# UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**


**TRABAJO DE GRADO**

# CONSTRUCCIÓN DE CÓNICAS Y SUS TANGENTES


**PRESENTADO POR**

**CÉSAR AUGUSTO MESTIZO SÁNCHEZ**

**CÓDIGO: 2015240055**

**DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO**

**PROF. BENJAMÍN SARMIENTO LUGO**



**BOGOTÁ D.C. 2025**

# TABLA DE CONTENIDO

## ÍNDICE DE FIGURAS

**Relativas a la hipérbola**

# INTRODUCCIÓN

Al consultar algunos libros de texto de geometría analítica como Lehmann (1989), Fillol (1997), Kindle (1987) y Oteyza (1994), o un texto muy usado en los cursos de Geometría como Moise y Downs (1968), con la intención de encontrar algún procedimiento para construir las cónicas y trazar sus tangentes, generalmente sólo encontramos la deducción de la expresión algebraica de estas a partir de la definición del lugar geométrico y algunos problemas que proponen encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes que cumplen ciertas condiciones. No es usual encontrar la construcción de las cónicas y sus tangentes empleando algún software de geometría dinámica.

Indudablemente existen varias maneras de construir las cónicas y sus tangentes, pero en los libros de geometría analítica que están al alcance de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas no se incluyen estos procedimientos, los cuales le permitirían a los estudiantes reconocer más relaciones entre las cónicas, sus tangentes y elementos como las circunferencias focales, los focos, la directriz, etc.

Considerando que un maestro de matemáticas en formación no debe limitarse a mecanizar la obtención de ecuaciones de las cónicas que cumplan ciertas condiciones y que debe profundizar en las relaciones existentes entre todos los elementos que intervienen, es necesario proponer la producción de materiales que llenen ese "vacío bibliográfico" de los textos, por ello, y por el interés personal que el autor ha desarrollado en los últimos años por las construcciones geométricas y por el diseño de representaciones dinámicas de objetos matemáticos, se ha elaborado este recurso bibliográfico, en el que se usa software de geometría dinámica para complementar el contenido tradicional que se presenta en los textos de geometría analítica en los capítulos referentes a las cónicas, ofreciendo al lector además de las construcciones, una serie de razonamientos que acompañan los pasos de construcción aquí presentados y que corroboran la idoneidad de las mismas.

Aunque podría emplearse cualquier software de geometría dinámica, como Cabrí Plus, GeoGebra, Cinderella o Geup, entre otros, se ha decidido emplear GeoGebra para realizar las construcciones que aquí se exponen, y a las que el lector puede acceder a través del Anexo 1, aprovechando que en su configuración dispone por defecto de la "Vista Gráfica", en la que se cumplen los cinco postulados de Euclides (incluyendo sus versiones equivalentes, como por ejemplo el axioma de Playfair en lugar del Postulado de las paralelas) para la geometría en el plano.

En la escritura de este documento, se ha optado por incluir definiciones entre los pasos de las construcciones y se han agregado comentarios para facilitar la comprensión del proceso de construcción de las cónica y sus tangentes. Por otra parte, aunque no se acude a las ecuaciones de los lugares geométricos, las directrices y ejes focales se tomaron sobre los ejes coordenados, o sobre rectas paralelas a estos, de tal modo que esto no afecta los propósitos de este trabajo.

Finalmente se incluye una carpeta que contiene las construcciones elaboradas, tanto de las cónicas como de sus respectivas tangentes, por los métodos presentados en este trabajo. En el apartado correspondiente a cada método se hace explícito el nombre de la construcción elaborada en GeoGebra que está asociada a ese método. Se sugiere que el lector acompañe la lectura de cada apartado con su correspondiente construcción en GeoGebra, y de igual manera se invita a hacer activo uso de la herramienta denominada "Protocolo de construcción", propia de este software.

## OBJETIVOS

**General:** Elaborar un recurso bibliográfico que complemente a los libros de texto de geometría analítica en lo referente a la construcción de las cónicas y sus tangentes.

**Específicos:**

- Construir de diferentes maneras las cónicas empleando software de geometría dinámica.
- Construir de diferentes maneras las tangentes de las cónicas, atendiendo a diferentes condiciones impuestas, empleando software de geometría dinámica.
- Sistematizar las construcciones realizadas en un documento estructurado que incluya orientaciones para su uso.
- Ofrecer al lector una fuente documental que consista en un escrito, y un paquete con construcciones de las cónicas y sus tangentes realizadas en GeoGebra.

# CAPÍTULO 1

Es este capítulo se presenta al lector el marco histórico y el marco de referencia del presente documento. Se busca con ello presentarle elementos contextuales alrededor de las cónicas, lo que incluye los nombres de destacados matemáticos como Menecmo, Apolonio, y Descartes, que contribuyeron en sus distintos estadios. Tal exposición no pretende ser exhaustiva, sino brindar perspectiva histórica al lector. De igual manera, se presenta al lector la conexión existente entre las representaciones de las secciones cónicas como lugares geométricos que se producen en GeoGebra, y el enfoque ontosemiótico del conocimiento, en lo referente al proceso de visualización, planteado por Godino et al. (2012)

## 1.1 MARCO HISTÓRICO

El desarrollo temprano de las secciones cónicas se enmarcó en un contexto problemático planteado fuera de la matemática griega misma, y más cerca de su cultura mítica. Como señala Ramírez (2013), “Fue entonces cuando surgió, con orígenes que entrelazan lo histórico con lo legendario, uno de los problemas clásicos de la matemática: la duplicación del cubo.”

Este problema exigió ir más allá de los recursos geométricos conocidos hasta ese momento e impulsó la exploración de nuevas curvas. Las aproximaciones realizadas para la solucionar este problema, al que también se conoce como problema de Delos, hicieron de este una figura icónica en la historia de la matemática.

Fue el griego Menecmo quién con sus procedimientos geométricos basados en la intersección de superficies obtuvo soluciones para situaciones concretas, dando lugar a la aparición de la parábola, la elipse y la hipérbola. Tal como señala Ayerbe Toledano (2025), “Menecmo introdujo las secciones cónicas como una herramienta geométrica para resolver el problema de la duplicación del cubo”.

Retomando las curvas herencia de sus predecesores, fue Apolonio de Perge quien después de Menecmo otorgó a las secciones cónicas un nuevo estatus matemático, esto último al sistematizar sus propiedades, de modo que empezó de manera más o menos oficial su progresiva desvinculación de los métodos que las originaron. Respecto al planteamiento de Apolonio, Ramírez (2013) señala que “El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes.” Y, de este modo, las cónicas pasan a ser concebidas de forma abstracta, definidas por medio de relaciones, y sujetas a demostraciones rigurosas.

Pero este proceso de abstracción encontró una transformación decisiva en la Edad Moderna con la introducción de la geometría analítica. En el siglo XVI, René Descartes desarrolló un método que permitió expresar las curvas geométricas mediante ecuaciones algebraicas, modificando radicalmente la manera de concebir las secciones cónicas. Es en este nuevo escenario en el que las secciones cónicas dejaron de depender de sus orígenes geométricos y adquieren un significado algebraico general. En palabras de Poveda y Chávez (2015), “Con Descartes, las secciones cónicas dejan de estar ligadas al cono generador y pasan a ser entendidas como curvas definidas por ecuaciones, lo que implica una transformación profunda en su significado geométrico.” Y es así como las expresiones analíticas sustituyeron a las construcciones geométricas como forma de acceso habitual a las cónicas.

La geometría analítica transformó profundamente el significado matemático de las cónicas. Las propiedades que Apolonio estableció mediante relaciones geométricas ahora podían reinterpretarse como consecuencias de la ecuación que describe a la respectiva cónica.

A continuación, se expone el método mediante el cual se usan las definiciones de las cónicas como espacio geométrico para encontrar sus respectivas ecuaciones canónicas, para ello se han tomado las definiciones planteadas en la obra de Lehmann (1989)

**Parábola:** La obtención de la ecuación de la parábola parte de su definición geométrica como el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz. Considerando un foco situado en $F(p,0)$y una directriz dada por la recta $x=-p$, y tomando un punto cualquiera $P(x,y)$ de la curva, esta propiedad se expresa analíticamente mediante la igualdad entre la distancia del punto al foco y la distancia del punto a la directriz, esto es

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=x+p.$$

Esta ecuación traduce la condición geométrica de equidistancia en lenguaje analítico. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad y simplificar la expresión resultante se obtiene una ecuación de segundo grado. Después del tratamiento algebraico correspondiente, se llega finalmente a la ecuación

$$y^2=4px$$

que constituye la forma canónica de la parábola con vértice en el origen y eje horizontal.

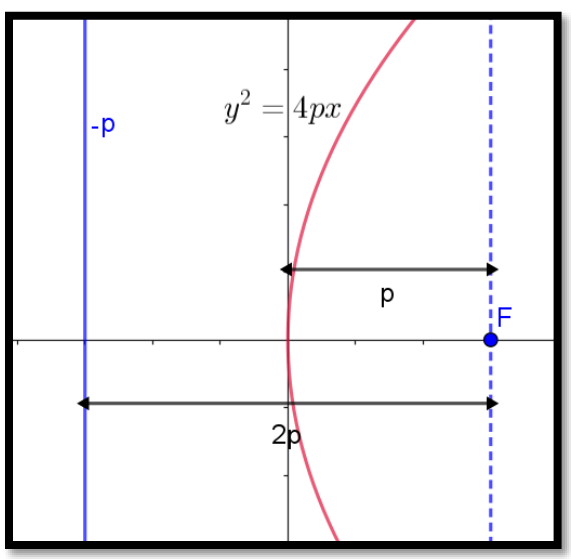


Figura 1. Ecuación canónica de la parábola

**Elipse:** La obtención de la ecuación de la elipse parte de su definición geométrica como el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Si se consideran los focos ubicados en $F_1(-c,0)$y $F_2(c,0)$, y un punto cualquiera $P(x,y)$ perteneciente a la curva, esta propiedad se expresa analíticamente mediante la igualdad

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Esta ecuación traduce la definición geométrica de la elipse al lenguaje analítico. Mediante un tratamiento algebraico realizado sobre esta expresión, tratamiento que consiste en aislar uno de los radicales y elevar al cuadrado sucesivamente ambos miembros de la igualdad, se eliminan las raíces y se simplifican los términos obtenidos. Tras dicho tratamiento se llega finalmente a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde $b^2=a^2-c^2$. Esta ecuación constituye la forma canónica de la elipse con centro en el origen y diámetro mayor horizontal.

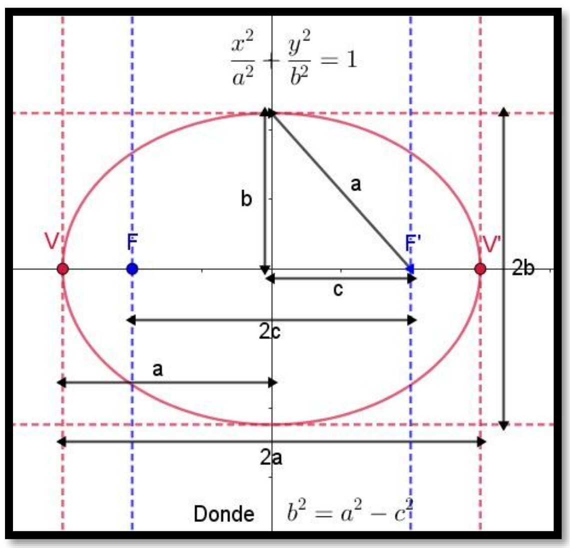


Figura 2. Ecuación canónica de la elipse

**Hipérbola:** La ecuación de la hipérbola se obtiene a partir de su definición geométrica como el conjunto de puntos del plano para los cuales el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos focos es constante. Situando los focos en $F_1(-c,0)$y $F_2(c,0)$, y considerando un punto $P(x,y)$ de la curva, esta condición se expresa mediante la igualdad

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Al suprimir el valor absoluto, por ejemplo, suponiendo que la diferencia de distancias es positiva, se obtiene la igualdad

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

la cual involucra radicales y traduce directamente la definición geométrica en lenguaje analítico. Mediante dos elevaciones sucesivas al cuadrado y la correspondiente simplificación algebraica, se eliminan las raíces y se llega finalmente a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde $b^2 = c^2 - a^2$. Esta expresión constituye la forma canónica de la hipérbola con centro en el origen y eje transversal horizontal.

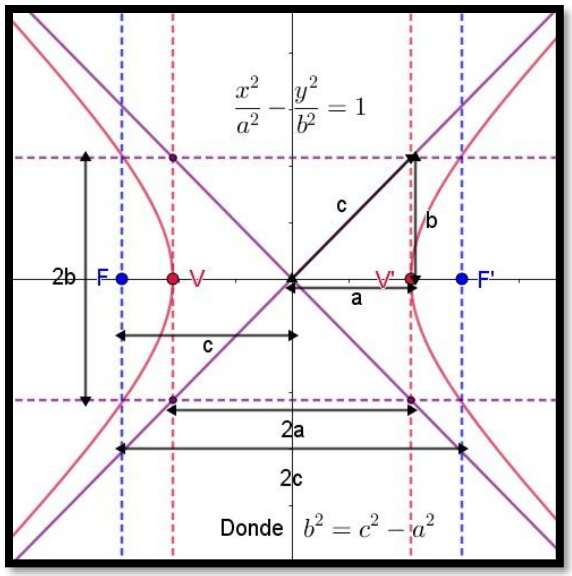


Figura 3. Ecuación canónica de la hipérbola.

## 1.2 MARCO DE REFERENCIA

Una de las razones principales, si no la principal, para recurrir al uso de software de geometría dinámica es la posibilidad que este ofrece para visualizar y manipular construcciones, tal como sugieren De Soussa et al. (2022).

Son estas actividades, a saber, visualizar y manipular las construcciones, las que han ofrecido un punto de encuentro sólido entre la forma en que se plantea el presente documento y el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS), en particular su teorización sobre la visualización, efectuada en Godino et al. (2012)

Allí no solo se define qué se considera un objeto visual, requisito necesario ya que, como los mismos autores informan, esa consideración no es clara en la literatura, sino que además se estableció una tipología que busca "esclarecer la naturaleza y componentes de la visualización, y su relación con otros procesos implicados en la actividad matemática" (Godino et al., 2012, p. 109).

El planteamiento expuesto por estos autores es particularmente apropiado para la tarea asumida en el presente documento, porque describe y aborda desde su plataforma teórica la dualidad más prominente que identificó el autor de este documento mientras establecía los razonamientos y los pasos de construcción de prácticamente todas las construcciones aquí formuladas. Tal prominente dualidad se percibe de manera sutil precisamente en los razonamientos que se han erigido como evidencia tanto de la idoneidad los pasos de construcción, como de la aceptabilidad de los resultados obtenidos.

Esa dualidad de la que se habla es la que caracteriza las cualidades ostensivas - no ostensivas, y que el enfoque ontosemiótico enmarca entre las especificaciones contextuales en las que se encuentran o interactúan los objetos matemáticos, y en particular, los objetos que satisfacen las condiciones como objetos visuales. Todos los objetos geométricos que se usan en las construcciones aquí presentadas, a saber, los puntos, los segmentos, rectas, circunferencias, etc., cumplen las condiciones que impone el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático desde su teorización sobre la visualización para ser considerados como objetos visuales, en particular por tratarse de representaciones en GeoGebra, que es un software de geometría.

Godino et al. (2012) hacen énfasis en las dualidades a las especificaciones contextuales, ya que todo objeto matemático sometido a consideración en el marco del EOS está mediado por estas. Lo anterior queda más claro con la analogía que ellos mismos ofrecen en la que comparan al objeto matemático con una moneda, teniendo una cara y un sello, pero siendo un único objeto.

Como ejemplo, tómese en GeoGebra una recta $l$ que esté definida por los puntos $A$ y $B$ no fijos sobre el plano. Al considerar la dualidad ostensiva- no ostensiva de los puntos, su faceta ostensiva proviene, entre otros, del hecho de que son perceptibles visualmente, y manipulables, y por el lado de su faceta no ostensiva se observa que ambos puntos pertenecen a la recta $l$, siendo el enfoque la relación de pertenencia, que ambos puntos determinan la recta $l$, y si consideramos el plano cartesiano, a través de la ubicación de los puntos se establece una relación funcional.

