Patricia Perry, Óscar Molina, Leonor Camargo,
Carmen Samper y Claudia Vargas

Aprender sobre argumento: ideas para profesores de matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Aprender sobre argumento: ideas para profesores de matemáticas

Catalogación en la fuente — Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional

Aprender sobre argumento: ideas para profesores de matemáticas. Patricia Perry, Óscar Molina, Leonor Camargo, Carmen Samper, Claudia Vargas. – Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2025.
218 páginas.

Incluye: Referencias bibliográficas.
ISBN: 978-628-7760-71-4 (impreso)
ISBN: 978-628-7760-72-1 (PDF)
ISBN: 978-628-7760-73-8 (Epub)

1. Enseñanza de las Matemáticas. 2. Lógica Simbólica y Matemática. 3. Razonamiento. 4. Currículo – Renovación. 5. Formación Profesional de Maestros. 6. Argumentación – Enseñanza – Aprendizaje. 7. Educación Investigaciones. 8. Argumentación – Tipos. 9. Didáctica. I. Perry, Patricia. II. Molina, Óscar. III. Camargo, Leonor. IV. Samper, Carmen. V. Vargas, Claudia.

510.7 21 ed.

Aprender sobre argumento: ideas para profesores de matemáticas

Patricia Perry
Óscar Molina
Leonor Camargo
Carmen Samper
Claudia Vargas

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Universidad Pedagógica Nacional

Calle 72 n.º 77-12
editorial.upn.edu.co
Teléfono: (57-601) 594 1894, ext. 190
Bogotá, Colombia

Helberth Augusto Choachí González
Rector

Paola Acosta Sierra
Vicerrectora de Gestión Universitaria

Víctor Espinosa Galán
Vicerrector Académico

Yaneth Romero Coca
Vicerrectora Administrativa y Financiera

Gina Paola Zambrano Ramírez
Secretaria General

Patricia Perry
Óscar Molina
Leonor Camargo
Carmen Samper
Claudia Vargas
© Universidad Pedagógica Nacional

ISBN: 978-628-7760-71-4 (impreso)
ISBN: 978-628-7760-72-1 (PDF)
ISBN: 978-628-7760-73-8 (Epub)

Primera edición, 2025

Preparación editorial
Universidad Pedagógica Nacional
Grupo Interno de Trabajo Editorial

Alba Lucía Bernal Cerquera
Coordinación

Tomás Collazos Garay
Edición

Yaneth Lizarazo
Corrección de estilo

Fredy Johan Espitia B.
Diagramación

Xpress Estudio Gráfico y Digital S. A. S.
Impresión

Bogotá, D. C., 2025

Hecho el depósito legal que ordena la Ley 44 de 1993 y el decreto reglamentario 460 de 1995.

Fecha de aprobación:
20-12-2023
Fechas de evaluación:
08-10-2023/19-12-2023

Esta publicación puede ser distribuida, copiada y exhibida por terceros si se mencionan los créditos correspondientes. No se puede obtener ningún beneficio comercial. No se pueden realizar obras derivadas.

Contenido

Presentación

En las clases de matemáticas, producir y explicitar argumentos es una actividad que probablemente ocurre de manera habitual. Así sucede en tres cursos de geometría sintética y uno de geometría analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional —UPN— (Bogotá, Colombia). El enfoque metodológico de esos cursos del programa (dirigido a la formación de profesores de matemáticas para la educación secundaria y media) ofrece a los estudiantes oportunidades de vivenciar ambientes de aprendizaje en los que el contenido matemático se despliega mediante la participación en actividades de exploración, conjeturación, demostración y comunicación —procesos estos atravesados por la argumentación—. Tal vivencia, se podría pensar, garantiza un bagaje relativo a la argumentación matemática con el que los estudiantes —en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, ubicado en el quinto semestre de la Licenciatura— pueden abordar, con algún grado de pericia, la actividad de diseñar una tarea escolar para promover la argumentación matemática y su aprendizaje. Pues bien, no es así. Una simple pero contundente evidencia de lo dicho nos la da la diversidad e imprecisión de significados que atribuyen al término "argumento" cuando se les pide explicitar qué es un argumento y para qué se produce, y la refuerza la no correspondencia entre los significados mencionados y los significados implícitos cuando se les pide identificar en su discurso expresiones que sean argumentos. He aquí algunos de los significados mencionados:

Argumento es...	**Para...**
reflexión	intentar probar veracidad de una afirmación
razón	defender una postura
conjunto de razones	sostener una conclusión
idea/posición fundamentada	defender o refutar una proposición
premisa	justificar, verificar o contradecir algo
afirmación deducida	hacer juicio sobre otro argumento
hecho/situación	explicar suceso
aportar opiniones	aportar opiniones
proceso de razonamiento	proceso de razonamiento
defender una postura	

Un examen rápido de esas expresiones permite ver que los significados atribuidos tienen un sentido razonable —producto, sin duda, de su experiencia como estudiantes de la Licenciatura—. Pero no tienen la precisión deseable correspondiente a un conocimiento especializado como el que requieren los futuros profesores para su labor de diseño e implementación de tareas para la educación básica secundaria y media que puedan promover el aprendizaje de la argumentación en sus clases. Esto está en consonancia con la idea de que, aunque la experiencia es imprescindible en y para el aprendizaje, no es suficiente: otro requisito es la tematización del contenido junto con la respectiva reflexión (Mason, 2015). Específicamente, nuestros cursos se han ocupado de propiciar experiencias para que los estudiantes que se preparan para ser profesores de matemáticas hayan participado en la práctica de argumentar.

En el curso Elementos de Geometría, en el que se introduce a los estudiantes en la cultura de argumentar basados en un sistema teórico local, se proponen tareas como la siguiente:

> Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se Sabe. Justifique su respuesta; para ello, nombre elementos teóricos que le permiten hacer cada afirmación incluida en su argumento, en caso de que la respuesta sea Sí o No. Si la respuesta es No se Sabe, indique, mediante dibujos, cuándo la respuesta es Sí y cuándo es No.

a) K es el punto medio del $\overline{MN}$. ¿Es MN[1] $= 2MK$?

b) $PR = PQ$. ¿Es P punto medio del $\overline{RQ}$?

c) T es el punto medio del $\overline{EF}$. ¿Se tiene que E está entre T y F?

Se espera que al responder Sí, los estudiantes vean que las condiciones dadas hacen que siempre se cumpla lo que la pregunta propone, ya que hay elementos teóricos que permiten deducir la propiedad esperada; al contestar No, vean que con las condiciones dadas, nunca se cumple lo que la pregunta propone ya que hay elementos teóricos que llevan a inferir lo contrario; al contestar No se Sabe, vean que con las condiciones dadas, no se cumple lo que la pregunta sugiere, pero si se añade otra condición sí se cumpliría lo que propone la pregunta. Al justificar su respuesta, los estudiantes deben dar razones para sustentar o negar lo que la pregunta sugiere.

En el curso Geometría Plana, en el que los estudiantes deben construir y explorar situaciones geométricas para descubrir propiedades entre figuras geométricas, formular conjeturas y luego validarlas, basándose en el sistema teórico conformado en clase —que sigue la propuesta de Birkhoff (1932)—, se proponen tareas como la siguiente:

Situación: Sean el $\overline{AB}$; C punto medio del $\overline{AB}$; m y n rectas tales que $m \perp \overline{AB}$, $A \in m$, $n \perp \overline{AB}$, $B \in n$. Sea D un punto de m. ¿Existen puntos en n para los cuales su distancia a C sea CD?

i) Realice con GeoGebra la construcción de la situación descrita. Haga un reporte de la construcción e indique qué valida cada paso de esta.

ii) Indique qué hace para explorar la situación con el fin de responder la pregunta.

iii) Escriba la conjetura.

iv) Valide la conjetura.

1 El símbolo MN refiere a la distancia entre los puntos M y N.

Se busca que los estudiantes provean razones que permiten asegurar la existencia de cada figura geométrica involucrada en la construcción, en el marco del sistema axiomático, y muestren el proceso deductivo que valida la conjetura.

El curso Geometría del Espacio complementa el proceso iniciado en el curso Geometría Plana, esta vez centrado en situaciones geométricas de la geometría tridimensional. Se proponen tareas como la siguiente:

> **Situación:** ¿Es posible construir un tetraedro de forma tal que todas sus caras sean triángulos isósceles y estos sean congruentes entre sí?
>
> Para lograr una respuesta, recorra el siguiente camino:
>
> i) Usando material concreto (hojas de papel, regla, lápiz, compás, tijeras, cinta pegante), haga una exploración que le permita determinar si es posible hacer la construcción. [Sugerencia: exploren triángulos obtusángulos, rectángulos y acutángulos].
>
> ii) Use Zometool para replicar el modelo construido en el ítem i.
>
> iii) Haga una observación del modelo construido en el ítem i o en el ítem ii y provea un procedimiento de construcción en GeoGebra, validando cada paso con el sistema teórico de la clase; si necesita un nuevo elemento del sistema, precise su enunciado sin demostración.
>
> iv) Basándose en las respuestas obtenidas, formule una conjetura y demuéstrela; si hace falta algún elemento teórico, explicite su enunciado sin demostración.

La pretensión de este tipo de tareas no es diferente a la estipulada antes para el curso Geometría Plana. No obstante, también apuntan a promover dos procesos esenciales de la actividad geométrica tridimensional. Uno, la visualización a partir del uso articulado de varios tipos de artefactos (objetos concretos manipulables —papel plegado y Zometool— y un *software* de geometría dinámica 3D) que favorecen la identificación de propiedades claves del objeto que se debe construir y, por ende, el establecimiento de ideas para proveer un procedimiento de construcción. Otro, la argumentación analógica provocada por la comparación entre objetos análogos de dos dominios, la geometría plana y la geometría tridimensional, que permite suponer que una relación del segundo dominio es verdadera gracias a una analogía hecha con objetos comparables del primer dominio (*e. g.*, hechos asociados a la mediatriz de un segmento en un plano, podrían ser extrapolados al plano mediador de un segmento en el espacio tridimensional).

No obstante haber propuesto tareas para promover la formulación y explicitación de argumentos, hasta 2020 no se había ofrecido un espacio para reflexionar acerca de tales prácticas ni para guiar de manera deliberada la conceptualización de objetos relevantes del discurso de la argumentación.

En el marco de dos investigaciones, una centrada en el conocimiento del profesor (DMA 518-20) y otra en la formación de profesores (DMA 587-22), entre 2020 y 2022, nuestro grupo de investigación —Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría— inició un proceso de renovación curricular del ya mencionado curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. La intención era hacer una propuesta curricular que permitiera tematizar no solo la argumentación y, principalmente, el argumento, sino también ofrecer pautas para apoyar la formulación de tareas escolares que promueven o favorecen la producción y explicitación de argumentos. Desde el punto de vista metodológico, el proceso de renovación curricular siguió de cerca el enfoque propuesto por Battista y Clements (2000), quienes consideran que es posible y conveniente tratar el diseño y desarrollo curricular en matemáticas como un esfuerzo científico que se aparta de la improvisación y la espontaneidad como condiciones preponderantes. En lo concerniente al contenido de la propuesta curricular, es decir, los objetos de estudio, nos inspiramos en la organización que propone el modelo de Pino-Fan y Godino (2015) para tener en cuenta elementos clave del conocimiento didáctico matemático del profesor.

El libro que tiene en sus manos está dirigido a un público amplio que incluye, en primer lugar, a formadores de profesores, por cuanto se les ofrece una propuesta curricular que podrían estudiar y utilizar con sus estudiantes; y, en segundo lugar, a profesores de matemáticas en formación (inicial o continuada) o en ejercicio, por cuanto pueden involucrarse en la resolución de las tareas con miras a especializar su conocimiento de los objetos sobre los que versa la propuesta. No pretende ser un reporte de investigación; más bien, un recurso textual que presenta sugerencias para apoyar el desarrollo del conocimiento sobre argumento —requisito para diseñar tareas que promueven la argumentación y la explicitación de argumentos—.

El libro está conformado por dos secciones. En la primera se presenta una vista panorámica del proceso de renovación curricular y se sientan las bases teóricas que guiaron tal proceso para el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En el capítulo 1, describimos el ejercicio de renovación curricular que dio origen a la propuesta. En el capítulo 2, presentamos fundamentos generales con los cuales identificar el conocimiento didáctico matemático del profesor sobre argumentación y argumento, y proponemos una conceptualización de aprendizaje coherente con dicho fundamento. En el capítulo 3, exponemos fundamentos específicos que enfocan nuestra conceptualización de argumento y términos relacionados, además de tarea de aprendizaje y tarea de argumentación. En la segunda sección se presenta una propuesta curricular conformada por cuatro conjuntos de tareas —que pueden usarse a modo de secuencia didáctica o de forma independiente—, a través de las cuales se traza una trayectoria de enseñanza enfocada en la tematización de argumento y tipos de argumento. En el capítulo 4, presentamos y describimos tres bloques de tareas que tienen como finalidad sondear conocimientos iniciales de futuros profesores de matemáticas sobre argumento y términos relacionados. El capítulo 5 está dedicado a dos bloques de tareas encaminadas a desarrollar conocimiento especializado sobre argumento, en las que se guía al lector a interactuar con un texto, haciendo pausas para resolver tareas que permiten reflexionar sobre el contenido de este y anticipar posibles respuestas que el texto comunica. El capítulo 6, con un formato similar al capítulo 5, se centra en tres bloques de tareas que promueven el desarrollo de conocimiento especializado sobre tres tipos de argumento: inductivo, deductivo y abductivo. En el capítulo 7, agrupamos dos bloques de tareas encaminadas a desarrollar conocimiento especializado sobre el constructo tarea de argumentación. Además de enunciar las tareas, estas se describen para que profesores de profesores en formación que quieran puedan implementarlas. Para terminar, incluimos unas consideraciones que sintetizan las ideas expuestas en el libro y hacen un llamado a profesores e investigadores para impulsar la argumentación en el aula y realizar ejercicios investigativos que ayuden a aclarar el tema.

Sección 1

Capítulo 1
Vista panorámica del proceso de renovación curricular

Desde el punto de vista metodológico, el proceso de renovación curricular del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría siguió de cerca el enfoque propuesto por Battista y Clements (2000), quienes conciben la producción (o el desarrollo) del currículo como un esfuerzo científico cuyo interés principal es la planificación informada de actividades de enseñanza-aprendizaje. En tal propuesta, los investigadores refieren al currículo pretendido y entienden por tal un plan detallado de enseñanza para guiar el aprendizaje de los estudiantes.

Para que la producción del currículo pretendido se constituya como un esfuerzo científico, Battista y Clements (2000) plantean una estrategia de seis pasos: 1) describir el problema que se busca resolver con el esfuerzo de producción curricular; 2) proveer una explicación teórica de cómo tal esfuerzo podría resolver el problema planteado (explicación en la que, por ejemplo, se debe establecer relación con el trabajo relevante de otros, justificar la decisión de incluir en el currículo un determinado tema); 3) describir los procedimientos para poner a prueba los materiales diseñados y para recoger información relativa a la implementación de estos; 4) documentar el diseño de actividades de enseñanza y la recolección de información; 5) analizar la información recogida y los registros realizados sobre el desarrollo del proceso; 6) difundir los hallazgos y el análisis mediante el cual se obtuvieron.

A continuación, a la luz de los pasos que conforman la estrategia metodológica que seguimos de cerca, presentamos una vista panorámica del proceso ocurrido para obtener la propuesta curricular que presentamos en este libro.

El problema que procuramos abordar o, mejor, comenzar a abordar con la renovación curricular lo formulamos así:

> En los cursos de geometría de los cuatro primeros semestres de la Licenciatura en Matemáticas, los estudiantes son expuestos a actividades de argumentar y demostrar en el marco de la resolución de tareas de diferente tipo. Sin embargo, no se les ofrece un espacio en el que puedan enfocar el conocimiento que van logrando en tales cursos para su futuro desempeño profesional, es decir, un espacio para tematizar dicho conocimiento y reflexionar sobre él. El espacio para tal reflexión y avance en el conocimiento sobre argumentación (y constructos relacionados como argumento, justificación, razón) está dispuesto en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría —EAG, de ahora en adelante— pero aún no se ha definido una propuesta del currículo pretendido.

Respecto al segundo paso de la estrategia metodológica, consideramos que la renovación que se perfila parcialmente en el contenido de este libro debería contribuir a resolver el problema enunciado. Diferentes estudios enfatizan en la necesidad de abordar aspectos de corte epistémico relacionados con la argumentación durante la formación de los estudiantes para profesor de matemáticas (Boero *et al.*, 2018; Conner, 2013; Conner *et al.*, 2014; Karunakaran *et al.*, 2014; Stylianides y Ball, 2008). Entre los asuntos que sugieren abordar destacamos los siguientes: una conceptualización especializada sobre argumentación y demostración, el uso del Modelo de Toulmin (2003/1958) para analizar procesos argumentativos en escolares, la tipificación de argumentos, desde los informales hasta los formales, etc. Los estudios muestran que abordar estos asuntos mejora de forma significativa la competencia de gestión de los profesores cuando procuran involucrar a sus estudiantes en procesos de argumentación.

Este escenario sugiere la pertinencia de esfuerzos curriculares para programas de formación que involucren como objeto de estudio diferentes elementos del conocimiento didáctico, en procura de la generación de ambientes que favorezcan la argumentación en contextos escolares. Por ello, consideramos atinado llevar a cabo un desarrollo curricular en el que, particularmente, se intente promover el aprendizaje de elementos del conocimiento didáctico de diversa índole (no solo los de carácter epistémico) para el diseño de tareas que propicien la argumentación y fomenten la explicitación de argumentos (de ahora en adelante, tareas de argumentación). Una consulta preliminar nos deja ver que es casi nulo el número de estudios que se enfocan en enseñar a diseñar tareas de argumentación en el marco de un programa de formación de profesores de matemáticas. Nuestro proyecto pretendía hacer aportes para llenar el vacío de nuestro programa de formación (indicado en el planteamiento del problema) y, por esa vía, desde la investigación, ofrecer información académica relativa a la caracterización de una posible trayectoria de enseñanza para favorecer el aprendizaje de elementos involucrados en el diseño de tareas de argumentación.

Como se infiere de la presentación del problema, de acuerdo con una breve descripción presentada en http://aprendizajeyensenanzageometria.upn.edu.co/cursos-de-licenciatura-en-matematicas/, el curso para el cual se realizó la renovación, Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría,

> se ha concebido como el lugar para la fundamentación conceptual y el desarrollo de conocimiento teórico-práctico en aspectos específicos de la didáctica de la geometría, relacionados especialmente con su enseñanza y su aprendizaje. Además de estudiar referentes didácticos acerca de algunos conceptos y procesos propios de la geometría escolar, se busca brindar a los estudiantes herramientas para que, en sus prácticas pedagógicas, de formación o profesionales, puedan proponer tareas de enseñanza y aprendizaje de la geometría, adaptadas a los contextos y realidades de la escuela.

Por otra parte, en el mismo texto, se señala que una de las fuentes de trabajo contemplada en la ruta de aprendizaje del curso es "el estudio de temas específicos del aprendizaje de la geometría con énfasis especial en procesos propios de la actividad en geometría" uno de los cuales es la argumentación. El curso está ubicado en el quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN; los estudiantes de este curso han aprobado los dos cursos de geometría que le son requisito (Elementos de Geometría y Geometría Plana) y que son implementados bajo un enfoque metodológico en el que las tareas matemáticas asignadas a los estudiantes, la interacción social en la clase y el uso de la geometría dinámica tienen un papel preponderante (Perry *et al.*, 2013).

Al iniciar la construcción de la propuesta curricular, nos preguntamos por el conocimiento didáctico matemático sobre tareas de argumentación que los estudiantes del curso EAG exhiben inicialmente —cuando se abre un espacio para que reflexionen sobre la experiencia académica relativa a abordar tareas de argumentación en geometría— y también por el que quisiéramos que exhibieran como producto de su participación en el curso. En busca de una primera respuesta diseñamos e implementamos tareas de formación profesional con el propósito, por una parte, de hacer ostensivo tal conocimiento y, por otra, propiciar un avance de los estudiantes en su conocimiento especializado, proveyéndoles insumos para el diseño de tareas de argumentación. Así mismo, comenzamos el proceso de evaluación de las tareas de formación profesional para determinar, por un lado, si su estructura era adecuada y, por otro, su impacto en la actividad de los estudiantes cuando las abordan, con miras a tener información para fundamentar ajustes en las siguientes versiones. Lo siguiente da cierto detalle sobre el proceso general mencionado.

Respecto al cuarto paso de la estrategia metodológica, cabe mencionar que, con el objetivo de tener unos referentes teóricos claros para el diseño de la propuesta de renovación curricular, llevamos a cabo cuatro actividades principales —que fueron sucediéndose de manera interactiva, y cada una aportaba información a las otras—. Una, determinamos e ilustramos tipos de problema geométrico y de tarea escolar que favorecen la producción de argumentos, actividad en la que jugó un papel clave la experiencia de nuestro equipo sobre el tema en cuestión, alcanzada en el marco de la enseñanza y la investigación relativas a los cursos de geometría de la Licenciatura. Dos, elaboramos de manera precisa la conceptualización de argumento y de tipos de argumento que fundamentaría la producción del diseño curricular, actividad en la que recurrimos a referentes teóricos presentes en la correspondiente literatura. Dado que hay diversidad de acercamientos y puntos de vista al respecto, no siempre claros, decidimos hacer nuestra propia conceptualización, basándonos en los referentes consultados. Tres, establecimos una relación entre tipos de tarea y tipos de argumento, con el propósito de explicitar indicadores o marcadores útiles para la formulación de tareas que pretenden promover o propiciar argumentos de un cierto tipo. Cuatro, planteamos una primera propuesta de elementos del conocimiento didáctico matemático para el diseño de tareas de argumentación en geometría que, desde nuestro punto de vista, deberían abordarse en el curso EAG; en esta actividad recurrimos, por una parte, al modelo del conocimiento didáctico matemático de Pino-Fan y Godino (2015) para organizar y presentar nuestra propuesta y, por otra, para complementarla, tuvimos como insumo empírico el diseño y la implementación que realizamos, a modo de prueba piloto, de tareas de formación profesional con dos estudiantes de la Licenciatura que nos apoyaban en calidad de monitoras de nuestra investigación.

Teniendo ya las precisiones logradas en el proceso que acabamos de describir de manera sucinta —que, aunque no necesariamente definitivas, nos permitieron comenzar a avanzar hacia nuestra meta— emprendimos la conformación de un espacio curricular en el curso EAG que suscitara reflexión sobre elementos de varias de las dimensiones del conocimiento didáctico matemático del profesor que son relevantes para el diseño de tareas de argumentación en geometría.

En ese sentido, diseñamos tareas de formación profesional y las implementamos en el curso, a modo de estudio piloto. Respecto al tercer paso de la estrategia metodológica, podemos decir que una vez recogidos los insumos para nuestro análisis (producciones de los estudiantes, transcripciones de las puestas en común y notas de campo), los evaluamos para responder la pregunta sobre la consistencia entre lo que pretendíamos lograr y lo que se logró, actividad esta que refiere al quinto paso de la estrategia metodológica. Tal evaluación nos señaló la necesidad de hacer cambios en las tareas y en sus descripciones, así como también, de revisar y ajustar la identificación de los elementos del conocimiento didáctico matemático del profesor relevantes para el diseño de tareas escolares que promuevan la argumentación en geometría.

Emprendimos entonces la reformulación de enunciados de las tareas, guiada ante todo por el interés de lograr que estas estuvieran encaminadas a afectar el conocimiento didáctico matemático de los estudiantes del curso EAG en lo concerniente al objeto argumento. Cuando tuvimos la segunda versión de las tareas procedimos a hacer las respectivas descripciones en las que damos información útil para el profesor que pretenda implementarlas. Para hacer esta descripción seguimos dos referentes: uno, parcialmente, el modelo que Gómez *et al.* (2018) denominan "descripción de elementos de una tarea"; dos, la propuesta metodológica de Knipping y Reid (2019), que usa el modelo de Toulmin, para esquematizar y tipificar argumentos, y la reconstrucción de interacciones entre individuos para hacer más evidente el argumento. Las tareas en su nueva versión se implementaron con otro grupo de estudiantes inscrito en el curso EAG, se hizo la correspondiente evaluación y de ahí surgió nueva información para hacer una tercera versión de las tareas.

Como resultado del proceso que relatamos someramente, en la actualidad tenemos una propuesta curricular que hace parte del currículo pretendido del curso EAG. En este libro exponemos parte de dicha propuesta y, así, abordamos el sexto paso de la estrategia metodológica de Battista y Clements (2000). La propuesta consta de cuatro partes, cada una compuesta de dos o más bloques de tareas. Cada parte tiene una intención didáctica clara y un tema bien delimitado. A grandes rasgos, en el cuadro 1 presentamos la trayectoria de enseñanza que estructura nuestra propuesta.

Cuadro 1. Trayectoria de enseñanza para tematizar el objeto argumento en el curso EAG

Parte 1 Reconocer concepciones	Los estudiantes utilizan su conocimiento sobre argumento, lo explicitan y reconocen lo que saben al respecto. Para ello se les pide solucionar en grupos pequeños un problema geométrico, y luego analizar sus intervenciones durante la solución del problema para identificar argumentos producidos; deben transcribir los argumentos, exponer por qué el texto transcrito es un argumento, y explicitar el propósito de cada argumento.
Parte 2 Construir conocimiento especializado sobre argumento	Los estudiantes avanzan en su conceptualización relativa a argumento como objeto de estudio (*i. e.*, avanzan en vocabulario especializado). Para ello se les pide leer cuidadosamente textos específicos, donde se encuentran los significados que proponemos, e interpretar dichos significados para responder preguntas formuladas respecto a los textos, reconociendo y explicitando asuntos sobre los que se requiere hacer claridad, etc.
Parte 3 Construir conocimiento especializado sobre tipos de argumento (inductivo, abductivo y deductivo)	Además, los estudiantes involucran su conocimiento informado (ya institucionalizado) sobre argumento (o tipos de argumentos) y reflexionan sobre este con miras a ampliarlo, profundizarlo o cuestionarlo. Para ello se les pide analizar, en grupos pequeños, algunos fragmentos de interacciones comunicativas de dos estudiantes que resuelven un problema de conjeturación.
Parte 4 Promover el diseño de tareas de argumentación	Los estudiantes se sensibilizan sobre la incidencia que la formulación de los enunciados de las tareas de aprendizaje tiene sobre la posible actividad matemática de quienes las abordan. Además, establecen criterios para la elaboración de enunciados de tareas que favorezcan la producción de argumentos no necesariamente deductivos.

Capítulo 2
Referentes conceptuales generales

Uno de los pasos que hacen parte del esfuerzo científico, al que invita la propuesta de Battista y Clements (2000), para llevar a cabo un proceso de innovación o renovación curricular es la fundamentación teórica de las decisiones que se toman. De las varias decisiones que debimos tomar en el diseño de la renovación curricular, las principales tienen que ver con la determinación de los contenidos (*i. e.*, elementos del conocimiento didáctico relativos al diseño de tareas de argumentación), su organización y manera de abordar su estudio, y con la conceptualización de los contenidos.

Conocimiento del profesor relativo a argumento y a tarea de argumentación

Para los asuntos ya mencionados, usamos como referente el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor, propuesto por Pino-Fan y Godino (2015) en el marco del enfoque ontosemiótico, el cual busca reunir y organizar elementos de varios modelos elaborados previamente sobre el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. El modelo CDM organiza el conocimiento en tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. En esta última dimensión, el modelo provee criterios de evaluación-valoración de la idoneidad didáctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje, como mecanismo para reflexionar sobre la práctica. Además, para cada faceta de la dimensión didáctica, el modelo precisa indicadores de las piezas de conocimiento del profesor que son imprescindibles para el ejercicio profesional docente.

La dimensión matemática hace referencia al conocimiento para resolver tareas y vincularlas con los objetos matemáticos que se pueden encontrar en un plan de estudio de matemáticas, ya sea a nivel escolar o universitario. Incluye dos subcategorías de conocimiento: el conocimiento común y el conocimiento ampliado. La primera subcategoría hace referencia al conocimiento de un determinado objeto matemático, que se considera suficiente para resolver tareas propuestas en el currículo de matemáticas y en los libros de texto de un determinado nivel educativo; es un conocimiento compartido por profesor y estudiantes (tiene una historia en y para la comunidad de un aula específica). La segunda subcategoría hace referencia al conocimiento de las nociones matemáticas que se han de estudiar más adelante dentro de un determinado currículo o en un nivel escolar más avanzado y que están relacionadas con las que se estudian en el presente. El conocimiento ampliado proporciona los fundamentos matemáticos requeridos para sugerir nuevos retos matemáticos en el aula, vincular un determinado objeto matemático con otras nociones matemáticas y orientar el estudio de nociones matemáticas con respecto a las ya estudiadas.

La dimensión didáctica hace referencia al conocimiento de los diversos factores que inciden en la planificación y la gestión de la enseñanza de un determinado contenido matemático. Incluye seis subcategorías que consideran sendas facetas implicadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (epistémica, cognitiva, afectiva, ecológica, mediacional e interaccional). Presentamos con algún detalle la faceta epistémica por su importancia para nuestra propuesta.

La faceta epistémica refiere al conocimiento especializado de la dimensión matemática, el cual complementa el conocimiento común y el conocimiento ampliado descritos anteriormente. En esta faceta se incluye el conocimiento matemático "moldeado" para la enseñanza de un determinado objeto matemático, conocimiento que hace posible la realización de acciones como movilizar diversas representaciones del objeto; resolver una determinada tarea que enfoca el objeto, utilizando distintos procedimientos; establecer una red conceptual cuyo nódulo principal sea el objeto; comprender y movilizar diversos significados parciales del objeto matemático; proporcionar varias justificaciones y argumentaciones para enunciados relativos al objeto; e identificar el conocimiento que se moviliza durante el proceso de resolución de una tarea matemática que se enfoca en el objeto.

Dada la preponderancia que pretendemos dar al objeto *argumento* en el aprendizaje de las matemáticas y dado que el modelo CDM está concebido para objetos matemáticos, aun cuando reconocemos que *argumento* no es propiamente un objeto matemático sino del campo de la lógica o del discurso, decidimos adaptar el mencionado modelo para darle a tal objeto un tratamiento similar al que le daríamos a un objeto matemático.

Consideramos que el modelo CDM, en general, y la faceta epistémica de la dimensión didáctica de dicho modelo, en particular, nos brindan lentes para identificar y caracterizar piezas del conocimiento didáctico matemático que interviene al reflexionar sobre tareas de argumentación en geometría. A continuación, concretamos elementos del modelo CDM para el tema que nos ocupa (véase cuadro 2). Pero, antes de hacerlo, una aclaración: los indicadores del CDM, propuestos por el enfoque ontosemiótico, conciernen al conocimiento del profesor en relación con un objeto matemático específico involucrado en una práctica matemática específica. En nuestro caso, nos interesa el conocimiento del profesor sobre los objetos argumento y tarea, para favorecer el diseño de tareas de argumentación.

Cuadro 2. Elementos de la dimensión didáctica del CDM, relativos al diseño de tareas de argumentación

Elementos	**Indicadores ajustados a tareas de argumentación y demostración**
Faceta epistémica Conocimiento especializado del contenido	*Sobre argumento y términos afines* • definición de argumento, argumento simple, argumento matemático, argumentación, argumentos de varios tipos • elementos de un argumento • representación de un argumento (Modelo de Toulmin) • procedimientos para realizar una demostración (indirecta —por contradicción, por casos—, directa, etc.) *Sobre tarea* • definición de tarea, tarea de aprendizaje, tarea de argumentación • elementos de una tarea • criterios para diseñar tareas de argumentación ¤ expectativas de aprendizaje de la tarea según la actividad argumentativa ¤ estructura del enunciado para suscitar un determinado tipo de argumento ¤ tipos de indicaciones para suscitar explicitación de argumentación y de argumento

Faceta mediacional Conocimiento sobre recursos para potenciar el aprendizaje	*Sobre entornos de geometría dinámica como favorecedores de la producción de argumentos en la actividad demostrativa* • permiten arrastre mantenido para hacer argumento abductivo, arrastre limitado o libre para hacer argumento inductivo • proveen necesidad epistémica de validar relaciones que son consecuencia de la imposición de condiciones en una construcción • hacen ostensivas relaciones de dependencia que son el insumo principal para la producción de conjeturas geométricas • favorecen la visualización de relaciones entre objetos relevantes en la elaboración de una demostración

Postura sobre el aprendizaje

En el marco de los campos de educación matemática y de educación del profesor de matemáticas, y en consonancia con algunos planteamientos de Sfard (2008), concebimos que aprender sobre diseño de tareas que propicien la argumentación en geometría es el proceso de llegar a participar en una comunidad de discurso enfocada en el tema específico mencionado. Esto implica poder comunicarse en el lenguaje de la respectiva comunidad y poder actuar según normas particulares que regulan las prácticas de dicha comunidad. En nuestra investigación dilucidamos rasgos característicos de dicho lenguaje y de las acciones involucradas en las prácticas de diseño de tareas de argumentación en geometría que nos permiten advertir lo que los profesores que participaron del proceso formativo aprendieron sobre los aspectos involucrados en el proceso de diseñar tareas de argumentación matemática.

Esta visión de aprendizaje encaja con la perspectiva pragmatista que tiene el enfoque ontosemiótico. En tal enfoque, el aprendizaje es el proceso mediante el cual hay un "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales de un objeto, que emergen de prácticas operativas y discursivas que involucran a dicho objeto (Godino, 2002). De manera análoga a como lo sugiere el enfoque participacionista, durante el proceso de aprendizaje, el aprendiz puede llegar a ser capaz de realizar de manera competente, y por su propia voluntad, actividades moldeadas de forma histórica conforme a las prácticas institucionales (Qvortrup y Wiberg, 2016).

Capítulo 3
Referentes conceptuales específicos

Presentamos nuestra conceptualización propia de argumento y términos relacionados, elaborada teniendo como base las realizadas por algunos investigadores (Durand-Guerrier *et al.*, 2012; Gómez *et al.*, 2018; Hernández y Parra, 2013; Knipping y Reid, 2019) . Así mismo, exponemos una tipología de argumentación y argumento, propósitos de los distintos tipos de argumento, una estrategia para reconstruir argumentos, nuestra postura sobre tarea de aprendizaje y de argumentación, y algunos tipos de tareas y su relación con tipos de argumentos.

Argumento y términos relacionados

Argumento es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La *aserción* se presenta de una de tres maneras: como una proposición (*i. e.*, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; como una oración en la que se plantea una postura; o como una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las *razones* se pueden presentar como oraciones (sean o no proposiciones) o como acciones. El conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de una aserción conforman la *justificación* de la aserción.

Argumento simple es un argumento conformado por tres elementos —dato, aserción, garantía— relacionados funcionalmente así: el dato da fundamento a la aserción, es evidencia que apoya la aserción; la garantía sustenta la relación del dato y la aserción, sostiene mediante un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. En caso de que falte la garantía, hablamos de argumento simple incompleto.

Estructura funcional de un argumento refiere a la disposición esquemática de los tres elementos básicos que conforman un argumento, en la que se indican las dos relaciones funcionales antes mencionadas.

Argumentación es un proceso discursivo y sociocultural en el que se infiere (se obtiene) información a partir de otra con la que se cuenta y que se considera verdadera o aceptable. En dicho proceso surgen argumentos. El proceso de argumentación está destinado a aumentar (o disminuir) la aceptabilidad de un punto de vista o a determinar la veracidad de una idea mediante la presentación de un conjunto de proposiciones o acciones destinadas a justificar (o refutar) el punto de vista o la idea. Tanto la información con la que se cuenta como la que se infiere en un determinado proceso de argumentación desempeñan un cierto papel en la estructura funcional del argumento que surge. Así, por ejemplo, se puede contar con información en calidad de dato e inferir tanto una regla general (que funciona como garantía) como una aserción.

Argumento global es un argumento conformado por una cadena de argumentos simples que exponen el sustento de la aserción principal.

Argumento nuclear hace parte de un argumento global; está conformado por una cadena de argumentos simples que expone el sustento de una aserción, la cual sirve de dato de otro argumento simple que hace parte del mismo argumento global.

Argumento matemático es un argumento (simple o global) en el que la aserción versa sobre un objeto matemático (*e. g.*, propiedades o relaciones entre propiedades) y las razones aducidas pueden referirse o no a condiciones de índole matemática.

Tipos de argumentación y tipología asociada de argumento

Tal como se expuso en la definición de argumento simple, los tres elementos básicos que lo componen tienen una relación funcional que es siempre la misma, independientemente de cuál haya sido el curso de la argumentación en la que aquel haya surgido. En cualquier caso, el dato fundamenta (le da base a) la aserción, y la garantía fundamenta el paso del dato a la aserción (dato y garantía son las razones de la aserción). Al tener en cuenta el curso de una argumentación específica, más precisamente, tener en cuenta cuál de los elementos del argumento simple producido se infiere, y cuál de los elementos se da por sentado, es posible reconocer tres situaciones argumentativas diferentes, que denominamos argumentación inductiva, argumentación abductiva y argumentación deductiva. Abusando del lenguaje podemos establecer una tipificación de argumento que atiende al tipo de argumentación en la que surge.

Argumentación inductiva y argumento inductivo

En la *argumentación inductiva* se cuenta con una información en calidad de dato —la cual se acepta como verdadera—, a partir de ella se infiere un patrón de generalidad que posibilita la inferencia de una aserción; en ambos casos se trata de una inferencia plausible o probable. Es rasgo clave de este tipo de argumentación el establecimiento de un patrón de generalidad a partir de la información que proporciona el dato. Para propiciar una argumentación inductiva, el enunciado de la tarea que se plantee a los estudiantes debe permitirles determinar un conjunto referencial y contar con una información sobre algunos elementos del referencial, en calidad de dato; la solicitud debe invitarlos a inferir información sobre otros elementos del referencial, no considerados en el dato, en relación con el atributo al que alude el dato. En síntesis, un argumento simple inductivo puede enunciarse así:

> Los elementos de A tienen el atributo p, algunos elementos de A tienen el atributo q, de otros elementos de A no se sabe si tienen el atributo q, por lo tanto, al menos otro elemento de A también tiene el atributo q puesto que los elementos de A tienen el atributo q.

El esquema[2] expuesto en la figura 1 representa no solo la estructura funcional del argumento inductivo caracterizado, sino que también marca los elementos que fueron inferidos en el curso de la argumentación en el que surgió el argumento.

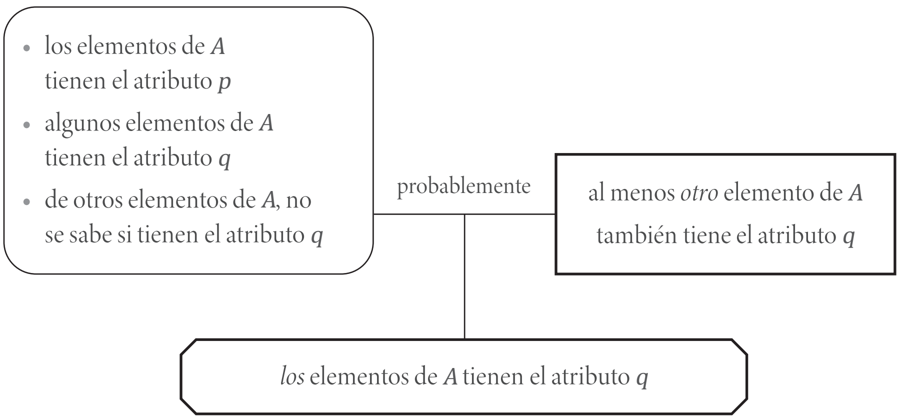


Figura 1. Esquema de argumento inductivo

2 Para presentar visualmente los argumentos hacemos una adaptación del esquema propuesto por Toulmin (2003/1958, p. 92) y nos valemos de las convenciones gráficas usadas en Knipping y Reid (2019). Así, el dato se presenta en marco rectangular con esquinas redondeadas, la aserción/conclusión en marco rectangular, la garantía en marco rectangular con esquinas anguladas. Además, la línea gruesa de un marco indica que tal elemento del argumento es el inferido, y la línea discontinua (guiones) de un marco indica que tal elemento no es explícito.

Argumentación abductiva y argumento abductivo

En la *argumentación abductiva*, desde el inicio, se cuenta con una aserción que se asume como verdadera o aceptable; el dato es el elemento que se infiere con la intención de aportar una razón que soporte la veracidad de la aserción, tomando de base una regla general que se crea o que se sabe es verdadera; el dato no se infiere de manera necesaria, es decir, se trata de una inferencia plausible o probable. Es rasgo clave de este tipo de argumentación el establecimiento de un dato o de un dato y una garantía que podrían sustentar la aserción. Para propiciar una argumentación abductiva, el enunciado de la tarea que se plantee a los estudiantes debe permitirles contar con información en calidad de aserción para la cual se busca una posible razón; la solicitud debe invitarlos a inferir información extraída, o bien del conocimiento de referencia, o bien creada, que posiblemente sustente la aserción. En síntesis, un argumento simple abductivo puede enunciarse así:

> Dado que si p entonces q, como se tiene q_i, se podría tener p_i.

Los esquemas expuestos en las figuras 2a y 2b representan la estructura funcional de sendos argumentos abductivos y representan dos detalles de la argumentación en la que surgieron los argumentos. En el primer argumento se conoce la regla general —hace parte del conocimiento de referencia[3]—. En el segundo argumento no se tiene la regla general; la garantía es una proposición creada cuyo valor de verdad no se ha determinado, pero el argumentador la asume como verdadera.

---

3 Desde un punto de vista lógico, tanto el dato como la garantía no son inferencias necesarias, pues el esquema correspondiente al argumento no es una tautología; sin embargo, para el argumentador no necesariamente hace parte de su conocimiento el hecho de que dicho esquema no es tautología; en consecuencia, puede darse el caso de que el argumentador considere tales inferencias como necesarias. También puede suceder el caso de que el dato que se infiere sí sea evidencia (empírica o teórica) que sustente la aserción (*i. e.*, que, al contar con el dato, se siga la aserción); sin embargo, por la misma razón anterior (la estructura lógica del argumento abductivo no es una tautología), tampoco en este caso el dato debería considerarse como una inferencia necesaria.

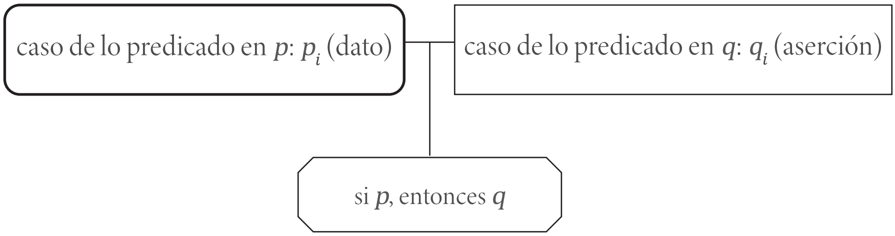


Figura 2a. Esquema de argumento abductivo teórico

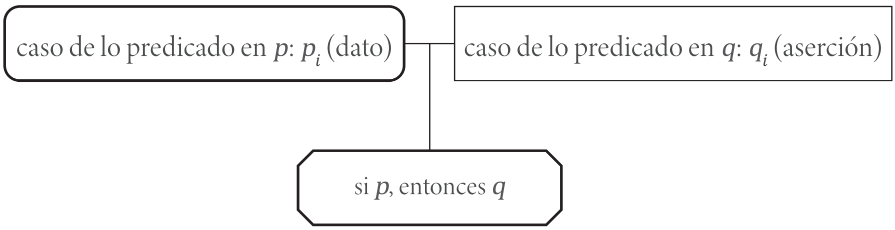


Figura 2b. Esquema de argumento abductivo creativo

Argumentación deductiva y argumento deductivo

En la *argumentación deductiva* desde el inicio se cuenta con dos tipos de información, ambas consideradas verdaderas: una regla general y un dato (caso particular de lo que versa el antecedente de la regla general). A partir de esta información se infiere de manera necesaria la aserción, que predica sobre el mismo caso al que alude el dato. Es rasgo clave de este tipo de argumentación el establecimiento de la aserción como consecuencia necesaria[4] (desde la lógica) del dato y una regla general. Para propiciar una argumentación deductiva, el enunciado de la tarea que se plantee a los estudiantes debe permitirles contar con una información en calidad de dato y una regla general que hace parte del conocimiento de referencia; la solicitud debe invitarlos a inferir nueva información (aserción). También se puede propiciar una

4 El argumentador asume la regla y el dato como verdaderos, e infiere la aserción como consecuencia necesaria de estos. El esquema asociado a este argumento es una tautología, razón por la cual la aserción es una consecuencia necesaria.

argumentación deductiva con un enunciado que les permita a los estudiantes contar con una información compuesta de dos proposiciones y una regla general que versa sobre el contenido de las dos proposiciones; la solicitud debe invitarlos a establecer cuál de las dos proposiciones cuenta como dato para que, junto con la regla general, se siga la otra necesariamente. En síntesis, un argumento simple deductivo puede enunciarse así:

> Se tiene p_i, por tanto, se debe concluir q_i, puesto que si p entonces q.

El esquema expuesto en la figura 3 representa la estructura funcional de un argumento deductivo y representa dos detalles de la argumentación en la que surge el argumento.

