuestos, los cuales se combinan en vals (género musical en compás de tres tiempos o 3/4). Cada compás fue creado por Mozart para que sea agradable al oído. Este vals tiene dos partes, la primera parte establece la idea principal, mientras que la segunda aporta contraste, variedad y resolución.

¿Cómo jugar el juego de dados de Mozart?

Material necesario:

- Un par de dados de seis caras o simulador (https://es.piliapp.com/random/dice/?num=2).
- Los acordes compuestos por Mozart (anexo de https://es.slideshare.net/slideshow/juego-de-dados-de-mozart/5953663).
- Una tabla con los fragmentos musicales numerados, separando los fragmentos de la primera parte vals y los de la segunda. Teniendo en cuenta que en números romanos refieren al orden de los compases y los números arábigos en negrilla, a los posibles resultados de los dados. Tabla como la siguiente.

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

- Un instrumento o software de notación musical (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/) para interpretar el resultado.

Pasos para jugar:

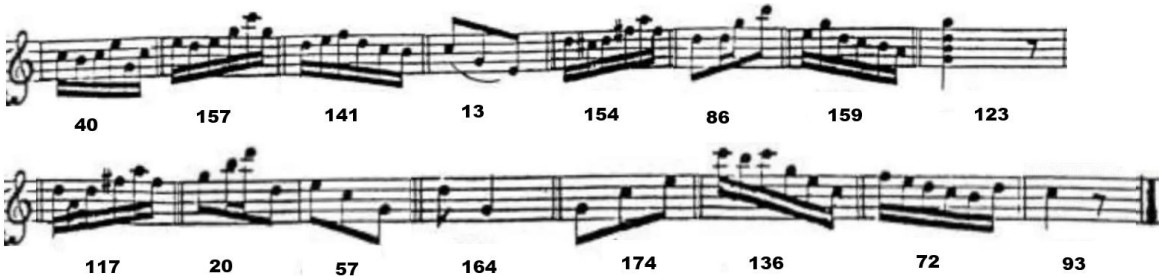
1. Se lanzan los dados 16 veces para determinar qué fragmento musical se usará en cada compás.
2. Según la suma de los dados, buscar en la tabla cuál es el fragmento musical correspondiente.
3. Anotar la secuencia de los fragmentos seleccionados.
4. Tocar la pieza en un instrumento o usar un software de música para reproducirla y escucharla.

Ejemplo*:*

Lanzamos los dados y obtenemos lo siguiente: 5, 7, 2, 4, 7, 9, 5, 10, 3, 12, 8, 11, 2, 6, 9, 6. Como en el primer lanzamiento obtuvimos 5 como resultado, al reportarlos en la tabla, marcamos la casilla correspondiente a ese compás y valor arrojado por los dados. Siguiendo ese proceso con cada uno de los 16 números obtenidos de cada lanzamiento, la tabla queda de la siguiente manera.

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tomamos los compases precompuestos correspondientes a los marcados en la tabla y los organizamos en el orden dado por la misma, queda la siguiente partitura, la cual podemos interpretar en un instrumento o sintetizador.

Tu turno:

Compón y reproduce tu propio vals, para esto descarga y usa la siguiente aplicación en Play Store: Dados de Mozart (https://play.google.com/store/apps/details?id=ar.com.pavanconsultores.mozart&pli=1)

Música estocástica (Anexo D)

La música estocástica es un enfoque compositivo en el que se usan procesos probabilísticos para determinar diferentes aspectos de la música, como el ritmo, la melodía, la armonía y la dinámica. Fue popularizada por Iannis Xenakis, quien aplicó principios matemáticos y estadísticos para generar estructuras sonoras.

¿Cómo componer música estocástica?

- Decidir qué elementos de la música estarán sujetos al azar entre altura, duración, intensidad, timbre y estructura.
- Decidir cuáles de diferentes enfoques matemáticos usar para generar valores aleatorios como:
    - Distribuciones uniformes: Todas las opciones tienen la misma probabilidad.
    - Distribuciones gaussianas: Se centra en valores medios con menor frecuencia en los extremos.
    - Procesos de Markov: La probabilidad de la siguiente nota depende solo de la anterior.
    - Autómatas celulares o fractales: Generan patrones con cierto grado de aleatoriedad estructurada.
- Usar herramientas para generar números aleatorios y aplicarlos a los parámetros definidos. Se pueden usar herramientas como softwares, aplicaciones, dados, ruletas, Excel, entre otros.
- Generalmente, el compositor establece límites o reglas para que la música estocástica no suene como solo ruido.
- Aplicar los métodos escogidos y anotar la secuencia de los resultados seleccionados por el azar.
- Interpretar la pieza en un instrumento o usar un software de música para reproducirla y escucharla.

