



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

Estudio de un Modelo Matemático para Cuantificar las Relaciones Amorosas

Maykyn Steven Castañeda Rodríguez

Miguel Ángel Londoño Vásquez

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá D.C., 2024

Estudio de un Modelo Matemático para Cuantificar las Relaciones Amorosas

Trabajo de grado como requisito parcial para obtener el título de Licenciados en
Matemáticas

Maykyn Steven Castañeda Rodríguez

2019240015

Miguel Ángel Londoño Vásquez

2019240027

Asesora

M.Sc. Myriam Sofía Rodríguez Garzón

Profesora Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C., 2024

A mi madre Gloria, a mi padre Lizardo, a mis hermanos Daniel y Edwin, y a todos mis mejores amigos de la facultad.

-Miguel Londoño-

Quiero dedicar este logro a mi Mamá, quien ha sido mi faro en cada etapa de mi vida. Ella me ha enseñado el valor del ímpetu para enfrentar las adversidades con resiliencia y seguir adelante, inculcándome la importancia del esfuerzo y la humildad en cada paso.

A Gabriel, más que un amigo, ha sido mi hermano, siempre presente en mis momentos más difíciles, guiándome en cada decisión importante con desinterés y apoyo incondicional.

A la señora Martha y Don José, quienes han sido como unos segundos padres para mí, brindándome orientación y apoyo tanto en lo profesional como en lo personal. Con ustedes he aprendido que la verdadera familia se encuentra en el camino de la vida.

Quiero concluir con un pensamiento propio:

"La resiliencia es la capacidad de levantarse una y otra vez después de enfrentar dificultades y fracasos. No se trata de negar el dolor, sino de aceptarlo como parte de la vida y encontrar la fuerza para seguir adelante. Es el compromiso con uno mismo de nunca rendirse, sin importar cuánto duela por dentro. Aunque estés destrozado, siempre hay fuerzas para continuar, porque quien realmente lo desea, puede hacerlo."

-Maykyn Castañeda-

Agradezco a la Universidad Pedagógica por la formación recibida y a la profesora Myriam Rodríguez por haber aceptado ser nuestra asesora, por su preocupación, por sus consejos oportunos y por la dedicación y el empeño puesto en la realización de este trabajo de grado. Agradezco también a todos los profesores de colegio y universidad que me han formado y contribuido a que sea la persona que soy hoy.

Finalmente, doy gracias a mi familia, ya que fueron ellos quienes hicieron posible que este sueño comenzara.

-Miguel Londoño-

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la profesora Myriam Rodríguez por su guía, sabiduría y capacidad para escuchar. Su presencia fue como un faro en la noche, iluminando el camino hacia el éxito en la realización de este trabajo. Cada consejo y aporte que nos brindó reflejó el verdadero compromiso de un educador con el crecimiento de sus estudiantes.

También deseo extender mi gratitud a Miguel, mi compañero y amigo en este viaje académico. Su apoyo incondicional y su aliento constante fueron pilares fundamentales que me mantuvieron firme durante todo el proceso. Su amistad ha sido un verdadero regalo en este viaje.

A ambos, les agradezco de corazón por su presencia, apoyo y dedicación. Han hecho de este proyecto una experiencia enriquecedora y memorable que siempre recordaré con gratitud.

-Maykyn Castañeda-

Tabla de Contenido

Índice de Figuras	9
Índice de Tablas	13
Objetivo General	18
Objetivos Específicos	18
1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias	19
1.1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	19
1.1.2. Sistemas de E.D.O. Lineales de Primer Orden.	20
1.1.2.1. Teorema 1 (Existencia y Unicidad en un Sistema de E.D.O. Lineales de Primer Orden)	21
1.1.3. Sistemas de E.D.O. Lineales de Primer Orden Homogéneos.	21
1.1.3.1. Teorema 2 (Wronskiano para Soluciones Linealmente Independientes).....	22
1.1.3.2. Definición 1 (Conjunto Fundamental de Soluciones).....	22
1.1.3.3. Teorema 3 (Existencia de un Conjunto Fundamental)	22
1.1.3.1. Teorema 4 (Propiedades de Soluciones en Sistemas Lineales Homogéneos)	22
1.1.3.2. Teorema 5 (Criterio de Independencia Lineal)	24
1.1.4. Sistema de E.D.O. Lineal de Primer Orden Homogéneo con Coeficientes Constantes... 24	
1.1.4.1. Definición 2. (Exponencial de una Matriz)	25
1.1.4.2. Teorema 6 (Multiplicidad Algebraica y Vectores Generalizados)	31
1.1.5. Sistemas de E.D.O. lineales de primer orden no homogéneos	31
1.1.5.1. Teorema 7 (Soluciones en sistemas no homogéneos).....	32
1.2. Estabilidad en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales	33
1.2.1. Sistemas Autónomos.	34
1.2.2. Sistemas Autónomos Planos.	35
1.2.2.1. Propiedades cualitativas de las órbitas.	36
1.2.3. Estabilidad de Puntos Críticos.	39
1.2.3.1. Definición 3 (Tipos de estabilidad de puntos críticos)	39
1.2.4. Clasificación de Los Puntos de Equilibrio.....	42
1.2.4.1. Vector Propio y Valor propio	42
1.2.4.2. Clasificación de los Autovalores	44
1.2.4.2.1. Valores Propios Reales y Distintos.....	46
1.2.4.2.2. Valores propios imaginarios.	50

1.2.4.2.3. Valores propios repetidos.....	55
1.2.5. Plano Traza-Determinante.....	64
1.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales	67
1.3.1. Linealización de un Sistema	69
1.3.2. Estabilidad mediante linealización	71
1.3.3. Método Directo de Liapunov	73
1.4. Modelos Previos	75
1.4.1. Modelo Exponencial.....	75
1.4.2. Modelo logístico.....	76
Capítulo 2.....	78
2.1. Modelo Inicial Inspirado en Romeo y Julieta	78
2.1.1. Planteamiento del Modelo.	78
2.1.1.1. Perfiles Conductuales en las Relaciones.....	81
2.1.2. Puntos de Equilibrio y Caso General	83
2.2. Casos Especiales.....	85
2.2.1. Querer por Sólo Querer, es Verdadero Querer.	87
2.2.1.1. Cada Tiesto con su Arepa: $b > 0$ y $c > 0$	87
2.2.1.2. Durmió Conmigo Anoche o Qué, Que Ya No Saluda: $b < 0$ y $c < 0$	91
2.2.1.3. Sin Conocer, Amor No Puede Haber: $bc < 0$	93
2.2.2. La Mujer No Ama a Quien la Ama, Sino a Quien le Viene en Gana.	96
2.2.2.1. Sigue Pensando que la Marimonda es Mickey: $ a > b $	97
2.2.2.2. Mujer que No Joda es Hombre o Tiene Mozo: $a < b $	101
2.2.3. Ama y Te Amarán, Odia y Te Odiarán.	103
2.2.3.1. Sigue Pensando que la Marimonda es Mickey: $ a > b $	104
2.2.3.2. Mujer que No Joda es Hombre o Tiene Mozo: $a < b $	109
2.2.4. Tanto es Amar Sin Ser Amado, Como Responder Sin Ser Preguntado.	113
2.2.4.1. El que No Cae, Resbala: $d > 0$ y $c > 0$	115
2.2.4.2. Del Amor al Odio Sólo Hay un Paso: $b < 0$ y $c > 0$	117
2.2.4.3. Más Tragada que Yuca en Sancocho: $b < 0$ y $c < 0$	119
2.3. Conclusiones del Modelo Lineal	121
Capítulo 3.....	122
3.1. Modelo No Lineal de Romeo y Julieta	122

3.1.1. Planteamiento del Modelo.	122
3.1.1.1. Perfiles Conductuales en las Relaciones.....	124
3.1.2. Puntos de Equilibrio y Caso General	127
3.1.3. Análisis de Casos Particulares	131
3.1.3.1. Caso Particular 1: $a = d$ y $c = b$	133
3.1.3.1.1. Son como uña y mugre: $a, b, c, d > 0$	133
3.1.3.1.2. Como Dos Gallos en el Mismo Corral, Mucho Cacareo y Poca Acción: $a, d > 0$ y $c, b < 0$	136
3.1.3.1.3. Amor de Lejos, Amor de Pendejos: $a, d < 0$ y $c, b > 0$	138
3.1.3.1.4. Son como agua y aceite: $a, d < 0$ y $c, b < 0$	141
3.1.3.2. Caso Particular 2: $a = d$ y $c \neq b$	145
3.1.3.2.1. Uno Dando Papaya y el Otro Comiendo Limón $a, d > 0$ y $c > 0 > b$	145
3.1.3.2.2. Aunque la mona se vista de seda, mona se queda: $a, d < 0$ y $c > 0 > b$	147
3.1.3.3. Caso Particular 3: $a \neq d$ y $c = b$	148
3.1.3.3.1. A Quien Tiene Suerte, Hasta el Gallo le Pone Huevos: $d > 0 > a$ y $c, b > 0$..	148
3.1.3.3.2. Amor con hambre no dura $d > 0 > a$ y $c, b < 0$	150
3.1.3.4. Caso Particular 4: $a \neq d$ y $c \neq b$	152
3.1.3.4.1. A La Fuerza Ni Los Zapatos Entran: $d > 0 > a$ y $c > 0 > b$	152
3.1.3.4.2. Amistad por Interés, No Dura Porque No Lo Es: $d > 0 > a$ y $c < 0 < b$	154
3.2. Conclusiones del Modelo No Lineal	156
Conclusiones	158
Anexos	161
Anexo 1: Códigos	161
Plano de Fases.....	161
Gráfico de Soluciones.....	162
Anexo 2: Posible Traducción de Códigos a Matlab	163
Plano de Fases.....	163
Gráfico de Soluciones.....	164
Anexo 3: Reseña Sobre la Obra de Romeo y Julieta Escrito por William Shakespeare	166
Introducción	166
Desarrollo:	166
Descripción de los personajes de Romeo y Julieta:	168
Conclusión:	169

Anexo 4: Algunas Demostraciones de los Teoremas Enunciados..... 170

 Teorema 2 (Wronskiano para Soluciones Linealmente Independientes) 170

Referencias..... 173

Índice de Figuras

Figura 1.- Ejemplo gráfico de esta propiedad con múltiples soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = -y$, $\frac{dy}{dt} = x$	37
Figura 2.- Ejemplo gráfico de esta propiedad con tres soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = -y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$	37
Figura 3.- Ejemplo gráfico de esta propiedad con dos soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = 2x + 8y$, $\frac{dy}{dt} = -x - 2y$	38
Figura 4.- Ejemplo de punto de equilibrio estable en (0,0) en el sistema $\frac{dx}{dt} = 2x + 8y$, $\frac{dy}{dt} = -x - 2y$	40
Figura 5.- Ejemplo de punto de equilibrio asintóticamente estable en (0,0) del sistema $\frac{dx}{dt} = -y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$	41
Figura 6.- Ejemplo de punto de equilibrio inestable en (0,0) en el sistema $\frac{dx}{dt} = x + y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$	41
Figura 7.- Ejemplo de plano de fase para valores propios reales negativos. Sistema $\frac{dx}{dt} = -5x + y$, $\frac{dy}{dt} = x - 5y$ con $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = -4$	48
Figura 8.- Ejemplo de plano de fase para valores propios reales positivos. Sistema $\frac{dx}{dt} = 4x - y$, $\frac{dy}{dt} = -2x + 5y$ con $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 6$	49
Figura 9.- Ejemplo de plano de fase para valores propios reales con signos opuestos. Sistema $\frac{dx}{dt} = 3x - y$, $\frac{dy}{dt} = 5x - 3y$ con $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$	50
Figura 10.- Ejemplo de plano de fase para valores propios imaginarios con parte real nula. Sistema $\frac{dx}{dt} = 3x - y$, $\frac{dy}{dt} = 5x - 3y$ con $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$	52
Figura 11.- Ejemplo de plano de fase para valores propios imaginarios con parte real negativa. Sistema $\frac{dx}{dt} = -1x - 4y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$ con $\lambda_1 = -1 + 2i$ y $\lambda_2 = -1 - 2i$	54
Figura 12.- Ejemplo de plano de fase para valores propios imaginarios con parte real positiva. Sistema $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y$, $\frac{dy}{dt} = 4x - y$ con $\lambda_1 = 1 + 2i$ y $\lambda_2 = 1 - 2i$	55
Figura 13.- Ejemplo de plano de fase de un sistema con vectores propios arbitrarios. Sistema $\frac{dx}{dt} = -5x$, $\frac{dy}{dt} = -5y$	57
Figura 14.- Ejemplo de plano fase para valores propios negativos repetidos y dos vectores propios linealmente independientes. Sistema $\frac{dx}{dt} = -5x$ y $\frac{dy}{dt} = -5y$ con $\lambda_1 = -5 = \lambda_2$	58
Figura 15.- Ejemplo de plano fase para valores propios negativos repetidos y sólo un vector propio linealmente independiente. Sistema $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}x + y$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y$ con $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$	60

Figura 16.- Ejemplo de plano fase para valores propios positivos repetidos y dos vectores propios linealmente independientes. Sistema $\frac{dx}{dt} = 5x, \frac{dy}{dt} = 5y$ con $\lambda_1 = 5 = \lambda_2$	61
Figura 17.- Ejemplo de plano fase para valores propios positivos repetidos y sólo un vector propio linealmente independiente. Sistema $\frac{dx}{dt} = x - y, \frac{dy}{dt} = x + 3y$ con $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$	62
Figura 18.- Estabilidad y naturaleza del origen para el sistema en el plano Traza-Determinante. Creado por autoría propia.	66
Figura 19.- Plano de fases con parámetros $a = 0, d = 0, b = 3, c = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	89
Figura 20.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, d = 0, b = 3, c = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	90
Figura 21.- Plano de fases con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = -5$ y condición inicial $R_0 = 1, J_0 = 1$	92
Figura 22.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = -5$ y condición inicial $R_0 = 1, J_0 = 1$	93
Figura 23.- Plano de fases con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = 4$ y condición inicial $R_0 = 1, J_0 = 1$	94
Figura 24.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = 4$ y condición inicial $R_0 = 1, J_0 = 1$	95
Figura 25.- Plano de fases del perfil conductual Entusiasta-Solitario con parámetros $a = 5, b = -3, c = -5, d = 3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	98
Figura 26.- Gráfico de soluciones del perfil conductual Entusiasta-Solitario con parámetros $a = 5, b = -3, c = -5, d = 3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	99
Figura 27.- Plano de fases del perfil conductual Narcisista-Seguro con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	100
Figura 28.- Gráfico de soluciones del perfil conductual Narcisista-Seguro con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	101
Figura 29.- Plano de fases con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$	102
Figura 30.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$	103
Figura 31.- Plano de fases de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = -5, b = 3, c = 3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = 1, J_0 = -1$	105
Figura 32.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = -5, b = 3, c = 3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = 1, J_0 = -1$	106
Figura 33.- Plano de fases de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = 5, b = 3, c = 3, d = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1; R_0 = 1, J_0 = -1; R_0 = -1, J_0 = -1$	107

Figura 34.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = 5, b = 3, c = 3, d = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1; R_0 = 1, J_0 = -1; R_0 = -1, J_0 = -1$	108
Figura 35.- Plano de fases de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = 2, b = 3, c = 3, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = -1$	110
Figura 36.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = 2, b = 3, c = 3, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = -1$	111
Figura 37.- Plano de fases de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = -2, b = -3, c = -3, d = -2$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1.1$	112
Figura 38.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales dos seguros o dos solitarios con parámetros $a = -2, b = -3, c = -3, d = -2$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1.1$	113
Figura 39.- Plano de fases con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = 3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	116
Figura 40.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = 3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	116
Figura 41.- Plano de fases con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	118
Figura 42.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	118
Figura 43.- Plano de fases con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	120
Figura 44.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$	120
Figura 45.- Soluciones de Mathematica al resolver el sistema (63).	128
Figura 46.- Plano de fases del perfil conductual dos entusiastas con parámetros $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$; condiciones iniciales $R_0 = 2, J_0 = 2.1; R_0 = -2, J_0 = -2.1; R_0 = 0.1, J_0 = 0$	135
Figura 47.- Gráfico de soluciones del perfil conductual dos entusiastas con parámetros $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$; condiciones iniciales $R_0 = 2, J_0 = 2.1; R_0 = -2, J_0 = -2.1; R_0 = 0.1, J_0 = 0$	135
Figura 48.- Plano de fases del perfil conductual dos narcisistas con parámetros $a = 1, b = -1, c = -2, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2.1; R_0 = 2.1, J_0 = -2; R_0 = 0.1, J_0 = 0$	137
Figura 49.- Gráfico de soluciones del perfil conductual dos narcisistas con parámetros $a = 1, b = -1, c = -2, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2.1; R_0 = 2.1, J_0 = -2; R_0 = 0.1, J_0 = 0$	138
Figura 50.- Plano de fases del perfil conductual dos seguros con parámetros $a = -2, b = 2, c = 1, d = -1$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = -2; R_0 = -2, J_0 = 2.1; R_0 = 3, J_0 = 3$	140

Figura 51.-Gráfico de soluciones del perfil conductual dos seguros con parámetros $a = -2$, $b = 2$, $c = 1, d = -1$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -2, J_0 = 2.1$; $R_0 = 3, J_0 = 3$	141
Figura 52.-Plano de fases del perfil conductual dos solitarios con parámetros $a = -1, b = -1$, $c = -2, d = -2$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = 2$; $R_0 = -2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -4, J_0 = 4$	143
Figura 53.-Gráfico de soluciones del perfil conductual dos solitarios con parámetros $a = -1, b = -1, c = -2, d = -2$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = 2$; $R_0 = -2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -4, J_0 = 4$	144
Figura 54.-Plano de fases del perfil conductual Entusiasta-Narcisista con parámetros $a = 2$, $b = -2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$	145
Figura 55.-Gráfico de soluciones del perfil conductual Entusiasta-Narcisista con parámetros $a = 2, b = -2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$	146
Figura 56.-Plano de fases del perfil conductual Solitario-Seguro con parámetros $a = -2$, $b = -2, c = 1, d = -1$ y condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2$	147
Figura 57.-Gráfico de soluciones del perfil conductual Solitario-Seguro con parámetros $a = 2$, $b = -2, c = 1, d = -1$ y condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2$	148
Figura 58.-Plano de fases del perfil conductual Entusiasta-Seguro con parámetros $a = -2$, $b = 2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$	149
Figura 59.-Gráfico de soluciones del perfil conductual Entusiasta-Seguro con parámetros $a = -2, b = 2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$	150
Figura 60.-Plano de fases del perfil conductual Solitario-Narcisista con parámetros $a = -2$, $b = -2, c = -1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$	151
Figura 61.-Gráfico de soluciones del perfil conductual Solitario-Narcisista con parámetros $a = -2, b = -2, c = -1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$	151
Figura 62.-Plano de fases del perfil conductual Entusiasta-Solitario con parámetros $a = -2$, $b = -2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.5, J_0 = 0$	153
Figura 63.-Gráfico de soluciones del perfil conductual Entusiasta-Solitario con parámetros $a = -2, b = -2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.5, J_0 = 0$	154
Figura 64.-Plano de fases del perfil conductual Seguro-Narcisista con parámetros $a = -2$, $b = 2, c = -1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.5, J_0 = 0$	155
Figura 65.-Gráfico de soluciones del perfil conductual Seguro-Narcisista con parámetros $a = -2, b = 2, c = -1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.5, J_0 = 0$	156

Índice de Tablas

Tabla 1.-	Clasificación de autovalores según el discriminante.	46
Tabla 2.-	Comportamiento y estabilidades según tipos de valores propios.	63
Tabla 3.-	Comportamiento y estabilidades según las condiciones de la Traza y el Determinante.	67
Tabla 4.-	Combinaciones posibles parejas entre Romeo y Julieta, adaptada de Munoa (2020).	83
Tabla 5.-	Casos especiales descritos por Sprott (2004)	87
Tabla 6.-	Combinaciones posibles de dinámicas de pareja en el modelo no lineal.....	127
Tabla 1.-	Casos Particulares descritos por Munoa (2020)	133

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado tiene como objetivo describir y analizar dos modelos que representan el amor entre dos personas, inspirados en la célebre historia de amor de Romeo y Julieta, uno de los cuales presenta una mayor complejidad que el otro. El amor es una amalgama de sentimientos que establece un intenso vínculo emocional con otra persona. Existen diversas manifestaciones del amor: el amor romántico, el amor hacia la familia o amigos, el amor por la vida, el amor propio. En este trabajo de grado, se enfocará exclusivamente en el amor romántico.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo de grado se estructura en cuatro capítulos. El primer capítulo establece el marco matemático, donde se introducen los fundamentos de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.), abarcando tanto los sistemas lineales como los no lineales. Este marco teórico constituye la base para el estudio y análisis de los modelos matemáticos que se explorarán en el trabajo de grado.

En el segundo capítulo, se expone y detalla el modelo propuesto por Steven H. Strogatz, inspirado en la clásica historia de Romeo y Julieta. Se analizan los casos especiales que surgen de este enfoque, utilizando el marco teórico desarrollado en el primer capítulo. Se examina el comportamiento de los sistemas en las dinámicas de las relaciones estudiadas. Este modelo demuestra cómo diversos perfiles conductuales y respuestas emocionales pueden influir en situaciones de amor y desamor en una pareja.

El tercer capítulo se adentra en un modelo no lineal que profundiza en la complejidad de las interacciones humanas dentro del contexto amoroso. Se exploran las particularidades de los casos no lineales y se analiza cómo estos pueden ofrecer una comprensión más profunda del comportamiento humano y las dinámicas de pareja. Este enfoque resalta la habilidad de los

modelos matemáticos para predecir y describir fenómenos más complejos en las relaciones amorosas, demostrando la utilidad de las matemáticas aplicadas en el análisis de interacciones emocionales y conductuales.

Finalmente, en el cuarto capítulo se realizan las conclusiones de este estudio que resaltan la eficacia del modelo matemático desarrollado para interpretar y prever las dinámicas de las relaciones amorosas. Estos hallazgos no solo validan la aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales en el análisis de fenómenos sociales, sino que también abren caminos hacia investigaciones futuras donde tales modelos pueden ser refinados y adaptados a una variedad más amplia de contextos interpersonales. Además, este trabajo de grado invita a una reflexión más profunda sobre el potencial interdisciplinario de las matemáticas, animando a futuros investigadores a explorar la intersección entre el análisis matemático y las ciencias sociales. Así, este trabajo de grado no concluye con sus resultados, sino que establece un punto de partida para futuras exploraciones que podrían transformar nuestra comprensión de las relaciones humanas a través de la lente de las matemáticas aplicadas.

JUSTIFICACIÓN

El físico Eugene Wigner, en su obra sobre "La irrazonable eficacia de la matemática en las ciencias naturales" (1960), señala que “la utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es casi un misterio sin explicación racional aparente”. Más allá de ser un enigma por resolver, algunos científicos han visto esta eficacia como una invitación a aplicar la matemática a fenómenos tan intrínsecamente humanos como las relaciones amorosas (Méndez, 2019), campos de experiencia que tradicionalmente han sido explorados por poetas, novelistas y cantantes, pero no tan frecuentemente por físicos o matemáticos.

El documento “Enfoque histórico y matemático de la obra literaria Romeo y Julieta de William Shakespeare” (Dávalos & Hernández, 2014) ha inspirado a científicos de diversas disciplinas a analizar el amor desde perspectivas tan variadas como la Historia, la Física y las Matemáticas. Este proyecto pretende contribuir a esta exploración, centrándose en el uso de ecuaciones diferenciales para describir y comprender cómo las relaciones cambian con el tiempo y otras variables independientes en este contexto particular de una historia de amor. Se abordará el estudio como de un par de sistemas dinámicos, uno lineal y otro no lineal, analizando, en cada uno de ellos diversos escenarios los cuales permiten ganar en la comprensión del comportamiento en el tiempo de estas complejas relaciones sociales.

El análisis incluirá el estudio de la susceptibilidad del sistema no lineal a las bifurcaciones y el caos, donde pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden generar resultados considerablemente distintos. Aspectos como el tiempo compartido, la interacción en redes sociales, la tolerancia financiera, y las dinámicas emocionales serán considerados como variables críticas en este modelaje.

Este estudio no solo arrojará luz sobre las dinámicas de las relaciones amorosas desde una perspectiva matemática, sino que también proporcionará un enfoque valioso para comprender sistemas dinámicos complejos en general.

Además, el proyecto busca complementar la formación que proporciona el currículo declarado en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. La incipiente base teórica en modelamiento, especialmente en la teoría cualitativa de modelos, impide a los estudiantes abordar la pregunta crucial de cuándo un modelo es adecuado y cuándo no lo es. Este trabajo, por lo tanto, no solo contribuirá al entendimiento de las relaciones amorosas desde una perspectiva matemática, sino que también servirá como una herramienta educativa valiosa para los estudiantes que buscan mejorar sus habilidades en el análisis cualitativo de modelos matemáticos.

Adicionalmente, el impulso personal detrás de este anteproyecto surge de nuestro profundo interés en fusionar dos mundos aparentemente dispares: las complejas ecuaciones diferenciales y la rica y diversa experiencia humana de las relaciones amorosas. Como estudiantes apasionados de matemáticas, la inquietud por comprender la aplicabilidad de los conceptos teóricos a situaciones de la vida cotidiana ha sido una constante motivación. La elección de abordar el tema del amor desde una perspectiva matemática no solo es un intento por desmitificar este fenómeno tan subjetivo, sino también una búsqueda personal por integrar las herramientas matemáticas en contextos no convencionales. Este proyecto representa la convergencia de nuestra fascinación por la matemática y el deseo de explorar, desde una perspectiva analítica y cuantitativa, aspectos fundamentales de la experiencia humana, brindando así una dimensión única y enriquecedora a nuestra formación académica.

Objetivo General

- Analizar un par de modelos matemáticos que cuantifican las relaciones de pareja, uno lineal y otro no lineal.

Objetivos Específicos

- Elaborar un marco matemático en el que se incluya teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales, álgebra lineal y saberes aplicados respecto al estudio cualitativo y analítico de sus soluciones.
- Describir el comportamiento cualitativo general del modelo lineal propuesto por Steven H. Strogatz.
- Diseñar simulaciones en Wolfram Mathematica para analizar el comportamiento cualitativo del modelo lineal y no lineal.

CAPÍTULO 1:

MARCO MATEMÁTICO

Este capítulo aborda los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias [E.D.O.] y métodos para calcular y analizar sus soluciones. Se incluyen los conceptos que los autores consideran fundamentales para una comprensión general del tema y necesarios para examinar las que se conocen como las “ecuaciones del amor” que se introducirán en el segundo capítulo.

1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias

1.1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Se entiende un sistema de E.D.O. como un conjunto de ecuaciones diferenciales que contienen varias funciones incógnitas y sus derivadas ordinarias. Se acostumbra que t represente la variable independiente, y $x_1, x_2, \dots, x_n$ denotan las funciones incógnitas en sistemas de E.D.O. Para sistemas que contienen hasta tres ecuaciones, es común emplear y, z, x para las funciones incógnitas. Por convención, no se suele especificar la variable independiente en las funciones incógnita a menos que sea estrictamente necesario. Queda implícito que t es la variable independiente y $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las funciones incógnitas.

La forma más general de un sistema de E.D.O. es:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots, x^{(p)}_1, x^{(p)}_2, \dots, x^{(p)}_n) = 0 \\ F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots, x^{(p)}_1, x^{(p)}_2, \dots, x^{(p)}_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots, x^{(p)}_1, x^{(p)}_2, \dots, x^{(p)}_n) = 0 \end{cases}$$

Cada F_i es una función que relaciona la variable independiente, las funciones incógnitas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ y sus derivadas hasta el orden p , y hay m ecuaciones en total.

Es necesario aclarar que, debido a la estructura particular de las ecuaciones del amor que se pretenden explorar, solo se considerará sistemas donde el número de ecuaciones es igual al número de funciones incógnitas (usualmente n) y se limitará a los sistemas lineales de primer orden. Se pondrá en manifiesto esta idea con lo siguiente.

1.1.2. Sistemas de E.D.O. Lineales de Primer Orden.

Un **sistema de E.D.O. lineales de primer orden** es una colección de n ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Se puede representar en forma matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Es posible escribirlo brevemente como:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) \quad (1)$$

Nota 1: Si en (1) $b_i(t) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ el sistema es llamado homogéneo.

Es decir, que un **sistema de E.D.O. lineales homogéneo** de la forma:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{X} \quad (2)$$

Nota 2: Si en (1) los elementos de la matriz $\mathbf{A}(t)$ son constantes el sistema es llamado **sistema de E.D.O. lineales con coeficientes constantes**. Es decir, de la forma:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) \quad (3)$$

En notación matricial, un **problema de valores iniciales** para un sistema (1) se escribe como:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (4)$$

1.1.2.1. Teorema 1 (Existencia y Unicidad en un Sistema de E.D.O. Lineales de Primer Orden)¹

Si $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, que contiene al punto t_0 , entonces el problema de valores iniciales (4) para cualquier vector $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, tiene una única solución definida en el intervalo I .

Se observa que el teorema anterior permite asegurar que todo sistema diferencial, tiene infinitas soluciones, es decir, para cada punto inicial en $\mathbb{R}^n$, hay una única solución al sistema diferencial; sin embargo, hay infinitos puntos iniciales posibles en $\mathbb{R}^n$, y, por lo tanto, infinitas soluciones únicas posibles.

Ahora, en seguida se describen algunas anotaciones importantes de los sistemas de E.D.O. lineales homogéneo.

1.1.3. Sistemas de E.D.O. Lineales de Primer Orden Homogéneos.

Para el sistema homogéneo (2), la función $\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in I$, es una solución (esto es que $\mathbf{0} = \mathbf{A}(t) \mathbf{0}$, lo cual es cierto para cada $\mathbf{A}(t)$). Esta solución se denomina **solución trivial**.

¹ La demostración de este teorema se puede leer en Gonzalez, O. (20 de agosto de 2021). Ecuaciones Diferenciales I: Teorema de Existencia y Unicidad – Ecuación Integral, Funciones Lipschitzianas y Lema de Gronwall. *El blog de leo*. <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-teorema-de-existencia-y-unicidad-ecuacion-integral-funciones-lipschitzianas-y-lema-de-gronwall/>

1.1.3.1. Teorema 2 (Wronskiano para Soluciones Linealmente Independientes)²

Sean

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vectores solución del sistema homogéneo (2) en un intervalo I . Entonces el sistema de vectores solución es linealmente independiente en I si, y solo si, el wronskiano

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5)$$

para toda t incluida en el intervalo.

1.1.3.2. Definición 1 (Conjunto Fundamental de Soluciones)

Todo conjunto $X_1, X_2, \dots, X_n$ de n vectores solución, linealmente independientes, del sistema homogéneo (2) en un intervalo I se denomina **conjunto fundamental de soluciones en el intervalo**.

1.1.3.3. Teorema 3 (Existencia de un Conjunto Fundamental)

Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo (6) en un intervalo I .

1.1.3.1. Teorema 4 (Propiedades de Soluciones en Sistemas Lineales Homogéneos)

Se considera el sistema homogéneo (2) donde $A(t)$ es una función matricial continua en el intervalo abierto I . Se verifican las siguientes propiedades fundamentales:

² La demostración de este teorema se puede encontrar en los Anexos de este documento.

1. Si $\mathbf{X}(t)$ es una solución no trivial del sistema, entonces $\mathbf{X}(t) \neq 0$ para todo t en I .

En otras palabras, una solución no trivial nunca contiene al vector cero en todo el intervalo.

2. Si $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ son dos soluciones del sistema y α, β son escalares reales cualesquiera, entonces la combinación lineal $\alpha\mathbf{X}(t) + \beta\mathbf{Y}(t)$ también constituye una solución del sistema.

3. El conjunto total de soluciones del sistema homogéneo (2) forma un espacio vectorial cuya dimensión es n , correspondiente al número de ecuaciones e incógnitas en el sistema.

De este teorema se deduce que cualquier solución del sistema lineal homogéneo puede expresarse como combinación lineal de las funciones de una base del conjunto de soluciones. Una tal base se denomina **sistema fundamental de soluciones** del sistema homogéneo (2). Así pues, la solución general del sistema lineal homogéneo es:

$$\mathbf{X}(t) = C_1\mathbf{X}_1(t) + C_2\mathbf{X}_2(t) + \dots + C_n\mathbf{X}_n(t) \quad (6)$$

Donde $C_1, C_2, \dots, C_n$ son escalares reales y $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones.

Otra forma más breve de escribir la solución general, consiste en considerar el vector $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^t$ y la matriz $\mathbf{M}(t) = (\mathbf{X}_1(t) \ \mathbf{X}_2(t) \ \dots \ \mathbf{X}_n(t))$ cuyas columnas son las soluciones del sistema fundamental. Entonces (6) se podría escribir como:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M}(t) \mathbf{C} \quad (7)$$

Nota 1: $\mathbf{M}(t)$ se denomina **matriz fundamental** del sistema. Esta matriz se compone en sus columnas por las funciones del sistema fundamental de soluciones.

Para el cálculo de la solución general de un sistema lineal homogéneo, no basta con encontrar n soluciones, sino que estas deben formar una base para el espacio de soluciones. Es

decir, que las n soluciones deben ser linealmente independientes y generar al espacio de soluciones asociado al sistema. El siguiente teorema proporciona un criterio para establecer si un conjunto dado de soluciones del sistema es linealmente independiente.

1.1.3.2. Teorema 5 (Criterio de Independencia Lineal)³

Se considera el sistema homogéneo (2), donde $A(t)$ es continua en el intervalo abierto I . Sean t_0 un punto cualquiera del intervalo I y $X_1, X_2, \dots, X_k$ soluciones de este sistema. Entonces, las soluciones $X_1, X_2, \dots, X_k$ son linealmente independientes en el intervalo I si y sólo si los vectores $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)$ son linealmente independientes.