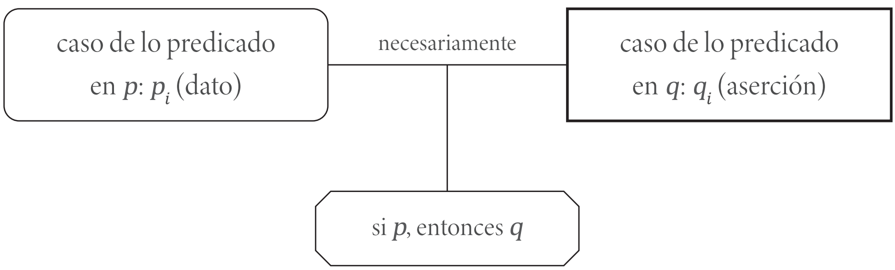


Figura 3. Esquema de argumento deductivo

Propósitos de los distintos tipos de argumento estudiados

Basados en Molina y Samper (2019), presentamos los propósitos a los que sirven los distintos tipos de argumento estudiados, teniendo en cuenta distintas clases de tareas.

Inductivo

En un proceso de exploración empírica, un argumento inductivo puede tener como propósito:

- Inferir propiedades geométricas probables de un objeto, a partir de unas condiciones dadas en el enunciado de una tarea. En este caso, la tarea solicita propiedades geométricas que son consecuencia de unas condiciones dadas.[5]
- Inferir un patrón de generalidad que, implícita o explícitamente, se usó para determinar propiedades geométricas probables como consecuencia de unas condiciones dadas. Se pretende que este patrón, una vez explicitado, redunde en una conjetura susceptible de convertirse en un teorema del sistema.

Abductivo

En un proceso de exploración empírica o teórica, un argumento abductivo puede tener como propósito:

- Inferir condiciones geométricas probables que se deberían tener, para que de ellas se puedan obtener propiedades establecidas en un problema. En este caso, el problema solicita condiciones suficientes para que de ellas se puedan inferir como consecuencia necesaria propiedades dadas en el enunciado.[6] En cierta forma, este tipo de argumento provee un plan para abordar un problema de este tipo, por cuanto provee objetos que han de ser construidos para verificar, de forma empírica, si de ellos se obtienen las propiedades impuestas en el enunciado.
- Inferir una garantía probable que, implícita o explícitamente, se usó para determinar condiciones geométricas probables de las cuales se siguen las propiedades dadas. Para este caso, esa garantía creada

5 El argumento surge al resolver lo que denominamos "problema de búsqueda de consecuente" y que precisamos en el último apartado de este capítulo.

6 El argumento surge al resolver lo que denominamos "problema de búsqueda de antecedente" y que precisamos en el último apartado de este capítulo.

durante el proceso (proposición condicional) no hace parte del sistema de conocimiento referencial.

En un proceso de demostración, un argumento abductivo puede tener como propósito:

- Inferir condiciones geométricas probables que se deberían tener, para que de ellas se pueda obtener una aserción ya establecida durante el proceso de elaboración de una demostración. Para este caso, la búsqueda no solo está guiada por la aserción con la que se cuenta, sino por las condiciones previas establecidas en el proceso; así las cosas, la premisa que se busca debe guardar relación con estas. Cabe aclarar que la aserción y la condición previa pueden ser, respectivamente, el consecuente y el antecedente del enunciado que se demuestra.

Deductivo

En términos generales, el propósito de un argumento deductivo es validar aserciones. Por ejemplo, en el proceso de construcción, validar un paso de un procedimiento de construcción; en el proceso de demostración, validar la aserción de cada paso que conforma la demostración de una aserción esperada.

Estrategia para reconstruir argumentos

Un ejercicio útil para promover el desarrollo del conocimiento especializado sobre argumento consiste en identificar y reconstruir argumentos que hayan surgido durante intercambios comunicacionales en el aula, en el marco de alguna actividad matemática, y de los cuales se tenga la correspondiente transcripción. Ese ejercicio dista mucho de ser natural o fácil para los futuros profesores. A continuación, se presenta en algún detalle el procedimiento que se constituye en una estrategia didáctica.

1. Se comienza delimitando el episodio de una transcripción[7] en el que se entrevé la ocurrencia de argumentación en torno a un asunto bien determinado; sigue con la lectura completa y cuidadosa de la transcripción, con miras a formarnos una idea de lo sucedido en la interacción en lo que concierne a la argumentación.

2. Se hace una contextualización, sustancial y sintética, que sirva como introducción del episodio extraído. La contextualización puede aludir, por ejemplo, a la situación o intención que motivó la interacción que constituye el episodio (solución de un problema, justificación de una idea o discusión en torno a algo), o a información específica que se tiene al comenzar el intercambio (una construcción, condiciones dadas en un problema, un resultado previo sobre el que se habla, etc.).

3. Se escribe un relato corto que hace ostensivo lo que se ha interpretado del episodio en relación con la idea panorámica de la argumentación presente en él (*e. g.*, presentación de ideas que sustentan posturas o presentación de acciones para inferir información). Tiene una doble finalidad: dar sentido como un todo a lo leído, seleccionando lo que se considera más relevante, y establecer un referente útil para dilucidar posibles diferencias de interpretación.

4. Se reinicia una lectura del episodio con miras, esta vez, a delimitar el fragmento de transcripción en el que se encuentra el primer argumento, esbozado o explícito. En las intervenciones donde se vislumbra la argumentación, se identifican con letras consecutivas las frases o expresiones. Para dicho fragmento se escribe una interpretación

7 La transcripción debe exponer, de la manera más fiel posible, las verbalizaciones y acciones no verbales ocurridas en la interacción. Nosotros, por ejemplo, usamos los paréntesis redondos "( )" principalmente para relatar acciones no verbales; los paréntesis angulares "[ ]" para hacer precisiones o elisiones cuando lo vemos relevante o conveniente (*e. g.*, indicar a qué refiere un deíctico, completar una expresión con la que se designa un objeto pero no se explicita de qué objeto se trata). Además, numeramos cada intervención en el intercambio comunicativo y dentro de una verbalización, asignamos letras a cada oración.

sintética de lo que sucede en él. Se arma un párrafo conformado por frases de la transcripción que son clave para reconstruir el argumento, indicando la letra que las identifica. Se pueden editar frases en aras de dejar el texto lo más limpio y claro posible. Parte de esa edición es usar la letra negrilla para destacar palabras que son indicadores de la presencia de una intención justificativa.

5. Se determinan los elementos básicos del argumento y se tipifica. El tipo de argumento depende de la dupla fragmento-síntesis. 1) Si en esta es evidente la intención de inferir, de manera empírica o teórica, algo de unas condiciones iniciales, se puede vislumbrar la presencia de un argumento inductivo o deductivo, respectivamente. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de los elementos en estos tipos de argumento se presentan enseguida. Para argumentos deductivos, las frases que le siguen a palabras como "por", "porque", "puesto que", "ya que", podrían ser garantía o dato; las expresiones que le siguen a palabras como "tenemos", "dado", "las condiciones son", podrían ser dato; las expresiones que le siguen a palabras como "luego", "por ende", "entonces", "se obtiene", podrían ser la aserción. Para los argumentos inductivos las expresiones "en estos casos pasa que...", "acá ocurre siempre que..." pueden indicar, respectivamente, tanto el dato como la aserción. 2) Si en la dupla se evidencia la intención de inferir un dato que probablemente dio lugar a un hecho que se tiene, se puede vislumbrar la presencia de un argumento abductivo. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de lo que se infiere (dato) en este tipo de argumento son: "debería ser", "es necesario tener que", "siempre que".

6. Se explicitan los elementos básicos del argumento y se rescriben según la interpretación del analista (en caso de necesidad), siempre referenciando la(s) frase(s) que se usa(n) (para ello sirve la letra con la que se etiqueta la frase). En este punto vale la pena precisar que son usuales los fragmentos en los que no todos los elementos de un argumento se han verbalizado. En este caso, se sugiere acudir a

los insumos que permitan inferir el elemento no explícito. La contextualización (paso 2), puede ser uno de tales insumos; por su contenido, puede proveer los datos o la aserción de un argumento. Cuando una garantía no la enuncia quien argumenta, esta usualmente se establece a partir de una mera interpretación; el dato y la aserción identificados se usan para conformar una proposición condicional que se expone como "garantía implícita". Hay una situación especial al respecto de la identificación de la garantía de un argumento inductivo. Esta siempre es un patrón de generalización que se construye a partir del dato (instancias particulares) con el que cuenta quien argumenta y de la propiedad invariante que establece para ese dato. Identificado el patrón, este se enuncia mediante una proposición condicional a la que se le otorga el carácter de general. Cuando la garantía es explícita puede ser enunciada de varias formas, todas ellas equivalentes desde un punto de vista semántico. Así las cosas, se puede enunciar de forma categórica (*e. g.*, el punto de intersección de las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales están también en la mediatriz del tercer segmento que se puede determinar con dichos tres puntos), no categórica (*e. g.*, si están dados un triángulo y las mediatrices de dos de sus lados, entonces la intersección de tales mediatrices pertenece a la mediatriz del tercer lado), con nombres específicos, pero que aluden a objetos genéricos (*e. g.*, Si m y n son las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del ΔABC y la intersección de las rectas m y n es el punto T, entonces T pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AC}$) o con el nombre del teorema o de la definición correspondiente (*e. g.*, Definición de recta perpendicular).

7. Con los elementos del argumento identificados, se hace el respectivo esquema para hacer ostensiva la estructura funcional del argumento y también para indicar el tipo de argumento. Este paso es opcional, pero puede ser beneficioso hacerlo en la medida que ayuda a ver cómo opera la estructura funcional.

Tareas de aprendizaje y argumentación

Entendemos *tarea de aprendizaje* como una acción (o acciones) que el profesor pide a los alumnos que realicen, con la intención de proporcionarles una oportunidad para alcanzar la expectativa de aprendizaje que ha establecido (Gómez *et al.*, 2018). El enunciado de una tarea de aprendizaje (enunciado de la tarea, para abreviar) proporciona información sobre lo que se pide hacer (*solicitud*). También expone información que ubica la acción solicitada dentro de un conocimiento y práctica específica (*situación*), en este caso las matemáticas; eventualmente, expone sugerencias de apoyo o condiciones para limitar la ejecución de la acción (*indicaciones*). La *expectativa de aprendizaje* no es explícita para los alumnos; un experto debería ser capaz de desentrañarla a partir del enunciado. Si la expectativa de aprendizaje de una tarea es la producción y expresión de argumentos, se denomina *tarea de argumentación*. En este caso, el enunciado debe contribuir a la generación de un escenario en el que se sienta la necesidad de tomar posición o exponer ideas que deben ser apoyadas. A continuación, presentamos seis elementos que hemos considerado a la hora de diseñar los enunciados de las tareas de argumentación, basándonos en referencias bibliográficas que, de forma implícita o explícita, se han propuesto para ese mismo fin (*e. g.*, Ayalon y Nama, 2023; Lin *et al.*, 2012):

- Lo que se plantea en la situación y/o solicitud tiene el potencial de generar duda, curiosidad, incertidumbre o controversia, que al resolverse lleva a exponer ideas o posturas.
- La situación presenta información relacionada con una definición, un teorema y/o un hecho que puede utilizarse en una argumentación.
- La petición solicita (implícita o explícitamente) la presentación de razones que sirvan para apoyar o refutar la veracidad de una proposición, o la aceptabilidad de una postura planteada o de una acción emprendida (expresión de argumentos).

- Las indicaciones son una guía que apoya o limita la ejecución de acciones para fijar posiciones o formular nuevas ideas, y para expresar argumentos.
- La expectativa de aprendizaje a corto plazo es que los estudiantes se impliquen en la argumentación y formulen y enuncien argumentos relativos a una proposición matemática específica, de acuerdo con las normas establecidas en el aula.
- Los elementos del argumento principal (datos, aserción, garantía) que pueden surgir, al realizar la tarea, se indican, sugieren o solicitan de manera explícita en el enunciado de la tarea.

Algunos tipos de tareas y su relación con tipos de argumentos

La estructura del enunciado de una tarea de argumentación puede favorecer principalmente distintos tipos de argumentos. Esto se debe a que, en el proceso de argumentación favorecido por el enunciado, tanto la información disponible como la información que se infiere desempeñan un cierto papel en la estructura funcional del argumento principal que emerge. Asignamos el adjetivo "principal" al argumento que expresa lo que da lugar a todos los demás argumentos y que es una respuesta a la petición.

En el cuadro 3, resumimos el aprendizaje esperado en términos del tipo de argumento que se promueve y la estructura correspondiente del enunciado de tarea que lo promueve. Luego, presentamos un ejemplo de enunciado, que incluye la situación y la petición principal; las demás peticiones, mencionadas en el apartado anterior, no se recogen en el enunciado. Además, incluimos una narración de la producción de grupos de profesores en formación que ilustra los resultados presentados en el cuadro 3.

Cuadro 3. Tipo de declaración según el tipo de argumento principal que se pretende promover

Tipo de argumento	Tipo de enunciado	Estructura del enunciado	Proceso de resolución	Estructura del argumento
Inductivo	Búsqueda de consecuente	*Situación*: proporciona o insinúa el conjunto de referencia de figuras geométricas *Solicitud*: pregunta por otro atributo que puedan tener los objetos del conjunto	Representación de los objetos del conjunto de referencia Exploración de casos para determinar otro atributo de esos objetos	Para algunos objetos del conjunto se cumple otro atributo (dato); por lo tanto, otro(s) objeto(s) del conjunto también tiene(n) ese atributo (aserción) La conjetura establecida sería la garantía
Abductivo	Búsqueda de antecedente	*Situación*: proporciona o insinúa un hecho *Solicitud*: pregunta sobre las condiciones que podrían sustentar el hecho	Exploración de propiedades que pueden conducir al hecho	La proposición proporcionada o implícita es un hecho (aserción), ya que las condiciones encontradas (datos) existen La conjetura establecida sería la garantía

El siguiente enunciado de tarea ejemplifica el tipo de problema denominado *búsqueda de consecuente*:

> Consideremos tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la recta perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio y sea n la recta perpendicular a $\overline{BC}$ por su punto medio. Sea T el punto de intersección de m y n. ¿Qué característica geométrica tiene el punto T cuando el punto B se desplaza?

En este enunciado se proporciona un conjunto de referencia que caracteriza la *situación* (lo subrayado); la pregunta *solicita* encontrar un atributo para T. Como solución, un grupo de profesores en formación representaron la situación en un SGD (Sistema de Geometría Dinámica) y la exploraron empíricamente desplazando el punto B por la pantalla; utilizaron la herramienta "Trace" del SGD para T. Esta acción les permitió ver que cuando B se mueve, la trayectoria de T es una línea recta; expusieron el atributo de T: para cualquier punto B en ese plano la intersección (T) de las rectas m y n pertenecerá siempre a la mediatriz del $\overline{AC}$ (véase figura 4).

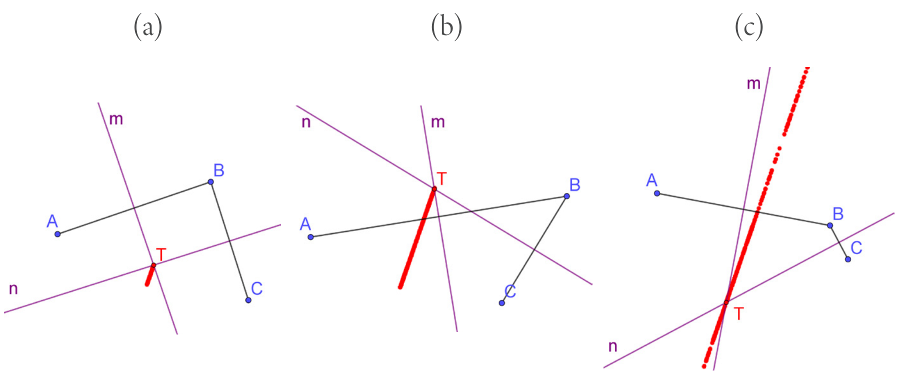


Figura 4. Representación gráfica que ilustra la exploración mediante la cual se origina un argumento inductivo

Por último, expusieron la siguiente verbalización, que reporta sobre un argumento inductivo, en respuesta a la petición de comunicar lo que utilizaban para estar seguros del invariante establecido: "para algunos puntos B del plano, los puntos correspondientes T forman parte de un cierto subconjunto de la recta que parece ser la mediatriz (datos). Por lo tanto, podemos decir que para los demás puntos B [del plano], el punto T está siempre sobre esa recta, la mediatriz [del $\overline{AC}$ (aserción)". Implícitamente, la garantía del argumento es la conjetura de la que informan: Sean A, B y C puntos no colineales, m la mediatriz del $\overline{AB}$ y n la mediatriz de $\overline{AC}$. Sea T el punto de intersección de m y n. Entonces T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$.

El siguiente enunciado de tarea ejemplifica el tipo de problema denominado *búsqueda de antecedente*:

> $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes. ¿Existe un punto E tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?

En este caso, la *situación* corresponde a los dos triángulos con la propiedad mencionada; la *petición* es encontrar datos para que este hecho sea cierto. Un grupo de profesores en formación reportó que inicialmente advirtieron que necesitaban lados correspondientes congruentes para obtener triángulos congruentes. Por lo tanto, procedieron a determinar la condición de E para que el $\overline{AE}$ y el $\overline{CE}$ fueran congruentes, lo mismo que el $\overline{BE}$ y el $\overline{DE}$. Dijeron que su estrategia consistió en tomar un punto cualquiera E, activar su traza y moverlo con el fin de mantener la primera congruencia; esta traza les permitió reconocer que E debe pertenecer a la mediatriz del $\overline{AC}$ (véase figura 5); asimismo, determinaron que E debe ser también un punto de la mediatriz del $\overline{BD}$. Concluyeron que la congruencia de los triángulos se alcanza cuando E es la intersección de las mediatrices (véase figura 6). Como argumento expusieron lo siguiente "ΔABE y ΔCDE son congruentes (aserción) porque E es la intersección de las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (dato inferido)".

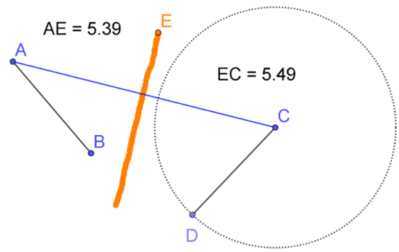


Figura 5. Exploración para determinar la posición de E cuando el $\overline{AE}$ y el $\overline{CE}$ son congruentes

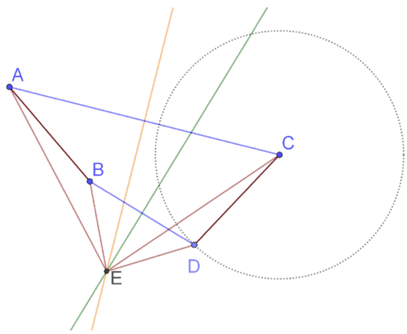


Figura 6. Representación de la solución del problema de búsqueda de antecedente

Sección 2

En esta sección del libro se concretan, en cuatro capítulos (4 a 7), las cuatro partes de la propuesta curricular con las que trazamos una trayectoria para un proceso de aprendizaje enfocado en el argumento como objeto de estudio. Cada parte consta de un conjunto de tareas que pueden desarrollarse de manera independiente o en secuencia. Nuestra propuesta curricular puede ser implementada en un curso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en el que se quiere que el objeto argumento sea considerado objeto de estudio desde el punto de vista del objeto y de su enseñanza.

Cada parte se presenta en un capítulo separado que incluye los bloques de tareas correspondientes y su descripción. Los bloques de tareas incluidos en el capítulo 4 tienen que ver con la identificación de argumentos que surgen durante la resolución de un problema geométrico propuesto y con la explicitación de la conceptualización sobre argumento del resolutor. Los bloques de tareas incluidos en los capítulos 5 a 7 constan de un texto informativo intercalado con enunciados de tareas. Con ello, pretendemos involucrar a los lectores en una lectura interactiva del texto en la que, a medida que se avanza, se responden preguntas que pretenden llamar la atención sobre asuntos específicos mencionados en el texto. Hemos destacado los enunciados de esas tareas con un tipo de letra diferente, para distinguirlas de lo expuesto en el texto que se estudia.

En cada capítulo, cada bloque de tareas está acompañado de una descripción con la que pretendemos explicitar detalles sobre cada una de las tareas y sobre su implementación. Específicamente, en la descripción abordamos los siguientes aspectos:

- Actividad que demanda la tarea. Establecimos cuatro tipos de actividad: resolver un problema geométrico y responder solicitudes que promueven la argumentación, observar su propia práctica argumentativa, observar la práctica argumentativa de otro, explicitar elementos de su conocimiento relativo a argumento y sobre tarea de argumentación como objetos de estudio.
- Propósito didáctico de la tarea.
- Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de la tarea. Se trata del conocimiento didáctico o matemático que se debería traer a colación cuando se resuelve la tarea. De alguna manera, es un conocimiento que debería tener el resolutor para resolver la tarea —los requisitos, según Gómez *et al.* (2018)—.
- Conocimiento didáctico matemático que la resolución de la tarea pretende favorecer. Refiere al conocimiento didáctico o matemático al que se apunta con la resolución de la tarea —hace parte de las metas, según Gómez *et al.* (2018)—.
- Previsiones sobre las producciones de los estudiantes en lo concerniente al argumento como tema de estudio. Estas previsiones refieren a las respuestas que consideramos posibles y a las dificultades a las que podrían enfrentarse —previsiones que hacemos gracias a que tenemos una amplia experiencia con estudiantes de cursos de geometría en los que hemos sido profesores—.
- Previsiones sobre la manera de abordar el conocimiento didáctico matemático que se quiere favorecer con las tareas, teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes. Estas previsiones refieren a las reacciones y respuestas que consideramos deseables como parte de la gestión de las tareas por parte del profesor.
- Notas relativas —*e. g.*, a la temporalidad y el agrupamiento— que se explicitan en caso de creerlo necesario.

En particular, en el capítulo 4 se presenta la parte 1 de la trayectoria, que está conformada por tres bloques de tareas con las que se busca sondear el conocimiento de los estudiantes sobre el objeto *argumento* y hacerlo evidente para ellos en calidad de referencia contra la cual examinar la evolución de su propio conocimiento.

Los dos bloques de tareas que conforman la parte 2 de la trayectoria se presentan en el capítulo 5. Son insumos que pueden apoyar el desarrollo de un conocimiento especializado sobre argumento. En el bloque 4 se aborda la definición de argumento que se usará en el curso, se precisa la relación funcional entre los tres elementos básicos de un argumento, se expone la estructura del modelo que Toulmin propone para reconstruir argumentos, y se precisan términos clave relacionados con el objeto argumento. En el bloque 5 se incursiona en el análisis de intercambios ocurridos en el aula, de los que se tiene su transcripción, con el propósito de identificar y reconstruir argumentos esbozados. Tal ejercicio de análisis no solo apoya la construcción de significado de los términos definidos en el bloque 4 mediante su uso, sino que también sugiere una estrategia útil para reconstruir argumentos producidos en intercambios comunicacionales en el aula.

Los bloques de tareas 6, 7 y 8 incluidos en el capítulo 6, que conforman la parte 3 de la trayectoria de enseñanza, son insumos que pueden apoyar respectivamente el desarrollo de un conocimiento especializado sobre argumento de tipo inductivo, deductivo y abductivo. La tipología de argumento mencionada, la induce un aspecto caracterizador de la argumentación en la que surge el argumento, a saber: cuál es el elemento básico que se infiere en el proceso respectivo (*i. e.*, la garantía y la aserción; la aserción; el dato y la garantía o solo la garantía). Abusando del lenguaje, hemos decidido asumir que un argumento simple, surgido en uno de esos tipos de argumentación, se nombra con el correspondiente adjetivo. Adicionalmente, en los tres bloques de tareas se ilustra la reconstrucción de argumentos de los tipos mencionados. En el bloque 7, el dedicado al argumento deductivo, se abordan elementos de la lógica que son clave para la actividad argumentativa.

Por último, en el capítulo 7 incluimos dos bloques de tareas. El bloque 9 pretende impulsar un conocimiento especializado del término tarea, desde el punto de vista didáctico, y proponer una perspectiva sobre tarea de argumentación. En el bloque 10, sugerimos el estudio de elementos clave para identificar si una tarea promueve la argumentación.

Capítulo 4
Tareas para sondear conocimiento inicial

Los tres bloques de tareas que se incluyen en este capítulo establecen el punto de partida de una propuesta curricular para apoyar el desarrollo de un conocimiento profesional para diseñar tareas de argumentación para el aula de matemáticas. Específicamente, se busca sondear el conocimiento de los estudiantes sobre el objeto *argumento* y hacerlo evidente para ellos como referencia contra la cual examinar la evolución de su propio conocimiento. En el bloque 1, se pide resolver en grupo un problema geométrico que, por ser abierto de conjeturación,[8] tiene la capacidad de propiciar actividad argumentativa durante su resolución en un SGD; además, se promueve el examen retrospectivo de la interacción comunicacional ocurrida durante la resolución del problema, con miras a organizar la experiencia vivida en términos de episodios o eventos en los que hubiera podido haber argumentación. En el bloque 2, se pide identificar y exponer argumentos que hubieran surgido durante la interacción comunicacional al resolver el problema, y para ello se sugiere usar tanto la grabación realizada durante la resolución como el relato

8 Un *problema abierto* es un problema cuyo enunciado no revela la solución o respuesta. Un problema que pide, explícitamente, establecer una conjetura (*i. e.*, una proposición condicional $p \rightarrow q$) que exprese relación de dependencia entre elementos o propiedades de las figuras (o configuraciones) involucradas en la situación se denomina *problema abierto de conjeturación* (Molina y Samper, 2019).

elaborado en el bloque 1; además, se pide decir por qué aquello que se transcribe como argumento lo es, y para qué se formuló. En el bloque 3, se pide explicitar el significado personal de argumento y de algunos términos estrechamente relacionados con el primero.

Bloque 1: Ponerse a tono

Antes de comenzar a trabajar, lean los enunciados de las tareas puestas en los numerales 1 y 2, para tener una idea clara y completa de lo que se les pide hacer. El profesor le indicará a cada grupo en qué opción debe enfocar su trabajo.

1. Resuelvan el siguiente problema en GeoGebra, trabajando en grupos de dos o tres estudiantes. Graben en audio y video lo que hacen y dicen durante el desarrollo de esta tarea. Tal grabación les será útil cuando, en el segundo bloque de tareas, se les pida hacer algún análisis de la interacción que tuvo lugar entre ustedes al resolver el problema.

   Opción A. Dados tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio. Sea T el punto de intersección de m y n. ¿Qué atributo geométrico tiene el punto T al mover el punto B?

   Escriban la conjetura que soluciona el problema y los pasos clave de la demostración de su conjetura.

   Opción B. Dado un ΔABC, ¿existe un punto $D \in \overline{BC}$ tal que $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$? Si existe, ¿qué atributo geométrico tiene?

   Escriban la conjetura que soluciona el problema y los pasos clave de la demostración de su conjetura.

2. Para cada momento de la solución del problema (procedimiento de construcción de la situación, exploración de la situación, formulación de conjetura y formulación del plan de demostración),

relaten por escrito y con detalle la interacción ocurrida en los sucesos más relevantes (planteamiento de objeción, toma de decisión, exposición de idea o propuesta, resolución de diferencias, defensa de idea, etc.).

Nota: el siguiente es un relato de una interacción en un contexto de la vida real que puede ilustrar lo que se pide en el numeral 2.

> El equipo del noticiero de la mañana vino ayer y entrevistó a mis vecinos sobre la construcción del Transmilenio por la Avenida 68. Marta dijo que esa construcción no es conveniente para el barrio. Afirmó que dicha construcción implica un mayor costo en el impuesto de valorización. En cambio, Pedro, el vecino de al lado, está feliz con esa construcción; él dice que el tiempo de trayecto a su trabajo será mucho más corto y que esa ventaja la podrían tener varios vecinos.

Descripción de las tareas del bloque 1

Actividad que demandan las tareas: principalmente, resolver un problema geométrico favorable para la argumentación. De las dos opciones que se presentan, A y B, cada grupo de estudiantes aborda una sola de ellas; el profesor procura que haya producciones sobre ambas opciones. En realidad, las dos opciones se diferencian solo en el problema geométrico por resolver; el de la opción B propicia el surgimiento de argumentos abductivos, además de argumentos inductivos y deductivos; el de la opción A propicia el surgimiento de argumentos inductivos y deductivos. Las instrucciones y solicitudes que acompañan el enunciado del problema tienen como finalidad ayudar a organizar y apoyar el trabajo de los estudiantes. Así, por ejemplo, la grabación de audio y video ofrece un recurso útil para la reconstrucción de sucesos relevantes ocurridos en la interacción; el relato que se pide hacer en el numeral 2 es también un recurso útil para dar sentido a lo sucedido en la interacción y, en particular, su elaboración sirve como mecanismo para comenzar a vislumbrar asuntos alrededor de los cuales pudo haber argumentación. Por su parte, los momentos por los que pasa la resolución de un problema y los sucesos relevantes en una interacción discursiva —categorías mencionadas en el enunciado del numeral 2— son elementos con los que pretendemos ayudarles a los estudiantes a organizar sus relatos.

Propósito didáctico de las tareas: propiciar (generar condiciones que posibilitan) una experiencia de actividad argumentativa en el marco de la resolución de un problema de conjeturación, que aporte el contenido y el contexto para una reflexión sobre el propio conocimiento del objeto argumento. Adicionalmente, promover el empleo de un recurso (la escritura de relatos) para la organización de la experiencia vivida en términos de sucesos relevantes respecto a la argumentación.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: conocimiento geométrico involucrado en la resolución del problema; conocimiento matemático común para resolver problemas abiertos de conjeturación; en particular, conocimiento conformado por argumentos producidos durante la solución del problema, y los significados personales de los objetos argumento, justificación, demostración, conjetura, teorema y proposición válida, que se manifiestan en el uso de los respectivos términos.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: ninguno en especial.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: la descripción, más que centrarse en lo que podrían hacer o relatar los estudiantes, se concentra en identificar y detallar sucesos relevantes en los que podrían surgir argumentos y en explicitar dichos argumentos.

Opción A

Momento de construcción de la situación que plantea el problema. La determinación del procedimiento de construcción y la validación de cada paso de tal procedimiento son dos sucesos relevantes. La determinación del procedimiento está afectada por la decisión de seguir una a una las condiciones que presenta el enunciado del problema o la de encapsular dos condiciones en una. Reconocemos, entonces, dos procedimientos: en el primero se construye el punto medio del $\overline{AB}$ y luego la recta m perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio; en el segundo se construye la mediatriz del $\overline{AB}$ ($\mathcal{M}_{\overline{AB}}$). La validación de cada paso del procedimiento elegido consiste en garantizar la existencia de cada objeto que se representa; por tanto, implica proveer un argumento deductivo[9] cuya garantía sea un elemento del sistema teórico disponible. Así, por ejemplo, en el procedimiento 2, tras haber validado la existencia de A, B y C tres puntos no colineales y la existencia del $\overline{AB}$, se valida el paso en el que se construye la mediatriz del $\overline{AB}$ recurriendo al argumento cuyos elementos son los siguientes:

Dato: $\overline{AB}$

Garantía: T. Existencia de la mediatriz (Dado un segmento en un plano, existe una única mediatriz a dicho segmento en tal plano)

Aserción: $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$

Las garantías teóricas que validan los pasos de los dos procedimientos para construir la situación planteada en el problema se explicitan a continuación. Como se puede ver, los dos procedimientos comparten los dos primeros pasos.

9 En las descripciones de las tareas que hacemos en este capítulo usamos la terminología correspondiente a una tipología de argumento (*i. e.*, deductivo, inductivo, abductivo) que está ampliamente tratada en el capítulo 6. Recomendamos que se introduzcan tales términos a partir del momento en que se hacen las precisiones para emplearlos con el respectivo significado.

Paso	Procedimiento 1	Procedimiento 2	Garantía
1.	A, B y C tres puntos no colineales		P. Plano Tres Puntos
2.	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$		T. Existencia de Segmentos
3.	punto medio del $\overline{AB}$, punto medio del $\overline{BC}$		T. Existencia Punto Medio
3.		$\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ y $\mathcal{M}_{\overline{CD}}$	T. Existencia Mediatriz
4.	m la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio T el punto de intersección de m y n		T. Existencia perpendicular punto interno
4.		T el punto de intersección de $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ y $\mathcal{M}_{\overline{CD}}$	requiere demostrar que las mediatrices se intersecan, es decir, que existe el punto T, o usarlo si ya se tiene

La toma de decisión a favor del procedimiento 2 para construir la situación genera una oportunidad para producir un argumento que sustenta que las rectas m y n a las que refiere el enunciado del problema son respectivamente las mediatrices del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$.

Dato: m es la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n es la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio

Garantía: T. Mediatriz (Si una recta es perpendicular a un segmento por su punto medio, entonces es mediatriz del segmento)

Aserción: m es la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ y n es la $\mathcal{M}_{\overline{BC}}$

La preferencia por el uso del objeto mediatriz, evidente en el procedimiento 2, podría tener dos razones: 1) posibilita usar el T. Intersección de Mediatrices para validar que la intersección de las rectas n y m no es vacía, si los extremos de los segmentos correspondientes no son colineales; 2) permite formular el antecedente de la conjetura de una manera más económica. Estas dos razones harían parte de sendos argumentos para soportar la decisión de usar el procedimiento 2.

Momento de exploración empírica de la situación. Un suceso relevante es la determinación y el uso de una estrategia que favorezca la identificación de la propiedad del punto T, como un invariante, y que, en ese sentido, subsane la dificultad inherente a la estrategia basada solo en el arrastre libre. Una tal estrategia consiste en marcar el punto T_i para posiciones particulares del punto B (denotadas por B_i); en este caso, marcar tres puntos podría ser suficiente para visualizar un invariante: los puntos T_i son colineales (véase figura 7a). Otra estrategia consiste en activar el rastro del punto T y arrastrar libremente el punto B, con lo cual se obtiene un segmento de recta que sugiere la pertenencia del punto T a una recta (véase figura 7b).

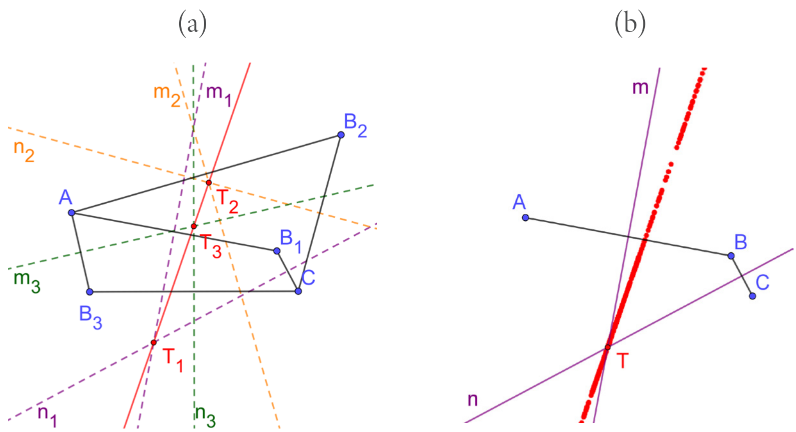


Figura 7. Dos estrategias para explorar la situación en busca de identificar un invariante

La primera estrategia imita una exploración que se puede hacer con papel, lápiz, regla y compás, mientras que la segunda es posible solo en un SGD. Por supuesto, la segunda puede ser mucho más significativa porque, en tiempo real, se representan varias posiciones del punto B_i y los respectivos puntos T_i y no solo tres como sucede en el primer caso. Así, al usar la primera estrategia es posible que solo se infiera la equidistancia del punto T (punto genérico que representa a todos y cada uno de los T_i posibles) a los puntos A y C, mientras que la segunda estrategia puede aportar evidencia empírica más sólida para inferir que el punto T (punto genérico que representa a todos y cada uno de los T_i posibles) es un punto de una recta especial (la mediatriz del $\overline{AC}$). En cualquiera de los casos, el proceso de exploración podría subsumir un proceso de argumentación inductiva. Usando la segunda estrategia, podría surgir un argumento simple inductivo incompleto que sustenta como probable la aserción: T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$, argumento que va de lo particular a lo general.

Dato:	Puntos A, B y C no colineales; m la mediatriz del $\overline{AB}$; n la mediatriz del $\overline{BC}$; T el punto de intersección de m y n; T_i pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$ (T_i es el respectivo rastro de B_i, donde B_i representa algunas posiciones del punto B al ser arrastrado)
Garantía:	Si A, B y C no colineales; m la mediatriz del $\overline{AB}$; n la mediatriz del $\overline{BC}$; T el punto de intersección de m y n, entonces T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$ (Patrón de generalidad inducido, formulado en calidad de conjetura)
Aserción:	$T \in \mathcal{M}_{\overline{AC}}$

<u>Momento de la formulación de conjetura</u>. Basados en los dos procedimientos de construcción de la situación expuestos anteriormente y en la segunda estrategia de exploración empírica (la que posibilita encontrar como invariante la pertenencia a una recta especial), prevemos la formulación de dos conjeturas que solucionan el problema.

Conjetura 1: Dados tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio. Sea T el punto de intersección de m y n, entonces T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$.

Conjetura 2: Si A, B y C son tres puntos no colineales, m es la mediatriz del $\overline{AB}$, n es la mediatriz del $\overline{BC}$ y T el punto de intersección entre m y n; entonces T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$.

En este momento de la resolución del problema prevemos dos sucesos relevantes. Por una parte, la discusión respecto a las condiciones que conformarían el antecedente y las del consecuente del enunciado condicional que expresa la conjetura; esperamos que esta discusión esté dirigida por el reconocimiento del dato y el invariante encontrado, y por el criterio según el cual en el antecedente se incluye el dato mientras que en el consecuente se incluye el invariante. Por otra parte, la discusión sobre cómo formular el antecedente de la conjetura, en términos de encapsular o no la propiedad de las rectas involucradas en el problema.

<u>Momento de la formulación de un plan que guíe la demostración de la conjetura</u>. Como pasos clave, que conforman un plan, para la demostración de la conjetura 2, prevemos, por ejemplo, lo siguiente: 1) inferir que el punto T equidista de los puntos A y B, y de los puntos B y C; 2) inferir que T equidista de A y C; 3) inferir que T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$. El desarrollo de este plan da lugar a un argumento deductivo global conformado por tres argumentos simples, cuyos elementos básicos se exponen a continuación:

Argumento 1

Dato: A, B y C son tres puntos no colineales, m es la mediatriz del $\overline{AB}$, n es la mediatriz del $\overline{BC}$ y T el punto de intersección entre m y n

Garantía: Definición de mediatriz (Dado un segmento en un plano; la mediatriz del segmento en ese plano es el conjunto de puntos de dicho plano que equidistan de los extremos del segmento.)

Aserción: T equidista de los puntos A y B, y de los puntos B y C ($AT = TB$; $TB = TC$)

Argumento 2

Dato: $AT = TB$; $TB = TC$

Garantía: Propiedad transitiva de la igualdad

Aserción: T equidista de los puntos A y C ($AT = TC$)

Argumento 3

Dato: T equidista de los puntos A y C

Garantía: Definición de mediatriz

Aserción: T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$

Opción B

<u>Momento de construcción de la situación que plantea el problema</u>. La determinación de qué objeto construir y cómo hacerlo, con el fin de representar la situación, es un suceso relevante que depende de cuál es la condición en la que se centra la atención: la proporción de los lados o el triángulo y un punto en uno de sus lados. Si la atención se enfoca en la proporcionalidad que deben tener las medidas de ciertos pares de segmentos, entonces es muy posible que interese representar un tipo particular de triángulo y un cierto punto D; prevemos la construcción de un triángulo isósceles y D el punto medio del lado del que no se ha establecido si es congruente o no a otro lado (véase figura 8a); mientras que si la atención se centra en que el punto D debe tener un rasgo especial, entonces es muy posible que interese representar un triángulo cualquiera; prevemos la construcción de un triángulo sin condición especial alguna y un punto D en el $\overline{BC}$ (véase figura 8b).

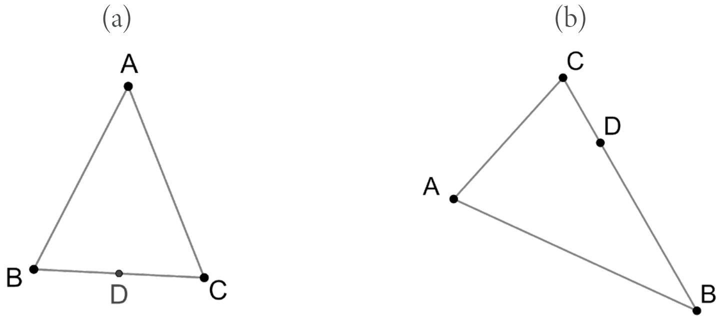


Figura 8. Dos construcciones hechas, atendiendo distintas condiciones dadas en el enunciado del problema

Por tanto, son posibles diversos procedimientos genéricos para representar la situación. A continuación, presentamos tres procedimientos junto con la justificación teórica (*i. e.*, garantía) para cada uno de los pasos.

Paso	**Procedimiento 1 (construcción de triángulo isósceles) construir objeto o mencionar propiedad**	**Garantía**
1.	$\overline{BC}$	T. Existencia segmento
2.	$\mathcal{M}_{\overline{BC}}$	T. Existencia mediatriz
3.	D punto medio del $\overline{BC}$	T. Existencia punto medio
4.	Punto $A \in \mathcal{M}_{\overline{BC}}$, $A \neq D$	T. Recta-infinitos puntos
5.	$\mathcal{M}_{\overline{BC}} \cap \overline{BC} = \{D\}$	T. Mediatriz
6.	$A \notin \overleftrightarrow{BC}$	T. Intersección de rectas (Si dos rectas —o subconjuntos de estas— se intersecan, entonces lo hacen en un único punto)
7.	A, B, C puntos no colineales	D. Colinealidad (Tres puntos son colineales si pertenecen a la misma recta)

8.	ΔABC	D. Triángulo
9.	$AB = AC$	D. Mediatriz
10.	$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	D. Congruencia
11.	ΔABC isósceles	D. Triángulo isósceles

Paso	**Procedimiento 2 (construcción de triángulo isósceles) construir objeto o mencionar propiedad**	**Garantía**
1.	Punto A	P. Existencia punto
2.	$\odot A_r$ (circunferencia con centro A y radio r)	T. Existencia circunferencia
3.	Puntos $B, C \in \odot A_r$, $B \notin \overleftrightarrow{AC}$	T. Circunferencia-infinitos puntos
4.	A, B, C no colineales	D. Colinealidad
5.	ΔABC	D. Triángulo
6.	$AB = AC$	D. Circunferencia
7.	$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	D. Congruencia
8.	ΔABC isósceles	D. Triángulo isósceles
9.	D punto medio del $\overline{BC}$	T. Existencia punto medio

Paso	**Procedimiento 3 (construcción de triángulo) construir objeto o mencionar propiedad**	**Garantía**
1.	ΔABC	T. Existencia triángulo
2.	Punto D tal que $B - D - C$ (usamos esta notación para expresar que el punto D está entre B y C)	T. Punto entre

Otro suceso relevante que prevemos es la discusión para argumentar que la propuesta de construir un objeto (*e. g.*, paso 3 del procedimiento 1) o que la mención de una propiedad de un objeto (*e. g.*, paso 9 del procedimiento 1) en un determinado paso del procedimiento son actos viables en el sistema teórico disponible; en ese marco, se pueden generar argumentos deductivos que podrían o no incluirse en la validación del procedimiento. En el procedimiento 1, el paso 3 —en el que se plantea la construcción del punto medio de un segmento— se valida con el argumento deductivo cuyos elementos básicos son los siguientes.

Dato: $\overline{BC}$

Garantía: T. Existencia punto medio

Aserción: D punto medio del $\overline{BC}$

Por su parte, el paso 9 del procedimiento 1 —en el que se establece la equidistancia de los puntos B y C al punto A— se valida con el argumento deductivo cuyos elementos básicos son los que siguen.

Dato: Punto $A \in \mathcal{M}_{\overline{BC}}$

Garantía: D. Mediatriz

Aserción: $AB = AC$

Y en el procedimiento 2, la validación de la misma equidistancia (de los puntos B y C al punto A) se hace con el argumento deductivo cuyos elementos básicos son los que siguen.

Dato: Puntos $B, C \in \odot A_r$

Garantía: D. Circunferencia

Aserción: $AB = AC$

Un tercer suceso relevante —que más que preverlo, lo consideramos deseable— es la discusión sobre los pasos 4 y 6 del procedimiento 1. Específicamente, podría centrarse en responder la pregunta por qué o para qué se incluyen tales pasos, lo cual puede conllevar argumentaciones (indirectas que usan, implícitamente, el Principio de Reducción al Absurdo[10]) como las dos siguientes. Primera, el punto D, punto medio del $\overline{BC}$, pertenece a la mediatriz del $\overline{BC}$. Así que al considerar un punto A de la mediatriz del $\overline{BC}$, este bien podría ser el punto D. Si A fuera el punto D, se cumpliría la interestancia $B - A - C$ y, por tanto, la colinealidad de los puntos, situación que no permite la construcción del ΔABC. Como el enunciado del problema presupone contar con tal triángulo, entonces se requiere imponer la condición de que el punto A no sea el punto D. Segunda, el punto A no puede pertenecer a la $\overleftrightarrow{BC}$ porque si lo hiciera, la intersección de las dos rectas, $\mathcal{M}_{\overline{BC}}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, serían dos puntos, lo cual contradice el T. Intersección de rectas. Además, parte del dato es la existencia del ΔABC, lo que exige que los tres puntos sean no colineales, gracias a la definición de triángulo.