Hay que hacer la salvedad de que la recta representada en GeoGebra no es el objeto matemático ideal al que se denomina recta, el cuál es de naturaleza no ostensiva (salvo representaciones, y según la práctica en la que intervenga, que es como se definieron estas dualidades).

## CAPÍTULO 2

# LA PARÁBOLA

En este apartado se exponen construcciones de la parábola y el vínculo que tienen estas con las construcciones de la tangente a la parábola.

### 2.1 DEFINICIONES

En libros de texto] como los de Lehmann (1989), Coxeter (1969) y Heath (1956) se plantean los siguientes resultados que aquí se han denominado Hechos Geométricos, así como las definiciones que aquí se exponen. Se hace uso de estos resultados a lo largo del documento, razón por la cual no están limitados a la sección de parábola y han sido usados con su respectiva mención en las secciones de elipse e hipérbola.

*Definición 1 (Parábola)*

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta llamada directriz, y un punto que no pertenece a la directriz, llamado foco. El valor mínimo de la equidistancia se denomina canónicamente como $p$, y corresponde a la distancia del foco a la directriz.

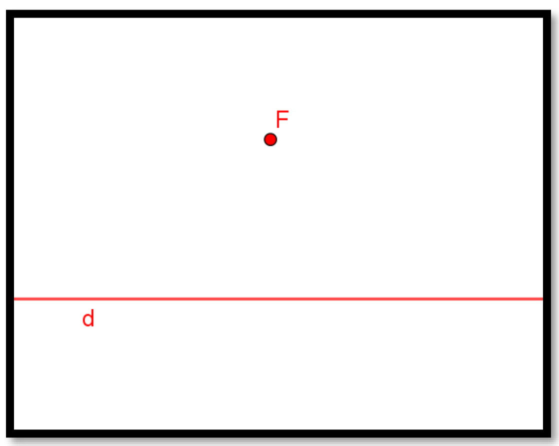


Figura 4. Foco y Directriz.

*Definición 2 (Eje Focal)*

El eje focal de una parábola es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. El eje focal corta a la parábola en el vértice.

*Definición 3 (Vértice)*

Es el punto más cercano a la directriz que pertenece a la parábola. Se encuentra a la distancia $p/2$ tanto de la directriz como del foco.

*Definición 4 (Mediatriz)*

Dados dos puntos $A$ y $B$, la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de $A$ y de $B$. La mediatriz es la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ por su punto medio.

*Hecho Geométrico 1 (Parábola contenida en semiplano)*

Toda parábola queda contenida en el semiplano definido por su directriz en el que se encuentra su foco.

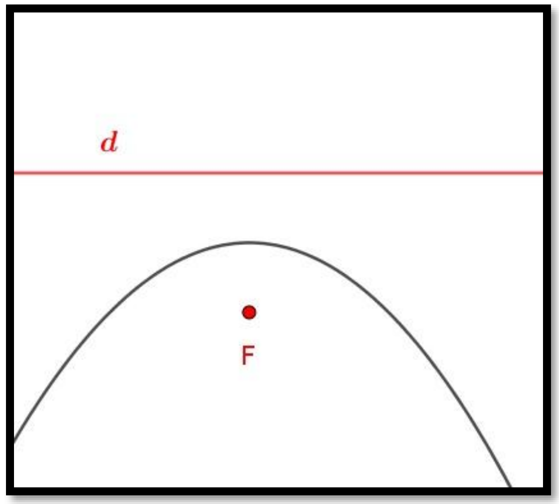


Figura 5. Parábola contenida en el semiplano del foco

*Hecho Geométrico 2 (La distancia de un punto a una recta)*
La distancia de un punto $P$ a una recta $l$ está dada por la longitud del segmento cuyos extremos son el punto $P$ y el punto de intersección $Q$ entre la recta $l$ y la recta perpendicular a la recta $l$, y que pasa por el punto $P$.

*Hecho Geométrico 3 (La distancia entre dos rectas paralelas)*
La distancia entre dos rectas paralelas $l$ y $m$ corresponde a la distancia entre un punto $P$ perteneciente a la recta $l$, y la recta $m$.

*Hecho Geométrico 4 (Unicidad de la proyección ortogonal en una recta)*
La proyección ortogonal de un punto sobre una recta es única.

*Hecho Geométrico 5 (Un punto puede ser proyección ortogonal de distintos puntos)*
Si $Q$ es una proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $m$, entonces $Q$ es proyección ortogonal de cualquier punto que pertenezca a la recta que pasa por $P$ y $Q$. La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta $m$.

*Hecho Geométrico 6 (Proximidad entre las construcciones de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo)*
La forma en la que se construye la bisectriz de un ángulo usando regla y compás es proxima a la de la construcción de la mediatriz de un segmento, pero es necesario establecer primero un par de puntos equidistantes al vértice del ángulo, de modo que haya uno de esos puntos en cada semirrecta que define al ángulo.

*Hecho Geométrico 7 (Intersección recta – circunferencia)*
Dado un punto $P$ en el interior de una circunferencia, cualquier recta que pase por el punto $P$ intersecará a la circunferencia en exactamente dos puntos.

*Hecho Geométrico 8 (Dos rectas que son perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí)*
Dadas las rectas $l$, $m$, y $n$ en el mismo plano, si $l$ es perpendicular a $m$, y $m$ es perpendicular a $n$, entonces $l$ y $n$ son paralelas. Heath (1956)

*Hecho Geométrico 9 (Intersección circunferencias)*
Si un punto de una circunferencia está en el interior de otra, entonces las circunferencias se intersecan en exactamente dos puntos.

## 2.2 CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA

En esta sección se presenta al lector tres (3) formas de construir la parábola. Tal como se establece en la introducción, se han incorporado explicaciones visuales y argumentales entre los pasos de la construcción.

En cada una de las subsecciones se presenta el respectivo nombre del archivo en GeoGebra que está asociado a la construcción.

### 2.2.1 Método 1

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Parábola (Método 1)

La construcción con base en la Figura 4 y la definición de parábola se presenta a continuación:

- Se traza una recta $d$, la cual será la directriz.
- Se considera un punto $F$ que no esté contenido en la directriz. El punto $F$ será el foco.
- Sea $X$ un punto cualquiera de la directriz.

Por definición, los puntos que equidistan tanto de $F$ como de $X$ son los puntos que pertenecen a la recta mediatriz del segmento $\overline{XF}$.

- Sea $m$ la mediatriz del segmento $\overline{XF}$

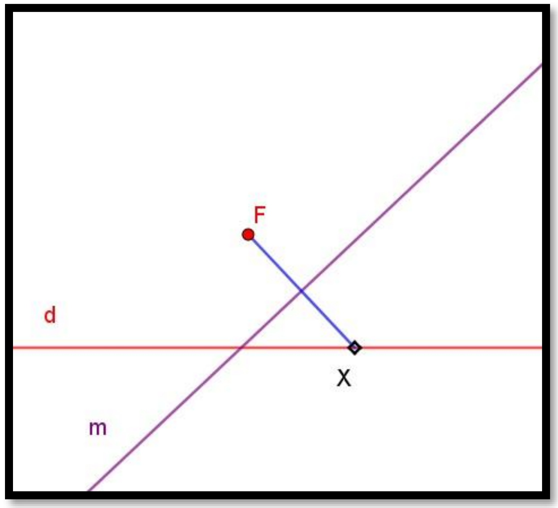


Figura 6. Mediatriz dados directriz y foco

Es necesario que también se cumpla la condición de equidistancia con la recta directriz, y debido a la forma en la que está definida la distancia de un punto a una recta, es necesario construir la recta perpendicular a la directriz que pasa por el punto $X$.

- Se traza la recta $p$ perpendicular a la directriz que pase por el punto $X$

El punto de intersección entre la recta $p$ y la mediatriz del segmento $\overline{XF}$ satisface las condiciones de equidistancia respecto al foco y a la directriz.

- Sea $T$ la intersección entre la recta $p$ y la recta $m$.

El lugar geométrico generado por $T$ cuando se mueve $X$ sobre la recta directriz es una parábola.

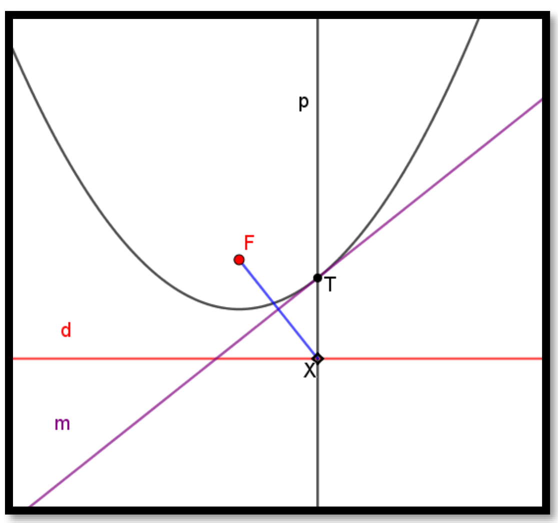


Figura 7. Construcción de parábola dados foco y directriz.

### 2.2.2 Método 2

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Parábola (Método 2)

En este método se hace uso de una circunferencia para construir a la parábola.

- Se traza una recta $d$, la cual será la directriz.
- Se define un punto $F$ que no esté contenido en la directriz.
  El punto $F$ será el foco.

En esta construcción se hace uso del resultado expuesto por Heath (1956) y aquí planteado como Hecho Geométrico 8.

- Se traza la recta perpendicular $l$ a la directriz, y que pasa por $F$.

La recta $l$ satisface la definición de eje focal.

- Sea $B$ al punto de intersección entre la directriz y la recta $l$.
- Se encuentra el punto medio del segmento $\overline{BF}$, y denomínelo $V$.

El punto $V$ satisface la definición de vértice de la parábola.

Tal como establece el Hecho Geométrico 1, la parábola está contenida en el semiplano que define su directriz, y en el que está su foco, así que al usar el eje focal como recta sobre que se mueve el punto que define al lugar geométrico, se consideran únicamente los puntos del eje focal que están en el semiplano donde está el foco, y para ello se continúa así:

- Se traza la semirrecta $\overrightarrow{VF}$

La semirrecta no solo está contenida en el eje focal, sino que también está contenida en el semiplano donde está $F$.

- Sea $W$ un punto perteneciente a la semirrecta $\overrightarrow{VF}$
- Sea $p$ la recta perpendicular a la recta $l$, que pasa por el punto $W$

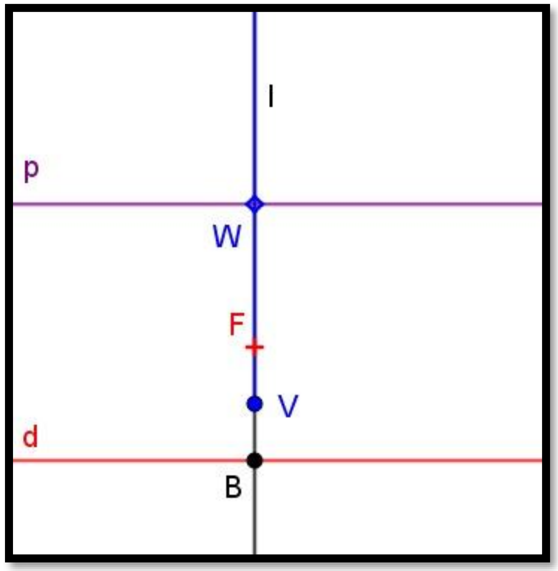


Figura 8. Recta paralela a la directriz.

Puede notarse que, debido a la forma en que se construyó, la recta $p$ es paralela a la recta $d$, que es la directriz, y además la distancia entre las rectas $p$ y $d$ es $BW$, resultado de aplicar el Hecho Geométrico 3.

- Considere la circunferencia $c$ con centro en $F$, y radio $BW$

Como la distancia $VW$ es menor que la distancia $BW$, la circunferencia $c$ interseca a la recta $p$

- La circunferencia interseca a la recta $p$ en dos puntos $C1$ y $C2$.

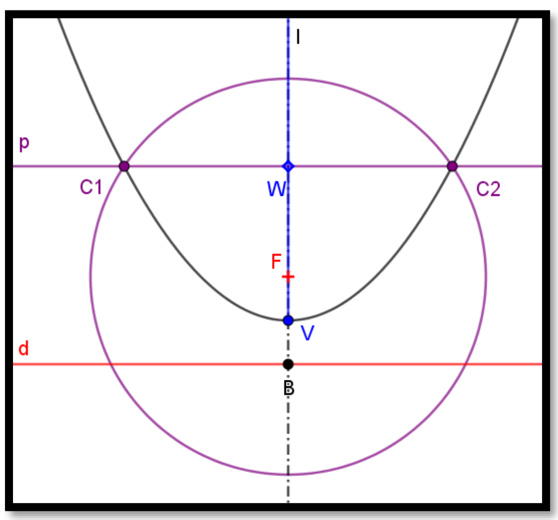


Figura 9. Construcción parábola método 2

Estos puntos de intersección equidistan del foco por pertenecer a la circunferencia $c$ cuyo radio es $BW$, y equidistan de la directriz por pertenecer a una recta paralela a esta, la cual se encuentra a la distancia $BW$. Por lo tanto, el lugar geométrico generado por $C1$ y $C2$ cuando $W$ se mueve sobre la semirrecta $\overrightarrow{VF}$ es una parábola.

### 2.2.3 Método 3

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Parábola (Método 3)

En el estudio de la ecuación general de segundo grado propuesto en la obra de Lehmann (1989) se llega a definir a toda sección cónica como un caso particular de la allí denominada ecuación canónica. En el análisis de la ecuación canónica el autor concluye que toda cónica puede ser determinada al conocerse exactamente cinco (5) puntos en el plano que pertenezcan a la cónica. La presente construcción muestra cómo construir cinco (5) puntos que equidistan de un punto (foco) y una recta (directriz) dada:

- Trace una recta $d$, la cual será la directriz.
- Considere un punto $F$ que no esté contenido en la directriz. El punto $F$ será el foco.
- Trace la recta $g$ perpendicular a la directriz que pasa por $F$

Por ser perpendicular a la directriz, la recta $g$ puede usarse para construir rectas paralelas a esta, lo que garantiza puntos a una distancia fija y conveniente para usar la definición de parábola.

- Llámese $X$ a la intercesión entre la directriz y la recta $g$.
- Ubique el punto medio entre $F$ y $X$, y denomine a este punto $V$.

$V$ es el vértice de la parábola, y por esta razón la distancia $FX$ es 2*$FV$

- Se traza la circunferencia $c1$ con centro en $F$ y radio $FV$
- Sea $W$ a la intersección entre $c1$ y la recta $g$, de tal manera que se presente la interestancia $V - F - W$

Entonces, por construcción $FW$ = $FV$

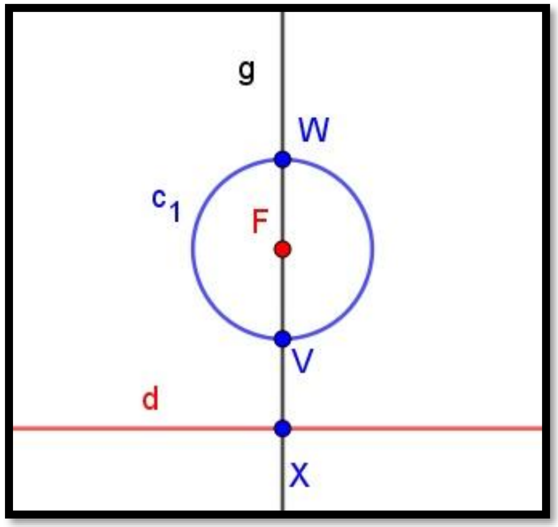


Figura 10. Puntos destacables sobre el eje focal

Una vez han sido definidos estos puntos con distancias conocidas al foco, se procede a construir las rectas paralelas a la directriz, y las circunferencias con las mismas distancias conocidas. Las intersecciones entre estas rectas y las circunferencias definen puntos que equidistan del foco y la directriz, todo lo anterior como se muestra a continuación:

- Trace la recta $h$ perpendicular a la recta $g$ por el punto $F$.
- Trace la circunferencia $c2$ con centro en $F$ y radio $FX$.