A continuación, vamos a describir las soluciones para sistemas homogéneos de coeficientes constantes de la forma (3).

1.1.4. Sistema de E.D.O. Lineal de Primer Orden Homogéneo con Coeficientes

Constantes.

La teoría anterior asegura que un sistema homogéneo (3) tiene infinitas soluciones en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, y que bastará encontrar n soluciones linealmente independientes de dicho sistema para determinar cualquier solución de este.

Para encontrar las soluciones de un sistema homogéneo (2) se realiza el siguiente procedimiento:

$$\frac{dX}{X} = A dt$$

³ La demostración de este teorema se puede leer en *TEMA 6: ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS DE 2º ORDEN*. (2007) https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2007/2/MA26A/2/material_docente/bajar?id=144820&lsar=1&file=0.

$$\Rightarrow \int \frac{dX}{X} = \int A dt$$

$$\Leftrightarrow \ln(X) = At + C \quad (8)$$

Donde a partir de (8) se tiene,

$$X = e^{At+C_1} \Leftrightarrow X(t) = e^{At} C_2 \quad (9)$$

Para comprender qué es la matriz e^{At} se realiza el siguiente análisis:

La función exponencial es posible expresarla como una serie infinita de la forma:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Esta serie es una serie de potencias converge para cada $x \in \mathbb{R}$. Dado que (9) tiene en el exponente una matriz, a continuación, se presenta la siguiente definición:

1.1.4.1. Definición 2. (Exponencial de una Matriz)

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Se define la exponencial de la matriz A como una matriz dada por:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

donde por convenio se asume que $A^0 = I$.

Nota 1: Se asume que la serie es convergente y define una única matriz que se denomina exponencial de A .

De aquí, se expresa e^{tA} como una serie de potencias, donde t es un valor real:

$$e^{tA} = (tA)^0 + \frac{(tA)^1}{2!} + \frac{(tA)^2}{3!} + \dots$$

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene un conjunto completo de vectores propios y es diagonalizable, entonces existe una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios λ_i de $\mathbf{A}$.

La matriz exponencial de $\mathbf{A}$ se relaciona con los valores propios de la siguiente manera:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} \quad (10)$$

Donde $e^{\mathbf{D}t}$ es la matriz exponencial de la matriz diagonal $\mathbf{D}$, es decir de la forma:

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Al aplicar (11) a un vector $\mathbf{C}$, en realidad se está aplicando (10) al vector $\mathbf{C}$, lo que lleva a la forma (9) que involucra los vectores propios v_i :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}$$

Si se descompone $\mathbf{C}$ en términos de la base de vectores propios (digamos que $\mathbf{C} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$), entonces la solución toma la forma de una suma de vectores propios escalados por los factores $e^{\lambda_i t}$:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n$$

Considerando entonces para un sistema homogéneo (3) soluciones de la forma:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (12)$$

donde λ es un número real y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se obtiene una solución del sistema que es la **solución trivial** $\mathbf{X}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se comprueba ahora que (12) es solución del sistema (3) para algún número real λ y algún vector $\mathbf{v}$ no nulo.

Sea $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ es solución del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A}(e^{\lambda t} \mathbf{v}), \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{v}, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Por tanto, para que $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \neq 0$ sea solución del sistema diferencial (3) es condición necesaria y suficiente que λ sea valor propio, también llamado, autovalor o eigenvalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v} \neq 0$ un vector propio, también llamado como autovector o eigenvector.

Nota 1: Cuando se calculan los autovalores y autovectores de la matriz $\mathbf{A}$, se tendrán soluciones del sistema diferencial (3). Sin embargo, no se debe olvidar que se necesitan obtener n soluciones linealmente independientes.

Considerando que se han calculado ya los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$, entonces, se encuentran dos casos:

a) **Matriz Diagonalizable:** La matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable si posee n autovectores $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ linealmente independientes, cada uno asociados a los n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente (los n autovalores no han de ser distintos), es decir, la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. Esto significa que la matriz de autovectores V (donde cada columna es un autovector de $\mathbf{A}$) es invertible, y por lo tanto, $\mathbf{A}$ puede expresarse como $\mathbf{A} = V D V^{-1}$, donde D es una matriz diagonal que contiene los autovalores de $\mathbf{A}$.

b) **Matriz No Diagonalizable:** Si la matriz $\mathbf{A}$ sólo tiene k autovectores linealmente independientes, con $(k < n)$, no es posible formar una matriz de autovectores invertible que abarque todo el espacio R^n o C^n . En este caso, $\mathbf{A}$ no es diagonalizable. Esto puede ocurrir si algunos autovalores tienen multiplicidad algebraica mayor que su multiplicidad geométrica, lo que implica que no hay suficientes autovectores independientes para cada autovalor repetido.

Analizando los dos casos:

Caso a):

En esta situación se cuentan con n soluciones del sistema (3) que son:

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^2, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n$$

y que además son linealmente independientes, ya que al evaluarlas en el punto $t = 0$ los vectores obtenidos son linealmente independientes. Por tanto, en este caso, toda solución del sistema (3) se puede expresar en la forma

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n \quad (13)$$

donde $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

Un caso en el que se puede asegurar que la matriz $\mathbf{A}$ contará con n autovectores linealmente independientes se produce cuando los n autovalores de $\mathbf{A}$ son distintos, ya que, los autovectores asociados a autovalores diferentes son siempre linealmente independientes.

Debe observarse que cuando algún autovalor λ de $\mathbf{A}$ sea complejo (no real), entonces los autovectores $\mathbf{v}$ asociados son también complejos. Por tanto, la solución $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ es compleja. Si interesa expresar las soluciones en el campo real, bastará saber que las partes reales e imaginarias de una solución compleja del sistema también son soluciones. En efecto, si $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t) + i\mathbf{Z}(t)$ es solución del sistema (3), entonces:

$$\mathbf{Y}'(t) + i\mathbf{Z}'(t) = \mathbf{A} (\mathbf{Y}(t) + i\mathbf{Z}(t)) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{A} + \mathbf{Z}(t) i\mathbf{A}$$

por lo que igualando partes reales e imaginarias se obtiene:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{A} \\ \mathbf{Z}'(t) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{A} \end{cases}$$

de modo que $\mathbf{Y}(t)$ y $\mathbf{Z}(t)$ son soluciones reales del sistema.

Por tanto, si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ con un autovector asociado $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$, entonces descomponiendo la solución (12) se tiene:

$$e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{(\alpha+i\beta)t} (\mathbf{u} + i\mathbf{w}) = e^{i\beta t} e^{\alpha t} (\mathbf{u} + i\mathbf{w})$$

Usando la identidad de Euler tenemos:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (\mathbf{u} + i\mathbf{w}) \\ &= e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t) + i e^{\alpha t} (\mathbf{w} \cos \beta t + \mathbf{u} \sin \beta t) \end{aligned} \quad (14)$$

Obteniendo así la parte real e imaginaria:

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t), \quad \mathbf{Z}(t) = e^{\alpha t} (\mathbf{w} \cos \beta t + \mathbf{u} \sin \beta t)$$

Estas dos son soluciones reales linealmente independientes del sistema homogéneo (3), ya que evaluándolas en $t = 0$ se obtienen los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que son linealmente independientes.

Entonces la solución general del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X}$ es

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{Y}(t) + c_2 \mathbf{Z}(t) \quad (15)$$

por tanto, las soluciones linealmente independientes son:

$$\mathbf{X}_1(t) = c_1 e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t), \quad \mathbf{X}_2(t) = c_2 e^{\alpha t} (\mathbf{w} \cos \beta t + \mathbf{u} \sin \beta t)$$

Por propiedades la expresión $k_1 \mathbf{u} \cos \beta t + k_2 \mathbf{w} \sin \beta t$, donde k_1 y k_2 son constantes, se puede expresar en la forma $R \cos(\beta t - \delta)$ para una elección adecuada de constantes R y δ . Entonces la solución general (15) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R_1 \cos(\beta t - \delta_1) \\ R_2 \cos(\beta t - \delta_2) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Para alguna elección de constantes $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, \delta_1$ y δ_2 .

Nótese que si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es autovalor de $\mathbf{A}$ con autovector asociado $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u} - i\mathbf{w}$ es también autovector de $\mathbf{A}$ asociado al autovalor $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. De esta

forma, las dos soluciones complejas dan lugar únicamente a dos soluciones reales linealmente independientes. Esto se debe a que la parte real de una solución compleja no es afectada por el signo de la parte imaginaria del autovalor, y lo mismo se aplica a la parte imaginaria.

Caso b):

Esta situación se presenta cuando la matriz A de orden n no es diagonalizable, es decir, existe algún autovalor repetido cuya multiplicidad algebraica no coincide con su multiplicidad geométrica. En este caso, los k autovectores linealmente independientes determinarán k soluciones linealmente independientes, pero aún faltan otras $n - k$ soluciones. Para determinar las $n - k$ soluciones que formen con las anteriores un sistema fundamental de soluciones que se tendrán en cuenta en el siguiente resultado:

Si λ es un autovalor de multiplicidad algebraica m y multiplicidad geométrica 1 siendo un autovector asociado $\mathbf{v}^1$, entonces, existen m soluciones linealmente independientes de la forma:

$$\mathbf{X}^1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}^1$$

$$\mathbf{X}^2(t) = e^{\lambda t} (\mathbf{v}^{12} + t(\mathbf{A} - \lambda I) \mathbf{v}^{12})$$

donde $\mathbf{v}^{12}$ es un vector que verifica que $(\mathbf{A} - \lambda I) \mathbf{v}^{12} \neq 0$ y $(\mathbf{A} - \lambda I)^2 \mathbf{v}^{12} = 0$

$$\mathbf{X}^3(t) = e^{\lambda t} (\mathbf{v}^{13} + t(\mathbf{A} - \lambda I) \mathbf{v}^{13} + \frac{t^2}{2!} ((\mathbf{A} - \lambda I)^2) \mathbf{v}^{13})$$

donde $\mathbf{v}^{13}$ es un vector que verifica que $((\mathbf{A} - \lambda I)^2) \mathbf{v}^{13} = 0$ y $((\mathbf{A} - \lambda I)^3) \mathbf{v}^{13} = 0$

$\vdots$

$$\mathbf{X}^m(t) = e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}^{1m} + t(\mathbf{A} - \lambda I) \mathbf{v}^{1m} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} ((\mathbf{A} - \lambda I)^{m-1}) \mathbf{v}^{1m} \right) = 0$$

donde $\mathbf{v}^{1m}$ verifica que $((\mathbf{A} - \lambda I)^{m-1}) \mathbf{v}^{1m} = 0$ y $((\mathbf{A} - \lambda I)^m) \mathbf{v}^{1m} = 0$.

Se puede comprobar que efectivamente $\mathbf{X}^1(t), \mathbf{X}^2(t), \dots, \mathbf{X}^m(t)$ son soluciones del sistema homogéneo substituyendo estas expresiones en (3).

Nota 2: Este proceso se continúa hasta encontrar para cada autovalor repetido tantos vectores linealmente independientes como indique su multiplicidad algebraica.

Nota 3: Para los sistemas E.D.O. lineales homogéneos con coeficientes variables, no se cuenta con un método general para determinar n soluciones linealmente independientes.

Los vectores $\mathbf{v}^{12}, \mathbf{v}^{13}, \dots, \mathbf{v}^{1m}$ se denominan autovectores generalizados asociados al autovalor λ y la existencia de estos autovectores generalizados está garantizada por el siguiente teorema.

1.1.4.2. Teorema 6 (Multiplicidad Algebraica y Vectores Generalizados)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada $n \times n$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, donde $k < n$. Cada autovalor λ_i , tiene asociada una multiplicidad algebraica m_i . Entonces para cada λ_i donde $1 \leq i \leq k$, existen m_i vectores $\mathbf{v}$ linealmente independientes que satisfacen la ecuación:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^r \mathbf{v} = 0$$

para algún entero positivo r . Estos vectores son conocidos como vectores generalizados asociados a λ_i .

A continuación, se describirán las soluciones para un sistema E.D.O. lineal no homogéneo.

1.1.5. Sistemas de E.D.O. lineales de primer orden no homogéneos

Para un sistema (1) se considera el siguiente teorema que da información acerca de sus soluciones.

1.1.5.1. Teorema 7 (Soluciones en sistemas no homogéneos)

Si en el sistema no homogéneo (1), tanto $A(t)$ como $B(t)$ son funciones continuas sobre un intervalo abierto I y $t_0 \in I$, se verifica lo siguiente:

1. Si dos funciones $X_i(t)$ y $Y_i(t)$ son soluciones y cumplen que $X_i(t_0) \neq Y_i(t_0)$, entonces son distintas en todo el intervalo I .

2. Si $X_g(t)$ es una solución general del sistema homogéneo (2) y $X_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo(1), entonces cualquier solución $X(t)$ del sistema no homogéneo puede expresarse como:

$$X(t) = X_g(t) + X_p(t) \quad (17)$$

Y esta combinación de soluciones constituye la solución general del sistema no homogéneo.

De acuerdo con el anterior teorema, para resolver el sistema (1), es suficiente determinar la solución general $X_g(t)$ del sistema homogéneo (2) y luego hallar una solución particular $X_p(t)$ del sistema completo. Como se muestra a continuación:

Se supone que $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo (2), y que por tanto su solución general $X_g(t)$ puede expresarse como (7) de la forma:

$$X_g(t) = M(t) \cdot C \quad (18)$$

Si ahora sustituimos el vector constante C por una función vectorial $C(t)$, es decir:

$$X_p(t) = M(t) \cdot C(t)$$

es posible determinar esta función para que sea solución del sistema completo (1). En efecto:

$$X_p(t) = M(t) \cdot C(t) \text{ es solución en } I \text{ de } X' = A(t)X + B(t)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M}'(t) \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{C}'(t) = \mathbf{A}(t) (\mathbf{M}(t) \mathbf{C}(t)) + \mathbf{B}(t), \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{C}'(t) = (\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{M}(t) - \mathbf{M}'(t)) \mathbf{C}(t) + \mathbf{B}(t), \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{C}'(t) = \mathbf{B}(t), \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}'(t) = \mathbf{M}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}(t), \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}(t) = \int \mathbf{M}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}(t) dt$$

Se concluye, por tanto, que una solución particular del sistema completo es

$$\mathbf{X}_p(t) = \mathbf{M}(t) \cdot \int \mathbf{M}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}(t) dt \quad (19)$$

Sustituyendo (18) y (19) en (17) se expresan las soluciones del sistema no homogéneo como:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{C} + \mathbf{M}(t) \cdot \int \mathbf{M}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}(t) dt$$

donde, $\mathbf{M}(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo, y $\mathbf{C}$ es una columna de constantes arbitrarias.

1.2. Estabilidad en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Ahora, se propone adoptar una perspectiva diferente hacia el estudio de las ecuaciones y sistemas diferenciales, enfocándose en la comprensión cualitativa del comportamiento de sus soluciones.

Este cambio de enfoque es por tres razones: primero, numerosas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse analíticamente y, segundo, aunque en ocasiones es posible calcular sus soluciones, no siempre es necesario determinarlas de manera explícita. Tercero, el interés radica en comprender el comportamiento de las soluciones más que en calcularlas con precisión,

especialmente cuando obtener una solución exacta o en forma algebraica resulta excesivamente complejo o innecesario para los objetivos del estudio en cuestión.

1.2.1. Sistemas Autónomos.

A un sistema de E.D.O. de primer orden se le llama **autónomo** cuando puede escribirse en la forma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (20)$$

Se observa que la variable independiente t no aparece en forma explícita en el segundo miembro de cada ecuación diferencial.

Si $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ expresan los vectores columna respectivos:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

entonces el sistema autónomo (20) puede escribirse en la compacta forma de vector columna:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (21)$$

Nota 1: Cuando la variable t se interpreta como tiempo, podemos referirnos al sistema autónomo (20) como un **sistema dinámico** y a una solución $\mathbf{X}(t)$ como el **estado del sistema** o la **respuesta del sistema** en el tiempo t .

El sistema lineal homogéneo (2) y en particular cuando $\mathbf{A}$ es una matriz 2×2 con coeficientes constantes es un caso especial importante porque se pueden relacionar con E.D.O. lineales de segundo orden. Siendo así de la forma:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

que si optamos por la notación:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (22)$$

el sistema (22) se considera entonces como un **sistema plano**.

1.2.2. Sistemas Autónomos Planos.

Cuando $n = 2$, el sistema (20) se denomina **sistema autónomo plano** y se escribe como:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \quad (23)$$

Nota 1: Si se consideran los vectores columna $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ también se puede expresar como (21) que sería su notación vectorial.

Donde se supone que F y G son funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en todo el plano. En este caso, las funciones F y G se dicen de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ ($F, G \in \mathbb{R}^2$). Estas condiciones sobre F y G garantizan la existencia y unicidad de solución, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = G(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y condiciones iniciales $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Nota 2: Las variables dependientes $x(t)$ e $y(t)$ se denominan en ocasiones **variables de estado del sistema**. Recordemos que por (21) su notación vectorial es $\mathbf{X}(t)$ denominado **vector solución**.

Nota 3: El plano $\mathbb{R}^2$, es el **espacio de fases** o en este caso **plano de fase**.

Cada solución del sistema (23) es un par de funciones $x(t)$ e $y(t)$ que definen una curva $C \equiv [x(t), y(t)]$ en el plano de fases. Obsérvese que cada punto de la curva C se determina el estado del sistema en un instante t correspondiente a unas condiciones iniciales determinadas, que se suelen llamar **trayectorias** u **órbitas**. En cada punto (x, y) de una órbita, el vector $(F(x, y), G(x, y))$ es un vector tangente a dicha órbita, por eso el conjunto de vectores $(F(x, y), G(x, y))$ se llama **campo de direcciones** del sistema.

Debe observarse que si una solución $\mathbf{X}(t)$ permanece constante, es decir $x(t) = x_0$ y $y(t) = y_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces, $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dt} = 0$. Esto hace que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$, y por tanto (x_0, y_0) es un punto crítico o equilibrio del sistema.

1.2.2.1. Propiedades cualitativas de las órbitas.

Las propiedades cualitativas de las órbitas nos permiten obtener información sobre el comportamiento de las soluciones. Estas son:

- **Infinitud de Soluciones en Trayectorias:** Cada trayectoria en el plano de fases encapsula una infinidad de soluciones del sistema autónomo. Si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema plano (23), entonces, para cualquier constante c en $\mathbb{R}$, $(x(t + c), y(t + c))$ también representa otra solución válida del sistema plano (23).

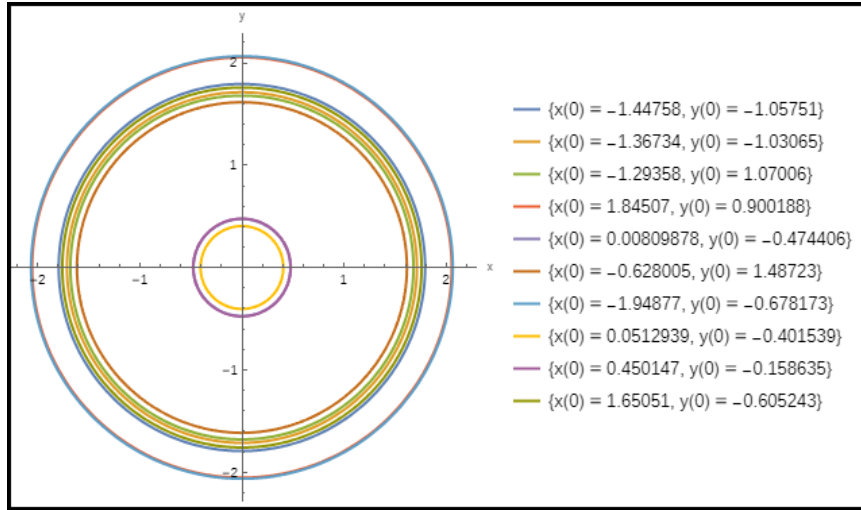


Figura 1.- Ejemplo gráfico de esta propiedad con múltiples soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = -y$,

$$\frac{dy}{dt} = x.$$

- **Exclusividad de Trayectorias:** Las trayectorias en el plano de fases son exclusivas y no se intersecan. Si $(x(t), y(t))$ y $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ son soluciones del sistema plano (23), entonces, para cada c en R , $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (x(t + c), y(t + c))$ es otra solución del sistema plano (23).

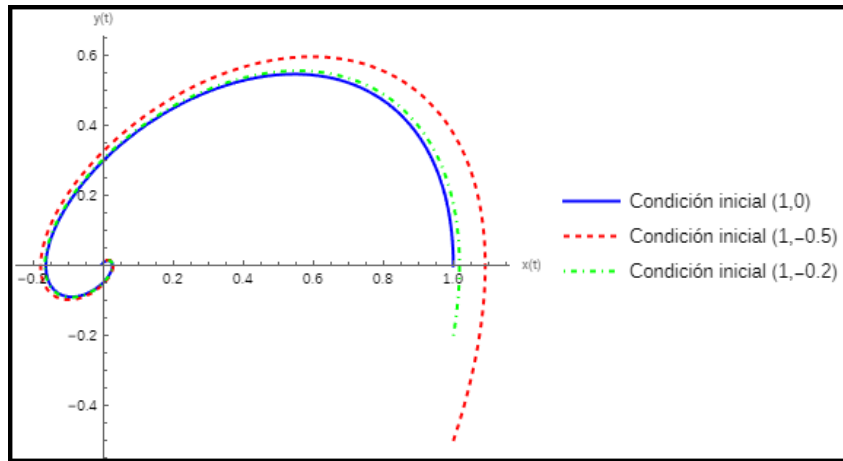


Figura 2.- Ejemplo gráfico de esta propiedad con tres soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = -y$,

$$\frac{dy}{dt} = x - y.$$

- **Carácter Periódico de Trayectorias Cerradas:** Las trayectorias que forman bucles cerrados en el plano de fases corresponden a soluciones periódicas. Si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (23) que en dos instantes t_0 y $t_0 + T$ toman el mismo valor, entonces $(x(t), y(t)) = (x(t + T), y(t + T))$ para todo t , es decir $(x(t), y(t))$ es periódica.

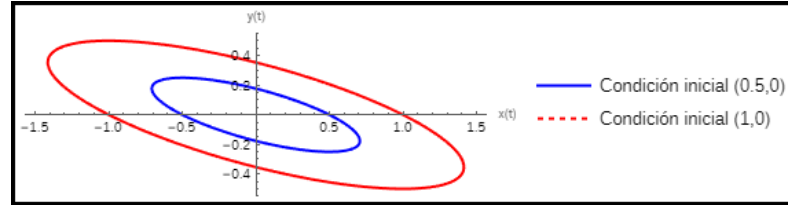


Figura 3.- Ejemplo gráfico de esta propiedad con dos soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = 2x + 8y$,

$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y.$$

Muchas veces es posible obtener las trayectorias descritas por las soluciones de un sistema autónomo (23), sin necesidad de obtener explícitamente dichas soluciones.

Se supone que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (23) que no permanece constante en el tiempo (esto es, no se trata de una solución de equilibrio o punto crítico), y la derivada $\frac{dx}{dt}$ es distinta de cero en $t = t_1$, entonces en un entorno del punto $x_1 = x(t_1)$ se verifica que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

Por tanto, la trayectoria de esa solución verifica la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

Caso de ser la derivada $\frac{dx}{dt}$ nula para todo t , se tendrá que verificar que $\frac{dy}{dt}$ no siempre sea nula, por lo que la trayectoria de esa solución verifica, análogamente, la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

En cualquier caso, las trayectorias se podrán determinar resolviendo una ecuación diferencial de primer orden.

1.2.3. Estabilidad de Puntos Críticos.

Se supone que los puntos críticos de los sistemas plano (23) están aislados, esto es, existe un entorno⁴ del punto crítico donde no hay otro punto crítico. Además, supondremos que el punto crítico aislado a estudiar es el (0,0), lo cual no supone ningún tipo de restricción pues de no ser así bastará hacer una transición del sistema de coordenadas:

Si (x_0, y_0) es un punto de equilibrio del sistema plano (23), el cambio de variable sería:

$$X = x - x_0, Y = y - y_0$$

Transformando el sistema plano (23) en:

$$\begin{cases} x' = F(X + x_0, Y - y_0) \\ y' = G(X + x_0, Y - y_0) \end{cases} \quad (24)$$

y (0,0) es un punto de equilibrio del sistema (24).

1.2.3.1. Definición 3 (Tipos de estabilidad de puntos críticos)

I. Se dice que el punto crítico (0,0) del sistema plano (23) es **estable** si para todo número $R > 0$, existe algún $r > 0, r \leq R$, tal que cada trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en algún momento $t = t_0$, permanece dentro del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ para

⁴ Topológicamente, el término “entorno” se refiere a una bola, que es el conjunto de puntos que están a una distancia igual o menor que un radio dado respecto a otro punto.

todos los $t > t_0$: esto es, si una trayectoria está cerca del punto de equilibrio, se mantendrá cerca a lo largo del tiempo.

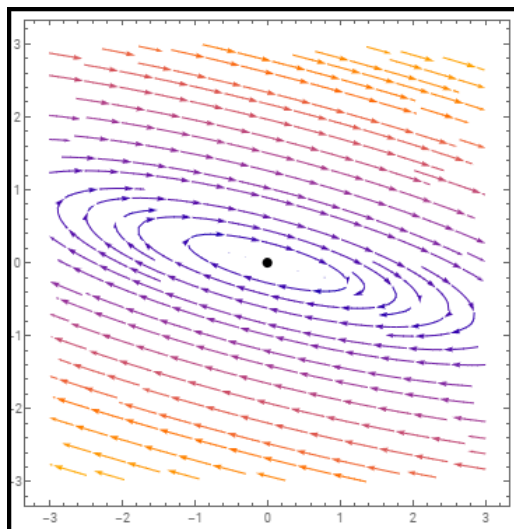


Figura 4.- Ejemplo de punto de equilibrio estable en $(0,0)$ en el sistema $\frac{dx}{dt} = 2x + 8y$,

$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y.$$

II. Se dice que el punto crítico $(0,0)$ del sistema plano (23) es **asintóticamente estable**, cuando es estable y existe algún número $r_0 > 0$, tal que toda trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en algún momento $t = t_0$, se aproxime al origen cuando $t \rightarrow +\infty$. Esto se entiende como: Si $C \equiv (x(t), y(t))$ es una trayectoria, deberá verificarse que $x(t) \rightarrow 0$, e $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$; es decir, las trayectorias cercanas no sólo se mantienen cerca, sino que se aproximan al punto de equilibrio a lo largo del tiempo.

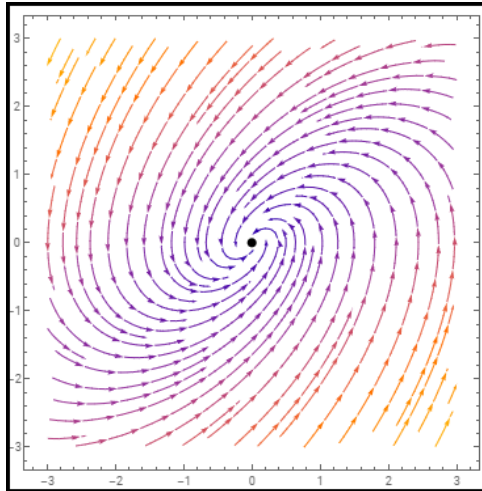


Figura 5.- Ejemplo de punto de equilibrio asintóticamente estable en (0,0) del sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$$

III. Se dice que el punto crítico (0,0) del sistema plano (23) es **inestable** cuando no es estable: las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejan de este punto a lo largo del tiempo.

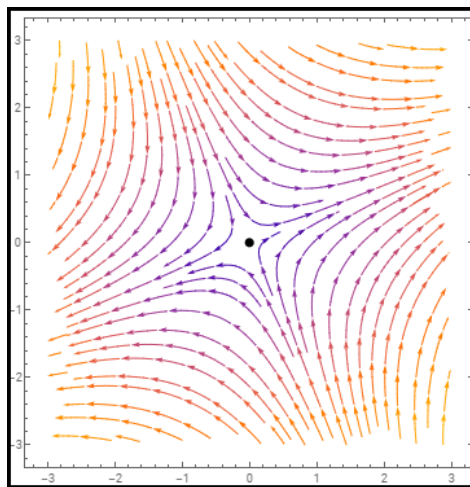


Figura 6.- Ejemplo de punto de equilibrio inestable en (0,0) en el sistema $\frac{dx}{dt} = x + y,$

$$\frac{dy}{dt} = x - y.$$

1.2.4. Clasificación de Los Puntos de Equilibrio.

Se verifica seguidamente que, en el caso de los sistemas planos (23), la naturaleza y estabilidad del punto crítico queda caracterizada por los autovalores de la matriz del sistema. Se considera un sistema plano (22):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

para el que (0,0) es su único punto crítico. Esto equivale a que la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (25)$$

del sistema tenga determinante no nulo, y por ello que los autovalores λ_1, λ_2 sean diferentes de cero. En este punto, es pertinente hacer un paréntesis para revisar los conceptos de los valores propios y vectores propios:

1.2.4.1. Vector Propio y Valor propio

Teniendo en cuenta la matriz (25) donde, recordemos, los coeficientes son constantes (3), Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ no nulo se dice que es un autovector de la matriz $\mathbf{A}$ si existe un número real o complejo λ tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (26)$$

el número λ se denomina autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ asociado al vector $\mathbf{v}$.

De (26), haciendo uso de propiedades del algebra matricial, se tiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0$$

reemplazando $\mathbf{v} = I\mathbf{v}$:

$$A\mathbf{v} - \lambda(I\mathbf{v}) = 0$$

si se hace $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ entonces quedaría un sistema como:

$$\begin{cases} (a - \lambda I)v_1 + bv_2 = 0 \\ cv_1 + (d - \lambda I)v_2 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \quad (28)$$

Donde (27) es un sistema homogéneo de dos ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas, en cual no es posible la solución trivial $v_1 = 0, v_2 = 0$ dado que $\mathbf{v}$ debe ser un vector no nulo. Sin embargo, del algebra lineal se sabe que (27) tiene una solución no trivial si y solo si:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (29)$$

A esta expresión se le denomina **ecuación característica** del sistema.

Al desarrollar la ecuación característica (29), se tiene como resultado un polinomio en de grado dos, llamado **polinomio característico** de **A**. Las raíces de este polinomio son a lo que se denotan como λ , que son los **autovalores** de **A**.

Si $\mathbf{v}$ es un autovector correspondiente al autovalor, entonces cualquier múltiplo escalar $c\mathbf{v}$ tambien es un autovector para λ , ósea:

$$A(c\mathbf{v}) = \lambda(c\mathbf{v})$$

De esto se dice que, dado un autovector $\mathbf{v}$ para el autovalor λ , la línea entera de vectores que pasa por $\mathbf{v}$ y el origen tambien son autovectores para λ y se denominan **línea de autovectores** de λ .

Nota 1: A partir de la ecuación (29) se calculan los autovectores correspondientes al autovalor.

Nota 2: Contando multiplicidades algebraicas, toda matriz de tamaño $n \times n$ tiene exactamente n valores propios, reales o complejos. En este caso, los autovalores de la matriz **A** son dos.

1.2.4.2. Clasificación de los Autovalores

Si se resuelve (29) se tiene:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

Reorganizando y considerando la traza $\text{tr} \mathbf{A} = a + d$ y el determinante $\det \mathbf{A} = ad - bc$, el polinomio característico toma la forma:

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$$

Equivalente a:

$$\lambda^2 - \lambda(\text{tr} \mathbf{A}) + \det \mathbf{A} = 0$$

La solución para λ surge de la aplicación de la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{\text{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A}}}{2}$$

Con discriminante

$$\Delta = (\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A}. \tag{30}$$

Dependiendo del signo (30) se conoce la naturaleza del autovalor, así:

- Si $\Delta > 0$ Los dos autovalores tendrían dos raíces reales distintas ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) se denominan **Autovalores Reales Distintos**.

Es decir, genera las posibilidades:

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

2. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

3. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

- Si $\Delta < 0$ los dos autovalores tendrían dos raíces complejas conjugadas, se

denominan **Autovalores Reales Complejos**.

Es decir, genera las posibilidades:

1. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha < 0$.

2. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha = 0$.

3. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha > 0$.

- Si $\Delta = 0$ Los dos autovalores tendrían una raíz real de multiplicidad dos, se

denominan **Autovalores Reales Iguales**.

Es decir, genera las posibilidades:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

Esta información se puede resumir en la siguiente tabla:

Discriminante (Δ)	Tipos de Autovalores	Posibilidades
$\Delta > 0$	Autovalores Reales	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$.
$\Delta < 0$	Autovalores Complejos	$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha < 0$. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha = 0$.

		$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha > 0$.
$\Delta = 0$	Autovalores Reales Iguales	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

Tabla 1.- Clasificación de autovalores según el discriminante.

En función del comportamiento de las trayectorias en relación con el punto crítico aislado (0,0), el punto crítico se denominará: nodo, punto de silla, centro, o foco. Esto se describirá más detalladamente a continuación.

Para analizar cada uno de estos casos se debe tener en cuenta la solución general del sistema con coeficientes constantes (22), utilizando la solución de forma general (13) podemos decir que la solución para el sistema (22) es:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (31)$$

Aquí, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores propios asociados a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente, y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales del sistema.