Momento de la exploración empírica de la situación. Un suceso relevante es la determinación de la existencia del punto D por el que pregunta el problema. La exploración de la situación depende, en parte, de cómo se ha construido la respectiva representación. En la representación que muestra la figura 8a (un ΔABC isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, y D el punto medio del $\overline{BC}$), la exploración podría consistir en tomar las medidas de longitud de los segmentos involucrados en el enunciado del problema para verificar que efectivamente se cumple la proporción solicitada (cuya razón, en este caso, es 1). Mediante tal exploración empírica se puede visualizar que para cada ΔABC isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, y D el punto medio del $\overline{BC}$, se cumple que $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} = 1$. Así, es posible formular, en calidad de conjetura, el enunciado condicional que sería garantía en el siguiente argumento surgido, posiblemente, en una argumentación abductiva.

10 En el capítulo 6, en relación con el bloque 7, se presenta una caracterización de este tipo de argumento deductivo.

Dato: ΔABC isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, D punto medio del $\overline{BC}$

Garantía: Si ΔABC isósceles (con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$) y D punto medio del $\overline{BC}$, entonces $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} = 1$

Aserción: $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} = 1$

Ahora bien, si se ha representado un ΔABC cualquiera con un punto D (no fijo) en el $\overline{BC}$, la exploración podría consistir en construir el $\overline{AD}$ para determinar visualmente si se tienen triángulos semejantes (véase figura 9a). No centrarse en la búsqueda de triángulos semejantes en la representación hecha puede llevar a una exploración ampliada y controlada de tal representación, en la que se consideran otros casos de ubicación del punto D hasta encontrar el que interesa. Esa nueva exploración, que parte de haber construido el $\overline{AD}$, incluye la toma de medidas de longitud de los segmentos y el arrastre del punto D hasta obtener la proporción (véanse figuras 9b y 9c).

(a) (b) (c)

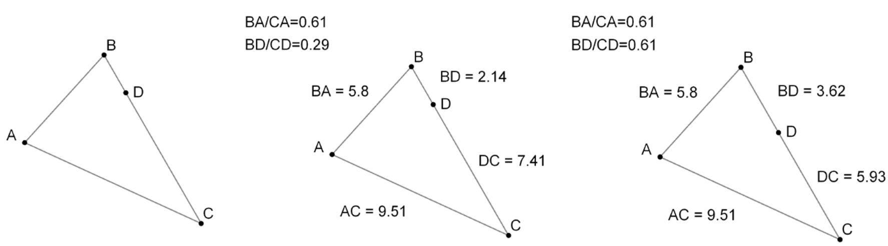


Figura 9. Dos exploraciones (b y c) empíricas en un triángulo no isósceles

Tras haber logrado evidencia empírica que permite responder afirmativamente la pregunta sobre la existencia del punto D mencionado en el problema, se requiere ahora una exploración encaminada a encontrar la condición geométrica que caracteriza la ubicación del punto D. Tal exploración se puede centrar en determinar si D es la intersección de alguna recta notable del triángulo con el $\overline{BC}$, lo cual abre tres posibilidades: 1) D es el punto medio del segmento; 2) D es el punto de intersección de la altura correspondiente al vértice A con el $\overline{BC}$; 3) D es el punto de intersección de la bisectriz del $\angle BAC$ con el $\overline{BC}$.

El segundo suceso relevante que prevemos consiste en examinar y decidir sobre las dos primeras posibilidades. En ese sentido, se puede descartar la posibilidad de que D sea el punto medio del $\overline{BC}$ con un argumento deductivo, dado a continuación, que recurre a la definición de punto medio e información obtenida de la representación (véase figura 9c) en la que se ve que la proporcionalidad se cumple, pero la razón en la que se usan las medidas de los segmentos que tienen a D como extremo no corresponde a la que resulta cuando los extremos de los dos segmentos es el punto medio del $\overline{BC}$.

Argumento 1

Dato: D es punto medio del $\overline{BC}$ (suposición)

Garantía: D. Punto medio

Aserción: $BD = CD$

Argumento 2

Dato: $BD = CD$

Garantía: Propiedad de los reales

Aserción: $\frac{BD}{CD} = 1$

De manera similar, la segunda posibilidad (D es el punto de intersección del $\overline{BC}$ con la altura correspondiente al vértice A) podría descartarse con un argumento deductivo en el que el dato se toma de la representación (véase figura 9b).

Dato: $\overline{AD}$ no es perpendicular al $\overline{BC}$ (tomado de la representación)

Garantía: D. Altura de triángulo

Aserción: D no es el punto de intersección del $\overline{BC}$ con la altura correspondiente al vértice A

La segunda posibilidad también se puede descartar mediante una argumentación teórica que alude a que las alturas no siempre intersecan un lado del triángulo (véase figura 10a, $\overline{AD}$ altura del ΔABC) y si se quiere una solución general, que no dependa del tipo de triángulo, D no podría ser el pie de una altura, ya que una condición dada en el problema es que D pertenezca a uno de los lados del triángulo, lo cual, en nuestro caso, significa que D debe estar entre B y C ($B - D - C$) (véase figura 10b). La siguiente secuencia de cuatro argumentos sustenta lo dicho, pues se llega a una contradicción respecto a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.

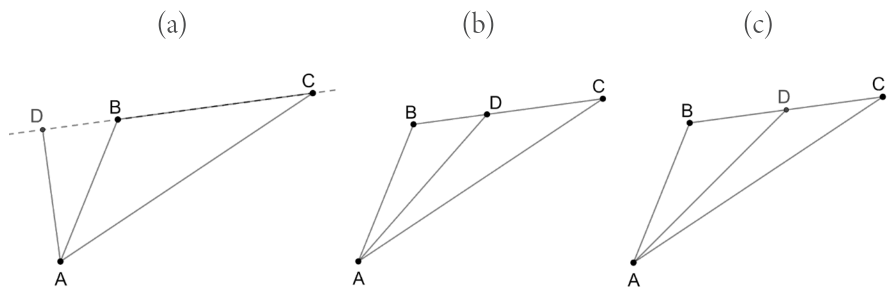


Figura 10. Exploración de un triángulo escaleno

Argumento 1

Dato: $\overline{AD}$ altura del ΔABC

Garantía: D. Altura de triángulo

Aserción: $\{D\} = \overline{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}, \overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Argumento 2

Dato: $\overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Garantía: D. Perpendicularidad

Aserción: $\angle ADB$ recto

Argumento 3

Dato: $\angle ADB$ recto, $\angle ABC$ obtuso, $B-D-C$ (suposición)

Garantía: D. Ángulo recto, D. Ángulo obtuso

Aserción: $m\angle ADB = 90$, $m\angle ABC > 90$

Argumento 4

Dato: $m\angle ADB = 90$, $m\angle ABC > 90$

Garantía: Propiedad de los reales

Aserción: $m\angle ADB + m\angle ABC + m\angle BAD > 180$

El argumento simple y las dos secuencias de argumentos presentados sustentan que las posibilidades 1) y 2) no son viables, es decir, que no es razonable hipotetizar que D sea el punto medio del $\overline{BC}$ ni el punto de intersección del $\overline{BC}$ con la altura correspondiente al vértice A.

Un tercer suceso relevante, que consideramos deseable que ocurra, está relacionado con el examen de la conjetura asociada a la primera posibilidad descartada para D: Si ΔABC y D es el punto medio del $\overline{BC}$, entonces $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$. Una argumentación deductiva al respecto es la siguiente: puesto que D es punto medio del $\overline{BC}$, $BD = CD$; se tiene entonces que la razón entre BD y CD es 1. Como el ΔABC es cualquiera, sin perder generalidad, se puede suponer que es escaleno, con lo cual $BA \neq CA$; se tiene entonces que la razón de BA a CA no es 1. Por tanto $\frac{BD}{CD} \neq \frac{BA}{CA}$.

Un cuarto suceso relevante tiene que ver con la exploración empírica de la situación en un triángulo escaleno (véase figura 10), la cual permite visualizar que la proporcionalidad de interés no se cumple. Así, es posible formular, en calidad de conjetura, el enunciado condicional que sería garantía del argumento inductivo cuyos elementos básicos son los que siguen.

Dato:	$\overline{AD}$ altura del ΔABC , $D \notin \overline{BC}$ (tomado de la representación)
Garantía:	Si $D \notin \overline{BC}$ y $\overline{AD}$ altura del ΔABC, entonces $\frac{BD}{CD} \neq \frac{BA}{CA}$.
Aserción:	$\frac{BD}{CD} \neq \frac{BA}{CA}$

Un quinto suceso relevante que prevemos se enfoca en el examen y la decisión sobre la tercera posibilidad para el punto D, a la cual se puede llegar de dos maneras. Una, construyendo directamente la bisectriz del $\angle BAC$ y notando que coincide con el segmento representado. Dos, construyendo segmentos perpendiculares a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ con extremos en D y en un punto de la recta que contiene al segmento respectivo, y notando que las razones son iguales cuando dichos segmentos son congruentes. Así, se debe reconocer que D equidista de los lados del ángulo y, por lo tanto, que está en la bisectriz de este (T. Equidistancia-bisectriz ángulo). De cualquier manera, la exploración empírica permite descubrir que la opción 3) resuelve el problema: D es el punto de intersección de la bisectriz del $\angle BAC$ y el $\overline{BC}$. Para ratificar el descubrimiento, basta una construcción robusta de la bisectriz del $\angle BAC$ con D el punto de intersección de esta con el $\overline{BC}$.

<u>Momento de la formulación de conjetura</u>. Resolver el problema planteado conlleva la formulación de un enunciado condicional cuyo consecuente se da por sentado ($\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$) y se debe buscar un posible antecedente del que dependa el consecuente dado. Prevemos, al menos, las siguientes tres conjeturas, vinculadas a la exploración que se haya hecho de la situación, en particular, de las condiciones que se pretendieron mantener al hacer el arrastre. La primera conjetura tiene un alcance limitado. La segunda es general y respeta las condiciones establecidas en el problema: incluir en el dato el rasgo característico del punto D del que depende que $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$. La tercera conjetura, que no es solución del problema, podría surgir si se considera como dato la proporción que lleva a la caracterización de D; en tal caso, la conjetura podría ser la recíproca de la que soluciona el problema.

Conjetura 1: Si el ΔABC es isósceles y D es el punto medio del $\overline{BC}$, entonces $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$.

Conjetura 2: Si ΔABC, con $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$ y $D \in \overline{BC} \cap \overrightarrow{AK}$, entonces $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$.

Conjetura 3: Si ΔABC, con $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$ y $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$, entonces $D \in \overline{BC} \cap \overrightarrow{AK}$.

La formulación de las conjeturas 2 o 3, como resultado del examen de la situación de interés mediante el arrastre de cualquier vértice del ΔABC para contar con la representación de varios triángulos, constituye un suceso relevante que prevemos: la formulación misma puede surgir motivada por la exigencia de tener una garantía que justifique la proporcionalidad que se detecta empíricamente en las varias realizaciones[11] (véase figura 11) consideradas. Los siguientes son los elementos básicos del argumento inductivo simple que se completaría con la conjetura 2 como garantía:

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$
Varias realizaciones de la construcción descrita, obtenidas mediante arrastre de cualquiera de los vértices del triángulo

Garantía: Conjetura 2

Aserción: $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$

Los siguientes son los elementos básicos del argumento inductivo simple que se completaría con la conjetura 3 como garantía:

11 Aquí se usa el término "realización" en el sentido en que lo hace la lingüística: para referir a un caso particular de una representación que tiene un nivel mayor de generalidad.

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BA}{CA}$,
Varias realizaciones de la construcción descrita, obtenidas mediante arrastre de cualquiera de los vértices del triángulo

Garantía: Conjetura 3

Aserción: $D \in \overline{BC} \cap \overrightarrow{AK}$

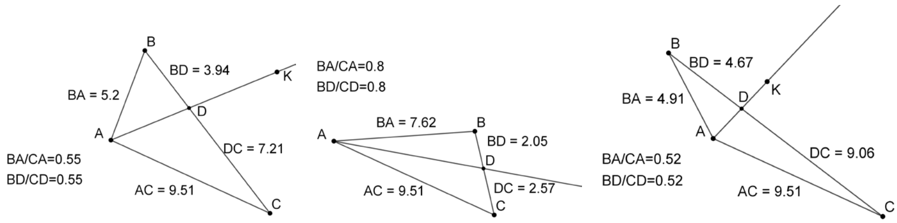


Figura 11. Tres realizaciones del ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$

Otro suceso relevante que prevemos es la discusión que puede suscitarse al expresar la conjetura. Hay dos posibles situaciones, que dependen del foco de atención al hacer el arrastre del punto D (si es que, en la construcción, el punto D se tomó como punto libre en el $\overline{BC}$) para determinar si hay un punto que conduce a la proporción exigida. En una, al hacer el arrastre, la atención se enfoca primero en la existencia de la realización de D y luego en la proporción; en la otra, al arrastrar, la atención se fija primero en la proporción y luego en la existencia de la realización de D. Sin embargo, cualquier discusión que surja debería terminar estableciendo que, para resolver el problema, la conjetura 2 es la esperada, ya que el problema busca que se establezca el antecedente para que se cumpla una propiedad dada (la igualdad de razones).

<u>Momento de la formulación de un plan que guíe la demostración de la conjetura</u>. Establecer los pasos clave de la demostración de la conjetura 2 puede ser un reto de difícil logro, si el estudio de la semejanza de triángulos ha sido escaso; por ejemplo, si se ha limitado a una aproximación visual para

estimar si dos triángulos pueden ser semejantes, se cuenta con la definición de semejanza de figuras geométricas y se establece como hecho geométrico, no validado, que dos triángulos son semejantes si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos del otro triángulo.

Respecto a la determinación de un plan para la demostración, prevemos que la mencionada proporción entre las medidas de longitud de algunos segmentos del ΔABC podría evocar la semejanza de triángulos como una idea nuclear: al validar la semejanza de ciertos dos triángulos podría deducirse la proporcionalidad de interés. Sin embargo, la observación de una representación (véase figura 11) puede mostrar que el ΔABD no es semejante al ΔACD, a menos que el ΔABC sea isósceles. Así, para poder deducir la proporcionalidad de interés, primero se tendría que asegurar que el ΔABC es isósceles, lo cual puede hacerse de dos maneras: una, inmediata, dando por sentada la condición y desde el inicio de la resolución del problema; otra, que utiliza el hecho de que $\angle BAD \cong \angle CAD$ (D. Bisectriz) y agrega una de estas dos condiciones: 1) $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son congruentes, o, 2) $\angle ACB$ y $\angle ABC$, son congruentes. Aceptado que el ΔABC es isósceles, podrían recurrir o no a la semejanza para establecer la proporción.

Los siguientes cuatro argumentos conforman un argumento deductivo global que demuestra la conjetura 2 para el caso del ΔABC isósceles (con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$), recurriendo a la semejanza de triángulos.

Argumento 1

Dato: ΔABC, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Garantía: T. Triángulo isósceles (Si el ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\angle ABC \cong \angle ACB$)

Aserción: $\angle ABC \cong \angle ACB$)

Argumento 2

Dato: $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$

Garantía: D. Bisectriz (La bisectriz de un ángulo es un rayo que forma —con los lados del ángulo— dos ángulos adyacentes congruentes, su extremo es el vértice del ángulo y tiene un punto en el interior del ángulo.)

Aserción: $\angle BAD \cong \angle CAD$

Argumento 3

Dato: $\angle ABC \cong \angle ACB$, $\angle BAD \cong \angle CAD$

Garantía: T. AA Semejanza

Aserción: $\Delta ABD \sim \Delta ACD$

Argumento 4

Dato: $\Delta ABD \sim \Delta ACD$

Garantía: D. Triángulos semejantes (Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.)

Aserción: $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$

Los siguientes seis argumentos conforman un argumento deductivo global que demuestra la conjetura 2 para el caso del ΔABC isósceles (en el que $\angle ADB \cong \angle ADC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$), sin recurrir a la semejanza de triángulos.

Argumento 1

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$

Garantía: D. Bisectriz

Aserción: $\angle BAD \cong \angle CAD$

Argumento 2

Dato: $\overline{AD}$

Garantía: Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos

Aserción: $\overline{AD} \cong \overline{AD}$

Argumento 3

Dato: $\angle BAD \cong \angle CAD$, $\overline{AD} \cong \overline{AD}$, $\angle ADB \cong \angle ADC$

Garantía: P. ALA

Aserción: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

Argumento 4

Dato: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

Garantía: D. Triángulos congruentes (Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos y los lados correspondientes son congruentes.)

Aserción: $\overline{DB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Argumento 5

Dato: $\overline{DB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Garantía: D. Congruencia (Dos segmentos son congruentes si y solo si sus medidas de longitud son iguales)

Aserción: $DB = DC$, $AB = AC$

Argumento 6

Dato: $DB = DC$, $AB = AC$

Garantía: Propiedad de los reales

Aserción: $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$

Otro suceso relevante —que más que preverlo, lo consideramos deseable— es la discusión en torno al alcance restringido de la solución anterior —en la que se impone de forma indirecta y arbitraria la condición de que $\Delta ABD \sim \Delta ACD$— y la determinación de construcciones auxiliares que podrían intermediar útilmente el proceso de demostración de la conjetura 2, es decir, la búsqueda de construcciones auxiliares que generen dos triángulos semejantes que no corresponden a los mencionados antes, pero que son útiles para lograr indirectamente la proporción o la configuración requerida para usar el T. Fundamental de la proporcionalidad.

La búsqueda de la construcción auxiliar mencionada podría comenzarse con una exploración basada en la imagen figural de situaciones que dan lugar a triángulos semejantes, y, tal vez, guiada por el Criterio AA de Semejanza. Una imagen figural de interés, la que refiere al T. Fundamental de la proporcionalidad o Teorema de Tales, corresponde a la situación en la que un lado es paralelo a un segmento que tiene extremos en los otros dos lados del triángulo.

Primera construcción auxiliar. Motivada en la situación descrita, la primera construcción auxiliar consiste en construir una recta m paralela al $\overline{AD}$ que contenga al punto C o B (véase figura 12). Esta construcción auxiliar impulsa a evocar las consecuencias de tener rectas paralelas cortadas por una transversal; específicamente, lleva a detectar que el ángulo determinado por la recta m y el $\overline{AC}$, si $C \in m$, es congruente al $\angle DAC$ (T. Paralelas-ángulos alternos internos). Si T es el punto de intersección de m y el $\overrightarrow{BA}$, se debe obtener que $\angle BTC \cong \angle BAD$ (T. Paralelas-ángulos correspondientes). Así, se tiene que $\Delta BAD \sim \Delta BTC$. Con la información anterior respecto a la congruencia de los ángulos mencionados, gracias a que el $\overline{AD}$ biseca al $\angle BAC$, se tiene que el ΔACT es isósceles con $\overline{AT} \cong \overline{AC}$, lo que permite establecer la proporción de interés.

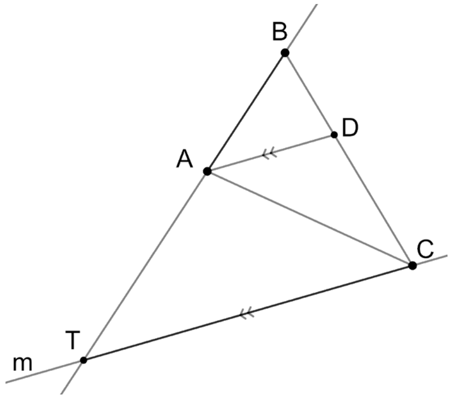


Figura 12. Construcción auxiliar recta m paralela al $\overline{AD}$

Asociado a esta construcción auxiliar, en una argumentación abductiva surge la que puede ser garantía en el siguiente argumento:

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, recta m, $m \parallel \overline{AD}$, $C \in m$, $T \in \overrightarrow{BA} \cap m$

Garantía: Si ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, recta $m \parallel \overline{AD}$, $T \in \overrightarrow{BA} \cap m$, entonces $\Delta BAD \sim \Delta BTC$.

Aserción: $\Delta BAD \sim \Delta BTC$

Nótese que la semejanza establecida como aserción no se condice con $\Delta ABD \sim \Delta ACD$, que sería la "natural" en consonancia con la proporcionalidad de interés. Pero como se dijo antes, tal semejanza sería útil solo para triángulos isósceles. La aserción puesta en este argumento, así como en los siguientes, concreta la idea dicha antes respecto a plantear posibles triángulos semejantes (de la cual deducir de forma indirecta la proporcionalidad) cuyas condiciones para que esto suceda (esto es, el dato del argumento) se deben precisar. De allí el carácter abductivo de la argumentación. Por supuesto, para garantizar teóricamente los pasos de los procedimientos de las construcciones auxiliares y que ellos evidentemente llevan a la semejanza puesta como aserción en los argumentos abductivos, se requiere producir los argumentos de carácter deductivo correspondientes. Ambas cosas, tanto el argumento abductivo inicial como los deductivos correspondientes, se expondrán en lo que sigue. Por último, mediante un argumento deductivo global, se expondrá cómo de $\Delta BAD \sim \Delta BTC$ se puede inferir la proporcionalidad de interés.

Segunda construcción auxiliar. Una segunda construcción auxiliar podría replicar construcciones auxiliares utilizadas para demostrar otros teoremas de geometría plana: generar el triángulo isósceles ΔACT. Para ello, construir en el rayo opuesto al $\overrightarrow{AB}$, el $\overline{AT}$ de tal forma que $AC = AT$ y luego construir el $\overline{CT}$ (véase figura 13). Así se obtiene que $\overline{AT} \cong \overline{AC}$. Consecuencia de esto es que $\angle ACT \cong \angle ATC$ (T. Triángulo isósceles), lo que lleva a establecer que $m\angle ACT = m\angle ATC$. Por el T. 180, se tiene $m\angle TAC + m\angle ACT + m\angle ATC = 180$, o lo que es equivalente, $m\angle TAC + 2m\angle ATC = 180$. Por otro lado, el $\angle BAC$ y $\angle TAC$ son par lineal y por T. Ángulos par lineal, son suplementarios. Por ende, $m\angle BAC + m\angle TAC = 180$. Por el T. Bisectriz, $m\angle BAC = 2m\angle BAD$, lo cual lleva a establecer que $2m\angle BAD + m\angle TAC = 180$. Por Principio de Sustitución y propiedades de los números reales, se obtiene que $m\angle BAD = m\angle ATC$. Así, $\angle BAD \cong \angle ATC$ que lleva a establecer que $\overline{CT} \parallel \overline{AD}$ (T. Ángulos correspondientes-rectas paralelas). Usando el T. Thales, se obtiene la proporción de interés.

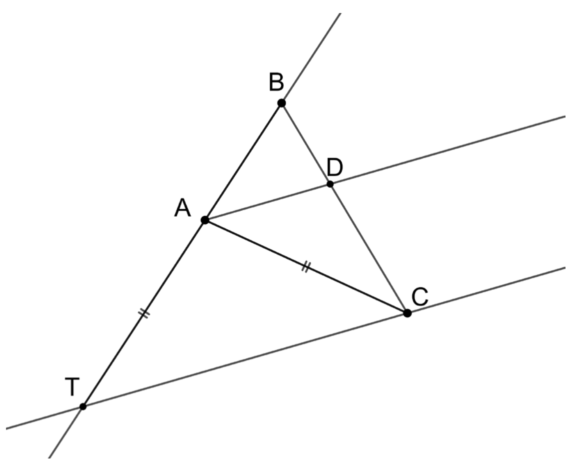


Figura 13. Construcción auxiliar ΔACT isósceles

Asociada a esta construcción auxiliar, en una argumentación abductiva surge la que puede ser garantía en el siguiente argumento.

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, $\overrightarrow{AQ}$ opuesto al $\overrightarrow{AB}$, $T \in \overrightarrow{AQ}$, tal que $\overline{AC} \cong \overline{AT}$

Garantía: Si ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, $\overrightarrow{AQ}$ opuesto al $\overrightarrow{AB}$, $T \in \overrightarrow{AQ}$, tal que $\overline{AC} \cong \overline{AT}$, entonces $\Delta BAD \sim \Delta BTC$

Aserción: $\Delta BAD \sim \Delta BTC$

Tercera construcción auxiliar. Una posible tercera construcción auxiliar (véase figura 14) consiste en trazar rectas paralelas al $\overline{AB}$ y al $\overline{AC}$ por el punto D, para construir los triángulos GBD y HDC, que resultan ser ambos semejantes al ΔABC. Esto, gracias al T. Paralelas-ángulos correspondientes con el cual se obtiene que $\angle BAC \cong \angle BGD \cong \angle CHD$ y que el ΔABC y el ΔGBD comparten el $\angle B$, y que el ΔABC y el ΔHDC comparten el $\angle C$, obteniendo lo requerido para establecer la semejanza entre cada par de triángulos (T. AA Semejanza). Se requiere después, demostrar que $GD = HD$.

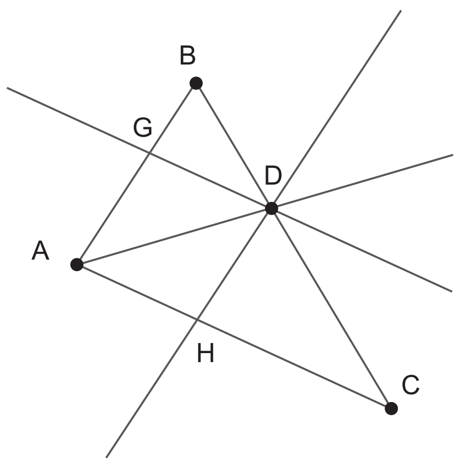


Figura 14. Construcción auxiliar de paralelas al $\overline{AB}$ y al $\overline{AC}$ por el punto D

Asociado a esta construcción auxiliar, en una argumentación abductiva surge la que puede ser garantía en el siguiente argumento:

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, recta p, $p \parallel \overline{AC}$ por D; $G \in \overline{AB} \cap p$; recta q, $q \parallel \overline{AB}$ por D; $H \in \overline{AC} \cap q$

Garantía: Si ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, recta p, $p \parallel \overline{AC}$ por D; $G \in \overline{AB} \cap p$; recta q, $q \parallel \overline{AB}$ por D; $H \in \overline{AC} \cap q$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta GBD \sim \Delta HDC$

Aserción: $\Delta ABC \sim \Delta GBD \sim \Delta HDC$

Con esta construcción se pueden tomar dos caminos diferentes para demostrar que $GD = HD$. En el primero, usando que $\angle AGD \cong \angle AHD$ (T. Suplementos de ángulos congruentes) y que el $\overline{AD}$ biseca al $\angle BAC$, se llega a que $\angle AGD \cong \angle AHD$ (T. LAA). En el segundo camino se usa el T. Paralelas-ángulos alternos internos para concluir que $\angle GDA \cong \angle DAH$ y $\angle GAD \cong \angle ADH$ y se usan la D. Bisectriz y la propiedad transitiva para concluir que $\angle GDA \cong \angle HDA$; de ello se llega a que $\Delta AGD \cong \Delta AHD$ (T. ALA). Como $\Delta ABC \sim \Delta GBD$ y $\Delta GBD \sim \Delta HDC$, por D. Semejanza se obtiene que $\frac{AB}{AC} = \frac{GB}{GD}$ y $\frac{GB}{HD} = \frac{BD}{DC}$. Teniendo que $GD = DH$, por el Principio de sustitución y la Propiedad transitiva, se logra la proporción de interés.

Cuarta construcción auxiliar. Otra construcción auxiliar (véase figura 15) consiste en construir una recta k que contiene a B y es paralela al $\overline{AC}$. Si $E \in k \cap \overrightarrow{AD}$, entonces $\Delta BDE \sim \Delta CDA$ por el T. AA Semejanza, ya que $\angle BDE \cong \angle CDA$, por ser opuestos por el vértice y $\angle BED \cong \angle CAD$, por ser alternos internos entre rectas paralelas. Como $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$, por transitividad se obtiene $\angle BED \cong \angle BAD$ y, por tanto, por el T. Recíproco del Triángulo isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{BE}$. Así, por D. Semejanza, se obtiene $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{AC}$, y por el Principio de Sustitución se llega a la proporción de interés.

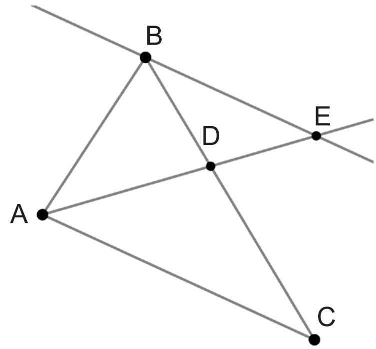


Figura 15. Construcción auxiliar de recta paralela al $\overline{AC}$ por B

Asociada a esta construcción auxiliar, en una argumentación abductiva surge la que puede ser garantía en el siguiente argumento:

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, recta k, $k \parallel \overline{AC}$ por B, $E \in k \cap \overrightarrow{AD}$

Garantía: Si ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$, recta k, $k \parallel \overline{AC}$ por B y $E \in k \cap \overrightarrow{AD}$, entonces $\Delta BDE \sim \Delta CDA$.

Aserción: $\Delta BDE \sim \Delta CDA$

Un tercer suceso relevante que prevemos se enfoca en la validación de las construcciones auxiliares propuestas como mecanismos de intermediación para poder demostrar la proporcionalidad en cuestión. Respecto a la primera construcción auxiliar, la que da lugar a triángulos semejantes, el siguiente argumento deductivo global permite validarla.

Argumento 1

Dato: Punto C

Garantía: T. Existencia recta paralela

Aserción: recta m, $m \parallel \overline{AD}$, $C \in m$

Argumento 2

Dato: $m \parallel \overline{AD}$, $C \in m$

Garantía: T. Paralelas-ángulos correspondientes

Aserción: $\angle BTC \cong \angle BAD$

Argumento 3

Dato: $\angle ABC \cong \angle ABC$, $\angle BTC \cong \angle BAD$

Garantía: Criterio Semejanza AA

Aserción: $\Delta BAD \sim \Delta BTC$

Respecto a la segunda construcción auxiliar, una que también da lugar a triángulos semejantes, el siguiente argumento deductivo global permite validarla.

Argumento 1

Dato: ΔABC, $\overrightarrow{AK}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D \in \overrightarrow{AK} \cap \overline{BC}$

Garantía: T. Bisectriz

Aserción: $m\angle BAC = 2m\angle BAD$

Argumento 2

Dato: $\overrightarrow{AB}$

Garantía: T. Existencia rayo opuesto

Aserción: Existe $\overrightarrow{AQ}$ opuesto al $\overrightarrow{AB}$

Argumento 3

Dato: $\overrightarrow{AQ}$, $AC > 0$

Garantía: T. Localización de puntos

Aserción: Existe punto $T \in \overrightarrow{AQ}$ tal que $\overline{AT} \cong \overline{AC}$

Argumento 4

Dato: $\overline{AT} \cong \overline{AC}$

Garantía: T. Triángulo isósceles

Aserción: $\angle ATC \cong \angle ACT$

Argumento 5

Dato: $\overrightarrow{AQ}$ opuesto al $\overrightarrow{AB}$

Garantía: D. Par lineal

Aserción: $\angle TAC$ y $\angle BAC$ par lineal

Argumento 6

Dato: $\angle TAC$ y $\angle BAC$ par lineal

Garantía: T. Par lineal

Aserción: $m\angle TAC + 2m\angle BAD = 180$

Argumento 7

Dato: ΔTAC

Garantía: T. 180

Aserción: $m\angle TAC + 2m\angle ATC = 180$

Argumento 8

Dato: $m\angle TAC + 2m\angle BAD = 180$; $m\angle TAC + 2m\angle ATC = 180$

Garantía: Propiedades de los reales

Aserción: $m\angle BAD = m\angle ATC$

Argumento 9

Dato: $m\angle BAD = m\angle ATC$

Garantía: D. Congruencia

Aserción: $\angle BAD \cong \angle ATC$

Argumento 10

Dato: $\angle ABC \cong \angle ABC, \angle ATC \cong \angle BAD$

Garantía: Criterio Semejanza AA

Aserción: $\Delta BAD \sim \Delta BTC$

Cabe señalar que es posible formular argumentos como los anteriores, usando $\angle DAC$ y $\angle ACT$ que resultan también congruentes. Por transitividad, se establece que $\angle ATC \cong \angle BAD$.

Un cuarto suceso relevante que prevemos consiste en la demostración de que la semejanza de los triángulos obtenida sí da lugar a la proporción en cuestión. El respectivo argumento deductivo global es el siguiente:

Argumento 1

Dato: $\Delta BAD \sim \Delta BTC$

Garantía: D. Triángulos semejantes

Aserción: $\frac{BT}{BA} = \frac{BC}{BD}$

Argumento 2

Dato: $B - A - T, B - D - C$

Garantía: D. Interestancia

Aserción: $BT = BA + AT, BC = BD + DC$

Argumento 3

Dato: $\frac{BT}{BA} = \frac{BC}{BD}, BT = BA + AT, BC = BD + DC$

Garantía: Principio de sustitución, propiedad de los reales

Aserción: $\frac{BA + AT}{BA} = \frac{BD + DC}{BD}; \frac{AT}{BA} = \frac{DC}{BD}$

Argumento 4

Dato: $\overline{AT} \cong \overline{AC}$

Garantía: D. Congruencia

Aserción: $AT = AC$

Argumento 5

Dato: $AT = AC; \frac{AT}{BA} = \frac{DC}{BD}$

Garantía: Principio de sustitución

Aserción: $\frac{AC}{BA} = \frac{DC}{BD}$

Bloque 2: Identificar argumentos presentes en la interacción

A partir de la grabación de audio y video y de los relatos escritos en el bloque 1, diligencien la siguiente tabla. Para cada momento de la resolución, escriban máximo dos argumentos (los que consideren más relevantes). Para cada argumento anoten el intervalo de tiempo en la grabación (por ejemplo, [1:30-2:10]), para ubicar con precisión el momento en el que aquel se profiere.

Momento de la resolución	Argumento presente en la interacción	Razón por la cual es un argumento	Para qué se formuló el argumento
Construcción de la situación			
Exploración de la situación			
Formulación de la conjetura			

Formulación del plan que guiaría la demostración			

Descripción de las tareas del bloque 2

Actividad que demandan las tareas: principalmente, identificar y exponer argumentos, surgidos en la interacción comunicacional durante la resolución de un problema geométrico de conjeturación (tipo de problema que le ha de ser familiar al resolutor), para lo cual es posible valerse de la grabación de video y del relato elaborado con el fin de organizar la experiencia en términos de eventos o episodios en los que hubo argumentación. Además, justificar la identificación hecha y exponer a qué sirve el argumento formulado.

Propósito didáctico de la tarea: ofrecer una oportunidad para que los estudiantes comiencen a sensibilizarse respecto a qué concepción de argumento tienen y de qué elementos del discurso se valen para distinguir una expresión discursiva que es argumento de una que no lo es.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de la tarea: la concepción común, no especializada, de argumento, junto con la competencia relativa a la identificación de argumentos de su propia práctica.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de la tarea pretende favorecer: ninguno en especial.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: bajo el supuesto de que los estudiantes no han sido expuestos previamente a una reflexión académica en torno al objeto argumento, pero que sí han vivido la experiencia de argumentar en cursos de geometría, prevemos que los textos que expongan como argumentos representen, en buena medida, la concepción idiosincrática que tienen al respecto. Prevemos que pueden presentar en calidad de argumentos textos de distinto tipo; por ejemplo, relatos —textos que representan sucesos aludiendo a acciones ejecutadas durante la resolución de la tarea— (*e. g.*, “Se toman las longitudes del $\overline{DB}$ y del $\overline{EC}$. Luego se mueve el punto D para observar si las distancias tienen que ver con la característica buscada para el punto”[12]); descripciones —textos que presentan detalles de objetos— (*e. g.*, “Hay tres puntos A, B, C no colineales, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, E, D son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente y hay dos rectas m y n tales que $m \perp \overline{AB}$ por D y $n \perp \overline{AC}$ por E”); exposiciones —textos que presentan de manera objetiva lo que se sabe, lo que se ve, lo que se piensa— (*e. g.*, “Se recuerda que el plan de acción se empieza a desarrollar a partir de lo dado en la situación”). Prevemos también que pueden exponer como propósito de los textos que presentan como argumentos (respuestas a la solicitud de explicitar para qué se formuló el argumento señalado), enunciados diversos que aluden a la utilidad (*e. g.*, “La toma de medidas ayuda a darle solución al problema dado, como también a descartar otros casos que se dan en la exploración”), a la función (*e. g.*, “Construcción de la representación dada para poder hacer la exploración del problema”, y hasta al porqué de lo presentado (*e. g.*, “Los datos permiten tener un panorama inicial claro, ya que posibilita tener estrategias para desarrollar el plan”). Para indicar por qué el texto que señalan como argumento lo es (respuestas a la solicitud de exponer la razón por la cual es un argumento), prevemos que pueden recurrir a enunciados similares a los dados como propósito. En suma, prevemos encontrar producciones vagas y confusas en lo que concierne a la conceptualización de argumento, pero que dan muestra de sus ideas al respecto. Específicamente, prevemos no encontrar alusión a los tres elementos básicos de un texto argumentativo. Esperamos como deseable, en calidad de argumentos, la presentación de textos expositivos en los que se distingan con claridad tres enunciados: uno, cuya veracidad no se da por sentada; otro, que se sabe verdadero y cuya función en el discurso es justificar al ya mencionado; y otro más, general y como proposición condicional, cuya función en el discurso es justificar la conexión entre los dos enunciados antes mencionados.

12 Los ejemplos son tomados de Camargo *et al.* (2024).

Bloque 3: Explicitar el conocimiento inicial

Basándose en el conocimiento movilizado para realizar las tareas del bloque 2, escriban el significado que le atribuyen a los siguientes términos (no usen definiciones tomadas de diccionario ni de internet).

Término	Significado atribuido
Argumento	
Justificación	
Demostración	
Conjetura	
Teorema	
Proposición válida	

Descripción de las tareas del bloque 3

Actividad que demanda la tarea: verbalizar los significados personales de términos relacionados con el objeto argumento.

Propósito didáctico de la tarea: promover la explicitación de la conceptualización que se tiene sobre constructos relacionados con el objeto argumento (*e. g.*, justificación, demostración, conjetura, teorema, proposición válida).

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de la tarea: conceptualización, no especializada, sobre los objetos argumento, justificación, demostración, conjetura, teorema y proposición válida.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de la tarea pretende favorecer: ninguno en especial.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: prevemos la formulación de enunciados como los siguientes:

Argumento	Lo que permite justificar algo.
Justificación	Una demostración o una explicación de por qué una afirmación es verdadera.
Demostración	Argumento para validar un teorema. Un conjunto de proposiciones encadenadas y validadas por elementos del sistema teórico, que validan un teorema.
Conjetura	Frase en la que se reporta algo que se cree que es cierto.
Teorema	Enunciado ya demostrado que hace parte de un sistema teórico.
Proposición válida	Enunciado que es verdadero en un sistema referencial. Enunciado que es implicación de un sistema teórico.

Esta tarea genera un contexto en el cual se pone de manifiesto un elemento (significado personal) del conocimiento sobre constructos relacionados con el objeto argumento. Es conocimiento, más o menos informal, que se ha conformado a través de los cursos de geometría y otros cursos de matemáticas y se moviliza en esta secuencia de tareas. Prevemos encontrar una variedad de descripciones o una no claridad sobre las acepciones de tales constructos, condición que destaca la necesidad de abordar con cierta formalidad, empleando textos de la literatura especializada en Educación Matemática, el estudio de dichos términos.

Capítulo 5
Tareas para desarrollar conocimiento especializado sobre argumento

En el capítulo 4, los estudiantes expresaron, explícita o tácitamente, algunos elementos que hacen parte de su conocimiento común sobre el objeto argumento. Los dos bloques de tareas (bloque 4 y bloque 5) que conforman este capítulo son insumos que pueden apoyar el desarrollo de un conocimiento especializado sobre argumento. En el bloque 4 se aborda la definición de argumento que se usará en el curso, se precisa la relación funcional entre los tres elementos básicos de un argumento, se expone la estructura del modelo que Toulmin propone para reconstruir argumentos, y se precisan términos clave relacionados con el objeto argumento. En el bloque 5 se incursiona en el análisis de intercambios ocurridos en el aula, de los que se tiene su transcripción, con el propósito de identificar y reconstruir argumentos esbozados. Tal ejercicio de análisis no solo apoya la construcción de significado de los términos definidos en el bloque 4, mediante su uso, sino que también sugiere una estrategia útil para reconstruir argumentos producidos en intercambios comunicacionales en el aula.

Para potenciar la utilidad de las tareas de aprendizaje que ofrecemos en esta secuencia, debe hacerse una lectura cuidadosa y activa de los textos que se presentan y responder las preguntas que se formulan con el propósito de ayudarle a los estudiantes a monitorear sus interpretaciones. En las puestas en común se debe hacer una conceptualización colectiva que culmine con la institucionalización de conceptos clave relativos a argumento en su calidad de objeto central de estudio.

Bloque 4: Elementos, estructura funcional y esquematización de un argumento

El trabajo al que te invitamos en este bloque requiere de tu parte una lectura activa del texto. Para este caso, la lectura activa incluye responder preguntas hechas dentro del texto, algunas de las cuales se anticipan al análisis que presentamos, con el propósito de generar para ti la oportunidad de contrastar tus respuestas con las nuestras y así vislumbrar aspectos por elaborar para obtener una mejor comprensión.

Para llevar a cabo las tareas que se plantean en los cinco primeros ítems, vamos a tener como referente la siguiente definición de argumento:

> Argumento es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La aserción puede exponerse en una proposición (es decir, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; o en una oración en la que se plantea una postura; o en una acción física realizada. Las razones que sustentan o justifican la aserción pueden ser oraciones (sean o no proposiciones) o acciones. De la idea propuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada y de la acción realizada interesa sustentar su aceptabilidad.

a) A continuación, se mencionan diez actividades discursivas, en cada una de las cuales tiene lugar un discurso escrito u oral:

- presentar una definición en un curso
- relatar cómo se construyó un cuadrado
- explicar por qué un procedimiento conduce a aquello para lo cual está creado
- verbalizar un procedimiento para multiplicar matrices en un curso de álgebra lineal
- describir el aspecto de una figura geométrica
- plantear una pregunta
- objetar una conjetura a la que se llegó explorando en un SGD
- explicar en qué consiste el uso de la definición de cuadrado para determinar si un caso particular es cuadrado
- usar la definición de cuadrado para determinar si un caso particular es cuadrado
- hacer una demostración en clase de geometría

Para cada una de las actividades mencionadas, considera un caso particular y, para este, determina si el respectivo posible discurso surgido en ella podría ser un argumento. Explica tu respuesta.

Nota: el análisis que apoye tu explicación debe tener en cuenta el tipo de expresión discursiva (expositiva) y el tipo de información (aserción y razones) que, según la definición dada, son **rasgos característicos de un argumento**.

b) En la definición de argumento, se alude a una expresión discursiva "expositiva". En tu opinión, ¿cuál puede ser el sentido de incluir el adjetivo señalado para definir sustancialmente lo que se entenderá por argumento?

c) En la definición de argumento, se alude a una expresión discursiva expositiva "conforme a normas compartidas". En tu opinión, ¿a qué normas puede estar refiriéndose la definición?

d) Basándote en la experiencia que has vivido en espacios académicos destinados a las matemáticas, en los que has tenido oportunidad de argumentar, ¿qué normas compartidas guiaban la producción de argumentos en la clase? ¿Notaste cambios de reglas de un curso a otro?

e) En la resolución del problema de la Opción B propuesto en el bloque 1, surgieron los siguientes tres argumentos:

- Como $BA \neq CA$, no existe punto D tal que $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$.
- En este caso [esta figura], $BA \neq CA$ y para el punto D, $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$, así que no estoy de acuerdo en que no existe el punto D.
- (Con referencia a la construcción auxiliar que está haciendo: la recta m tal que $C \in m$ y $m \parallel \overline{AD}$; $\{T\} = \overrightarrow{BA} \cap m$) Porque busco una configuración para aplicar el T. Fundamental de la proporcionalidad.

Usando la definición dada de argumento, explica por qué cada una de las tres expresiones discursivas es un argumento. Tu explicación debe determinar cuál es la aserción y cuál es la razón; especificar si la aserción trata de una proposición, una postura o una acción, y si la razón se expresa con una oración o una acción; determinar si lo que se justifica es la veracidad, la aceptabilidad o la razonabilidad.