Radio $FX$ = 2*$FV$

- Llame $A$ y $B$ a las intersecciones entre la recta $h$ y la circunferencia $c2$.
- Sea $m$ la recta perpendicular a la recta $g$ por $W$
- Trace la circunferencia $c3$ con centro en $F$ y radio 3*$FV$
- Llame $C$ y $D$ a las intersecciones entre $c3$ y la recta $m$

Observe que tanto la recta $m$, como la recta $h$ son paralelas a la directriz por la forma en que se construyeron, y que los radios de las circunferencias $c1$, $c2$, y $c3$ coinciden con la respectiva distancia de la recta paralela a la directriz, lo que verifica la definición de parábola para los puntos, $A$, $B$, $C$, $D$, y $V$.

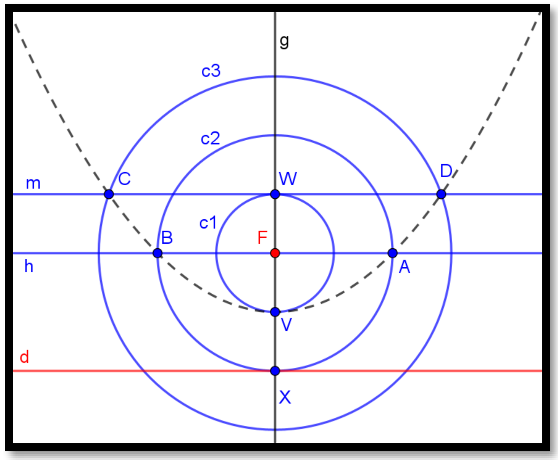


Figura 11. Construcción de 5 puntos que pertenecen a la parábola de foco $F$ y directriz $d$

## 2.3 CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES A LA PARÁBOLA

En esta sección se presenta al lector seis (6) formas de construir la tangente a la parábola. Tal como se establece en la introducción, se han incorporado explicaciones visuales y argumentales entre los pasos de la construcción.

En cada una de las subsecciones se presenta el respectivo nombre del archivo en GeoGebra que está asociado a la construcción.

En las construcciones en las que se ha incorporado la presencia de los ejes coordenados se hace mención de ello al inicio. Se ha establecido que en esos casos la recta directriz de la parábola sea paralela al eje X, o su condición equivalente, que sea perpendicular al eje Y.

### 2.3.1 Método 1

**Nombre de la construcción asociada:** M1 Tangente Parábola

**Dados los ejes coordenados, la parábola, el foco y un punto $T$ de la parábola, trazar la tangente que pasa por $T$.**

De la sección 2.1, correspondiente a definiciones, se tiene que el vértice de la parábola está a la misma distancia de la directriz que del foco, y allí también, por definición de eje focal, también se tiene que la directriz de una parábola es perpendicular a su eje focal.

La directriz es la clave en el presente método para construir la tangente, de modo que se procede como se muestra a continuación:

- Se traza la recta $h$ paralela al Eje Y, que pase por el foco $F$.

Esta recta se conoce como el eje focal.

- Sea $A$ la intersección del eje focal con la parábola.

Estas condiciones hacen de $A$ el vértice de la parábola.

- Se traza una circunferencia $c$ con centro en $A$ y radio $AF$
- Sea $B$ la intersección de la circunferencia $c$ con el eje focal.
- Se traza la recta $d$, perpendicular al eje focal, y que pasa por $B$.

Esta recta $d$ es la directriz de la parábola.

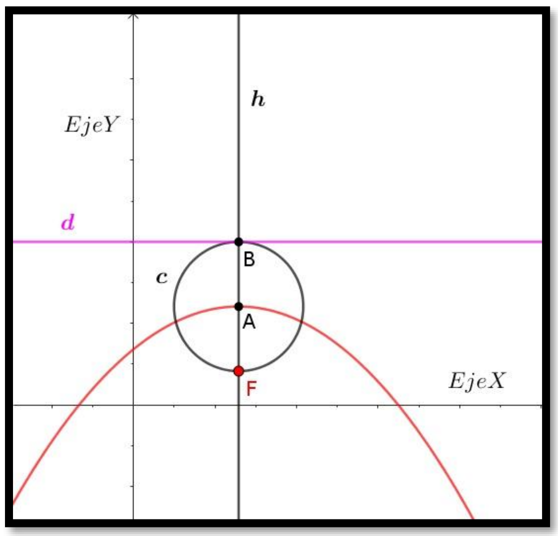


Figura 12. Tangente a parábola dados los ejes coordenados

La tangente a la parábola toca a la parábola exactamente en un punto, por lo tanto.

- Sea $T$ un punto perteneciente a la parábola.

Como la parábola está contenida en el semiplano definido por la directriz en el que está el foco, lo cual corresponde al Hecho Geométrico 1, en particular se cumple que el punto $T$ también está en dicho semiplano, de modo que la proyección ortogonal del punto $T$ sobre la directriz es construible. Este resultado ha sido abordado en la obra de Coxeter (1969). De este modo es posible construir la mediatriz análoga a la planteada en la sección 2.2.1, y mediante la cual se construyó la parábola.

- Se traza recta $p$ perpendicular a la recta directriz, que pase por $T$.
- Sea $X$ la intersección de las rectas $p$ y la directriz.
- Se traza la mediatriz $m$ del segmento $\overline{FX}$.

Como se observa en la figura 10, al satisfacer las condiciones anteriores la recta $m$ es la tangente buscada.

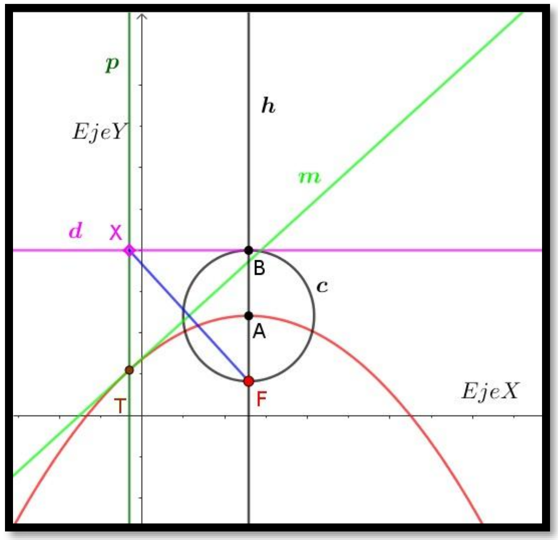


Figura 13. Recta tangente a la parábola. Método 1 [ejes coordenados]

### 2.3.2 Método 2

**Nombre de la construcción asociada:** M2 Tangente Parábola

**Dada la parábola, la directriz, el foco y un punto $P$ de la parábola, trazar la tangente que pasa por el punto $P$.**

En la Figura 11 se observa que la recta mediatriz del segmento $\overline{FX}$ interseca al eje focal en un punto $C$, siendo $F$ el foco y $X$ un punto que pertenece a la directriz.

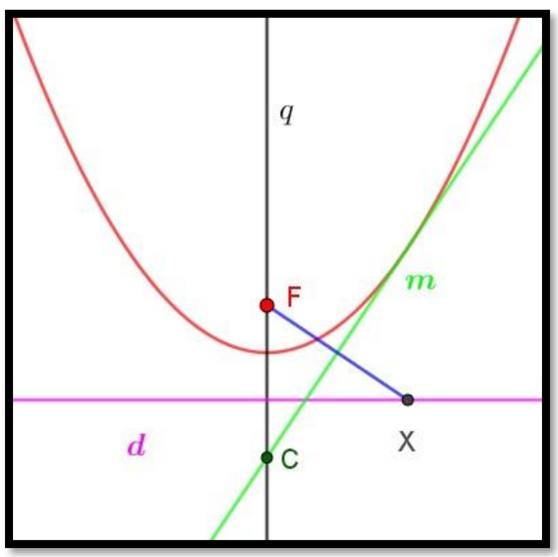


Figura 14. Intersección mediatriz – eje focal

Por $X$ pertenecer a la recta directriz, es posible aplicar el resultado obtenido por Coxeter (1969), en el que se afirma que la intersección entre una recta perpendicular a la directriz interseca a la parábola en un punto, y así asegurar que $X$ se corresponde con la proyección ortogonal de un punto $P$ que pertenece a la parábola. Esto permite asegurar que la recta $\overleftrightarrow{PX}$ es paralela al eje focal, puesto que es perpendicular a la directriz (por ser $X$ proyección ortogonal de $P$)

De esta forma puede asegurarse que el cuadrilátero $CFPX$ es un paralelogramo, y por lo tanto $CF = PX$.

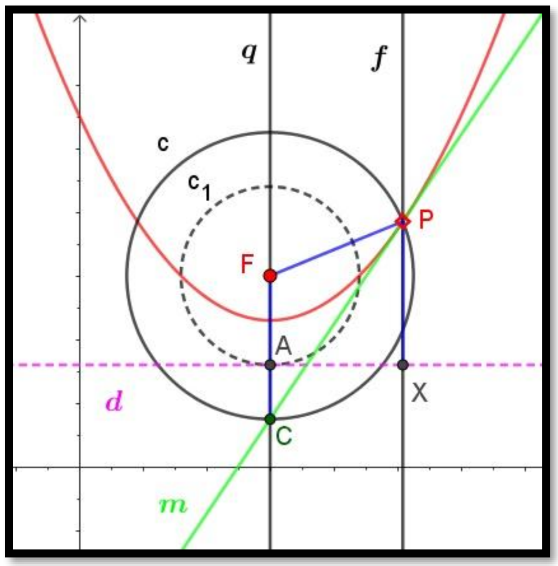


Figura 15. De paralelogramo a paralelas

Lo anterior ratifica la validez de la siguiente construcción:

- Se traza recta $q$ que sea paralela al eje Y, y pase por el foco $F$.

Esta recta cumple la definición de eje focal de la parábola.

- Sea $P$ un punto sobre la Parábola.
- Se traza circunferencia $c$ con centro en $F$ y radio $FP$
- Sea $C$ la intersección de la circunferencia $c$ con la recta $q$.
- Se traza la recta $m$ que pasa por $P$ y $C$.

La recta $m$ es la tangente buscada.

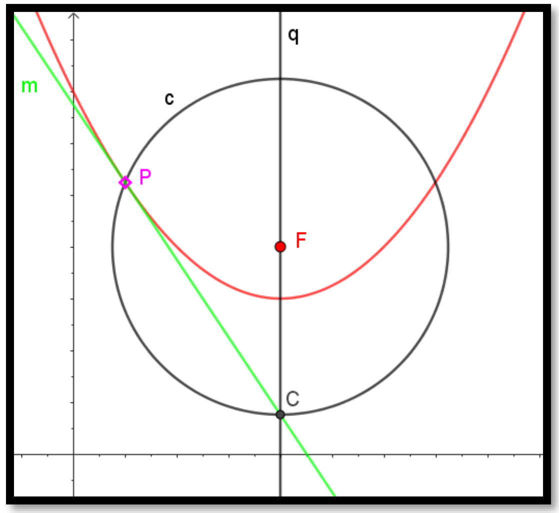


Figura 16. Tangente parábola método 2

### 2.3.3 Método 3

**Nombre de la construcción asociada:** M3 Tangente Parábola

**Dados los ejes coordenados, la parábola, el foco y un punto $P$ de la parábola, trazar la tangente que pasa por $P$.**

- Trace la recta $s$ perpendicular el eje X que pase por un punto $P$ de la parábola.
- Sea $E$ la intersección de la recta $s$ con el eje X.

El ángulo $\angle EPF$ existe en todos los casos en los que el punto de la parábola y su proyección ortogonal sobre el eje X son distintos, es decir, cuando el eje X no interseca a la parábola.

- Se traza la bisectriz del ángulo $\angle EPF$.

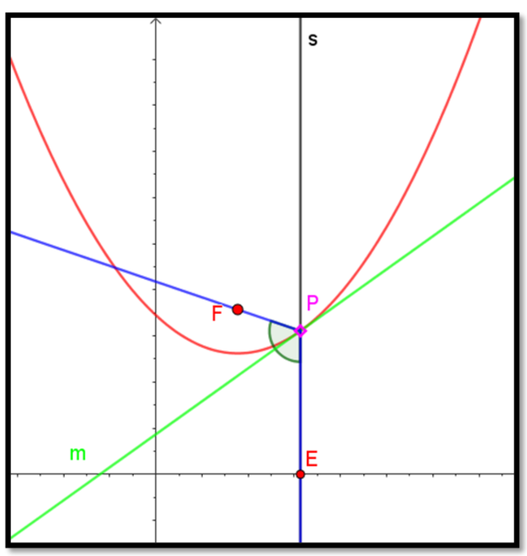


Figura 17. Tangente por bisectriz de ángulo dados los ejes (1)

En el Hecho Geométrico 6 se establece que construir la bisectriz de un ángulo usando regla y compás es, en esencia, una construcción análoga a la de la mediatriz de un segmento, y tal como se expone en la sección 2.3.1, esa recta mediatriz del segmento cuyos extremos son un foco, y un punto perteneciente a la directriz, es tangente a la parábola.

- La recta $m$ es la tangente buscada.

Para aportar mayor claridad, dado un ángulo $\angle ABC$ , la distancia $AB$ puede ser distinta a la distancia $BC$, por lo que una de las pociones es construir un punto $D$ que pertenezca a la semirrecta $\overrightarrow{BC}$, y que cumpla que $AB = BD$ para definir los puntos extremos del segmento y aplicar la definición de mediatriz.

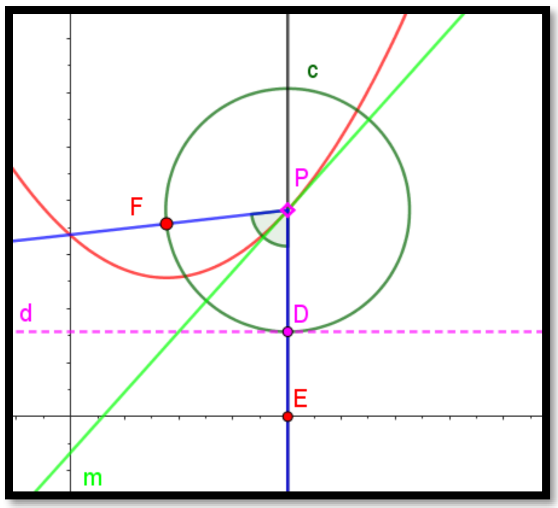


Figura 18. Tangente por bisectriz de ángulo dados los ejes (2)

### 2.3.4 Método 4

**Nombre de la construcción asociada:** M4 Tangente Parábola

**Dados la parábola, el foco, la directriz y un punto $P$ de la parábola, trazar la tangente que pasa por el punto $P$.**

Un caso parecido al anterior, pero aquí la directriz ya hace parte de lo dado.

- Se traza la recta $s$ perpendicular a la directriz que pase por un punto $P$ de la parábola.
- Sea $D$ la intersección de la recta $s$ con la directriz.

El ángulo $\angle DPF$ existe en todos los casos, ya que, a diferencia del caso anterior, $D$ y $P$ no pueden coincidir siendo el mismo punto en ningún caso.

- Se traza la bisectriz del ángulo $\angle DPF$

Se recurre a lo establecido en el *Hecho Geométrico 6*, y se suma a esto los pasos y razonamientos discutidos en la sección 2.3.3, con lo cual se concluye que esa recta bisectriz es tangente a la parábola.

- La recta $m$ es la tangente buscada.