1.2.4.2.1. Valores Propios Reales y Distintos.

1.2.4.2.1.1 Caso 1. Valores Propios Negativos: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ los vectores propios de $\mathbf{A}$ con valores propios λ_1 y λ_2 , respectivamente. La solución general está dada por (31), sin embargo, es conveniente hacer un análisis por separado de las soluciones linealmente independientes:

$$\mathbf{X}_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \quad (32)$$

$$\mathbf{X}_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (33)$$

Se traza, en el plano fase, cuatro semirrectas, dos de ellas l_1 y l_2 , siendo paralelas a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente, mientras que las semirrectas l'_1 y l'_2 , son paralelas a $-\mathbf{v}_1$ y $-\mathbf{v}_2$, respectivamente.

La solución (32) siempre es proporcional a $\mathbf{v}_1$, y la constante de proporcionalidad $c_1 e^{\lambda_1 t}$ varía de $\pm\infty$ a cero, dependiendo de si c_1 es positiva o negativa. Por lo tanto, la trayectoria de (32) es la semirrecta l_1 para $c_1 > 0$, y la semirrecta l'_1 para $c_1 < 0$. De manera similar, la trayectoria de la solución (33) es la semirrecta l_2 para $c_2 > 0$, y a la semirrecta l'_2 para $c_2 < 0$.

Se puede notar que toda solución (31) tiende al punto (0,0) cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, toda trayectoria del sistema plano (23) tiende al origen cuando t tiende a infinito.

Se observa que $e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ es muy pequeño en comparación con $e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ cuando t es grande (es de recordar que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$). Por lo tanto, para $c_1 \neq 0$, (31) se aproxima cada vez más a $c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ conforme $t \rightarrow \infty$, esto implica que la tangente a la trayectoria de (31) tiende a l_1 si c_1 es positiva y a l'_1 si c_1 es negativa.

Con todas estas características el plano de fase del sistema plano (23) para el caso en el que los valores propios son negativos, tiene la forma que se presenta en la siguiente figura:

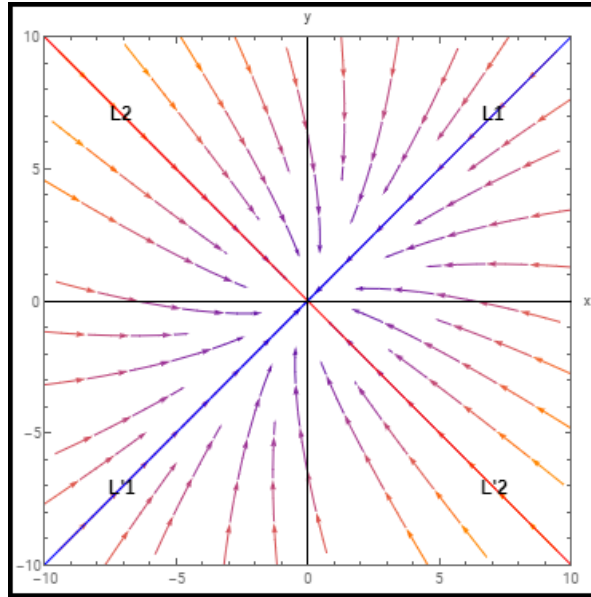


Figura 7.- Ejemplo de plano de fase para valores propios reales negativos. Sistema

$$\frac{dx}{dt} = -5x + y, \frac{dy}{dt} = x - 5y \text{ con } \lambda_1 = -6 \text{ y } \lambda_2 = -4.$$

Se observa que todas las trayectorias, con excepción de una sola recta, tienden al origen. Por lo tanto, se dice que el punto de equilibrio $X_0 = \langle 0,0 \rangle$ del sistema (23) es un **nodo atractor** y su estabilidad es **asintóticamente estable**.

Nota 1: Aunque la trayectoria de cualquier solución (31) de la ecuación (22) tiende al origen cuando t tiende al infinito, el origen mismo no se encuentra en la trayectoria de ninguna solución no trivial (31).

1.2.4.2.1.2 Caso 2. Valores propios positivos: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

En este caso, el procedimiento de análisis es esencialmente idéntico al realizado en el caso anterior, de modo que el plano fase es exactamente el mismo, excepto que el sentido de las trayectorias es el opuesto. El plano fase se muestra en la siguiente figura:

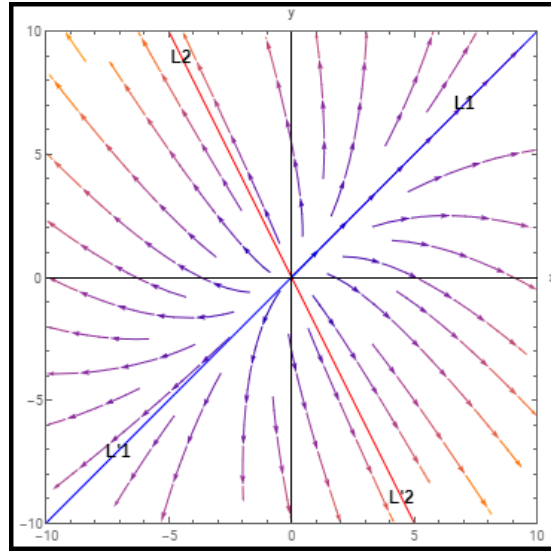


Figura 8.- Ejemplo de plano de fase para valores propios reales positivos. Sistema

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y, \frac{dy}{dt} = -2x + 5y \text{ con } \lambda_1 = 3 \text{ y } \lambda_2 = 6.$$

Como las soluciones se alejan del punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = \langle 0,0 \rangle$ de la ecuación (23), se dice que el punto es un **nodo repulsor** y es **inestable**.

1.2.4.2.1.3 Caso 3. Valores propios con signos opuestos: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Al igual que antes, se dibujará en el plano fase cuatro semirrectas: l_1 y l_2 , paralelas a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y l'_1 y l'_2 , paralelas a $-\mathbf{v}_1$ y $-\mathbf{v}_2$.

Se consideran nuevamente las soluciones linealmente independientes por separado; en el caso de la solución (32) la trayectoria es l_1 para $c_1 > 0$ y l'_1 para $c_1 < 0$. Mientras que la trayectoria de la solución (33) la trayectoria es l_2 para $c_2 > 0$ y l'_2 para $c_2 < 0$

Se observa que una de las soluciones de la forma $c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ se aproxima al origen cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que la solución $c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$, donde $c_2 \neq 0$ es no acotada a medida que $t \rightarrow \infty$.

Además, se observa $e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ es muy pequeño en comparación con $e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ para valores grandes de t . Por lo tanto, solución general (31) con $c_2 \neq 0$ es no acotada conforme t tiende a

infinito y su trayectoria tiende a l_2 o l'_2 . De manera similar, $e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ es muy pequeño comparado con $e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ cuando t crece mucho con signo negativo. Por lo tanto, la trayectoria de cualquier solución general (31) con $c_1 \neq 0$ tiende hacia l_1 o l'_1 conforme t se aproxime a menos infinito.

Por lo tanto, en el caso en el que los valores propios tienen signos opuestos, el plano fase, con las características mencionadas, tiene la siguiente forma:

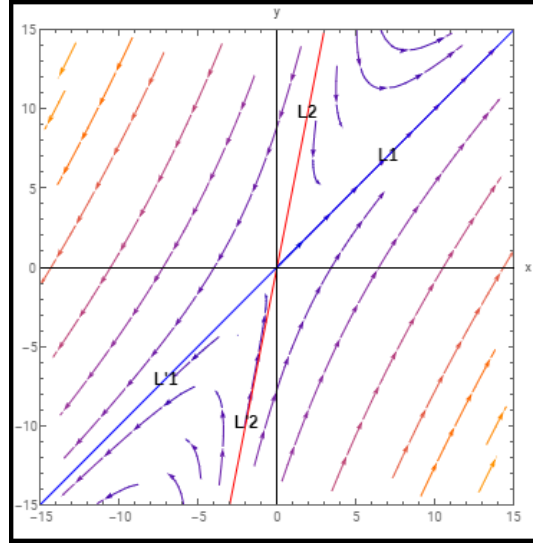


Figura 9.- Ejemplo de plano de fase para valores propios reales con signos opuestos. Sistema

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y, \frac{dy}{dt} = 5x - 3y \text{ con } \lambda_1 = -2 \text{ y } \lambda_2 = 2.$$

Es posible observar que el plano fase se asemeja a una silla de montar cerca del origen, por esta razón se dice que el punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = (0,0)$ del sistema (23), es un **punto silla** y es **inestable**.

1.2.4.2.2. Valores propios imaginarios.

Es necesario recordar cuando se analizó la matriz $\mathbf{A}$ en el caso a: Se tienen n vectores propios linealmente independientes. Se había definido la solución (16) y también $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es valor propio de $\mathbf{A}$ con vector propio asociado $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u} - i\mathbf{w}$ es también vector

propio de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, donde α y β son números reales. El comportamiento de las soluciones se clasifica en:

1.2.4.2.2.1. Caso 4. Valores propios imaginarios con parte real nula:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \text{ y } \lambda_2 = \alpha - i\beta \text{ con } \alpha = 0$$

En este caso se dice que los valores propios son imaginarios puros ya que no tienen parte real. De la solución (16) vemos que si $\alpha = 0$, entonces la expresión se reduce a:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\beta t - \delta_1) \\ R_2 \cos(\beta t - \delta_2) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ son:

$$x(t) = R_1 \cos(\beta t - \delta_1), \quad y(t) = R_2 \cos(\beta t - \delta_2)$$

Estas funciones son periódicas en el tiempo, con periodo $\frac{2\pi}{\beta}$. Como $|\cos(\beta t - \delta_1)| \leq 1$ y $|\cos(\beta t - \delta_2)| \leq 1$, entonces la función $x(t)$ varia entre $-R_1$ y $+R_1$, mientras que $y(t)$ varia entre $-R_2$ y $+R_2$. Por tanto, la trayectoria de cualquier solución (34) es una curva cerrada que rodea al origen $x = y = 0$, es por ello que se dice que el punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = (0,0)$ es un **centro** y es **estable**.

A continuación, se muestra el plano fase:

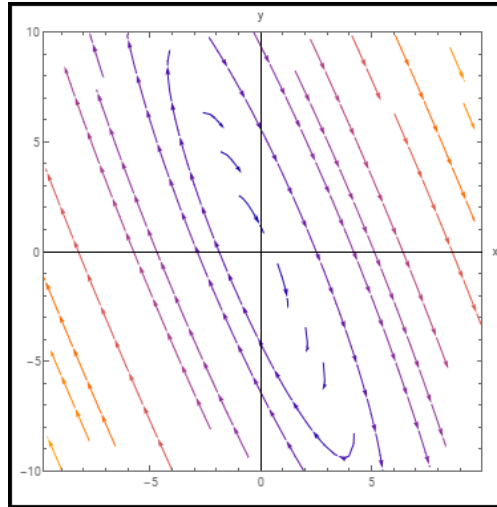


Figura 10.- Ejemplo de plano de fase para valores propios imaginarios con parte real nula.

$$\text{Sistema } \frac{dx}{dt} = 2x + y, \frac{dy}{dt} = -5x - 2y \text{ con } \lambda_1 = i \text{ y } \lambda_2 = -i.$$

La dirección de las trayectorias se determina a partir del sistema (23). Se busca el signo de y' cuando $y = 0$. Si y' es mayor que cero para $y = 0$ y $x > 0$, entonces todas las trayectorias se mueven en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si y' es menor que cero para $y = 0$ y $x > 0$, entonces todas las trayectorias se mueven en el sentido de las manecillas del reloj.

1.2.4.2.2. Caso 5. Valores propios imaginarios con parte real negativa:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \text{ y } \lambda_2 = \alpha - i\beta \text{ con } \alpha < 0$$

En este las soluciones son de la forma (16) o bien:

$$x(t) = e^{\alpha t} R_1 \cos(\beta t - \delta_1), \quad y(t) = e^{\alpha t} R_2 \cos(\beta t - \delta_2) \quad (35)$$

Si $t = 0$ se obtiene que:

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} R_1 \cos(-\delta_1) \\ R_2 \cos(-\delta_2) \end{pmatrix}$$

Se sabe que el periodo es $\frac{2\pi}{\beta}$, se nota que si $t = \frac{2\pi}{\beta}$ entonces:

$$\mathbf{X}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = e^{\frac{\alpha 2\pi}{\beta}} \begin{pmatrix} R_1 \cos(2\pi - \delta_1) \\ R_2 \cos(2\pi - \delta_2) \end{pmatrix} = e^{\frac{\alpha 2\pi}{\beta}} \begin{pmatrix} R_1 \cos(-\delta_1) \\ R_2 \cos(-\delta_2) \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$\mathbf{X}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = e^{\frac{\alpha 2\pi}{\beta}} \mathbf{X}(0)$$

Como

$$\mathbf{X}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) < \mathbf{X}(0)$$

Es decir,

$$x\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) < x(0) \text{ y } y\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) < y(0)$$

Entonces $\mathbf{X}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)$ está más cerca del origen que $\mathbf{X}(0)$. Esto significa que, para $\alpha < 0$ el factor $e^{\alpha t}$ sobre la solución (16) es el de cambiar las curvas cerradas del caso anterior en espirales que se aproximan hacia el origen.

El plano fase se muestra a continuación:

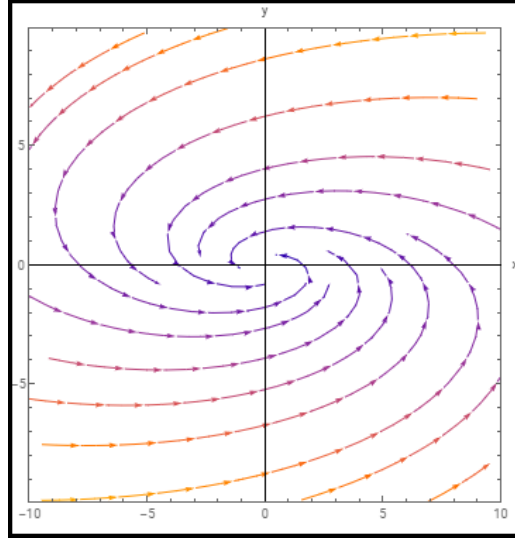


Figura 11.- Ejemplo de plano de fase para valores propios imaginarios con parte real negativa.

Sistema $\frac{dx}{dt} = -1x - 4y$ y $\frac{dy}{dt} = x - y$ con $\lambda_1 = -1 + 2i$ y $\lambda_2 = -1 - 2i$.

De forma similar al caso anterior, la dirección de las trayectorias se determina a partir del sistema (23). En este caso se dice que el punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = \langle 0,0 \rangle$ de (23) es un **foco estable**, o también se conoce como **espiral atractor**. La estabilidad de este punto de equilibrio es **asintóticamente estable**.

1.2.4.2.2.3. Caso 6. Valores propios imaginarios con parte real positiva:

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha > 0$.

En este caso las soluciones nuevamente son de la forma (16) o bien (39). Sin embargo, debido a que para $\alpha > 0$ se puede probar que:

$$\mathbf{X}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) > \mathbf{X}(0)$$

es decir,

$$x\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) > x(0) \text{ y } y\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) > y(0)$$

Lo que significa que ahora $\mathbf{X}(0)$ está más cerca del origen que $\mathbf{X}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)$.

Por lo tanto, en este caso todas las soluciones de (23) describen espirales que se alejan del origen conforme $t \rightarrow \infty$, y se dice que el punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = (0,0)$ de (23) es un **foco inestable** o **espiral repulsor**. Es claro que el punto de equilibrio es **inestable**.

El plano fase se muestra a continuación

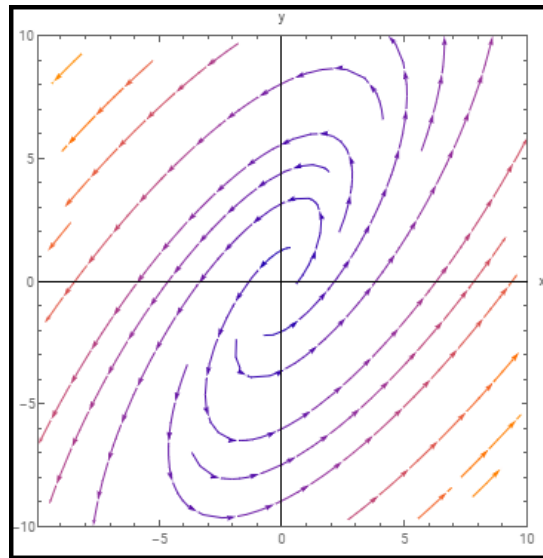


Figura 12.- Ejemplo de plano de fase para valores propios imaginarios con parte real positiva.

$$\text{Sistema } \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \text{ y } \frac{dy}{dt} = 4x - y \text{ con } \lambda_1 = 1 + 2i \text{ y } \lambda_2 = 1 - 2i.$$

1.2.4.2.3. Valores propios repetidos.

En este caso sólo se tiene k soluciones linealmente independientes, una por cada valor propio distinto, y faltarían encontrar $n - k$ soluciones para formar la solución general. Como este análisis se centra en un sistema compuesto por dos ecuaciones diferenciales. Este escenario simplifica la problemática discutida anteriormente, ya que, en ciertas circunstancias, es posible identificar dos vectores propios linealmente independientes correspondientes al mismo valor propio de la matriz $\mathbf{A}$. No obstante, existen casos en los que solo se puede determinar un único

vector propio vinculado a un solo valor propio λ . En estas situaciones, es necesario hallar un vector propio generalizado para completar la solución del sistema. Es importante destacar que cada caso influirá de manera significativa en el comportamiento del sistema, lo que será evidente al examinar el plano fase.

Antes de abarcar los casos se desea analizar lo siguiente, considerando la solución general de la forma (31), se sabe que los vectores pueden ser arbitrarios, así que es posible elegir los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la solución general del sistema (22) es:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tendría las funciones:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dado que $\lambda_1 = \lambda_2$, se observa que

$$\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$$

Es decir,

$$y(t) = Cx$$

Con C una constante. Esta función en el plano fase corresponde a infinitas rectas, una por cada posible valor de la constante C .

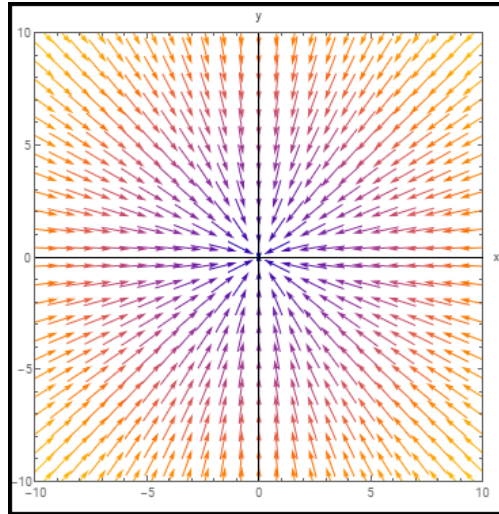


Figura 13.- Ejemplo de plano de fase de un sistema con vectores propios arbitrarios. Sistema

$$\frac{dx}{dt} = -5x, \frac{dy}{dt} = -5y$$

Este caso corresponde a una situación de las dos que pueden ocurrir. Aún falta determinar el sentido de las trayectorias en el plano fase, éste será determinado por el signo de los valores propios.

A continuación, se hará un análisis más detallado sobre los casos que se pueden presentar.

1.2.4.2.3.1. Caso 7. Valores propios repetidos negativos

1.2.4.2.3.1.1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ y dos vectores linealmente independientes.

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ del sistema (22) tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica dos con dos vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, es decir, que la multiplicidad geométrica del valor propio λ es dos.

En este caso la solución general (31) se puede expresar como:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \mathbf{v}_2 = e^{\lambda t} (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) \quad (36)$$

Se observa que el vector $e^{\lambda t}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)$ es paralelo al vector $(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)$ para toda t . Por lo tanto, la trayectoria de cualquier solución (31) es una semirrecta en el plano de fase.

Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, el conjunto de vectores $\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2\}$, para todas las elecciones de c_1 y c_2 cubren cualquier dirección en el plano de fases.

El plano fase con estas características es el siguiente.

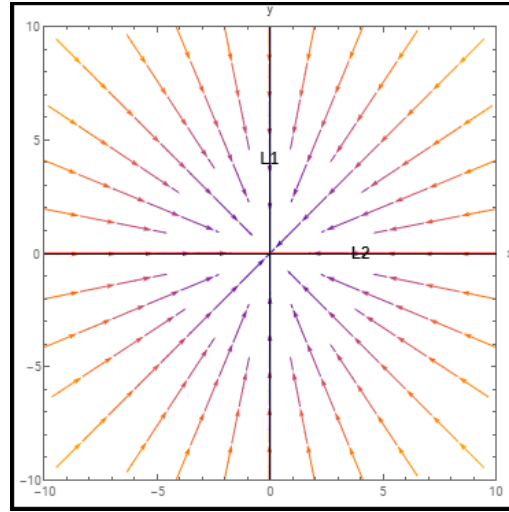


Figura 14.- Ejemplo de plano fase para valores propios negativos repetidos y dos vectores

propios linealmente independientes. Sistema $\frac{dx}{dt} = -5x$ y $\frac{dy}{dt} = -5y$ con $\lambda_1 = -5 = \lambda_2$.

El sentido de las trayectorias es hacia el origen debido a que si $t \rightarrow \infty$, entonces $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ ya que $\lambda < 0$. Se dice que el punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = (0,0)$ es un **atractor** y es **asintóticamente estable**.

1.2.4.2.3.1.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ y solo un vector linealmente independiente.

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ del sistema (22) tiene un solo vector propio linealmente independientes $\mathbf{K}$ con su valor propio λ . En este caso la solución se puede expresar como:

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$$

Para encontrar una segunda solución que sea linealmente independiente de $\mathbf{X}_1$ se busca un vector $\mathbf{v}_2$, tal que se cumpla de (28) simultáneamente:

$$(\mathbf{A} - \lambda I)^2 \mathbf{v}_2 = 0 \text{ y } (\mathbf{A} - \lambda I) \mathbf{v}_2 \neq 0$$

Es decir, $\mathbf{v}_2$ es un vector propio generalizado y se sabe que una segunda solución de (23) es de la forma:

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + t(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{v}_2)$$

De modo que la solución general del sistema (23), en este caso, es:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + t(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{v}_2) \quad (37)$$

Esta ecuación puede simplificarse observando que $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{v}_2$ debe ser un múltiplo k de $\mathbf{v}_1$. Esto se sigue inmediatamente de la ecuación:

$$(\mathbf{A} - \lambda I)((\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

y el hecho de que $\mathbf{A}$ sólo tiene un vector propio $\mathbf{v}$ linealmente independiente. Entonces la solución (37) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + t(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{v}_2) = \\ &e^{\lambda t}(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_2 t k \mathbf{v}_1) \end{aligned} \quad (38)$$

Se observa que toda solución de la forma (38) tiende a (0,0) cuando t tiende a infinito. Además, se puede notar que $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ es muy pequeño comparado con $c_2 t k \mathbf{v}_1$ si c_2 es diferente de cero y t es muy grande. Por lo tanto, la tangente a la trayectoria de (38) tiende a $\pm \mathbf{v}$, dependiendo del signo de c_2 , cuando t tiende a infinito.

El plano fase con estas características es el siguiente.

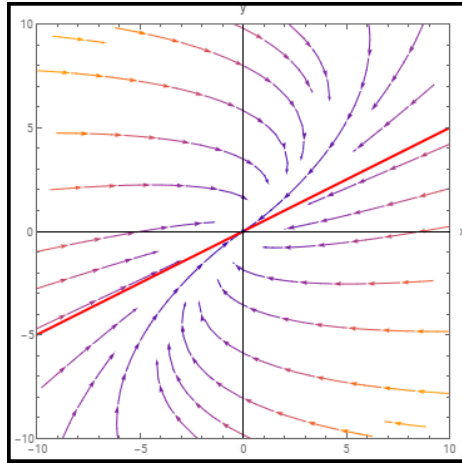


Figura 15.- Ejemplo de plano fase para valores propios negativos repetidos y sólo un vector propio linealmente independiente. Sistema $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}x + y$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y$ con $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$.

Nuevamente se dice que el punto de equilibrio $X_0 = (0,0)$ es un **atractor** y es **asintóticamente estable**, ya que todas las trayectorias tienden a él.

1.2.4.2.3.2. Caso 8. Valores propios repetidos positivos.

Ambas situaciones también se presentan cuando $\lambda > 0$.

1.2.4.2.3.2.1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ y dos vectores linealmente independientes

Nuevamente la solución general será de la forma (36). El análisis es exactamente el mismo que en el caso 7, sin embargo, como $\lambda > 0$, entonces $e^{\lambda t} \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el plano fase para este caso es exactamente el mismo que el del caso 1a con la excepción de que el sentido de las flechas es el opuesto:

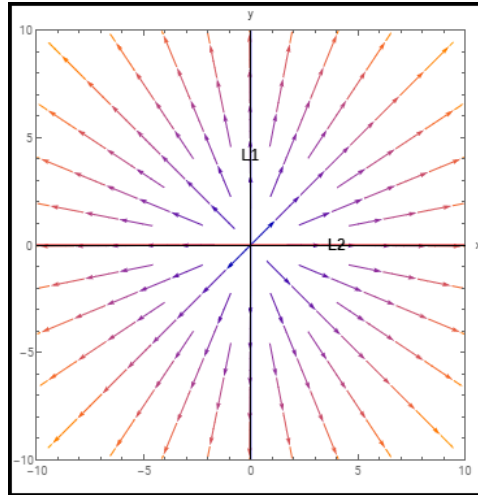


Figura 16.- Ejemplo de plano fase para valores propios positivos repetidos y dos vectores

propios linealmente independientes. Sistema $\frac{dx}{dt} = 5x, \frac{dy}{dt} = 5y$ con $\lambda_1 = 5 = \lambda_2$.

En este caso se dice que el punto de equilibrio $X_0 = \langle 0,0 \rangle$ es un **repulsor**, por lo tanto, **inestable**.

1.2.4.2.3.2.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ y solo un vector linealmente independiente.

Nuevamente la solución general será de la forma (38). En este caso las trayectorias son exactamente las mismas que en el caso 7 por el mismo análisis, sin embargo, la dirección de las flechas es el opuesto debido a que $\lambda > 0$, entonces el plano fase para este caso es el siguiente:

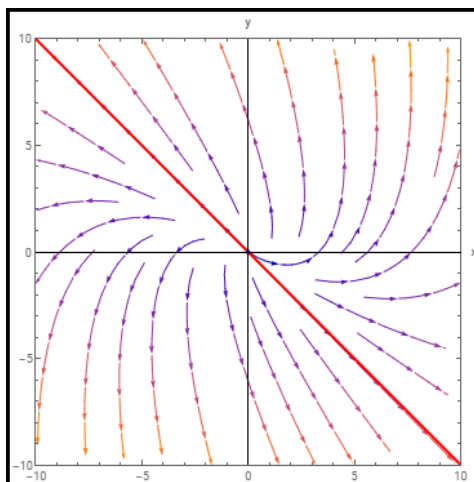


Figura 17.- Ejemplo de plano fase para valores propios positivos repetidos y sólo un vector

propio linealmente independiente. Sistema $\frac{dx}{dt} = x - y$, $\frac{dy}{dt} = x + 3y$ con $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$.

El punto de equilibrio $X_0 = (0,0)$ es un **repulsor** y es **inestable**.

1.2.4.2.4. Teorema 8. (Tipos de estabilidad de puntos críticos)⁵

El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (23) es estable si y sólo los autovalores tienen parte real no positiva; si existe un autovalor con parte real positiva, entonces el punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (24) es inestable; el punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (23) es asintóticamente estable si y sólo si los autovalores tienen parte real negativa.

Toda la anterior información respecto al comportamiento y estabilidad se puede resumir en la siguiente tabla:

⁵ La demostración de este teorema se puede leer en *Capítulo 8. Introducción a la teoría de la estabilidad*. (S.f.) <http://www.aero.ing.unlp.edu.ar/catedras/archivos/VIII%20-%20SISTEMAS%20LINEALES%20Y%20NO%20LINEALES,%20TEORIA%20DE%20ESTABILIDAD.pdf>

TIPOS DE VALORES PROPIOS	COMPORTAMIENTO EN EL PLANO FASE	ESTABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO
Reales y negativos $(\lambda_1 < \lambda_2 < 0)$	Trayectorias hacia el origen. Nodo atractor.	Asintóticamente estable
Reales y positivos $(\lambda_1 > \lambda_2 > 0)$	Trayectorias se alejan del origen. Nodo repulsor.	Inestable
Reales con signos opuestos $(\lambda_1 < 0 < \lambda_2)$	Silla de montar cerca del origen.	Inestable
Imaginarios puros $(\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta; \alpha = 0)$	Trayectorias son curvas cerradas alrededor del origen. Centro.	Estable
Imaginarios con parte real negativa $(\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta; \alpha < 0)$	Espirales que se aproximan hacia el origen. Foco estable.	Asintóticamente estable
Imaginarios con parte real positiva $(\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta; \alpha > 0)$	Espirales que se alejan del origen. Foco inestable.	Inestable
Repetidos y negativos $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0)$	Todas las trayectorias tienden al origen.	Asintóticamente estable
Repetidos y positivos $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0)$	Todas las trayectorias se alejan del origen.	Inestable

Tabla 2.- Comportamiento y estabilidades según tipos de valores propios.

1.2.5. Plano Traza-Determinante

Este criterio se basa en el análisis de la discriminante (30) y se describe en términos de la traza $T = \text{tr}(\mathbf{A})$ y del determinante $D = \det(\mathbf{A})$ de la matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes del sistema. La solución para λ surge de la aplicación de la fórmula cuadrática, quedaría como:

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

- Caso 1: Si $D \neq 0$, la matriz A es invertible, lo que implica que no tiene cero como un autovalor.
- Caso 2: Si $D = 0$, el desarrollo de la discriminante se reduce a T^2 , y los valores propios son de la forma: $\lambda = \frac{T \pm |T|}{2}$. Esto es $\lambda = 0$ o $\lambda = T$

El comportamiento de las trayectorias del sistema lineal plano puede ser efectivamente analizado utilizando un plano definido por la traza T y el determinante D de la matriz del sistema. Este plano, distinto del plano de fase xy , facilita el estudio de cómo la traza y el determinante, así como su relación mutua, influyen en la dinámica de las trayectorias.

Ahora, atendiendo a los diferentes valores de T y D tenemos:

1. Si $T^2 - 4D < 0$, entonces los autovalores λ_1, λ_2 son complejos conjugados.

Además, como tienen parte real igual a $T/2$, resulta:

- son imaginarios puros si y sólo si $T = 0$ (centro y estabilidad)
- tienen parte real negativa cuando $T < 0$ (foco y estabilidad asintótica)
- tienen parte real positiva cuando $T > 0$ (foco e inestabilidad)

Por ello, al considerar el plano TD (ver Figura 18. -), se puede asegurar que por encima de la parábola $T^2 - 4D = 0$ se tiene:

a. En el eje OD se presentan los centros y hay estabilidad.

b. A la izquierda del eje OD se presentan los focos y hay estabilidad asintótica.

c. A la derecha del eje OD también se presentan focos, pero hay inestabilidad.

2. Si $D < 0$, entonces se tiene $T^2 - 4D > 0$. Por ello los autovalores son reales y de distinto signo. Se presentan puntos de silla e inestabilidad. Por ello, al considerar el plano TD , por debajo del eje OT se presentan puntos de silla e inestabilidad (ver Figura 5).

3. Si $D > 0$ y $T^2 - 4D \geq 0$, entonces los autovalores son reales y tienen el mismo signo que T . De ahí que:

a. Si $T < 0$, se tenga:

- Cuando $T^2 - 4D = 0$, entonces los autovalores son iguales y negativos (nodo impropio, estabilidad asintótica).

- Cuando $T^2 - 4D > 0$, entonces los autovalores son reales, distintos y negativos (nodo, estabilidad asintótica)

a. Si $T > 0$, se tenga:

- Cuando $T^2 - 4D = 0$, entonces los autovalores son iguales y positivos (nodo impropio, inestabilidad)

- Cuando $T^2 - 4D > 0$, entonces los autovalores son reales, distintos y positivos (nodo, inestabilidad)

Estos casos aseguran que en la parte izquierda de la parábola $T^2 - 4D = 0$ se encuentran nodos y estabilidad asintótica. En la parte derecha de dicha parábola también se presentan nodos, pero hay inestabilidad. Por otro lado, por debajo de la parábola $T^2 - 4D = 0$, y por encima del

eje OT , se tiene: se presentan nodos y estabilidad asintótica, en la región de la izquierda; se presentan nodos e inestabilidad en la región de la derecha. ver (Figura 18.-).