Las siguientes citas tomadas de Knipping y Reid (2019) (en las que los autores, siguiendo a Stephen Toulmin,[13] presentan un esbozo ilustrado de la relación funcional de los elementos básicos de un argumento) nos apoyan en la conceptualización que pretendemos realizar aquí:

> Cuando Toulmin (1958) investiga la estructura funcional de argumentos racionales, en general, pregunta: "Entonces ¿qué se requiere para establecer conclusiones mediante la producción de argumentos?" (p. 97). La primera respuesta de Toulmin es que para apoyar la

13 Stephen Toulmin fue un pensador inglés del siglo pasado. Es reconocido en la actualidad por su aporte a la teoría de la argumentación, aporte del que se ha beneficiado considerablemente desde hace algunos años la Educación Matemática. En realidad, Toulmin, tal como lo anota en su obra seminal *The uses of argument*, no se interesó "en las maneras en que, de hecho, obtenemos nuestras conclusiones ni en los métodos para mejorar nuestra eficiencia para obtener conclusiones" sino "en el establecimiento subsiguiente de las conclusiones mediante la producción de un argumento que las sustenten" (Toulmin, 2003/1958, p. 17).

conclusión podrían citarse hechos (datos). Ilustra esto con el siguiente ejemplo. Si afirmamos que 'el pelo de Harry no es negro', podríamos basar esto en "nuestro conocimiento personal de que, en efecto, el color de pelo de Harry es rojo" (p. 97). Producimos un dato que consideramos es un hecho evidente para justificar nuestra aserción (conclusión). Si se acepta esto, este simple paso, dato—conclusión, puede representar un argumento racional. (pp. 3-4)

Pero este paso, su naturaleza y justificación, puede ser cuestionado, actual o potencialmente, y, por lo tanto, a menudo se justifica de manera explícita. En lugar de dar más información, se requiere formular una explicación más general mediante reglas, principios o licencias de inferencia (p. 98). La segunda respuesta de Toulmin aborda este tipo de cuestionamiento. Se podría dar una 'garantía' para establecer "de qué manera los datos ya producidos se relacionan con la conclusión" (p. 98). Estas garantías "actúan como puentes y autorizan la clase de paso al que nos compromete nuestro argumento particular" (p. 98). En el ejemplo anterior la garantía implícita del argumento es 'Si algo es rojo, no puede ser también negro' (p. 98). Si bien Toulmin reconoce que la distinción entre dato y garantía puede no ser siempre clara, sus funciones son distintas, "en un caso, dar una pieza de información, en el otro, autorizar un paso en un argumento" (p. 99). De hecho, la misma proposición podría servir como dato o como garantía o como ambos a la vez, dependiendo del contexto (p. 99), pero según Toulmin la distinción entre dato, garantía y conclusión o aserción proporciona los elementos para el "esqueleto de un modelo para analizar argumentos" (p. 99). En lo que sigue usamos "aserción" en casos en los que aún no se han proporcionado datos y garantías, y usamos "conclusión" cuando ya se han proporcionado dato y garantía. (p. 4)

Toulmin agrega otros elementos a este esqueleto, [...] Ambos, el dato y la garantía de un argumento, pueden ser cuestionados. Si un dato requiere sustento, se puede desarrollar un nuevo argumento en el que aquel sea la conclusión. Si una garantía está en duda, se puede ofrecer

> un enunciado para sustentarla, al que Toulmin denomina "respaldo".[14] (p. 4) (Traducción propia)

Enfoquemos algunos puntos expuestos en la cita de Knipping y Reid (2019). Así como, en castellano, *estructura de una oración* refiere a la disposición y relación de sus elementos básicos (sujeto y predicado) y *estructura de un texto expositivo* refiere a las partes constitutivas (introducción, desarrollo y conclusión) y articuladas para crear una unidad discursiva cohesionada, en el contexto que nos concierne aquí, podemos entender por *estructura funcional de un argumento* la disposición (el armazón) de los elementos que lo componen, determinada por la función que cada uno de ellos desempeña en el argumento.

f) De acuerdo con lo expuesto en la cita de Knipping y Reid (2019), ¿cuál es la estructura funcional de un argumento propuesta por Toulmin?

g) Teniendo en mente las dos primeras citas de Knipping y Reid (2019), escribe una breve narrativa que exponga cuál es el propósito de presentar un argumento y en qué consiste tal presentación.

h) Presenta un ejemplo de un argumento en el que sea posible reconocer claramente los elementos mencionados por Toulmin. Además, argumenta por qué el ejemplo dado es un argumento.

i) A la luz de la lectura, ¿"aserción" y "conclusión" son sinónimos? Explica tu respuesta.

j) A la luz de la lectura, ¿"justificación" y "argumento" son sinónimos? Explica tu respuesta.

14 En realidad, Toulmin incluye seis elementos como posibles componentes de un argumento. Los cuatro ya mencionados —dato, garantía, aserción o conclusión, respaldo de la garantía— y otros dos, matizadores modales y condiciones de excepción o de refutación. En nuestro estudio nos enfocamos en los tres primeros. Para una documentación amplia del tema recomendamos la lectura del capítulo "La forma de los argumentos" (Toulmin, 2007/1958), en la traducción que María Morrás y Victoria Pineda hacen del libro de Toulmin.

Refiriéndose a dato, aserción y garantía, Toulmin (2003/1958, p. 92) nos dice:

> Ya disponemos de los términos necesarios para componer el primer esbozo de un esquema para analizar argumentos. Podemos simbolizar la relación entre dato y aserción a la que aquel sirve de sustento con una flecha, e indicar la autoridad que nos permite pasar del dato a la aserción escribiendo la garantía inmediatamente debajo de la flecha.

$$\text{D} \xrightarrow[\text{Puesto que G}]{} \text{Entonces A}$$

Descripción de las tareas del bloque 4

Actividad que demandan las tareas: principalmente, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de los textos; además, responder por escrito las varias solicitudes que se presentan con el propósito de llamar la atención sobre aspectos clave del contenido que es objeto de estudio.

Propósito didáctico de las tareas: proveer una oportunidad para que los estudiantes se involucren en un proceso de estudio (lectura, interpretación, explicitación y escritura) que 1) les pide, de manera indirecta, usar su interpretación inicial de la definición de argumento dada como referente, y 2) de manera gradual y guiada, los lleva a enfocarse en los distintos rasgos caracterizadores de argumento, incluidos en la definición dada, y a explicitar lo que al respecto entienden e, incluso, a usar la definición para explicar por qué tres expresiones discursivas dadas son argumentos. Dicho de manera más general, nos proponemos crear un ambiente de aprendizaje que favorezca el paso de un conocimiento común sobre qué es argumento a uno especializado que se enfoca no solo en el tipo de expresión discursiva sino también en la estructura funcional de argumento propuesta por Toulmin.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: ninguno en particular.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: argumento como expresión discursiva —bien diferenciada de otros tipos de expresiones discursivas— que expone una aserción y las razones que la sustentan, indicando la respectiva relación funcional entre tales componentes.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: vemos las preguntas y solicitudes hechas como una especie de guía de lectura cuyo propósito es impulsar al lector a sacar buen provecho de los textos en cuestión. Esperamos que inviten a revisar lo leído en busca de hacer precisiones o claridades; que contribuyan a enfocar la atención en puntos que pasaron inadvertidos inicialmente; y que abran la oportunidad de expresar las propias interpretaciones sobre puntos particulares del texto. Además, para esta y todas las tareas que proponemos, prevemos la necesidad y conveniencia de prestar atención al uso cuidadoso del vocabulario, tanto el especializado como el que no lo es, con el propósito de lograr significados compartidos relacionados con el discurso sobre argumentación y de propiciar una participación cada vez más experta en el discurso en construcción.

Con la tarea propuesta en el ítem a, esperamos llamar la atención sobre el hecho de que no cualquier actividad discursiva propicia, de suyo, la explicitación de argumentos. Tal hecho se hace evidente al tener en cuenta, entre otras cosas, el objeto en el que se enfoca la acción discursiva y la intención comunicacional de esta. Por ejemplo, se relata un suceso (algo ocurrido) con la intención de dar a conocer detalles sobre los agentes involucrados, la secuenciación y la temporalidad de las acciones que lo conformaron; se describe un objeto o una situación con la intención de representarlo, de la manera más objetiva posible, en los aspectos que interesa destacar. De la definición que nos es referente, podemos inferir que exponer un argumento tiene como intención comunicacional presentar una aserción y razones que la sustentan. De ahí, es claro que ni relatar ni describir son acciones que, necesariamente, propician la producción y exposición de argumentos. Ahora bien, la acción discursiva de exponer algo no siempre lleva a la explicitación de un argumento;

esto es así en casos como exponer una norma, un hecho, una pregunta, una duda, una postura, una objeción, una definición, enumerar pasos de un procedimiento y explicar en qué consiste el uso de algo. Incluso, exponer solo razones sin explicitar la aserción a la que sustentan no se considera un argumento. Las consideraciones tratadas en este párrafo perfectamente pueden asociarse a la pregunta puesta en el ítem b.

De las diez actividades mencionadas, consideramos que solo tres de ellas podrían dar lugar a un discurso en el que se favorece la formulación de un argumento y su explicitación: explicar por qué un procedimiento conduce a aquello para lo cual está creado, usar la definición de cuadrado para determinar si un caso particular es cuadrado y hacer una demostración en clase de geometría. Los siguientes son ejemplos de argumentos que podrían surgir en actividades discursivas de los primeros dos tipos mencionados:

- Construir la recta perpendicular por el punto medio de un segmento produce la respectiva mediatriz porque cualquier punto P de la recta (que no pertenezca al segmento) junto con un extremo del segmento y el punto medio de este son los vértices de dos triángulos rectángulos congruentes, razón por la cual el triángulo conformado por el punto P y los extremos del segmento es isósceles. Por ello, es posible asegurar que el punto P equidista de los extremos del segmento, que es precisamente la condición que define a la recta mediatriz de un segmento.
- El cuadrilátero $ABCD$ no es cuadrado porque solo dos de sus ángulos son rectos; para que lo fuera, por definición, debería tener sus cuatro ángulos rectos y congruentes sus cuatro lados.

Respecto a la actividad de usar una definición para determinar si un caso es miembro de la clase de objetos definida, prevemos y esperamos que en la puesta en común surja la alusión a la posibilidad de impulsar la producción y explicitación de un argumento de manera indirecta, es decir, sin pedir de forma explícita que se argumente, con solo constituir la definición como criterio para tomar la decisión requerida. Respecto a la actividad de hacer una demostración matemática, cada paso de la demostración es un argumento por cuanto contiene una aserción y razones que la sustentan.

En todo caso, esperamos que la explicación que se dé para soportar cada respuesta recurra, como se indicó en el enunciado de la tarea, a un caso particular de la actividad que se esté analizando. La importancia de esta indicación se sugiere considerando un ejemplo. Si respecto a la actividad de objetar una conjetura a la que se llegó explorando en un SGD, en el caso particular propuesto, además de la verbalización "no estoy de acuerdo con..." se incluyera el señalamiento de un ejemplo en el que no se cumple la conjetura, sería esperable marcar dicha actividad como una que tiene el potencial para suscitar el surgimiento de un argumento; sin embargo, habría que advertir que la actividad no corresponde exactamente a la propuesta en la lista.

Con respecto al ítem c, es decir, en lo que concierne a las normas de acuerdo con las cuales se conforma una expresión discursiva expositiva que se pueda aceptar como argumento, prevemos respuestas provenientes de la experiencia en los cursos de geometría. En ese sentido, es probable la alusión al conocimiento matemático con el que se cuenta y que sirve de sistema teórico del cual obtener elementos para justificar. También es probable la alusión a reglas para apoyar la comunicación de argumentos (*e. g.*, uso de formatos, uso de esquemas, uso de estrategias). Para ilustrar, una regla apunta al tipo de expresión lingüística que permite identificar la relación funcional entre los enunciados que hacen parte del argumento.

Prevemos que abordar la pregunta sobre las normas compartidas que guían la producción de argumentos en los cursos de geometría (ítem d) y su evolución puede ser una oportunidad para comenzar a tener la experiencia formativa como referencia útil para alimentar el conocimiento sobre argumento. Es probable que los estudiantes tengan poco que decir al respecto; conviene entonces al profesor mencionar diversas normas de los cursos y señalar cambios en las reglas instaladas en distintos cursos.

La tarea puesta en el ítem e tiene un doble propósito: ofrecer una oportunidad para usar la definición de argumento como criterio para justificar que unas determinadas expresiones discursivas expositivas son argumentos; y, abrir un espacio para precisar el vocabulario especializado en la definición, mediante su uso en relación con los argumentos expuestos. Así, esperamos que esta tarea contribuya a avanzar en el entendimiento y conceptualización de argumento; para lo cual, sugerimos hacer evidente que los tres argumentos ejemplifican que la aserción puede ser una proposición, una postura o una acción realizada; podría ser necesario aludir a lo que caracteriza a una proposición y señalar la diferencia que tiene con un enunciado que presenta una postura. También es deseable llamar la atención sobre las tres conjunciones usadas —"como", "así que" y "porque"— que sirven para indicar la razón y la aserción en las siguientes plantillas para presentar argumentos —'**como** (*razón*), (*aserción*)'; '(*razón*), **así que** (*aserción* que refiere a una conclusión o consecuencia)'; '(*aserción*) **porque** (*razón*)'—.

Respecto a la estructura funcional de un argumento propuesta por Toulmin —esto es, en relación con el ítem f— esperamos que sea claro que dispone de manera relacional tres elementos básicos de un argumento: refiere a que dato, aserción y garantía se vinculan (se relacionan) entre sí en términos de la función que cada uno de ellos desempeña como parte del argumento. La manera funcional de relacionarse las partes de un argumento no es la única posible. La estructura sintáctica de un argumento hace alusión al orden de las palabras o frases dentro del argumento para dar sentido.

¿Para qué presentar un argumento? ¿En qué circunstancia se presenta un argumento? Son preguntas estrechamente relacionadas con la tarea propuesta en el ítem g. Se presenta un argumento en caso de querer sostener que una aserción es cierta o aceptable, porque para alguien no es evidente que lo sea (o puede no serlo). La presentación del argumento incluye dejar en claro cuál es la aserción cuya veracidad o aceptabilidad se apoya y qué dato es el que la apoya; si el dato no fuera suficiente como apoyo, ha de presentarse una garantía que permite conectar el dato con la aserción, con lo cual se apoya ya no la veracidad de la aserción, sino que el dato sí es apropiado para apoyar la aserción.

Es importante notar que la definición de argumento que nos sirve de referente no se enuncia en términos de acciones ni tampoco alude al sujeto que argumenta. Es decir, es una definición que se centra en el producto de un proceso (objeto) y no en el proceso mismo. Teniendo en cuenta el comentario anterior, es importante que al examinar los ejemplos de los estudiantes se explicite en lo posible cuál es la aserción y qué presenta (proposición, postura o acción realizada), cuál es la justificación para sustentarla, y cuáles son los términos que se usan para indicar la aserción y la razón. Con respecto a la razón aducida podría ser conveniente, si fuera el caso, permitir ver que alguien podría no estar satisfecho con aquella.

Aunque la definición dada de argumento no tiene alusión alguna al proceso de argumentación en el que pudo surgir, consideramos posible y útil hacer un ejercicio para distinguir entre argumento y argumentación; específicamente, para cuestionar la idea de que en un argumento siempre se parte de una aserción que se quiere apoyar, y que la meta es conseguir un dato que la apoye y/o una garantía. Consideramos que sería interesante incluir, en el trabajo sobre la tarea puesta en el ítem h, ejemplos donde no siempre se tiene para comenzar la aserción y no siempre la meta es obtener el dato. La idea es identificar los elementos y mostrar que la estructura funcional en cada caso es la misma.

Ejemplo 1: ¿Que por qué esta figura es un triángulo? Lo es porque fíjate que está conformada por los puntos M, N y P que son no colineales y por los segmentos MN, NP y PM, y eso es lo que está dicho en la definición de triángulo.

Ejemplo 2: La cuerda AB de esta circunferencia dista del centro 5 cm y lo mismo pasa con la cuerda MN. ¡Ah! Entonces, las cuerdas AB y MN son congruentes. Claro, porque cuerdas de una circunferencia equidistantes del centro de la circunferencia son congruentes.

Ejemplo 3: ¿Que qué característica tienen las alturas de un triángulo? Dibujé cinco triángulos, míralos... y les tracé sus alturas y veo que todas están por dentro de los triángulos. ¡Ah! Sí, entonces todos los triángulos tienen sus alturas dentro.

Respecto a las tareas propuestas en los ítems i y j esperamos que queden claras dos precisiones. Una, la diferencia entre “aserción” y “conclusión” está estrechamente ligada al proceso de producción de un argumento para apoyar la veracidad de una aserción que se conoce desde el comienzo. Tras aducir un dato y/o una garantía, la aserción se puede obtener como conclusión. Dos, "justificación" refiere al dato y/o a la garantía que apoyan respectivamente la veracidad de la aserción y la pertinencia del dato para apoyar la aserción. Así que la justificación es parte del argumento, pero no son sinónimos porque el argumento debe incluir la aserción que se sustenta. "Justifique" y "dé las razones por las que afirma esto" sí aluden a lo mismo.

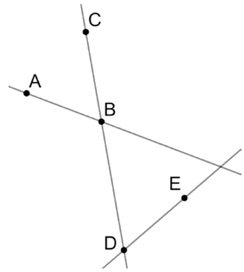
En relación con la precisión de términos clave que se hace al final del capítulo, prevemos la formulación de preguntas como las siguientes, con miras a explicitar y revisar ideas sobre el contenido tratado: ¿qué es una razón?, ¿puede el dato ser una razón?, usando la terminología de Toulmin ¿cuáles son los elementos que pueden componer una justificación?, ¿cuál es la diferencia entre argumento simple y argumento?, ¿cuál es la diferencia entre argumento y justificación? Y ¿cuál es la diferencia entre argumento y argumento matemático?

Bloque 5: Identificar y reconstruir argumentos presentes en una transcripción

Una vez hecha la precisión de términos clave (bloque 4), vamos a hacer un ejercicio de construcción de significado de tales términos mediante su uso en la identificación y reconstrucción de argumentos surgidos en una interacción en el aula. El éxito de esta tarea depende en gran medida de que te comprometas con una lectura activa del texto como en el bloque anterior. También incluye anotar preguntas, dudas y comentarios **relativos** al texto, encaminados a entenderlo mejor.

En la transcripción de un breve intercambio de Juan y Lina —estudiantes de un curso de geometría de primer semestre universitario— cuando trabajan conjuntamente para resolver una tarea, vamos a buscar la presencia de argumentos simples y a reconstruirlos usando la estructura funcional propuesta por Toulmin.

En la figura, $m\angle ABC = 57^\circ$ y $\angle ABC \cong \angle BDE$.
¿Por qué la $\overleftrightarrow{BD}$ no es perpendicular a la $\overleftrightarrow{DE}$?



1 **Hans:** Pues... la figura lo muestra así, miren las esquinas... no forman una cruz.

2 **Lina:** ¿Qué es lo que quiere decir que una recta sea perpendicular a otra?

3 **Juan:** **a** Que en su intersección se forma un ángulo recto...

b Pero lo que tenemos que decir es por qué la recta *BD* **no** (enfatiza la voz) es perpendicular a la recta *DE*.

4 **Lina:** Pues... porque los ángulos eeehh... *BDE*, *ED*... *F*, *FDG* y *GDB* no son rectos (al referirse a los cuatro ángulos de vértice *D*, ha nombrado como *F* y *G* dos puntos que no están marcados en la figura)

5 **Juan:** **a** ¿Y así no más?

b ¿Por qué el ángulo *BDE* no es recto?

6 **Lina:** **a** ¡Fácil!

b Por ser congruente al ángulo *ABC* mide lo mismo, mide 57, ya que ángulos congruentes tienen la misma medida.

7 **Juan:** Sí... ahora, nos falta decir por qué los otros tres ángulos no son rectos.

8 **Lina:** **a** Porque se ve... No, mentiras.

b El opuesto por el vértice al ángulo *BDE* también mide 57.

9 **Juan:** Y los otros... cada uno, 180 menos 57.

10 **Lina:** Como los ángulos miden 57 y 123, no son rectos; para ser rectos, tendrían que medir 90.

Comenzamos el análisis con una lectura completa y cuidadosa de la transcripción con miras a formarnos una idea lo más clara posible de lo sucedido en la interacción en lo que concierne a la argumentación. Como resultado escribimos el siguiente relato que, aunque no tiene detalles, esboza un episodio:

> En la interacción se da (ocurre) una argumentación. Esta comienza por explicitar lo que entienden por rectas perpendiculares y se configura mediante acciones para justificar por qué ninguno de los cuatro ángulos determinados por la intersección de las dos rectas en cuestión es recto.

a) ¿Estás de acuerdo en que el relato anterior da una idea global de lo sucedido? ¿Difiere tu interpretación de la expuesta? ¿Incluirías más información en tu relato?

Escribir un relato breve tiene una doble finalidad: es parte de la actividad de dar sentido como un todo a lo leído, seleccionando lo que se considera más relevante, y también establece un referente útil para dilucidar posibles diferencias de interpretación.

El análisis continúa con una nueva lectura de la transcripción. En este caso, en busca de la presencia de argumentos.

b) Lee la transcripción con ese propósito y determina cuántos y cuáles posibles argumentos detectas.
c) ¿Ves la presencia de algún argumento en el fragmento [1-4] de la transcripción? Explica tu respuesta.

En el fragmento de transcripción conformado por las intervenciones [3b] y [4] vislumbramos la presencia del primer argumento. Para examinar la situación, vamos a analizar las oraciones en las mencionadas intervenciones enfocándonos en las funciones que cumplen desde el punto de vista argumentativo (análisis funcional), con miras a identificar si se explicita una aserción que ha de ser sustentada, si se presentan datos para justificar la aserción, si se explicita una garantía para avalar los datos como justificación de la aserción. La siguiente es la expresión discursiva que vamos a analizar —hemos suprimido las descripciones puestas por el transcriptor y hemos unido en un solo texto las dos intervenciones para enfocarnos en las verbalizaciones mismas—:

> [...] lo que tenemos que decir es por qué la recta *BD* no es perpendicular a la recta *DE*. Pues porque los ángulos *BDE*, *EDF*, *FDG* y *GDB* no son rectos.

Sin duda hay una aserción para la cual se pretende dar un porqué ("tenemos que decir [...] por qué [...]") y está expresada de manera explícita —mediante una proposición ("la recta *BD* no es perpendicular a la recta *DE*")—, condición que no necesariamente ocurre siempre ya que a menudo nos conformamos con que la aserción se pueda inferir del contexto del intercambio. El uso de la expresión "Pues porque" nos indica la conexión entre la oración en la que aparece y la anterior; así, vemos que en [4] se dan datos respecto a los ángulos determinados por las rectas consideradas, como justificación de la aserción. No es explícita la garantía que respalda la conexión de la aserción con los datos que la justifican. En resumen, estamos ante un argumento simple incompleto:

Dato:	Los ángulos *BDE*, *EDF*, *FDG* y *GDB* no son rectos
Aserción:	La recta *BD* no es perpendicular a la recta *DE*
Garantía:	(No es explícita, aunque es posible entreverla: definición de rectas perpendiculares)

Ese argumento y algunos detalles de la argumentación en la que surgió los podemos representar, adaptando el esquema del Modelo de Toulmin para analizar argumentos (*i. e.*, la estructura funcional de argumento), como se muestra en la figura 16:

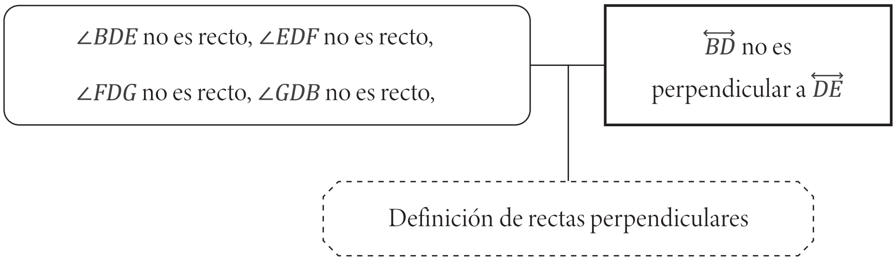


Figura 16. Diagrama asociado al argumento simple

Nuestros esquemas funcionales van a tener las siguientes convenciones, basadas en lo que proponen al respecto Knipping y Reid (2019): el dato se presenta en marco rectangular con esquinas redondeadas, la aserción en marco rectangular y la garantía en marco rectangular con esquinas anguladas; además, la línea gruesa de un marco indica que tal elemento del argumento se infirió en la argumentación, y la línea discontinua (guiones) de un marco indica que tal elemento no se explicitó en la argumentación. De esa manera, los esquemas propuestos no solo reportan el argumento mismo, sino que permiten vislumbrar una huella de la argumentación llevada a cabo: resaltan lo que es inferido durante el proceso y precisan si la garantía se produjo implícitamente o no. Este comentario cobrará más sentido cuando en el capítulo 6 se esquematicen los argumentos surgidos en argumentaciones de distinto tipo (*i. e.*, deductiva, inductiva y abductiva).

Para examinar el fragmento de transcripción conformado por las intervenciones [5-6b], en busca de la presencia de un argumento, consideramos útil relatar primero lo que ahí sucedió:

> Puesto que los datos aportados como evidencia, obtenida perceptualmente, de la no perpendicularidad de las rectas no es suficiente como justificación para uno de los estudiantes, este hace un cuestionamiento y, en consecuencia, se abre la oportunidad para hacer un argumento que sustente por qué uno de los datos es verdadero.

d) ¿Estás de acuerdo en que el relato anterior da una idea global de lo sucedido? ¿Difiere tu interpretación de la expuesta? ¿Incluirías más información en tu relato?

e) ¿Ves en el fragmento [5-6b] la presencia de un argumento? Tu respuesta debe apoyarse en la identificación de los tres elementos consabidos. ¡Anímate a responder por escrito!

f) ¿En qué difiere tu respuesta anterior de la que diste en el literal b? (Esta pregunta pretende impulsarte a monitorear el progreso del significado que atribuyes a argumento.)

Los términos "por" (por razón de, a causa de) y "ya que" (porque, puesto que) presentes en la expresión discursiva de la intervención [6b] juegan un papel importante en el momento de hacer el análisis funcional; ambos nos indican la presencia de sendas razones. Centramos la atención en

> [El ángulo BDE] [p]or ser congruente al ángulo ABC, mide lo mismo [que el ángulo ABC] [...] ya que ángulos congruentes tienen la misma medida.

La primera razón que se está ofreciendo es que los ángulos BDE y ABC son congruentes, razón esta que no es cuestionable pues es una de las condiciones puestas en el enunciado de la tarea; es decir, cuenta como dato.

g) ¿Dato o evidencia para justificar qué aserción?

h) Y, ¿qué función, desde el punto de vista argumentativo, tiene la afirmación "los ángulos congruentes tienen la misma medida"?

i) ¿Qué rasgo notorio diferencia la razón que justifica la aserción de la razón que justifica la conexión dato-aserción?

En [6b] vemos un argumento simple que esquematizamos como en la figura 17:[15]

15 Como lo hemos mencionado, este esquema representa no solo un argumento sino también aspectos de la argumentación en la que este surgió. En ese sentido, hay un abuso del lenguaje al insinuar que el esquema solo representa un argumento. De ahora en adelante, por cuestión de economía del discurso, incurriremos en dicho abuso.

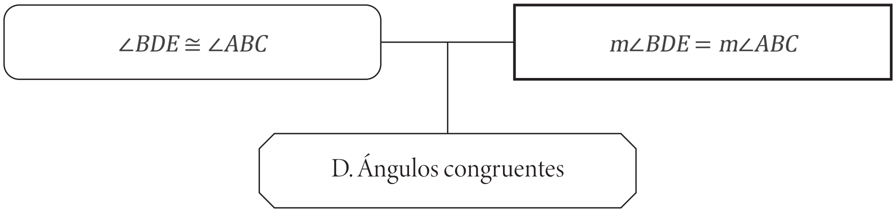


Figura 17. Diagrama del argumento simple asociado a [6b]

Así, aunque la intención de los estudiantes —que se puede intuir de las intervenciones [5b y 6]— era justificar que el ángulo BDE no es recto, la aserción a favor de la cual argumentaron es que los ángulos BDE y ABC miden igual.

j) Agrega una intervención a la transcripción en la cual sustentes que el ángulo BDE no es recto; presenta el argumento en un esquema. ¡No pierdas la oportunidad de hacer tu argumento para lo mencionado!

Hilando fino, vemos tres argumentos simples (articulados tácitamente por la conjunción "y") para llegar a sustentar que el ángulo BDE no es recto. El primero tiene dos datos incontrovertibles —1) los ángulos BDE y ABC tienen la misma medida (aserción justificada en el argumento simple expuesto antes); 2) el ángulo ABC mide 57 (dato proporcionado en el enunciado de la tarea)— para justificar la aserción "el ángulo BDE mide 57"; la conexión que permite el paso de los datos a la aserción es la transitividad de la relación de igualdad o el Principio de Sustitución. El segundo se vale de dos datos —1) el ángulo BDE mide 57 (aserción que se acaba de justificar); 2) $57 \neq 90$ (dato que no requiere justificación pero que si se exigiera se podría dar)— para justificar la aserción "el ángulo BDE no mide 90"; la garantía que justifica la conexión entre datos y aserción es el Principio de Sustitución. El tercero tiene como dato la aserción que se acaba de justificar (el ángulo BDE no mide 90), la aserción por justificar es "el ángulo BDE no es recto" y la garantía que autoriza el paso del dato a la aserción es "la definición de ángulo recto".

k) ¿Están cercanas la respuesta que diste y la que presentamos nosotros? Podrías contrastarlas con miras a darte cuenta de diferencias en el análisis funcional realizado.

La narrativa hecha en el párrafo anterior muestra una secuencia ordenada y articulada de tres argumentos simples en los que la aserción justificada en uno sirve de dato para el siguiente. Esta cadena ilustra lo que denominamos *argumento nuclear*, cuya definición daremos más adelante.

Examinamos ahora el fragmento de la transcripción delimitado por las intervenciones [7-10]. Para ello, tomamos como expresión discursiva para analizar la siguiente:

> [...] nos falta decir por qué los otros tres ángulos no son rectos. El opuesto por el vértice al ángulo *BDE* también mide 57. Y los otros... cada uno, 180 menos 57. Como los ángulos miden 57 y 123, no son rectos; para ser rectos, tendrían que medir 90.

l) Relata por escrito el suceso que ves a través de la expresión discursiva anterior y luego compáralo con el que exponemos a continuación. ¿Estamos dando el mismo sentido al texto? ¿En tu relato usaste algún término especializado relativo al objeto que estamos estudiando (argumento)?

Nuestro relato de lo sucedido en las intervenciones [7-10], cuyo propósito es que nos sea útil para examinar los argumentos surgidos, es:

> Se proponen justificar que los otros tres ángulos de vértice *D* no son rectos. Para ello se centran en establecer las medidas de tales ángulos con miras a contrastarlas con la medida que deberían tener si fueran rectos. (Para hacer más fácil referirse a los ángulos vamos a tener en cuenta la intervención [4]; así, los ángulos *BDE* y *EDF* son par lineal y los ángulos *FDG* y *GDB* son par lineal.)

En el marco de la interpretación anterior y siguiendo de cerca la expresión discursiva, en primer lugar, identificamos una aserción que se proponen justificar (la parafraseamos así: ángulo *FDG* no es recto, ángulo *EDF* no es recto, ángulo *GDB* no es recto); en segundo lugar, reconocemos tres datos que dan información sobre la medida de los tres ángulos implicados en la aserción (los parafraseamos así: ángulo *FDG* mide 57, ángulo *EDF* mide 123, ángulo *GDB* mide 123); en tercer lugar, vemos que la garantía, parafraseada, es la proposición condicional —que hace parte de la definición de ángulo recto— "si un ángulo mide 90, entonces es recto" —que es equivalente semántica y lógicamente a la proposición "si un ángulo no mide 90, entonces no es recto", la cual establecería la conexión entre datos y aserción en el caso que nos ocupa—.

m) ¿Estás de acuerdo con las identificaciones expuestas? La expresión "El [ángulo] opuesto por el vértice al ángulo *BDE*" tiene la función de describir al ángulo *FDG*. Desde el punto de vista de la argumentación ¿ves que cumpla algún papel? ¿Podría ser un dato? ¿Dato para qué? Y la afirmación "los otros [ángulos miden] cada uno 180 menos 57", ¿qué función cumple desde el punto de vista de la argumentación?

En resumen, en el fragmento [7-10] encontramos presencia de un argumento simple y de elementos con los que se podría apoyar, en caso de ser necesario, la veracidad de los datos.

El análisis de los distintos fragmentos en que separamos la transcripción nos permite asegurar que hay lo que llamamos un *argumento global* para sustentar que la recta *BD* no es perpendicular a la recta *DE*. Ese argumento global —esquematizado en la figura 18— está conformado por seis argumentos simples (A_1, A_2, ..., A_6). Los cuatro primeros forman una cadena lineal en la que la aserción justificada de A_1 es o hace parte del dato de A_2, la aserción justificada de A_2 es o hace parte del dato de A_3, la aserción justificada de A_3 es o hace parte del dato de A_4. Tal cadena de argumentos simples sustenta que el ángulo *BDE* no es recto, habida cuenta de la información que da el enunciado. Los argumentos A_4 y A_5, independientes entre sí, junto con A_6 constituyen una cadena no lineal que sustenta que la rectas *BD* y *DE* no son perpendiculares dado que ninguno de los cuatro ángulos de vértice *D* es recto. La primera cadena descrita (A_1 a A_4) ilustra lo que denominamos *argumento nuclear*; esto es, la aserción justificada de dicha cadena se convierte en un dato de un argumento simple posterior (A_6). Con esto podría decirse que sustentamos la no perpendicularidad de las rectas mediante una cadena no lineal formada por tres argumentos, uno nuclear y dos simples.

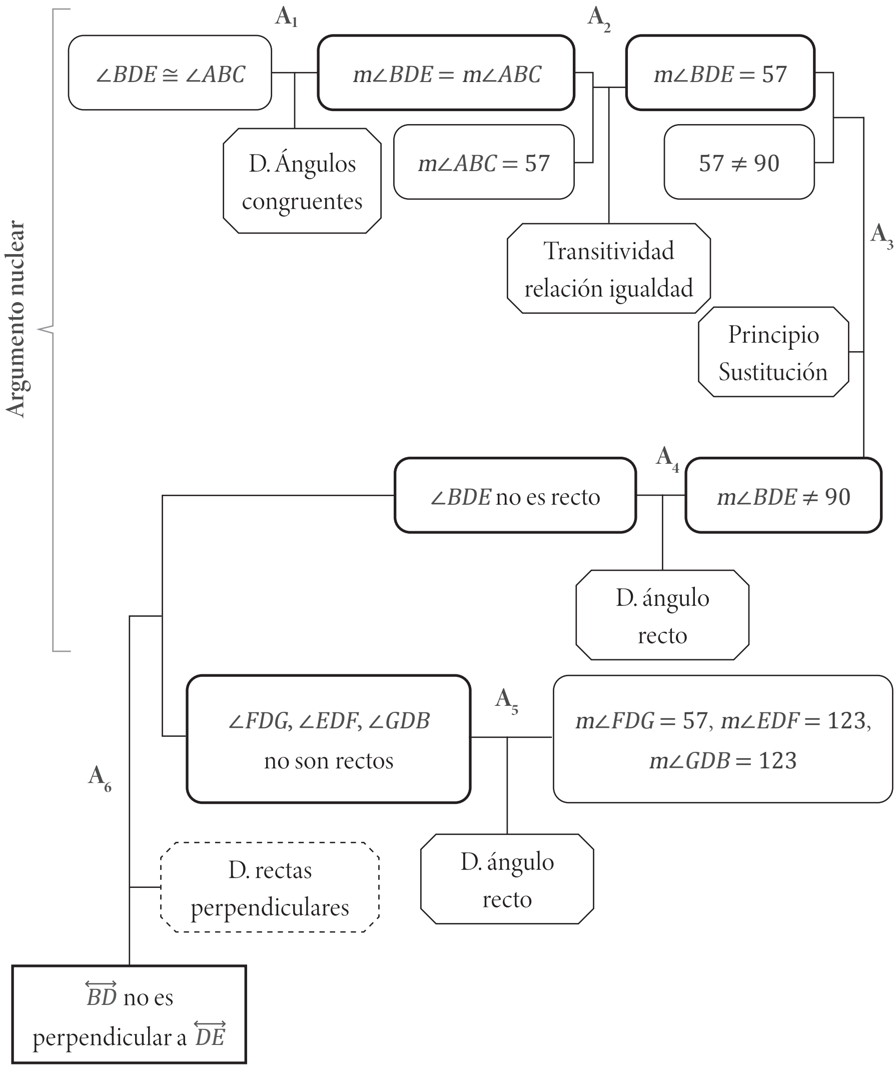


Figura 18. Esquema de argumento global para sustentar la no perpendicularidad de la $\overleftrightarrow{BD}$ y la $\overleftrightarrow{DE}$

Descripción de las tareas del bloque 5

Actividad que demandan las tareas: principalmente, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de un análisis cuyo objetivo es identificar y reconstruir argumentos presentes en una transcripción; se deben responder preguntas hechas dentro del texto. Se solicita un análisis de un pequeño texto para luego contrastarlo con el que presentamos. El propósito es generar la oportunidad para que el lector elabore una mejor comprensión de ciertos aspectos. También se solicita que el lector anote preguntas, dudas y comentarios relativos al texto para que se presenten a los demás en la puesta en común y se generen así oportunidades de aclarar asuntos relacionados con el texto leído.

Propósito didáctico de las tareas: el principal propósito es proveer una oportunidad más para que los estudiantes participen en un proceso de construcción de significado de términos clave para la conceptualización de argumento, mediante el respectivo uso en la identificación y reconstrucción de argumentos surgidos en una interacción en el aula; un propósito asociado al principal es presentar dos objetos más que aportan a la conceptualización mencionada: argumento nuclear y argumento global. Un propósito marginal de este bloque de tareas es brindar una oportunidad para iniciar el desarrollo de una competencia analítica para identificar y reconstruir argumentos esbozados en intercambios en el aula, oportunidad que permite observar, de cerca, a un experto haciendo análisis de este tipo.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: la estructura funcional que propone Toulmin para reconstruir argumentos surgidos en procesos de argumentación.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: el uso de la estructura funcional para identificar y reconstruir argumentos producidos en un discurso en el aula de matemáticas.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: la escritura de un relato que esboce un episodio (como resultado de la lectura e interpretación de la transcripción) puede ser un trabajo exigente para quienes no tienen el hábito de hacerla. Es probable que no puedan dejar de mencionar detalles que podríamos considerar irrelevantes para lo que interesa aquí —presentar información relacionada con el contenido de la argumentación producida durante la interacción—. El relato que presentamos es deliberadamente breve. Esto tiene dos intenciones: por un lado, mostrar que es posible hacerlo así de breve; por otro lado, ofrecer un referente contra el cual se puedan comparar otros relatos no solo desde el punto de vista de la extensión sino también desde el punto de vista semántico. Dos son los aspectos que podrían tenerse en cuenta al considerar los relatos: 1) el nivel de precisión y 2) el carácter integrador y articulador que permite presentar lo sucedido no como una reunión de subeventos sino como un episodio. Además de breve, el relato que presentamos no da toda la información relevante: falta la explicitación de la aserción que se pretende sustentar (*i. e.*, $\overleftrightarrow{BD}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{DE}$). El relato fue construido a propósito con esa falencia, para así generar un asunto de discusión y un ambiente propicio para manifestar las interpretaciones de lo que debe contener el relato.

La tarea presentada en el ítem a tiene la pretensión de destacar dos asuntos: uno, en el relato falta explicitar como información relevante la aserción que se va a sustentar; dos, en el relato no es pertinente incluir información que dé detalles no relevantes para establecer la estructura funcional del argumento. Al respecto de estos dos asuntos sugerimos, como recurso didáctico de la puesta en común, preguntar, por ejemplo, qué aspectos de la transcripción no debe tener un relato.

En relación con la tarea puesta en el ítem b, para detectar inicialmente la posible presencia de argumentos en la transcripción, es probable que la atención se enfoque ante todo en expresiones verbales que de manera evidente indican la intención de exponer una razón —*e. g.*, "¿por qué?", "porque", "ya que"—. Así, se estaría identificando argumento con justificación, lo cual no es consistente con la conceptualización acordada. Una indagación sobre cuántos argumentos vislumbraron y cómo llegaron a detectarlos permitiría hablar sobre los mencionados indicadores y sobre otras expresiones que, por el contexto en el que se usan, se infiere que anteceden a una razón —*e. g.*, "por", "como"— y, en ese sentido, también son indicadores. También podría aludirse a la carencia de ese tipo de indicador, situación que hace inevitable enmarcar las verbalizaciones en el contexto en que se producen y tener en cuenta otros detalles del discurso oral —*e. g.*, pausas, entonaciones— que en el discurso escrito se traducen en signos ortográficos —*e. g.*, dos puntos, expresión entre comas— para poder identificar y distinguir funcionalmente los enunciados que conforman el argumento.

Para ilustrar algo de lo dicho, en el contexto de la conversación de Lina y Juan, remplacemos la intervención [7(b)] "El opuesto por el vértice al ángulo *BDE* también mide 57" por "Este ángulo (señala con el dedo), que es opuesto por el vértice al ángulo *BDE*, también mide 57". En la verbalización anterior no hay ningún marcador verbal que indique que se está aportando una razón. Sin embargo, al recurrir al contexto inferimos que en esa verbalización se está aportando una razón para justificar que uno de los tres ángulos de vértice *D* no es recto: "Este ángulo, también mide 57 y, por esa vía, no es recto". La razón está sugerida por la nota explicativa que va entre comas: la explicación de la medida del ángulo está dada porque el ángulo es opuesto por el vértice al ángulo *BDE*.

Con relación a la tarea que plantea el ítem c, consideramos que es posible la identificación de un argumento simple incompleto conformado por la aserción que, indirectamente, plantea la pregunta inicial (¿Por qué las rectas no son perpendiculares?) y la línea 1 de la trascripción. Así, la aserción del argumento es "las rectas no son perpendiculares", el dato es "las esquinas no forman una cruz", y la garantía implícita "si las esquinas no forman una cruz, entonces no son perpendiculares". Una discusión interesante puede surgir cuando se cuestione la aceptación o no de dicho argumento. Para decidirlo, es necesario discutir si la posible garantía identificada (si las esquinas no forman una cruz, entonces no son perpendiculares) es o no es una norma compartida por la comunidad: si lo es (como puede suceder en un curso de matemáticas de básica primaria), el argumento es aceptable; si no lo es (como puede suceder en un curso de nivel universitario), el argumento no es aceptable. Por otra parte, si consideramos las líneas [2] y [3a] reconocemos que no existe la posibilidad de identificar un argumento; en ese fragmento de la transcripción se expone la definición de recta perpendicular.

Respecto a las tareas puestas en los ítems d, e y f, al reconstruir argumentos usando el esquema de la estructura funcional que hemos adoptado, prevemos que podría surgir un asunto para discutir, que tiene que ver con el hecho de usar más de una garantía para un argumento simple. Para ilustrar esto, tomamos las líneas 5 y 6 de la trascripción:

5	**Juan:**	**b**	¿Por qué el ángulo BDE no es recto?
6	**Lina:**	**a**	¡Fácil!
		b	Por ser congruente al ángulo ABC mide lo mismo, mide 57, ya que ángulos congruentes tienen la misma medida.

Una posible reconstrucción de un argumento asociado a este fragmento se fundamenta en el hecho de que la aserción subyacente en la pregunta de la línea [5b] (el ángulo BDE no es recto), en [6b] se justifica con el dato (el ángulo BDE congruente al ángulo ABC y el ángulo ABC mide 57), y son tres las garantías involucradas: la definición de ángulos congruentes (explícita), la transitividad de la igualdad (implícita) y la definición de ángulo recto (implícita). El esquema correspondiente se presenta en la figura 19:

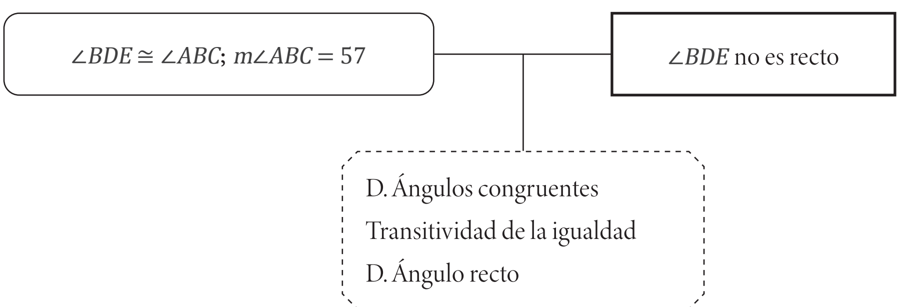


Figura 19. Diagrama del argumento deductivo asociado a 5b y 6b

Al abordar el asunto es deseable hacer dos aclaraciones. La garantía de un argumento simple es siempre una proposición condicional general cuyo antecedente y consecuente presentan respectivamente el dato y la aserción del argumento. En el caso que nos ocupa, esto no se cumple: al examinar las proposiciones que se ponen como garantía, no todas aluden a la aserción o no todas aluden al dato de forma consistente. Por ejemplo, si se examina la proposición que enuncia la definición de ángulos congruentes (dos ángulos son congruentes si y solo si sus medidas son iguales), lo que se toma como antecedente para el argumento (dos ángulos son congruentes) efectivamente alude al dato de este ($\angle BDE \cong \angle ABC$); sin embargo, lo que sería su consecuente (sus medidas son iguales —rasgo que se realiza, en este caso, en $m\angle BDE = m\angle ABC$—) no alude a la aserción del argumento ($\angle BDE$ no es recto). Por otro lado, es importante advertir que, en el marco de un diálogo que se trascribe, no es usual que la garantía de un argumento se explicite, razón por la cual es necesario que el analista la reconstruya.