Ejemplo:

Escogemos la altura y duración como los elementos sujetos al azar. Estos elementos estarán sujetos a una distribución uniforme y seleccionados a través de una formula en Excel, "=ALEATORIO.ENTRE(inferior; superior)", la cual garantiza una distribución exclusivamente uniforme en el proceso. Para facilitar el proceso, asignamos los siguientes valores a cada una de las posibilidades de altura y de duración respectivamente.

0	Silencio	**13**	do 2	**26**	do# 3	**39**	re 4	**52**	re# 5	**65**	mi 6	**78**	fa 7
1	do 1	**14**	do# 2	**27**	re 3	**40**	re# 4	**53**	mi 5	**66**	fa 6	**79**	fa# 7
2	do# 1	**15**	re 2	**28**	re# 3	**41**	mi 4	**54**	fa 5	**67**	fa# 6	**80**	sol 7
3	re 1	**16**	re# 2	**29**	mi 3	**42**	fa 4	**55**	fa# 5	**68**	sol 6	**81**	sol# 7
4	re# 1	**17**	mi 2	**30**	fa 3	**43**	fa# 4	**56**	sol 5	**69**	sol# 6	**82**	la 7
5	mi 1	**18**	fa 2	**31**	fa# 3	**44**	sol 4	**57**	sol# 5	**70**	la 6	**83**	la# 7
6	fa 1	**19**	fa# 2	**32**	sol 3	**45**	sol# 4	**58**	la 5	**71**	la# 6	**84**	si 7
7	fa# 1	**20**	sol 2	**33**	sol# 3	**46**	la 4	**59**	la# 5	**72**	si 6	**85**	do 8
8	sol 1	**21**	sol# 2	**34**	la 3	**47**	la# 4	**60**	si 5	**73**	do 7		
9	sol# 1	**22**	la 2	**35**	la# 3	**48**	si 4	**61**	do 6	**74**	do# 7		
10	la 1	**23**	la# 2	**36**	si 3	**49**	do 5	**62**	do# 6	**75**	re 7		
11	la# 1	**24**	si 2	**37**	do 4	**50**	do# 5	**63**	re 6	**76**	re# 7		
12	si 1	**25**	do 3	**38**	do# 4	**51**	re 5	**64**	re# 6	**77**	mi 7		

1		**3**		**5**		**7**		**9**		**11**	
2		**4**		**6**		**8**		**10**			

Como límite establecemos hacer una composición de 10 notas y usar solo las octavas 2, 3 y 4 o sea de 13 a 48 en la primera tabla. Al aplicar las fórmulas de Excel obtuvimos los siguientes resultados:

Orden	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Altura (13-48)	43	21	18	19	29	46	31	44	42	27
Duración (1-11)	10	5	7	9	1	6	10	9	4	3

Tomamos las notas correspondientes y las organizamos, queda la siguiente organización, la cual podemos tocar en un instrumento o sintetizador.

Orden	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Altura	FA# 4	SOL# 2	FA 2	FA# 2	MI 3	LA 4	FA# 3	SOL 4	FA 4	RE 3
Duración										

Tu turno:

Compón y reproduce tu propio fragmento de música estocástica. Toma la altura como único elemento sujeto al azar, con distribución uniforme y selecciona a través de una ruleta virtual (https://spinthewheel.io/es). Para facilitar el proceso, básate en la tabla de alturas del ejemplo. Como límite construye un fragmento musical de 20 notas. Para terminar, interpreta y graba tu fragmento musical en el sintetizador (https://www.apronus.com/teclado-pianovirtual.online/) para que posteriormente lo puedas escuchar.