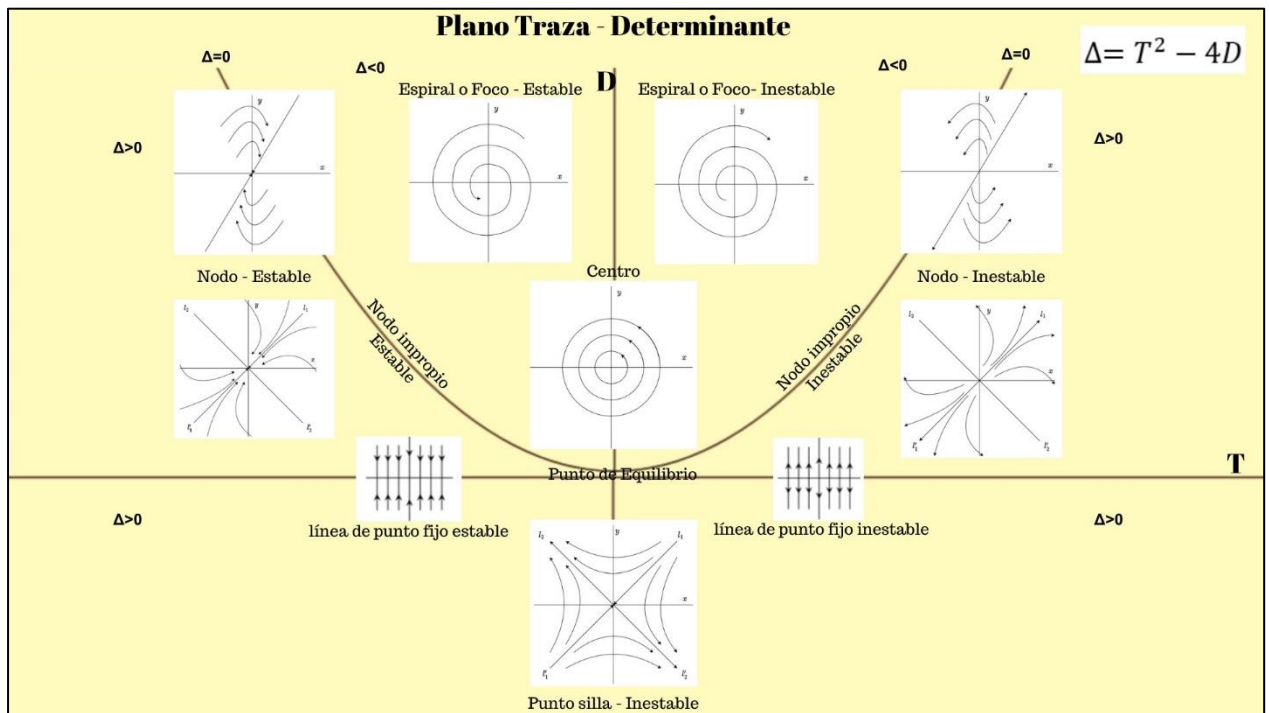


Figura 18.- Estabilidad y naturaleza del origen para el sistema en el plano Traza-Determinante.

Creado por autoría propia.

Toda la anterior información respecto al comportamiento y estabilidad usando el plano traza-Determinante se puede resumir en la siguiente tabla:

Condición en T y D	Tipo de Autovalores	Descripción de Autovalores	Comportamiento en el Plano de Fase	Estabilidad del Sistema
$T^2 - 4D < 0$	Complejos conjugados	Parte real igual a $\frac{T}{2}$	Centros (si $T = 0$)	Estable si $T = 0$
			Focos (si $T \neq 0$)	Asintóticamente estable si $T < 0$

				Inestable si $T > 0$
$D < 0$	Reales y de signos opuestos	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ o viceversa	Puntos de silla	Inestable
				Estable si $T < 0$
$D > 0$ y $T^2 - 4D = 0$	Reales e iguales	$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{T}{2}$	Nodo impropio	Inestable si $T > 0$
				Estable si $T < 0$
$D > 0$ y $T^2 - 4D > 0$	Reales y distintos	λ_1, λ_2 ambos positivos o negativos, según signo de T	Nodos	Inestable si $T > 0$

Tabla 3.- Comportamiento y estabildades según las condiciones de la Traza y el Determinante.

1.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales

A diferencia de sus contrapartes lineales, las E.D.O. no lineales permiten capturar la complejidad inherente a sistemas dinámicos que exhiben comportamientos como ciclos límite, bifurcaciones y caos, fenómenos que no pueden ser modelados adecuadamente por ecuaciones lineales.

La linealidad implica el principio de superposición, es decir, la combinación lineal de soluciones de una ecuación diferencial lineal es también una solución. Este principio no se sostiene en el contexto de ecuaciones no lineales, lo que significa que las técnicas de solución y análisis deben ser inherentemente diferentes y a menudo más complejas.

La forma general de un sistema de E.D.O. no lineal es de la forma:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

donde cada f_i ($i = 1, \dots, n$) es no lineal. Considerando que la estructura de las ecuaciones del amor es de dos dimensiones, se considerarán principalmente los sistemas de dos dimensiones de la forma:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

que simplificado es,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

El estudio de las E.D.O. no lineales generalmente involucra las siguientes etapas:

1. **Existencia y unicidad de soluciones:** A través de teoremas como el de Picard-Lindelöf, se establece en qué condiciones podemos asegurar la existencia y unicidad de soluciones para una E.D.O. no lineal dadas ciertas condiciones iniciales.
2. **Análisis cualitativo:** Dado que las soluciones explícitas no siempre son accesibles para ecuaciones no lineales, el análisis cualitativo se vuelve esencial. Se estudian las propiedades estructurales del sistema, como los puntos de equilibrio y su estabilidad, la existencia de ciclos límite y la naturaleza de las orbitas.
3. **Métodos numéricos:** Se aplican métodos numéricos como Euler, Runge-Kutta y otros para obtener soluciones aproximadas que permitan la visualización y el análisis del comportamiento del sistema.

4. **Linealización y análisis local:** Cerca de los puntos de equilibrio, se pueden obtener aproximaciones lineales del sistema no lineal para predecir el comportamiento local a través de la matriz Jacobiana.

La linealización de sistemas juega un papel crucial en este análisis, permitiendo la aplicación de técnicas de teoría lineal para inferir la estabilidad y el comportamiento local de los puntos de equilibrio en sistemas no lineales más complejos. Esto proporciona una ventana hacia el comportamiento local del sistema, aunque con las limitaciones mencionadas previamente, en este documento nos enfocaremos en métodos de linealización.

1.3.1. Linealización de un Sistema

Ahora bien, la linealización es una técnica analítica que busca aproximar el sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio mediante un sistema lineal. Esta aproximación permite utilizar las herramientas y el entendimiento desarrollados para sistemas lineales y así predecir el comportamiento local del sistema no lineal. El proceso se realiza de la siguiente manera:

1. Identificación de Puntos de Equilibrio:

Para un sistema no lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{f}(\mathbf{X})$, los puntos de equilibrio son aquellos para los cuales $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = 0$. Se denotan estos puntos de equilibrio como $\mathbf{X}_0$.

2. Linealización mediante la matriz Jacobiana:

La linealización se lleva a cabo evaluando la derivada de $\mathbf{f}$ con respecto a $\mathbf{x}$ en el punto de equilibrio. Esta derivada es representada por la matriz Jacobiana J de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{X}_0$. La matriz Jacobiana está dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=X_0}$$

donde f_i son las componentes del vector función $f(\mathbf{X})$, y x_i son las componentes del vector estado $\mathbf{X}$.

3. El Sistema Linealizado

Con la matriz Jacobiana calculada, el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio (x_0, y_0) es:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{J}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Este sistema linealizado se usa para analizar la estabilidad local y la dinámica del sistema no lineal en las cercanías de $\mathbf{X}_0$.

Nota 1: La estabilidad del punto de equilibrio en el sistema no lineal se infiere del comportamiento del sistema linealizado.

Nota 2: Si todos los valores propios de la matriz Jacobiana tienen partes reales negativas, el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable.

Nota 3: Si algún valor propio tiene una parte real positiva, el punto de equilibrio es inestable.

Nota 4: Si todos los valores propios tienen partes reales no positivas y aquellos con parte real cero tienen una estructura de bloques de Jordan con bloques de tamaño 1, entonces el punto de equilibrio es localmente estable.

1.3.2. Estabilidad mediante linealización

Se considera el sistema autónomo plano (23), con un punto de equilibrio en (x_0, y_0) , tal que las funciones $F(x, y)$ y $G(x, y)$ sean de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Entonces, aproximando $z = F(x, y)$ y $z = G(x, y)$ (cerca del punto (x_0, y_0)) por sus respectivos planos tangentes en dicho punto,

$$F(x, y) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$G(x, y) \approx \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

se puede escribir

$$\begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} \approx \mathbf{A} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ si } (x, y) \simeq (x_0, y_0),$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz jacobiana del campo $(F(x, y), G(x, y))^t$ en el punto (x_0, y_0) , es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

De esta manera, se puede pensar que el sistema (23) se encuentra próximo al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

cuando (x, y) está cerca de (x_0, y_0) y, por consiguiente, es natural esperar que el comportamiento de las trayectorias del sistema (11) cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) sea similar al de las trayectorias del sistema linealizado (39).

El proceso descrito con anterioridad se denomina linealización y nótese que el cambio de variable

$$X = x - x_0, Y = y - y_0$$

sobre el sistema (39) transforma éste en el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (40)$$

que tiene al punto (0,0) como punto de equilibrio.

A continuación, se verá que, en general, el punto de equilibrio (x_0, y_0) del sistema autónomo (23) hereda la estabilidad, y en algunos casos la naturaleza, del punto de equilibrio (x_0, y_0) para el sistema lineal (39), es decir, la estabilidad del (0,0) para el sistema lineal (40).

En primer lugar, se caracteriza la propiedad de punto crítico aislado para el sistema (23) a partir de esta misma propiedad para el punto crítico (0,0) del sistema lineal (40).

1.3.2.1. Proposición 1 Si el punto crítico (0,0) del sistema lineal (40) es aislado (es decir, si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$), entonces el punto crítico (x_0, y_0) del sistema (23) es aislado.

1.3.2.2. Teorema 9 (Linealización de Liapunov y Poincaré.)⁶

1. El punto crítico (x_0, y_0) del sistema (23) es asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ poseen parte real negativa (esto es, si el punto crítico $(0, 0)$ del sistema (40) es asintóticamente estable).

2. El punto crítico (x_0, y_0) del sistema (23) es inestable si y sólo si la matriz $\mathbf{A}$ del sistema posee un autovalor con parte real positiva (es decir, el punto crítico (0,0) es inestable para el sistema (40)).

⁶ La demostración de este teorema se puede leer en *Capítulo 8. Introducción a la teoría de la estabilidad*. (S.f.) <http://www.aero.ing.unlp.edu.ar/catedras/archivos/VIII%20-%20SISTEMAS%20LINEALES%20Y%20NO%20LINEALES,%20TEORIA%20DE%20ESTABILIDAD.pdf>

Más aún, si los autovalores de $\mathbf{A}$ son distintos entre sí y distintos de cero se puede decir lo siguiente:

1. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces (x_0, y_0) es un nodo asintóticamente estable.
2. Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un nodo inestable.
3. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces (x_0, y_0) es un punto de silla.
4. Si λ_1 no es real y $Re(\lambda_1) < 0$, entonces (x_0, y_0) es un foco asintóticamente estable.
5. Si λ_1 no es real y $Re(\lambda_1) > 0$, entonces (x_0, y_0) es un foco inestable

Cuando el punto $(0,0)$ del sistema lineal (40) es estable, pero no asintóticamente estable, es decir, cuando la matriz jacobiana $\mathbf{A}$ posee un par de autovalores complejos conjugados con parte real nula, o cuando $\det(\mathbf{A}) = 0$ y $\mathbf{A}$ no posee un autovalor real positivo, el proceso de linealización no proporciona información sobre la estabilidad del punto crítico (x_0, y_0) para el sistema (23).

1.3.3. Método Directo de Liapunov

Para el estudio de la estabilidad de un punto crítico aislado de un sistema autónomo, se cuenta con un método que se conoce como método directo de Liapunov, y que se expone seguidamente. En lo que sigue se supone, sin pérdida de generalidad, que $(0,0)$ es el punto crítico aislado del sistema (23).

1.3.3.1. Definición 4 Se dice que la función real de dos variables $E(x, y)$ es:

- a) **definida positiva** cuando $E(0,0) = 0$ y $E(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0,0)$.

Se observa que $E(x, y) = ax^2 + by^2$ con $a > 0, b > 0$ es definida positiva.

- b) **semidefinida positiva** cuando $E(0,0) = 0$ y $E(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \neq (0,0)$.

Se observa que $E(x, y) = ax^2$ con $a > 0$ y $E(x, y) = by^2$ con $b > 0$, son semidefinidas positivas.

c) **definida negativa** cuando $E(0,0) = 0$ y $E(x,y) < 0, \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Se observa que $E(x,y)$ es definida negativa si, y sólo si, $-E(x,y)$ es definida positiva.

d) **semidefinida negativa** cuando $E(0,0) = 0$ y $E(x,y) \leq 0, \forall (x,y) \neq (0,0)$

1.3.3.2. Definición 5 Se dice que una función $E(x,y)$, definida en alguna región que contiene al origen, continua, y con derivadas parciales de primer orden continuas, es una función de Liapunov para el sistema (23) cuando verifica las dos condiciones siguientes:

a) $E(x,y)$ es definida positiva.

b) La función $E'(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot F + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot G$ es semidefinida negativa

1.3.3.3. Teorema 10 Para el sistema (1) se verifican las siguientes propiedades:

A. Si existe una función de Liapunov $E(x,y)$ para el sistema autónomo (23), entonces el punto crítico $(0,0)$ es estable. Además, si esa función verifica que

$$E'(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot F + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot G \text{ es definida negativa,}$$

entonces el punto crítico $(0,0)$ es asintóticamente estable.

B. Si existe una función $E(x,y)$, con las siguientes propiedades:

(i) $E(x,y)$ es continua y tiene derivadas parciales de primer orden en alguna región que contiene al origen.

(ii) $E(0,0) = 0$, y cada círculo centrado en $(0,0)$ contiene al menos un punto en el que $E(x,y)$ es positiva.

(iii) $\frac{\partial E}{\partial x} \cdot F + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot G$ es definida positiva. entonces el punto crítico $(0,0)$ del sistema (23) es inestable

1.4. Modelos Previos

Antes de abordar el estudio del modelo de “las ecuaciones del amor”, se debe entender la lógica detrás de su estructura. Steven Strogatz no desarrolló estas ecuaciones de manera independiente; están influenciadas por desarrollos matemáticos previos que se describirán a continuación.

1.4.1. Modelo Exponencial.

El modelo exponencial, también llamado modelo malthusiano, propuesto en el siglo XIX por Thomas R. Malthus en cual, postuló que la población crece de manera exponencial, mientras que los recursos lo hacen de forma lineal, lo que eventualmente conduciría a una "catástrofe malthusiana" si la población no controlaba su tasa de natalidad.

Malthus no previó avances tecnológicos significativos en la agricultura que podrían aumentar la producción de alimentos, argumentando que tales avances solo proporcionarían soluciones temporales y que la población tendería a crecer hasta que los recursos fueran insuficientes. Sus predicciones de una catástrofe inevitable en 1880 no se materializaron, ya que la tecnología permitió incrementar la producción de alimentos y las sociedades desarrolladas experimentaron una disminución en las tasas de natalidad.

La ley malthusiana de crecimiento se describe matemáticamente por la ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = ap(t),$$

donde $p(t)$ es la población en el tiempo t y a es una constante de proporcionalidad que representa la tasa de crecimiento poblacional. Este modelo implica un crecimiento poblacional no

restringido, que es inusual en la naturaleza debido a la competencia por recursos limitados, predadores, enfermedades y otros factores ambientales.

A pesar de las limitaciones del modelo malthusiano, sigue siendo utilizado en la ciencia para modelar situaciones en las que el crecimiento inicial es aproximadamente exponencial, como es el caso del crecimiento bacteriano en un medio rico en nutrientes. Sin embargo, el modelo asume que la tasa de crecimiento es constante, lo cual es una simplificación excesiva que no considera factores externos o la capacidad de carga del ambiente.

Esta idea de crecimiento es posible aplicarla con la evolución de las relaciones amorosas. En el caso de Romeo, si no tienen en cuenta los sentimientos de Julieta, su amor crece o decrece de forma exponencial, en función de la constante de proporcionalidad. En el caso de Julieta, sucede lo mismo. Como se estudiará en detalle en el siguiente capítulo.

1.4.2. Modelo logístico.

El modelo logístico, propuesto en el siglo XIX por Pierre François Verhulst. El Modelo Logístico es una evolución del Modelo Exponencial de Malthus que incorpora restricciones al crecimiento poblacional, considerando la capacidad del medio ambiente y los recursos disponibles. Este modelo propone que mientras una población es pequeña y los recursos abundantes, el crecimiento puede ser casi exponencial. Sin embargo, a medida que la población crece y se acerca a la capacidad de carga del medio, la tasa de crecimiento disminuye, resultando en una curva en forma de “S”.

Matemáticamente, se representa por la ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = ap - c \frac{p(p-1)}{2}$$

donde ap es la tasa de crecimiento máximo y $c \frac{p(p-1)}{2}$ es la capacidad de carga, es decir, el tamaño máximo de población que el entorno puede sostener.

Este modelo logístico es más realista y aplicable en situaciones donde el crecimiento es inicialmente rápido, pero luego se desacelera y estabiliza cerca de un límite superior debido a la competencia por recursos limitados, como es el caso de la mayoría de las poblaciones en la naturaleza.

Esta teoría se aplicará para la construcción del modelo no-lineal analizado en el capítulo 3. En sí, no se habla de una competencia, sino de representar de alguna manera el hecho de que dependiendo de la intensidad con que se ame a un individuo, los sentimientos del otro individuo pueden apagarse o encenderse. Es decir, no se toma en cuenta solamente si su pareja le ama o no, sino cuánto le ama u odia.

CAPÍTULO 2

2.1. Modelo Inicial Inspirado en Romeo y Julieta

El matemático estadounidense Steven Strogatz presentó en 1988 un modelo matemático con el propósito de explorar la dinámica las relaciones de pareja, con el objetivo de motivar a sus estudiantes en el estudio los Sistemas de E.D.O. Más allá de su finalidad educativa, el modelo de Strogatz ha resultado ser una fuente de predicciones y ha ejercido una influencia significativa en investigaciones posteriores, incluyendo los trabajos de investigadores como Bae (2015), Sprott (2004), Gottman (2002) entre otros.

2.1.1. Planteamiento del Modelo.

Es bastante razonable (a riesgo de ser frívolos) pensar que los sentimientos mutuos en una pareja varían en el tiempo, por lo que no se va a tener en cuenta ningún tipo de concepción filosófica acerca del amor, solo su formulación matemática hipotética que da cuenta de este fenómeno, como se describe a continuación:

- $R(t)$ simboliza los sentimientos cambiantes de amor o rechazo de Romeo hacia Julieta en un tiempo dado t ,
- $J(t)$ representa los sentimientos cambiantes de amor o rechazo de Julieta hacia Romeo en el mismo momento.

Cuando $R(t)$ y $J(t)$ adquieren valores positivos, indican amor; por otro lado, valores negativos señalan rechazo.

Estudiando los **sentimientos de Romeo hacia Julieta**, existen dos casos:

Caso 1: Solamente se tiene en cuenta el amor u odio de Romeo hacia Julieta, esto es:

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) \quad (41)$$

donde la constante a determina cómo Romeo responde a sus sentimientos actuales. Si a es positiva y Romeo ama a Julieta, se intensificará o atenuará su amor; pero seguirá amándolo. Si a es positiva, pero Romeo la rechaza, en menor o mayor medida continuará rechazándola. En contraste, si a es negativa, Romeo experimentará un cambio en sus emociones: por ejemplo, si ama a Julieta, empezará a luchar contra este sentimiento y se moverá hacia el rechazo.

Caso 2: La influencia de los sentimientos de Julieta hacia Romeo, esto es:

La ecuación (41) se modifica considerando la actitud de Julieta hacia Romeo, ya sea favorable o desfavorable, por lo tanto, quedaría:

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \quad (42)$$

Esta nueva ecuación (42) introduce un parámetro b , que representa cómo Romeo responde a los sentimientos de Julieta hacia él. Si b es positivo, significa que Romeo refleja las emociones de Julieta, pero si b es negativo indica que Romeo reaccionará de manera opuesta a los sentimientos de Julieta.

Es importante destacar la influencia del modelo de Malthus en (42) donde $\frac{dR}{dt}$ indica la tasa de cambio de la variable R en el tiempo. Esta tasa de cambio es una función lineal de R , con una constante de proporcionalidad a , y una función del tiempo $J(t)$, que puede representar alguna influencia externa o forzamiento sobre R .

Estudiando los **sentimientos de Julieta hacia Romeo**, también existen dos casos parecidos a los de Romeo:

Caso 1: Solamente se tiene en cuenta el amor u odio de Julieta hacia Romeo, esto es:

$$\frac{dJ}{dt} = dJ(t) \quad (43)$$

Aquí, el parámetro d funciona de manera análoga al parámetro a , pero aplicada en el contexto de Julieta. Define cómo Julieta reacciona a sus propios sentimientos.

Caso 2: La influencia de los sentimientos de Romeo hacia Julieta, esto es:

La ecuación (43) se modifica considerando la actitud de Romeo hacia Julieta, ya sea favorable o desfavorable, por lo tanto, quedaría:

$$\frac{dJ}{dt} = cR(t) + dJ(t) \quad (44)$$

En esta ecuación (44) el parámetro d , define cómo Julieta responde a los sentimientos de Romeo hacia ella. De la misma manera este parámetro tiene una función parecida a la del parámetro b , pero se aplica en el contexto de las reacciones de Julieta.

Por lo tanto, existe esta misma influencia del modelo de Malthus en (44) cómo se destacó con Romeo en (42).

Así, el modelo lineal propuesto por Strogatz se presenta utilizando (42) y (44) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \\ \frac{dJ}{dt} = cR(t) + dJ(t) \end{cases} \quad (45)$$

Dada la estructura de este sistema (45) es posible decir que es un sistema lineal plano autónomo, por lo que su naturaleza es bidimensional, afectadas tanto por las condiciones iniciales como por los cuatro parámetros, que pueden tener valores tanto positivos como negativos independientes del tiempo.

Gottman (2002) describe los parámetros a y c como "inercia de comportamiento" se refiere a la tendencia de un individuo a continuar su comportamiento actual. En el modelo, esto significa que el comportamiento de una persona en un momento dado tiende a continuar de manera similar en el futuro inmediato si no hay influencias externas o interacciones significativas. Mientras que los parámetros b y d , como "función de influencia" que representan el efecto que tiene cada persona sobre la otra. En el modelo, si b es grande, entonces J tiene una gran influencia en la tasa de cambio de R .

2.1.1.1. Perfiles Conductuales en las Relaciones

Desde el punto de vista de Romeo, se pueden identificar cuatro perfiles de comportamiento romántico distintos (Strogatz, 1994), que varían según la naturaleza de los signos de a y b . Estos perfiles, categorizados por Sprott (2004) son:

1. El entusiasta: $a > 0$ y $b > 0$, indicando que Romeo se siente animado tanto por sus propios sentimientos como los de Julieta.
2. El narcisista: $a > 0$ y $b < 0$, significando que Romeo se siente animado por sus propios sentimientos, pero responde negativamente a los de Julieta.
3. El amante seguro: $a < 0$ y $b > 0$, implicando que Romeo se siente desanimado por sus propios sentimientos, pero responde positivamente a los de Julieta.
4. El Solitario: $a < 0$ y $b < 0$, indicando que Romeo se siente desanimado tanto por sus propios sentimientos como también por los de Julieta.

Sprott usa el término "seguro" para describir a individuos que corresponden al caso 3, una categoría que señala ser predominante en la sociedad. En este escenario, un individuo se caracteriza

por el amor propio, mientras que el otro experimenta aversión hacia sí mismo (Sprott, 2004). Strogatz, por su parte, utiliza "cauteloso" para referirse a esta actitud.

Adicionalmente, Sprott define "narcisistas" a aquellos que rechazan ser amados y, paradójicamente, encuentran satisfacción en ser despreciados; estos individuos parecen actuar en contradicción con sus emociones internas. Strogatz los llama "Nerds". Además, Strogatz identifica una condición particular donde $c = b$ y $a = d$, lo que sugiere un par de individuos que se comportan como "clones románticos", siendo un espejo la conducta amorosa de las dos personas, este caso se estudiara a detalle más adelante.

Igualmente, Julieta presenta cuatro perfiles de comportamiento romántico paralelos a los de Romeo. Al cruzar los perfiles de ambos, emergen dieciséis dinámicas de pareja únicas. La siguiente tabla (Ver Tabla 4.-) clasifica cada combinación de pareja y les asigna nombres basados en populares dichos colombianos. En este trabajo solo se describirá los cuatro perfiles conductuales inusuales explorados por Sprott (2004) que se verá en la sección 2.2. *Casos Especiales*.

Romeo/Julieta	Entusiasta $(c > 0, d > 0)$	Narcisista $(c < 0, d > 0)$	Seguro $(c > 0, d < 0)$	Solitario $(c < 0, d < 0)$
Entusiasta $(a > 0, b > 0)$	Son como uña y mugre.	El hombre propone y la mujer dispone.	Amor sin beso, es como aguapanela sin queso.	Amor no correspondido, es tiempo perdido.
Narcisista $(a > 0, b < 0)$	Uno dando papaya y el otro comiendo limón.	Como dos gallos en el mismo corral, mucho cacareo y poca acción.	A mujer de manos grandes, todo lo que coge le parece chiquito.	A la mujer fea, el oro la hermosea.

Seguro ($a < 0, b > 0$)	A quien tiene suerte, hasta el gallo le pone huevos.	Amistad por interés, no dura porque no lo es.	Amor de lejos, amor de pendejos.	Amor no se echa a la olla, sino carne y cebolla.
Solitario ($a < 0, b < 0$)	A la fuerza ni los zapatos entran.	Amor con hambre no dura.	Aunque la mona se vista de seda, mona se queda.	Son como agua y aceite.

Tabla 4.- Combinaciones posibles parejas entre Romeo y Julieta, adaptada de Munoa (2020).

2.1.2. Puntos de Equilibrio y Caso General

Para calcular los puntos de equilibrio del sistema (45) las ecuaciones se igualan a cero, así las cosas:

$$aR(t) + bJ(t) = 0 \quad (46)$$

$$cR(t) + dJ(t) = 0 \quad (47)$$

Manipulando (47) se obtiene:

$$R = -\frac{d}{c}J, \quad c \neq 0 \quad (48)$$

Sustituyendo (48) en (46) se tendría:

$$a\left(-\frac{d}{c}J\right) + bJ(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow J\left(-\frac{ad}{c} + b\right) = 0$$

En este caso $J = 0$ o bien $-\frac{ad}{c} + b = 0$. Salvo este último, J debe ser cero. Si $J = 0$, entonces sustituyendo en la ecuación (47) se encuentra que R también debe ser cero (asumiendo

que $d \neq 0$). Esto significa que el único punto de equilibrio es $(0, 0)$, equivalente a una completa falta de reacción entre ellos.

Calculando la matriz Jacobiana para entender cómo se comporta el sistema entorno a este punto, se tiene:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R} aR(t) + bJ(t) & \frac{\partial}{\partial J} aR(t) + bJ(t) \\ \frac{\partial}{\partial R} cR(t) + dJ(t) & \frac{\partial}{\partial J} cR(t) + dJ(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (49)$$

Luego, se calcula los valores propios usando la ecuación característica $\det(J - \lambda I) = 0$ obteniendo así:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = \\ \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (50)$$

Desarrollando (50) usando la ecuación cuadrática, se tendría:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

donde,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)} \quad (51)$$

El discriminante de (51) es:

$$(a + d)^2 - 4(ad - cb) \quad (52)$$

A partir de esto Munoa (2020) propone algunas conclusiones:

A. Si (52) es negativo, es decir $(a + d)^2 < 4(ad - cb)$, entonces la raíz cuadrada es de un numero negativo, implicando así soluciones complejas.

B. Si (52) es positivo o igual a cero, es decir $(a + d)^2 \geq 4(ad - cb)$, entonces la raíz cuadrada es de un número positivo, implicando así soluciones reales.

Entonces, utilizando las notaciones traza donde $T = (a + d)$ y $D = (ad - cb)$, el sistema tiene:

1. Valores Propios Reales si $T^2 \geq 4D$.

- **Nodo - Inestable:** Si $T > 0$ y $D > 0$, es decir $ad > cb$, ambos autovalores son positivos.

- **Punto silla - Inestable:** Si $T > 0$ y $D < 0$, es decir $ad < cb$, los autovalores tienen signos opuestos, uno positivo y otro negativo.

- **Nodo - Estable:** Si $T < 0$ y $D > 0$, es decir $ad > cb$, ambos autovalores son negativos.

- **Punto silla - Inestable:** Si $T < 0$ y $D < 0$, es decir $ad < cb$, los autovalores tienen signos opuestos, uno positivo y otro negativo.

2. Valores Propios Imaginarios si $T^2 < 4D$.

- **Foco/Espiral - Inestable:** Si $T > 0$, la parte real de los valores propios es positiva.

- **Foco/Espiral - Estable:** Si $T < 0$, la parte real de los valores propios es negativa.

2.2. Casos Especiales

Sprott (2004) explora cuatro perfiles conductuales inusuales, considerando los valores propios, los parámetros y las condiciones iniciales. Para este trabajo, se estudiarán todos estos casos y se utilizará una descripción basados en populares dichos colombianos, esto se resume en la siguiente tabla:

Perfiles conductuales inusuales				
Perfiles conductuales por Sprott (2004)	“Fuera de contacto con los propios sentimientos”	“Romeo robot”	“Guisantes en una vaina”	“Fuego y hielo”
Dicho Colombiano relacionado con el perfil conductual.	“Querer por sólo querer, es verdadero querer”	“Tanto es amar sin ser amado, como responder sin ser preguntado.”	“Ama y te amarán, odia y te odiarán”	“La mujer no ama a quien la ama, sino a quien le viene en gana”
Parámetros impuestos por cada perfil conductual.	$a = 0$ $d = 0$	$a = 0$ $b = 0$	$c = b$ $d = a$	$c = -b$ $d = -a$
Caso 1:	“Cada tiesto con su arepa”	“El que no cae, resbala”	“Sigue pensando que la Marimonda es Mickey”	
Parámetros	$b > 0$ $c > 0$	$c < 0$ $d < 0$	$ a > b $	
Caso 2:	“Durmió conmigo anoche o qué, que ya no saluda”	“Del amor al odio sólo hay un paso”	"Mujer que no joda es hombre o tiene mozo"	
Parámetros	$b < 0$ $c < 0$	$c > 0$ $d < 0$	$ a < b $	
Caso 3:	“Sin conocer, amor no puede haber”	“Más tragada que yuca en sancocho”		
Parámetros	$bc < 0$	$c < 0$		

$$d < 0$$

Tabla 5.- Casos especiales descritos por Sprott (2004)

2.2.1. *Querer por Sólo Querer, es Verdadero Querer.*

Se considera el perfil emocional en la que Romeo y Julieta se desconectan de sus propios sentimientos y solo reaccionan ante las emociones del otro. Es posible imaginar una interacción convencional entre dos amantes, en la que cada uno mantiene una actitud neutral hacia su propia emoción interna, es decir $a = 0$ y $d = 0$. Sin embargo, bajo esta normalidad, se desarrolla un romance indirecto y reactivo, donde las emociones de cada uno brotan y se moldean en respuesta a las del otro, dando lugar a una interacción emocional guiado por la influencia mutua y no por la introspección. Remplazando estos valores en el sistema (45) se vería como:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = bJ(t) \\ \frac{dJ}{dt} = cR(t) \end{cases} \quad (53)$$

Si se calcula los valores propios utilizando la ecuación (51) se tendría:

$$\lambda_{1,2} = \frac{0+0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0+0)^2 - 4(0d - cb)} = \pm \sqrt{cb} \quad (54)$$

Entonces, la dinámica de pareja depende de b y c , para los cuales hay tres combinaciones:

2.2.1.1. Cada Tiesto con su Arepa: $b > 0$ y $c > 0$

El discriminante en (54) para este caso es positivo, por lo cual el sistema tendría dos valores propios reales con signos distintos, por lo que el punto de equilibrio es un punto silla, que implica inestabilidad en el sistema.

Cada una de las siguientes figuras, al igual que las demás en este documento, presenta dos graficas distintas:

- El de **plano de fases** del sistema; el punto de equilibrio se grafica en negro, junto con la trayectoria correspondiente a los valores iniciales, también de color negro.
- La **evolución de las soluciones** a lo largo del tiempo; los sentimientos de Romeo y Julieta se simbolizan mediante líneas de color azul y violeta, respectivamente.

Nota 1: Para capturar de manera adecuada el comportamiento de las soluciones, que pueden crecer exponencialmente, oscilar o estabilizarse en el punto de equilibrio, es fundamental ajustar la escala de visualización. Elegir una escala óptima facilita una interpretación clara y precisa de estas dinámicas.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $b = 3$ y $c = 5$. **Estos parámetros** describen que, la respuesta de Julieta a los sentimientos de Romeo es positiva y considerablemente más intensa en comparación con la también positiva, pero menos fuerte, reacción de Romeo a los sentimientos de Julieta.

Analizando emocionalmente esta relación (53) con estos cuatro parámetros ya establecidos, es posible decir que, como a y d son cero, se puede considerar que se trata de un romance indirecto, la ausencia de una motivación emocional propia, es decir, a y d , podría sugerir que sus acciones no son impulsadas por un sentimiento personal genuino, sino por la reacción a la conducta del otro, esto es, b y c . La relación podría carecer de profundidad emocional. La interacción amorosa en (53) podría ser fácilmente malinterpretada como superficial o dependiente exclusivamente de la acción y reacción, sin un sustento emocional interno y personal que guíe estas expresiones de afecto.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que simbolizan un afecto inicial igual de enamoramiento, y un escenario alternativo con $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, representando un sentimiento

de rechazo inicial de Romeo hacia Julieta mientras ella experimenta atracción, se procedió al siguiente análisis.

Basado en la información provista, se elabora los gráficos del plano de fases utilizando Wolfram Mathematica⁷. Los resultados se presentan a continuación.