Además, siempre un argumento simple contiene una única garantía; en consecuencia, no es correcto poner varias en el rectángulo correspondiente del diagrama, para sustentar la pertinencia del dato como soporte de una única aserción. Esto por dos razones, la primera más de forma, la segunda muy sustancial; las exponemos enseguida. 1) Realizar un diagrama de un argumento simple con varias garantías no permitiría indicar, consistentemente, aquellas que son implícitas y aquellas que son explícitas. En el ejemplo anterior, Lina alude de manera explícita al enunciado de la definición de ángulos congruentes; sin embargo, no ocurre lo mismo con las otras garantías. Así las cosas, no sería evidente el criterio de escogencia para el tipo de rectángulo que contiene las garantías en dicho diagrama, ¿es con línea continua pues hay una garantía explícita, o es con línea discontinua pues hay dos garantías implícitas? Responder la pregunta es asunto conflictivo. 2) Cuando se propone como necesario poner varias garantías, de fondo lo que se está identificando es la necesidad de reconstruir varios argumentos simples que, conectados en una cadena, conforman un argumento más complejo que permite soportar dicha aserción (una explicación más profunda al respecto se hace al final de la presentación del bloque 5 cuando se habla de *argumento nuclear* y *argumento global*). Para el caso tomado como ejemplo, el supuesto argumento se puede reestructurar mediante tres argumentos simples que se diagraman como se muestra en la figura 20.

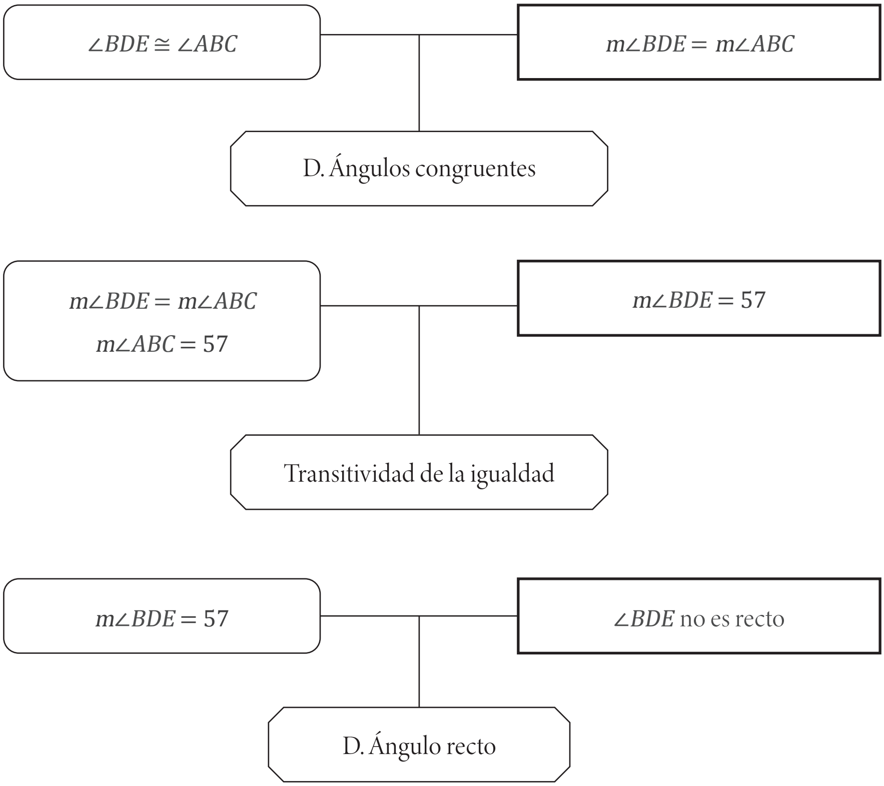


Figura 20. Diagrama del argumento deductivo asociado a 5b y 6b

Precisamente, con el propósito de ofrecer una oportunidad para explicitar y precisar la interpretación al respecto de lo que se explica al final de la presentación del bloque 5 sobre argumento nuclear y global, sugerimos formular la pregunta ¿qué diferencia encuentran entre un argumento simple, un argumento nuclear y un argumento global? Así mismo, que se proponga restructurar algún argumento simple con varias garantías de manera que se formulen los argumentos simples y se decida si el argumento que los conecta es un argumento nuclear o global.

En síntesis...

Términos clave

Como resultado del estudio que hemos realizado, asumimos las siguientes conceptualizaciones:

Argumento es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. Esta conceptualización refleja la intención justificativa de un argumento, a la que denominamos valor epistémico del argumento.

Aserción se expone en una proposición (es decir, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; o en una oración en la que se plantea una postura; o en una acción física realizada. De la idea propuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada y de la acción realizada interesa sustentar su aceptabilidad.

Justificación es un conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de la aserción. Así, una justificación no es un argumento porque no incluye la aserción.

Argumentación es un proceso discursivo y sociocultural en el que surgen argumentos.

Argumento simple es un argumento conformado por tres elementos —dato, aserción y garantía— relacionados funcionalmente así: el dato da fundamento a la aserción, es evidencia que justifica la aserción; la garantía sustenta la relación del dato y la aserción, justifica con un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. En caso de que falte la garantía, hablamos de argumento simple incompleto.

Argumento matemático es un argumento en el que la aserción versa sobre un objeto matemático (*e. g.*, propiedades o relaciones entre propiedades) y las razones aducidas pueden referirse o no a condiciones de índole matemática. En todo caso, el carácter matemático del argumento está asociado al tipo de actividad que hace parte de la argumentación de la que surge (*e. g.*, generalizar, visualizar, explorar, representar, abstraer, clasificar o inferir).

Estructura funcional de un argumento refiere a la disposición esquematizada de los tres elementos básicos de un argumento, en la que se indica su relación funcional en el argumento.

Argumento global es un argumento conformado por una cadena de argumentos simples que exponen el sustento de la aserción principal.

Argumento nuclear hace parte de un argumento global; está conformado por una cadena de argumentos simples que expone el sustento de una aserción, la cual sirve de dato de otro argumento simple que hace parte del mismo argumento global.

Estrategia para reconstruir argumentos esbozados en intercambios de clase transcritos

La estrategia que hemos seguido para caracterizar argumentos, esbozados de manera más o menos clara, en una interacción entre estudiantes o estudiantes y profesor, cuando contamos con la transcripción de una videograbación, tiene similitud con la propuesta por Knipping y Reid (2019). Podemos resumirla en el siguiente procedimiento:

1. Delimitar el fragmento de transcripción en el que se entrevé la presencia de un posible argumento.

2. Hacer una contextualización, sustancial pero sintética, que sirva como introducción del fragmento que se analizará. La contextualización puede aludir, por ejemplo, a la situación o intención que motivó el intercambio (solución de un problema, justificación de una idea, discusión en torno a algo), o a información específica con la que cuentan los estudiantes al comenzar el intercambio (una construcción, condiciones dadas en un problema, un resultado previo sobre el cual se está hablando, etc.).
3. Escribir un relato corto que permita dar una idea clara de lo que trata la argumentación. Tal esfuerzo permite hacer ostensivo lo que se ha interpretado del fragmento en relación con la idea panorámica de la argumentación presente en él.
4. Armar un párrafo conformado por las frases de la transcripción que son clave para reconstruir el argumento. Si es necesario, se pueden editar las frases en aras de dejar el texto lo más limpio y claro posible. Parte de esa edición consiste en usar letra negrilla para destacar palabras que son indicadores de 1) los elementos de la estructura funcional del argumento (dato, aserción, garantía) o 2) indicadores de la oración (proposición) que expresa lo que se infiere en el argumento.
5. Verbalizar el argumento presentándolo en un texto o esquematizar el argumento recurriendo al modelo funcional de Toulmin.

Capítulo 6
Tareas para desarrollar conocimiento especializado sobre tipos de argumento

En el capítulo 4 las tareas presentadas ofrecen a los estudiantes la oportunidad, asociada a la solución de un problema de geometría, de usar su significado personal de argumento y explicitarlo por escrito. En el capítulo 5 las tareas buscan la participación en un recorrido de construcción de significado del objeto argumento, que tiene dos partes: una, concentrada en entender lo que expresa la definición de argumento —con la que se trabaja de ahora en adelante— y en precisar algunos términos clave afines; otra, dedicada a identificar y reconstruir argumentos a partir de la transcripción de un intercambio verbal en una clase de geometría, ejercicio en el que se usan las definiciones estudiadas.

Los tres bloques de tareas (bloque 6, bloque 7 y bloque 8) que conforman el capítulo 6 son insumos que pueden apoyar respectivamente el desarrollo de un conocimiento especializado sobre argumento de tipo inductivo, deductivo y abductivo. Reiteramos que esta tipología caracteriza no a los argumentos sino a la argumentación y lo hace en términos de qué elemento básico se infiere en el proceso (i. e., la garantía y la aserción; la aserción; el dato y la garantía o solo la garantía). Abusando del lenguaje, un argumento simple, surgido en uno de esos tipos de argumentación, se nombra con el correspondiente adjetivo. Además, en los tres bloques de tareas se ilustra la reconstrucción de argumentos de los tipos mencionados. En el bloque 7, el dedicado al argumento deductivo, se abordan elementos de la lógica que son clave para la actividad argumentativa.

Bloque 6: Argumento inductivo

Para potenciar la utilidad de tales insumos, deben hacer una lectura cuidadosa y activa de los textos que se presentan y responder tanto las preguntas formuladas dentro del texto como las que aparecen fuera de él, con el propósito de que puedan monitorear sus interpretaciones.

Los tres elementos básicos que componen un argumento simple tienen una relación funcional que es siempre la misma, sin importar cuál haya sido el curso de la argumentación en la que aquel haya surgido. En cualquier caso, el dato fundamenta (le da base a) la aserción, y la garantía fundamenta el paso del dato a la aserción. Al tener en cuenta el curso de una argumentación específica, más precisamente, tener en cuenta cuál de los elementos del argumento simple producido se infiere, y cuál de los elementos se da por sentado, es posible reconocer tres situaciones argumentativas diferentes, que denominamos argumentación deductiva, argumentación inductiva y argumentación abductiva.

A partir de estas situaciones podemos generar una tipificación que resulta de total pertinencia para examinar la argumentación en el ámbito educativo. Así, es posible que la aserción haya sido expuesta desde el inicio de la argumentación y se acepte como verdadera —razón por la cual no es interés de la argumentación examinar su veracidad— y, sea el dato el elemento que deba aportarse como resultado probable de la argumentación, es decir, deba inferirse; en esta situación argumentativa, diremos que el argumento producido proviene de una argumentación abductiva y, para abreviar, lo denominamos simplemente argumento abductivo. Otra situación argumentativa posible consiste en exponer información en calidad de dato —información que se acepta como verdadera— y, sean la garantía y la aserción los elementos que deban inferirse como resultados probables de la argumentación; en esa circunstancia, aludimos al argumento proveniente de una argumentación inductiva y, para abreviar, lo denominamos argumento inductivo. Una tercera situación argumentativa posible se caracteriza por tener como ciertos, desde el inicio de la argumentación, el dato y la garantía a partir de los cuales se infiere la aserción como resultado necesario; en tal situación, aludimos al argumento proveniente de una argumentación deductiva y, para abreviar, lo denominamos argumento deductivo.

> En el párrafo anterior hemos usado el verbo "inferir" en tres ocasiones y está sugerido el significado que le estamos dando al respectivo verbo. En tu opinión, ¿con qué significado estamos usando el mencionado término? Si no coincide ese significado con el que tú le atribuyes, menciona en qué son diferentes.
>
> P. S. ¿En qué curso(s) de la licenciatura se hace la acción de inferir con mucha frecuencia?

Adoptamos la caracterización de *argumento inductivo* propuesta en Hernández y Parra (2013, p. 63), en la que le asignan las siguientes características:

- Las premisas presentan una característica que los elementos de un conjunto inicial *A* tienen en común.
- En las premisas también se establece que *algunos* de los elementos de tal conjunto comparten una segunda característica.
- En la conclusión se generaliza la segunda característica (compartida por un *subconjunto* de elementos no necesariamente propio) a, **por lo menos**,[16] un nuevo elemento del conjunto *A* del que no se sabe, a partir de la información dada en las premisas, si realmente la tiene.

16 Énfasis nuestro.

a) Según la caracterización dada por Hernández y Parra, ¿qué información proporciona el dato en un argumento inductivo?

b) Según la caracterización dada por Hernández y Parra, ¿qué información proporciona la aserción en un argumento inductivo?

c) Escribe un texto en el que expreses **en tus palabras** qué es un argumento inductivo, recurriendo a la estructura funcional propuesta por Toulmin.

   Nota: es muy importante tu respuesta a esta solicitud pues tendrás manera de monitorear tu entendimiento acerca de argumento inductivo comparando tu respuesta con las precisiones que hacemos más adelante.

En esta conceptualización es explícita la referencia al dato (*i. e.*, toda la información que se presenta en las premisas). El dato —aceptado como cierto— "habla" de elementos de un conjunto (*A*):1) explicita cuál es el atributo[17] (característica) común (*p*) que tienen **todos** los elementos de *A*, es decir, el que los agrupa; y 2) afirma que **algunos** elementos de *A* tienen un atributo (*q*) —información esta que puede haberse logrado mediante una exploración empírica o la evocación de un hecho conocido— del que no se sabe si lo comparten los demás elementos de *A*. También es explícita la referencia a la aserción (*i. e.*, la conclusión). La aserción del argumento inductivo predica que el atributo (*q*) —mencionado en el dato— de "algunos elementos", probablemente también lo tienen **otros** elementos de *A* aún no considerados. En cambio, no hay referencia a la garantía. Desde nuestra perspectiva, la garantía de un argumento inductivo, en el marco del conjunto referencial *A*, es el *patrón de generalización* que extiende un atributo *q* a todos los elementos del conjunto *A* sin tener la seguridad de que todos lo tienen, sobre la base cierta de que algunos elementos del conjunto tienen dicho atributo. Así, formulamos dicho patrón como "todos los elementos

17 Hernández y Parra (2013) en su caracterización usan el adjetivo "característica" como sustantivo para referirse a una cualidad, es decir a un elemento distintivo de la naturaleza de aquello a lo que se aplica. En este documento, nosotros preferimos usar "atributo".

del conjunto referencial *A* tienen el atributo *q*" y mediante su uso es posible 'dar el paso' del dato a la aserción "los otros elementos de *A* también tienen el atributo *q*". Puesto que el paso que tal garantía autoriza no conduce necesariamente a una proposición verdadera, tanto la garantía como la aserción son enunciados de naturaleza probable.

Teniendo en cuenta el criterio de tipificación mencionado y sintetizando lo anterior, en un argumento inductivo, la garantía y la aserción son los elementos inferidos (en ese orden, durante la argumentación) a partir del dato, y ambos son de naturaleza probable. El esquema que se muestra en la figura 21 representa no solo la estructura funcional del argumento inductivo caracterizado, sino que también marca, con las convenciones establecidas en el bloque 5, los elementos que fueron inferidos en el curso de la argumentación en el que surgió el argumento.

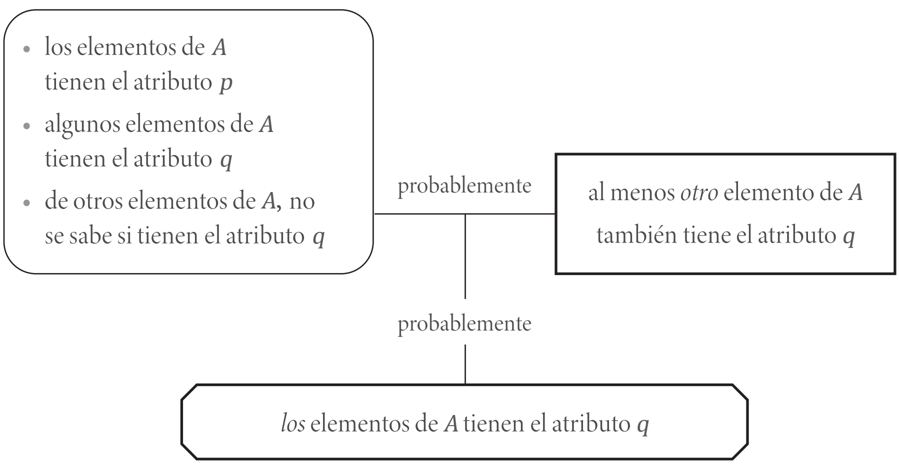


Figura 21. Esquema de argumento inductivo

d) ¿Qué significado otorgas a la expresión "en un argumento inductivo, tanto la garantía como la aserción son proposiciones de carácter probable"?

La versión electrónica 23.5 del DLE, en la tercera acepción del término "inducir" —propia del ámbito filosófico— expone el siguiente significado: "[e]xtraer, a partir de determinadas observaciones o experiencias particulares, el principio general implícito en ellas".

e) Teniendo en cuenta tal significado de "inducir" y que en una argumentación inductiva no solo se infiere la garantía sino también la aserción, expón y explica tu postura frente a la siguiente afirmación: toda inducción va de lo particular a lo general.

Nota: no pierdas la oportunidad de examinar y explicitar lo que crees sobre la afirmación en cuestión; ese sondeo sobre tu conocimiento común te preparará para abordar el texto siguiente.

Diferente a lo que usualmente se cree respecto a que una inducción "va de lo particular a lo general [P-G]", Hernández y Parra (2013) plantean que una inducción también puede ir de lo particular a lo particular [P-P], de lo general a lo particular [G-P] y de lo general a lo general [G-G]. En las figuras 22, 23, 24 y 25 presentamos cada caso usando el esquema funcional de argumento. Resaltamos, con letra cursiva, las palabras que nos sirven como marcas del carácter particular o general —del respectivo enunciado en el que aparecen— que permite tipificar los argumentos inductivos.

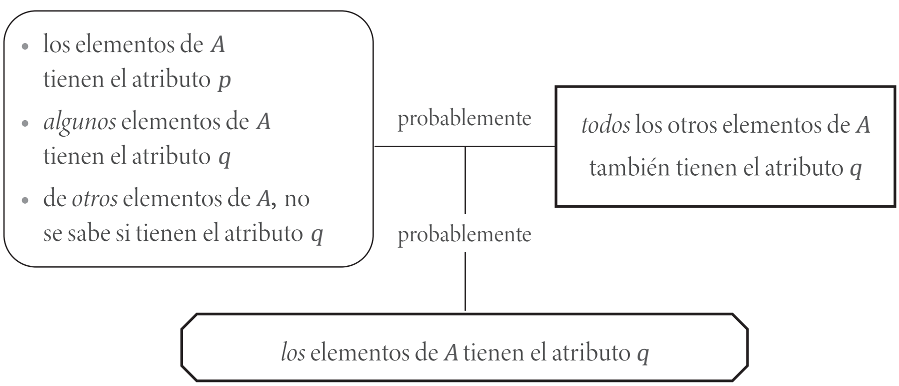


Figura 22. Esquema de argumento inductivo "particular-general"

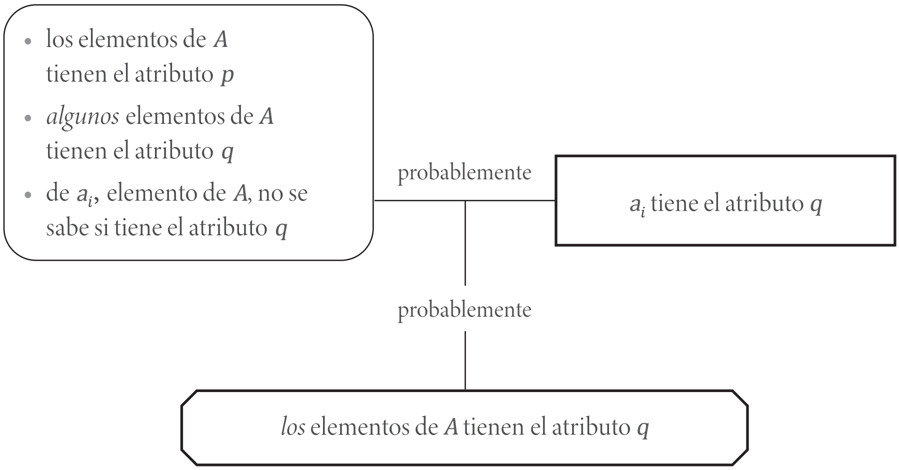


Figura 23. Esquema de argumento inductivo "particular-particular"

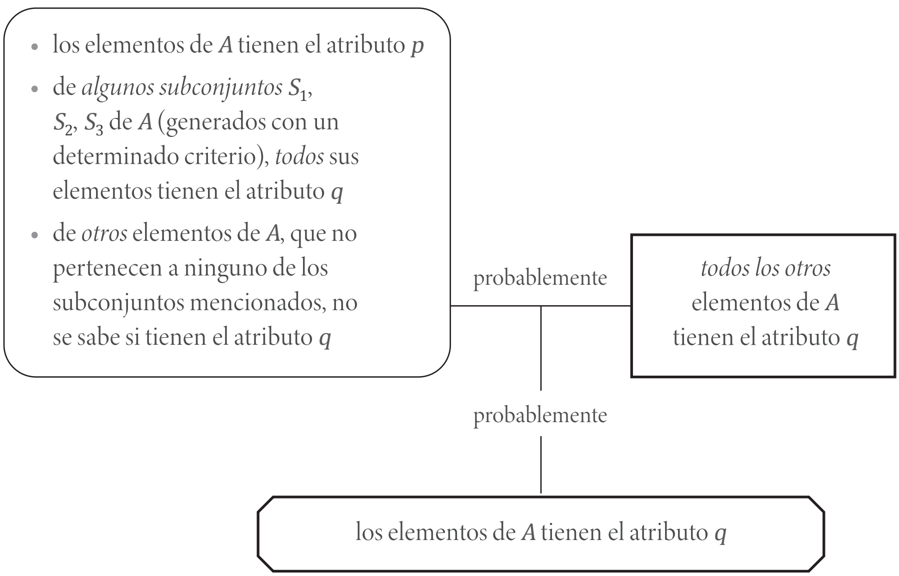


Figura 24. Esquema de argumento inductivo "general-general"

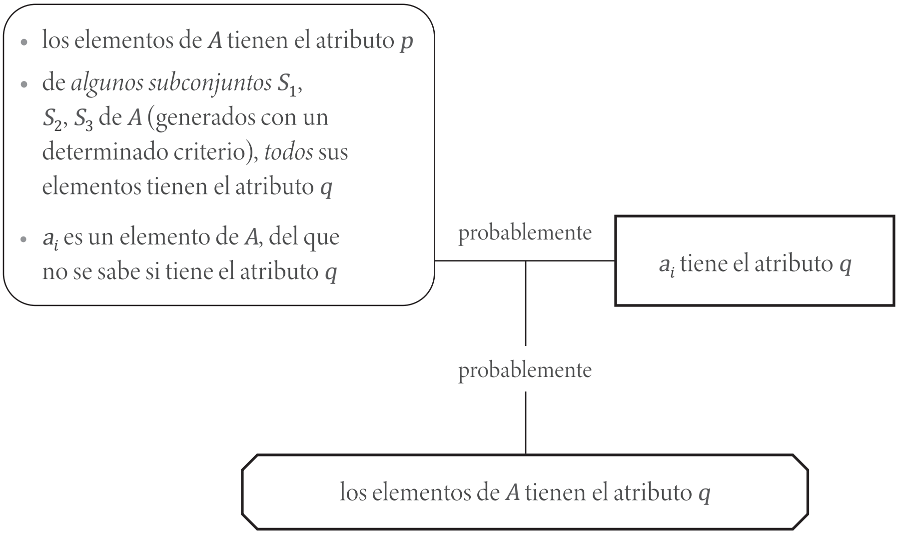


Figura 25. Esquema de argumento inductivo “general-particular”

f) Según los esquemas presentados, compara cada uno de los elementos dato, garantía y aserción de un tipo de argumento inductivo con los respectivos elementos de los demás tipos de argumentos inductivos. Determina las similitudes y diferencias entre ellos.

g) Elige dos tipos de argumento inductivo y proporciona sendos ejemplos.

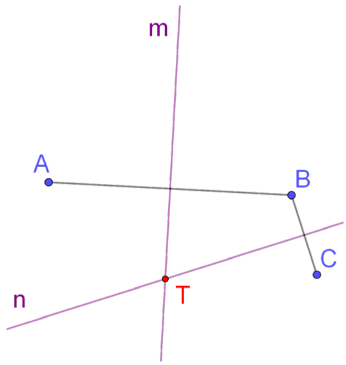
Análisis a la luz de la conceptualización expuesta

Usando la transcripción de dos casos, breves intercambios ocurridos al abordar el problema Opción A del bloque 1, vamos a buscar la presencia de argumentos inductivos y a reconstruirlos. Recordemos, primero, el enunciado del problema:

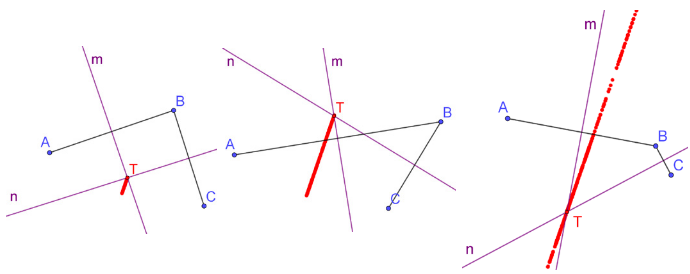
> Dados tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la recta perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular a $\overline{BC}$ por su punto medio. Sea T el punto de intersección de m y n. ¿Qué característica geométrica tiene el punto T al mover el punto B?

Caso 1

(María y Francisca han construido en SGD los objetos dados en el enunciado del problema (*i. e.*, puntos *A*, *B* y *C*; rectas *m* y *n*; punto *T*). Nombran las rectas *m* y *n* como mediatrices. Han realizado un arrastre del punto *B* para determinar la característica geométrica de *T* cuando se mueve el punto *B*. Todavía no han logrado determinarla. En la pantalla se ve una configuración como la que está a la derecha.)



1	**María:**	(Leyendo el enunciado.) ¿Qué característica geométrica tiene *T* cuando se mueve el punto *B*?
2	**Francisca:**	Ponle traza al punto *T*.
3	**María:**	(Le pone rastro al punto *T* y mueve el punto *B* por varios lugares de la pantalla. Aparecen representaciones como las tres que se muestran a continuación.)



4	**Francisca:**	¿Sí ves que sí era una recta?
5	**María:**	Ay, sí. (Con algo de sorpresa. No deja de arrastrar el punto *B*.)

6	**Francisca:**	No confié en mi intuición geométrica. Ah, pues esa [recta trazada por la herramienta "Rastro"] sería la... pues esa sería la mediatriz del...
7	**Ambas:**	(Hablando al mismo tiempo y con tono de seguridad) del [segmento] *AC*
8	**María:**	¡Ahh! O sea que, para cualquier punto [*B* en ese plano] se cumple que la intersección [de las rectas *m* y *n*] siempre pertenecería a la mediatriz del...
9	**Ambas:**	Del segmento *AC*.
10	**Francisca:**	Podemos plantear como conjetura... siempre la piden, ¿no? que si tenemos las condiciones [del problema]... (Lee: "tres puntos *A*, *B* y *C* no colineales, *m* la recta perpendicular al [segmento] *AB* por su punto medio y *n* la recta perpendicular al [segmento] *BC* por su punto medio, y *T* el punto de intersección de *m* y *n*"), entonces *T* está en la mediatriz de...
11	**María:**	del segmento *AC*.

Nuestro análisis comienza con una lectura completa y cuidadosa de la transcripción con miras a formarnos una idea lo más clara posible de lo sucedido en la interacción. Como resultado escribimos el siguiente relato que, aunque no tiene detalles, esboza el episodio:

> Han construido la situación que plantea el enunciado de la tarea y la han explorado empíricamente, moviendo el punto *B* por la pantalla, sin lograr la respuesta. Emprenden otra exploración usando la herramienta "Rastro" del SGD. Esta acción las lleva a ver que, cuando se mueve *B*, la trayectoria de *T* es una recta. Por último, explicitan el atributo geométrico del punto *T*.

a) ¿Estás de acuerdo en que ese relato esboza adecuadamente el episodio? Si no, ¿qué falta, qué sobra, o qué cambiarías?

b) Podemos aceptar sin problema que María y Francisca resolvieron la tarea. Pero ¿hubo argumentación? ¿Cómo obtienen información que les ayude a caracterizar el punto que se busca? ¿Cuál es el fundamento para decir que es verdad que el punto T tiene esa propiedad geométrica cuando se tienen las condiciones dadas en el enunciado?

Nuestro análisis continúa con una nueva lectura de la transcripción; ahora, para buscar la presencia de argumentos inductivos si los hubiera. Cabe señalar que el ámbito en el que hacemos la búsqueda es terreno fértil ya que la exploración empírica realizada aporta datos de casos, a partir de los cuales es posible formular una aserción general.

c) Lee la transcripción con ese propósito. ¿Reconoces argumentos inductivos? ¿De alguno de los tipos estudiados?

En el fragmento de transcripción [3-9] vislumbramos la presencia de un argumento inductivo. Para examinar de cerca la situación, conformamos un párrafo que contiene las intervenciones que consideramos clave para lo que interesa, separadas por el símbolo "/".

> Le pongo rastro al punto T y muevo el punto B por varios lugares de la pantalla de manera lenta y continua.[18] / ¿Sí ves que sí era una recta? / Ah, pues esa [recta trazada por la herramienta "Rastro"] sería la... mediatriz del [segmento] AC / O sea que, para cualquier punto [B en ese plano] se cumple que la intersección [de las rectas m y n] siempre pertenecería a la mediatriz del [segmento] AC.

Abordemos la pregunta sobre cómo establecen Francisca y María que el punto T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$. Nuestra respuesta no necesariamente

18 Hemos "traducido" a una expresión verbal, las acciones no verbales hechas en el SGD por María como respuesta a la sugerencia de Francisca en la intervención [2].

es la que verbalizarían las estudiantes. Apoyadas en el SGD, con el arrastre continuo y breve del punto *B*, determinan un subconjunto de puntos *T* generados a la par con el movimiento del punto *B* y que dependen de este. Enfocándose en el rastro que dejan los elementos de este subconjunto, las estudiantes ven un segmento de recta. Hasta aquí, las estudiantes han conseguido un dato de nivel particular que se puede reconstruir como sigue: para algunos puntos *B* del plano, los puntos *T* correspondientes hacen parte de un determinado segmento de recta. Ese dato las conduce a proponer una aserción fundamentada mediante una inducción P-G. Representamos lo dicho en el siguiente esquema de Toulmin (véase figura 26):

- todas las ternas de puntos no colineales *A*, *B*, *C* (*A* y *C* fijos); *m* la mediatriz del $\overline{AB}$ y *n* la mediatriz del $\overline{BC}$; *T* la intersección de *m* y *n*
- para algunas ternas de puntos (determinadas por varias posiciones de *B*), los varios puntos *T* (generados a la par con el arrastre de *B* y dependientes de este) son parte de la mediatriz del $\overline{AC}$
- para otras ternas de puntos, no se sabe si los correspondientes puntos *T* pertenecen a la mediatriz del $\overline{AC}$

probablemente

los puntos *T*, correspondientes a las otras ternas, pertenecen a la mediatriz del $\overline{AC}$

probablemente

para todas las ternas de puntos no colineales *A*, *B*, *C* (*A* y *C* fijos) con *m* la mediatriz del $\overline{AB}$, *n* la mediatriz del $\overline{BC}$ y *T* el punto de intersección de *m* y *n*, se cumple que *T* pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$

Figura 26. Esquema del argumento inductivo

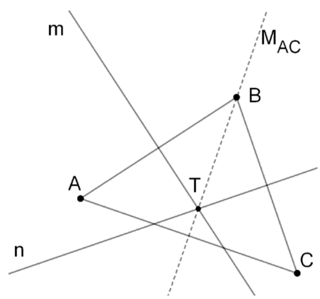
¿Cómo llegaron a identificar la recta a la que alude Francisca en [4] como la mediatriz del $\overline{AC}$? El intercambio no da información al respecto. No obstante, es posible que haya habido una segunda inducción no surgida de una exploración deliberada (que tuviera como propósito caracterizar tal recta), sino de una intuición o de la información decodificada (la interpretación) de la representación gráfica correspondiente.

Caso 2

1 **Darío:** (Leyendo el enunciado) ¿Qué característica geométrica tiene T cuando se mueve el punto B?

2 **Fernando:** Hagamos triángulos isósceles y miremos qué pasa.

3 **Darío:** (Construye un ΔABC con $AB = BC$ usando la mediatriz del $\overline{AC}$, y poniendo a B en ella. Construye las rectas m y n como mediatrices del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$, respectivamente, y marca el punto T de intersección entre ellas. Luego hace un arrastre del punto B, limitado a la mediatriz del $\overline{AC}$. Aparece una representación como la que se muestra a la derecha.)



4 **Fernando:** Ay, para los [triángulos] isósceles, T está en la mediatriz

5 **Darío:** del segmento AC

6 **Fernando:** ¿Y si pones AC igual a AB?

7 **Darío:** (Toma la medida AB y arrastra el punto A hasta que $AC = AB$; hace este ejercicio para varias posiciones de B.) Pasa lo mismo para los [triángulos] equiláteros... mmm... O sea, para todo punto B del plano se tiene eso.

8 **Fernando:** Sí... Bueno, con las condiciones dadas en el enunciado... el punto T está en esa recta [mediatriz del $\overline{AC}$].

a) Escribe un relato que esboce el episodio ocurrido. ¿Encuentras diferencias que sean relevantes para el asunto de interés, al comparar este episodio con el anterior? ¿Vislumbras algún argumento inductivo?

Nuestro relato, sin detalles, es el siguiente:

> Observan la situación para la gama de triángulos isósceles que van obteniendo al hacer arrastre del punto B; se percatan de un atributo común para los respectivos puntos T. Después, consideran la situación para algunos triángulos equiláteros, logrados, uno a uno, ajustando la posición del punto A; encuentran de nuevo que los respectivos puntos T tienen un atributo común. Concluyen un enunciado general y categórico que predica el comportamiento del punto T para todo punto B del plano.

El párrafo conformado por las intervenciones clave es el siguiente:

> Hagamos triángulos isósceles y miremos qué pasa. / Ay, para **los** [triángulos] isósceles, T está en la mediatriz del segmento AC / ¿Y si pones AC igual a AB? Pasa lo mismo para **los** [triángulos] equiláteros / O sea, para **todo** punto B del plano con las condiciones dadas, se tiene que el punto T está en esa recta [mediatriz del $\overline{AC}$].

Una vez escrito el fragmento de esta forma, podemos determinar un argumento inductivo.

b) ¿Cuáles son los datos y cuál es la aserción? ¿Encuentras diferencias notables respecto al caso anterior? ¿Qué tipo de argumento inductivo determinas?

Nota: no pierdas la oportunidad de identificar el argumento; tu respuesta comparada con la que damos enseguida te permite monitorear tu entendimiento del contenido en cuestión.

De acuerdo con nuestra interpretación, los datos del argumento son:

- Ternas de puntos A, B_i y C no colineales; m mediatriz del $\overline{AB}$, n mediatriz del $\overline{BC}$; T punto de intersección de m y n (que son las condiciones dadas en el enunciado y que los estudiantes han construido en el *software*).
- Puntos B para los cuales el ΔABC es isósceles. Para *todos* los triángulos isósceles, T está en la mediatriz del $\overline{AC}$ (interpretación de la segunda frase del párrafo de intervenciones).
- Puntos B para los cuales el ΔABC es equilátero. Para *todos* los triángulos equiláteros, T está en la mediatriz del $\overline{AC}$ (interpretación de la tercera frase).

En este caso, los datos relativos a triángulos isósceles y equiláteros están descritos de manera general y categórica. Dejan ver, entonces, que el argumento es inductivo "general-general".

La aserción del argumento es "para *todo* punto B del plano junto con las condiciones dadas en el enunciado, el punto T está en la mediatriz del $\overline{AC}$" (interpretación de la última frase del párrafo). Es posible notar que también esta aserción está expresada de manera general, puesto que se hace una inferencia para todos los puntos B del plano. Así las cosas, el argumento va de lo general a lo general (G-G). En este ejemplo, la garantía no fue explicitada por los estudiantes; sin embargo, el patrón de generalización no cambia esencialmente respecto al establecido para el caso 1.

La garantía del argumento es "puntos que son la intersección de dos mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales están también en la mediatriz del segmento restante que se puede determinar con dichos tres puntos" (interpretación de la intervención [4], escrita como regla general).

A monitorear lo que has entendido

Imaginemos que los fragmentos [6-9] y [4-8] de la transcripción de los intercambios de Francisca y María, y de Darío y Fernando han cambiado respectivamente por los siguientes:

6	**María:**	O sea, para otro punto B que consideremos... mmm... por ejemplo, este de la esquina (Risas. Señala con el ratón la esquina superior derecha de la pantalla, pero no hace el arrastre del punto B), el punto T correspondiente estaría ahí
7	**Francisca:**	en [la mediatriz del segmento] AC

4	**Fernando:**	Ay, para los [triángulos] isósceles, T está en la mediatriz
5	**Darío:**	del segmento AC
6	**Fernando:**	¿Y si pones AC igual a AB?
7	**Darío:**	(Toma la medida AB y arrastra el punto A hasta que $AC = AB$) Pasa lo mismo para los [triángulos] equiláteros... mmm... O sea, para uno por acá... (con el ratón señala el centro de la pantalla)
8	**Fernando:**	Sí... también, para ese caso de B, el punto T está en esa recta [la mediatriz del $\overline{AC}$].

1. A partir de las transcripciones modificadas, examina los diálogos y realiza para cada uno de ellos lo siguiente:
   (a) Escribe un párrafo que contenga las oraciones clave para reconstruir el argumento esbozado por los estudiantes.
   (b) Determina el dato, la aserción y la garantía. Indica si la garantía se explicita en el diálogo.
   (c) ¿El argumento es P-G, P-P, G-P o G-G? Explica tu respuesta.
2. Con base en los casos y análisis presentados, ¿cuál consideras que pueda ser una función del argumento inductivo? Explica tu respuesta.

Descripción de las tareas del bloque 6

Actividad que demandan las tareas: principalmente, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de los textos; además, responder por escrito las varias solicitudes que se presentan con el propósito de llamar la atención sobre aspectos clave del contenido que es objeto de estudio.

Propósito didáctico de las tareas: proveer una oportunidad para que los estudiantes se involucren en un proceso de estudio (lectura, interpretación, explicitación y escritura) que 1) les pide interpretar una caracterización dada de argumento inductivo en términos de la información que presenta cada uno de los elementos básicos de un argumento; 2) los impulsa a considerar el elemento inferido en la argumentación como descriptor del tipo de argumento; 3) los lleva a cuestionar la noción común que pueden tener de argumento inductivo, presentándoles una opción más amplia; y 4) los incita a seguir una estrategia de reconstrucción de argumentos inductivos a partir de la transcripción de intercambios en los que hubo argumentación. Dicho de manera más general, nos proponemos crear un ambiente de aprendizaje que favorezca el paso de un conocimiento común sobre argumento inductivo a uno especializado.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: modelo funcional de argumento (propuesto por Toulmin); convenciones para indicar en el esquema de Toulmin el elemento inferido; estrategia para identificar un argumento en la transcripción de intercambio comunicacional en el aula.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: conceptualización elaborada de argumento inductivo; herramienta analítica para identificar y esquematizar argumentos inductivos; competencia de análisis para identificar y reconstruir argumentos inductivos.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: vemos las preguntas y solicitudes hechas como una especie de guía de lectura cuyo propósito es impulsar al lector a sacar buen provecho de los textos en cuestión. Esperamos que inviten a revisar lo leído en busca de hacer precisiones o claridades; que contribuyan a enfocar la atención en puntos que pasaron inadvertidos inicialmente; y que abran la oportunidad de expresar las propias interpretaciones sobre puntos particulares del texto.

La pregunta por el significado personal del término "inferir", que se encuentra en la introducción al capítulo y, sobre todo, la solicitud de contrastarlo con el que está sugerido en el texto son dos recursos que apuntan a introducir la idea de que en la argumentación hay más que deducción. Prevemos como preponderante un significado personal de "inferir", consonante con el que aporta el DLE, en su primera acepción: "deducir algo o sacarlo como conclusión de otra cosa". Desde nuestra perspectiva, esta es una definición limitada por cuanto nos refiere a un solo tipo de argumento: el deductivo. Siguiendo propuestas de autores como Charles Sanders Peirce, consideramos que la inferencia es un proceso o un resultado no asociado en forma exclusiva a una argumentación deductiva. Consideramos que "inferir" es obtener información a partir de otra conocida y que no hay una única manera de hacerlo; "inferir" puede ser asociado a los términos "lograr", "conseguir", "alcanzar", "obtener por descubrimiento". Precisamente, dependiendo de la forma como se obtenga esa información, de la información que se obtenga y del tipo de información de la que se obtiene la información inferida, es posible tipificar la argumentación y, por extensión, el argumento surgido dentro de ella.

Respecto a los ítems a, b, c y d, atendiendo a la caracterización inicial de argumento inductivo que hacen Hernández y Parra, esperamos que se ponga de manifiesto que 1) el dato informa, como cierto, que algunos elementos de un conjunto referencial comparten un atributo; 2) la información inferida (la cual se registra en la aserción) afirma que otros elementos del referencial también tienen el atributo mencionado; 3) el dato le da base a la aserción en la medida en que esta se obtiene a partir del dato. Además, esperamos que se haga evidente como indicador de una comprensión adecuada, por una parte, que el dato y la aserción en un argumento inductivo no predican sobre los mismos elementos del conjunto referencial, pero sí predican lo mismo (*i. e.*, indican una misma propiedad para los elementos a los que hacen referencia) y, por otra parte (en relación con el ítem d), que la inferencia no puede ser necesaria, ya que la garantía que permite el paso del dato a la aserción es inferida gracias al principio de generalización.

Respecto al ítem e, vemos deseable tratar de responder la pregunta acerca de la relación semántica entre "inferir" e "inducir". Inferir, tal como lo expusimos, es obtener información a partir de otra conocida; es decir, en el marco de la argumentación, se puede inferir cualquiera de los tres elementos básicos de un argumento simple. En cambio, inducir es inferir el principio general implícito en casos particulares, a partir de ellos; es decir, en el marco de la argumentación inductiva, solo se induce la garantía y contando con ella y el dato, se infiere la aserción. Aceptando estas precisiones, consideramos que toda inducción procede de algo particular y llega a algo general; sin embargo, eso no quiere decir que en una argumentación inductiva la inferencia de la aserción vaya siempre de lo particular a lo general. Ese es justo el cuestionamiento que plantean en su texto Hernández y Parra (2013).

Al abordar el ítem f, cabe destacar que nuestra propuesta de tipificación de argumentos inductivos no es usual y rompe con la concepción tradicional al respecto. Para comprenderla mejor es conveniente, por ejemplo, notar cuáles son los aspectos que caracterizan el dato y la aserción en cada tipo de argumento inductivo, con el fin de tener un referente para compararlos y así poder precisar las diferencias. Para comenzar, vale la pena aclarar que los calificativos particular-general, particular-particular, general-particular, y general-general para un argumento inductivo refieren al carácter particular o general que tienen, respectivamente, el dato y la aserción (dato-aserción) que componen el argumento. A continuación, presentamos una respuesta deseable tomando los argumentos inductivos particular-general y particular-particular para la comparación. Esta puede ser una guía para hacer la comparación entre los tipos de argumentos inductivos restantes.

Sobre el dato. Al comparar entre sí el dato de cada uno de los dos tipos de argumento inductivo, se puede determinar que ambos refieren a dos aspectos: 1) los elementos de A tienen el atributo p; 2) *algunos* elementos de A tienen el atributo q. Pero difieren en que en el argumento inductivo particular-

particular, del elemento a_i de *A* no se sabe si tiene el atributo *q*, y en el particular-general, de otros elementos de *A* no se sabe si tienen el atributo *q*. Es claro que, en ambos tipos de argumento, el dato refiere a algunos casos *particulares* para los cuales se cumple el atributo *q*; desde esa perspectiva, se da sentido al carácter de *particular* que tiene el dato para ambos tipos de argumentos.

Sobre la aserción. Al comparar entre sí la aserción de cada uno de los dos tipos de argumento inductivo, se puede determinar que estas difieren sustancialmente. En el particular-general, esta se enuncia como "*todos* los elementos de *A* también tienen el atributo *q*", mientras que en el particular-particular se enuncia la aserción como "a_i tiene el atributo *q*". Es claro que el carácter de la aserción en cada tipo de argumento inductivo difiere. Para el tipo particular-general, la aserción se enuncia usando el cuantificador universal, con lo cual se advierte que para todo elemento de *A* se cumple *q*. En el tipo particular-particular, la aserción menciona un elemento particular para el cual se cumple el atributo *q*; siendo que en el dato se dijo no saber si cumplía el atributo *q*.

Sobre la garantía. Al comparar entre sí la garantía de cada uno de los dos tipos de argumento inductivo (de hecho, al comparar ese elemento para todos los tipos de argumento inductivo), se puede determinar que el patrón de generalidad es el mismo. Esto indica que independientemente del tipo de argumento inductivo, en particular, del carácter del dato del argumento que se tome en cuenta y del carácter de la aserción inferida, el patrón de generalidad que se establece tiene la misma estructura condicional y tiene el mismo carácter de generalidad: los elementos de *A* tienen el atributo *q*.