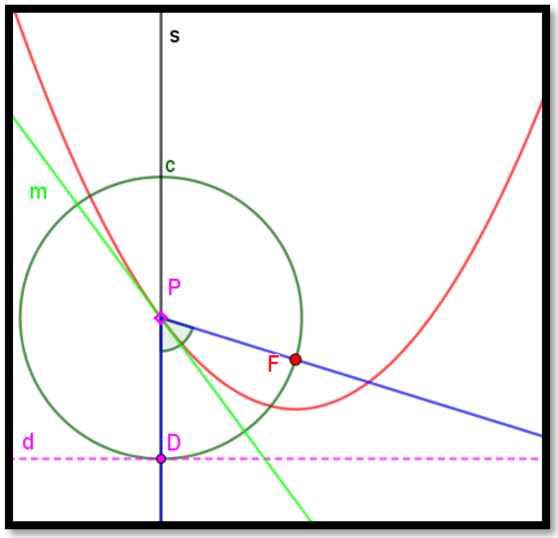


Figura 19. Tangente por bisectriz de ángulo dada la directriz

### 2.3.5 Método 5

**Nombre de la construcción asociada:** M5 Tangente Parábola

**Dados la parábola, el foco y un punto $P$ externo a la parábola, trazar la tangente que pasa por $P$.**

En esta sección se hace uso del hecho de que la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de su centro. Es así como tiene sentido considerar a la circunferencia con centro en $P$, y radio $PF$, ya que cualquier intersección de esta circunferencia con otro objeto garantiza equidistancia entre punto de intersección con el punto $P$, y el punto $P$ con el punto $F$.

Lo que sucede en particular en este caso es que la circunferencia construida interseca en exactamente dos puntos a la directriz de la parábola, porque al ser punto externo, su distancia al foco es mayor a su distancia a la directriz y por lo tanto hay dos equidistancias que podemos usar.

- Se traza la circunferencia $c$ con centro en $P$ y radio $PF$
- Sean $A$ y $B$ las intersecciones de la circunferencia $c$ y la recta $h$, que es la directriz.

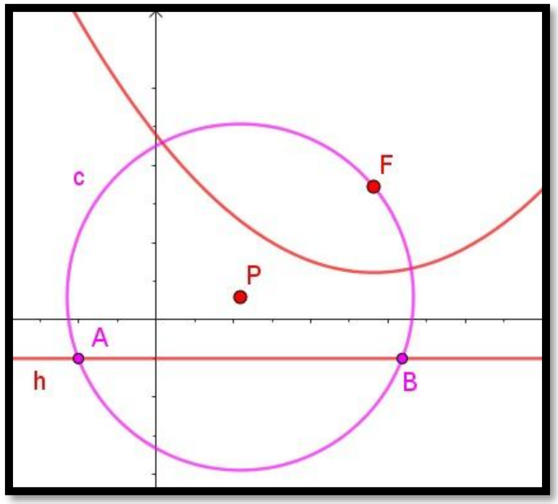


Figura 20. Circunferencia que corta a directriz en dos puntos

Si una recta tangente ha de pasar por el punto $P$, entonces es necesario construir un punto sobre la parábola, y que al mismo tiempo sea equidistante de los puntos $F$ y $A$ (o de $F$ y $B$), así que se procede como sigue:

- Se trazan perpendiculares a la directriz que pasen por $A$ y $B$. Denomínense $p$ y $q$ respectivamente a estas perpendiculares.
- Sea $D$ la intersección de la recta $p$ y la parábola, y $E$ la intersección de la recta $q$ y la parábola.
- Se traza la recta $m$ que pasa por $P$ y $E$.

Obsérvese que la recta $m$ es mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{BF}}$

- Se traza la recta $n$ que pasa por $P$ y $D$.

Obsérvese que la recta $n$ es mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AF}}$

- Las rectas $m$ y $n$ son las tangentes pedidas.

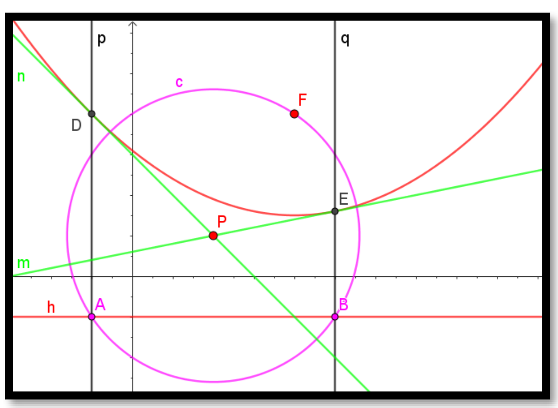


Figura 21. Rectas tangentes a la parábola por un punto externo

### 2.3.6 Método 6

**Nombre de la construcción asociada:** M6 Tangente Parábola

**Dados la parábola, su directriz, el foco $F$ y una recta $r$ cualquiera, trazar la tangente que sea paralela a $r$.**

En esta construcción se hace uso del resultado expuesto por Heath (1956), y aquí planteado como Hecho Geométrico 8.

En los métodos anteriores se ha observado y hecho uso de la recta mediatriz de un segmento para determinar la tangente a la parábola, teniendo como extremos del segmento al foco, y a un punto que pertenece a la directriz.

Salvo el caso de que una recta que pase por el foco sea paralela a la directriz, se tiene que la intersección entre una recta que pase por el Foco y la directriz de la parábola existe, y se hace uso de ello a continuación:

- Trace la recta $p$, perpendicular a la recta $r$, y que pase por el foco.
- Sea $D$ la intersección entre la recta $p$ y la directriz.
- Trace el segmento $\overline{DF}$, y su mediatriz $m$

Observe que por ser perpendicular a la recta $p$, la mediatriz $m$ es paralela a la recta $r$ dada.

- La recta $m$ es la tangente buscada.

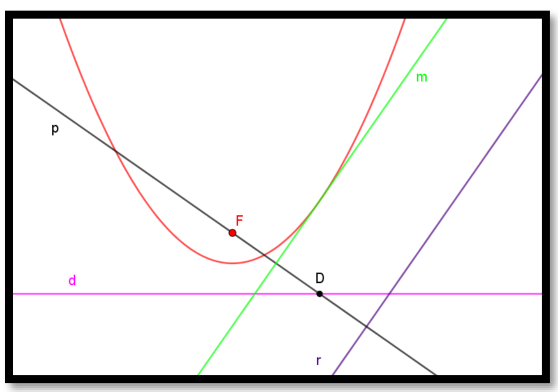


Figura 22. Tangente a la parábola que es paralela a una recta dada

# CAPÍTULO 3

# LA ELIPSE

En este apartado se exponen construcciones de la elipse y el vínculo que tienen estas con las construcciones de la tangente a la elipse.

## 3.1 DEFINICIONES

**DEFINICIÓN DE ELIPSE:** Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) de ese plano es siempre igual a una constante $k$, mayor que la distancia entre los dos puntos.

**Focos:** Son dos puntos fijos interiores, ubicados en el eje mayor y equidistantes del centro de la elipse.

**Distancia focal:** Es el segmento cuyos extremos son los focos de la elipse. Su longitud es el valor $2c$.

**Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos.

**Vértices:** Son los puntos resultantes de la intersección entre el eje focal y la elipse.

**Diámetro mayor:** Es el segmento cuyos extremos son los vértices de la elipse. Su longitud es el valor $2a$.

**Centro:** Es el punto medio de la distancia Focal.

**Diámetro menor:** Al trazar la recta $l$ perpendicular al eje focal por el punto centro, esta recta corta a la elipse en dos puntos. El diámetro menor es el segmento cuyos extremos son esos dos puntos. Su longitud es el valor $2b$.

**Radio vector:** Siendo $P$ un punto cualquiera sobre la elipse, los segmentos que unen a $P$ con los focos se denominan radiovectores de $P$.

**Circunferencia Focal:** Es una circunferencia que tiene como centro un foco de la elipse, y como radio la longitud $2a$.

### ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE ELEMENTOS DE LA ELIPSE

Gracias al tratamiento analítico hecho sobre la elipse por diversos autores, entre ellos Lehman (1994), se sabe que los valores definidos tanto por la distancia focal, como por los diámetros mayor y menor, a saber, los valores $a$, $b$, y $c$ presentes explícita e implícitamente en la ecuación canónica de la elipse, están relacionados a través de la expresión $b^2 = a^2 - c^2$.

Esta expresión es una relación pitagórica y por ello en las construcciones relacionadas con la elipse aparecen triángulos rectángulos que vinculan las medidas $a$, $b$ y $c$.

## 3.2 CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE

Al inicio de cada construcción que se presenta a continuación se plantea un comentario con lo "dado" para la construcción. En cada una de las subsecciones se presenta el respectivo nombre del archivo en GeoGebra que está asociado a la construcción.

En esta sección se presenta al lector cuatro (4) formas de construir la elipse. Tal como se establece en la introducción, se han incorporado explicaciones visuales y argumentales entre los pasos de la construcción.

### 3.2.1 Método 1

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Elipse (Método 1)

Conocido informalmente como el método del jardinero.

**Dados dos puntos (focos) y un segmento para modificar la longitud de los radio vectores.**

Para realizar esta construcción con GeoGebra, se procede de la siguiente manera:

- Se considera un segmento $\overline{AB}$ de longitud $2a$.
- Sea $C$ un punto que pertenece al segmento $\overline{AB}$, de tal manera que $A - C - B$.

La condición de interestancia da como resultado que $AC + CB = AB = 2a$

- Sean $F_1$ y $F_2$ dos puntos del plano tales que $F_1F_2 < 2a$, estos puntos serán los focos.
- Se traza la circunferencia $c1$ con centro en $F_1$ y radio $AC$.
- Se traza la circunferencia $c2$ con centro en $F_2$ y radio $CB$.
- Sean $D$ y $E$ los puntos donde se intersecan las circunferencias $c1$ y $c2$.

El lugar geométrico generado por los puntos $D$ y $E$ cuando se mueve el punto $C$ sobre el segmento $\overline{AB}$ es la elipse.

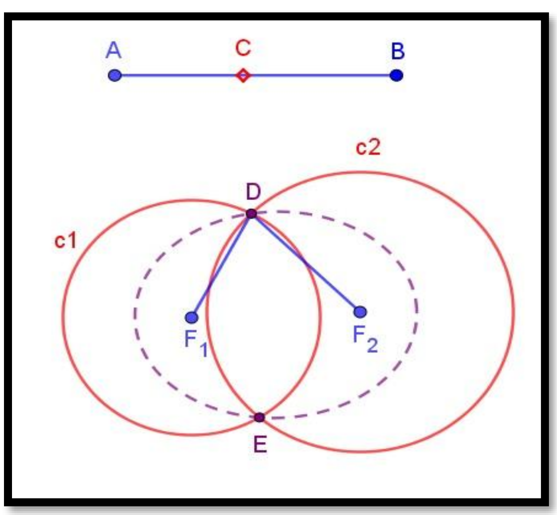


Figura 23. Construcción Elipse. Método Uno.

### 3.2.2 Método 2

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Elipse (Método 2)

**Dados los focos de la elipse, y un punto $A$ que fija el valor $2a$.**

- Considere una recta $m$ en el plano.
- Sean $A$ y $F_1$ dos puntos que pertenecen a $m$, y denótese como $2a$ la distancia entre estos puntos.
- Sea $F_2$ un punto que pertenece al segmento $\overline{AF_1}$, de tal manera que $A - F_2 - F_1$

La condición de interestancia se usa para establecer que $AF_1 > F_1F_2$

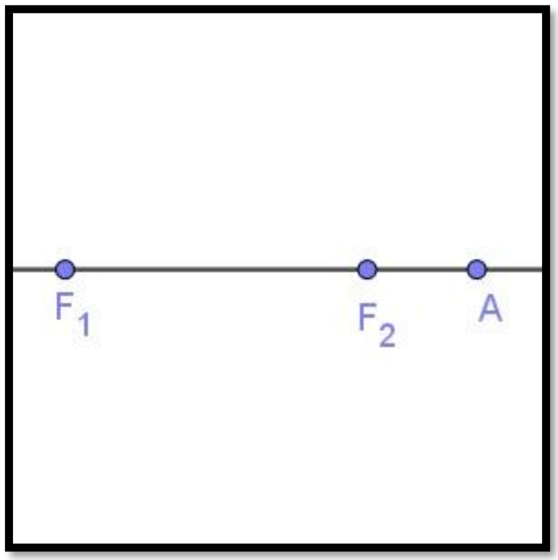


Figura 24. Interestancia $A - F_2 - F_1$

Puede observarse que el punto dado $A$ no pertenece a la elipse, y esto se puede asegurar debido a que el valor resultante de sumar la distancia positiva $AF_2 = k$, y $AF_1 = 2a$ es estrictamente mayor a $2a$.

- $F_1$ y $F_2$ serán los focos de la elipse.

Observe que todo punto que se encuentre a una distancia $2a$ del punto $F_1$ puede prestar utilidad para establecer algún tipo de relación con $F_2$ para encontrar puntos de la elipse, de modo que:

- Trace la circunferencia focal respecto de $F_1$. Denomínese $c1$ a esta circunferencia.
- Sea $C$ un punto sobre $c1$, trácese el segmento $\overline{CF_1}$

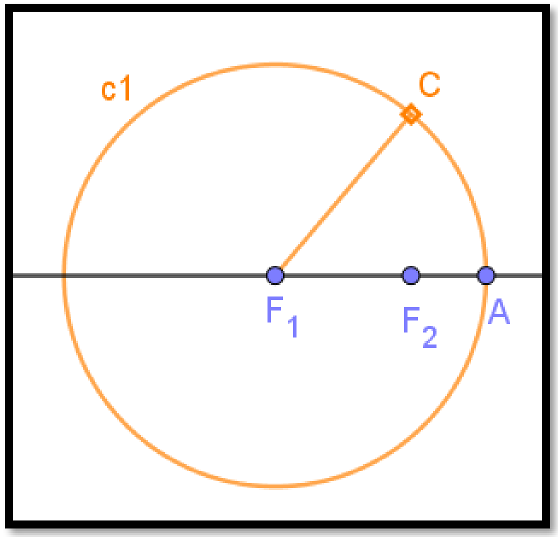


Figura 25. Circunferencia focal y un punto sobre ella.

Por $C$ pertenecer a $c1$, se tiene que $CF_1$ = $2a$

Nótese también que para un punto B que pertenezca al segmento $\overline{CF_1}$ , y que cumpla la interestancia $C - B - F_1$, se cumple que $CB$ + $BF_1$ = $CF_1$ = $2a$

Por lo tanto, si ese mismo punto $B$ equidistara de $C$ y de $F_2$, es decir si $CB$ = $F_2B$, al hacer la sustitución se tendría que $F_2B$ + $BF_1$ = $2a$, y de ese modo habríamos encontrado un punto que pertenece a la elipse buscada.

La mediatriz, por definición, permite encontrar todos los puntos que equidistan a un par fijo de puntos, y entonces el procedimiento a seguir es el siguiente:

- Sean $n$ la mediatriz del segmento $\overline{CF_2}$
- Sea $B$ la intersección entre el segmento $\overline{CF_1}$ y la recta $n$.

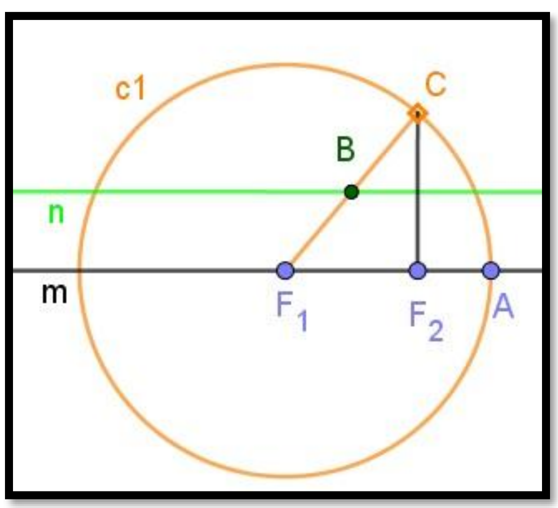


Figura 26. La mediatriz que es tangente.

El punto $B$ construido de esta manera cumple las condiciones que se mencionaron anteriormente, de modo que pertenece a la elipse, y por lo tanto, el lugar geométrico generado por $B$ al mover $C$ sobre la circunferencia $c1$, es una elipse.