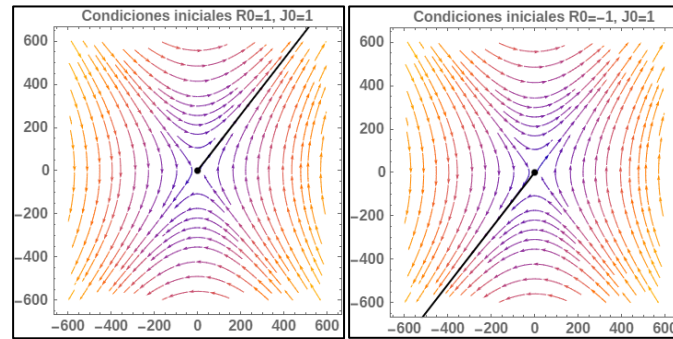


Figura 19.- Plano de fases con parámetros $a = 0, d = 0, b = 3, c = 5$; condiciones iniciales

$$R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Interpretando el plano de fases, si se considera el espacio generado por los vectores propios del sistema, que corresponde a un par de rectas que pasan por el origen, tal como se describió en el capítulo 2, estas dividen el plano de fases en 4 regiones. Se referirá a ellas como región superior, inferior, izquierda o derecha.

Si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o derecha corresponden a una dinámica en la que el afecto mutuo entre Romeo y Julieta se intensifica exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o izquierda, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos

⁷ Para consultar los detalles del código utilizado, ver la sección Anexos – Códigos – Plano de fases. Es importante señalar que no se detallarán todos los códigos empleados para la generación de cada gráfico, ya que se derivan de un código inicial, alterando únicamente aspectos como parámetros y escalas. Estas modificaciones son menores y siguen la estructura del código original, por lo que se omite su repetición para evitar redundancias.

comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Tal comportamiento es característico de un punto silla en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se acercan al punto de equilibrio, pero se alejan sin límites de este. Sprott (2004) describe esta situación como "mutuo amor y mutuo odio".

El gráfico de las soluciones correspondientes a los planos de fases anteriores se traza utilizando Wolfram Mathematica⁸. El resultado se presenta a continuación:

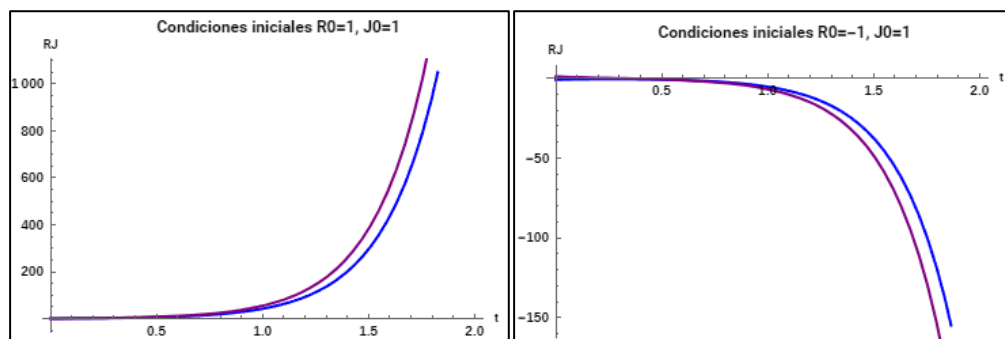


Figura 20.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, d = 0, b = 3, c = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$.

Los escenarios analizados previamente quedan claramente expuestos en estos gráficos, que exhiben comportamientos específicos según las soluciones modeladas.

Donde si ambos miembros de la relación comienzan con sentimientos positivos el amor de Romeo y Julieta crece exponencialmente con el tiempo. El comportamiento exponencial indica una retroalimentación positiva en la relación, donde el amor de cada uno amplifica el del otro. En contraste, el segundo escenario donde Romeo comienza teniendo sentimientos negativos hacia

⁸ Para consultar los detalles del código utilizado, ver la sección Anexos – Código – Grafico de las Soluciones. Similar a los gráficos del plano de fase, los demás se crean a partir de un código inicial único.

Julieta, pero ella positivos hacia él, la dinámica de su relación los conduce a una disminución de sus sentimientos mutuos. Esto quiere decir que el rechazo inicial de uno afecta negativamente al otro, provocando una disminución del afecto en general.

2.2.1.2. Durmió Conmigo Anoche o Qué, Que Ya No Saluda: $b < 0$ y $c < 0$

El discriminante en (54) para este caso es positivo, por lo cual el sistema tendría dos valores propios reales con signos distintos, por lo que el punto de equilibrio es un punto silla, que implica inestabilidad en el sistema.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo caso anterior, pero con los signos invertidos, adoptando los parámetros $b = -3$ y $c = -5$. **Estos parámetros** describen que, la respuesta de Julieta a los sentimientos de Romeo es negativa y considerablemente más intensa en comparación con la también negativa, pero menos fuerte, reacción de Romeo a los sentimientos de Julieta.

Analizando emocionalmente esta relación (53) con estos cuatro parámetros ya establecidos, es posible decir que, como b y c tienen signos negativos, lleva a una escalada de respuestas emocionales contrarias que podría describirse como rechazo mutuo, donde cada gesto afectivo es recibido con una respuesta aún más negativa, creando un ambiente de constante malentendido y confrontación, donde en su dinámica de relación (53) ambos se sienten cada vez menos motivados para intentar gestos positivos, ya que estos son consistentemente recibidos con hostilidad.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$, que simbolizan un igual afecto inicial de enamoramiento, se procedió al siguiente análisis.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

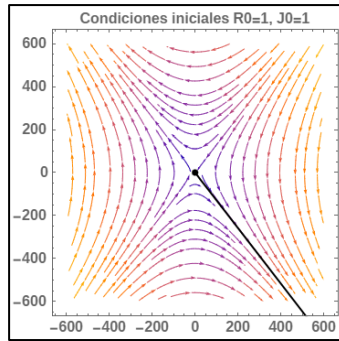


Figura 21.- Plano de fases con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = -5$ y condición inicial

$$R_0 = 1, J_0 = 1.$$

Considerando nuevamente la división del plano de fases en 4 regiones es posible decir que si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o izquierda corresponden a una dinámica en la que implica un crecimiento exponencial del amor mutuo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o derecha, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Tal comportamiento es característico de un punto silla en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se acercan al punto de equilibrio, pero se alejan sin límite de este. Sprott (2004) describe esta situación como "Uno amando y el otro odiando".

El gráfico de la solución correspondiente al plano de fase anterior es:

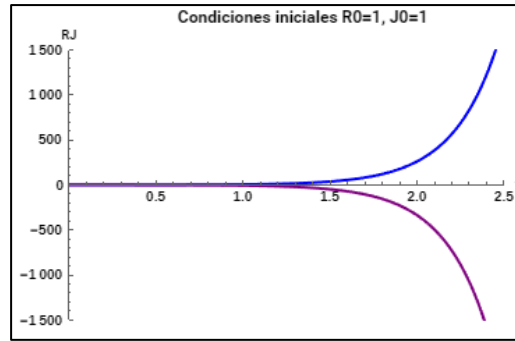


Figura 22.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = -5$ y condición inicial $R_0 = 1, J_0 = 1$.

La figura ilustra fielmente la descripción del plano de fases, mostrando que Romeo desarrolla un amor cada vez más intenso por Julieta, mientras que simultáneamente, Julieta experimenta un desamor acelerado. Estos sentimientos hacen que la dinámica de pareja tenga, a largo plazo, un conflicto emocional. Esta simetría divergente y la amplificación de los sentimientos distintos con el transcurso del tiempo, refuerza la idea de un modelo inestable.

2.2.1.3. Sin Conocer, Amor No Puede Haber: $bc < 0$

El discriminante en (54) para este caso es negativo, y como la traza $T = 0$ entonces se tendría dos valores propios imaginarios puros, es decir, sin parte real. Por lo que el punto de equilibrio sería un centro estable.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $b = -3$ y $c = 4$. **Estos parámetros** describen que, Romeo reacciona negativamente a los sentimientos de Julieta, mostrando una tendencia a alejarse emocionalmente. Por otro lado, Julieta responde positivamente y con intensidad a las emociones de Romeo, tal vez por la naturaleza apasionada de su carácter.

Analizando emocionalmente esta relación (53) con estos cuatro parámetros ya establecidos, es posible decir que, como a y d tienen signos contrarios, la dinámica genera una especie de etapa complicada y potencialmente dolorosa donde Julieta tiene sentimientos contrarios a los de Romeo, respondiendo emotivamente el afecto demostrado por Romeo, mientras que Romeo puede parecer distante o desconectado emocionalmente cuando se trata de responder a las emociones de Julieta. Esta dinámica (53) podría llevar a un desequilibrio emocional en la relación, haciendo que Julieta se sienta no valorada o ignorada, mientras Romeo podría sentirse abrumado o incapaz de cumplir con las expectativas emocionales de Julieta.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$, que simbolizan un igual afecto inicial de enamoramiento, se procedió al siguiente análisis.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

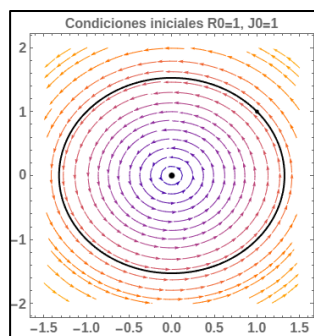


Figura 23.- Plano de fases con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = 4$ y condición inicial

$$R_0 = 1, J_0 = 1.$$

Se observa que este plano de fases no tiene una dirección clara hacia la felicidad eterna o la desdicha. En cualquier parte del plano de fases, la dinámica de la relación queda capturada en un bucle perpetuo de afecciones y desencantos. El vínculo amoroso que comparten nunca se extingue ni llega a un florecimiento pleno, sino que oscila circularmente, repitiendo los mismos

patrones repetidamente. Es notable además que la proximidad o lejanía de las trayectorias con respecto al punto de equilibrio puede influir en la intensidad de sus interacciones amorosas o conflictivas, provocando que estos ciclos de pasión y desilusión se manifiesten repetitivamente con mayor o menor frecuencia.

Tal comportamiento es característico de un centro en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias orbitan alrededor del punto de equilibrio sin llegar a desestabilizarse. Sprott (2004) los describe como “Ciclo interminable de amor y odio”.

El gráfico de la solución correspondiente al plano de fase anterior es:

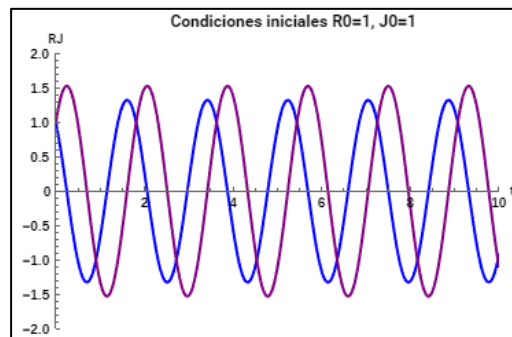


Figura 24.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, d = 0, b = -3, c = 4$ y condición inicial $R_0 = 1, J_0 = 1$.

Esta figura demuestra lo dicho anteriormente, una cadencia sincronizada de altibajos en la intensidad emocional de Romeo y Julieta, con oscilaciones que persisten sin estabilizarse en un punto fijo, reflejando un ciclo ininterrumpido de amor y desamor. Aunque la relación se mantiene en un equilibrio dinámico, sin desviarse hacia extremos irrecuperables, está marcada por una secuencia incesante de fases positivas y negativas. En este contexto, Julieta demuestra variaciones más marcadas y rápidas en comparación con Romeo, lo que sugiere que Julieta experimenta las emociones con mayor intensidad y una respuesta más inmediata a los cambios en el afecto mutuo.

Se hace la invitación a consultar el trabajo realizado por Israel & Turner (2010), que profundiza en la exploración de otros casos de este perfil conductual, abordados desde un enfoque matemático detallado.

2.2.2. La Mujer No Ama a Quien la Ama, Sino a Quien le Viene en Gana.

En esta sección, se examina el escenario en que Romeo y Julieta presentan disposiciones emocionales contrarias, es decir, donde, $c = -b$ y $d = -a$. Esta disposición surge a raíz del mito de que entre opuestos se atraen, esto sugiere que las personas con diferencias marcadas en personalidad son más compatibles y pueden formar relaciones más fuertes y duraderas, generando una complementariedad funcional en la relación.

Se observa que si a y b son positivos y c y d son negativos, la relación que se genera es a la de un Entusiasta con un Solitario; lo mismo ocurre si, a y b son negativos y c y d positivos, que desencadena una dinámica similar. Por otro lado, si los valores de a y b son de signos distintos, la dinámica de la relación sería entre un Narcisista con una persona Segura. En resumen, emergen dos posibles dinámicas de relaciones amorosas: Entusiasta-Solitario y Narcisista-Seguro.

Remplazando estos valores en el sistema (45), se vería como:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \\ \frac{dJ}{dt} = -bR(t) - aJ(t) \end{cases} \quad (55)$$

Si se calculan valores propios utilizando la ecuación (51) se tendría:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+(-a)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a+(-a))^2 - 4(a(-a) - (-b)b)} = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \quad (56)$$

Entonces, la dinámica de pareja depende de a y b , para los cuales hay dos combinaciones:

2.2.2.1. Sigue Pensando que la Marimonda es Mickey: $|a| > |b|$

Esta situación significa que el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él. El discriminante de (56) para este caso es positivo, por lo cual el sistema tendría dos valores propios reales con signo distinto, por lo que el equilibrio sería un punto silla, que implica inestabilidad en el sistema.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utilizará el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $a = 5$, $b = 3$ y $a = 5$, $b = -3$.

Los parámetros $a = 5$ y $b = 3$ describen el perfil conductual entre **una persona entusiasta con otra persona solitaria**, donde Romeo está emocionalmente alineado con sus sentimientos y los de Julieta; su bienestar emocional se ve impulsado tanto por su amor propio como por el amor que siente por Julieta. En cambio, Julieta se ve abrumada por sus emociones y por las de Romeo, respondiendo a ambos con rechazo o desánimo.

Analizando emocionalmente esta relación (55) con estos cuatro parámetros, es posible decir que, como a y b son positivos, Romeo se siente sentimentalmente cada vez mejor, más exitoso y más amado, mientras que Julieta, con c y d negativos, se encuentra en una etapa descendente de emociones negativas. En la dinámica (55) aunque él busca compartir su alegría, ella podría percibir esta euforia como una carga.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay mutuo amor inicial y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de romeo, se procedió al siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fase correspondientes a este perfil sería:

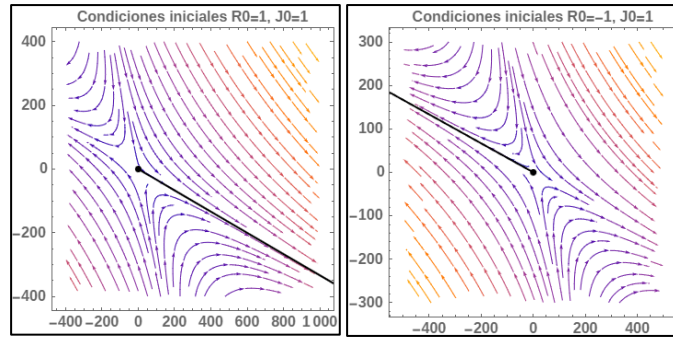


Figura 25.- Plano de fases del perfil conductual **Entusiasta-Solitario** con parámetros $a = 5, b = -3, c = -5, d = 3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$.

Considerando nuevamente la división del plano de fases en 4 regiones es posible decir que si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o izquierda corresponden a una dinámica en la que implica un crecimiento exponencial del amor mutuo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o derecha, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Tal comportamiento es característico de un punto silla en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se acercan al punto de equilibrio, pero se alejan sin límites de este. Sprott (2004) describe esta situación como "Mutuo desacuerdo".

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fases anteriores son:

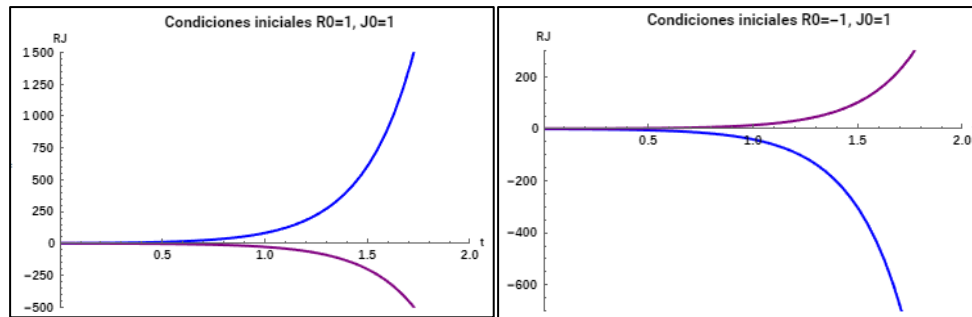


Figura 26.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Entusiasta-Solitario** con parámetros $a = 5, b = -3, c = -5, d = 3$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$.

Los gráficos de las soluciones ilustran exactamente la descripción del plano de fases, mostrando que a medida que uno de los individuos se enamora profundamente, el otro se desentiende con idéntica celeridad, subrayando la inestabilidad inherente al sistema.

Por otra parte, los parámetros $a = 5$ y $b = -3$ describen el perfil conductual entre **una persona narcisista con otra persona que es seguro**, donde Romeo encuentra satisfacción por sus propios sentimientos, pero se ve afectado de manera negativa por los sentimientos de Julieta. Simultáneamente, Julieta tiene una reacción emocional positiva de los sentimientos que le expresa Romeo, pero lucha con una tendencia a ser arrastrada por sus propias emociones negativas.

Analizando emocionalmente esta relación (55) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que sugiere una dinámica de pareja donde la interacción emocional de cada uno con el otro es compleja. Como b y d son negativos, cada uno responde a los sentimientos del otro de maneras que no son intuitivas, y como a y c son positivas, potencialmente pueden llegar a desestabilizar la relación por esta aparente contradicción.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay mutuo amor inicial y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de romeo, se procedió al siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fases correspondientes a este perfil serían:

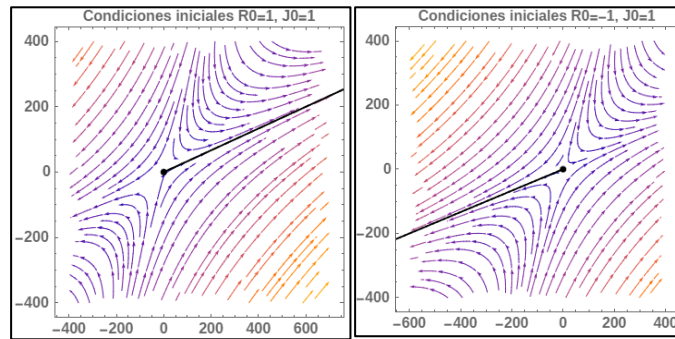


Figura 27.- Plano de fases del perfil conductual **Narcisista-Seguro** con parámetros $a = 5$, $b = -3$, $c = -3$, $d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1$, $J_0 = 1$ y $R_0 = -1$, $J_0 = 1$.

Considerando nuevamente la división del plano de fases en cuatro regiones es posible decir que si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o derecha corresponden a una dinámica en la que el afecto mutuo entre Romeo y Julieta se intensifica exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o izquierda, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Tal comportamiento es característico de un punto silla en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se acercan al punto de equilibrio, pero se alejan sin límite de este. Sprott (2004) describe esta situación como " Una combinación de amor y odio ".

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fases anteriores son:

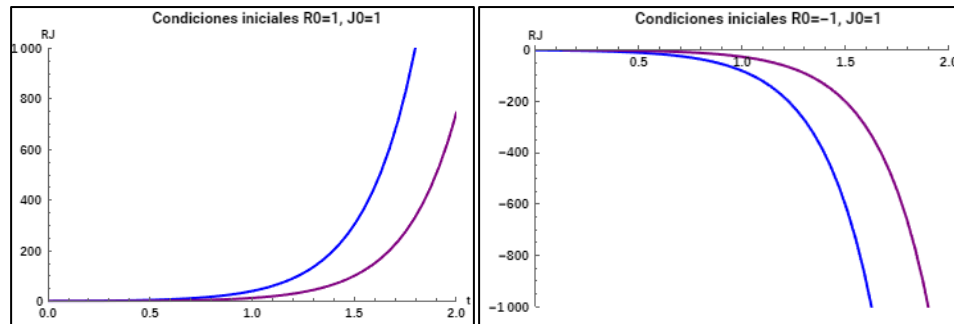


Figura 28.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Narcisista-Seguro** con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = 1$.

Estos escenarios muestran las posibilidades de que Romeo y Julieta se enamoren mutuamente o se odien, destacando la inestabilidad de su relación.

2.2.2.2. Mujer que No Joda es Hombre o Tiene Mozo: $|a| < |b|$

Esto es cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios. El discriminante en (56) entonces, sería negativo, y como $T = 0$ entonces se tendría dos valores propios imaginarios puros, es decir, sin parte real. Por lo que el punto de equilibrio sería un centro estable.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $a = 2$ y $b = -3$. **Estos parámetros** describen que, la respuesta emocional de Romeo está moderadamente alineada con sus propias emociones, pero es negativamente influenciada por las emociones de Julieta. Por otro lado, Julieta es positivamente influenciada por las emociones de Romeo, pero su propia reacción a sus sentimientos es ligeramente negativa.

Analizando emocionalmente esta relación (55) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que, como a es positivo y b es negativo, representa una dinámica

donde Romeo se energiza a partir de sus propias experiencias positivas, pero se siente desconcertado ante la felicidad de Julieta. Julieta, por su parte con c positivo y d negativo, halla su alegría en el bienestar de Romeo, pero lucha contra una tendencia a la introspección negativa.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, que representan un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de romeo, se realiza el siguiente análisis.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

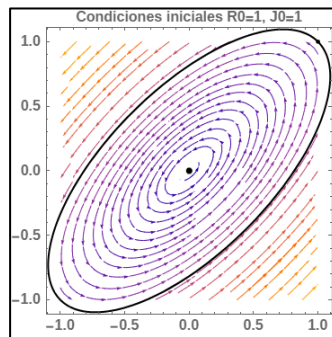


Figura 29.- Plano de fases con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$.

Se observa que el plano de fases muestra un sistema cíclico y estable donde las emociones de Romeo y Julieta oscilan en un patrón recurrente alrededor de un punto fijo, indicando una relación que, a pesar de sus altibajos, tiende a volver a un equilibrio emocional. Este comportamiento sugiere una dinámica de pareja resiliente, capaz de atravesar períodos de conflicto y armonía sin desviarse hacia extremos emocionales, manteniendo así una conexión constante y una capacidad de retorno a la estabilidad.

Tal comportamiento es característico de un centro en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias orbitan alrededor del punto de equilibrio sin llegar a desestabilizarse. Sprott (2004) los describe como “un ciclo interminable, pero nunca apático”.

El gráfico de la solución correspondiente al plano de fase anterior es:

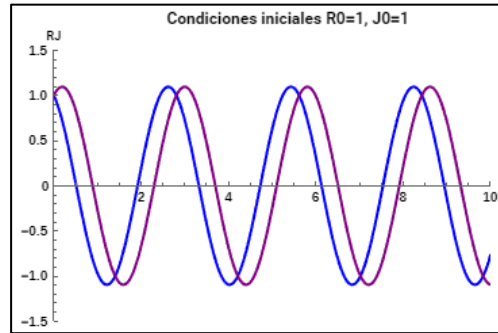


Figura 30.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 5, b = -3, c = -3, d = -5$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$

Este gráfico corresponde a lo mencionado anteriormente, donde las ondas se mueven juntas, lo que indica una coordinación en sus ciclos emocionales. A pesar de que las amplitudes de sus emociones pueden ser distintas en puntos específicos, las ondas alcanzan sus picos y valles al mismo tiempo, sugiriendo que los momentos de felicidad y tristeza ocurren a la par, pero con una diferencia temporal. Este patrón implica una relación en la que ambos individuos están fuertemente conectados y experimentan sus emociones en paralelo.

2.2.3. Ama y Te Amarán, Odia y Te Odiarán.

Ahora, se analizará la situación en la que dos personas tienen sentimientos idénticos entre sí, es decir, $c = b$ y $d = a$. En términos de dinámica de relación, esto sugiere un alto grado de empatía y simpatía mutua, donde las emociones positivas y negativas son compartidas y amplificadas de igual manera entre ambos, potencialmente llevando a una fuerte conexión o comprensión mutua.

En este contexto, se presenta la posibilidad de cuatro perfiles conductuales, estos son: Dos entusiastas, dos narcisistas, dos seguros y dos solitarios.

En este escenario, remplazando estos valores en el sistema (45), se vería como:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \\ \frac{dJ}{dt} = bR(t) + aJ(t) \end{cases} \quad (57)$$

Si calculamos valores propios utilizando la ecuación (51) se tendría:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a+a)^2 - 4(a(a) - (b)b)} = a \pm b \quad (58)$$

Entonces, la dinámica de pareja depende de a y b .

2.2.3.1. Sigue Pensando que la Marimonda es Mickey: $|a| > |b|$

Esto es, nuevamente, cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él. Los valores propios (58) en este contexto son reales y, al compartir el mismo signo, originan un nodo. En el caso de parejas donde ambos son dos seguros o dos solitarios, es decir $a < 0$, los valores propios resultan ser negativos, dando lugar a un nodo estable. Por otro lado, en las relaciones donde ambos son dos narcisistas o dos entusiastas, es decir $a > 0$, los valores propios son positivos, conduciendo a un nodo inestable.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utilizará el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $a = -5$, $b = 3$ y $a = 5$, $b = 3$.

Los parámetros $a = -5$ y $b = 3$ describen el perfil conductual entre un **dos seguros o dos solitarios**, donde describen una relación en la que ambos Romeo y Julieta tienen una influencia positiva el uno en el otro, pero ambos reaccionan negativamente a sus propias emociones.

Analizando emocionalmente esta relación (57) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que, como únicamente b y c son positivos, ambos miembros de la pareja podrían depender fuertemente de su compañero para encontrar la felicidad, mientras que,

como a y d son negativos, sus problemas internos podrían ser fuentes significativas de angustia personal y tensión dentro de la relación.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay amor mutuo inicial y las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = -1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de Julieta, se realiza el siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fases correspondientes a estos perfiles serían:

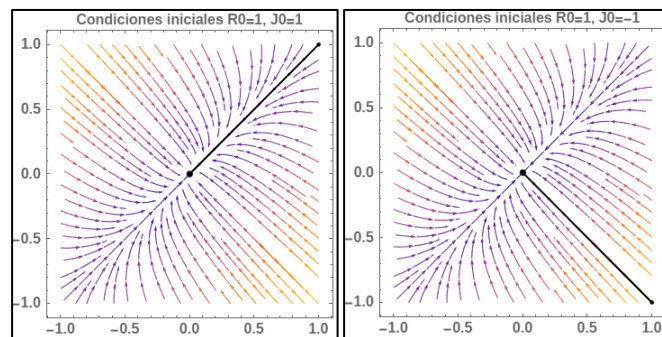


Figura 31.- Plano de fases de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = -5, b = 3, c = 3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = 1, J_0 = -1$.

Considerando nuevamente la división del plano de fases en cuatro regiones, se observa que, para cualquier condición inicial, independiente de la región donde se ubique, sus trayectorias tienden al origen, esto quiere decir que la relación tiene una tendencia natural a volver a un estado neutral o equilibrado, independientemente de las emociones positivas o negativas experimentadas inicialmente. El punto de equilibrio actuaría como una base fuerte y central para la relación, sugiriendo que ambos miembros de la pareja tienen mecanismos efectivos para manejar sus emociones y regresar a un entendimiento mutuo.

Tal comportamiento es característico de un nodo estable en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias tienden al punto de equilibrio. Sprott (2004) describe esta situación como "Un estado de apatía mutua".

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fases anteriores son:

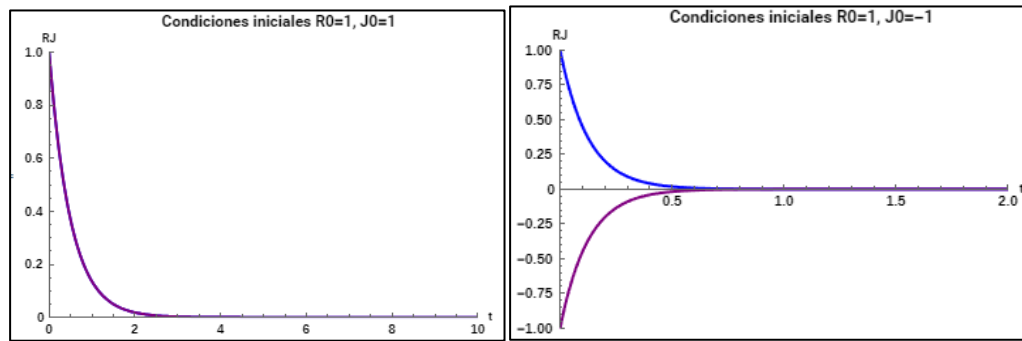


Figura 32.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = -5, b = 3, c = 3, d = -5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = 1, J_0 = -1$.

Estos gráficos muestran fielmente la descripción del plano de fases, mostrando que independientemente del estado inicial de emociones que tenga la relación de pareja, esta tiende a equilibrarse. Tras un comienzo intenso o conflictivo, Romeo y Julieta entran en una fase de tranquilidad y estabilidad emocional conforme se adaptan y se acostumbran el uno al otro. Esto no implica que la relación se deteriore, sino que es un estado de adaptación hacia la estabilidad emocional.

Por otra parte, los parámetros $a = 5$ y $b = 3$ describen el perfil conductual entre un **dos narcisistas o dos entusiastas**, donde describen una relación en la que ambos Romeo y Julieta se ven positivamente afectados por sus propias emociones y también se sienten positivamente influenciados por las del otro.

Analizando emocionalmente esta relación (57) con estos cuatro parámetros establecidos, como a , b , c y d son positivos, es posible decir tanto Romeo, como Julieta, tienen una fuerte influencia el uno sobre el otro y sobre sí mismos.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay amor mutuo inicial, las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = -1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de Julieta y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = -1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de los dos, se realiza el siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fases correspondientes a estos perfiles serían:

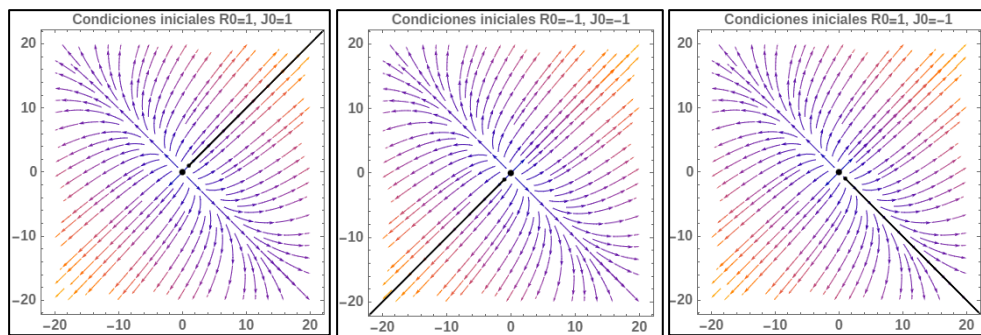


Figura 33.- Plano de fases de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = 5, b = 3, c = 3, d = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$; $R_0 = 1, J_0 = -1$; $R_0 = -1, J_0 = -1$.

Considerando nuevamente la división del plano de fases en 4 regiones es posible decir que si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o derecha corresponden a una dinámica en la que el afecto mutuo entre Romeo y Julieta se intensifica exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o izquierda, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos

comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación. Donde pueden acabar en mutuo amor, mutuo odio o un conflicto de sentimientos opuestos.

Tal comportamiento es característico de un nodo inestable en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se alejan en todas direcciones del punto de equilibrio. Sprott (2004) describe esta situación como "Una fiesta entre amor, guerra y uno amando y el otro odiando".

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fases anteriores son:

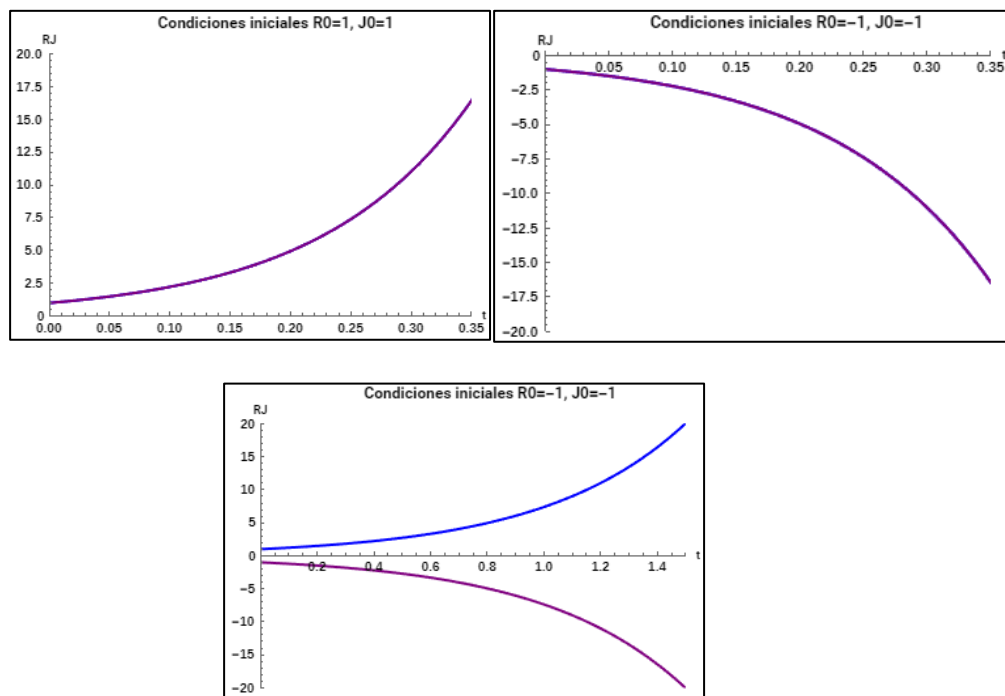


Figura 34.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios**

con parámetros $a = 5, b = 3, c = 3, d = 5$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1; R_0 = 1,$

$$J_0 = -1; R_0 = -1, J_0 = -1.$$

Los gráficos de las soluciones ilustran fielmente la descripción del plano de fases, mostrando una dinámica volátil, los momentos de felicidad de ambos escalan rápidamente a una gran euforia, pero del mismo modo, los conflictos se intensifican con facilidad. Además de tener la posibilidad de que tengan un conflicto emocional donde uno puede amar, pero odiar al mismo tiempo.