En los argumentos inductivos G-G y G-P, los subconjuntos mencionados en el dato para los cuales se establece que sus elementos tienen el atributo *q*, se determinan a partir de un criterio explícito (una propiedad que permite identificarlos claramente de los demás objetos del conjunto referencial). En el G-G, lo que se expone en la aserción es que dicho atributo *q* se cumple para todos los elementos del conjunto referencial no tomados en cuenta en tales subconjuntos. En el G-P, lo que se expone en la aserción es que dicho atributo *q* se cumple para otro elemento del conjunto referencial no tomado en cuenta en tales subconjuntos.

La presentación de argumentos para ilustrar los cuatro tipos de argumento inductivo —ítem g— es un esfuerzo deseable para el desarrollo especializado del respectivo conocimiento. Los siguientes ejemplos pueden ser referencia para la gestión de la clase. Prevemos que los estudiantes propondrán argumentos con proposiciones verdaderas; para resaltar la idea de que las inferencias de un argumento inductivo son apenas probables, los siguientes argumentos refieren a un patrón de generalidad y a una aserción no verdaderos. Además, vemos como deseable el esfuerzo de formular los argumentos no solo de manera esquemática usando el modelo de Toulmin, sino de manera textual usando los términos especializados relativos a las acciones relevantes en el proceso de producir argumentos (*e. g.*, argumentar, inferir, inducir, dato, aserción, garantía).

Argumento inductivo P-G. En el conjunto referencial A, de cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes, puesto que algunos elementos son rectángulos, inferimos que probablemente los restantes elementos también son rectángulos y basamos tal inferencia en la inducción que asevera que probablemente todos los cuadriláteros de diagonales congruentes son rectángulos.

Argumento inductivo P-P. En el conjunto referencial A, de cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes, al que pertenece el cuadrilátero $ABCD$ ($\boxdot\, ABCD$), inferimos que probablemente este es rectángulo ya que algunos elementos de A entre los que no está el mencionado, son rectángulos; la garantía inducida asevera que probablemente todos los cuadriláteros de diagonales congruentes son rectángulos.

Argumento inductivo G-G. Los cuadrados forman un subconjunto del referencial A, de cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes. Como todo cuadrado es rectángulo, probablemente se cumple que todos los demás elementos de A son rectángulos; la garantía inducida asevera que probablemente todos los cuadriláteros de diagonales congruentes son rectángulos.

Argumento inductivo G-P. Los cuadrados —que forman un subconjunto del referencial A, de cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes— son rectángulos. A partir de lo anterior, inferimos que el $\boxdot\, ABCD$, que es elemento de *A* pero no se sabe si es cuadrado, probablemente es rectángulo, argumento cuya garantía, inducida, asevera que probablemente todos los cuadriláteros de diagonales congruentes son rectángulos.

Con respecto al ítem a del caso 1 (intercambio de María y Francisca) para el ejercicio de reconstrucción de argumentos, prevemos como probable considerar que se trata de un buen relato. No obstante, quizá para los estudiantes sea importante especificar el atributo geométrico del punto *T*, razón por la cual sugieran complementar el relato advirtiendo algo como "*T* está en la mediatriz del $\overline{AC}$".

En relación con el ítem b, prevemos que, influidos por el momento de estudio en el que se plantea la tarea, es muy factible que los estudiantes traten de reconstruir un argumento inductivo y que puede no ser inmediato para ellos identificar los elementos básicos del argumento. Creemos que las preguntas planteadas —¿cómo obtienen información que les ayude a caracterizar el punto que se busca?, ¿cuál es el fundamento para decir que es verdad que el punto *T* tiene esa propiedad geométrica cuando se tienen las condiciones dadas en el enunciado?— dan pistas para hacer operativa la definición de argumento inductivo y así poder reconstruir uno a partir de un fragmento de transcripción como el que se está estudiando.

Así las cosas, responder la pregunta sobre *cómo* se establece un cierto atributo geométrico da luces respecto a la manera empírica mediante la cual este se establece: consideración de varios casos que tienen una propiedad común cuyo estudio permite la identificación de una segunda propiedad invariante que comparten. Así mismo, responder la pregunta sobre el *fundamento* para decir que es verdad el atributo establecido da luces respecto del patrón de generalidad que se podría formular producto del estudio empírico realizado. Sugerimos que las aclaraciones hechas previamente constituyan un asunto que el profesor pueda compartir con sus estudiantes. De esta forma, pueden tener acceso a ciertos criterios que les permitan reconstruir argumentos inductivos a partir de situaciones similares a las que plantea la transcripción.

Con respecto al ítem c del caso 1, prevemos que los estudiantes identifiquen, de la línea 3 a la 9, indicios de un proceso de argumentación inductiva. Enseguida, exponemos un párrafo con frases del intercambio que permiten reconstruirlo:

> (1) Le pongo rastro al punto T y muevo el punto B por **varios** lugares de la pantalla [3]. / (2) ¿Sí ves que sí era una recta? [4] / (3) Ah, pues esa [recta que deja el rastro] sería la... mediatriz del [segmento] AC [6] / (4) O sea, para **cualquier** punto B de ese plano, se cumple que el punto T correspondiente pertenecería a [la mediatriz del segmento] AC.

Con esto en mente, es posible que los estudiantes hagan un discurso expositivo que presente un argumento inductivo incompleto (pues falta su garantía) como el siguiente:

> Para varias ternas de puntos A, B y C no colineales —que se diferencian por la posición del punto B del plano—, los correspondientes puntos T —determinados por la intersección de las rectas m y n — forman parte de un cierto subconjunto de la recta que parece ser la mediatriz. Por lo tanto, podríamos decir que para los **demás** puntos B [del plano], los correspondientes puntos T siempre pertenecerían a esa recta, la mediatriz [del $\overline{AC}$].

El texto que sigue al ítem c, presenta una explicación sobre por qué el párrafo anterior expone un argumento inductivo. En todo caso, queremos llamar la atención sobre algunos asuntos que suelen pasar desapercibidos por los estudiantes cuando formulan sus respuestas; sugerimos que el profesor esté atento al respecto, para hacer las claridades correspondientes en caso de ser necesario:

1. El dato se debe conformar a partir de una interpretación de la información con la que se cuenta. Esto implica: a) reconocer un conjunto referencial que tiene un atributo conocido (para este caso, el conjunto referencial es el conjunto de todas las ternas de puntos A, B y C no colineales en un plano, con m la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su

punto medio; el atributo conocido es que las rectas m y n se intersecan en un punto T); b) identificar, empíricamente, que un subconjunto del conjunto referencial tiene otro atributo que coexiste con el primero (para este caso, que para las ternas de puntos de dicho subconjunto —diferenciadas entre sí por las diversas posiciones del punto B— los puntos T correspondientes pertenecen a la mediatriz del $\overline{AC}$); y c) tener en cuenta que para los demás elementos del conjunto referencial no se ha verificado, empíricamente, el cumplimiento del segundo atributo.

2. En relación con el literal c), en un argumento inductivo la aserción alude a lo que sucede con otros elementos del conjunto referencial, para los que no se ha verificado, de forma empírica, el segundo atributo. Precisamente, el sentido de una argumentación inductiva consiste en inferir que ese atributo se cumple para otros casos del conjunto referencial sin necesidad de verificarlo empíricamente, sino haciendo un proceso de generalización que se encapsula en una regla general que conjetura una implicación entre las condiciones dadas y el segundo atributo establecido. (Regla general que, para efectos del argumento inductivo correspondiente, es su garantía; además, dado que esta se descubre durante el proceso de argumentación, también es inferida como la aserción.) Para este caso, la aserción dada por Francisca y María alude a que el segundo atributo de T (pertenecer a la mediatriz de $\overline{AC}$) se cumple para **cualquier** punto B de un plano (es decir, para todas las otras ternas de puntos no colineales A, B y C, determinadas por las demás posiciones del punto B en el plano); además, la conjetura formulada por ellas, que encapsula la generalización correspondiente, y por ende, se convierte en la garantía del argumento, es: Dados tres puntos A, B y C no colineales, m la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio, y T el punto de intersección de m y n, entonces T está en la mediatriz del $\overline{AC}$. Esta sería la garantía del argumento inductivo asociado.

Teniendo en cuenta todos los aspectos citados en la explicación anterior, se esperaría que los estudiantes digan que el argumento inductivo producido por las estudiantes es de tipo P–G, dado que la aserción dicha por ellas (línea 8) alude a **cualquier** punto B del plano, tomando como datos **subconjuntos de ternas de puntos** diferenciadas entre sí por las diversas posiciones del punto B.

Acerca del caso 2, en relación con el ítem a, un posible relato, asociado al intercambio de Darío y Fernando, sería el siguiente:

> Estudian la situación a partir de triángulos isósceles que van obteniendo al hacer arrastre del punto B, construido en la mediatriz del $\overline{AC}$; para esos triángulos isósceles, se percatan de un atributo común para los respectivos puntos T: esto es, que T está en la mediatriz del $\overline{AC}$. Después, consideran la situación para algunos triángulos equiláteros, logrados, uno a uno, ajustando la posición del punto A; encuentran de nuevo para esos triángulos equiláteros, que los respectivos puntos T tienen ese mismo atributo común. Concluyen un enunciado general y categórico según el cual para todo punto B del plano, los respectivos puntos T están en la mediatriz del $\overline{AC}$.

A partir de un relato como el anterior, es posible que los estudiantes tengan insumos suficientes para identificar una diferencia sustancial al comparar la actividad de María y Francisca, con la de Darío y Fernando. Claramente, ambas parejas obtienen el mismo resultado (para todos los puntos B, el punto T correspondiente está en la mediatriz del $\overline{AC}$). Sin embargo, los subconjuntos del conjunto referencial que cada pareja estudia son diferentes entre sí. Para el caso de María y Francisca, su subconjunto se conforma a partir de ternas de puntos que varían según **un arrastre libre** del punto B por la pantalla; para el caso de Darío y Fernando, sus subconjuntos se conforman a partir de ternas de puntos que varían según el **arrastre limitado** del punto B (bien sea por la mediatriz del $\overline{AC}$ o procurando mantener que $AB = BC = AC$). En otras palabras, el subconjunto de María y Francisca refiere a ternas de puntos que determinan triángulos sin alguna característica especial, mientras que los subconjuntos de Darío y Fernando refieren a ternas de puntos que determinan triángulos isósceles o equiláteros. En el caso 2, a partir de ternas de puntos que determinan los dos tipos de triángulos, se establece la característica geométrica del punto T para **todos** los triángulos isósceles y **todos** los equiláteros; con ello, se generaliza que el atributo ocurre para **todas** las ternas de puntos A, B y C; en el caso 1, la generalización se logra sin tomar en cuenta tipos específicos de triángulos, pero sí casos particulares de ternas de puntos.

Con base en lo anterior, pero pensando en una respuesta para el ítem b, se colige que es probable que los estudiantes identifiquen que, a partir del intercambio entre Darío y Fernando, se puede reconstruir un argumento inductivo cuyo dato es diferente al argumento asociado al intercambio de María y Francisca. En otras palabras, el dato del argumento de Darío y Fernando estaría conformado de la siguiente manera:

> Conjunto referencial: ternas de puntos A, B y C no colineales; m mediatriz del $\overline{AB}$, n mediatriz del $\overline{BC}$; T punto de intersección de m y n (análogo al contemplado en el caso 1).
>
> Subconjuntos del conjunto referencial: todos los triángulos isósceles y equiláteros (diferente a lo considerado en el caso 1).
>
> Atributo de los elementos de los subconjuntos mencionados: T está en la mediatriz del $\overline{AC}$.

La aserción del argumento se puede escribir como sigue:

> Para todos los demás puntos B, se cumple que T está en la mediatriz del $\overline{AC}$ (análoga a la del caso 1).

Teniendo en cuenta lo anterior, es deseable que los estudiantes digan que el tipo de argumento asociado es G–G. Esto porque los discursos correspondientes a los subconjuntos del conjunto referencial (relativos al dato) refieren a **todos** los triángulos isósceles y equiláteros, y la aserción a **todos** los demás puntos B. Ahora bien, dada la complejidad asociada a la interpretación de este tipo de argumento, es probable que esta respuesta no necesariamente surja. En ese contexto, el profesor debería hacer hincapié en los aspectos clave que conducen a tal tipificación del argumento: 1) la actividad que lleva a considerar **todos** los elementos o los subconjuntos del conjunto referencial para los cuales se descubre el otro atributo en común, y 2) la consecuente manera discursiva en que esta actividad se reporta, predicando dicho atributo para **todos** los elementos o los subconjuntos del conjunto referencial contemplados.

Ahora, presentamos la descripción sobre el ejercicio para monitorear lo que se ha entendido sobre argumento inductivo. En lo concerniente a la tarea del ítem a, es probable que los párrafos creados en los análisis previos para identificar el primer argumento inductivo asociado a cada una de las interacciones sirvan de referencia. En tal caso, prevemos párrafos como los siguientes:

> **Caso 1 (modificado).** (1) Le pongo rastro al punto T y muevo el punto B por **varios** lugares de la pantalla. / (2) ¿Sí ves que sí era una recta? / (3) Ah, pues esa [recta que deja el rastro] sería la... mediatriz del [segmento] AC / (4) O sea, para **otro** punto B que consideremos, por ejemplo, **este** de la esquina, el punto T correspondiente estaría en [la mediatriz del segmento] AC.

> **Caso 2 (modificado).** (1) Hagamos triángulos isósceles y miremos qué pasa. / (2) Ay, para **los** [triángulos] isósceles, T está en la mediatriz del segmento AC / (3) ¿Y si pones $AC = AB$...? Pasa lo mismo para **los** [triángulos] equiláteros / (4) ... O sea, para **uno** por acá (con el ratón señala el centro de la pantalla), para ese caso de B, el punto T está en esa recta [la mediatriz del $\overline{AC}$].

Un asunto que debe resaltarse es que, en comparación con los relatos anteriores, en estos casos la forma de reportar el hallazgo (el atributo q) se hace considerando un caso particular del punto B (*i. e.*, un punto específico en la pantalla: o bien en la esquina, o bien en el centro). Este asunto se convierte en la clave para identificar que en ambos casos el argumento inductivo va a lo particular.

Respecto a la respuesta para la tarea que propone el ítem b, es factible que lo realizado en los análisis previos sirva de referencia, es decir, que se tomen de referencia el dato, la aserción y la garantía identificados para el primer argumento reconstruido en cada transcripción. Prevemos como aceptable lo siguiente:

Caso 1 (modificado)

Dato: Ternas de puntos A, B_i y C no colineales [conjunto A]

Recta m perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y recta n perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio. T punto intersección de m y n (condiciones dadas en el enunciado y construidas en el *software*) [atributo p]

Varios puntos B, obtenidos por arrastre, que determinan casos de ternas de puntos dados donde A y C son fijos; tales puntos B no son todos los puntos B del plano, pero sí infinitos dadas las características dinámicas y de continuidad del *software* (interpretación de la primera frase del párrafo con las intervenciones)

Para estos *varios* puntos B, se tiene que T deja un rastro que es la mediatriz del $\overline{AC}$ (interpretación de la tercera frase) [atributo q]

B' es *el* punto del plano que está en la esquina superior derecha de la pantalla, tal que recta m perpendicular al $\overline{AB'}$ por su punto medio y recta n perpendicular al $\overline{B'C}$ por su punto medio. T' punto intersección de m y n (interpretación de la cuarta frase)

Garantía: (No explicitada) Los puntos que son intersección de dos mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales, dos de los cuales son fijos, están también en la mediatriz del segmento restante que se puede determinar con dichos tres puntos.

Aserción: El punto T' correspondiente al punto B' está en la mediatriz del $\overline{AC}$.

Caso 2 (modificado)

Dato: Ternas de puntos A, B_i y C no colineales [conjunto A]

Recta m perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y recta n perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio. T punto intersección de m y n (condiciones dadas en el enunciado y construidas en el *software*) [atributo p]

Puntos B para los cuales el ΔABC es isósceles. Para *todos* los triángulos isósceles, T está en la mediatriz del $\overline{AC}$ (interpretación de la segunda frase del párrafo de intervenciones) [atributo q]

Puntos B para los cuales el ΔABC es equilátero. Para *todos* los triángulos equiláteros, T está en la mediatriz del $\overline{AC}$ (interpretación de la tercera frase) [atributo q]

B' es un punto específico del plano (el que está en el centro de la pantalla) (interpretación de la frase 4)

Garantía: (No explicitada) Los puntos que son intersección de dos mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales, dos de los cuales son fijos y que determinan un triángulo isósceles o equilátero, están también en la mediatriz del segmento restante que se puede determinar con dichos tres puntos.

Aserción: El punto T' correspondiente al punto B' está en la mediatriz del $\overline{AC}$.

Respecto a la tipificación de los argumentos inductivos reconstruidos —ítem c— vemos aceptables respuestas como: en el caso de María y Francisca, el argumento es inductivo P-P; en el caso de Darío y Fernando, el argumento es inductivo G-P; en ambos casos, se trata de argumentos incompletos puesto que la garantía no es explícita.

En relación con las funciones de un argumento inductivo, asunto por el que se pregunta en el numeral 2, es probable encontrar respuestas como las siguientes:

- Descubrir lo que podría suceder cuando se tienen ciertas condiciones dadas.
- Proveer un patrón de generalidad o conjetura que debería ser demostrada.
- Determinar lo que puede suceder cuando se tienen ciertas condiciones dadas.
- Proveer un patrón de generalidad y considerarlo como teorema de la geometría.

Las dos primeras funciones son legítimas y se podrían institucionalizar para el curso. La tercera no, puesto que un argumento inductivo no provee aserciones que sean consecuencia necesaria del dato. La última tampoco, puesto que un enunciado es teorema cuando se demuestra. En cualquiera de los ejemplos ilustrados, el patrón establecido pudo haber tenido un alto grado de certeza; pero esta fue establecida mediante una exploración empírica, de ninguna manera, mediante un estudio teórico. Para complementar estas ideas, se recomienda al profesor tener en cuenta la información que se presenta en el tercer apartado del capítulo 3, titulado "Propósitos de los distintos tipos de argumento estudiados".

Bloque 7: Argumento deductivo

Haciendo eco de Krummheuer (1995) y de Pedemonte (2007), quienes usaron el Modelo[19] de Toulmin para caracterizar tipos de argumento, y siguiendo a Peirce (1878), quien afirmó que una deducción no es nada más que la aplicación de una regla general a un caso, formulamos la siguiente definición:

19 El Modelo de Toulmin surgió para esquematizar un argumento deductivo. Sin embargo, en la literatura en Educación Matemática, varios autores han precisado el potencial del Modelo para esquematizar argumentos no deductivos. Nosotros estamos de acuerdo con su utilidad y, por eso, lo estamos empleando para esquematizar argumentos inductivos y abductivos.

> En un *argumento deductivo*, la aserción (proposición que resulta de aplicar una regla general a un caso) es el elemento que se puede inferir de manera necesaria a partir de un dato (enunciado en el que se presenta el caso al cual se aplica la regla) y una garantía (la regla general).

Según la definición, en este tipo de argumento,[20] la aserción es consecuencia necesaria de la aplicación de la garantía al dato con el que cuenta quien argumenta; el rasgo característico de "consecuencia necesaria" proviene de la garantía escogida[21] y del uso de un esquema de razonamiento válido en la lógica bivalente. En la figura 27 se presenta el esquema de un argumento deductivo, usando el Modelo de Toulmin y las convenciones acordadas para mostrar detalles de la argumentación en la que se podría enmarcar.

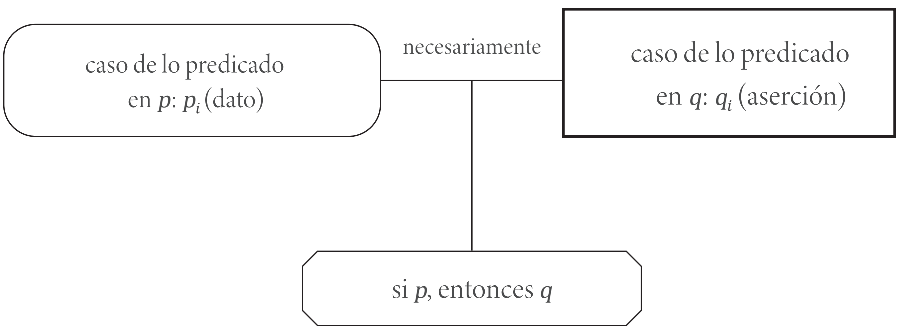


Figura 27. Esquema de argumento deductivo

20 Es un lugar común, la idea de que la deducción va de lo general a lo particular (G-P). Algunos autores nos conducen a replantearla en el sentido de aceptar que la deducción también puede ir de lo particular a lo particular (P-P), de lo particular a lo general (P-G), y de lo general a lo general (G-G). Para mayor detalle al respecto ver Hernández y Parra (2013).

21 Un enunciado condicional de índole general en cuyo antecedente se establecen las condiciones que se deben tener como dato, y en cuyo consecuente se establece la condición resultante de manera inevitable cuando se cumple lo exigido por el antecedente.

a) Con base en la información del esquema que se muestra en la figura 27, haz por escrito una descripción de detalles relevantes del enunciado que presenta la garantía en el argumento deductivo; puedes incluir detalles que van más allá del objeto mismo.

b) ¿Cómo se relacionan las oraciones que presentan el dato y la aserción del argumento con el enunciado que presenta la garantía? Explica tu respuesta.

c) Supón que en el esquema de la figura 27, la oración que aparece en la caja de la izquierda fuera "si una o más entidades (de un conjunto referencial) cumplen la condición *s*". Argumenta tu postura frente a la siguiente afirmación: Tal oración presenta el dato de un argumento.

Del argumento deductivo cabe destacar algunos rasgos que caracterizan a sus elementos. En primer lugar, la garantía es un enunciado condicional —cuyo formato lingüístico suele ser "si *p*, entonces *q*" o "*q* si *p*" o "toda entidad que es *p*, es *q*"— que se acepta como verdadero en la comunidad de discurso en el que se usa. Ese enunciado condicional está compuesto por dos oraciones, una de las cuales explicita una condición (suficiente) y la otra, la correspondiente condición (necesaria), condiciones, ambas, que articuladas expresan una relación de dependencia. Por ejemplo, en el caso del enunciado *si un cuadrilátero es rectángulo, entonces las diagonales son congruentes*, las oraciones "*un cuadrilátero es rectángulo*" y "*las diagonales son congruentes*" son, respectivamente, condición suficiente y condición necesaria en la ocurrencia del hecho geométrico verbalizado en el enunciado condicional. La condición suficiente se introduce con un término (*e. g.*, si, siempre que, con tal de que) que destaca, de aquella, la calidad de circunstancia o situación que, de cumplirse, hace que la condición necesaria se cumpla; por su parte, la condición necesaria, se introduce con una expresión que destaca su calidad de consecuencia (*e. g.*, por tanto, entonces). Además, la garantía es un enunciado de índole general, por cuanto refiere a todas las entidades a las que es aplicable su contenido (conjunto o discurso de referencia).

En segundo lugar, la oración que expresa el dato se acepta como verdadera; se accede al dato, bien sea por estar dado como parte de la situación sobre la que se va a argumentar, bien sea por haberlo inferido en una argumentación deductiva previa, o bien por aceptarlo mediante una suposición. De cualquier manera, el dato es un caso que sustancia lo que predica la condición suficiente expresada en la garantía y, en consecuencia, su naturaleza no es la de una condición. En tercer lugar, la proposición o postura que expresa la aserción refiere al mismo caso al que sustancia el dato; es verdadera o aceptable por cuanto se obtiene mediante un razonamiento lógico válido.

Un ejemplo de un argumento deductivo podría tener la siguiente forma lingüística: "puesto que $AB = AC = 5$, se cumple que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, debido a que/ ya que/ si las medidas de dos segmentos son iguales, entonces los segmentos son congruentes". Al identificar los elementos tenemos que:

Dato: $AB = AC = 5$

Aserción: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Garantía: Si las medidas de dos segmentos son iguales, entonces los segmentos son congruentes

De la presentación textual del argumento, queremos destacar la aparición de las expresiones "puesto que" y "se cumple que" en la justificación (*i. e.*, razón/dato que sustenta la aserción), las cuales tienen un sentido comunicacional bien distinto al que tienen las expresiones "si" y "entonces" en la garantía: la garantía es un enunciado condicional mientras que la justificación es un enunciado categórico.

Hacia el final del bloque 5 del capítulo 5 presentamos dos argumentos deductivos simples y un argumento deductivo global, en los que se emplea el esquema de razonamiento *Modus ponendo ponens* —$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$—. Siguiendo de cerca la descripción de Alfaro-Carvajal *et al.* (2019), aceptamos que los argumentos deductivos globales pueden ser clasificados como directos o indirectos.[22] El criterio de clasificación que produce los valores "directo,

22 Vale la pena hacer dos aclaraciones. 1) Con el término "demostración" nos referimos a un argumento deductivo global. 2) En la literatura se encuentran varios otros tipos de demostración o argumento global deductivo, cuyo criterio de clasificación atiende a las

indirecto" atiende a la manera mediante la cual se puede inferir q_i a partir de contar con p_i como un dato verdadero. En una demostración directa, la mencionada inferencia se puede hacer sin introducir nuevas proposiciones en calidad de dato ni cambiar el enunciado que se va a demostrar por uno equivalente. En una demostración indirecta, la mencionada inferencia se puede hacer cuando, además de p_i, se introducen y usan nuevas proposiciones en calidad de dato, o se cambia el enunciado que se va a demostrar por uno equivalente.

Los argumentos deductivos globales directos se hacen de acuerdo con las reglas de inferencia Silogismo hipotético —$[(p \to r) \wedge (r \to q)] \to (p \to q)$— y *Modus ponendo ponens*. La proposición "$p \to q$" será verdadera si cada vez que la proposición p se supone verdadera se sigue necesariamente que la proposición q es verdadera. La demostración directa se inicia suponiendo que p es verdadera. Luego, se debe construir una cadena de proposiciones $r_1, r_2, ..., r_n$, de forma tal que suceda lo siguiente: se establece que "$p \to r_1$" es verdadera; como p es verdadera, entonces, por la regla de inferencia *Modus ponendo ponens*, se sigue que r_1 es verdadera. Después, se debe garantizar que la proposición $(r_1 \to r_2)$ es verdadera; como r_1 es verdadera, por *Modus ponendo ponens* se sigue que r_2 es verdadera. En general, la secuencia de condicionales es la siguiente: $(p \to r_1), (r_1 \to r_2), ..., (r_n \to q)$. Nótese que cada $[(r_i \wedge (r_i \to r_j)) \to r_j]$ es un argumento simple. Al final del proceso, se sigue necesariamente que la proposición q es verdadera. Por Silogismo hipotético, se tiene que $(p \to q)$ es verdadera. El argumento global presentado al final del bloque 5 del capítulo 5 es directo.

A manera de resumen, el procedimiento asociado a un argumento deductivo global directo se compone de los siguientes pasos:

estructuras simbólicas particulares de las proposiciones que conforman la proposición que se desea demostrar: conjuntivo, disyuntivo, exhaustivo, condicional y bicondicional y con cuantificadores. Para mayor detalle al respecto, véase Alfaro-Carvajal *et al.* (2019).

(1) se supone p como dato verdadero

(2) se tiene $p \rightarrow r_1$ como verdadera

(3) se infiere r_1, usando *Modus ponendo ponens*

(4) se tiene $r_1 \rightarrow r_2$ como verdadera

(5) se infiere r_2, usando *Modus ponendo ponens*

(...)

(6) se infiere r_{n-1}, usando *Modus ponendo ponens*

(7) se tiene $r_{n-1} \rightarrow r_n$ como verdadera

(8) se infiere r_n, usando *Modus ponendo ponens*

(9) se tiene $r_n \rightarrow q$ como verdadera

(10) se infiere q, usando *Modus ponendo ponens*

(11) se establece que $p \rightarrow q$, usando Silogismo hipotético

Por otro lado, existen dos tipos de argumento global deductivo indirecto para una proposición matemática de la forma $p \rightarrow q$: la demostración en la que se usa la contrarrecíproca o la demostración en la que se usa el Principio de reducción al absurdo. En las demostraciones por contrarrecíproca, en lugar de demostrar la proposición $p \rightarrow q$ se demuestra la proposición contrarrecíproca $\neg q \rightarrow \neg p$. Este tipo de demostración se basa en la equivalencia lógica $[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)]$. Para demostrar la proposición $\neg q \rightarrow \neg p$ se procede como en las demostraciones directas.

d) Usando tablas de verdad comprueba la equivalencia lógica que fundamenta la demostración por contrarrecíproca.

La prueba hecha en el ítem d recurre a una manera procedimental de ver la condicional lógica, en la que se despliegan, uno a uno, los valores de verdad posibles para las proposiciones p y q, y se calculan los valores correspondientes para todas las demás proposiciones compuestas que intervienen, hasta llegar a considerar la tabla de la equivalencia (esto es, mostrar que las dos proposiciones en cuestión tienen el mismo valor de verdad bajo las mismas condiciones). No obstante, es posible hacer la mencionada prueba con una mirada objetual (de objeto) de la condicional lógica, es decir, recurriendo a sus propiedades; de manera específica, recurriendo a expresar la condicional lógica en términos de otra conectiva lógica, la disyunción.

e) ¿Cómo se relaciona la condicional lógica con la disyunción?

Atendiendo al aporte semántico (de significado) que hace la condicional lógica cuando se usa para articular dos proposiciones simples y da lugar a una proposición condicional, afirmamos que una oración de la forma "si p, entonces q" indica que en caso de que p sea verdadera, necesariamente q es verdadera, lo cual indica —de manera enfática— que q es verdadera o, de lo contrario, p es falsa, situación que da lugar a la oración de la forma "q o $\neg p$". Así, tenemos la siguiente propiedad de la condicional que expresa una relación entre ella y la disyunción: $[(p \to q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)]$. La siguiente cadena de argumentos sustenta la validez de la demostración por contrarrecíproca:

> $[(p \to q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)]$ (por propiedad de la condicional), $[(q \vee \neg p) \leftrightarrow (\neg p \vee q)]$ (por conmutatividad de la disyunción), $[(\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg(\neg q))]$ (porque la negación de la negación de una proposición y esta son equivalentes), $[(\neg p \vee \neg(\neg q) \leftrightarrow (\neg q) \to (\neg p)]$ (por propiedad de la condicional).

El argumento por reducción al absurdo se basa en la equivalencia lógica llamada *neutro*, la cual establece que para cualquier proposición t, la proposición $[(t \vee F) \leftrightarrow t]$ es una tautología siempre y cuando F represente cualquier contradicción (es decir, una proposición de la forma $(r \wedge \neg r)$ que, por lo tanto, es falsa). De esta manera, en lugar de demostrar la proposición $p \to q$ se demuestra $[(p \to q) \vee F]$, que es equivalente a $[(p \wedge \neg q) \to F]$, proposición que en la práctica es la que se demuestra (es decir, que la negación de la proposición que se quiere demostrar implica una contradicción). Para proceder con la demostración, se trabaja como si fuese una demostración directa, es decir, se supone que $(p \wedge \neg q)$ es verdadera hasta inferir una proposición contradictoria que es F. Dadas las equivalencias, $(p \wedge \neg q)$ indica que, en la práctica,

$\neg q$ se está tomando como un dato nuevo, que se acepta como una proposición verdadera cuando se introduce. Si al hacerlo se infiere una contradicción (r) y ($\neg r$), al usar el Principio de reducción al absurdo,[23] necesariamente se infiere que $\neg q$ no puede ser verdadera, con lo cual lo es q.

De acuerdo con lo anterior, el procedimiento de un argumento por reducción al absurdo permite soportar q como una consecuencia necesaria de p, cuando no se vislumbra un camino "directo" para inferir a q. El procedimiento asociado se compone de los siguientes pasos:

(1) se supone p como dato
(2) se introduce $\neg q$ en calidad de dato
(3) se infieren r y $\neg r$
(4) se emplea el Principio de reducción al absurdo para inferir la aserción original q, pues $\neg q$ resulta falsa ya que introducirla y usarla conduce a una contradicción. Por tanto, $p \rightarrow q$ es verdadera.

f) Sin hacer tablas de verdad, explica por qué la proposición $[(t \vee F) \leftrightarrow t]$ es una tautología siempre y cuando F represente cualquier contradicción.
g) Usando tablas de verdad, comprueba la equivalencia entre las proposiciones $\neg(p \rightarrow q)$ y $(p \wedge \neg q)$.
h) Haz la prueba de la equivalencia entre $\neg(p \rightarrow q)$ y $(p \wedge \neg q)$ usando una mirada objetual de las conectivas lógicas involucradas.

Con la intención de ir consolidando la conceptualización de los tipos de argumento, elabora con cuidado tus respuestas a las siguientes dos tareas:

i) Menciona las principales diferencias entre argumento inductivo y argumento deductivo.
j) Proporciona un ejemplo de un argumento deductivo indirecto por contrarrecíproca y otro por reducción al absurdo.

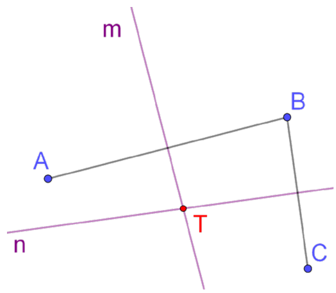
23 El Principio de reducción al absurdo indica que si se asume como verdadera una proposición $\neg q$ (que así se acepta al introducirla) y se deduce $(r \wedge \neg r)$, entonces la proposición $\neg q$ no es verdadera, con lo cual es verdadera q. Este prinicipio se fundamenta en el del tercio excluido para indicar que $(r \wedge \neg r)$ es falsa.

Ejemplo de la reconstrucción de un argumento global

A partir de la transcripción del caso 3, otro breve intercambio entre Francisca y María, ejemplificamos la reconstrucción de un argumento global, a la luz de la conceptualización expuesta.

Caso 3

(María y Francisca han construido, tal como lo muestra la figura de la derecha, los $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con A, B y C no colineales; las rectas m y n mediatrices del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$ respectivamente; y T, el punto de intersección de m y n.



1	**Francisca:**	Y ¿por qué se intersecan estas rectas [m y n]?
2	**María:**	Mmmm, ¿por contradicción?
3	**Francisca:**	O sea, suponemos que [m y n] son paralelas, ¿sí?
4	**María:**	Sí... si las rectas son paralelas y son mediatrices de segmentos, los segmentos son colineales... o paralelos; sí, también pueden ser paralelos.
5	**Francisca:**	Mmmm... o sea que, [segmentos] *AB* y *BC* son colineales, ¿cierto?
6	**María:**	Sí. O paralelos...
7	**Francisca:**	Pero eso no puede pasar... contradice que esos segmentos [$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$] se intersecan en este punto... (señala el punto B)
8	**María:**	Y los puntos son no colineales, ¿no?... Tenemos un triángulo.
9	**Francisca:**	Listos, ya tendríamos una contradicción...
10	**María:**	Ajá... por eso las rectas [m y n] se intersecan.

En el diálogo anterior es posible reconstruir un argumento global deductivo, compuesto de varios argumentos deductivos simples. Dicho argumento global tiene por aserción m y n *se intersecan en un punto* T. Para justificarla, las estudiantes acuden a un método indirecto, consistente en negar la aserción y usar el Principio de reducción al absurdo.

a) ¿Cuántos argumentos simples ves? ¿Mediante qué intervenciones podemos reconstruir cada argumento?

   Nota: No pierdas la oportunidad de responder y luego contrastar tu respuesta con la nuestra.

Para reconstruir los argumentos simples que componen el argumento global subyacente en el intercambio transcrito, presentamos a continuación tres párrafos, cada uno de los cuales reúne las frases[24] del intercambio que son clave para lo que nos interesa, y luego formulamos cuatro instrucciones que te ayudarán a hacer la reconstrucción mencionada.

> *Primer párrafo:* (1) Las rectas m y n son las respectivas mediatrices del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$. / (2) **Suponemos** que m y n son paralelas. / (3) **En consecuencia**, el $\overline{AB}$ y el $\overline{BC}$ son paralelos o colineales, puesto que / (4) si dos rectas son paralelas y cada una es mediatriz de uno de dos segmentos, los segmentos son colineales o paralelos.
>
> *Segundo párrafo:* (1) Se tiene un ΔABC. / (2) **Luego**, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto B, y A, B y C no son colineales.
>
> *Tercer párrafo:* (1) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son paralelos o colineales **contradice** que esos segmentos [$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$] se intersecan en este punto (señala el punto B) y que los puntos [A, B y C] son no colineales. / (2) Ajá... **por eso** las rectas [m y n] se intersecan.

24 En algunos casos la frase es textual y en otros, no. Por ejemplo, para aludir a la información del relato de lo que han hecho las estudiantes antes de comenzar su diálogo, construimos una oración que bien podría ser parte del diálogo. En otras ocasiones, hemos cambiado el orden de las frases o hemos hecho ligeras modificaciones en la redacción para ganar precisión. El énfasis mediante el uso de la negrilla es nuestro.

b) Para los dos primeros párrafos es posible reconstruir sendos argumentos. Determina el dato, la aserción y la garantía (sea que esté o no explícita) del argumento asociado a cada párrafo.

c) ¿Puedes reconstruir un argumento asociado al tercer párrafo? Si es el caso, descríbelo indicando sus elementos (dato, aserción y garantía).

d) ¿Son deductivos los argumentos presentados? ¿Por qué?

e) Para cada argumento provee el esquema correspondiente.

Mediante la figura 28, se presenta una propuesta de esquema para el argumento global subyacente en el caso 3. Este argumento es deductivo e indirecto. Específicamente, es un argumento global (o demostración) por reducción al absurdo en el que se pretende sustentar la veracidad de la proposición condicional "si las rectas m y n son las respectivas mediatrices del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$, con A, B y C no colineales, entonces m y n se intersecan en un punto T". Para ello, las estudiantes suponen que m y n son paralelas (negación de la tesis de la proposición condicional). Con base en la introducción de esa proposición como parte del dato, distinguimos tres argumentos simples deductivos; de los dos ubicados en el lado izquierdo del esquema se infieren aserciones contradictorias (F) que, conjugadas, conforman el dato del argumento simple del lado derecho. Este argumento global tiene por garantía el Principio de reducción al absurdo que da sentido al método indirecto, para poder inferir que, dada la contradicción y la proposición introducida (negación de la tesis), necesariamente las rectas m y n se intersecan en un punto.

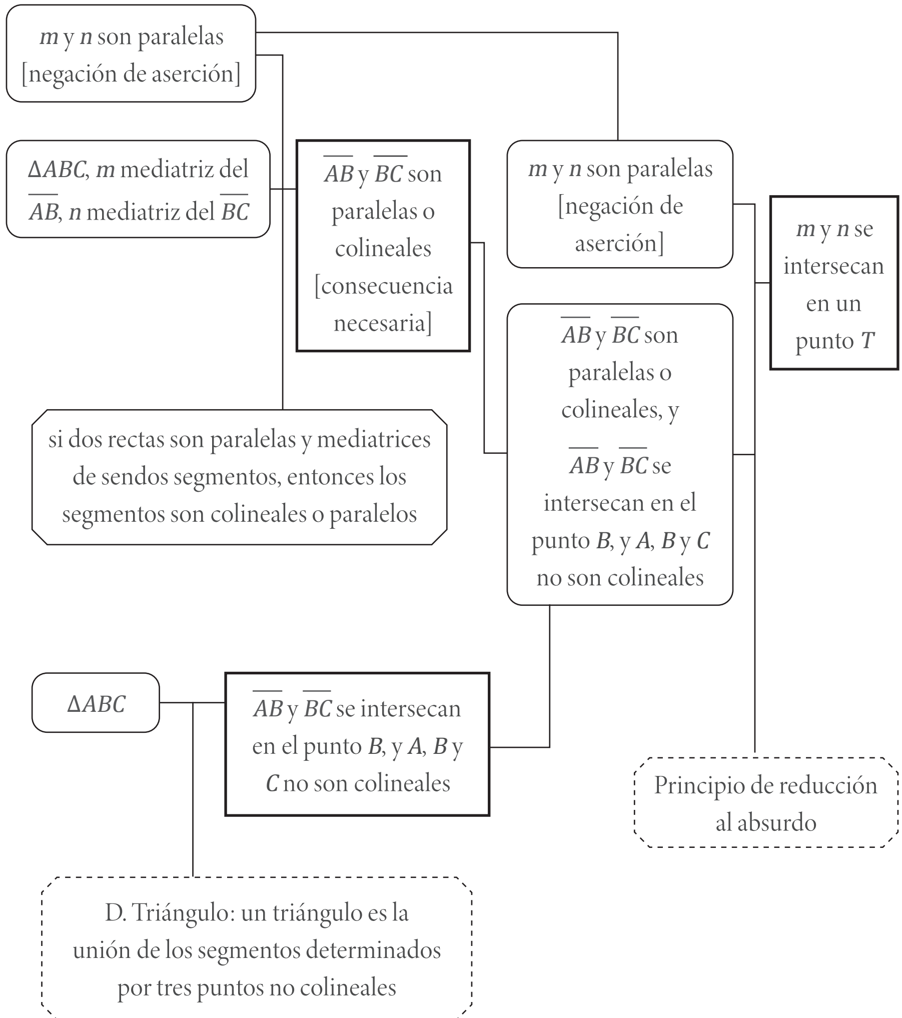


Figura 28. Esquema de la reconstrucción del argumento deductivo global por método indirecto, subyacente en el caso 3

f) Compara el esquema que realizaste para cada uno de los argumentos con los correspondientes que conforman la figura 28. Haz un comentario escrito en el que presentes las diferencias encontradas.

Descripción de las tareas del bloque 7

Actividad que demandan las tareas: principalmente, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de los textos; además, responder por escrito las varias solicitudes que se presentan con el propósito de llamar la atención sobre aspectos clave del contenido que es objeto de estudio.

Propósito didáctico de las tareas: proveer una oportunidad para que los estudiantes se involucren en un proceso de estudio (lectura, interpretación, explicitación y escritura) que 1) les pide profundizar en la definición de argumento deductivo para considerar, por ejemplo, rasgos del enunciado que expone cada uno de los elementos de un argumento deductivo y la relación de las oraciones que exponen el dato y la aserción con la que expone la garantía; 2) los guía para revisar la manera de inferir en la argumentación deductiva (lo que da lugar a una clasificación de argumentos deductivos en directos o indirectos) y para profundizar en los fundamentos lógicos para la demostración por contrarrecíproca y por reducción al absurdo; 3) les pide establecer diferencias entre argumento inductivo y argumento deductivo; 4) les pide dar ejemplos de argumentos deductivos indirectos; 5) los guía en el uso de una estrategia de reconstrucción de argumentos, a partir de la transcripción de intercambios comunicacionales en el aula, que ya fue usada en el bloque 6. Dicho de manera más general, nos proponemos crear un ambiente de aprendizaje que favorezca el paso de un conocimiento común sobre argumento deductivo a uno especializado.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: con respecto al conocimiento matemático, es necesario que los estudiantes tengan un conocimiento básico sobre lógica (tablas de verdad para conectores lógicos usuales y procedimientos para establecer equivalencias entre proposiciones simbolizadas) y alguna experiencia de lo que implica una demostración en matemáticas. Ahora bien, más allá del conocimiento geométrico presente en los enunciados de la tarea, se debe contar con la conceptualización sobre argumento (y los elementos que la componen) ya estudiada en bloques presentados anteriormente.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: conceptualización elaborada de argumento deductivo; herramienta analítica para identificar y esquematizar argumentos deductivos; competencia de análisis para identificar y reconstruir argumentos deductivos.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: es usual que el argumento deductivo sea el más familiar para los estudiantes y que ellos tengan algún conocimiento sobre los argumentos deductivos globales directos e indirectos y puedan proveer algún ejemplo de ellos. Con el objetivo de precisar, corregir o complementar ese conocimiento, el bloque 7 expone el criterio usado para tipificar los argumentos deductivos de esa forma —basado en la propuesta de Alfaro-Carvajal *et al.* (2019)— y explica, de manera más o menos detallada, el procedimiento para desarrollar cada tipo de argumento deductivo (directo e indirecto). Es probable que los estudiantes no conozcan con detalle los elementos de la teoría de lógica que sustentan la validez de cada uno de tales procedimientos, por lo cual en el bloque 7 presentamos tal explicación de una manera más o menos sucinta.

Al respecto, de estas explicaciones, creemos pertinente que el profesor debe estar preparado sobre las proposiciones (equivalentes o que son tautologías) usadas para describir, específicamente, los tipos de argumentos indirectos (por contrarrecíproca o por reducción al absurdo). Así mismo, dado que en la nota al pie de página número 5 mencionamos que es posible tipificar un argumento deductivo simple como particular-particular [P-P], particular-general [P-G], general-general [G-G] y general-particular [G-P], y que algún estudiante puede pedir alguna explicación al respecto, consideramos prudente que el profesor tenga ejemplos a la mano que ilustren cada caso.

En relación con lo expuesto en el párrafo anterior, consideramos deseable que el profesor pida a los estudiantes:

- Sobre las explicaciones de los tipos de argumentos deductivos indirectos, precisar la proposición que se quiere demostrar, la que en realidad se demuestra y las equivalencias que sustentan la validez de cada procedimiento. El cuadro 4 indica cada uno de estos elementos, para cada tipo de argumento deductivo global indirecto.