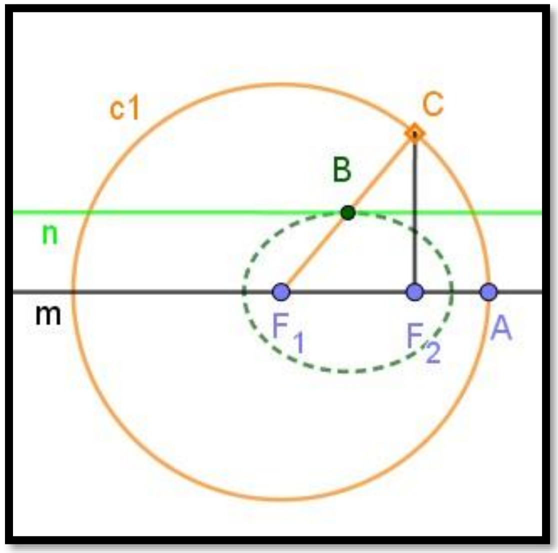


Figura 27. Elipse como lugar geométrico de la mediatriz y el radio

### 3.2.3 Método 3

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Elipse (Método 3)

**Dados los focos y un punto perteneciente a la elipse.**

Para este método se dispone de los focos $F_1$ y $F_2$ , y de un punto $E$ sobre la elipse. Dados estos elementos, es posible identificar los valores $2a$ y $2c$ de la presente elipse, ya que se encuentran implícitos en ellos, siendo $2c = F_1F_2\ y\ 2a = EF_1 + EF_2$

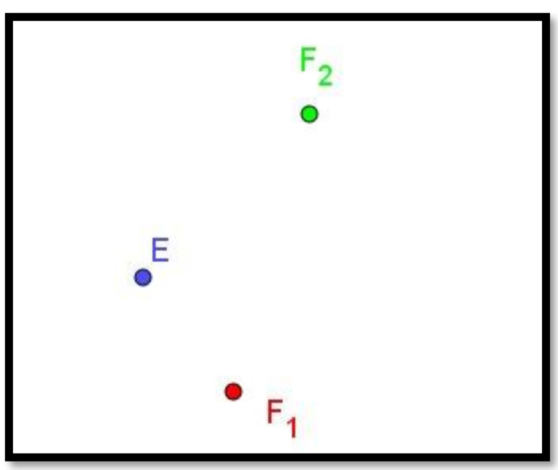


Figura 28. Focos y un punto que pertenece a la elipse.

Una vez identificado el valor $2a$ es posible construir una de las circunferencias focales con el fin de determinar los puntos que se encuentran a una distancia $2a$ del foco elegido. Al intersecar la circunferencia focal con otros objetos geométricos, en particular con la mediatriz de un segmento, su punto de intersección satisface condiciones adicionales, como equidistancia a nuevos puntos. Es esta propiedad de la que se hace uso en esta construcción.

Se procede entonces como se muestra:

- Trace la semirrecta $\overrightarrow{F_1E}$
- Considere la circunferencia c1 con centro en $E$ y radio $EF_2$

Luego todos los puntos de $c1$ se encuentra a una distancia $EF_2$ de $E$, y en particular su intersección con la semirrecta $\overrightarrow{F_1E}$

- Sea D la intersección entre $c1$ y la semirrecta $\overrightarrow{F_1E}$

En este momento el valor $2a$ queda establecido de manera explícita por la distancia $DF_1$. Entonces:

- Trace la circunferencia $c2$ con centro en $F_1$ y radio $D$.

$c2$ satisface la definición de circunferencia focal de la elipse respecto de $F_1$

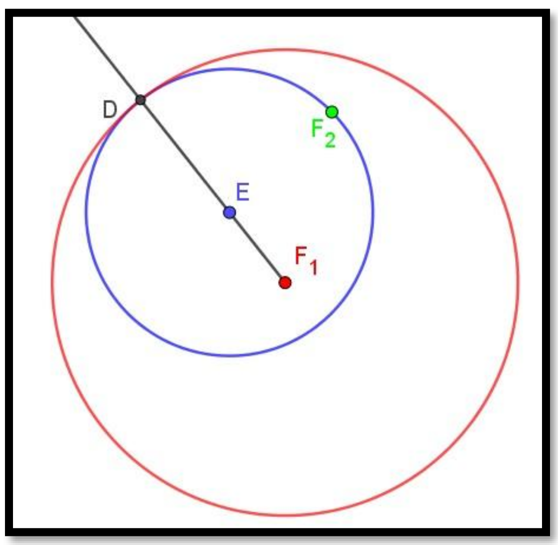


Figura 29. Circunferencia focal a partir de un punto de la elipse

Como se muestra en el razonamiento que concluye visualmente en la Figura 27, todo punto de un radio de la circunferencia focal que es intersecado por le mediatriz del segmento $\overline{CF_2}$, siendo $C$ el punto del radio sobre la circunferencia focal y $F_2$ el otro foco de la elipse, se satisface la definición de elipse. De modo que el paso siguiente una vez trazada la circunferencia focal es ubicar un punto libre sobre ella para construir un radio, y la mediatriz que lo tiene como extremo.

- Sea $P$ un punto sobre $c2$, y trácese el radio $PF_1$
- Trace la mediatriz $g$ del segmento $\overline{PF_2}$
- Denomine $Q$ al punto de intersección entre $g$ y el radio $PF_1$

El lugar geométrico generado por $Q$ al mover $P$ sobre la circunferencia $c2$, es una elipse.

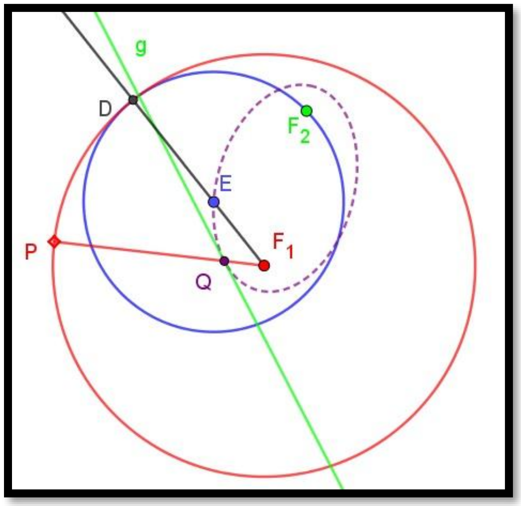


Figura 30. Construcción Elipse. Método tres.

### 3.2.4 Método 4

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Elipse (Método 4)

**Dadas dos circunferencias concéntricas de distinto radio.**

La longitud de los radios de las circunferencias corresponde a los valores $a$ y $b$ de la ecuación canónica de la elipse, $a > b$, y de forma equivalente a la longitud de los diámetros mayor y menor de la elipse.

- Sea $m$ una recta en el plano, y los puntos $A$, $B$ y $O$ sobre ella tales que $O - A - B$

Como esta construcción trata de circunferencias concéntricas, tómese $O$ como centro de tales circunferencias, de modo que

- Trace la circunferencia $c1$ con centro $O$ y radio $OA$, y c2 con centro en $O$ y radio $OB$

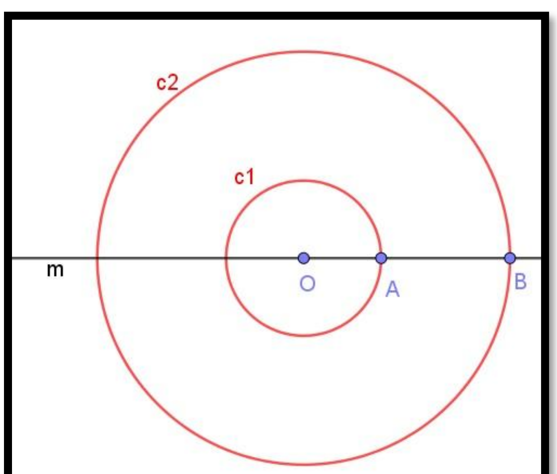


Figura 31. Circunferencias concéntricas para construir una elipse

El valor $b$ de ecuación canónica de la elipse corresponde a la distancia $OA$, y de manera análoga sucede con el valor $a$, que corresponde a la distancia $OB$.

- Sea $C$ un punto sobre $c1$
- Trace la semirrecta $\overrightarrow{OC}$
- Sea $D$ la intersección de la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ y $c2$

Tal y como se deduce del tratamiento que hacen Alvarado et al. (2018), con rectas paralelas y perpendiculares convenientes que relacionan a $C$ y a $D$, la elipse se construye como sigue:

- Trace la recta $n$ perpendicular a $m$ que pasa por $D$
- Trace la recta $l$ perpendicular a $n$ que pasa por $C$

El punto de intersección de estas dos rectas pertenece a la elipse buscada

- Denomínese $E$ a la intersección de las rectas $n$ y $l$

El lugar geométrico generado por $E$ al mover $C$ sobre la circunferencia $c1$, es una elipse.

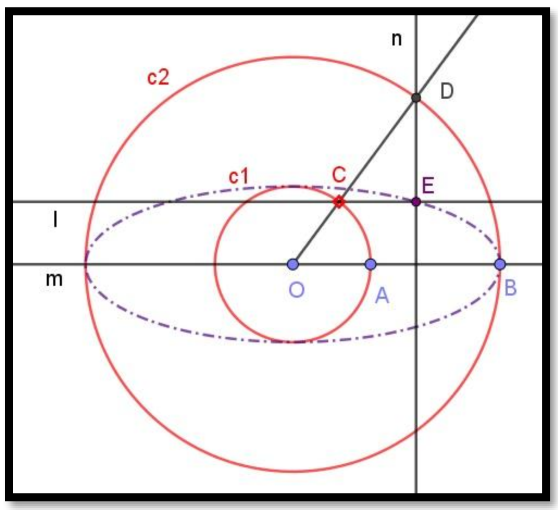


Figura 32. Elipse generada por un par de circunferencias concéntricas

Los argumentos que apoyan la validez de esta construcción pertenecen a la teoría de geometría proyectiva, para la cual las representaciones en el plano cartesiano son un caso puntual. Se remite al lector a Alvarado et al. (2018), toda vez que esa exposición está fuera de los alcances de este documento.

## 3.3 CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES A LA ELIPSE

En esta sección se presenta al lector tres (3) formas de construir la tangente a la Elipse. Tal como se establece en la introducción, se han incorporado explicaciones visuales y argumentales entre los pasos de la construcción.

En cada una de las subsecciones se presenta el respectivo nombre del archivo en GeoGebra que está asociado a la construcción.

Durante la exploración realizada para la redacción del presente documento se pudo evidenciar que la justificación más recurrente que valida varias de las construcciones de la recta tangente a una elipse se apoya en la propiedad de la circunferencia focal que fue discutida en el método dos de la construcción de la elipse, que se visualiza en la Figura 27.

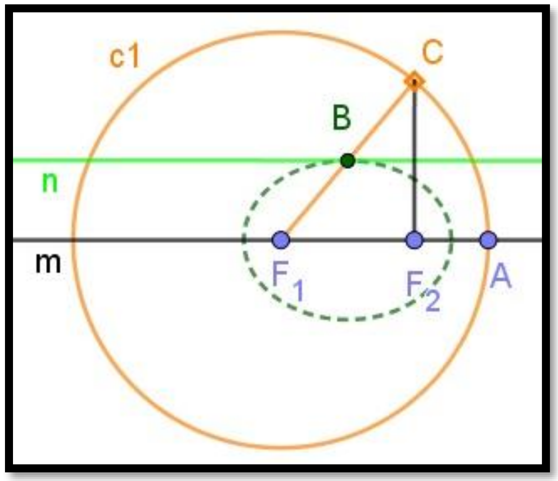


Figura 27. Elipse como lugar geométrico de la mediatriz y el radio

Con la mediación de la circunferencia focal $c1$ con centro en $F_1$ puede construirse la mediatriz $n$ del segmento $\overline{CF_2}$, siendo $C$ un punto en $c1$, y siendo $F_2$ el otro foco de la elipse. La recta $n$ es una recta tangente a la elipse considerada. Esta forma de emplear el circulo focal está presente a lo largo de las secciones que siguen.

### 3.3.1 Método 1

**Nombre de la construcción asociada:** M1 Tangente Elipse

**Dados la elipse, los focos y una recta $m$ cualquiera, trazar las tangentes paralelas a la recta $m$.**

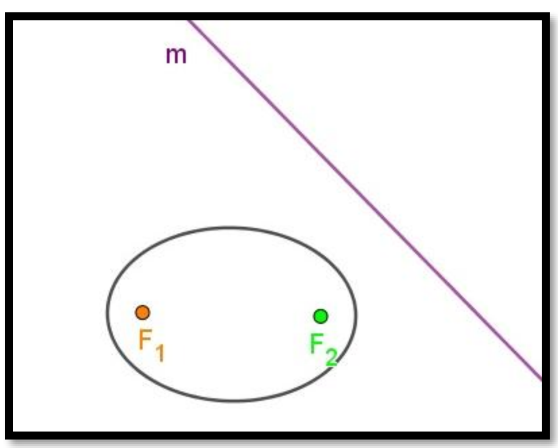


Figura 33. Elipse con focos, y una recta dada.

Encontrar el valor el valor $2a$ necesario para construir la circunferencia focal no representa mayor dificultad, ya que teniendo la elipse dada puede recurrirse a estrategias como las abordadas en los métodos dos y tres para construir la elipse, en las que se hizo uso del eje focal, o de la semirrecta que contiene al radio vector con el foco elegido como centro de la circunferencia focal, encontrando primero un punto $E$ sobre la elipse.

Para el caso de la elipse, por disponer de dos focos, es posible replicar la construcción realizada en $F_1$ sobre $F_2$, de modo que hay dos rectas que satisfacen ser tangentes a la elipse, y ser paralelas a la recta dada.

Se ha elegido para el presente caso hacer uso del eje focal, encontrando así los vértices, y por tanto $2a$. Una vez que $2a$ ha sido establecido, se construye la circunferencia focal $c1$ respecto a $F_1$.

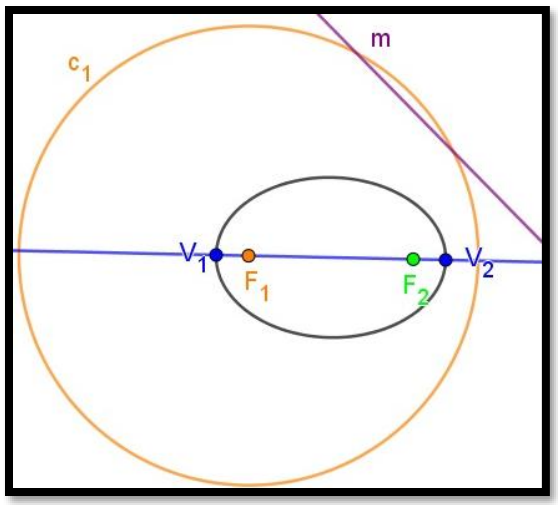


Figura 34. Circunferencia focal (CTE.M1)

Como se ha mencionado en secciones anteriores, se hace uso del resultado expuesto por Heath (1956), y aquí planteado como Hecho Geométrico 8.

Teniendo esto presente se procede así:

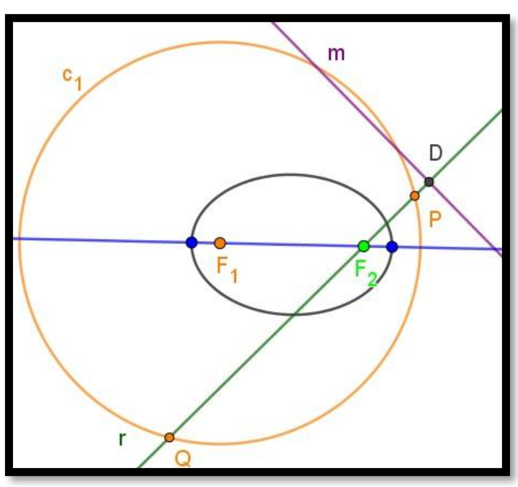


Figura 35. Intersección recta $r$ y $c1$ (CTE.M1)

- Trace la recta $r$ perpendicular a la recta $m$ (que es la recta dada), y que pase por $F_2$.

Como $F_2$ está al interior de la circunferencia focal, cualquier recta que pase por $F_2$ cortará a $c1$ en dos puntos. Esta propiedad ha quedado establecida por el Hecho Geométrico 7. Este es particularmente el caso para la recta $r$.

- Sean $P$ y $Q$ las intersecciones de la recta $r$ con la circunferencia focal.

La mediatriz de dos puntos cualquiera que pertenezcan a la recta $r$ será paralela a la recta $m$, pues la mediatriz será perpendicular a $r$. Puede observarse que este es una caso de aplicación del Hecho Geométrico 8.