2.2.3.2. Mujer que No Joda es Hombre o Tiene Mozo: $|a| < |b|$

Esto es, nuevamente, cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios. Los valores propios (58) son reales, pero con signo contrario. Por lo tanto, el punto de equilibrio sería un punto silla, lo que implica una inestabilidad.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utilizará el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $a = 2$, $b = 3$ y $a = -2$, $b = -3$.

Los parámetros $a = 2$ y $b = 3$ describen el perfil conductual entre un **dos seguros o dos solitarios**, donde describen una relación en la que ambos Romeo y Julieta se ven positivamente afectados por sus propias emociones y también se sienten positivamente influenciados por las del otro.

Analizando emocionalmente esta relación (57) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que, como todos los parámetros son positivos, Romeo y Julieta tienen una fuerte influencia el uno sobre el otro y sobre sí mismos.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay amor mutuo inicial y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = -1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de ambos, se realiza el siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fases correspondientes a estos perfiles serían:

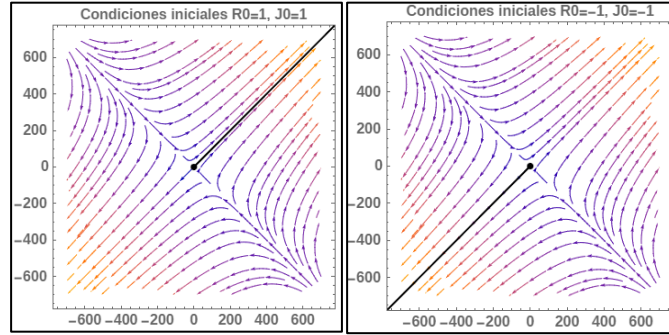


Figura 35.- Plano de fases de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = 2, b = 3, c = 3, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = -1$.

$$J_0 = -1.$$

Considerando nuevamente la división del plano de fases en cuatro regiones es posible decir que si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o derecha corresponden a una dinámica en la que el afecto mutuo entre Romeo y Julieta se intensifica exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o izquierda, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Tal comportamiento es característico de un punto silla en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se acercan al punto de equilibrio, pero se alejan sin límite de este. Sprott (2004) describe esta situación como "Una fiesta entre amor o guerra".

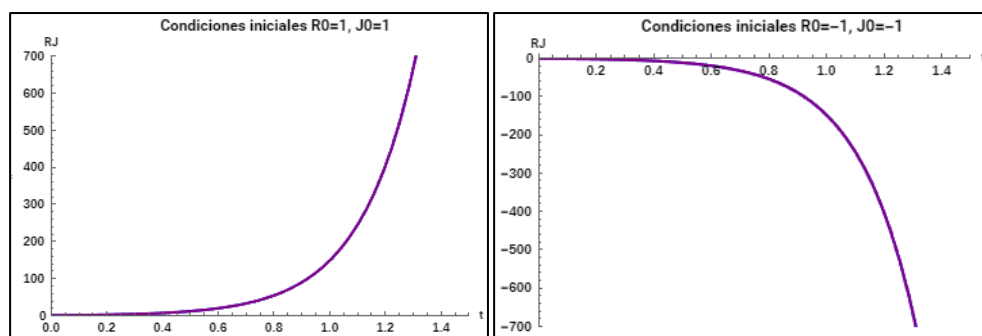


Figura 36.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = 2, b = 3, c = 3, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1$ y $R_0 = -1, J_0 = -1$.

Los gráficos de las soluciones ilustran fielmente la descripción del plano de fases, mostrando una dinámica volátil, los momentos de felicidad de ambos escalan rápidamente a una gran euforia, pero del mismo modo, los conflictos se intensifican con facilidad.

Por otra parte, los parámetros $a = -2$ y $b = -3$ describen el perfil conductual entre un **dos narcisistas o dos entusiastas**, donde describen una relación en la que ambos Romeo y Julieta se ven negativamente afectados por sus propias emociones y también se sienten negativamente influenciados por las del otro.

Analizando emocionalmente esta relación (57) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que, como todos los parámetros son negativos, ambos individuos tienden a enfocarse en aspectos negativos o críticos de sí mismos y de su pareja, lo que puede llevar a un descenso en la percepción que tienen de la relación.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1.1$, que representan un escenario donde tienen un afecto inicial, en este caso ligeramente mayor el de Julieta, se realiza el siguiente análisis.

El gráfico del plano de fase correspondiente a estos perfiles sería:

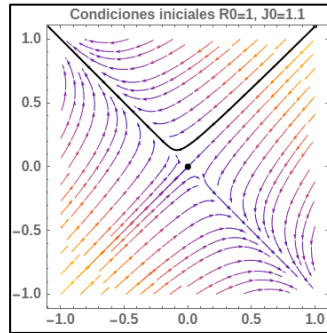


Figura 37.- Plano de fases de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = -2, b = -3, c = -3, d = -2$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1.1$.

Considerando nuevamente la división del plano de fases en 4 regiones es posible decir que si las condiciones iniciales están situadas en la región superior o izquierda corresponden a una dinámica en la que implica un crecimiento exponencial del amor mutuo. En contraste, si dichas condiciones se ubican en la región inferior o derecha, se traducen en una dinámica de disminución exponencial del afecto. Estos comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Tal comportamiento es característico de un punto silla en la teoría de sistemas dinámicos, donde las trayectorias se acercan al punto de equilibrio, pero se alejan sin límite de este. Sprott (2004) describe esta situación como "Uno amando y el otro odiando".

El gráfico de la solución correspondiente al plano de fase anterior es:

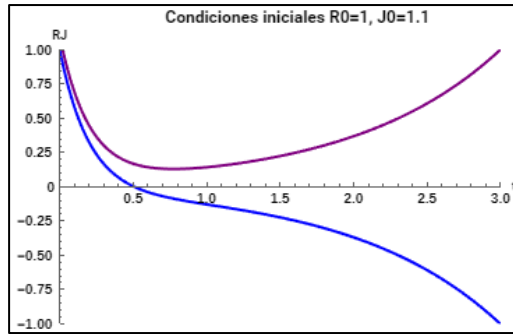


Figura 38.- Gráfico de soluciones de los perfiles conductuales **dos seguros o dos solitarios** con parámetros $a = -2, b = -3, c = -3, d = -2$ y condiciones iniciales $R_0 = 1, J_0 = 1.1$.

La figura ilustra fielmente la descripción del plano de fases, mostrando que a pesar de que los dos inician un amor mutuo Romeo desarrolla un amor cada vez menos intenso por Julieta, mientras que simultáneamente, Julieta experimenta un amor acelerado. Estos sentimientos hacen que la dinámica de pareja tenga, a largo plazo, un conflicto emocional.

2.2.4. Tanto es Amar Sin Ser Amado, Como Responder Sin Ser Preguntado.

Por último, se analizará la situación atípica en la que los sentimientos de Romeo hacia Julieta no se ven afectados ni por sus propios sentimientos ni por los de Julieta, esto es R es constante, es decir, $a = b = 0$. En términos de dinámica de relación, podría considerarse un escenario donde el mantiene una postura emocional inmutable ante las emociones de ella, lo cual podría llevar a ella a experimentar una ilusión de conexión o compromiso.

En este escenario, remplazando estos valores en el sistema (45), se vería como:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = 0 \\ \frac{dJ}{dt} = cR(t) + dJ(t) \end{cases} \quad (59)$$

Si calculamos valores propios utilizando la ecuación (51) se tendría:

$$\lambda_{1,2} = \frac{0+d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0+d)^2 - 4(0)d - c(0)} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \quad (60)$$

De modo que,

$$\lambda = d \quad (61)$$

Calculando los puntos de equilibrio del sistema (59):

$$cR + dJ = 0 \quad (62)$$

Manipulando (62) se obtiene:

$$J = -\frac{c}{d}R, \quad d \neq 0$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio seria de la forma $(R_0, -\frac{c}{d}R_0)$, siendo dependiente del valor de R_0 .

Esto implica que todos los puntos de equilibrio se encuentran en la recta $J = -\frac{c}{d}R_0$, la cual se destacará de color gris en los próximos gráficos del plano de fase.

Es importante aclarar que todos los gráficos del plano de fase se generan a partir del mismo código base común. No obstante, para ilustrar adecuadamente la recta que engloba a los puntos de equilibrio, se recurre a la graficar la recta con pendiente $-\frac{c}{d}$. Para incorporar esta representación gráfica, solo es necesario añadir al código existente la siguiente instrucción:

(Calcula la pendiente y grafica la recta perpendicular al vector propio *)*

pendiente = -c/d;

rectaPerpendicular = Graphics[{Gray,Thick, InfiniteLine[{0, 0}, {1, pendiente}]}];

A continuación, se analizará las tres combinaciones de dinámica de pareja que dependen de Julieta, es decir de c y d .

2.2.4.1. El que No Cae, Resbala: $d > 0$ y $c > 0$

Los valores propios (61) en este contexto son reales, uno positivo y el otro nulo. En consecuencia, cualquier pequeña perturbación podría intensificarse con el tiempo, llevando a un aumento descontrolado de los sentimientos que podría presentar Julieta. Por lo tanto, se generaría una inestabilidad en la relación.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo planteamiento de Munoa (2020), adoptando los parámetros $c = 5$ y $d = 3$. **Estos parámetros** describen que Julieta es positivamente influenciada tanto por las emociones de Romeo como por sus propios sentimientos.

Analizando emocionalmente esta relación (59) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que es una dinámica donde Romeo hace que Julieta se sienta sola en su expresión emocional, pero a pesar de ello, como c y d son positivos, Julieta insiste y reaccionando positivamente ante este hecho.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay amor mutuo inicial y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de Romeo, se realiza el siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fase correspondientes a estos escenarios serían:

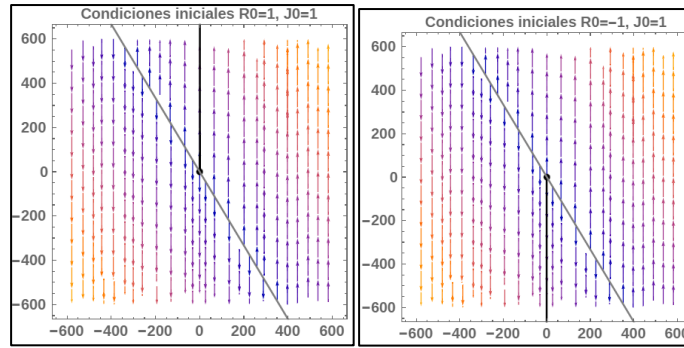


Figura 39.- Plano de fases con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = 3$; condiciones iniciales

$$R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Considerando nuevamente la división del plano de fases, pero esta vez en 2 regiones que es la superior e inferior, es posible decir que si, las condiciones iniciales están situadas en la **región superior**, corresponden a una dinámica en la que Julieta terminará amando a Romeo sin fin. En cambio, si dichas condiciones se ubican en la **región inferior**, se traducen en una dinámica donde Julieta terminará desamando a Romeo indefinidamente. Estos comportamientos implican que las soluciones se alejan del punto de equilibrio, lo que señala una falta de estabilidad en la relación.

Los gráficos de las soluciones correspondientes los planos de fase anteriores son:

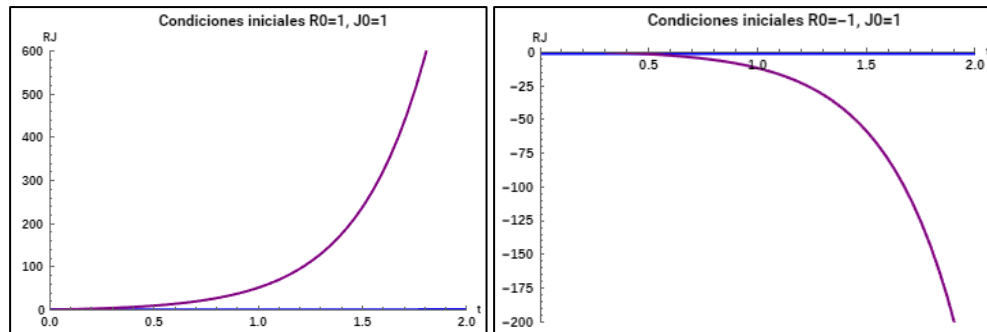


Figura 40.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = 3$; condiciones

$$\text{iniciales } R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Este gráfico ilustra lo discutido anteriormente, destacando cómo Julieta experimenta fluctuaciones emocionales extremas, aumentando o disminuyendo de manera continua y posiblemente insostenible, independientemente de los sentimientos de Romeo hacia ella.

2.2.4.2. Del Amor al Odio Sólo Hay un Paso: $b < 0$ y $c > 0$

Los valores propios (61) en este contexto son reales, solamente habiendo uno negativo. Al identificarse a ella como una “amante segura” cualquier perturbación podría estabilizarse con el tiempo por esta característica. Por lo tanto, se generaría una estabilidad en la relación.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo planteamiento del caso anterior modificando el signo del parámetro d , obteniendo así $c = 5$ y $d = -3$. **Estos parámetros** describen que Julieta se siente positivamente influenciada por Romeo, sin embargo, Julieta también experimenta una tendencia hacia la autocrítica o la insatisfacción con sus propias experiencias emocionales.

Analizando emocionalmente esta relación (59) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que es una dinámica donde Romeo hace que Julieta se sienta sola, pero a pesar de ello, como c es positivo y d es negativo, Julieta se debate entre la valoración del afecto de Romeo y la lucha interna con su propia autoevaluación crítica.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay amor mutuo inicial y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de Romeo, se realiza el siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fase correspondientes a estos escenarios serían:

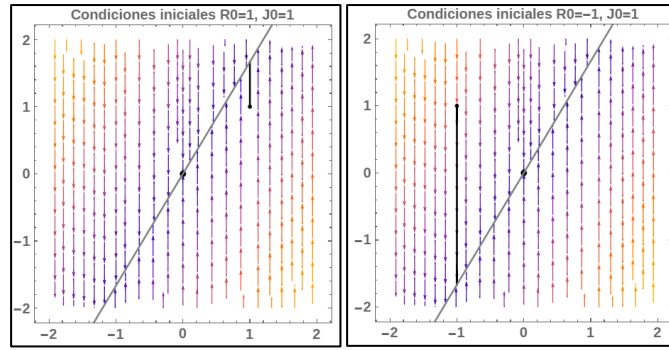


Figura 41.- Plano de fases con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones iniciales

$$R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Considerando nuevamente la división del plano de fases en 2 regiones, es posible decir que independientemente de la ubicación de las condiciones iniciales, ya sea en la **región superior** o **inferior**, estas siempre tienden hacia el equilibrio. Este patrón sugiere que Julieta tiene una capacidad inherente para adaptarse y encontrar una especie de estabilidad emocional en respuesta a la neutralidad de Romeo. Se podría interpretar que Julieta, con el tiempo, se habitúa a la expresividad emocional constante de Romeo, alcanzando un entendimiento y una aceptación de la dinámica.

Los gráficos de las soluciones correspondientes los planos de fase anteriores son:

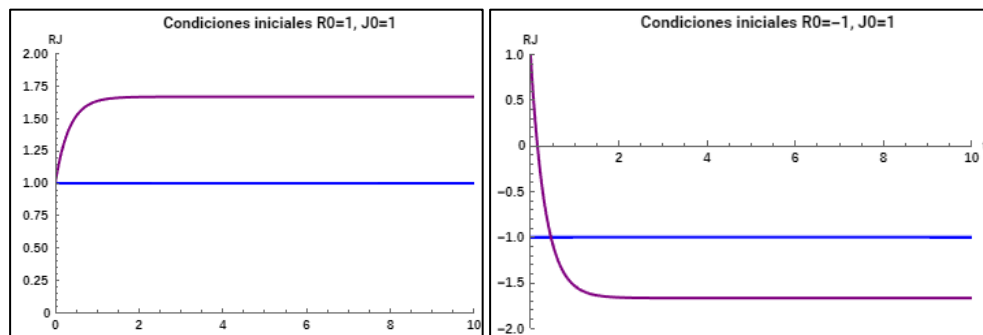


Figura 42.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones

$$\text{iniciales } R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Estos gráficos reflejan las situaciones descritas anteriormente, no importa la naturaleza de las emociones iniciales de Julieta, con el tiempo, estas tienden a un estado estable, logrando un equilibrio emocional. Esto indica que, aunque las reacciones iniciales puedan ser variadas, la relación parece tener un mecanismo inherente que conduce a ambos amarse u odiasen mutuamente.

2.2.4.3. Más Tragada que Yuca en Sancocho: $b < 0$ y $c < 0$

Los valores propios (61) en este contexto son reales, uno negativo y el otro nulo. Esto implica que Julieta se encuentra en un estado de completo rechazo emocional hacia Romeo.

Para ejemplificar esta dinámica emocional se utiliza el mismo planteamiento del caso anterior modificando el signo del parámetro c , obteniendo así $c = -5$ y $d = -3$. **Estos parámetros** describen que la influencia de Romeo sobre Julieta es negativa, así como la respuesta de Julieta a sus propias emociones.

Analizando emocionalmente esta relación (59) con estos cuatro parámetros establecidos, es posible decir que, como c y d son negativos, Romeo, con su indiferencia, contribuye involuntariamente al sentimiento de soledad emocional de Julieta, llegando incluso a herir sus sentimientos, lo que potencia la tendencia de Julieta a ser autocrítica y sentirse insatisfecha consigo misma.

Explorando las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $J_0 = 1$ que representan un escenario donde hay amor mutuo inicial y las condiciones iniciales $R_0 = -1$ y $J_0 = 1$, representando un escenario donde tienen un conflicto inicial, en este caso por parte de Romeo, se realiza el siguiente análisis.

Los gráficos del plano de fase correspondientes a estos escenarios serían:

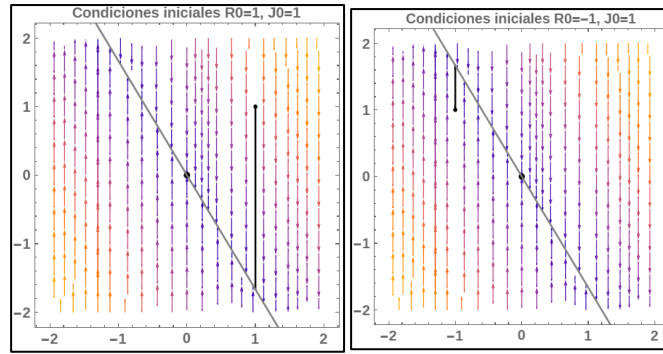


Figura 43.- Plano de fases con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones iniciales

$$R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Considerando nuevamente la división del plano de fases en 2 regiones, es posible decir, al igual que el caso anterior, que independientemente de la ubicación de las condiciones iniciales, ya sea en la **región superior** o **inferior**, estas siempre tienden hacia el equilibrio. Este patrón sugiere que Julieta, a pesar de sus sentimientos, encuentra una estabilidad emocional en respuesta a la neutralidad de Romeo. Se podría interpretar que Julieta, con el tiempo, se habitúa a todos los problemas llegando a una aceptación de la realidad de la dinámica emocional.

Los gráficos de las soluciones correspondientes los planos de fase anteriores son:

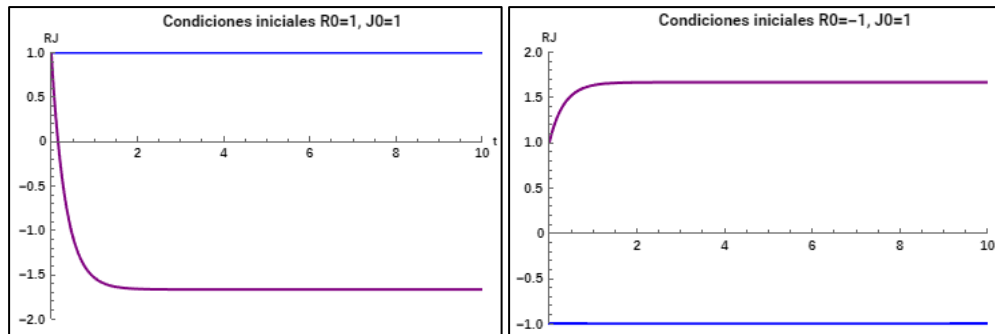


Figura 44.- Gráfico de soluciones con parámetros $a = 0, b = 0, c = 5, d = -3$; condiciones

$$\text{iniciales } R_0 = 1, J_0 = 1 \text{ y } R_0 = -1, J_0 = 1.$$

Estos gráficos reflejan las situaciones descritas anteriormente, no importa la naturaleza de las emociones iniciales de Julieta, con el tiempo, estas tienden a un estado estable, logrando un equilibrio emocional. Esto indica que, aunque las reacciones iniciales puedan ser variadas, la relación parece tener un mecanismo inherente que conduce a uno de ellos amando y el otro odiando.

2.3. Conclusiones del Modelo Lineal

Hasta ahora, se ha notado que las trayectorias de las relaciones pueden variar considerablemente de acuerdo con la naturaleza individual de los involucrados, lo cual es consistente con las expectativas. A pesar de que el modelo propuesto se basa en ecuaciones sencillas y solo tiene en cuenta las emociones internas de los miembros, aun así, se ha presenciado en algunas ocasiones comportamientos complejos e interesantes.

No obstante, este modelo presupone una respuesta mecánica y aislada de las influencias externas por parte de Romeo y Julieta, llevándolos a amar u odiar indefinidamente. Pero en la vida real, los humanos son entidades mucho más maleables y dinámicas, sujetas a una gama más amplia de influencias y comportamientos espontáneos. Por lo tanto, en el siguiente capítulo, se describirá un modelo que refleje más fielmente la complejidad y variabilidad de las interacciones humanas en las relaciones de pareja.

CAPÍTULO 3

3.1. Modelo No Lineal de Romeo y Julieta

El modelo que se presentó en el capítulo previo involucró sólo ecuaciones lineales que producen una dinámica limitada para las relaciones amorosas, importante para comprender de manera simple algunos asuntos, pero es claro que las relaciones amorosas distan mucho de ser lineales. Por ello, en este capítulo se analizará el comportamiento no lineal de un modelo alternativo.

3.1.1. Planteamiento del Modelo.

Existen múltiples formas de incorporar no linealidades en un modelo. Sprott (2004) hace uso de conceptos derivados del modelo logístico y presenta un modelo caracterizado por la siguiente dinámica:

“Imagine que Romeo responde positivamente al amor de Julieta, pero si ella lo ama demasiado, él se siente sofocado y reacciona adversamente. Por el contrario, si Julieta es lo suficientemente hostil. Romeo podría decidir ser amable con ella, en lo que Gottman (2002) llama "reparar la no linealidad".”

Partiendo del modelo lineal (45) analizando el caso de Romeo (42) se puede decir que:

- Cuando $b > 0$, Romeo responde positivamente a los sentimientos que Julieta tiene hacia él, es decir, su amor hacia Julieta crece si ella le ama. No obstante, para reflejar la situación de Sprott (2004) en la cual un exceso de intensidad en los sentimientos de ella puede ser abrumador para él, llevándolo a responder de manera negativa, se modifica el modelo de la siguiente manera.

Se reemplaza bJ por la función logística $bJ(1 - |J|)$, indicando que, si $J > 1$, entonces el término $(1 - |J|)$ es negativo, lo que significa que el efecto neto de bJ está disminuyendo

potencialmente por el factor $(1 - |J|)$, sugiriendo que el amor o interés de Romeo por Julieta disminuye. En otras palabras, **Romeo experimenta una sensación de agobio y su amor por Julieta empieza a disminuir.**

- Cuando $b < 0$, Romeo responde negativamente a los sentimientos que Julieta tiene hacia él, es decir, su amor se apaga si ella le ama. No obstante, para reflejar la situación de Sprott (2004) en la cual un amor apasionado por parte de Julieta captura la atención de Romeo y despierta una fuerte atracción hacia ella, se modifica el modelo de la siguiente manera.

Se reemplaza bJ por la función logística $bJ(1 - |J|)$, de manera que, si $J < 1$, entonces el término $(1 - |J|)$ es positivo, lo que significa que el efecto neto de bJ está potencialmente aumentado por el factor $(1 - |J|)$, sugiriendo un interés o amor creciente de Romeo hacia Julieta. En otras palabras, **el interés de Romeo se enciende si ella lo rechaza y él se siente más atraído por Julieta.**

En el caso de Julieta ocurre exactamente lo mismo, por lo que se reemplaza cR por la función logística $cR(1 - |R|)$ se y se obtienen efectos equivalentes a los recién explicados para el caso de Romeo. Luego, el modelo sugerido por Sprott (2004) es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR + bJ(1 - |J|) \\ \frac{dJ}{dt} = cR(1 - |R|) + dJ \end{cases} \quad (63)$$

El sistema plano (63) es no lineal y autónomo y sus soluciones dependerán tanto de las condiciones iniciales como de los cuatro parámetros independientes del tiempo. Adicionalmente, se observa que $J = 1$ y $R = 1$, corresponde a los estados en los que ni Romeo ni Julieta son influenciados por los sentimientos del otro, actuando solamente en función de sus propias emociones.

3.1.1.1. Perfiles Conductuales en las Relaciones

Desde la perspectiva de Romeo y Julieta, se identifican los mismos cuatro perfiles de romanticismo descritos en el capítulo anterior. Al cruzar los perfiles de ambos personajes, emergen dieciséis posibles dinámicas de pareja. Sin embargo, Munoa (2020) señala que sólo diez de estas combinaciones son únicas. Esta reducción se debe a que, al analizar la Tabla 4.- del capítulo 2 que muestra las combinaciones posibles de dinámicas de pareja en el modelo básico y compararlas con las nuevas conductas de Romeo y Julieta en el modelo no lineal, se descubre que algunas relaciones son equivalentes.

Esto ocurre porque las reacciones de Romeo y Julieta son simétricas al intercambiar sus roles; es decir, la reacción de Romeo a altos niveles de intensidad de Julieta es idéntica en ambas combinaciones, pero con los roles invertidos. Por esta razón, Munoa (2020) decide destacar únicamente los diez perfiles, que, en la siguiente tabla, se marcan en negrilla como únicos.

Romeo/Julieta	Entusiasta $(c > 0, d > 0)$	Narcisista $(c < 0, d > 0)$	Seguro $(c > 0, d < 0)$	Solitario $(c < 0, d < 0)$
Entusiasta $(a > 0, b > 0)$	Romeo y Julieta disfrutaban del afecto mutuo, pero se sienten abrumados si la intensidad del otro es demasiada.	Romeo acoge con gusto el afecto de Julieta, intensificando su atención si ella se retira, aunque se abruma si ella es excesiva. Julieta, aunque	Romeo valora el cariño de Julieta, respondiendo con más afecto si ella se aleja. Julieta, mientras tanto, es reservada a expresar su amor, pero	Romeo acoge afectuosamente el cariño de Julieta y redobla sus esfuerzos si ella se distancia. Julieta, en cambio, suele alejarse tanto de sus propias

		no siempre valora la emociones como cómoda con las ternura de de las atenciones de Romeo, aunque demostraciones Romeo, se se siente de amor de esfuerzo por agobiada si es Romeo. corresponder. excesiva.	
Narcisista $(a > 0, b < 0)$	Julieta aprecia el afecto de Romeo y muestra mayor interés cuando él se distancia, pero se siente abrumada si él es excesivamente efusivo. Por su parte, Romeo, aunque a veces se siente incómodo con las demostraciones de afecto de Julieta, hace esfuerzos por corresponderlas.	Romeo y Julieta se muestran afecto, pero a menudo se sienten insatisfechos con la reciprocidad del otro. Si esta insatisfacción crece, ambos intentan compensar esta falta de cariño.	Romeo se siente bien consigo mismo, pero no está satisfecho con el amor de Julieta, quien enfrenta una lucha interna entre sus emociones y las demostraciones de Romeo. Si ella muestra más desafecto, Romeo podría responder con más cariño para atraerla.
Seguro $(a < 0, b > 0)$	Julieta aprecia el afecto que Romeo le brinda, mostrándose más	Julieta recibe con entusiasmo el cariño de Romeo, pero	Romeo y Julieta comparten una insatisfacción personal, sin tanto a sus

	cariñosa cuando mantiene cierta él se distancia. distancia ante sus Por su parte, propias Romeo tiende a emociones y se ser reservado en aleja aún más si expresar su el afecto es amor, pero excesivo. valora la dulzura Mientras tanto, de Julieta, Romeo se anima aunque se siente con las abrumado si es atenciones de demasiado Julieta, aunque intensa. se retrae frente a sus propias emociones negativas.	embargo, encuentran consuelo y motivación en el afecto mutuo, impulsándose el uno al otro hacia una mejora emocional.	propios sentimientos como a los de Romeo, mientras que Romeo, aunque lucha con sus emociones, valora el afecto de Julieta. Ambos podrían enfrentar su propio pesimismo intentando encontrar consuelo en la valoración y el estímulo mutuo.
Solitario ($a < 0, b < 0$)	Julieta recibe con Julieta está en calidez el afecto paz consigo de Romeo y misma, aunque redobla sus no está satisfecha esfuerzos si él se con el amor que aleja. En recibe de Romeo, contraste, quien se debate Romeo tiende a entre sus propias distanciarse tanto emociones y los de sus propias gestos de afecto	Romeo reacciona de manera desfavorable tanto a sus propias emociones como a las de Julieta, mientras que Julieta lucha con sus sentimientos,	Julieta y Romeo reaccionan negativamente a cualquier muestra de afecto, tanto propio como del otro. Sin embargo, en situaciones

emociones como	de Julieta. Si él	pero aprecia el	extremas,
de las muestras	se muestra más	cariño	de ambos intentan
de amor de	distante, Julieta	Romeo.	En demostrar
Julieta.	podría responder	momentos	de afecto para
	con mayor	pesimismo	mitigar esta
	ternura para	personal, ambos	negatividad.
	acercarse a él.	podrían	
		encontrar alivio	
		en el aprecio y el	
		estímulo mutuo.	

Tabla 6.- Combinaciones posibles de dinámicas de pareja en el modelo no lineal.

3.1.2. Puntos de Equilibrio y Caso General

Ahora, se procederá a calcular los puntos de equilibrio igualando las dos ecuaciones del sistema (63) a cero, así las cosas:

$$aR + bJ(1 - |J|) = 0 \quad (64)$$

$$cR(1 - |R|) + dJ = 0 \quad (65)$$

Debido a la complejidad inherente al sistema, se ha optado por emplear el software Wolfram Mathematica para hallar las soluciones. El código empleado, referido en adelante como Código para Puntos de Equilibrio (CPE), es el siguiente:

(* Definir las variables *)

vars = {R, J};

(* Definir los parámetros *)

params = {a, b, c, d};

(* Definir las ecuaciones del sistema *)

eqns = {a*R + b*J*(1 - Abs[J]) == 0, c*R*(1 - Abs[R]) + d*J == 0};

(* Resolver el sistema de ecuaciones para los puntos de equilibrio *)

sol = Solve[eqns, vars]

A continuación, se muestra la salida abreviada de Wolfram Mathematica al resolver el sistema no lineal:

Figura 45.- Soluciones de Mathematica al resolver el sistema (63).

Esta figura ilustra las soluciones para las variables R y J en función de los parámetros a , b , c y d . La salida de Mathematica muestra solo algunas de estas soluciones de manera abreviada debido a que en total hay 13 soluciones diferentes. Cada una de estas soluciones, excepto la solución $(0,0)$, está representada por expresiones extremadamente largas, algunas de las cuales contienen más de 8 términos muy extensos.

Estos hallazgos respaldan la observación de Munoa (2020), quien señala la presencia de 13 puntos de equilibrio, incluyendo el punto $(0,0)$, en contraste con Sprott (2004), que solo menciona la existencia de cuatro, incluido el origen. Este último es fácilmente identificable como un punto de equilibrio, ya que al sustituir $R = 0$ y $J = 0$ en las ecuaciones, el sistema se satisface.

Es importante destacar que, por razones de simplicidad, se optará por realizar únicamente la linealización utilizando la matriz jacobiana en el origen. Por lo tanto, se comenzará examinando de manera general la estabilidad del punto (0,0) a través de sus valores propios. Posteriormente, se analizarán casos específicos de los 10 perfiles conductuales posibles para estudiar el comportamiento de otros puntos de equilibrio que puedan existir, variando los valores iniciales de los casos y examinando también sus valores propios.

Ahora se procederá al cálculo de la matriz jacobiana en el origen. Se presenta a continuación:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R}(aR + bJ(1 - |J|)) & \frac{\partial}{\partial J}(aR + bJ(1 - |J|)) \\ \frac{\partial}{\partial R}cR(1 - |R|) + dJ & \frac{\partial}{\partial J}cR(1 - |R|) + dJ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & \frac{\partial}{\partial J}(aR + bJ(1 - |J|)) \\ \frac{\partial}{\partial R}cR(1 - |R|) + dJ & d \end{pmatrix}$$

Para calcular $\frac{\partial}{\partial J}(aR + bJ(1 - |J|))$ es necesario tener en cuenta que la presencia del valor absoluto sugiere la consideración de dos casos para J : uno para $J \geq 0$ y otro para $J < 0$, dado que el valor absoluto influye en la diferenciabilidad de la función. Analizando estos casos:

- **Caso 1: $J \geq 0$.**

La función sería $aR + bJ(1 - J)$ y la derivada parcial sería $b - 2bJ = b(1 - 2J)$. La función tiene un punto de no diferenciabilidad en $J = 0$ debido al valor absoluto.