- Sobre los tipos de argumentos deductivos simples, proveer ejemplos para cada tipo de argumento P-P, P-G, G-G y G-P. En el cuadro 5 presentamos unos ejemplos.

Cuadro 4. Proposiciones clave involucradas en argumentos globales deductivos indirectos

	Por contrarrecíproca	**Por reducción al absurdo**
Proposición por demostrar	$p \rightarrow q$	
Proposición que realmente se demuestra	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \vee F$
Equivalencias que sustentan el procedimiento	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee F]$, F: $r \wedge \neg r$ $[(p \rightarrow q) \vee F] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow F]$
Explicación	Si se tiene $(\neg q \rightarrow \neg p)$, entonces se tiene $(p \rightarrow q)$, dada la equivalencia entre estas proposiciones.	$(p \rightarrow q)$ es equivalente a $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$. En la práctica, $\neg q$ se toma como un dato nuevo. Se infiere una contradicción F. Al usar el Principio de reducción al absurdo, se infiere que $\neg q$ no es verdadera, con lo cual lo es q.

Cuadro 5. Ejemplos de argumentos deductivos simples G-P, G-G, P-P y P-G

G-P	G-G	P-P	P-G
Garantía: En los paralelogramos, las diagonales se bisecan.			
Dato: Todos los rectángulos son paralelogramos. ⊡ $ABCD$ es rectángulo.	Dato: Todos los rectángulos son paralelogramos.	Dato: ⊡ $ABCD$ es paralelogramo.	Dato: El rectángulo ⊡ $ABCD$ es paralelogramo.
Aserción: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.	Aserción: En todos los rectángulos, las diagonales se bisecan.	Aserción: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.	Aserción: En todos los rectángulos, las diagonales se bisecan.

Respecto a la determinación de las diferencias clave entre argumento inductivo y argumento deductivo —ítem i— es deseable la mención de dos: una relativa a lo que se infiere y otra relacionada con el carácter de necesariedad o no de la inferencia. En el argumento deductivo, lo que se infiere es la aserción, la cual es una consecuencia necesaria del dato, gracias a la garantía; en el inductivo, se infiere tanto la aserción como la garantía, y ambas tienen un carácter de probable.

Respecto a la solicitud hecha en el ítem j, para tener una referencia común que pueda ser útil en la gestión de la clase, proponemos los siguientes ejemplos.

- Por contrarrecíproca. Se quiere demostrar que "si dos rectas y una trasversal a ellas no determinan ángulos correspondientes congruentes, entonces las dos rectas no son paralelas" y la demostración que se hace por contrarrecíproca es la del enunciado "si dos rectas son paralelas y hay una trasversal a ellas, entonces los ángulos correspondientes determinados por estas son congruentes".

- Por Principio de reducción al absurdo. Se quiere demostrar que "si dos rectas son paralelas y hay una trasversal a ellas, entonces los ángulos correspondientes determinados por estas son congruentes" y la demostración que se hace por reducción al absurdo procede introduciendo una proposición como un nuevo dato, la cual corresponde a la negación del consecuente de la proposición que se quiere demostrar: "los ángulos correspondientes determinados por las rectas dadas no son congruentes"; al estudiar esta situación se llega a una contradicción (se contradice el postulado de las paralelas).

Con relación al ejemplo de reconstrucción de un argumento global, con el ítem a pretendemos promover inicialmente la identificación de argumentos deductivos simples. Prevemos como posible que los estudiantes se percaten de que, subyacente al caso 3, hay un argumento global deductivo indirecto por reducción al absurdo. Esto, dado que en el diálogo se puede identificar una alusión a producir, por contradicción, la justificación de que las rectas m y n se intersecan [líneas 1 y 2]; de igual forma, se hace una suposición que niega tal aserción, elemento esencial para producir un argumento de ese tipo.

Por otra parte, esperamos la identificación de un argumento simple deductivo directo al considerar las líneas 3 a 6. Para ese fragmento, deben precisar que María y Francisca toman como aserción "$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son colineales o paralelos" y usan, para inferirla, el dato "m y n son paralelas" y como garantía "si [dos] rectas son paralelas y son mediatrices de segmentos, los segmentos son colineales o paralelos".

Finalmente, prevemos que los estudiantes no se percatarán de un argumento simple deductivo que se puede identificar en la línea 8. En esta, María infiere que los puntos A, B y C son no colineales, tomando como dato que tales puntos determinan un triángulo y como garantía (implícita) la definición de triángulo.

Cabe señalar que los argumentos deductivos simples descritos en los dos párrafos previos son parte del argumento global al cual se hizo referencia en el primer párrafo. Por supuesto, de las líneas 7 y 10 se puede identificar la terminación de tal argumento global (donde se indican las proposiciones contradictorias), momento en el cual María y Francisca usan, implícitamente, el Principio de reducción al absurdo como garantía. Un mejor detalle sobre la cadena deductiva completa se encuentra en la presentación de las tareas de este bloque (véase figura 28).

Para la reconstrucción de los dos argumentos subyacentes en los dos primeros párrafos —ítem b—, es deseable que los estudiantes identifiquen sus elementos básicos:

En el primer párrafo

Dato: ΔABC, m mediatriz del $\overline{AB}$, n mediatriz del $\overline{BC}$ (interpretación de la frase a)
m y n son paralelas [negación de aserción] (interpretación de la frase b)

Garantía: Si dos rectas son paralelas y mediatrices de dos segmentos, entonces los segmentos son colineales o paralelos (interpretación de la frase d) [explícita]

Aserción: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son paralelas o colineales (interpretación de la frase c)

En el segundo párrafo

Dato: ΔABC (frase a)
m y n son paralelas [negación de aserción] (interpretación de la frase b)

Garantía: Definición de triángulo [explícita]

Aserción: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto B, y A, B y C no son colineales (frase b)

En el tercer párrafo —mencionado en el ítem c— se puede ver la contradicción que permite terminar el argumento deductivo global por reducción al absurdo. En él, se puede reconstruir un argumento deductivo simple cuya garantía es dicho principio.

En el tercer párrafo

Dato: m y n son paralelas [negación de aserción] (suposición hecha)

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son paralelas o colineales

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto B, y A, B y C no son colineales (frase 1)

Garantía: Principio de reducción al absurdo [no explícita]

Aserción: m y n se intersecan en un punto T (frase 2)

Como se ha dicho en las respuestas anteriores, todos los argumentos son deductivos —ítem d—. Esto porque se puede identificar una aserción que se infiere del dato o del dato y la garantía cuando esta se explicita. Cabe indicar que los argumentos asociados a los párrafos segundo y tercero son incompletos, pues la garantía no se explicita; caso diferente es el argumento asociado al primer párrafo.

Los esquemas de los argumentos subyacentes en los tres párrafos, solicitados en el ítem e, se presentan en las figuras 29, 30 y 31.

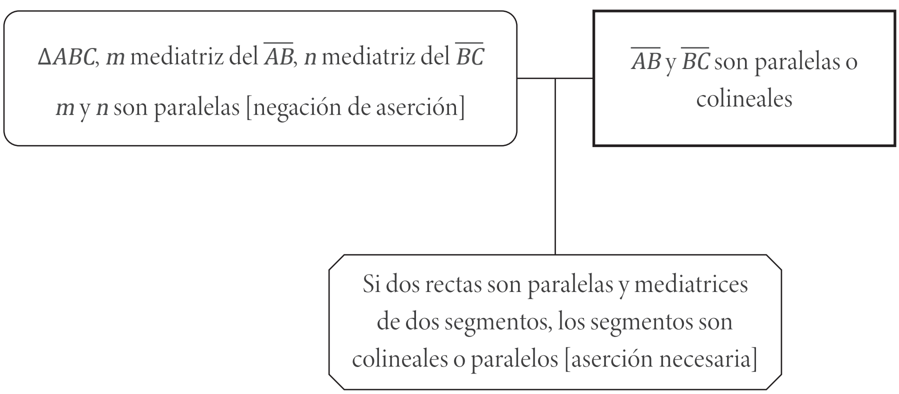


Figura 29. Esquema de argumento deductivo subyacente en el primer párrafo

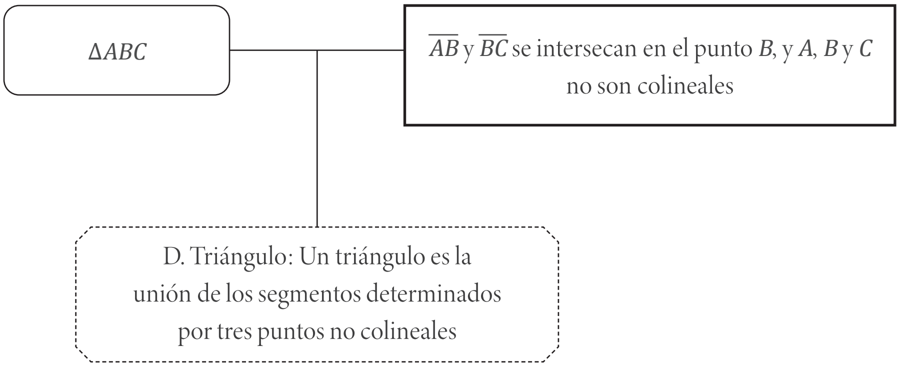


Figura 30. Esquema de argumento deductivo subyacente en el segundo párrafo

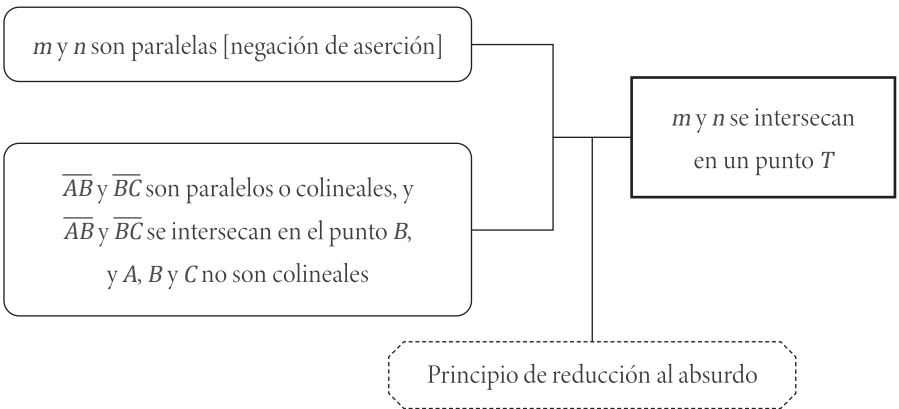


Figura 31. Esquema de argumento deductivo subyacente en el tercer párrafo

El ejercicio que se pide hacer en el ítem f pretende favorecer que se hagan ostensivas las dudas de los estudiantes a partir de la comparación entre sus producciones y las hechas por nosotros mediante el texto de la tarea. Se espera que, con respecto al argumento asociado al tercer fragmento indicado en la presentación del bloque 7, salga a la luz la dificultad de reportar los componentes de los argumentos, particularmente la precisión de todas las proposiciones que componen el dato (la proposición que indica la negación de la tesis y las proposiciones contradictorias) y la garantía (la proposición que indica el Principio de reducción al absurdo).

Bloque 8: Argumento abductivo

Así como lo hicimos con el argumento deductivo, aquí usamos el Modelo de Toulmin para formular la siguiente definición de argumento abductivo.

> En un *argumento abductivo*, el dato (o parte de este) que justifica una aserción dada (la cual formula un hecho observado) es el elemento inferido (durante la argumentación); la inferencia se basa en una garantía conocida o creada durante la argumentación.

En cualquier argumentación abductiva, dado que se cuenta con un hecho y que este pudo haber tenido varias causas, lo inferido es apenas probable. Por ejemplo, si se tiene la aserción "el piso del patio sin techo está mojado (en el momento en el que se profiere la frase)", el hecho expuesto por aquella pudo haber tenido, por lo menos, dos causas: "llovió (poco tiempo antes de proferir la aserción)", o "fue lavado previamente y no se ha secado".

Reconocemos dos tipos de argumento abductivo, cuya clasificación se atribuye al origen de la garantía: *teórico*, si la evoca (conoce) quien argumenta; y *creativo*, si la produce quien argumenta. Para ilustrar el primer caso, seguimos usando la misma situación del ejemplo: si son conocidas, por quien argumenta, las reglas "si llueve, el piso del patio sin techo se moja" o "si se lava el piso, este se moja", entonces cada una de tales reglas puede ser usada como garantía evocada, de la cual puede inferirse como dato, respectivamente, que "llovió (hace poco)" o que "se lavó el piso (recientemente)". En cualquiera de estos ejemplos, reconocemos un argumento abductivo en el que cada dato se infiere de la regla correspondiente.

Para ilustrar el segundo caso, considérese la siguiente situación: en algún momento, se registró como hecho novedoso para la humanidad la existencia de un virus, de origen desconocido, que se estaba propagando de modo masivo. Para investigar qué originó el virus, los epidemiólogos no contaban con reglas (garantías) a partir de las cuales inferir posibles orígenes (dato). Luego de mucha investigación, se pudo conjeturar, con una probabilidad alta, que el virus v2 es la mutación, a través del contacto humano con reptiles, de un virus v1 que estos tienen. En esta situación, reconocemos un argumento abductivo en el que tanto el dato (los reptiles tienen un virus v1 y los humanos tuvieron contacto con esta especie) como la garantía (si los reptiles tienen un virus v1 y los humanos tienen contacto con ellos, entonces v1 muta en v2) fueron producidos. Nótese que, en casos como este, la garantía también es inferida.

a) Menciona las principales diferencias entre argumento abductivo, argumento deductivo y argumento inductivo.
b) Indica las principales diferencias entre un argumento abductivo teórico y uno creativo.
c) Provee el esquema del argumento correspondiente a cada uno de los tres ejemplos del relato.

Los dos tipos de argumento abductivo pueden ser esquematizados mediante el Modelo de Toulmin; la figura 32 muestra el caso en el que solo se infiere el dato, mientras que la figura 33 exhibe el caso en el que se infieren tanto el dato como la garantía.[25]

25 Cabe recordar que las proposiciones simples que conforman tanto el antecedente como el consecuente de la proposición condicional que expresa la garantía "si (antecedente), entonces (consecuente)" tienen un carácter general, dada la connotación de generalidad que dicha garantía debe tener; por otro lado, las proposiciones que expresan el dato y la aserción del argumento son, respectivamente, o casos específicos del dato y la aserción que conforman la garantía, o proposiciones que tienen el mismo nivel de generalidad del antecedente y el consecuente de la garantía.

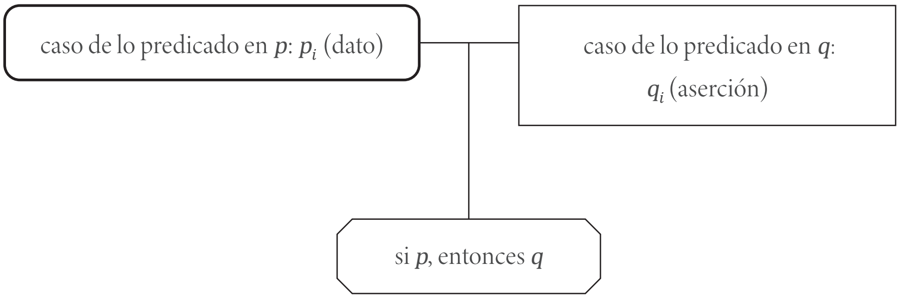


Figura 32. Esquema de argumento abductivo teórico

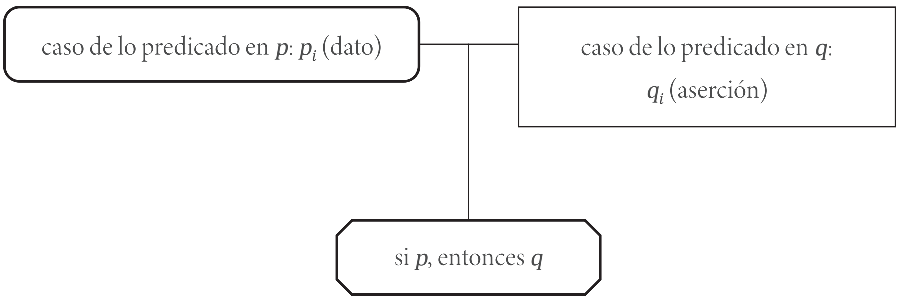
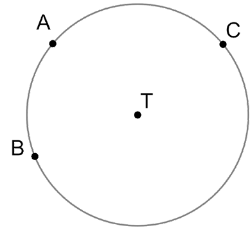


Figura 33. Esquema de argumento abductivo creativo

A monitorear lo que has entendido

Consideremos ahora la transcripción del caso 4, un breve intercambio de Andrés y Ricardo cuando trabajaban juntos en la resolución de un problema cuyo enunciado no se requiere tener para lo que nos interesa aquí.

Caso 4



(Andrés y Ricardo han construido en SGD tres puntos no colineales A, B y C. Con la herramienta "Circunferencia por tres puntos" han construido una circunferencia que contiene dichos puntos. Con la herramienta "Medio o centro" han determinado el centro T de la circunferencia.

1	**Andrés:**	Venga, y ¿qué condición debería tener T para que eso pase? O sea, para que esa circunferencia sea así [contenga los puntos A, B y C], ¿quién debería ser T?
2	**Ricardo:**	Mmm... ese [punto] se llama... Agh, no me acuerdo. Pero sí recuerdo que es... debería ser la intersección de las mediatrices.
3	**Ambos:**	Las mediatrices. Sí, sí, sí...
4	**Andrés:**	[la intersección] de las mediatrices de los lados del triángulo ABC.

Subyacente en el caso 4 detectamos un argumento abductivo que podemos reconstruir a partir de la transcripción.

1. ¿Qué palabras o frases del diálogo te sirven de indicadores para decir que hay un argumento? Tu respuesta debe estar fundamentada en la idea institucionalizada de argumento y en el esquema funcional de Toulmin.
2. ¿Qué elemento(s) del diálogo (palabras o frases) consideras determinante(s) para decir que el argumento es abductivo?
3. Indica si la garantía está explícita en el diálogo. Además, di si el argumento es teórico o creativo; al respecto de esto último, ¿qué tomas en cuenta de la transcripción para decidir?
4. Provee el esquema correspondiente al argumento abductivo.

Descripción de las tareas del bloque 8

Actividad que demandan las tareas: principalmente, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de los textos; además, responder por escrito las varias solicitudes que se presentan con el propósito de llamar la atención sobre aspectos clave del contenido que es objeto de estudio.

Propósito didáctico de las tareas: proveer una oportunidad para que los estudiantes se involucren en un proceso de estudio (lectura, interpretación, explicitación y escritura) que 1) les propone una definición de argumento abductivo y una tipología según el origen de la garantía; 2) les pide establecer diferencias entre argumento inductivo, argumento deductivo y argumento abductivo; 3) les propone oportunidades para usar una estrategia de reconstrucción de argumentos, a partir de la transcripción de intercambios comunicacionales en el aula, que ya fue usada en el bloque 6, por ejemplo. Dicho de manera más general, nos proponemos crear un ambiente de aprendizaje que favorezca el desarrollo de un conocimiento especializado sobre argumento abductivo.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: Más allá del conocimiento geométrico presente en los enunciados de la tarea, se debe contar con la conceptualización sobre argumento (y los elementos que lo componen). Así mismo, sobre los tipos de argumento deductivo e inductivo, de forma tal que haya mayor posibilidad de hacer un contraste asertivo entre todos los tipos de argumento.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: conceptualización elaborada de argumento abductivo; herramienta analítica para identificar y esquematizar argumentos abductivos; competencia de análisis para identificar y reconstruir argumentos abductivos.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: a diferencia del argumento deductivo, es muy probable que los estudiantes no tengan familiaridad alguna con el término "argumento abductivo" y, en cualquier caso, su conocimiento al respecto diste del especializado. Consideramos que el desarrollo de este conocimiento puede impulsarse no solo al estudiar la definición de argumento abductivo, sino también al contrastar los rasgos del argumento abductivo contra los correspondientes en los argumentos ya estudiados. Los ítems a, b y c plantean tareas encaminadas en el mencionado sentido. Con relación a la tarea propuesta en el ítem a, esperamos que los estudiantes noten que la principal diferencia entre los tipos de argumentos radica en los elementos que se infieren y en el carácter probable que tiene dicha inferencia para algunos tipos. El cuadro 6 resalta aquellos asuntos en los que hay similitud o diferencia entre los tipos de argumentos inductivo, abductivo y deductivo.

Cuadro 6. Similitudes y diferencias entre los tres tipos de argumento

		Elemento que se infiere			**Carácter de la inferencia**	
		Dato	Garantía	Aserción	Probable	Necesaria
Inductivo			✓	✓	✓	
Deductivo				✓		✓
Abductivo	Teórico	✓			✓	
	Creativo	✓	✓		✓	

Es deseable la identificación de dos diferencias fundamentales: una relativa al elemento del argumento que se infiere y otra relativa a la manera de inferir el elemento. En ese sentido, es deseable reconocer que en un *argumento abductivo teórico* la inferencia es un dato, mientras que en uno *creativo* la inferencia es tanto el dato como la garantía. Por otro lado, en el teórico, el dato se infiere con la intermediación de una garantía conocida por el argumentador y cuyo consecuente alude a la aserción (o hecho conocido) con el que se cuenta. En contraste, en el creativo, el dato se infiere con la intermediación de una garantía que es producida por el argumentador y que él no conocía, cuyo consecuente alude a la aserción (o hecho conocido) con el que se cuenta; desde esa perspectiva, en un argumento abductivo de este tipo, la aserción también es inferida por el argumentador.

Antes de continuar con la descripción de las tareas propuestas en los demás ítems, cabe comentar lo siguiente: dado que para los argumentos deductivos e inductivos hemos mencionado que estos se pueden tipificar como particular-particular [P-P], particular-general [P-G], general-general [G-G] y general-particular [G-P], es posible que algún estudiante pregunte sobre la posibilidad de que los argumentos abductivos puedan también ser clasificados de esa forma y pida alguna explicación al respecto. Bajo esta perspectiva, consideramos pertinente sugerir al profesor que cuente con algunos ejemplos que ilustren cada caso. El cuadro 7 presenta unos ejemplos construidos por nosotros; dependiendo del enfoque que le quiera dar el profesor, si la garantía se evoca o se elabora, cada uno de ellos puede ser teórico o creativo, respectivamente.

Cuadro 7. Ejemplos de argumento abductivo G-P, G-G, P-P y P-G

G-P	G-G	P-P	P-G
Garantía: En los rectángulos, las diagonales se bisecan.			
Aserción: En *uno* de esos cuadriláteros las diagonales se bisecan.	**Aserción:** En *todos* estos cuadriláteros, las diagonales se bisecan.	Aserción: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.	**Aserción:** En *todos* estos cuadriláteros, las diagonales se bisecan.
Dato: *Todos* estos cuadriláteros son rectángulos.	**Dato:** *Todos* esos cuadriláteros deberían ser rectángulos.	**Dato:** $\boxdot$ *ABCD* es paralelogramo.	**Dato:** *Uno* de esos cuadriláteros debería ser un rectángulo.

Pedir el esquema de los tres argumentos subyacentes en el relato —ítem c— tiene dos propósitos: 1) hacer explícita la interpretación de argumento abductivo teórico y creativo a partir de la identificación y reconstrucción de estos tipos de argumentos, tomando como base los relatos que hemos puesto a manera de ejemplificación; y 2) promover el uso de los convenios que hemos sugerido para realizar esquemas de argumentos, como recurso para tener en cuenta y explicitar los detalles que caracterizan cada tipo de argumento. Los siguientes son los esquemas deseables para cada relato.

Teóricos: para ambos casos se pone la garantía en el rectángulo con línea discontinua, para indicar que está implícita. Dado el caso en que el argumentador enuncie la garantía, esta sería explícita y el rectángulo empleado sería de línea continua (véanse figuras 34 y 35).

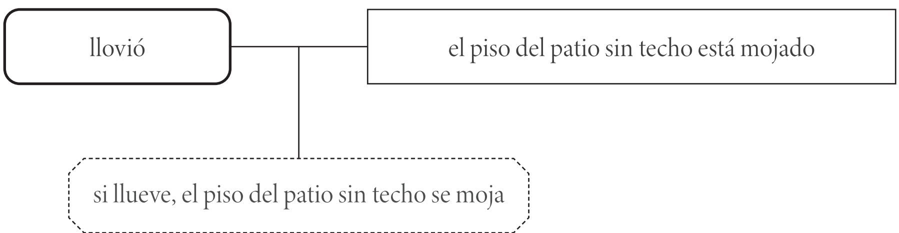


Figura 34. Esquema del primer argumento abductivo subyacente en el relato

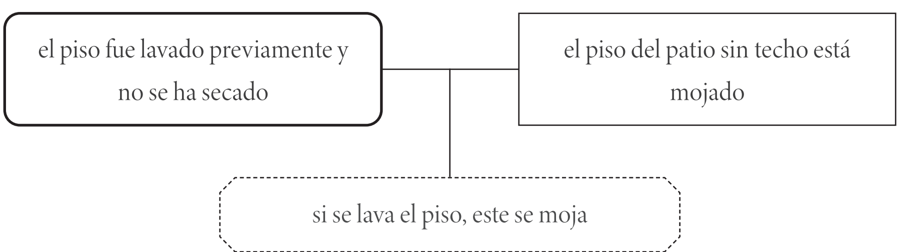


Figura 35. Esquema del segundo argumento abductivo subyacente en el relato

Creativos: para este caso se pone la garantía en el rectángulo de línea continua, para indicar que está explícita (véase figura 36). Dado el caso en que el argumentador no enuncie la garantía, esta sería implícita y el rectángulo empleado sería discontinuo.

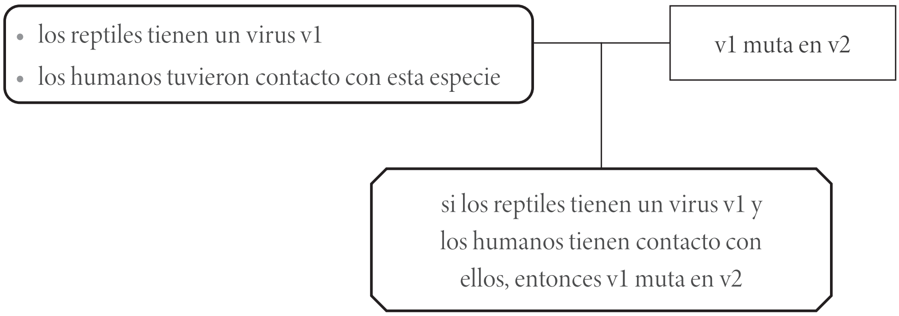


Figura 36. Esquema del tercer argumento abductivo subyacente en el relato

Con respecto a la reconstrucción del argumento subyacente en el caso 4, es deseable la identificación de palabras que indiquen necesidad de buscar una premisa probable de la cual se pueda inferir un hecho con el que se cuenta. Para este caso, Andrés y Ricardo tienen una circunferencia que contiene tres puntos y el punto T (centro de la circunferencia, construido después de tener la circunferencia); se preguntan por la condición que debería tener ese punto T para ser centro de la circunferencia. Las palabras clave que llevan a la interpretación de que en el párrafo hay un argumento abductivo son "condición" y "debería", ambas enmarcadas en una pregunta. La primera de ellas claramente alude a una premisa; la segunda a que esta es probable. Un párrafo que permite dar sentido a lo sucedido y es el primer paso de la estrategia para reconstruir el argumento es el siguiente:

> (1) Se cuenta con una circunferencia de centro T que contiene a los puntos A, B y C./ (2) ¿**Qué condición debería tener** T para que eso pase? / (3) **Debería ser** la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo ABC.

La identificación de los elementos del argumento se muestra a continuación:

Dato: El punto T debería ser la intersección de las mediatrices de los lados del ΔABC (interpretación de frases 2 y 3) [inferido]

Garantía: Si un punto es la intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo, entonces dicho punto es el centro de la circunferencia que contiene los vértices del triángulo [regla evocada no explicitada]

Aserción: Circunferencia de centro T contiene los puntos A, B y C (frase 1) [hecho con que se cuenta]

Esperamos que la frase "recuerdo que" se vea como indicador de que la regla es evocada, con lo cual el argumento es abductivo teórico. El esquema correspondiente al argumento descrito a través de sus componentes se muestra en la figura 37.

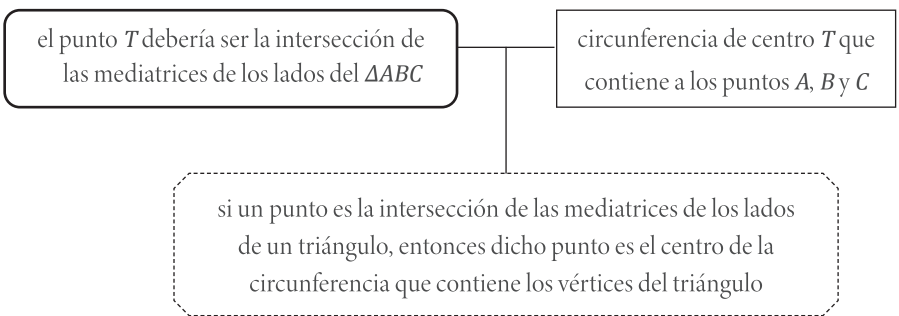


Figura 37. Esquema del argumento abductivo subyacente en el caso 4

En síntesis...

Estrategia para reconstruir argumentos inductivos, deductivos o abductivos esbozados en intercambios de clase transcritos

Al finalizar el capítulo 5 presentamos una síntesis de la estrategia para caracterizar argumentos simples —esbozados de manera más o menos clara, en una interacción entre estudiantes o estudiantes y profesor— cuando contamos con la transcripción de una videograbación. A continuación, retomamos esa síntesis y la extendemos para incluir la caracterización de argumentos de distinto tipo (inductivo, deductivo y abductivo).

1. Delimitar el fragmento de transcripción en el que se entrevé la presencia de un posible argumento.
2. Hacer una contextualización, sustancial pero sintética, que sirva como introducción del fragmento que se analizará. La contextualización puede aludir, por ejemplo, a la situación o intención que motivó el intercambio (solución de un problema, justificación de una idea, discusión en torno a algo), o a información específica con la que cuentan los estudiantes al comenzar el intercambio (una construcción, condiciones dadas en un problema, un resultado previo sobre el cual se está hablando, etc.).
3. Escribir un relato corto que permita dar una idea clara de lo que trata la argumentación. Tal esfuerzo permite hacer ostensivo lo que se ha interpretado del fragmento en relación con la idea panorámica de la argumentación presente en él.
4. Armar un párrafo conformado por las frases de la transcripción que son clave para reconstruir el argumento. Si es necesario se pueden editar las frases en aras de dejar el texto lo más limpio y claro posible. Parte de esa edición consiste en usar letra negrilla para destacar palabras que son indicadores de 1) los elementos de la estructura funcional del argumento (dato, aserción, garantía) o 2) indicadores de la oración (proposición) que expresa lo que se infiere en el argumento.

Determinar el tipo de argumento depende mucho de la dupla fragmento-contextualización. Así, por ejemplo, si en la dupla son evidentes unas condiciones de las que se parte y la intención de inferir algo de ellas de modo empírico o teórico, se puede vislumbrar la presencia de un argumento inductivo o deductivo, respectivamente. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de los elementos en estos tipos de argumento se presentan enseguida. Para argumentos deductivos, las frases introducidas por expresiones como "por", "porque", "puesto que", "ya que", podrían ser garantía o dato; las oraciones introducidas por expresiones como "tenemos", "dado", "las condiciones son", podrían ser dato; las oraciones introducidas por expresiones como "luego", "por ende", "entonces", "se obtiene", podrían ser la aserción. Para argumentos inductivos, las expresiones "en estos casos pasa que...", "acá siempre ocurre que..." pueden indicar, respectivamente, tanto el dato como la aserción.

Si en la dupla se evidencia un hecho con el que se cuenta y la intención de inferir un dato probable que dio lugar al hecho, se puede vislumbrar la presencia de un argumento abductivo. "Debería ser", "es necesario tener que", "siempre que" son ejemplos de expresiones que pueden ayudar en la identificación de lo que se infiere (dato) en este tipo de argumento.

5. Teniendo como referencia lo anterior, explicitar los elementos (básicos, en principio) que constituyen el argumento (dato, garantía, aserción/conclusión) y reescribirlos con la interpretación del analista, siempre referenciando la(s) frase(s) que se usa(n) para tal interpretación (para ello sirve el número con el que se etiqueta la frase). En este punto vale la pena precisar un asunto crucial: son usuales los fragmentos en los que no todos los elementos de un argumento se han verbalizado. En esta situación, se sugiere acudir a todos los insumos que permitan inferir el elemento no explícito. La contextualización, a la que se hizo referencia en el numeral 2 del procedimiento,

puede ser uno de tales insumos; por su contenido, la contextualización puede proveer los datos o la aserción de un argumento. Cuando una garantía no la enuncia quien argumenta, esta usualmente se establece a partir de una mera interpretación, en la que el dato y la aserción identificados se usan para conformar una proposición condicional que se clasifica como "garantía implícita".

En un argumento inductivo, hay una situación especial respecto a la identificación de la garantía. Esta siempre es un patrón de generalización que se construye a partir del dato (casos particulares o generales) con el que cuenta quien argumenta y de la propiedad invariante que establece para ese dato. Identificado el patrón, este se enuncia mediante una proposición condicional a la que se le otorga el carácter de general.

Cualquiera que sea el tipo de argumento, una garantía no explicitada por los sujetos puede ser enunciada de varias formas, todas ellas equivalentes desde un punto de vista semántico. Así las cosas, se puede enunciar de forma categórica (*e. g.*, los puntos que son la intersección de dos mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales están también en la mediatriz del segmento restante que se puede determinar con dichos tres puntos), no categórica (*e. g.*, dado un triángulo y las mediatrices de dos de sus lados, entonces la intersección de tales mediatrices pertenece a la mediatriz del tercer lado), o con nombres específicos, pero para objetos genéricos (*e. g.*, si m y n son las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del ΔABC y $m \cap n = \{T\}$, entonces $T \in l$, l mediatriz del $\overline{AC}$).

6. Hacer el diagrama (usando el modelo funcional de Toulmin) que esquematiza el argumento, siguiendo las convenciones para señalar el elemento inferido y si un elemento se explicitó o no en la argumentación donde se gestó el argumento.

Capítulo 7
Tareas para identificar elementos básicos de una tarea de argumentación

En los capítulos anteriores se exponen tareas en las que los estudiantes tienen la oportunidad de construir significado sobre el objeto argumento y sobre argumento de tipo inductivo, deductivo y abductivo. Este capítulo está dedicado a favorecer la construcción de conocimiento especializado sobre los objetos tarea y tarea de argumentación. Está compuesto de dos bloques de tareas. En el bloque 9 se aborda la definición de *tarea, tarea de aprendizaje y tarea de argumentación*. En el bloque 10 se incursiona sobre elementos clave que debería tener una tarea para propiciar la producción y explicitación de argumentos.

Para potenciar la utilidad de las tareas que proponemos en este capítulo, los estudiantes deben hacer una lectura cuidadosa y activa de los textos que se presentan y responder tanto las preguntas formuladas dentro del texto como las que aparecen fuera de este, con el propósito de que puedan monitorear sus interpretaciones.

Bloque 9: Acerca de tarea

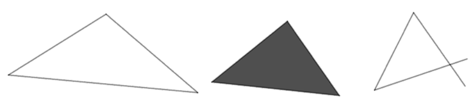
La palabra "tarea" es de uso frecuente en nuestra lengua. Hace presencia tanto en la conversación cotidiana como en discursos especializados. Así que, muy probablemente, desde temprana edad la hemos oído e incluso la hemos usado. ¿Quiere eso decir que al usar el término "tarea" le atribuimos un significado claro, preciso y único? Dos de las acepciones que presenta el DLE son las siguientes: "[t]rabajo que debe hacerse en tiempo limitado"; "deber (ejercicio que se encarga al alumno)". En relativa consonancia con tales acepciones, Watson y Ohtani (2021/2015) —en la introducción que hacen a un libro sobre diseño de tareas en educación matemática, del que son editores— al destacar la importancia del diseño de tareas, desde una perspectiva práctica, señalan que "las tareas son la base de la vida en el aula, las 'cosas por hacer'" (p. 3).

Para abordar las tareas que les proponemos en el primer numeral vamos a aceptar la siguiente interpretación: *tarea* es algo por hacer, una acción por realizar.

1. A continuación, encuentras ocho verbalizaciones de un profesor en algún curso de geometría:

(i) Para mañana, cada uno lea su libro de texto, de la página 15 a la 17, y resuelva por escrito los ejercicios de la sección 1.3.

(ii) ¿Cuál(es) de las figuras que se presentan más abajo es(son) triángulo(s)? ¿Qué haces para decidir tu respuesta?



(iii) Les estoy entregando la tarea para esta sesión de clase (entrega una hoja impresa titulada Taller de semejanza triangular), que deben realizar en parejas.

(iv) (Se dirige a un alumno que está chateando en el celular durante la intervención de otro estudiante) Mientras cualquiera del curso habla, los demás lo escuchamos y vamos anotando preguntas o comentarios al respecto.

(v) Revisemos la tarea que les dejé ayer.	(vi) Es muy útil escuchar a los demás para generar ideas.
(vii) Para encontrar el error tengo que repasar con cuidado toda la demostración.	(viii) La respuesta que dio Fabio a la tarea que puse ayer es muy interesante.

a) Examina cada una de las ocho verbalizaciones en relación con las siguientes condiciones:
   - propone explícita o tácitamente una tarea
   - incluye el término "tarea"
   - ni propone una tarea ni incluye el término "tarea"

   Escribe los resultados de tu examen, explicando tus respuestas.

b) Para los casos en los que consideras que se propone de manera explícita una tarea, subraya (o cita) exclusivamente la parte de la verbalización en la que se hace evidente eso.

c) Para los casos en los que consideras que se propone de manera tácita una tarea, expresa de qué acción por realizar se trata (especifícala lo más posible).

d) Al interpretar las verbalizaciones en las que se usa el término "tarea", ¿atribuyes el mismo significado a dicho término? Si tu respuesta es afirmativa, expresa por escrito tal significado. Si es negativa, expresa los varios significados que encuentras.

Al examinar la quinta verbalización ("Revisemos la tarea que les dejé ayer"), en ella identificamos una tarea propuesta de forma explícita: quien habla —muy probablemente, el profesor— invita a los estudiantes a emprender una acción; hay una acción por realizar (revisar algo). Para especificar la acción que propone como tarea, el hablante indica sobre qué ha de recaer la revisión: sobre una cierta tarea (la que les asignó el día anterior); con esto, el hablante, hace uso del término "tarea" para nombrar algo. Con el propósito de dilucidar qué quiere decir el hablante con el término "tarea" que incluye en su oración, nos preguntamos si tal uso es similar al que nosotros le estamos dando al término en este análisis, o sea, si puede tratarse de una acción por realizar. En caso de que lo fuera, podríamos parafrasear la oración así:

revisemos la acción por realizar (la tarea) que les dejé ayer. ¿Es eso lo que quería decir el profesor? Nos atrevemos a decir, con bastante certeza, que no. Muy probablemente, se refería a revisar las producciones de los estudiantes correspondientes a la tarea que asignó el día anterior. Así que, en esta verbalización, se usa el término "tarea" para significar el producto o resultado de la realización de una acción.

2. Compara el examen que hiciste a la quinta verbalización con el que acabas de leer. Expresa las diferencias o similitudes.

Al iniciar el examen de la primera verbalización ("Para mañana, cada uno lea su libro de texto, de la página 15 a la 17, y resuelva por escrito los ejercicios de la sección 1.3"), vemos que se proponen de manera explícita dos acciones por realizar, es decir, dos tareas; una de ellas, leer algo (un cierto texto); la otra, resolver algo cumpliendo con un cierto modo (hacer la resolución por escrito). Enfocar el algo (unos ciertos ejercicios del libro) sobre el que recae la acción de resolver nos lleva a refinar nuestro análisis. Ese algo nos remite a las varias tareas que quedan determinadas por los ejercicios asignados y nos lleva a notar que el término "resolver" subsume todas las acciones por realizar que se requieren en los ejercicios en cuestión. En consecuencia, interpretamos la expresión "resolver los ejercicios de la sección 1.3 del libro" como abordar las tareas puestas en la sección 1.3 del libro, enunciado en el cual identificamos, por una parte, la propuesta explícita de una acción por realizar (abordar) —aunque no sea claro ni preciso de qué acción se trata— y, por otra parte, el uso del término "tarea", que en este caso nos significa acción por realizar. Este análisis nos pone de manifiesto el uso indistinto de "tarea" y "ejercicio", sea lo que sea a lo que este término refiera.

Al examinar la tercera verbalización ("Les estoy entregando la tarea para esta sesión de clase (entrega una hoja impresa titulada Taller de semejanza triangular), que deben realizar en parejas"), atribuimos dos significados distintos al término "tarea". El primero nos surge de la conjunción de la expresión "Les estoy entregando la tarea" y la acción que la acompaña, donde el término "tarea" se equipara con documento, hoja de papel impresa con el enunciado de la tarea. El segundo lo vemos si parafraseamos la oración de la siguiente manera: La hoja que les estoy entregando les expone la tarea que deben realizar en parejas y durante esta sesión de clase. Aunque no se tiene información de qué acción o acciones específicas les requiere el profesor a los estudiantes, la oración indica sin duda que hay una propuesta no explícita de al menos una acción por realizar, con lo cual se está usando el término "tarea" de manera acorde con el significado que hemos adoptado.

3. Compara el examen que hiciste a la tercera verbalización con el que acabas de leer. Expresa las diferencias o similitudes.
4. Compara el uso dado al término "tarea" en las siguientes dos verbalizaciones: "entréguenme la tarea" y "les estoy entregando la tarea".

Al examinar la segunda verbalización, es decir, las dos preguntas formuladas ("¿Cuál(es) de las figuras que se presentan es(son) triángulo(s)? ¿Qué haces para decidir tu respuesta?"), vemos que no se explicita ninguna acción específica por realizar, con lo cual podríamos estar tentados a decir que no hay planteada tarea alguna. Sin embargo, entendiendo que la primera pregunta se enfoca en una identificación, podemos parafrasearla de manera que se visibilice la acción por realizar: "Identifique cuál(es) de las figuras que se presentan es(son) triángulo(s)". Así reformulada la pregunta, no tenemos duda de que esta propone de manera tácita una tarea. De forma análoga, podríamos parafrasear la segunda pregunta especificando una acción por realizar que interprete bien la expresión "qué haces". Con seguridad hay varias opciones diferentes: una de ellas es "Relata qué haces para decidir tu respuesta". Este caso nos ha permitido ver que es posible proponer tácitamente una tarea, profiriendo una pregunta.

5. ¿Proponen las siguientes preguntas, de manera tácita, una tarea? Explica, por escrito y de forma detallada, tu respuesta.

   ¿Por qué estos ángulos son congruentes?

   ¿Por qué la conclusión es que estos ángulos son congruentes?

6. Respecto a la cuarta verbalización (—Se dirige a un alumno que está chateando en el celular durante la intervención de otro estudiante— Mientras cualquiera del curso habla, los demás lo escuchamos y vamos anotando preguntas o comentarios al respecto), afirmamos que no se propone tarea alguna. Busca razones que puedan apoyar esa afirmación y exponlas por escrito. (Sugerencia: considera si en toda afirmación se propone una acción por realizar)
7. Usa los cuatro análisis que hemos presentado, como fuente de inspiración, para revisar y complementar los análisis que hiciste en el numeral 1 sobre las verbalizaciones expuestas en vi, vii y viii. Presenta por escrito la nueva versión de tu análisis, destacando los cambios realizados.

Las verbalizaciones en las que se usa el término "tarea" nos permitieron entrever dos significados que no coinciden con el de acción por realizar. Esto justifica plenamente el esfuerzo para adoptar una definición de tarea que rija nuestro discurso educativo especializado. Antes de presentar la definición de tarea que adoptaremos en este curso, revisemos los siguientes textos:

> [...] tarea es la presentación escrita de una experiencia matemática planeada para un aprendiz, que puede ser una acción o una secuencia de acciones que forman una experiencia global. (Watson y Thompson, 2021/2015, p. 143)

> [Una tarea pedagógica] es una actividad o acción realizada como resultado de procesar o entender el lenguaje (*i. e.*, como una respuesta). Son ejemplos de tareas las siguientes dos situaciones: dibujar un mapa mientras se escucha una cinta, escuchar una indicación y ejecutar una orden. (Richards *et al.*, 1986, en Nunan, 2004, p. 2)

> Las tareas son los proyectos, las preguntas, los problemas, las construcciones, las aplicaciones y los ejercicios en los que los estudiantes se involucran. Proveen los contextos intelectuales para el desarrollo matemático de los estudiantes. (NCTM, 1991, p. 20)

8. Analiza los tres textos considerando si hacen o no una interpretación de tarea similar a la que estamos proponiendo. En caso afirmativo, expresa por qué es similar. En caso negativo, escribe cuáles interpretaciones de tarea se proponen.