- Trace las mediatrices $l$ y $n$ de los segmentos $\overline{F_2P}$ y $\overline{F_2Q}$ respectivamente.

Es claro que las rectas $l$ y $n$ son paralelas a la recta $m$, pues los puntos $P$, $Q$ y $F_2$ pertenecen a la recta $r$, que es perpendicular a ellas tres, y sumado al paralelismo se tiene que $l$ y $n$ son rectas tangentes a la elipse por la forma en que se han construido.

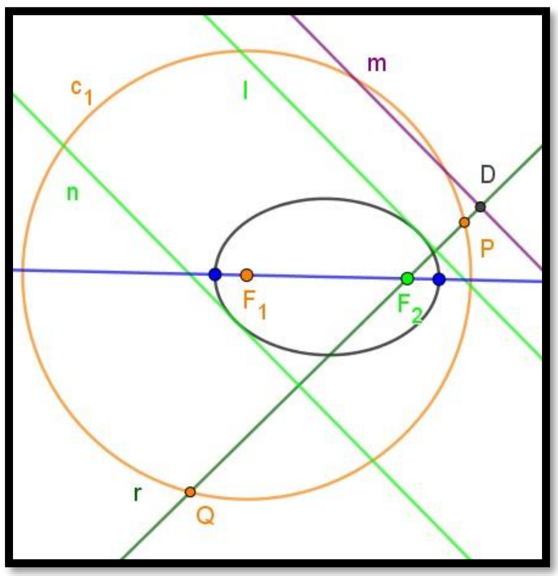


Figura 36. Tangentes a la elipse paralelas a una recta dada.

### 3.3.2 Método 2

**Nombre de la construcción asociada:** M2 Tangente Elipse

**Dados la elipse, los focos y un punto $E$ externo a la elipse, construir la tangente que pasa por $E$.**

Que un punto $E$ sea externo a la elipse significa que la suma de las distancias del punto $E$ a los focos es mayor al valor $2a$ de la ecuación canónica de la Elipse. Esto se expresa en forma de ecuación como $F_2E + EF_1 = k > 2a$

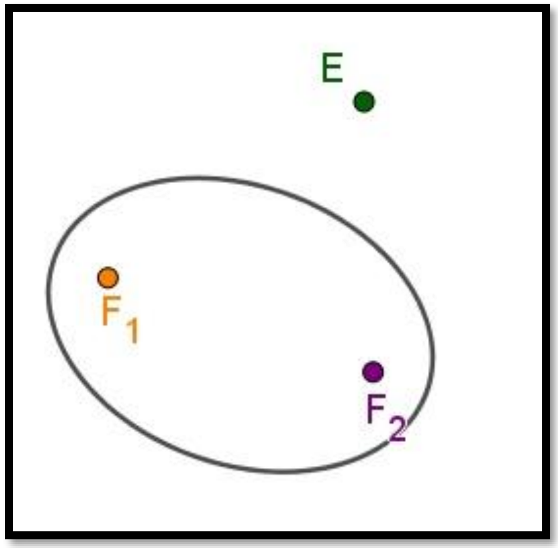


Figura 37. Elipse con focos y un punto externo.

El siguiente paso consiste en hallar el valor $2a$, y para el caso presente se hace uso del diámetro mayor, que pasa por los focos e interseca a la elipse en los vértices. Una vez identificado este valor se construye la circunferencia focal $c1$ respecto de $F_1$

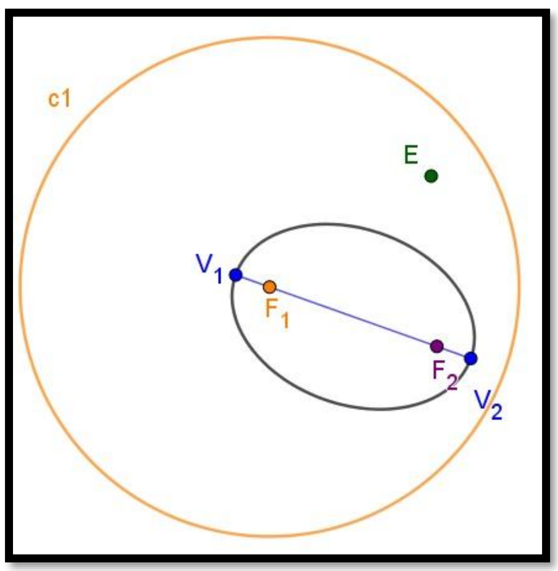


Figura 38. Circunferencia focal (CTE.M2)

Llegado a este paso, se ha de encontrar puntos que equidisten tanto de $E$ como de $F_2$.

- Se traza la circunferencia $c2$ con centro en $E$, y radio $EF_2$

Como $F_2$ está en el interior de la circunferencia focal, se tiene que las circunferencias $c1$ y $c2$ se intersecan en dos puntos. Esto quedó establecido en el Hecho Geométrico 9.

- Denomínese por $M$ y $N$ a los puntos de intersección entre $c1$ y $c2$

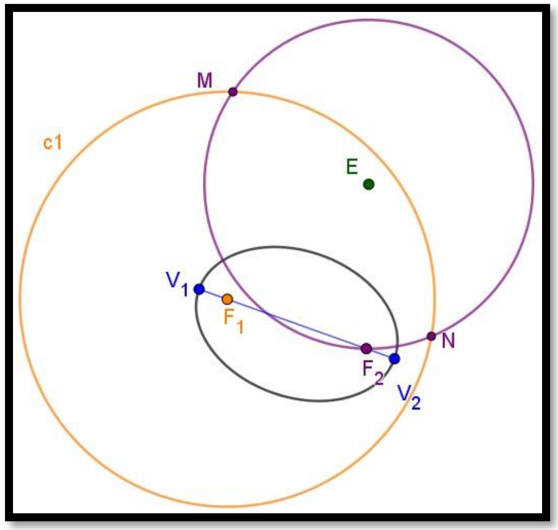


Figura 39. Puntos convenientes de intersección con $c1$

Como $M$ y $N$ pertenecen a la circunferencia focal, se usa la propiedad expuesta en la Figura 36, como sigue:

- Sea m la mediatriz del segmento $\overline{MF_2}$
- Sea n la mediatriz del segmento $\overline{NF_2}$

Por construcción, $EF_2$ = $EM$ = $EN$, de modo que $E$ pertenece tanto a la recta $n$ como a la recta $m$.

Por las observaciones realizadas al inicio de la sección 3.3, en particular lo relacionado a la circunferencia focal en la figura 27, la conclusión es que tanto $m$ como $n$ son rectas tangentes a la elipse.

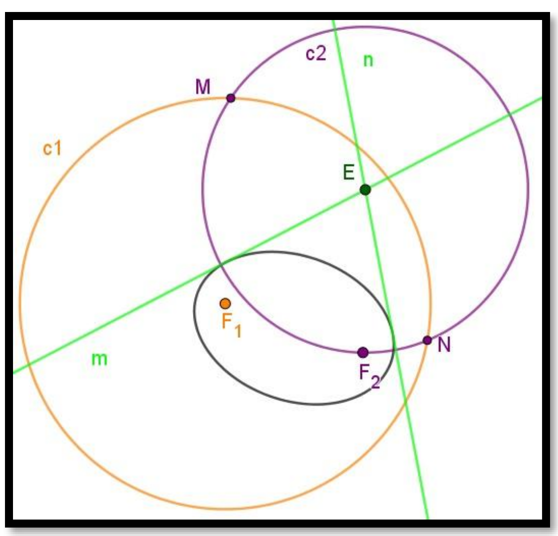


Figura 40. Tangentes a la elipse por punto externo.

### 3.3.3 Método 3

**Nombre de la construcción asociada:** M3 Tangente Elipse

**Dados la elipse, los focos y punto $E$ de la elipse. Construir la tangente que pasa por $E$.**

Cuando se dispone de los focos y un punto $E$ sobre la elipse, se observa que se ha dado el valor $2a$ de manera implícita, y también están dados los extremos de los radios vectores, razón por la cual es posible construir el ángulo $\angle F_1EF_2$

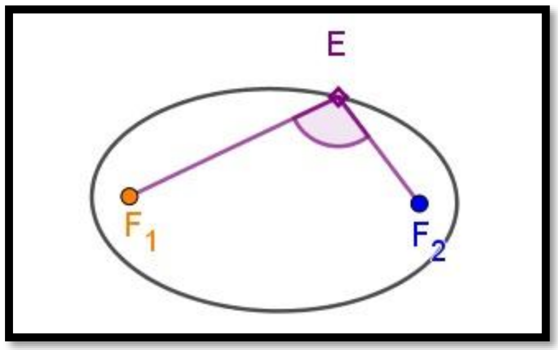


Figura 41. Focos y punto sobre la elipse.

La bisectriz del ángulo $\angle F_1EF_2$ interseca a la elipse en dos puntos, pero la recta perpendicular a la bisectriz del ángulo $\angle F_1EF_2$ por el punto $E$ interseca a la elipse únicamente en el punto $E$. Esta afirmación se apoya en el siguiente razonamiento:

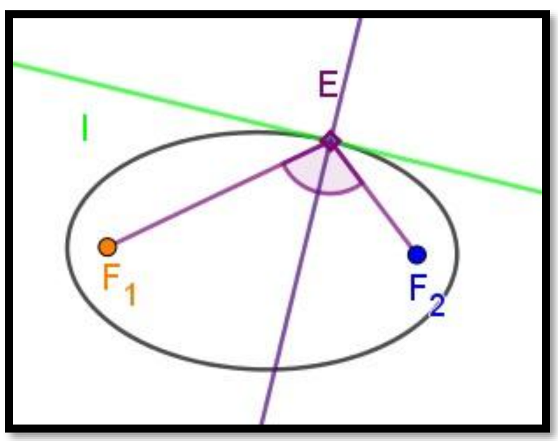


Figura 42. Tangente que es perpendicular a la bisectriz de $\angle F_1EF_2$

En secciones anteriores se ha hecho mención del Hecho Geométrico 8. Así que un segmento conveniente paralelo a la bisectriz tendrá una mediatriz que al mismo tiempo es perpendicular de la bisectriz.

- Considere la recta $\overleftrightarrow{EF_1}$, así como una circunferencia con centro $E$ y radio $EF_2$
- La circunferencia $c2$ corta a la recta $\overleftrightarrow{EF_1}$ en dos puntos, pero tómese el punto de intersección $D$ tal que $F_1 - E - D$.

De esta forma, se ha hallado el valor $2a$, y de este modo el punto $D$ así construido pertenece a la circunferencia focal con centro en $F_1$

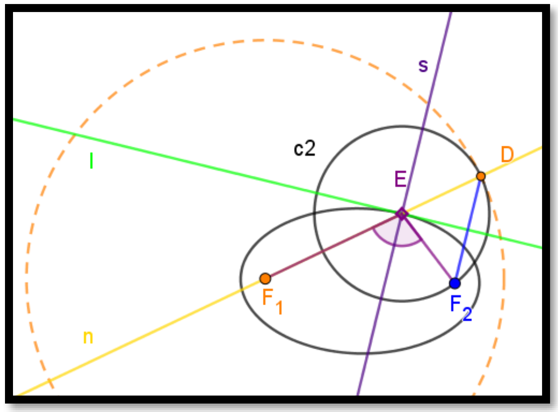


Figura 43. Construcción de un punto $D$ que pertenece a la circunferencia focal.

Por las equidistancias respecto de $E$ que garantiza el paso anterior, se puede asegurar que $E$ pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{DF_2}$, lo que a su vez permite asegurar que el triángulo $\Delta DEF_2$ es isósceles. En este paso la pregunta que permite plantear justificaciones geométricas es si el segmento $\overline{DF_2}$ es paralelo a la bisectriz del ángulo $\angle F_1EF_2$, a lo que puede responderse que sí, por como se muestra a continuación:

La suma de los ángulos internos del triángulo $\Delta EF_2D$ es 180, así como es 180 la suma del ángulo llano $\angle F_1ED$.

Como el ángulo $\angle DEF_2$ es un ángulo que comparten, entonces el ángulo $\angle F_1EF_2$ debe medir lo mismo que 2 veces el ángulo $\angle EF_2D$, esto por ser $\Delta DEF_2$ un triángulo isósceles.

Además, por ser bisectriz, el ángulo que se forma entre la recta $s$ y el segmento $\overline{EF_2}$ es 1/2 ángulo $\angle F_1EF_2$ = $\angle EF_2D$

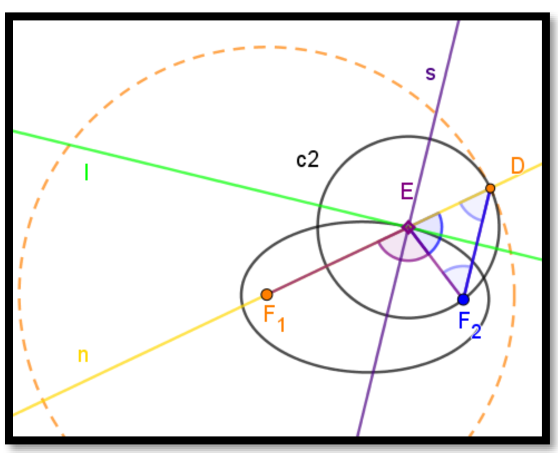


Figura 44. Donde se muestra que el segmento $\overline{DF_2}$ es paralelo a la bisectriz $s$

Es decir, existe congruencia entre ángulos alternos internos y por lo tanto el segmento $\overline{DF_2}$ es paralelo a la bisectriz $s$.

Considerando todas las conclusiones juntas, se tiene que:

- El segmento $\overline{DF_2}$ es paralelo a la bisectriz s
- La mediatriz del segmento $\overline{DF_2}$ es perpendicular al segmento $\overline{DF_2}$, y $E$ pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{DF_2}$
- Solo existe una perpendicular a la bisectriz por el punto $E$.

Luego la recta perpendicular a la bisectriz $s$, y que pasa por el punto $E$ es la misma recta mediatriz del segmento $\overline{DF_2}$ , $D$ siendo un punto que pertenece a la circunferencia focal con centro $F_1$.

La mediatriz con las características descritas es tangente a la elipse.

### 3.3.4 Método 4

**Nombre de la construcción asociada:** M4 Tangente Elipse

**Dados la elipse y sus ejes mayor y menor, trazar la tangente a la elipse.**

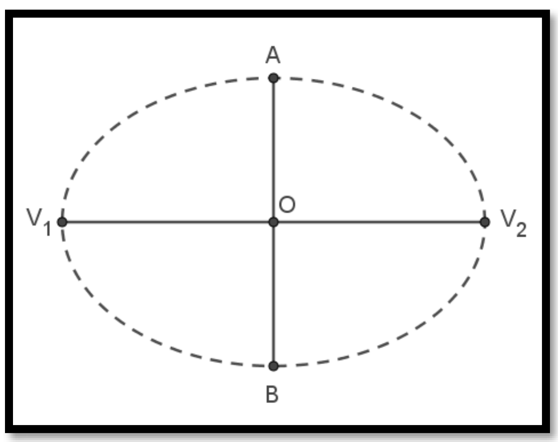


Figura 45. Diámetros mayor y menor de la elipse

Implícitamente en esta construcción se dan los valores de $a$ y $b$, que corresponde a la mitad de los diámetros mayor y menor respectivamente. Debido a perpendicularidad entre los diámetros mayor y menor, y a la relación pitagórica entre los valores $a$, $b$, y $c$ de la que se hace mención tanto en el marco de referencia, como al inicio de la sección de la elipse, el valor de $c$ puede encontrarse como se muestra a continuación.

- Trace la circunferencia $h$ con centro en $A$ y radio $OV_1$ = $a$
- Sean $F_1$ y $F_2$ los puntos de intersección entre la circunferencia $h$ y el diámetro mayor.

De esta manera se forma un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud $a$, y catetos de longitud $b$ y $c$, por lo cual los focos quedan definidos.