- **Caso 2: $J < 0$.**

La función sería $aR + bJ(1 + J)$ y la derivada parcial sería $b + 2bJ = b(1 + 2J)$.

Al analizar estos casos, se observa que se pueden simplificar con la expresión $b(1 - 2|J|)$, la cual es el resultado al calcular $\frac{\partial}{\partial J}(aR + bJ(1 - |J|))$. De manera similar, se calcula $\frac{\partial}{\partial R}cR(1 - |R|) + dJ$. Por consiguiente, la matriz Jacobiana queda expresada como:

$$J = \begin{pmatrix} a & b(1 - 2|J|) \\ c(1 - 2|R|) & d \end{pmatrix} \quad (66)$$

Este resultado es fundamental, ya que a partir de esta matriz se realizará la linealización de todos los puntos de equilibrio que pueden ir surgiendo para obtener sus comportamientos específicos. En este caso, al linealizar con respecto al punto (0, 0) se sustituye este punto en la matriz (66). El resultado es:

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (67)$$

Calculando los valores propios de (67) utilizando la ecuación característica (29) se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = \\ \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (68)$$

Desarrollando (67) usando la ecuación cuadrática:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Se tendría que,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)} \quad (69)$$

Se observa que, para este sistema no lineal, la expresión de los valores propios (69) es equivalente a la expresión de los valores propios (51). Por lo tanto, las interpretaciones sobre la

estabilidad de los puntos de equilibrio en el sistema no lineal son idénticas a las del sistema lineal; en otras palabras, las conclusiones son las mismas.

Teniendo en cuenta el hecho anterior, se sabe que, a partir del discriminante, existen soluciones reales si $(a + d)^2 \geq 4(ad - bc)$ y complejas en caso contrario, es decir, si $(a + d)^2 < 4(ad - cb)$.

Entonces, utilizando las notaciones traza donde $T = (a + d)$ y $D = (ad - cb)$, el sistema tiene:

3. Valores propios reales si $T^2 \geq 4D$.

- **Nodo - Inestable:** Si $T > 0$ y $D > 0$, es decir $ad > cb$, ambos autovalores son positivos.

- **Punto silla - Inestable:** Si $T > 0$ y $D < 0$, es decir $ad < cb$, los autovalores tienen signos opuestos, uno positivo y otro negativo.

- **Nodo - Estable:** Si $T < 0$ y $D > 0$, es decir $ad > cb$, ambos autovalores son negativos.

- **Punto silla - Inestable:** Si $T < 0$ y $D > 0$, es decir $ad < cb$, los autovalores tienen signos opuestos, uno positivo y otro negativo.

4. Valores propios imaginarios si $T^2 < 4D$.

- **Foco/Espiral - Inestable:** Si $T > 0$, la parte real de los valores propios es positiva.

- **Foco/Espiral - Estable:** Si $T < 0$, la parte real de los valores propios es negativa.

3.1.3. Análisis de Casos Particulares

Munoa (2020) explora cuatro casos particulares de las 10 parejas posibles, considerando del perfil conductual asociado los **signos** de los parámetros. Para este trabajo, se estudiarán todos

estos casos y se utilizará una descripción basados en populares dichos colombianos, esto se resume en la siguiente tabla:

Casos Particulares				
Estructura impuesta de los signos.	$a = d$ $c = b$	$a = d$ $c \neq b$	$a \neq d$ $c = b$	$a \neq d$ $c \neq b$
Caso 1:	Dos Entusiastas	Entusiasta y Narcisista	Entusiasta y Seguro	Entusiasta y solitario
Perfil conductual Asociado	Son como uña y mugre.	Uno dando papaya y el otro comiendo limón.	A quien tiene suerte, hasta el gallo le pone huevos.	A la fuerza ni los zapatos entran.
Parámetros Asociados al caso	$a, d > 0$ $c, b > 0$	$a, d > 0$ $c > 0 > b$	$d > 0 > a$ $c, b > 0$	$d > 0 > a$ $c > 0 > b$
Caso 2:	Dos Narcisistas	Solitario y Seguro	Solitario y Narcisista	Narcisista y Seguro
Perfil conductual Asociado	Como dos gallos en el mismo corral, mucho cacareo y poca acción.	Aunque la mona se vista de seda, mona se queda.	Amor con hambre no dura.	Amistad por interés, no dura porque no lo es.
Parámetros Asociados al caso	$a, d > 0$ $c, b < 0$	$a, d < 0$ $c > 0 > b$	$d > 0 > a$ $c, b < 0$	$d > 0 > a$ $c < 0 < b$
Caso 3:	Dos Seguros			

Perfil	Amor de lejos,
conductual	amor de
Asociado	pendejos.
Parámetros	
Asociados al	$a, d < 0$
caso	$c, b > 0$
Caso 4:	Dos Solitarios
Perfil	
conductual	Son como agua y
Asociado	aceite.
Parámetros	
Asociados al	$a, d < 0$
caso	$c, b < 0$

Tabla 1.- Casos Particulares descritos por Munoa (2020)

3.1.3.1. Caso Particular 1: $a = d$ y $c = b$.

3.1.3.1.1. Son como uña y mugre: $a, b, c, d > 0$.

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre dos entusiastas se modela utilizando los parámetros $a = b = 1$ y $c = d = 1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifican que los puntos de equilibrio del sistema de este escenario, estos son $(2, 2)$, $(-2, -2)$ y $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio para obtener el comportamiento del sistema entorno a estos puntos:

- Punto de equilibrio $(2, 2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

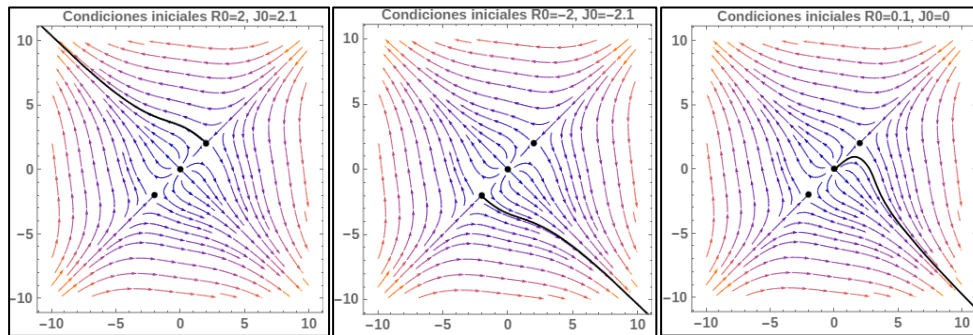
- Punto de equilibrio $(-2, -2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. En el plano TD se observa que el punto de equilibrio es un nodo inestable.

Los gráficos del plano de fase⁹ correspondientes a este escenario serían:



⁹ Es de mencionar que todos los gráficos del Plano de fase se generan a partir del mismo código base común. No obstante, se añade los demás puntos de equilibrio de forma manual con la función `Point[{R0, J0}]`.

Figura 46.- Plano de fase del perfil conductual dos entusiastas con parámetros $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$; condiciones iniciales $R_0 = 2, J_0 = 2.1$; $R_0 = -2, J_0 = -2.1$; $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

La dinámica de Romeo y Julieta varía entre el afecto y el desacuerdo. Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(2, 2)$ y $(-2, -2)$ lo que comienza como afecto mutuo y comprensión pronto se desvía, intensificándose hacia un amor desigual que distancia emocionalmente al otro miembro. Por otro lado, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(0, 0)$, se encuentran rápidamente con el amor o el conflicto sin espacio para buscar un medio equilibrado, lo que a menudo resulta en un amor unilateral y no correspondido.

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fases anteriores son:

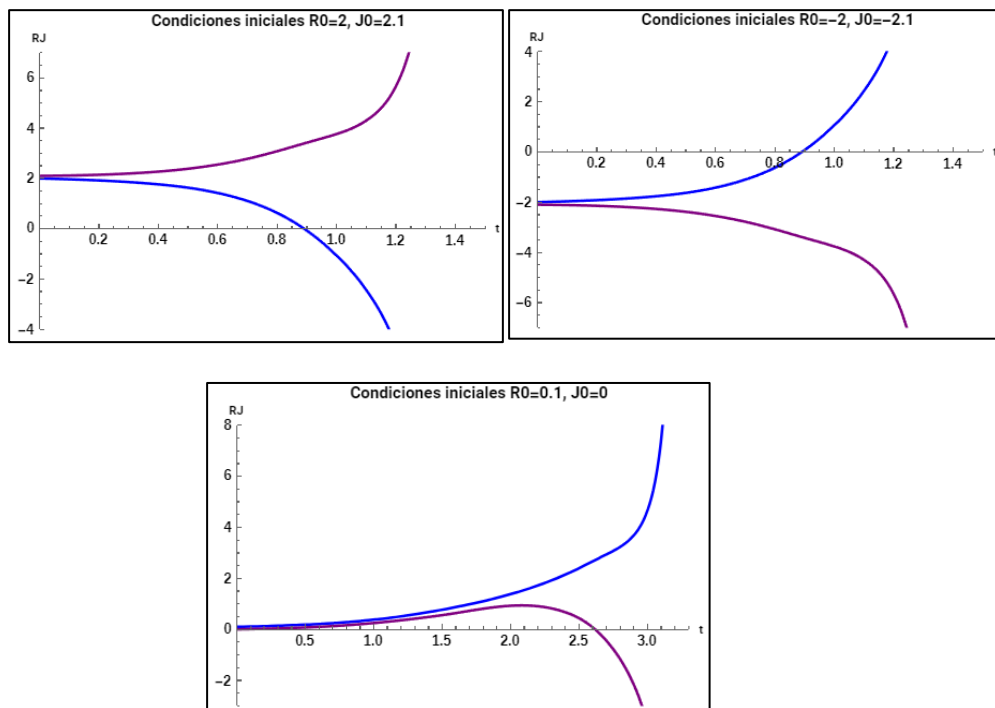


Figura 47.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **dos entusiastas** con parámetros $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$; condiciones iniciales $R_0 = 2, J_0 = 2.1$; $R_0 = -2, J_0 = -2.1$; $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

Los gráficos de soluciones confirman el patrón anticipado: Romeo y Julieta, ya sea que comiencen con sentimientos de amor mutuo o desamor, siempre terminan en un conflicto emocional. Con el tiempo, este camino los lleva a un punto donde uno ama de manera desmedida mientras que el otro experimenta un desamor intenso.

3.1.3.1.2. Como Dos Gallos en el Mismo Corral, Mucho Cacareo y Poca Acción:
 $a, d > 0$ y $c, b < 0$.

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre dos narcisistas se modela utilizando los parámetros $a = 1, b = -1, c = -2$ y $d = 2$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifican que los puntos de equilibrio del sistema de este escenario, estos son $(-2, 2)$, $(2, -2)$ y $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio para obtener el comportamiento del sistema entorno a estos puntos:

- Punto de equilibrio $(-2, 2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{73})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{73})$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(2, -2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{73})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{73})$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 3$. En el plano Traza-Determinante se observa que el punto de equilibrio es un nodo inestable.

Los gráficos del plano de fase correspondiente a este escenario serían:

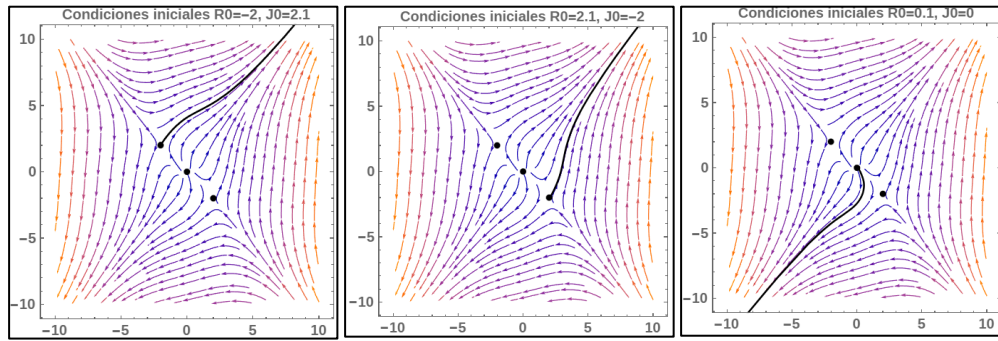


Figura 48.- Plano de fases del perfil conductual **dos narsicistas** con parámetros $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2.1$; $R_0 = 2.1, J_0 = -2$; $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

La relación entre Romeo y Julieta está marcada por una dinámica que fluctúa entre el amor y el odio. Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(-2, 2)$ y $(2, -2)$, aunque inicialmente parecen tender hacia una estabilidad, pronto se ven arrastrados hacia emociones intensas y polarizadas, manifestándose en un amor o un rechazo profundo y recíproco. Al mismo tiempo, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(0, 0)$, la relación se ve impulsada hacia estas pasiones extremas de forma espontánea, apuntando a una tendencia inherente de la pareja hacia las fluctuaciones emocionales del amor u odio mutuo sin posibilidad de acercarse a una armonía.

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fase anteriores son:

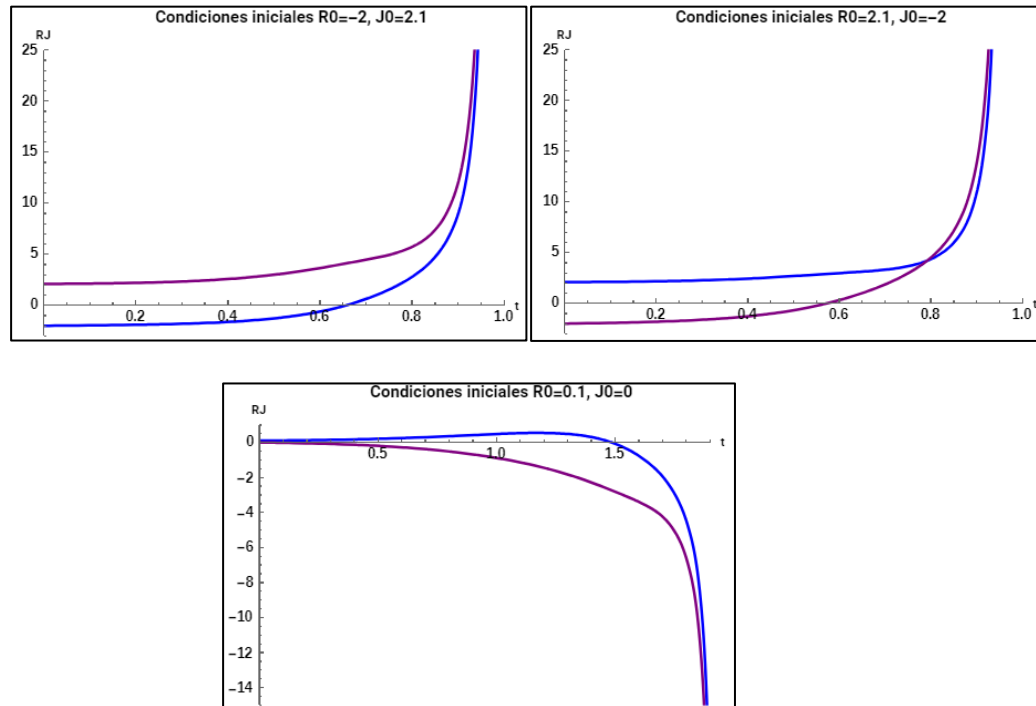


Figura 49.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **dos narsicistas** con parámetros $a = 1, b = -1, c = -2, d = 2$; condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2.1$; $R_0 = 2.1, J_0 = -2$; $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

Las trayectorias en los gráficos de soluciones muestran que, independientemente de sus inicios dispares, la relación entre ambos individuos tiende hacia extremos emocionales de amor o rechazo. La influencia dominante de uno sobre el otro dirige y amplifica sus sentimientos hacia una intensidad excesiva, confirmando que es una relación inestable.

3.1.3.1.3. Amor de Lejos, Amor de Pendejos: $a, d < 0$ y $c, b > 0$.

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre dos seguros se modela utilizando los parámetros $a = -2, b = 2, c = 1$ y $d = -1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifican que los puntos de

equilibrio del sistema de este escenario, estos son $(-2, 2)$, $(2, -2)$ y $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio para obtener el comportamiento del sistema entorno a estos puntos:

- Punto de equilibrio $(-2, 2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{73})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{73})$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(2, -2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{73})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{73})$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -3$. En el plano TD se observa que el punto de equilibrio es un nodo estable.

Los gráficos del plano de fase correspondiente a este escenario serían:

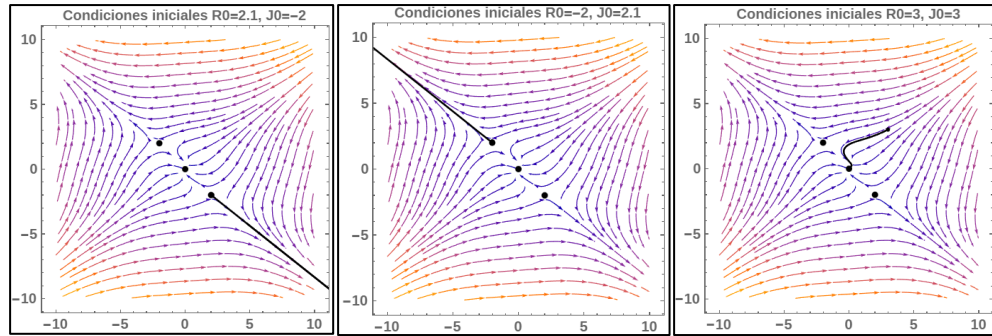


Figura 50.- Plano de fases del perfil conductual **dos seguros** con parámetros $a = -2, b = 2, c = 1, d = -1$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -2, J_0 = 2.1$; $R_0 = 3, J_0 = 3$.

En esta relación, aunque surgen conflictos, hay oportunidades para alcanzar un equilibrio emocional. Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(-2, 2)$ y $(2, -2)$, la pareja podría aproximarse a una armonía emocional, aunque pequeñas discordancias pueden inclinar la balanza hacia una relación desequilibrada, donde uno ama y el otro desprecia. No obstante, si logran comprenderse, podrían estabilizarse. En cambio, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(0, 0)$, la pareja tiende a una rápida búsqueda de amor compartido que, si bien presenta retos como en ocasiones donde se odian mutuamente, también ofrece la posibilidad de llegar a un equilibrio emocional mutuo.

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fase anteriores son:

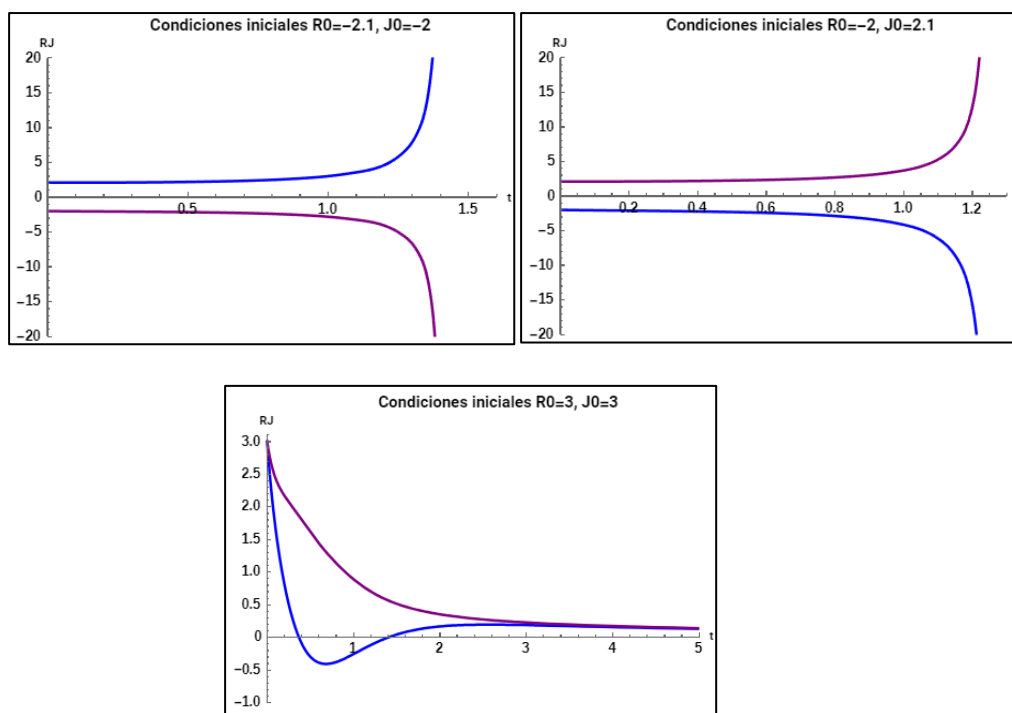


Figura 51.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **dos seguros** con parámetros

$a = -2, b = 2, c = 1, d = -1$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -2, J_0 = 2.1$;

$$R_0 = 3, J_0 = 3.$$

Los gráficos revelan una dinámica emocional desequilibrada en la relación, caracterizada por una divergencia extrema de sentimientos que fluctúan entre el amor y el odio. No obstante, se observa la posibilidad de un equilibrio si uno de los individuos, mostrando resiliencia, sostiene el rechazo inicial del otro constantemente. Con el tiempo, esta paciencia podría conducir a un estado de armonía emocional.

3.1.3.1.4. Son como agua y aceite: $a, d < 0$ y $c, b < 0$.

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre dos solitarios se modela utilizando los parámetros $a = -1, b = -1, c = -2$ y $d = -2$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifican que los

puntos de equilibrio del sistema de este escenario, estos son $(2, 2)$, $(-2, -2)$ y $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio para obtener el comportamiento del sistema entorno a estos puntos:

- Punto de equilibrio $(2, 2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{73})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{73})$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(-2, -2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{73})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{73})$, por lo que, al ser dos valores propios reales con signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -3$. En el plano Traza-Determinante se observa que el punto de equilibrio es un nodo estable.

Los gráficos del plano de fase correspondiente a este escenario serían:

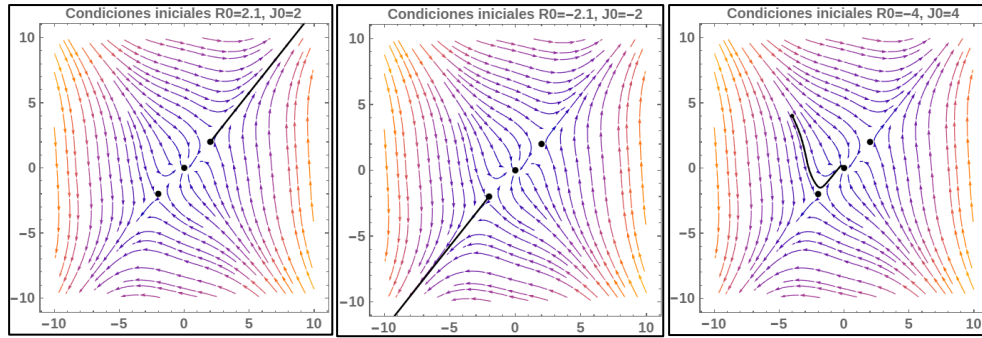


Figura 52.- Plano de fases del perfil conductual **dos solitarios** con parámetros $a = -1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = -2$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = 2$; $R_0 = -2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -4, J_0 = 4$.

En este escenario, aunque es posible alcanzar un equilibrio emocional en la relación, también existe el riesgo de que las emociones se intensifiquen de manera descontrolada. Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(2, 2)$ y $(-2, -2)$, sugieren que cualquier discrepancia emocional puede llevar a extremos de amor o desprecio mutuo, aunque también hay oportunidades para moderar estas emociones y acercarse a un equilibrio. De forma parecida, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(0, 0)$ muestran una tendencia a alcanzar una apatía emocional más directamente, sin caer en conflictos intensificados a lo largo del tiempo.

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fase anteriores son:

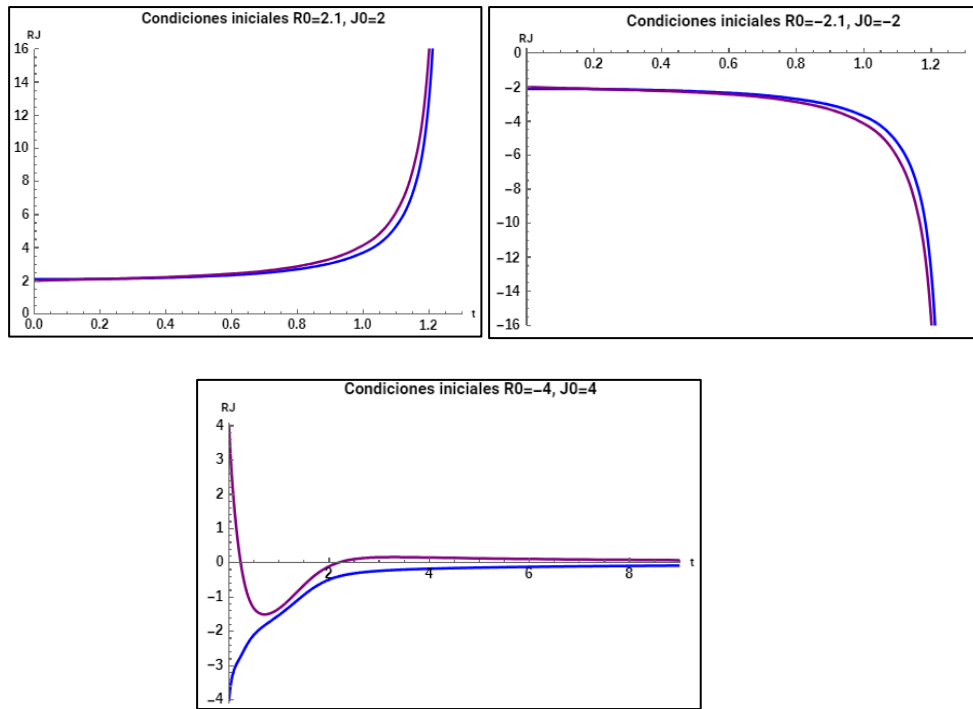


Figura 53.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **dos solitarios** con parámetros $a = -1, b = -1, c = -2, d = -2$; condiciones iniciales $R_0 = 2.1, J_0 = 2$; $R_0 = -2.1, J_0 = -2$; $R_0 = -4, J_0 = 4$.

Los gráficos muestran dinámicas emocionales que pueden estar desequilibradas en la relación, con una escalada de sentimientos donde terminan exageradamente enamorados u odiados de manera extrema. Sin embargo, hay posibilidades de que tras un evento significativo que impacta a ambos, la dinámica puede cambiar: aunque inicialmente desigual, la experiencia emocional de cada uno puede evolucionar hacia un equilibrio. En lugar de caer en un odio mutuo ambos podrían alcanzar un estado de amor pasivo y equilibrado, donde se nivelan y estabilizan sus sentimientos.

3.1.3.2. Caso Particular 2: $a = d$ y $c \neq b$.

3.1.3.2.1. Uno Dando Papaya y el Otro Comiendo Limón $a, d > 0$ y $c > 0 > b$.

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre un entusiasta y un narcisista se modela utilizando los parámetros $a = 2, b = -2, c = 1$ y $d = 1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifica que el punto de equilibrio del sistema de este escenario es $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en este punto para obtener el comportamiento del sistema:

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{7})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{7})$, por lo que, al ser dos valores propios imaginarios con parte real positiva, el punto de equilibrio es un foco inestable.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

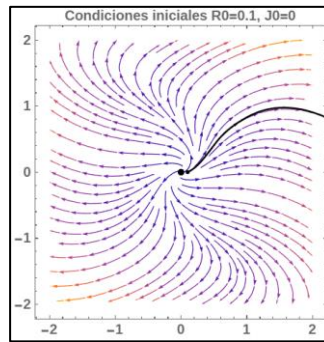


Figura 54.- Plano de fases del perfil conductual **Entusiasta-Narcisista** con parámetros

$$a = 2, b = -2, c = 1, d = 1 \text{ y condiciones iniciales } R_0 = 0.1, J_0 = 0.$$

La dinámica entre Romeo y Julieta revela una inestabilidad emocional con oscilaciones entre extremos afectivos. Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(0, 0)$, la relación puede oscilar entre amor y desamor recíprocos o diverger hacia un desequilibrio donde

uno ama intensamente y el otro alberga sentimientos negativos. Con el tiempo, estas emociones extremas pueden pasar por ciclos de cambio donde, por ejemplo, pueden pasar de odiarse mutuamente a un estado en el que uno ama y el otro odia, alejándose cada vez más de una armonía emocional sostenida. Estos cambios son frecuentes al pasar el tiempo. En su narrativa conjunta, estos movimientos en sus estados emocionales podrían reflejar un período de crecimiento y maduración personal y mutua.

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fase anteriores son:

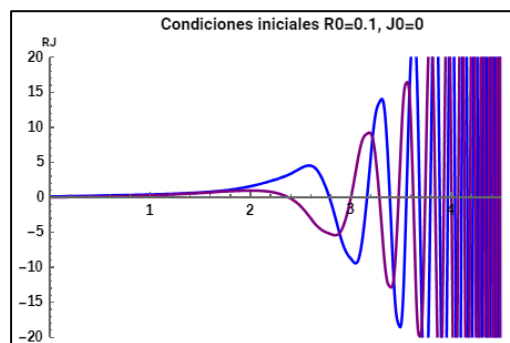


Figura 55.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Entusiasta-Narcisista** con parámetros $a = 2, b = -2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

El gráfico de soluciones se corresponde a lo mencionado anteriormente, donde la relación entre Romeo y Julieta está marcada por una intensa volatilidad emocional. Inicialmente, hay una fase de inestabilidad donde los sentimientos fluctúan considerablemente. Luego, parece que la relación entra en una fase de oscilaciones rápidas y extremas, posiblemente indicando períodos de conflicto intenso o pasión desbordante que, en el tiempo, no logran estabilizarse. Este patrón podría simbolizar una relación llena de altibajos dramáticos y respuestas emocionales impredecibles.

3.1.3.2.2. Aunque la mona se vista de seda, mona se queda: $a, d < 0$ y $c > 0 > b$

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre un solitario y un seguro se modela utilizando los parámetros $a = -2, b = -2, c = 1$ y $d = -1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifica que el punto de equilibrio del sistema de este escenario es $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en este punto para obtener el comportamiento del sistema:

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{7})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{7})$, por lo que, al ser dos valores propios imaginarios con parte real negativa, el punto de equilibrio es un foco estable.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

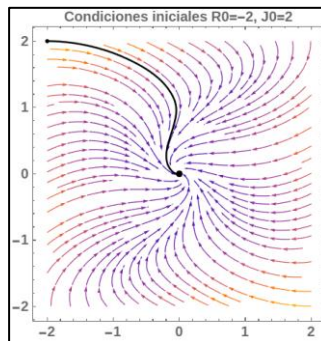


Figura 56.- Plano de fases del perfil conductual **Solitario-Seguro** con parámetros

$a = -2, b = -2, c = 1, d = -1$ y condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2$.

La dinámica de Romeo y Julieta ilustra un viaje turbulento marcado por una inestabilidad emocional que ellos intentan buscar el equilibrio. Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(0, 0)$, sus trayectorias emocionales evolucionan y se transforman, modelando y redefiniendo los sentimientos de cada uno. Este patrón sugiere que la pareja atraviesa diversos

ciclos de amor e indiferencia, con el potencial de alcanzar eventualmente un estado donde sus emociones se equilibran y estabilizan.

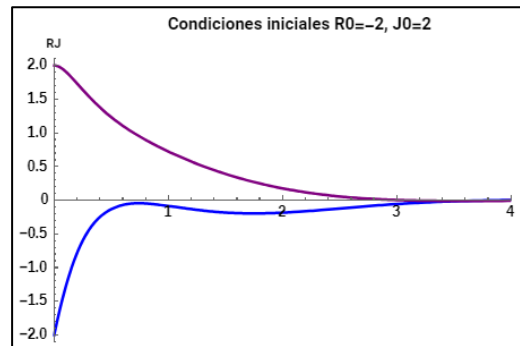


Figura 57.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Solitario-Seguro** con parámetros

$a = 2, b = -2, c = 1, d = -1$ y condiciones iniciales $R_0 = -2, J_0 = 2$.

El gráfico de soluciones muestra una relación en la que ambos, Romeo y Julieta, inician con sentimientos fuertes y opuestos, y gradualmente convergen hacia un estado más neutral y estable con el tiempo. Esto quiere decir que a medida que transcurre el tiempo, ambos experimentan una atenuación en sus respuestas emocionales, sugiriendo una reconciliación o aceptación mutua.

3.1.3.3. Caso Particular 3: $a \neq d$ y $c = b$.

3.1.3.3.1. A Quien Tiene Suerte, Hasta el Gallo le Pone Huevos: $d > 0 > a$ y $c, b > 0$

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre un entusiasta y un seguro se modela utilizando los parámetros $a = -2, b = 2, c = 1$ y $d = 1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifica que el punto de equilibrio del sistema de este escenario es $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en este punto para obtener el comportamiento del sistema entorno este:

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$, por lo que, al ser dos valores propios reales son signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

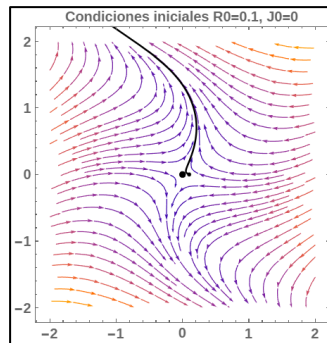


Figura 58.- Plano de fases del perfil conductual **Entusiasta-Seguro** con parámetros

$$a = -2, b = 2, c = 1, d = 1 \text{ y condiciones iniciales } R_0 = 0.1, J_0 = 0.$$

Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(0,0)$ indica que la relación entre Romeo y Julieta es susceptible a drásticas fluctuaciones emocionales, balanceándose en su búsqueda de armonía. Este intento por balancear sus sentimientos, sin embargo, es vulnerable a cambios abruptos, a menudo precipitados por reacciones o acciones de uno de los dos, lo que puede catapultar la dinámica hacia un estado de conflicto severo. En tal escenario, uno puede encontrarse profundamente enamorado mientras que el otro se sumerge en la antipatía, una división emocional que podría ser el resultado de un incidente crítico o malentendido que altera el curso de su interacción.