Respuestas de los estudiantiles[13] (Anexo E)

Opinión situación profe Javier

Persona	Ventajas o aciertos	Desaciertos o desventajas	¿Cómo abordaría la enseñanza?
1	La aplicación en un contexto real sobre la asignación de horarios para clases de piano permite a los estudiantes conectar el concepto matemático con la resolución de problemas.	El profesor introduce directamente la fórmula de las permutaciones sin explorar intuitivamente el concepto con ejemplos, esto puede dificultar la comprensión de los conceptos.	Cambiaría abordar el tema con la fórmula directamente y más bien lo haría con una exploración intuitiva antes de la fórmula y utilizaría representaciones visuales como los diagramas de árbol. Conservaría aspectos como los ejemplos.
2	Usar problemas de contextos reales, dado que permite a los estudiantes reconocer el uso de las permutaciones en diferentes contextos respondiendo a un problema.	Falta aclarar por qué es una permutación con repetición, puesto que en los siguientes problemas que se parezcan a estos no se resuelvan con la permutación con repetición.	Presentar por qué son permutaciones con repetición, buscar que los estudiantes primero encuentren los espacios muestrales por expansión y al darse cuenta que no alcanzan a contar tan fácil la cantidad de posibilidades, les daré la fórmula con una explicación previa.
3	El ejemplo con la palabra BANANA puede ser muy beneficioso para el estudiante…	Sería más pertinente explicar de dónde sale la fórmula, no darla así como si nada.	Partiría de explicar de dónde sale la fórmula… brindaría más ejemplos y los solucionaría con los estudiantes.
4	Propone diferentes ejemplos relacionados con el uso de las permutaciones con repetición…	Va directo con la presentación de la fórmula, sin comprobar resultados.	Propondría una situación como el ejemplo de BANANA sin fórmula y luego con fórmula.
5	Hace preguntas “raras” para mantener la atención.	Puede confundir con esas preguntas si el estudiante está distraído.	Abordaje más participativo. Conservaría ecuaciones, cambiaría preguntas.
6	Uso de ejemplos y aplicación de la fórmula.	No hubo participación ni interacción con estudiantes.	Que los estudiantes descubran el patrón antes de la fórmula.

[13] Transcripciones literales de las respuestas sujetas a errores en redacción y ortografía.

7	Identificación de los elementos claves de la fórmula (n, k).	Uso de un único ejemplo: palabra BANANA.	Ejemplos variados. Mantendría explicación de la fórmula general.
8	Proponer ejemplo y ejercicio después de la explicación.	Da definición corta y solo un ejemplo.	Ejemplo con irregularidades, dar definición y fórmula, luego ejercicios y retroalimentación.

Discusión grupal

Grupo	1	2	3	4	5
Si tenemos la secuencia de notas do, do, re, mi, ¿de cuántas formas podemos organizarlas sin cambiar la cantidad de veces que aparece cada nota?	12	12	Utilizando el principio de multiplicación, podemos llegar a ver de cuántas formas se pueden organizar sin cambiar la cantidad de veces que aparece cada nota, que en este caso sería 24	12 formas	6
¿Se pueden relacionar la permutación con repetición y lo presentado en las lecturas? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí, expliquen ¿Cómo lo harían?	Si. Por ejemplo puedo componer do do mi re o puedo componer do re do mi, que son dos permutaciones con el do repetido 2 veces	En la estocástica se ve reflejada el uso de las permutaciones, dentro de una cantidad de notas que en este caso sería n, y cada nota es un elemento de ese conjunto de notas que tiene una probabilidad igual de salir, en donde el orden de las notas afecta la música y se pueden repetir las notas. Asociando las notas	Si, en el caso de los dos documentos podemos ver una relación, en donde en el momento 1 y momentos 2 se llega a evidenciar una repetición en algunos de los resultados en los dados y en la ruleta y se puede llegar a asociar con la permutación con repetición.	Si, en el método 1 se utiliza en la probabilidad de que caiga una de las doce posibles opciones de la suma del par de dados, revisar cuál es la probabilidad de que cada una de estas 12 sumas en los 16 tiros, teniendo en cuenta que se repiten e importa el orden. Si, en el método 2 se puede relacionar con una	Si En la música estocástica, puedes aplicar permutaciones al ordenar secuencias de notas. Por ejemplo, si tienes un conjunto de notas (A, B, C), puedes crear diferentes secuencias como ABC, ACB, BAC, etc. Cada una de estas secuencias puede ser