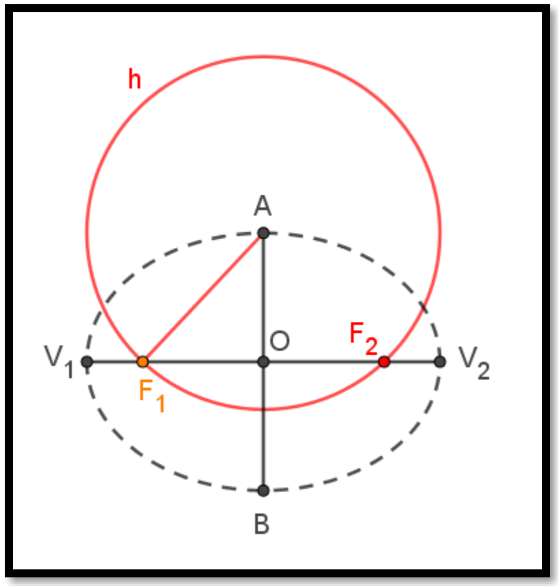


Figura 46. Circunferencia de radio a para hallar los focos

- Sea $P$ un punto que pertenece a la elipse.
- Se trazan las semirrectas $\overrightarrow{F_1P}$ y $\overrightarrow{F_2P}$

La idea es recurrir nuevamente a la mediatriz, pero considerando la bisectriz de un ángulo en su lugar.

- Sea un punto $H$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{F_1P}$ tal que $F_1 - P - H$

De esta forma queda definido el ángulo $\angle F_2PH$

- Se traza la bisectriz $l$ del ángulo $\angle F_2PH$

La recta $l$ es la tangente a la elipse por el punto $P$.

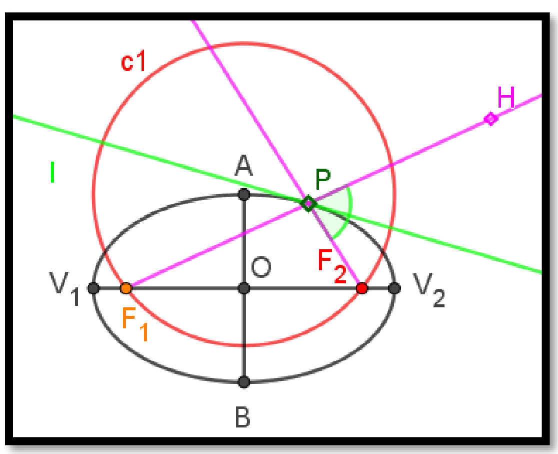


Figura 47. Bisectriz que es recta tangente al punto P

Nótese que es posible construir la circunferencia focal e intersecarla con la semirrecta $\overrightarrow{F_1P}$, y el punto de intersección $Q$ satisface la interestancia $F_1 - P - Q$, luego el ángulo $\angle F_2PH$ es el mismo ángulo $\angle F_2PQ$. Tal como se establece en el Hecho Geométrico 6, el procedimiento para construir la bisectriz de un ángulo es similar al de la mediatriz de un segmento.

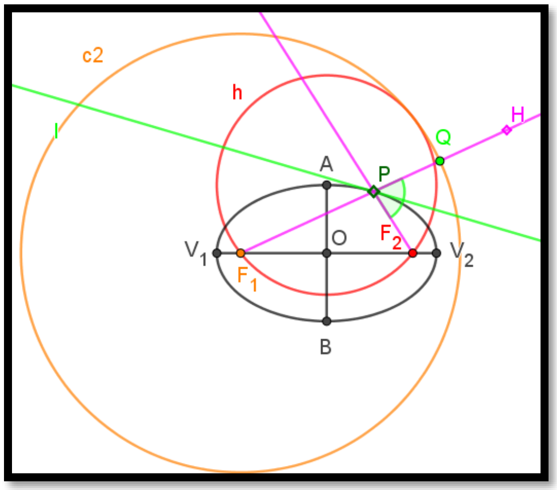


Figura 48. Mediatriz equivalente a la bisectriz.

# CAPÍTULO 4

# LA HIPÉRBOLA

## 4.1 DEFINICIONES

**DEFINICIÓN DE HIPÉRBOLA:** Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Tomando como focos los puntos $F$ y $F'$, y siendo $P$ un punto de la hipérbola, lo escrito anteriormente equivale en términos de distancia a la siguiente expresión:

$$| FP - F'P | = 2a$$

Que puede reescribir como

I. $FP - F'P = 2a$
II. $FP - F'P = -2a$

Estas dos expresiones equivalen gráficamente a dos conjuntos de puntos que se denominan ramas de la hipérbola.

**Focos:** Los focos de la hipérbola son dos puntos fijos del plano que están sobre el eje focal, se encuentran separados por una distancia $2c$ denominada distancia focal.

**Distancia focal:** Es el segmento cuyos extremos son los focos de la hipérbola. Su longitud es el valor $2c$.

**Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos.

**Vértices**: Son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal. Estos puntos representan los extremos de cada una de las ramas de la curva y se encuentran situados a una distancia constante a respecto al centro. La distancia comprendida entre ambos vértices se denomina eje real o eje transverso y su longitud es equivalente al valor $2a$.

**Eje real (o eje transverso):** Es el segmento cuyos extremos son los vértices de la hipérbola. Su longitud es el valor $2a$.

**Centro:** Es el punto medio de la distancia focal, del eje real, y del eje imaginario.

**Eje imaginario (o eje conjugado):** Porción definida de la recta perpendicular al eje focal por el punto denominado Centro. Su longitud es el valor $2b$.

**Radio vector:** Son los segmentos que unen a $H$ con los focos de la hipérbola, siendo $H$ un punto cualquiera sobre la hipérbola.

**Circunferencia focal:** Es una circunferencia que tiene como centro un foco de la hipérbola, y como radio la longitud $2a$.

**Circunferencia focal (Definición alternativa):** La circunferencia focal con centro en $F$' es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco $F$ a la recta tangente.

**Asíntotas:** En el tratamiento analítico de la hipérbola, se identifican dos rectas, a las que se denominan asíntotas y cuya ecuación se obtienen igualando a cero el segundo miembro de su ecuación reducida. (Lehmann, 1989)

## 4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA

En esta sección se presenta al lector tres (3) formas de construir la Hipérbola. Tal como se establece en la introducción, se han incorporado explicaciones visuales y argumentales entre los pasos de la construcción.

En cada una de las subsecciones se presenta el respectivo nombre del archivo en GeoGebra que está asociado a la construcción.

De manera análoga al caso de la elipse, durante la exploración de las construcciones que se presentan a continuación se observó la preponderancia tanto de la circunferencia focal como de la mediatriz a la hora de proceder a construir y/o identificar los puntos que satisfacen las condiciones de la definición de hipérbola como lugar geométrico.

En relación con lo anterior, al reescribir la expresión "I" de una de las ramas de la hipérbola, a saber $FP - F'P$ = $2a$, expresión que fue presentada en el apartado de definición de hipérbola, ahora escrita como $FP$ = $2a$ + $F'P$, se obtiene que al interpretar $FP$ como segmento, al construir una circunferencia con centro ya sea en $F$ o en $P$, y radio $F'P$, el segmento restante tiene longitud $2a$, valor que puede usarse para establecer los vértices de la hipérbola, o para trazar las circunferencias focales.

### 4.2.1 Método 1

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Hipérbola (Método 1)

**Dados los focos y un segmento de longitud $k$ = $2a$, $k$ < $2c$.**

Haciendo uso de la expresión reescrita de la definición de hipérbola, se observa que cualquier punto exterior a la circunferencia focal puede definir una hipérbola, pues su distancia al foco necesariamente será mayor a $2a$, pero también se hace imperioso recordar que para definir un lugar geométrico debe haber un punto que pertenezca a un objeto, de este modo, el camino más natural es definir un punto sobre la circunferencia focal, y encontrar el punto exterior a la circunferencia que cumpla la definición:

- Sean $F$ y $F'$ los focos, y trácese la distancia focal.
- Sea $B$ un punto sobre $\overline{FF'}$, tal que $F - B - F'$
- Trace la circunferencia con $c1$ con centro en $F$ y radio $FB$
- Tómese un punto en $c1$, y denomínese $A$
- Trace la semirrecta $\overrightarrow{FA}$

Todo punto $X$ que cumple la interestancia $F - A - X$ está en el exterior de la circunferencia focal, y pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{FA}$

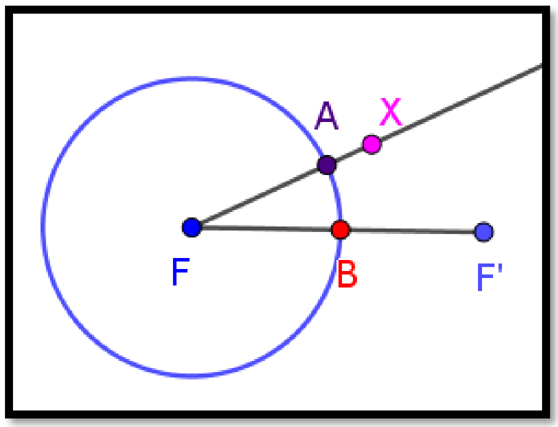


Figura 49. Punto exterior a la circunferencia focal

Ahora es necesario encontrar un punto que equidiste de $F'$ y de $A$, y que también pertenezca a la semirrecta $\overrightarrow{FA}$, para eso se hace uso de la mediatriz como se muestra:

- Sea $m$ la mediatriz del segmento $\overline{AF'}$
- Sea $H$ la intersección entre la semirrecta $\overrightarrow{FA}$, y $m$

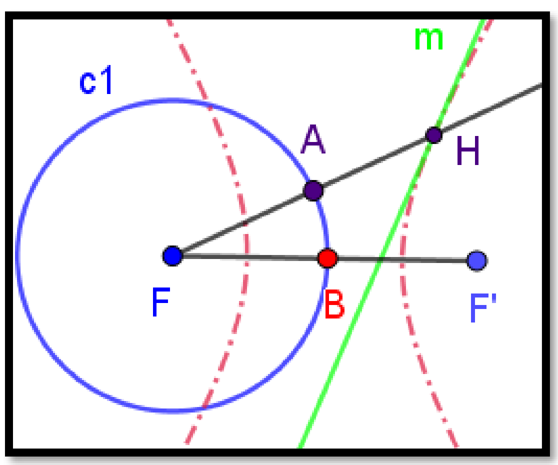


Figura 50. Hipérbola Método uno

El lugar geométrico generado por el punto $H$ cuando el punto $A$ se mueve por la $c1$ satisface la definición de hipérbola.

### 4.2.2 Método 2

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Hipérbola (Método 2)

**Dados los focos y los vértices (valores 2a y 2c implícitos)**

Así como en el caso de la elipse pudo plantearse una construcción que hace uso de solo circunferencias, método conocido como el método del jardinero, para la hipérbola también es posible plantear algo parecido, como se muestra a continuación:

- Sean $F$ y $F'$ los focos, $V$ y $V'$ los vértices
- Se traza el eje focal, llame a esta recta $l$

Los 4 puntos del primer paso pertenecen, por definición de eje focal, a la recta $l$.

Con esta configuración podemos afirmar que $FV = c - a$, $VV' = 2a$, y que $F'V' = c - a$

- Tómese un punto $X$ sobre $l$ tal que $F - V - V' - F' - X$, y sea $V'X = k$

Definido de esta forma es claro que $VX = 2a + k$, distancia apropiada para un punto exterior a la circunferencia con centro en $V$.

Ahora solo es necesaria una segunda circunferencia conveniente que la interseque.

- Se traza la circunferencia $c1$ con centro en $V$ y radio $VX$
- Se traza la circunferencia $c2$ con centro en $F'$ y radio $V'X$
- Sean $D$ y $E$ las intersecciones entre $c1$ y $c2$.

El lugar geométrico de los puntos de intersección entre $c1$ y $c2$ corresponden a una rama de la hipérbola.

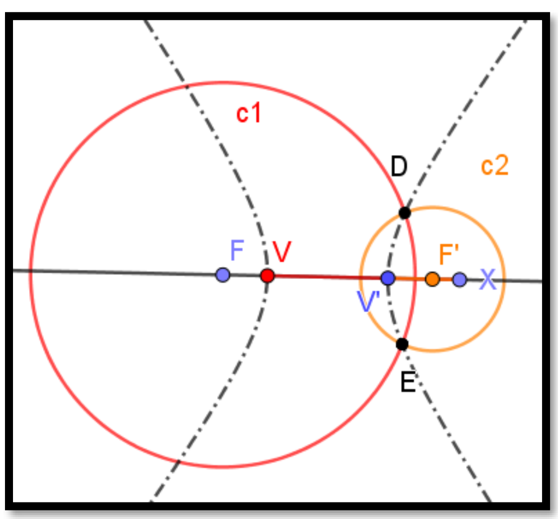


Figura 51. Hipérbola generada a partir de dos circunferencias

### 4.2.3 Método 3

**Nombre de la construcción asociada:** Construcción Hipérbola (Método 3)

**La construcción de Pappus.**

En esta construcción se expone el método usado por el matemático griego Pappus, método que divide al segmento dado en tres partes iguales. Es interesante notar que el único de los valores modernos que puede hallarse en esta construcción corresponda al de $2c$, que es la distancia focal, porque si bien se fabrica un valor $2a$, no lo usa, esto último porque ese valor es una concepción moderna de la geometría analítica.

- Se define una distancia focal (es decir los focos $F$ y $F'$, y el segmento del que son extremos)
- Se traza la mediatriz de la distancia focal, y sea $A$ el punto medio de la distancia focal.
- Se traza la circunferencia $c1$, con centro en $F$ y radio $FA$.
- Se traza la circunferencia $c2$, con centro en $F'$ y radio $F'A$.

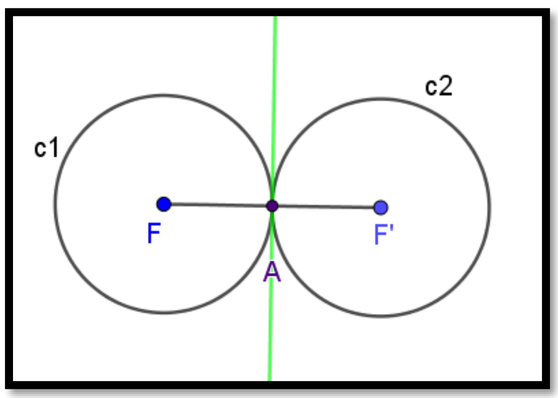


Figura 52. Planteamiento de Pappus

A partir de estos elementos Pappus logra construir un triángulo que tiene en su base un par de ángulos en el cuál uno es el doble del otro.

- Se fija un punto $B$ sobre $c1$
- Se traza la semirrecta $\overrightarrow{FB}$
- Se traza la circunferencia $c3$ con centro en $B$ y radio $BA$

Con este último paso creará un ángulo del doble de valor.

- Sea $C$ la otra intersección de $c3$ con $c1$
- Sea $C'$ el simétrico $C$ respecto de la recta $m$
- Se traza la semirrecta $\overrightarrow{F'C'}$
- Sea $D$ la intersección entre la semirrecta $\overrightarrow{FB}$ y la semirrecta $\overrightarrow{F'C'}$

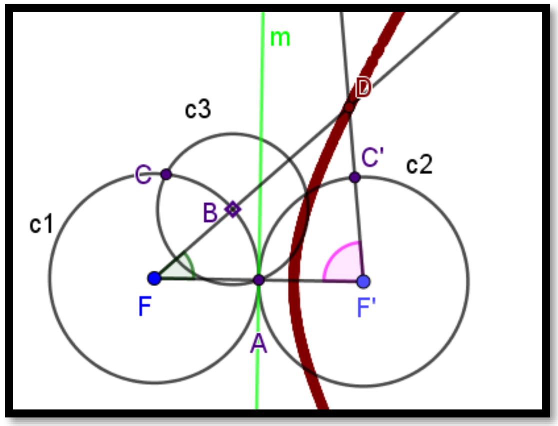


Figura 53. Hipérbola de Pappus.

El lugar geométrico generado por $D$ al moverse $B$ por $c1$ es la hipérbola de Pappus.