En el ámbito de la educación matemática, más exactamente en el marco del análisis didáctico de la instrucción, Gómez *et al.* (2018, p. 197) consideran que una *tarea matemática escolar* es un medio del que se sirve el profesor para cumplir con la función que tiene de ofrecer a sus estudiantes oportunidades para que logren las expectativas, establecidas con anterioridad por él, y superen las limitaciones de aprendizaje que él ha anticipado. De manera más precisa, conciben la noción de tarea matemática escolar "como una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes" (p. 198). Dicen estos autores que:

> Una tarea incluye, además de su formulación [la de la demanda], elementos como sus requisitos y metas, el uso de materiales y recursos, formas de agrupar a los estudiantes, estrategias de interacción entre los estudiantes y con el profesor, y su temporalidad. (p. 198)

A partir del planteamiento de Gómez y sus colegas entrevemos dos interpretaciones, distintas pero relacionadas, del término "tarea". Una de ellas refiere a un objeto multifacético y complejo, creado en un proceso de diseño curricular en el que de manera interactiva van surgiendo, consolidándose y entramándose siete elementos que componen el objeto, a saber: *requisitos* (conocimiento y destrezas necesarios para poder abordar la tarea), *metas,* formulación de la *demanda* a la que los estudiantes deben atender en pro de su aprendizaje (demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, puesta por el profesor), *materiales y recursos* (herramientas que pueden usar los estudiantes para abordar la tarea), *agrupamiento* (indicaciones sobre la organización de los estudiantes), *interacción* (previsiones sobre cómo interactuarán estudiantes y profesor) y *temporalidad* (previsiones e instrucciones con respecto al uso del tiempo durante el desarrollo de la tarea).

Nuestra otra interpretación de lo dicho por Gómez y sus colegas sobre el término "tarea" refiere a uno de los siete elementos del objeto descrito antes; más precisamente, refiere a la formulación de la demanda estructurada (solicitud o requerimiento) de acción con la que el profesor pretende lograr un propósito de aprendizaje para los estudiantes. Esta es la interpretación de la que proviene la definición de tarea que adoptaremos en este curso. La primera interpretación nos llevaría a la explicitación de elementos del diseño curricular de una tarea de aprendizaje.

9. Explicita por escrito si ves diferencias entre "formulación de una tarea" y "formulación de los elementos por incluir en el diseño de una tarea". En caso de que las veas, escríbelas. En caso de que no veas diferencia alguna, presenta la interpretación que haces de cualquiera de esas expresiones.

Con base en las consideraciones anteriores, precisamos lo que se entenderá por tarea de aprendizaje:

> *Tarea de aprendizaje* es una acción (o acciones) por realizar, que el profesor propone a sus estudiantes con la intención de brindar oportunidades para que logren las expectativas de aprendizaje que ha establecido.

10. Expresa por escrito cómo o en qué se reduce la interpretación que dimos a "tarea" cuando se agrega la condición "de aprendizaje".

Si las expectativas de aprendizaje involucran un contenido o proceso matemático, entonces la tarea es de aprendizaje matemático. El *enunciado* de la tarea de aprendizaje incluye la *solicitud* (explícita o tácita) de las acciones por realizar en el marco de una *situación* que las contextualiza de manera explícita y, eventualmente, unas *indicaciones* que conciernen a la ejecución de la tarea. La situación que contextualiza la tarea está conformada por información (*e. g.*, hechos, relaciones, circunstancias y eventos) que enmarca la tarea que el profesor propone. Las indicaciones exponen sugerencias para apoyar o condiciones para limitar la ejecución de la tarea.

Consideremos los siguientes dos enunciados de sendas tareas, para ilustrar los elementos que los componen.

a. ¿Cuál(es) de las figuras que se presentan en la hoja adjunta es(son) triángulo(s)? Utiliza la definición de triángulo para tomar tu decisión.

b. En las figuras que se presentan en la hoja adjunta, identifica las que son triángulos.

En ambos casos, el enunciado solicita o propone una acción por realizar: identificar triángulos en un conjunto dado de figuras. En el caso a, la solicitud es tácita; la situación, que contextualiza de manera explícita la tarea, la componen las configuraciones que se presentan en la hoja de la que disponen los estudiantes y las relaciones que dichas configuraciones tienen con la definición de triángulo (*e. g.*, una configuración pone de relieve la condición de que un triángulo no incluye una región de puntos); dicho de otra manera, la situación presenta condiciones que motivan y viabilizan las acciones por realizar que se solicitan); la indicación es el uso de la definición de triángulo para determinar si cada configuración es o no un triángulo. En el caso b, la solicitud es explícita; la situación, que contextualiza de manera explícita la acción por realizar, la componen las configuraciones que se presentan en la hoja de la que disponen los estudiantes; no hay indicación alguna.

11. Escribe una verbalización que proponga una tarea, y describe el enunciado de esta en términos de los tres elementos mencionados.
12. Para la siguiente verbalización, identifica la tarea propuesta y describe su enunciado en términos de solicitud, situación e indicaciones.

> De acuerdo con nuestra definición de triángulo isósceles (tiene exactamente dos lados congruentes), ¿puedes afirmar que un triángulo equilátero es isósceles? Escribe un argumento que justifique tu respuesta.

La verbalización presentada en el numeral 12 es ejemplo de una tarea de aprendizaje de argumentación (de ahora en adelante, tarea de argumentación). A continuación, formulamos la definición correspondiente.

Tarea de argumentación es una acción (o acciones) por realizar que propicia(n) la producción y explicitación de argumentos, que el profesor propone a sus estudiantes con la intención de brindar oportunidades para que aprendan a argumentar y a explicitar argumentos.

13. Expresa por escrito cómo o en qué se reduce la interpretación que dimos a "tarea de aprendizaje" cuando se especifica qué se aprende, es decir, cuando se agrega "de la argumentación".

Descripción de las tareas del bloque 9

Actividad que demandan las tareas: tal como en los bloques anteriores, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de los textos presentados; además, responder por escrito a las solicitudes que se presentan con el propósito de llamar la atención acerca de aspectos clave sobre tarea, tarea de aprendizaje y tarea de argumentación.

Propósito didáctico de las tareas: proveer una oportunidad para que los estudiantes estudien asuntos relacionados con los objetos tarea, tarea de aprendizaje y tarea de argumentación por medio de la lectura e interpretación del texto presentado, y expliciten sus ideas a través de las respuestas a las tareas propuestas.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: ninguno en particular.

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: conceptualización sobre tarea, tarea de aprendizaje y tarea de argumentación. Reconocimiento de la diferencia entre enunciado de tarea y tarea, y de los elementos que pueden estar incluidos en el enunciado de una tarea. Caracterización de una tarea de aprendizaje como aquella que brinda la oportunidad de lograr una expectativa de aprendizaje específica y de tarea de argumentación como aquella que favorece la formulación y explicitación de argumentos.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: el texto que presentamos en este bloque va evolucionando para terminar en la exposición de lo que entendemos como tarea de aprendizaje de argumentación. A diferencia de los otros bloques, el foco de la reflexión no está puesto en los objetos argumento y argumentación, sino en el término "tarea". Por tanto, antes de explicitar la definición, proponemos solicitudes que buscan desentrañar las múltiples interpretaciones que tanto el resolutor como investigadores en educación matemática le asocian a este término. Este asunto se problematiza porque hemos identificado que cuando se menciona la palabra "tarea", se cree que la interpretación de quien la emite y de quien la escucha o lee concuerdan. No obstante, lejos de ser un término de interpretación única, en el discurso educativo se emplea de múltiples formas. Es importante que los futuros profesores reconozcan las distintas acepciones, para identificar afinidades y diferencias y contrastarlas con las interpretaciones personales para ir consolidando un conocimiento especializado sobre este término.

Las tareas propuestas en los numerales 1 a 8 de este bloque pretenden involucrar al resolutor en actividades que implican usar la interpretación de tarea como "una acción por realizar" para tres propósitos. El primero, determinar si en una verbalización se está proponiendo una tarea. En este caso, buscamos que el resolutor identifique la acción por realizar, aun si está implícita. El segundo, para evaluar si en las verbalizaciones que incluyen el término "tarea", este se usa para referir a una acción por realizar. En caso contrario, se debe interpretar qué significado se está dando al término. El tercero, para establecer las similitudes y diferencias entre la interpretación de tarea como acción por realizar con las definiciones de tarea propuestas por tres autores. Otras posibles interpretaciones se refieren a: 1) el resultado de la acción realizada (p. ej., revisemos la tarea que les dejé ayer) y 2) el recurso mediante el cual se expone el enunciado de una acción por realizar (*e. g.*, les estoy entregando la tarea).

El conjunto de tareas propuestas en los numerales del 1 al 7 lleva al resolutor a ir realizando un análisis cada vez más detallado de las verbalizaciones expuestas en el numeral 1. Para apoyar este progreso, presentamos nuestro análisis de algunas de las verbalizaciones y le solicitamos al resolutor compararlo con el que él propone inicialmente (numerales 2, 3, 6 y 7), y presentamos ejemplos de otras verbalizaciones que deben analizar (numerales 4 y 5). Debido a la forma como está estructurado este bloque, es recomendable que los resolutores aborden la tarea del numeral 1 y solo después de esto conozcan los demás numerales. En el numeral 8, esperamos que lo hecho en las tareas enunciadas en los numerales del 1 al 7 permita al resolutor efectuar la comparación solicitada entre las definiciones propuestas, identificando la interpretación de tarea que subyace a cada una.

Después de proponer un conjunto de tareas que desentrañan diferentes interpretaciones de tarea, presentamos textos y preguntas orientados a definir tarea de aprendizaje (numeral 10), diferenciar tarea del texto que la formula y de los elementos que intervienen en su diseño (numeral 9), caracterizar los elementos que conforman el enunciado de una tarea de aprendizaje (numeral 12) y proponer enunciados de tareas de aprendizaje que incluyan dichos elementos (numeral 11). Finalmente, establecemos una definición de tarea de argumentación relacionada con la definición de tarea de aprendizaje de la siguiente manera: 1) toda tarea de argumentación es una tarea de aprendizaje; 2) la acción por realizar que propicia una tarea de argumentación es la producción y explicitación de argumentos; 3) la expectativa de aprendizaje de las tareas de argumentación es que los estudiantes aprendan a argumentar y a explicitar sus argumentos. Esa relación debe identificarla el resolutor en el numeral 13.

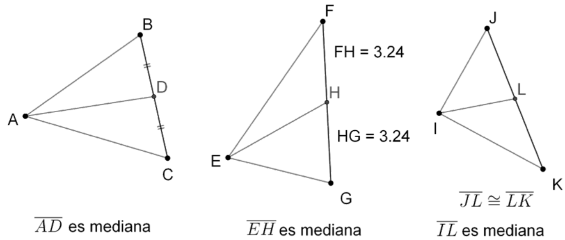
Bloque 10: Pautas para la formulación y el análisis de enunciados de tareas de argumentación

En el bloque 9 establecimos que *tarea de argumentación* es una acción (o acciones) por realizar que propicia(n) la producción y explicitación de argumentos, que el profesor propone a sus estudiantes con la intención de brindar oportunidades para que aprendan a argumentar y a explicitar argumentos.

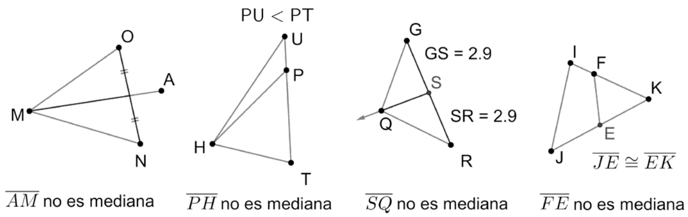
1. Los siguientes son enunciados de dos tareas de aprendizaje que podrían ser propuestas en un curso de geometría.

Enunciado 1. Nombra dos características de la mediana de un triángulo, teniendo en cuenta la información que dan los siguientes dos grupos de figuras.

Ejemplos de mediana de triángulo



No-ejemplos de mediana de triángulo



Enunciado 2. Demostrar el siguiente teorema: Las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

1. Para cada enunciado,

a) ¿Consideras que corresponde a una tarea de argumentación? Explica tu respuesta.

b) Identifica la situación, solicitud y las indicaciones, si las hay.

c) ¿Lo expuesto en la situación y/o solicitud tiene potencial para generar curiosidad, incertidumbre, perturbación o controversia,[26] que al resolverse lleva a plantear ideas o posturas? Si tu respuesta es afirmativa, indica cuál comportamiento se genera y explica por qué.

26 Asumimos las siguientes definiciones: curiosidad es la inclinación por aprender lo que no se conoce; incertidumbre es falta de certeza o duda; perturbación hace referencia al cuestionamiento de lo que uno cree; y controversia es establecimiento de postura o aserción opuesta.

d) ¿La solicitud pide (implícita o explícitamente) plantear ideas o posturas? Si tu respuesta es afirmativa, expresa la idea o postura que se formularía.

e) ¿La situación presenta información relacionada con alguna definición, teorema y/o hecho que pueda ser utilizada en un argumento? Explica tu respuesta.

f) ¿La solicitud pide explícitamente la presentación de razones que sirvan para sustentar o refutar la veracidad de una proposición, o la aceptabilidad de una postura planteada o de una acción realizada? Explica tu respuesta.

g) ¿Los elementos del argumento principal (dato, aserción, garantía) que se debe presentar al realizar la tarea están expuestos de forma explícita, sugeridos o son solicitados en el enunciado de la tarea? Explica tu respuesta.

Como habrás imaginado, la *situación* del enunciado 1 está conformada por las imágenes, la información comunicada a través de marcas o de medidas presentadas, y una oración que indica si un segmento es o no la mediana de un triángulo representado. La *solicitud* refiere a usar las figuras para establecer cuáles son los dos atributos que cumple un segmento que es mediana de un triángulo. No tiene *indicación* alguna. Suponemos que la *expectativa de aprendizaje* es descubrir los atributos que caracterizan al objeto mediana de un triángulo, recurriendo a la visualización matemática de ejemplos y no ejemplos.

Del enunciado 1 no puede afirmarse que la tarea, en sí misma, sea de argumentación. El enunciado provee ejemplos y no ejemplos que pueden desempeñar la función de dato en argumentos para defender posturas acerca de los dos atributos requeridos para ser mediana. Aunque la solicitud tiene el potencial de generar incertidumbre porque se debe decidir cuáles son los atributos (ítem c) y plantear la postura correspondiente (ítem d), y la situación versa sobre los atributos que definen mediana de triángulo (ítem e), hecho que puede ser usado en un argumento, no se solicita la presentación de razones que sirvan para sustentar o refutar la veracidad de alguna proposición. Si bien se obliga a tomar una postura, no se pide presentar justificaciones que respalden las decisiones tomadas; es decir, no se cumple lo indicado en los ítems f y g. Además, la expectativa de aprendizaje está centrada en la conceptualización de mediana, en este caso, focalizada en los atributos que sirven para definirla y no en la formulación y explicitación de argumentos.

2. Compara el examen que hiciste al enunciado 1 con el que acabas de leer. Expresa las diferencias o similitudes.

Un análisis similar del enunciado 2 nos lleva a responder afirmativamente las preguntas planteadas en los ítems c, d, e, f y g. Es el enunciado de una tarea de argumentación. En general, si un enunciado solicita la demostración de una afirmación, corresponde a una tarea de argumentación. Pero, ¿solo ese tipo de enunciado da lugar a tareas de argumentación?

Consideramos que las tareas que cumplen las condiciones expresadas en los ítems c, d y e tienen un alto potencial para propiciar la producción de argumentos. Ahora bien, los enunciados de las tareas que propician la producción de argumentos no necesariamente exigen la explicitación de los mismos. Si un enunciado de una tarea cumple las condiciones que expresan los ítems f y g, entonces es muy posible que se expongan argumentos que se reconocen sin dificultad. En ese caso se pueden incluir indicaciones que apoyen la explicitación de estos con un formato específico que saque a la luz el reconocimiento de los elementos de los argumentos. Lo anterior nos lleva a establecer las siguientes pautas para analizar o proponer una tarea de argumentación (véase cuadro 8).

Cuadro 8. Pautas relativas al enunciado de una tarea de argumentación

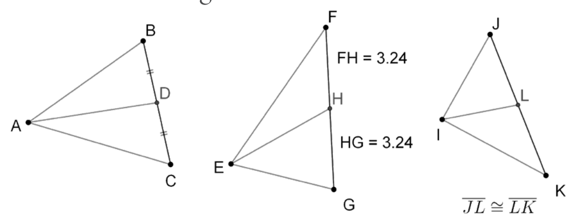
Pautas para determinar si un enunciado propicia la producción de argumentos
PA1: Lo expuesto en la situación y/o solicitud tiene potencial para generar un estado de ánimo (*e. g.*, duda, curiosidad, incertidumbre, perturbación o controversia), que al resolverse lleva a plantear ideas o posturas. PA2: La solicitud pide (implícita o explícitamente) plantear las ideas o posturas obtenidas a partir de PA1. PA3: La situación presenta información relacionada con alguna definición, teorema y/o hecho que pueda ser utilizada en un argumento.
Pautas para determinar si un enunciado favorece la explicitación de argumentos
EA1: La solicitud pide explícitamente la presentación de razones que sirvan para sustentar o refutar la veracidad de una proposición, o la aceptabilidad de una postura planteada o de una acción realizada. EA2: Los elementos del argumento principal (dato, aserción, garantía) que puede surgir al realizar la tarea están expuestos de forma explícita, sugeridos o son solicitados en el enunciado de la tarea. EA3: Las indicaciones son una guía que apoya la explicitación de argumentos.

3. a) Propón un enunciado que transforme la tarea propuesta en el enunciado 1 en una tarea de argumentación que cumpla con las pautas dadas.
   b) Indica cómo se cumple cada pauta.
   c) Proporciona un ejemplo de un argumento que se espera sea explicitado al resolver la tarea.

A continuación, nuestra propuesta de modificación del enunciado 1 bajo la guía de las pautas dadas. Para que el enunciado corresponda a una tarea de argumentación, mantendremos la situación propuesta inicialmente pues esta cumplía las pautas PA1, PA2 y PA3, pero agregaremos solicitudes que promuevan la explicitación de un argumento deductivo y uno inductivo durante el proceso de identificar los atributos que tiene la mediana de un triángulo (véase cuadro 9). Buscamos que los estudiantes expliciten los elementos de esos argumentos.

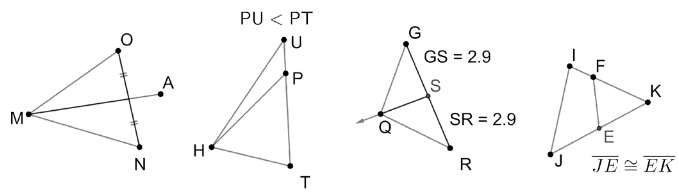
Cuadro 9. Enunciado 1 modificado para tener una tarea de argumentación

1. (Para trabajar en grupos de tres personas) De acuerdo con los siguientes dos grupos de figuras, nombren dos características de la mediana de un triángulo.
   Ejemplos de mediana de triángulo



$\overline{AD}$ es mediana $\overline{EH}$ es mediana $\overline{IL}$ es mediana

   No-ejemplos de mediana de triángulo



$\overline{AM}$ no es mediana $\overline{PH}$ no es mediana $\overline{SQ}$ no es mediana $\overline{FE}$ no es mediana

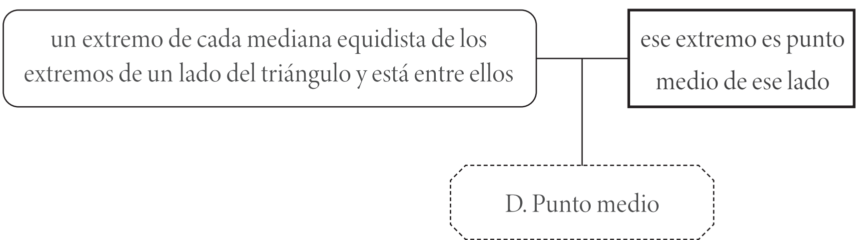
2. ¿Por qué se puede afirmar que en todos los ejemplos de mediana, uno de los extremos del segmento es punto medio de un lado del triángulo?
3. El $\overline{XW}$, que se muestra a la derecha, es mediana de un triángulo. Añadan al segmento representado lo requerido para que ilustre la afirmación.

4. Para explicar por qué lo añadido genera la representación solicitada, completen los espacios del siguiente párrafo:
   Observando los tres ejemplos de segmento que es mediana de un triángulo, vemos que el segmento siempre cumple que ____________ y ____________.
   Como $\overline{XW}$ es mediana del triángulo ____________, entonces añadimos los segmentos __________________, de tal forma que se cumple____________.
5. Escríbanle a un amigo lo que descubrieron acerca de la mediana de un triángulo.

El enunciado de la tarea original se mantiene (numeral 1). Las modificaciones favorecen la explicitación de un argumento deductivo y otro inductivo que posiblemente surgen al resolver la tarea original. Con el numeral 2 se busca crear dos oportunidades para los estudiantes: explicitar un argumento deductivo (EA1) y hacer uso obligado del término punto medio, si lo que se hace en el numeral uno es describirlo. Al introducir la solicitud de validar que cada mediana tiene un extremo que es punto medio de un lado del triángulo, se obliga a evocar la definición de punto medio y usarla como garantía (véase cuadro 10). En cuanto a la pauta EA2, el dato está inmerso en las figuras y la información proporcionada en cada ejemplo de mediana y la aserción al solicitar la justificación de que el extremo es punto medio.

Cuadro 10. Esquema del ejemplo de argumento deductivo asociado al numeral 2

Argumento: Como un extremo de cada segmento, que es mediana, equidista de los extremos de un lado del triángulo y está entre ellos, entonces ese extremo es punto medio de ese lado.



En cuanto al argumento inductivo, en el numeral 1 se establece como conjunto referencial triángulos, cada uno con un segmento que es una de sus medianas (p). La solicitud de encontrar atributos definitorios de mediana lleva a que se identifiquen dos posibles atributos más de esta: uno de los extremos del segmento es vértice del triángulo (q) y el otro extremo del segmento es el punto medio del lado opuesto a ese vértice (r). Lo anterior es el dato ($p \wedge q \wedge r$) de lo que podría ser un argumento inductivo, pero se requiere que los estudiantes establezcan como aserción que los atributos $q \wedge r$ se cumplen por lo menos en un caso más del conjunto referencial, e inferir la siguiente proposición condicional como garantía: si un segmento es mediana del triángulo, entonces tiene un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto.

Agregamos el numeral 3 con el propósito de que se genere un caso más del conjunto referencial que tiene los atributos q y r. Con el numeral 4, se busca que identifiquen cuál es el dato del argumento inductivo (primera oración) y cuál es la aserción (segunda oración). Con el numeral 5, se procura inducir a los estudiantes a formular la garantía. Es decir, las solicitudes de estos numerales pretenden garantizar que los estudiantes expliciten las razones de sus decisiones (EA1). El dato está expuesto a través de las figuras y la información incluida; el estudiante solo debe interpretarlo. La aserción y la garantía se solicitan en los numerales 4 y 5 (EA2).

Somos conscientes de que el argumento inductivo que debe formularse (véase cuadro 11) exige expresar la relación entre los elementos del argumento, lo que requiere una mirada especializada de lo que es un argumento inductivo. Por eso incluimos la plantilla discursiva en el numeral 4 (EA3) y la solicitud del numeral 5.

Cuadro 11. Argumento inductivo asociado al numeral 4

Argumento: (Posible respuesta al numeral 4) Observando los tres ejemplos de segmento que es mediana de un triángulo, vemos que el segmento siempre cumple que uno de los vértices del triángulo es extremo del segmento y el otro extremo es el punto medio del lado opuesto a ese vértice. Como $\overline{XW}$ es mediana del triángulo *XTM* (o como quiera que se llame el triángulo en cuestión), entonces añadimos los segmentos *XT*, *TM* y *XM*, de tal forma que se cumpla que *W* es punto medio del $\overline{TM}$.
(Posible respuesta al numeral 4) Si un segmento es mediana de un triángulo, entonces tiene un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto.

El conjunto referencial A contiene parejas formadas por un segmento y un triángulo, siendo el segmento, mediana del triángulo (atributo p).

Los tres ejemplos dados en el enunciado (elementos de A) tienen los siguientes dos atributos: el segmento tiene como extremo a un vértice del triángulo (q), y el otro extremo del segmento es punto medio del lado opuesto a ese vértice (r).

De otros elementos de A ($\overline{XW}$ es mediana de un triángulo), no se sabe si tienen los atributos q y r.

Uno de los extremos del $\overline{XW}$ es vértice del triángulo y el otro es punto medio del lado opuesto.

Si un segmento es mediana de un triángulo, entonces tiene un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto.

Reconocemos que en la modificación de una tarea entran en juego tanto circunstancias particulares de quien quiere modificarla (*e. g.*, sus experiencias profesionales, sus conocimientos matemático, pedagógico y didáctico, en este caso, relativos a la argumentación) como asuntos relacionados con condiciones concretas de la institución y de los estudiantes (*e. g.*, recursos, características específicas de los estudiantes, organización para realizar la tarea, etc.). Sin embargo, pensamos que el análisis del enunciado anterior podría servir para guiar la transformación del enunciado.

4. Usa el análisis que hemos presentado de nuestra modificación del enunciado 1 como fuente de inspiración para completar, si se requiere, el análisis que presentaste en el numeral 3.

Descripción de las tareas del bloque 10

Actividad que demandan las tareas: inicialmente, utilizar la conceptualización respecto a tarea de aprendizaje y tarea de argumentación propuestas en el bloque 9, para analizar enunciados de tareas. Después, hacer una lectura cuidadosa e interactiva de los textos. Además, responder por escrito las solicitudes que se presentan con el propósito de llamar la atención sobre aspectos clave de tarea de argumentación y características de esta; estas incluyen comparar el análisis presentado con el hecho por el resolutor y proponer una modificación de un enunciado para convertir la tarea en una de argumentación.

Propósito didáctico de las tareas: el principal propósito es proveer una oportunidad para que los resolutores participen en la construcción de significado del término tarea de argumentación. Así, se provee una oportunidad para que ellos se involucren en un proceso de estudio que 1) les pide identificar una posible expectativa de aprendizaje para dos tareas y los elementos que conforman sus respectivos enunciados (situación, solicitud e indicaciones); 2) los involucra en el análisis de enunciados de tarea para determinar si estos tienen un alto potencial para favorecer la producción y explicitación de argumentos, y en la modificación de estos para que tengan dicho potencial.

Conocimiento didáctico matemático que interviene en la resolución de las tareas: una conceptualización de argumento y argumentación; la estructura funcional que propone Toulmin para reconstruir argumentos; identificación de los elementos que conforman el enunciado de una tarea de aprendizaje (expectativa de aprendizaje, situación, solicitud e indicaciones).

Conocimiento didáctico matemático que la resolución de las tareas pretende favorecer: conceptualización elaborada sobre tarea de argumentación; herramienta analítica para identificar enunciados de tareas de argumentación; competencia de análisis para identificar enunciados de tareas de argumentación y modificar enunciados para que lo sean.

Anotaciones relativas al potencial de las tareas y sus enunciados para el propósito didáctico que tienen: según nuestra definición, una tarea es de argumentación si se cumple que 1) favorece la producción de argumentos y 2) propicia la explicitación de argumentos. Con el conjunto de tareas que conforman este bloque buscamos que el resolutor identifique algunas características que debe tener el enunciado de una tarea, si se quiere hacer más factible la posibilidad de producción y explicitación de argumentos.

En la primera actividad (ítem a del numeral 1) se involucra al resolutor en decidir si dos enunciados de tarea corresponden a tareas de argumentación. Para ello, el resolutor debe cuestionarse si la tarea cumple las dos condiciones y, en caso afirmativo, poder presentar un argumento que surja al solucionar la tarea. Se sugiere al profesor solicitar la explicitación de esos argumentos, si el resolutor no lo hace por su propia iniciativa.

El enunciado 1 no corresponde a una tarea de argumentación porque no exige la explicitación de argumentos. Es posible que los resolutores obvien la necesidad de explicitar argumentos y solo se enfoquen en los posibles argumentos que surjan durante la solución de la tarea. Por ejemplo, pueden proponer como argumentos las siguientes expresiones que pueden surgir al momento de establecer lo que tienen en común o no los segmentos que son mediana: "la mediana de un triángulo debe tener un extremo en un vértice del triángulo porque eso sucede en los tres ejemplos que dan", "la mediana de un triángulo debe tener un extremo en un vértice del triángulo porque es algo que incumple el $\overline{FE}$ en el ΔIJK". En ambos casos, la aserción es "la mediana de un triángulo debe tener un extremo en un vértice del triángulo". El dato es, para la primera expresión, las representaciones de los tres ejemplos dados de mediana; para la segunda, es la representación de uno de los no ejemplos de mediana. En ninguna de las expresiones se da la garantía.

Otro momento, en el proceso de resolución, en el que pueden surgir argumentos, se da si quienes están resolviendo la tarea deciden usar el término "punto medio" para referirse al otro extremo de la mediana. La siguiente expresión sería algo que pueden proponer los resolutores como argumento:

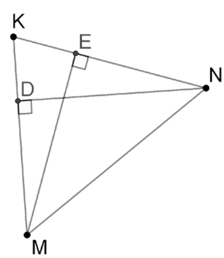
"Como H equidista de E y G, y es un punto del $\overline{EG}$, entonces H es punto medio del segmento". En este caso, el dato es "H equidista de E y G, y es un punto del $\overline{EG}$"; y la aserción es "H es punto medio del segmento". La garantía implícita es la definición de punto medio. Tratar de que se expliciten algunos de estos argumentos es lo que guía la modificación del enunciado 1 que propusimos luego (numerales 2 y 4 del enunciado modificado).

Respecto al enunciado 1, puede suceder que algunos resolutores erróneamente propongan como argumentos expresiones discursivas que coinciden con las que en el bloque 4 se determinó que no lo eran. A continuación, algunos ejemplos:

- *Descripción.* La mediana tiene un extremo en un vértice del triángulo y otro extremo en el punto medio del lado opuesto.
- *Relato.* Observe que en todos los ejemplos de mediana un extremo del segmento es vértice del triángulo.
- *Definición.* Una mediana es un segmento que tiene un extremo en el vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto.

El enunciado 2 corresponde a una tarea de argumentación porque se solicita la demostración de una afirmación. Ello exige presentar argumentos deductivos encadenados que lleven desde el antecedente de la condicional que se pide demostrar hasta su consecuente. Para ilustrar una posible demostración, primero reformulamos la condicional usando nombres específicos para los puntos destacados de la figura, haciendo referencia así a un triángulo isósceles genérico.

Si el ΔMKN es isósceles, con $\overline{MK} \cong \overline{NK}$, y $\overline{ND}$ y $\overline{ME}$ son alturas del ΔMKN (véase figura a la derecha), entonces $\overline{ND} \cong \overline{ME}$.



A continuación, presentamos la demostración usando un formato a dos columnas: en la primera se colocan las aserciones de cada argumento y en la segunda, la garantía; entre paréntesis, los números que representan el dato.

	Aserción	Garantía y datos
1.	$\overline{ND}$ y $\overline{ME}$ alturas del ΔMKN; $\overline{MK} \cong \overline{NK}$	Dado
2.	$\overline{ME} \perp \overleftrightarrow{NK}$ y $E \in \overleftrightarrow{NK}$; $\overline{ND} \perp \overleftrightarrow{MK}$ y $D \in \overleftrightarrow{MK}$	D. Altura (1)
3.	$\angle KEM$ es recto y $\angle KDN$ es recto	D. Rectas perpendiculares (2)
4.	$\angle KEM \cong \angle KDN$	T. Ángulos rectos – congruentes (3)
5.	$\angle EKM \cong \angle DKN$	Propiedad reflexiva
6.	$\Delta EKM \cong \Delta DKN$	T. Ángulo-ángulo-lado (1,4,5)
7.	$\overline{ND} \cong \overline{ME}$	D. Triángulos congruentes (6)

Haciendo referencia al bloque 5, sería pertinente que los resolutores identifiquen tanto los argumentos simples como los nucleares del argumento global que es la demostración completa. En este caso, cada paso, exceptuando el primero, presenta un argumento simple. Por ejemplo, en el paso 5, el dato es $\angle K$, la garantía es la propiedad reflexiva y la aserción es $\angle EKM \cong \angle DKN$. Uno de los argumentos nucleares está conformado por los pasos 1, 2, 3 y 4. Otro está compuesto por los pasos 1, 4, 5 y 6.

En cuanto a los ítems b a g del primer numeral, lo correspondiente al enunciado 1 se presenta en el mismo texto, razón por la cual no se debe entregar la parte posterior al enunciado del numeral 1 hasta que este se haya resuelto. Respecto al enunciado 2, la situación es una relación entre las alturas a los lados congruentes de los triángulos isósceles; la solicitud es demostrar que esa relación es deducible del dato dado; no tiene indicaciones. Presentamos en el cuadro 12, respuestas esperadas a los ítems c a g, los cuales son la introducción a las pautas que proponemos para analizar si un enunciado de tarea corresponde al de una tarea de argumentación, puesto que todas se responden afirmativamente.

Cuadro 12. Respuestas esperadas en el análisis del enunciado 2

Ítem	Respuesta esperada	Pauta asociada
c	El potencial de la solicitud se encuentra en generar incertidumbre acerca de cuáles elementos teóricos son útiles para lograr el objetivo, o curiosidad respecto a qué de la teoría asegura la validez.	PA1
d	Solicitar una demostración es pedir ideas para determinar los pasos deductivos que permiten llegar desde el antecedente de la afirmación al consecuente.	PA2
e	Sí, al informar que se trata de un triángulo isósceles y de dos de sus alturas.	PA3
f	Efectivamente, la solicitud de demostrar implica usar el sistema teórico para establecer la aceptabilidad de la afirmación. Esto obliga a explicitar el encadenamiento de argumentos simples que conforman la demostración.	EA1
g	En la proposición condicional presentada en el enunciado, el antecedente sugiere el dato de los dos argumentos nucleares identificados; para el primero, el dato lo conforman las alturas a dos lados de un triángulo; para el segundo, parte del dato es la congruencia de dos lados del triángulo. El consecuente de la afirmación por demostrar sugiere la aserción correspondiente al último argumento simple: las alturas a los lados congruentes son congruentes.	EA2

La ausencia de indicaciones no necesariamente implica que la tarea no sea de argumentación. En el enunciado de la tarea que estamos examinando, aunque no hay indicaciones explícitas de cómo se debe presentar la demostración, como la tarea exige una demostración, tácitamente se espera que se haya indicado a lo largo del curso cómo debe presentarse. Cuando se establece cierta rutina respecto a cómo reportar una demostración, es posible que las indicaciones se omitan.

Con el numeral 2, cuando el resolutor hace la comparación entre su análisis y el nuestro, se propicia el desarrollo de una actividad en la que se pueden reconocer y expresar las dudas que tiene al respecto.

El numeral 3 pretende inducir al resolutor a modificar el enunciado 1, de manera que lleve a la explicitación del argumento cuyo posible surgimiento identificó al solucionar la tarea propuesta. Como el enunciado 1 sí cumple las pautas PA1, PA2 y PA3 que se refieren a la producción de argumentos, solo se requiere incluir en el enunciado solicitudes y/o indicaciones para satisfacer las pautas EA1, EA2 y EA3. Dado que enseguida del numeral 3, presentamos nuestra modificación, es aconsejable no entregar el resto del texto hasta que los resolutores hayan presentado sus sugerencias de cambio y se hayan analizado en grupo.

Las respuestas al numeral 4 pueden hacer surgir dudas respecto a las pautas propuestas para determinar si una tarea es de argumentación.

Consideraciones para terminar

La argumentación es un proceso que ha sido estudiado ampliamente en educación matemática, pues hay una tendencia general a incluir este asunto en las propuestas curriculares de matemáticas de todos los niveles educativos. Se ha planteado, además, que debería ser parte fundamental de la experiencia matemática en las aulas. Sin embargo, este proceso tiene una presencia tímida en la escuela. Por esta razón, se hacen llamados a contribuir por diferentes vías, a promover la formación de profesores sobre argumentación (Stylianides *et al*., 2016).

Con esta obra hemos querido atender dicho llamado, al compartir con la comunidad algunos resultados del ejercicio investigativo del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional. En ese ejercicio, nos involucramos en un proceso de diseño curricular dirigido a la formación de profesores de matemáticas, en el que buscamos apoyar la construcción de su conocimiento profesional sobre argumento y términos relacionados.

Como se puede apreciar, hacemos una propuesta de fundamentación conceptual sobre argumento, que sugiere una postura sobre este constructo, así como el de argumentación y tipos de argumentos. No consideramos esta como la única o la mejor, pero la vemos útil para comenzar a precisar términos y construir una base teórica con la cual enfrentar el reto de enseñar a argumentar o investigar sobre la argumentación. Esta fundamentación dirigió el desarrollo de las secuencias didácticas de la obra, los análisis que realizamos a su implementación con profesores en formación y las sugerencias, incluidas en las descripciones, para gestionar su ejecución.

Las tareas que se agrupan en las secuencias didácticas han sido puestas en funcionamiento en varias ocasiones, principalmente en un curso de un programa de formación inicial de profesores, pero también en un programa de formación continuada, para evaluar su funcionamiento y hacerles ajustes. El análisis sistemático de su implementación alimentó las descripciones que acompañan los enunciados.

Con estudiantes en formación inicial para profesor, implementamos las tareas en un curso de didáctica de la geometría; este propicia una reflexión sobre la experiencia previa en cursos de geometría en los que los estudiantes viven una actividad matemática que promueve la argumentación. En dichos cursos de geometría, ellos se involucran en la resolución de problemas, hacen construcciones geométricas, las exploran, proponen conjeturas y las validan en el marco de un sistema teórico que van construyendo a lo largo del curso; así, en tales cursos, la argumentación y la explicitación de argumentos son protagonistas, pero no al punto de convertirlos en objeto de estudio en procura de una fundamentación teórica al respecto. Es en el curso de didáctica donde se promueve tal fundamentación mediante las tareas propuestas en este libro.

Con profesores en ejercicio, implementamos las tareas en una cohorte de un programa de maestría (de dos años de duración), dirigido a promover el conocimiento didáctico y matemático sobre argumento y argumentación, con el objetivo de apoyar a los profesores en la tarea de impulsar en sus aulas ambientes de aprendizaje que contribuyan a hacer realidad las metas educativas propuestas sobre los procesos de argumentación. La apuesta formativa de la maestría apunta, en general, a promover un cambio en la práctica profesional del profesor de matemáticas en ejercicio, fruto de la transformación de su conocimiento didáctico matemático. Para lograrlo, cada profesor-estudiante convierte en objeto de estudio su conocimiento profesional, sobre algún objeto o proceso (matemático o discursivo). En la cohorte en mención el asunto específico fue el proceso de argumentación, enmarcado en la práctica relativa a cómo promoverlo en aulas escolares a través de tareas.

Por otro lado, nuestro ejercicio investigativo, concretado parcialmente con esta obra, se convirtió en un escenario que promovió nuestra propia formación. Nos hizo ser, día a día, más conscientes de la variedad de posturas que existen sobre argumento, argumentación, tipos de argumentos y componentes de un argumento. En consecuencia, nos hizo ser más sensibles a la complejidad que implica un tratamiento profesional al respecto, nos mostró la necesidad de construir definiciones accesibles a los estudiantes en los procesos formativos, y nos llevó a establecer fundamentos para precisar rasgos que podrían tener los espacios de formación y los enunciados de tareas específicas para promover aprendizaje sobre argumentación. También nos mostró que vivir una experiencia de actividad matemática que favorezca la argumentación no es condición suficiente para disponer de acepciones unificadas y especializadas de argumento, por lo que se hace necesario promover una reflexión explícita sobre las acepciones que se tienen y analizarlas con los lentes de un marco de referencia.

Adicionalmente, el ejercicio realizado posibilitó, como investigadores en diseño curricular, hacer explícita nuestra racionalidad al momento de diseñar tareas profesionales, considerando las razones que nos llevaron a plantear ciertas tareas o a tomar decisiones sobre cómo enunciarlas. Pudimos reconocer que el campo de conocimiento fuente de tales razones es diverso (curricular, sobre un curso de geometría para la formación inicial de profesores; didáctico, sobre una conceptualización de argumento y de tipos de argumentos pensada para un contexto educativo o sobre la relación tipo de problema-argumento matemático que se favorece; pedagógico, sobre maneras para identificar significados por parte de los estudiantes) y también que la fiabilidad de dichas razones es variada (se basa en exigencias institucionales —del programa de formación mismo—, en principios pedagógicos, o en experiencias profesionales —docentes o como diseñadores— e investigativas). Este hecho, puso de manifiesto el carácter multifacético de las fuentes de los recursos discursivos a los que puede apelar un formador para sustentar la aceptabilidad de sus ideas.

Esperamos, a través de esta obra, llamar la atención de otros formadores de profesores sobre la necesidad de construir continua y colectivamente un conocimiento profesional sobre los objetos que quieren poner al alcance de sus estudiantes-profesores, pese a tener una experiencia acumulada como educadores e investigadores. Así mismo, invitamos a colegas a que reaccionen a nuestras propuestas de conceptualización de argumento y términos relacionados, y de las tareas con las que impulsamos la formación de profesores. Confiamos en la construcción colectiva y continua como una manera pertinente para mejorarlas. En suma, concebimos esta obra como parte de la concreción de algunos resultados de un ciclo investigativo; de ninguna manera, la concebimos como la terminación de dicho ciclo. Más bien, esperamos que este producto se convierta en un insumo para entablar interacción con colegas interesados en los mismos asuntos, en el sentido expresado en las líneas anteriores.

Referencias

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *UNICIENCIA, 33*(2), 55-75.

Ayalon, M. y Nama, S. (2023). Secondary school mathematics teacher-perceived factors involved in argumentation: An emerging framework. *Research in Mathematics Education, 26*(1), 193-214. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2156585

Battista, M. y Clements, D. (2000). Mathematics curriculum development as a scientific endeavor. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 737-760). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Birkhoff, G. A. (1932). Set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics, 33*(2), 329-345. http://www.jstor.org/stable/1968336

Boero, P., Fenaroli, G. y Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. En A. Stylianides y G. Harel (eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective* (pp. 49-67). Springer.

Camargo, L., Perry, P., Molina, Ó., Samper, C. y Vargas, C. (2024). Diversidad de acepciones de argumento: necesidad de la formación de profesores. *PNA, 18*(3), 313-338. http://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26749

Conner, A. (2013). Authentic argumentation with prospective secondary teachers: The case of 0.999... *Mathematics Teacher Educator, 1*(2), 172-180. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.1.2.0172

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401-429. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. y Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-368). Springer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2-3), 237-284.

Gómez, P., Mora, M. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Universidad de los Andes.

Hernández, H. y Parra, R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. *Innovación Educativa, 13*(63), 61-73.

Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N. y Arbaugh, F. (2014). Improving preservice secondary mathematics teachers' capability with generic example proofs. *Mathematics Teacher Educator, 2*(2), 158-170. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.2.0158

Knipping, C. y Reid, D. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 3-31). Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Lawrence Erlbaum Associates.

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics* (pp. 305-325). Springer.

Mason, J. (2015). Bringing reflection to the fore using narrative construction. *Constructivist Foundations, 10*(3), 334-335. http://constructivist.info/10/3/334

Molina, Ó. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(63), 109-134.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Autor.

Nunan, D. (2004). *Task-based language teaching.* Cambridge University Press.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Peirce, C. S. (1878). Deduction, induction, and hypothesis. *Popular Science Monthly,* 12, 286-302.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Universidad Pedagógica Nacional.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Qvortrup, A. y Wiberg, M. (2016). An interview with Anna Sfard. En A. Qvortrup, M. Wiberg, G. Christensen y M. Hansbøl (eds.), *On the definition of learning* (pp. 323-336). University Press of Southern Denmark.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stylianides, A. y Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307-332.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Sense Publishers.

Toulmin, S. (2003/1958). *The uses of argument* (edición actualizada). Cambridge University Press.

Watson, A. y Ohtani, M. (eds.) (2021/2015). *Task design in mathematics education: An ICMI Study 22*. Springer.

Watson, A. y Thompson, D. (2021/2015). Design issues related to text-based tasks. En A. Watson y M. Ohtani (eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI Study 22* (pp. 142-190). Springer.

Aprender sobre argumento:
ideas para profesores de matemáticas
editado por la Universidad Pedagógica Nacional,
e impreso en Xpress Estudio Gráfico y Digital S. A.

Bogotá, Colombia, 2025

Colección

Educación, formación y currículo

Sin duda, argumentar es una actividad ineludible al hacer matemáticas y, por tanto, en las matemáticas escolares es fundamental y requiere de una enseñanza deliberada. Para promoverla y enseñarla en el aula, el profesor tiene que estar equipado con un conocimiento especializado. El libro que tiene en sus manos traza un camino inicial para la enseñanza de la argumentación a profesores en formación.

Dirigido a formadores y profesores de matemáticas en formación o en ejercicio, *Aprender sobre argumento: ideas para profesores de matemáticas* ofrece una propuesta curricular que articula elementos conceptuales y prácticos. En su primera parte, presenta definiciones sobre argumento, sus componentes y tipos; en la segunda, desarrolla una trayectoria de enseñanza compuesta por tareas profesionales que tematizan este objeto central del discurso matemático.

Más que ser un manual, esta obra es una invitación a construir colectivamente un conocimiento especializado para diseñar y analizar tareas que promuevan la argumentación. Es un recurso básico, pero valioso para quienes desean que sus estudiantes no solo resuelvan problemas, sino que aprendan a argumentar sus ideas matemáticas.

ISBN: 978-628-7760-71-4

9 786287 760714