Grupo	1	2	3	4	5
		y los números. En los dados de Mozart se ve reflejado el uso de las permutaciones con repetición, como una variación con repetición. En cada compás se tienen 11 posibles notas musicales, cada una asociada con un número entre 1 y 176 y como son 16 compaces el total de posibles canciones generadas son 11 elevado a la 16.		permutación con repetición porque cuando hacemos que la selección sea aleatoria puede caer dos veces o más y se repite sin importar el orden.	interpretada como una variación musical. En los dados de mozart Cada medida es independiente de las demás, lo que permite un gran número de combinaciones posibles y el orden de selección de los compases importa.
¿Lo expuesto en las lecturas puede ser una forma eficiente de trabajar permutaciones con repetición? Si la respuesta es no, justifiquen la respuesta. Si la respuesta es sí,	Creo que si. Lo musical le puede poner un contexto real y atractivo para el estudiante y quitar un poco la aridez de una exposición formal	Si, desde que los estudiantes logren entender el lenguaje músical y los números asociados a este. Los estudiantes podrían identificar a través de esta fórmula, que la probabilidad de que al generar dos fragmentos	No, por qué no se hace evidente la relación entre la actividad y las permutación con repetición. Para poder entender el ejercicio que se propone, consideramos que se deben tener otros tipos de	Es una forma didáctica y entretenida de enseñar las permutaciones con repetición, aunque puede llegar a confundir a los estudiantes a la hora de interpretar cuales son las relaciones que	No sentimos que sea eficiente porque en la actividad de los dados de Mozart puede ser confuso el procedimiento de conversión de los valores en aleatorio a las notas, porque algún valor puede

Grupo	1	2	3	4	5
expliquen ¿Cómo lo harían?		musicales iguales es demasiado baja y por ello es casi imposible.	conocimientos, que permitan realizar un vínculo con el tema que se va a tomar, en este caso las permutaciones con repetición.	existen entre los dos métodos presentados y la definición y fórmula de la permutacion con repetición.	confundirse y quedar incorrecto.
¿Qué conocimientos requiere el profesor si desea emplear estos métodos de composición para abordar el tema de permutación con repetición?	Requiere conocer algo de lo temas expuestos en los métodos de composición y por supuesto lo relativo a las permutaciones con elementos repetidos	Un buen manejo respecto al uso y el lenguaje de los dos métodos musicales.	Se debe tener claro en concepto y la relación del tema con la actividad, y buscar una manera de mediar estos dos para un buen desarrollo del concepto que se va enseñar y va dirigido a los estudiantes, para que la explicación no sea tan rigurosa, si no más sencilla de explicar y relacionar.	Debe tener conocimiento de cada uno de los métodos, ya que los estudiantes puede tener preguntas acerca del tema, y si el profesor no sabe cómo responderlas, el estudiante tampoco entenderá lo que el profesor quería explicar. Además, debe conocer bien lo que es la permutacion con repetición, cual es la definición, la fórmula, el porque funciona y para que sirve.	Las fórmulas de permutación Excel Uso básico del piano y notación musical
¿Requiere saberes previos del	creo que serían pocos saberes previos. Al menos	Conocer como funcionan los	Sí, consideramos que los estudiantes tienen que tener	Require tener conocimientos previos en las	Principios de conteo, conceptos básicos de

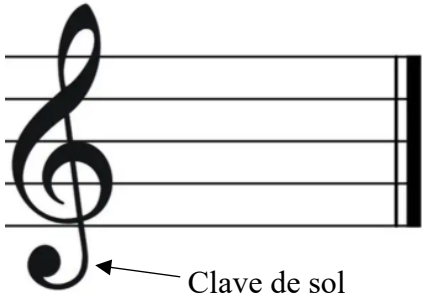
Grupo	1	2	3	4	5
estudiante? ¿Cuáles?	distinguir la permutaciones de las combinaciones	compaces, las notas musicales.	cierto conocimiento conceptual del tema que se está desarrollando, ya que si no existe dicho conocimiento puede realizarse más una actividad procedimental y se pueda perder el concepto que se busca enseñar.	matemáticas y especialmente en la linea de la estadística como, fundamentos de combinatoria, permutaciones y combinaciones, variación, que sepa reconocer cada una de ellas.	probabilidad N! Excel Escala musical Notación musical
¿Emplear esos métodos de composición para trabajar el tema de permutación con repetición es necesario, útil o un aporte interesante? Justifiquen.	Lo considero útil en el sentido de proveer un contexto real en donde se ven aplicación de la permutacion con elementos repetidos	Es un aporte interesante para los estudiantes de como estos métodos Generan música, los estudiantes que les gusta la música puede ayudar a llamar la atención de estos.	Consideramos que puede ser útil si, se realiza una implementación adecuada para abordar el tema de manera más eficiente y que se pueda comprender el tema	Consideramos que es un tema útil e interesante, ya que al momento de que los estudiantes manipulan cualquiera de los métodos, ellos se están entreteniendo a la vez que aprenden cual es la definición de permutaciones con repetición. Si a un estudiante le parece entretenido algo, por lo general suele prestarle más atención y entenderlo mejor.	Un aporte interesante permite que el estudiante relacione el tema con otras áreas del conocimiento y si al estudiante le gusta la música esto podría captar más su atención y que participe.