El gráfico solución correspondiente a al plano de fase anterior es:

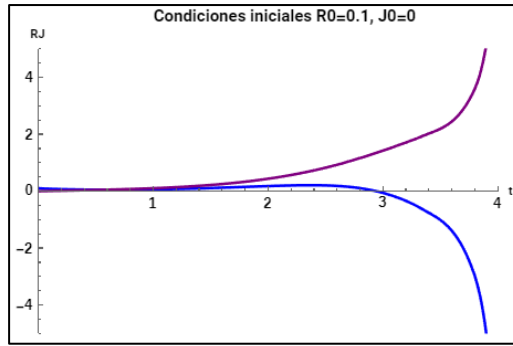


Figura 59.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Entusiasta-Seguro** con parámetros

$a = -2, b = 2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

La gráfica muestra una relación inicialmente equilibrada entre Romeo y Julieta que, con el tiempo, evoluciona hacia extremos emocionales opuestos. Uno de ellos se sumerge en un amor intenso mientras que el otro se desplaza hacia un rechazo profundo, creando una dinámica de pareja marcada por un conflicto significativo.

3.1.3.3.2. Amor con hambre no dura $d > 0 > a$ y $c, b < 0$

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Munoa (2020) en el cual el amor entre un solitario y un narcisista se modela utilizando los parámetros $a = -2, b = -2, c = -1$ y $d = 1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifica que el punto de equilibrio del sistema de este escenario es $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en este punto para obtener el comportamiento del sistema:

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$, por lo que, al ser dos valores propios reales son signos distintos, el punto de equilibrio es un punto silla, lo que implica inestabilidad.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

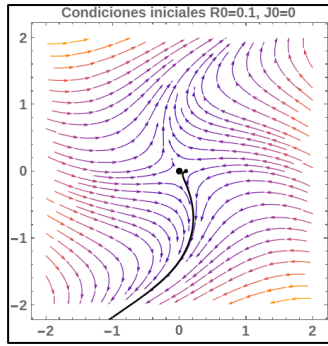


Figura 60.- Plano de fases del perfil conductual **Solitario-Narcisista** con parámetros

$a = -2, b = -2, c = -1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

Las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(0, 0)$ sugieren una relación entre Romeo y Julieta marcada por la volatilidad emocional. Se aproximan a una estabilidad que nunca se concreta, lo que da paso a fluctuaciones extremas de afecto o desdén. En esta dinámica, el intenso sentimiento de uno puede influir considerablemente en el otro. Por ejemplo, un amor desmedido de Julieta podría generar una respuesta emocional en Romeo, impulsándolo hacia un amor forzado que solo admite el extremo de una pasión desbordada.

El grafico solución correspondiente al plano de fase anterior es:

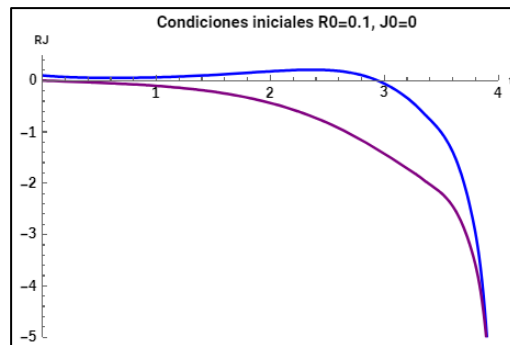


Figura 61.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Solitario-Narcisista** con parámetros

$a = -2, b = -2, c = -1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.1, J_0 = 0$.

La gráfica refleja una relación entre Romeo y Julieta que parte de un equilibrio emocional leve, pero con el tiempo, ambos se adentran en un descenso emocional. Julieta experimenta una caída pronunciada hacia un sentimiento negativo, sugiriendo un posible desenlace de rechazo intenso o incluso odio mutuo.

3.1.3.4. Caso Particular 4: $a \neq d$ y $c \neq b$.

3.1.3.4.1. A La Fuerza Ni Los Zapatos Entran: $d > 0 > a$ y $c > 0 > b$

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Sprott (1994) en el cual el amor entre un entusiasta y un solitario se modela utilizando los parámetros $a = -2, b = -2, c = 1$ y $d = 1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifican que los puntos de equilibrio del sistema de este escenario, estos son $(-2, -2)$, $(2, 2)$ y $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio para obtener el comportamiento del sistema entorno a estos puntos:

- Punto de equilibrio $(-2, -2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + 3i\sqrt{7})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - 3i\sqrt{7})$, por lo que, al ser dos valores propios imaginarios con parte real negativa, el punto de equilibrio es una espiral estable.

- Punto de equilibrio $(2, 2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + 3i\sqrt{7})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - 3i\sqrt{7})$, por lo que, al ser dos valores propios imaginarios con parte real negativa, el punto de equilibrio es una espiral estable.

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$. En el plano Traza-Determinante se observa que el punto de equilibrio es un nodo estable.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

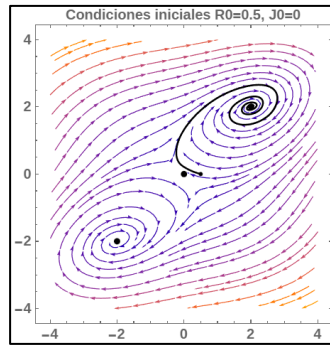


Figura 62.- Plano de fases del perfil conductual **Entusiasta-Solitario** con parámetros

$$a = -2, b = -2, c = 1, d = 1 \text{ y condiciones iniciales } R_0 = 0.5, J_0 = 0.$$

La relación de Romeo y Julieta presenta una dinámica única, con emociones que tienden a estabilizarse en alegría o en conflicto. Las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(-2, -2)$ la relación experimenta ciclos de descontento que, en lugar de escalar, son contenidos y resueltos, permitiendo una estabilización de las emociones. Esto sugiere una relación resiliente que evita extremos y mantiene su equilibrio. De manera similar, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(2, 2)$, la pareja comparte un amor contenido que también se autorregula, evitando excesos emocionales. En cambio, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto $(0, 0)$ evidencia una dinámica en la que los sentimientos de ambos se divergen sin llegar a estabilizarse en este, de tal manera que los obliga a estar en un amor o desamor mutuo estable.

El grafico solución correspondiente al plano de fase anterior es:

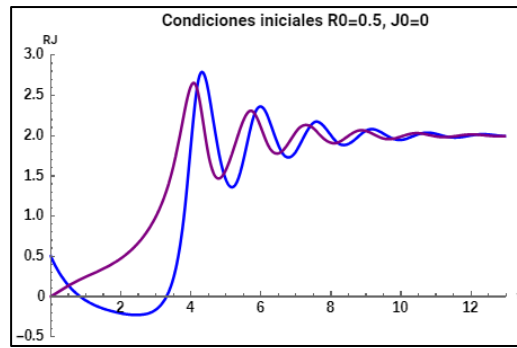


Figura 63.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Entusiasta-Solitario** con parámetros

$a = -2, b = -2, c = 1, d = 1$ y condiciones iniciales $R_0 = 0.5, J_0 = 0$.

En este gráfico de soluciones, Romeo y Julieta empiezan con una diferencia emocional marcada por la inicial positiva de Romeo. La intensidad de sus emociones comienza de forma apagada, pero pica temprano, con fluctuaciones que gradualmente disminuyen, estabilizándose a lo largo del tiempo. Este patrón puede indicar una relación que, después de un período de intensa pasión y posiblemente de conflicto, alcanza una armonía emocional más sostenida y tranquila.

3.1.3.4.2. Amistad por Interés, No Dura Porque No Lo Es: $d > 0 > a$ y $c < 0 < b$

Se considerará un escenario ejemplar propuesto por Sprott (2004) en el cual el amor entre un seguro y un narcisista se modela utilizando los parámetros $a = -2, b = 2, c = -1$ y $d = 1$. Sustituyendo estos parámetros en el sistema (63) y utilizando el código CPE se identifican que los puntos de equilibrio del sistema de este escenario, estos son $(2, -2)$, $(-2, 2)$ y $(0, 0)$. A continuación, se linealizará el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio para obtener el comportamiento del sistema entorno a estos puntos:

- Punto de equilibrio $(2, -2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + 3i\sqrt{7})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - 3i\sqrt{7})$, por lo que, al ser dos valores propios imaginarios con parte real negativa, el punto de equilibrio es una espiral estable.

- Punto de equilibrio $(-2, 2)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros, se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + 3i\sqrt{7})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - 3i\sqrt{7})$, por lo que, al ser dos valores propios imaginarios con parte real negativa, el punto de equilibrio es una espiral estable.

- Punto de equilibrio $(0, 0)$:

Sustituyendo en (66) el punto y los parámetros se obtiene que los valores propios serían $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$. En el plano Traza-Determinante se observa que el punto de equilibrio es un nodo estable.

El gráfico del plano de fase correspondiente a este escenario sería:

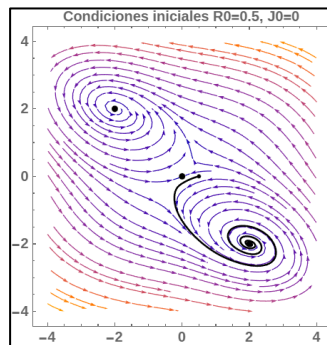


Figura 64.- Plano de fases del perfil conductual **Seguro-Narcisista** con parámetros

$$a = -2, b = 2, c = -1, d = 1 \text{ y condiciones iniciales } R_0 = 0.5, J_0 = 0.$$

En este sistema relación entre Romeo y Julieta evoluciona hacia un patrón cíclico de conflictos emocionales, donde las condiciones iniciales cercanas alrededor de los puntos $(-2, 2)$ y $(2, -2)$ describen un comportamiento donde se alterna entre amor y antipatía. Aunque

los sentimientos fluctúan, ambos miembros de la pareja los manejan de forma controlada, evitando caer en excesos hasta que encuentran una forma de equilibrio. Por otro lado, las condiciones iniciales cercanas alrededor del punto (0,0), la dinámica trata de llegar al equilibrio, pero terminan desviándose de este redirigiéndolos de forma controlada a un conflicto emocional.

Los gráficos de las soluciones correspondientes a los planos de fase anteriores son:

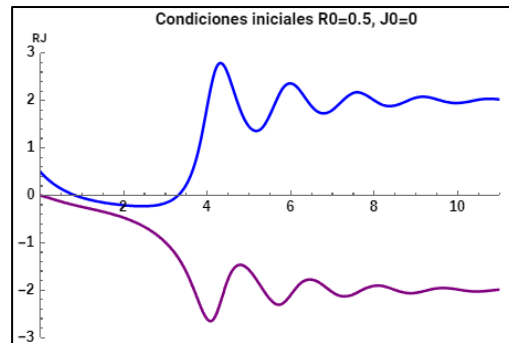


Figura 65.- Gráfico de soluciones del perfil conductual **Seguro-Narcisista** con parámetros

$$a = -2, b = 2, c = -1, d = 1 \text{ y condiciones iniciales } R_0 = 0.5, J_0 = 0.$$

El gráfico de soluciones describe una relación en la que los sentimientos de Romeo y Julieta, comenzando en distintos niveles emocionales, atraviesan por una serie de altibajos antes de seguir caminos paralelos: donde llegan a experimentar, los dos, una oleada de emociones que se estabilizan con el tiempo. La evolución paralela de sus emociones podría indicar una adaptación mutua y un equilibrio a largo plazo.

3.2. Conclusiones del Modelo No Lineal

Al analizar el modelo no lineal y las diferentes dinámicas posibles, se observa que, en algunos casos, como el del individuo solitario y el amante seguro, el amor de ambos se extingue al converger hacia un punto estable en el origen, mientras que, en otras relaciones, como la del entusiasta y el solitario, se estabilizan en un punto donde ambos experimentan amor o en otro donde

ambos sienten odio. Sin embargo, en la mayoría de los casos estudiados, la relación se muestra inestable, lo que sugiere que los sentimientos varían según las personalidades y parecen estar interconectados, ya que los sentimientos de uno pueden influir en los del otro. Además, se ha observado la aparición de fenómenos que parecen estar próximos al caos en algunas relaciones, donde un cambio ligero en las condiciones iniciales puede provocar una transición instantánea de amor a odio, o viceversa.

A pesar de haber mejorado el comportamiento, aún queda mucho camino por recorrer y explorar, ya que la investigación se encuentra en las puertas de mejorar este modelo para cuantificar las relaciones con mayor precisión. Por ejemplo, se considera la introducción de funciones para estudiar el caos o la inclusión de más factores como las redes sociales, el dinero, los amigos y hasta la aparición de un amante en la relación de pareja, tal como lo estudiarían investigadores como Strogatz (1994), Isea & Lonngreen (2018), Sprott (1994) y Munoa (2020).

CONCLUSIONES

Al contrastar los objetivos inicialmente planteados con los resultados alcanzados en este trabajo de grado, se observa que, aunque ciertos conceptos del marco matemático propuesto no se emplearon directamente en el análisis, la elaborada revisión teórica sobre los sistemas de E.D.O. enriqueció notablemente la comprensión matemática del equipo. Este aprendizaje resultó fundamental para interpretar intuitivamente el comportamiento de las trayectorias cerca de los puntos de equilibrio y para analizar las soluciones de los modelos, yendo más allá de la simple visualización gráfica a través de software.

Con relación al segundo objetivo, el estudio y análisis del modelo propuesto por Strogatz (1994) permitieron comprender cómo se formulan estas ecuaciones y bajo qué principios se examinan. Además, se logró identificar ciertos patrones iniciales en las dinámicas de las relaciones de pareja que, aunque difieren de las interacciones humanas, demostraron cómo estos modelos pueden anticipar imaginariamente el desarrollo futuro de relaciones reales en un periodo extremadamente corto, siendo solamente "instantes" que pueden experimentarse en las dinámicas de pareja.

Respecto al tercer objetivo, el análisis del modelo no lineal reveló cómo estos escenarios aumentaban en complejidad, presentando situaciones intrigantes. Similar a las ecuaciones lineales, se estableció un paralelismo imaginario con eventos reales en las relaciones de pareja. Aunque estos comportamientos representan solo un "momento" en la dinámica de una relación, progresivamente se acercan a una representación más compleja y profunda de las interacciones humanas.

En cuanto al cuarto objetivo, aunque inicialmente se planeó utilizar MATLAB, la falta de acceso al código para estudiantes llevó a optar por Wolfram Mathematica. Este cambio se debió a la mayor accesibilidad de Mathematica y a su lenguaje versátil, que es altamente orientado hacia la expresión simbólica y funcional, en contraste con MATLAB, que se enfoca más en el manejo de matrices y vectores. No obstante, los códigos desarrollados son fácilmente traducibles entre ambos softwares, permitiendo su aplicación efectiva en ambos entornos.

Además, la realización de una investigación teórica detallada, la estructuración de argumentos para respaldar los resultados obtenidos mediante exploraciones gráficas, y la comprensión de cómo traducir entre representaciones analíticas y gráficas de soluciones, han enriquecido significativamente nuestro conocimiento y razonamiento matemático. Optar por la representación más adecuada de las soluciones para los fines de este trabajo, así como interpretarlas correctamente en su contexto, y elaborar la estructura y contenido de este trabajo de grado, han fortalecido nuestras habilidades argumentativas y representativas desarrolladas durante nuestra formación docente, además de nuestra capacidad de lectoescritura académica.

Así mismo, al analizar los modelos desde la perspectiva de estudiantes e iniciar con una exploración gráfica, seguida de la aplicación de teoría establecida conforme avanzaba el estudio, se reafirmó la importancia de abordar las matemáticas a través de la exploración y la intuición, aspectos a menudo subestimados en el aula. Comúnmente, la enseñanza de esta ciencia se enfoca desde el principio en el rigor matemático. En este contexto, y pensando en nuestro futuro rol docente, consideramos esencial permitir que los estudiantes construyan su conocimiento matemático de forma personal mediante la experimentación y la exploración. Esto facilitará que,

eventualmente, comprendan cómo su aprendizaje se integra y da sentido al conocimiento matemático formal.

Anexos

Anexo 1: Códigos

Plano de Fases

El siguiente código es para graficar el plano de fases con su respectivo punto de equilibrio y su trayectoria solución.

(Define las ecuaciones diferenciales *)*

sistema = {

$R'[t] == 3 J[t],$

$J'[t] == 5 R[t]$

};

(Utiliza StreamPlot para el campo de direcciones *)*

campoDirecciones = StreamPlot[{3 J, 5 R}, {R, -600, 600}, {J, -600, 600}];

(Solución numérica desde la condición inicial (R0,J0) *)*

solucionNumerica = NDSolve[{sistema, R[0] == 1, J[0] == 1}, {R, J}, {t, 0, 10}];

(Grafica la solución numérica *)*

trayectoriaInicial = ParametricPlot[

Evaluate[{R[t], J[t]} /. solucionNumerica], {t, 0, 10},

PlotStyle -> {Thick, Black}];

(Calcula y grafica el punto de equilibrio y la condición inicial en (R0,J0) *)*

puntoEquilibrio = Graphics[{Black, PointSize[Large], Point[{0, 0}],

PointSize[Medium], Black, Point[{1, 1}]}];

(Muestra el gráfico combinando el campo de direcciones, el punto de equilibrio, y la trayectoria inicial *)*

```
graficoFases = Show[campoDirecciones, trayectoriaInicial, puntoEquilibrio,  
PlotLabel -> Style["Plano de Fases", Bold, 16], PlotRange -> {{-600, 600},  
{-600, 600}},  
AxesOrigin -> {0, 0},  
LabelStyle -> {FontFamily -> "Helvetica", FontSize -> 16, Bold},  
ImagePadding -> {{Automatic, Automatic}, {Automatic, 1}}];
```

(Muestra el gráfico *)*

graficoFases

Gráfico de Soluciones

El siguiente código es para graficar el gráfico de las soluciones de Romeo y Julieta con respecto al tiempo.

(Define las ecuaciones diferenciales *)*

```
sistema = {  
R'[t] == 3 J[t],  
J'[t] == 5 R[t]  
};
```

(Condiciones iniciales $R(0) = -1$ y $J(0) = 1$ *)*

```
condicionesIniciales = {R[0] == 1, J[0] == 1};
```

(Solución numérica *)*

```
solucionNumerica = NDSolve[{sistema, condicionesIniciales}, {R, J}, {t, 0, 2}];
```

(Grafica las soluciones R(t) y J(t) en función del tiempo *)*

```
graficoR = Plot[Evaluate[R[t] /. solucionNumerica], {t, 0, 2},  
  PlotStyle -> {Thick, Blue}, AxesLabel -> {"t", "RJ"},  
  PlotRange -> {{0, 2}, {0, 1000}}, ScalingFunctions -> "Linear";  
graficoJ = Plot[Evaluate[J[t] /. solucionNumerica], {t, 0, 2.5},  
  PlotStyle -> {Thick, Purple}, AxesLabel -> {"", ""},  
  PlotRange -> {{0, 2}, {0, 1000}}, ScalingFunctions -> "Linear";
```

(Muestra ambos gráficos superpuestos *)*

```
Show[graficoR, graficoJ, PlotLabel -> "Condiciones iniciales R0=1, J0=1",  
  LabelStyle -> {Black, Bold}, PlotRange -> {{0, 2}, {0, 1000}}]
```

Anexo 2: Posible Traducción de Códigos a Matlab

Plano de Fases

% Define las ecuaciones diferenciales

```
f = @(t, Y) [3 * Y(2); 5 * Y(1)];
```

% Define el rango para R y J

```
R_range = linspace(-600, 600, 20);
```

```
J_range = linspace(-600, 600, 20);
```

% Crea la malla de puntos para el campo de direcciones

```
[R, J] = meshgrid(R_range, J_range);
```

% Calcula el campo de direcciones

```
U = 3 .* J;
```

```
V = 5 .* R;
```

```
% Grafica el campo de direcciones usando quiver
```

```
figure;
```

```
quiver(R, J, U, V);
```

```
hold on;
```

```
% Resuelve las ecuaciones diferenciales numéricamente desde la condición inicial
```

```
[T, Y] = ode45(f, [0 10], [1; 1]);
```

```
% Grafica la solución numérica
```

```
plot(Y(:,1), Y(:,2), 'k', 'LineWidth', 2);
```

```
% Añade el punto de equilibrio y la condición inicial al gráfico
```

```
plot(0, 0, 'ko', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
```

```
plot(1, 1, 'ko', 'MarkerSize', 7, 'LineWidth', 2);
```

```
% Configura los detalles del gráfico
```

```
title('Plano de Fases');
```

```
xlabel('R');
```

```
ylabel('J');
```

```
xlim([-600 600]);
```

```
ylim([-600 600]);
```

```
grid on;
```

```
hold off;
```

Gráfico de Soluciones

```
% Define las ecuaciones diferenciales
```

```
f = @(t, Y) [3 * Y(2); 5 * Y(1)];
```

```

% Define las condiciones iniciales

condicionesIniciales = [1; 1];

% Resuelve las ecuaciones diferenciales numéricamente desde la condición inicial

[t, Y] = ode45(f, [0 2], condicionesIniciales);

% Grafica la solución R(t)

figure;

plot(t, Y(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);

hold on; % Mantiene la figura actual para la siguiente gráfica

% Grafica la solución J(t)

plot(t, Y(:,2), 'm', 'LineWidth', 2);

% Etiquetas de los ejes y título

xlabel('t');

ylabel('R y J');

title('Condiciones iniciales R0=1, J0=1');

% Límites del gráfico

xlim([0 2]);

ylim([0 1000]);

% Leyenda

legend('R(t)', 'J(t)');

% Mantiene la gráfica

hold off;

```

Anexo 3: Reseña Sobre la Obra de Romeo y Julieta Escrito por William Shakespeare

Introducción

William Shakespeare es uno de los poetas y dramaturgos más destacados en la historia. Nació en 1564 y falleció en 1616. Sus padres eran comerciantes acaudalados, lo que les permitió brindarle una educación con maestros particulares. Desde pequeño, Shakespeare mostró interés por el teatro, influenciado por los cómicos ambulantes que observaba en las calles. En 1590, tras mudarse a Londres y dejar a su familia, comenzó a trabajar como actor, al tiempo que estudiaba y revisaba libretos de otros autores. Eventualmente, se convirtió en socio del teatro donde actuaba, y más tarde en empresario y director. A pesar de su éxito, Shakespeare no mostró interés en publicar sus obras; de hecho, solo 16 de ellas se publicaron durante su vida. Muchas otras obras circulaban por Europa, algunas de las cuales fueron atribuidas a otros autores. En 1623, dos amigos de Shakespeare compilaron y publicaron treinta y seis de sus obras en un volumen titulado "Folio".

"Romeo y Julieta" es una obra que pertenece al género trágico y se enmarca en la corriente literaria del Renacimiento. La obra consta de cinco actos, cada uno dividido en cinco escenas, excepto el segundo y el último acto, que tienen seis y tres escenas, respectivamente. Cuenta con dieciocho personajes y tiene lugar principalmente en Verona y Mantua, aunque Mantua solo aparece en la primera escena del quinto acto.

Desarrollo:

Argumento

La historia se desarrolla en un pueblo de Verona, marcado por la antigua enemistad entre dos familias. Dos criados de la familia Capuleto discuten sobre la rivalidad con sus amos y cómo confrontarían a sus enemigos. Durante esta discusión, aparecen criados de la familia Montesco y

Sansón, un criado de los Capuleto, les hace un gesto provocador, desencadenando un conflicto. Benvolio interviene para separarlos, pero Teobaldo lo acusa de querer luchar contra los criados.

La disputa se intensifica hasta que los oficiales intervienen para restaurar la paz. El Príncipe llega y amenaza a ambas familias con la pena de muerte si continúan los conflictos. El señor Montesco pregunta a su sobrino si inició la pelea, a lo que él responde que no. La señora Montesco inquiere sobre el paradero de Romeo, y el sobrino informa que lo vio esa mañana, aparentemente triste.

Benvolio conversa con su primo sobre su desdicha en un amor no correspondido y le sugiere que olvide a su antigua amada y busque un nuevo amor. Le propone asistir a la fiesta de los Capuleto disfrazados para evitar ser reconocidos. Sin embargo, en la fiesta, Teobaldo reconoce a los intrusos y desea atacarlos, pero el señor Capuleto le ordena que no lo haga.

Durante la fiesta, Romeo conoce a Julieta y la corteja hasta conseguir un beso. Posteriormente, descubre que ella pertenece a la familia Capuleto. Más tarde, Romeo visita el balcón de Julieta y le revela su identidad como Montesco, lo que preocupa a Julieta por la seguridad de Romeo si es descubierto en su casa.

Romeo consulta sus penas con el Fray Lorenzo. Paralelamente, Mercurio y Benvolio discuten sobre las complicaciones que enfrenta Romeo debido a su relación prohibida. Las tensiones entre las familias escalan y, en un enfrentamiento subsiguiente, Teobaldo es asesinado por Romeo, lo que lleva al príncipe a desterrarlo. Julieta, devastada, recibe consejos de su nodriza de olvidar a Romeo y casarse con Paris.

El Fray Lorenzo formula un plan para ayudar a Julieta a escapar de su compromiso con Paris simulando su muerte. Envía una carta a Romeo explicando el plan, pero esta nunca llega.

Creyendo que Julieta está realmente muerta, Romeo regresa y se encuentra con Paris en la tumba de los Capuleto. Tras un enfrentamiento, Romeo mata a Paris y luego se suicida. Julieta despierta, encuentra a Romeo muerto y se quita la vida.

El Fray Lorenzo revela la trágica verdad a las familias, que finalmente se arrepienten de su prolongada enemistad.

Descripción de los personajes de Romeo y Julieta:

En la obra "Romeo y Julieta", los personajes son descritos tanto física como psicológicamente de la siguiente manera:

- Romeo es un joven de aproximadamente 16 años, apuesto, que tiene mucha confianza en sí mismo. Psicológicamente, está más preocupado por su vida amorosa que por la rivalidad existente entre los Montesco y los Capuleto.
- Julieta es descrita como joven, guapa e inocente, mostrando al mismo tiempo prudencia y valentía, elementos que resaltan su complejidad como personaje.
- La nodriza de Julieta, a pesar de ser mayor y haber vivido muchas tristezas, sigue siendo joven de corazón y tiene mucho amor para dar, siendo su prioridad el bienestar de Julieta, de quien es confidente y consejera.
- El Conde Paris es un hombre atractivo y con dinero, obsesionado con el amor por Julieta. Teobaldo, por su parte, es descrito como rudo y fuerte, y psicológicamente es violento y amenazador, especialmente hacia los Montesco, a quienes odia profundamente.
- Mercurio, amigo de Romeo, es fuerte y valiente, y tiene facilidad para hablar, mostrándose como un personaje con un espíritu libre, aunque imprudente y exagerado en sus actos.

- El Príncipe de Verona se presenta como una figura de autoridad y mediador entre las familias enfrentadas, siendo su principal preocupación mantener la paz y el orden en Verona.
- Montesco es un hombre rico, muy preocupado por la tristeza de su hijo.
- Finalmente, Capuleto, también muy rico, es rápido en sus decisiones y muestra actitudes furiosas, especialmente cuando se desacuerda con la idea de Julieta sobre su matrimonio.

Conclusión:

A lo largo del breve tiempo que hemos transitado en esta vida, y pese a nuestra juventud, hemos aprendido que el amor es una experiencia mágica y de un valor incalculable, única y diferente para cada quien. No obstante, la idea de encontrar un amor por el que valdría la pena dar la vida nos parece más una fantasía juvenil, una visión romántica alimentada por quienes aún no conocen la verdadera esencia del amor. ¿Pero quién realmente la conoce? Tal vez, como Shakespeare nos sugiere, exista un amor tan profundo que justifique semejante sacrificio. Quién sabe, quizás el amor de nuestra vida esté esperando en algún lugar, dispuesto a darlo todo por nosotros como nosotros por él. Hasta que no lo veamos, no lo creeremos. Shakespeare nos ha dejado mucho en qué reflexionar; su obra nos invita a cuestionar nuestras propias percepciones sobre el amor y su verdadero significado.

Anexo 4: Algunas Demostraciones de los Teoremas Enunciados

En el siguiente apartado se realiza la demostración de uno de los primeros teoremas enunciados a lo largo del Capítulo 1. Los demás teoremas se dejarán como ejercicio para el lector.

Teorema 2 (Wronskiano para Soluciones Linealmente Independientes)

. Sea $t_0 \in \delta$ en el que $W(t_0) = 0$, en donde $W(t_0)$ denota al Wronskiano con cada vector solución evaluado en el punto t_0 .

$$W(t_0) = W(X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0))$$

En una combinación de ambos teoremas de los resultados de álgebra podemos deducir que existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, no todos cero, tal que:

Lo que tenemos es un sistema lineal de n ecuaciones homogéneo con n incógnitas (sistema lineal en el contexto algebraico con $D = 0$, no sistema lineal de ecuaciones diferenciales), cuyas incógnitas son las constantes $c_i, i = 1, 2, \dots, n$. La relación 11 se cumple debido a que si el Wronskiano es igual a cero, entonces es posible que el sistema no tenga solución trivial y mucho menos una solución única, esto lo deducimos de los teoremas de álgebra que establecimos.

Por otro lado, sabemos por hipótesis que los vectores $X_1, X_2, \dots, X_n$ son solución del sistema homogéneo (2) en el intervalo δ , por el principio de superposición sabemos también que la combinación lineal

$$Y(t) = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

es solución de (2) en δ . Del resultado 11 y de la unicidad de la solución se deduce que $Y(t) = 0$ para algún punto $t = t_0 \in \delta$, es decir,

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n = 0$$

Pero por hipótesis los vectores $X_1, X_2, \dots, X_n$ son linealmente independientes en δ , lo que implica que

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

lo cual es una contradicción con lo que establecimos en 11. Por lo tanto, el Wronskiano tiene que ser distinto de cero, es decir

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) \neq 0$$

$\Leftarrow$ Por demostrar: S es linealmente independiente.

Este caso también lo demostraremos por contradicción. Supongamos que los vectores solución $X_1, X_2, \dots, X_n$ son linealmente dependientes en δ , esto implica que existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, no todos cero, tal que

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n = 0$$

Este sistema lo podemos escribir en la forma 9 como

$$c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \dots + c_n x_{1n} = 0$$

$$c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \dots + c_n x_{2n} = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \dots + c_n x_{nn} = 0$$

En donde las funciones $x_{ij}, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ son los coeficientes y las constantes $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ son las incógnitas. Debido a que las c_i no son todas cero implica que el sistema no tiene solución trivial y por el segundo teorema de los resultados de álgebra concluimos que

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Pero, por hipótesis

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) \neq 0$$

lo cual es una contradicción y todo nace de considerar a SSS como un conjunto linealmente dependiente. Por lo tanto, el conjunto de soluciones

$$S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

es linealmente independiente en δ .

Referencias

- Arenas, L. L., & Pinilla, W. A. (2020). Un estudio de los modelos clásicos de guerra propuestos por Lanchester y una de sus variaciones propuesta por Deitchman: fuego directo, fuego en área y guerra de guerrillas.
- Aristizabal, A. M. & Garcias, H. (2020) Refranes, dichos, agüeros y creencias populares. Fondo de publicaciones del Valle del Cauca.
- Bae Y. (2015) Chaotic Behavior in a Dynamic Love Model with Different External Forces”, Chonnam National University, Yeosu, Korea. International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, Vol.5, No 4, Diciembre 2015, pp. 285-288.
- Braun M., (1993) Differential Equations and Their Applications, fourth edition. Springer-Verlag, New York, pp. 437-442.
- Dávalos, L. M., & Hernández, A. F. S. (2014) Enfoque histórico y matemático de la obra literaria Romeo y Julieta de William Shakespeare.
- González, O., Vera E., Pérez S. & Castañeda C. (2022) Ecuaciones Diferenciales I. El blog de Leo. <https://blog.nekomath.com/ed1/>.
- Gottman J.M., Murray J.D, Swanson C.C., Tyson R, and Swanson K.R. (2002) The Mathematics of Marriage: Dynamic Nonlinear Model, Cambridge, M.A.: MIT-
- Isea, R., & Lonngren, K. E. (2018). Analyzing the love affair of Romeo and Juliet with modern mathematical tools. *arXiv preprint arXiv:1805.06891*.
- Israel & Turner (2010) Romeo, Romeo, What Art Thou Differential Equations?
- Jiménez, N. (2013) Matemáticas III. Universidad de Sevilla. <https://personal.us.es/niejimjim/>.
- Lozano, J. D. (2017). Aproximación a los sistemas dinámicos.
- Munoa, V. (2020). Modelos dinámicos para las relaciones románticas.
- Rinaldi, S. (1998). Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics. SIAM Journal on Applied Mathematics, 58, 1205-1221.

- Sprott J.C. (1994) Dynamical Models of Love, University of Wisconsin, Madison, Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Science . Vol.8(3), 303-313 .
- Strogatz S. H., (1988) Love Affairs and Differential Equations, Harvard University. Mathematics Magazine.Vol.61 (1),35
- Strogatz, S.(1994) Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering, Addison-Wesley, Reading MA.
- Wigner, E. P. (1990). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In Mathematics and science (pp. 291-306).
- Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (Tercera edición.). México: McGraw Hill. Méndez, M. (19 de marzo de 2019). La dinámica de los amantes. Nexos. URL: <https://ciencia.nexos.com.mx/la-dinamica-de-los-amantes/>