Observe que el ángulo $\angle BFF'$ mide la mitad del ángulo $\angle FF'D$

Al usar el método uno de hipérbola en esta construcción, y haciendo $2a = 2c/3$, que es la condición analítica para que los vértices de la hipérbola dividan al segmento en tres partes iguales, se evidencia en la exploración realizada en GeoGebra que la construcción de Pappus está desplazada respecto de la hipérbola con las características descritas.

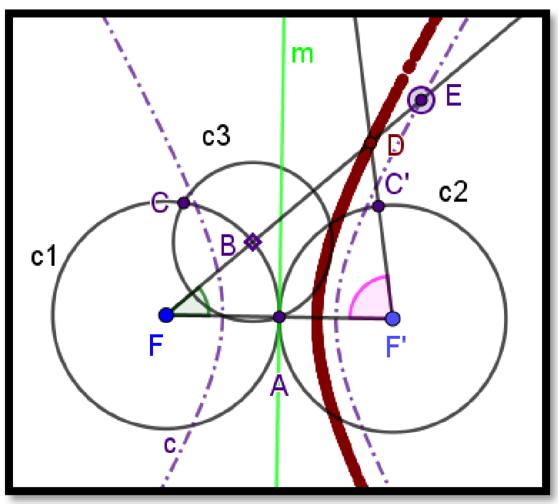


Figura 54. Comparación hipérbola de Pappus e hipérbola por método uno.

## 4.3 CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES A LA HIPÉRBOLA

En esta sección se presenta al lector tres (3) formas de construir la tangente a la Hipérbola. Tal como se establece en la introducción, se han incorporado explicaciones visuales y argumentales entre los pasos de la construcción.

En cada una de las subsecciones se presenta el respectivo nombre del archivo en GeoGebra que está asociado a la construcción.

Durante la exploración realizada en GeoGebra para la realización de esta sección se evidenció la presencia tanto de la circunferencia focal, como de las mediatrices, para determinar rectas tangentes a la hipérbola.

Se observó que, a diferencia del caso de la elipse, no siempre es posible garantizar la intersección para la versión equivalente de la Figura 27 que corresponde a la hipérbola, entre las mediatrices y las semirrectas que pasan por un punto en la circunferencia focal, y por lo tanto, hay restricciones a las tangentes que es posible construir.

### 4.3.1 Método 1

**Nombre de la construcción asociada:** M1 Tangente Hipérbola

**Dados los focos, la hipérbola y un punto $T$ de la hipérbola, trazar la tangente que pasa por $T$.**

Puede observarse en la sección 4.2.1 que la mediatriz del segmento cuyos extremos son el foco $F_1$, y un punto de la circunferencia focal respecto del foco $F_2$, es tangente a hipérbola. Este resultado es la base del método expuesto a continuación:

- Primero, se traza el segmento $\overline{F_1F_2}$ y se hallan las intersecciones entre la hipérbola y el segmento $\overline{F_1F_2}$, estas intersecciones son los vértices $V_1$ y $V_2$.
- Se traza la circunferencia $c$ con centro en $F_1$ (si el punto $T$ está en la rama del foco $F_2$) y radio $V_1V_2$

La circunferencia $c$ satisface la definición de circunferencia focal.

- Se traza la semirrecta $\overrightarrow{F_1T}$
- Sea $P$ la intersección de la semirrecta $\overrightarrow{F_1T}$ con la circunferencia $c$.
- Se traza el segmento $\overline{PF_2}$
- Se traza la mediatriz $m$ del segmento $\overline{PF_2}$.

La recta $m$ es la tangente buscada.

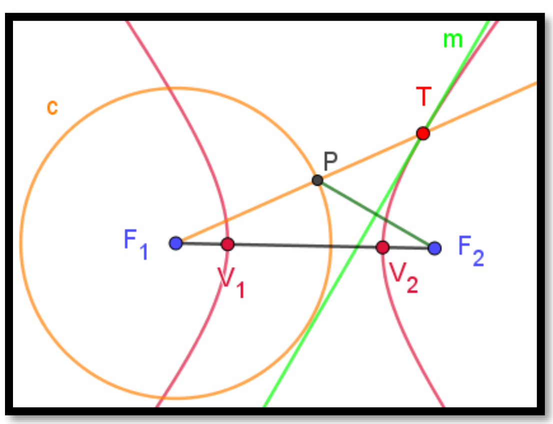


Figura 55. Tangente asociada al método uno.

### 4.3.2 Método 2

**Nombre de la construcción asociada:** M2 Tangente Hipérbola

**Dadas la hipérbola, los focos y una recta $l$ cualquiera, trazar la tangente que tiene la misma pendiente de la recta $l$.**

Se hace uso del Hecho Geométrico 8, que dice que dos rectas perpendiculares a un misma son paralelas entre sí.

- Dados los focos y la hipérbola, se tienen los vértices intersecando la hipérbola con el segmento limitado por los focos.
- Se traza la recta perpendicular $s$ a la recta dada $l$, por uno de los focos, digamos $F'$

Toda vez que se dispone de los vértices, puede trazarse la circunferencia focal.

- Trace la circunferencia focal $c1$ con centro en $F$.

Se considera solo el caso en el que $c1$ y la recta s se intersecan en dos puntos, ya que con estos puntos de intersección se definen segmentos a los que se puede encontrar la mediatriz. De esto modo no queda definida una sola tangente, sino dos.

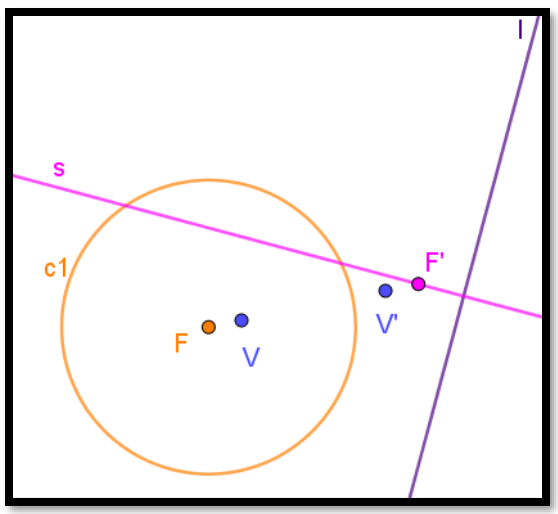


Figura 56. Circunferencia focal intersecada

- Sean $M$ y $N$ los puntos de intersección entre $c1$ y $l$
- Trace la mediatriz $m$ del segmento $\overline{F'M}$
- Trace la mediatriz $n$ del segmento $\overline{F'N}$

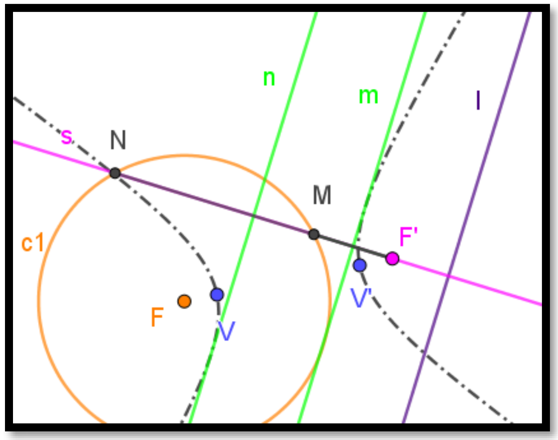


Figura 57. Construcción Tangente a la hipérbola. Método dos.

Se puede observar que las rectas $m$ y $n$ son tangentes a la hipérbola y paralelas a la recta $l$ dada.

### 4.3.3 Método 3

**Nombre de la construcción asociada:** M3 Tangente Hipérbola

**Dadas la hipérbola, los focos y un punto $P$ que no pertenece a la hipérbola. Trazar la tangente que pasa por el punto $P$.**

Una forma de resolver este ejercicio es usando la definición alternativa de circunferencia focal.

- Sean $F$ y $F'$ los focos de la hipérbola, $k = 2a$, y $P$ un punto exterior a ella.
- Tómese la circunferencia focal $c1$ con centro en $F'$

Como $P$ pertenece a la recta tangente que estamos buscando, el simétrico de $P$ respecto de la tangente debe estar a una distancia $PF$ de $P$.

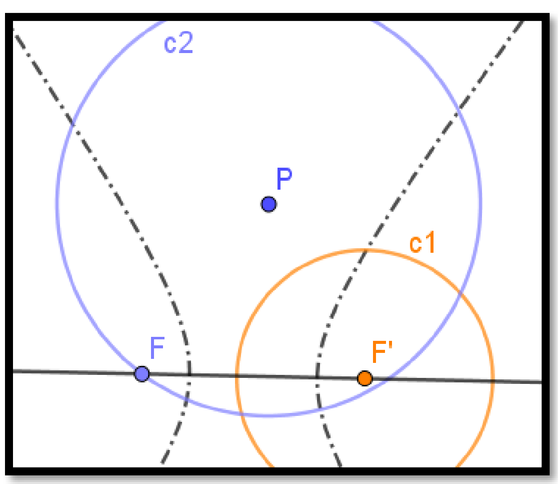


Figura 58. Circunferencias para encontrar puntos simétricos

- Se traza la circunferencia $c2$ con centro en $P$ y radio $PF$
- Sean $M$ y $N$ las intersecciones entre $c1$ y $c2$

Luego, por la definición alternativa de circunferencia focal, tanto $M$ como $N$ son simétricos al punto $F$ por las rectas tangentes.

- Trace la recta mediatriz $m$ del segmento $\overline{FM}$
- Trace la recta mediatriz $n$ del segmento $\overline{FN}$

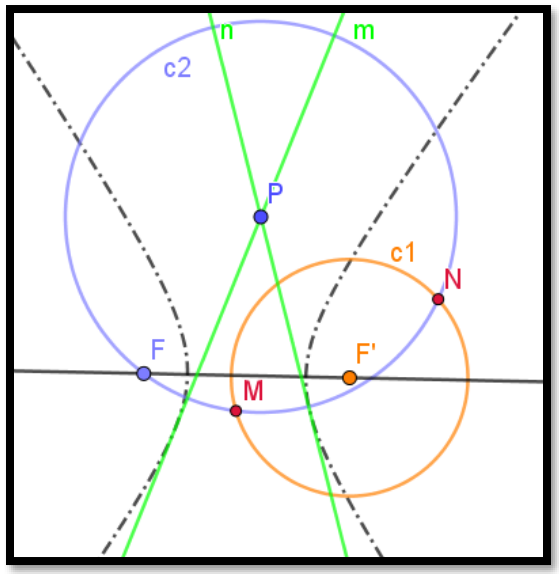


Figura 59. Rectas tangentes por un punto externo a la hipérbola.

Por el razonamiento hecho por medio del método uno, se concluye que las rectas $m$ y $n$ son las tangentes buscadas.

## CONCLUSIONES

Finalizado este trabajo, se presentan las siguientes conclusiones:

- Se reconoce que trabajar estos objetos de la geometría analítica acompañado de un software de geometría dinámica puede potencialmente suscitar entusiasmo por las construcciones, así como estimular el interés por seguir trabajando con estos objetos, para ver qué propiedades se descubren antes de leerlas en un libro de texto.

- Respecto al objetivo general del trabajo de grado, se considera que este documento puede complementar libros de texto de geometría analítica, ya que ofrece al lector alternativas concretas en lo que respecta a formas de construir las secciones cónicas y sus tangentes, así como ofrece construcciones ya listas para la exploración.

- Un hallazgo interesante fue la identificación de la extensa presencia de la mediatriz en las construcciones de las secciones cónicas, esto debido al vínculo que las mediatrices establecen entre distintos elementos de la cónica con el fin de satisfacer su definición. Su enorme importancia se vio confirmada en las construcciones realizadas en este documento al observarse que las tangentes a las cónicas resultaron ser las mediatrices de algún segmento clave de la respectiva cónica.

- Se reconoce a la circunferencia focal como un eje articulador de este documento, en particular en sus apartados correspondientes a las cónicas de doble foco, a saber, la elipse y la hipérbola.

- Las herramientas internas que GeoGebra tiene ya configuradas como el caso de la construcción de las cónicas dados ciertos objetos (por ejemplo, para el caso de la parábola: dada una recta, a la que asigna como directriz, y dado un punto, al que asigna como foco), se ven potenciadas por la posibilidad de superposición de curvas que también permite este software. Esta posibilidad favorece contrastes visuales. Tales contrastes fueron usados durante la elaboración de este documento para reconocer propiedades, y elaborar conjeturas cuando la construcción requería explicaciones que no eran inmediatamente evidentes.

- Vale la pena destacar la herramienta “Protocolo de construcción” que brinda GeoGebra, ¿Cómo podría hacerse uso este recurso en el aula de clase? Durante la realización de este documento, esta herramienta facilitó al autor procesos de conjeturación cuando los pasos de una construcción presentaban inconsistencias que exigían pasos o condiciones adicionales.

- Se observó durante la realización de este documento que existe una complejidad creciente entre las diferentes cónicas, que queda establecida al momento de plantearse la sucesión parábola – elipse – hipérbola, aumento que se debe a la mayor cantidad de elementos que posee cada cónica respecto a la anterior. Tomar en consideración esta característica puede ayudar a mejorar procesos de planeación alrededor del estudio de las secciones cónicas.

- Finalmente, se propone el reto análogo de estudiar métodos no analíticos para construir tangentes de otros lugares geométricos clásicos como las espirales, las lemniscatas y otras curvas polares.

## BIBLIOGRAFÍA


Alvarado, A. A., & Mora, J. A. M. (2018). Experiencia de la incorporación del aprendizaje colaborativo, doblado de papel y TICs en la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista de Ciencia y Tecnología*, *34*(2).

Avila, G. E. L., & Andrade, C. A. A. (2023). GeoGebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista científica arbitrada multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, *5*(5), 386-400.

Ayerbe-Toledano, J.  M. (2025).  El descubrimiento de las cónicas por Menecmo. https://doi.org/10.63427/mzyd9698. *Gaceta de la RSME*, 28(2), 325–339.

Barrera, J. M. (2020). Articulación entre la geometría analítica y la geometría sintética en la secundaria: un ejemplo desde la resolución de problemas. [Tesis de grado]. Universidad Pedagógica Nacional.

Castrillón, J. G. P., & Mazuelo, M. C. G. (2008). Secciones cónicas: Una mirada desde la derivación implícita.

Chavarriaga, O. d. & Torres, J. M. (2017). *Estudio de las secciones cónicas a través de la geometría dinámica.* http://hdl.handle.net/20.500.11912/3347.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Del Rio, J. (1999). *Lugares geométricos. Cónicas.* Editorial Síntesis.

De Sousa, R. T., Alves, F. R. V., & Souza, M. J. A. (2022). *La teoría de los conceptos figurativos y GeoGebra: el concepto y la visualización en geometría dinámica.* Matemáticas, Educación y Sociedad, 5(1), 1–20.

Fillol, E., & Hitt, F. (1997). *Geometría analítica*. Grupo editorial Iberoamérica.

Giraldo, D. (2017). Construcción de secciones cónicas con GeoGebra, para estudiantes de grado noveno en la I.E. Jorge Villamil Ortega (zona rural de Gigante, Huila). https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63052.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2), 109–130. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n2.602

Guerrero, B. N. & Aldana, L. F. (2023). Recurso Educativo Digital Abierto como mediador para el fortalecimiento del aprendizaje de la Geometría: el caso de las Cónicas. [Tesis de grado]. Universidad Pedagógica Nacional.

Heath, T. L. (Ed.). (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.

Kindle, J. (1987). *Teoría y problemas de Geometría analítica, plana y del espacio*. Mac Graw Hill editorial.

Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica.* Limusa.

Moise, E., & Downs, F. (1968). *Geometría Moderna.* Compañía Editorial Continental.

Oteyza, E. (1994). *Geometría analítica.* Prentice Hall Hispanoamericana S.A.

Poveda, A. F., Y Chávez, J. H. B. (2015). La noción de cónica en Apolonio y Descartes: Un análisis comparativo. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *15*(30), 33-48.

Ramirez, R. H. (2013). Las secciones cónicas en la escuela secundaria: un análisis matemático y didáctico.

# ANEXOS

## Anexo 1

Link a carpeta con construcciones en GeoGebra:
https://drive.google.com/drive/folders/13PlD9AWb-E38qIGNBy6vAlo6zwBCe-4M?usp=drive_link