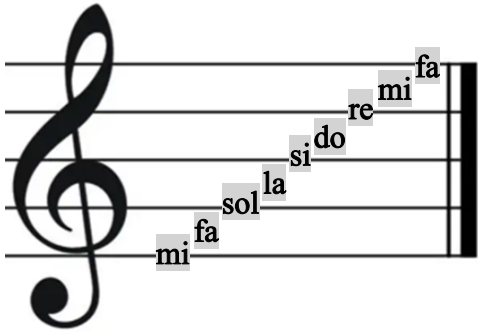
Grupo	1	2	3	4	5
Escribir la conclusión del trabajo grupal a socializar		Primero se propone una actividad de permutaciones con repeticiones en donde los estudiantes puedan escribir el espacio muestral de la solución de la actividad y este sea corto. Al ver la cantidad de sucesos del espacio muestral, se les presenta la fórmula de permutaciones con repetición y se muestra que el resultado es el mismo que contar el número de sucesos del espacio muestral. Luego se les pide a los estudiantes que deben escribir todo el espacio muestral a partir de un problema generado (escribir los diferentes fragmentos	Tomamos como propuesta abordar el tema en tres momentos, el primero se conceptualizara a los estudiantes de tal manera en que cada uno comprenda los conceptos y elementos que se trabajarán(Notas musicales, compás de cada nota), cada uno con relación al tema, explicación del tema con ejemplos concretos que permitan desarrollar de manera eficaz la actividad y después como tercer momento introducir y explicar el tema de manera correcta.	Al inició de la clase, les propondríamos a los estudiantes alguno de los dos métodos de música (los presentados en la clase virtual), para luego, empezar a revisar cuáles fueron los resultados que obtuvieron al lanzar los dados o los resultados del Excel, luego, les explicariamos que son las permutaciones con repetición, para que sirven y cual es su fórmula. Dada la fórmula, les pediríamos que relacionen los resultados obtenidos, con la actividad realizada y lo explicado anteriormente, para que luego compartan entre	Iniciamos la actividad con los dados de Mozart, los estudiantes obtienen los valores aleatorios donde se trabajaría con la formula interactiva donde los estudiantes dan los datos de la formula y forman la formula. De ahí se va a una explicación de su aplicación con sus respectivos ejemplos (estudiantes, profesor) y abajo se deja una actividad para que el estudiante lo intente por si mismo.

Grupo	1	2	3	4	5
		musicales que se pueden crear en cada método), al ver que el espacio muestral es demasiado grande, se le propondrá a los estudiantes que en ambos métodos encuentren una solución más rápida para conocer de cuántas maneras se puede crear fragmentos musicales y esperar que ellos relacionen el uso de la fórmula de permutaciones con repeticiones.		ellos los resultados al usar la fórmula. Luego, les dejaríamos una tarea que sea didáctica y entretenida al igual que con los métodos presentados, que a su vez tenga que ver con permutaciones con repetición.	

Música estocástica (Anexo F)

La clave de sol es una de las más utilizadas en la notación musical y se encuentra al inicio del pentagrama. Esta clave indica que la nota sol se ubica en la segunda línea del pentagrama, contando de abajo hacia arriba. A partir de ahí, las demás notas se colocan en orden ascendente o descendente siguiendo el alfabeto musical: do, re, mi, fa, sol, la y si.





En el pentagrama, que está formado por cinco líneas y cuatro espacios, cada línea y cada espacio representa una nota diferente. En clave de sol, la primera línea (la más baja) es mi, el primer espacio es fa, la segunda línea es sol, el segundo espacio es la, la tercera línea es si, el tercer espacio es do, la cuarta línea es re, el cuarto espacio es mi, y la quinta línea (la más alta) es fa. Si se necesitan notas más agudas o más graves que las que caben en el pentagrama, se usan líneas adicionales llamadas líneas suplementarias.

La posición de la nota en el pentagrama permite saber qué sonido debe tocarse o cantarse, y la forma de la nota (negra, blanca, redonda, etc.) indica cuánto tiempo debe durar ese sonido. Así, la clave de sol actúa como una guía que organiza las notas musicales en un espacio visual, facilitando su lectura e interpretación.