

**LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN EDUCACIÓN MEDIA**

**“UNA EXPERIENCIA PARA PENSAR EN EL AULA”**

OLGA FRANCISCA JARA AVALOS



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE EDUCACIÓN

ESPECIALISTA EN PEDAGOGÍA

2018

**LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN EDUCACIÓN MEDIA**

**“UNA EXPERIENCIA PARA PENSAR EN EL AULA”**


OLGA FRANCISCA JARA AVALOS

Asesor pedagógico: JOSÉ BERNARDO GALINDO ÁNGEL

Trabajo presentado para optar por el título de

Especialista en Pedagogía

2018.-

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 80	

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	La enseñanza de la derivada en Educación Media "Una experiencia para pensar en el aula"
<b>Autora</b>	Jara Avalos, Olga Francisca
<b>Director</b>	Galindo Ángel, José Bernardo
<b>Publicación</b>	Bogotá: Paraguay. Universidad Pedagógica Nacional, Ministerio de Hacienda de la República del Paraguay, 2018. 81 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional, Ministerio de Hacienda de la República del Paraguay
<b>Palabras Claves</b>	DERIVADA, DIDÁCTICA, ESTRATEGIA DIDÁCTICA, MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

2. Descripción
<p>El presente trabajo tiene como título: <b>La enseñanza de la derivada en educación media "una experiencia para pensar en el aula"</b> se ha trazado como objetivo general estructurar una propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Calculo Diferencial en el área de Matemática, basado en la modelización para generar aprendizajes significativos de los educandos del Tercer Curso de la Educación Media, en Yhú - Paraguay.</p> <p>El presente trabajo nace de la necesidad de estructurar una propuesta de estrategia didáctica innovadora para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Calculo Diferencial, en el área de Matemática, que sean eficientes y que tiendan a mejorar la práctica educativa, para encarar con éxito el reto que supone enseñar en nuestro tiempo, además con esto se da un paso fundamental en la búsqueda de una formación integral en el quehacer pedagógico y por sobre todo aplicar esas estrategias para elevar</p>

el rendimiento académico de los educandos del Tercer Curso de la Educación Media en Yhú, Paraguay.

### 3. Fuentes

Aguayo, D. (2010). Experimentando el Cálculo Diferencial [Tesis maestría] recuperado en: <http://mwm.cimav.edu.mx/wp-content/uploads/2015/04/TESIS-Daniel-Aguayo-Sosa.pdf>.

Morales, J. (2012). Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática. Presentada en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Uruguay, 2013) Recuperado en: <http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/942.pdf>.

MEC – Paraguay (2002). Diseño curricular 01 – Reforma Joven

MEC – Paraguay (2014). Actualización curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media.

MEC – Paraguay (2016). Guía didáctica para docente. Matemática 3° curso – Educación Media.

MEC – Paraguay (2016) Matemática 3° curso – Texto para el estudiante Educación Media

MEC – Paraguay (2017) Módulo IV Cálculo diferencial. Guía del docente

### 4. Contenidos

Se presenta un breve panorama del contenido de los capítulos incluidos en este trabajo de investigación:

El capítulo I: proporciona una pincelada general del marco referencial, en donde se presenta el estado de arte actual que guarda la enseñanza del Cálculo Diferencial. De igual forma se describe el problema de investigación, la justificación, así como los objetivos que se persiguen con este trabajo.

El capítulo II: presenta el marco teórico que configura el trabajo, partiendo de la didáctica del Cálculo, los elementos para el diseño de propuestas didácticas en cálculo transposición didáctica en la enseñanza de la derivada, la didáctica de los saberes aprendizaje significativo bajo el enfoque constructivista, el aprendizaje cooperativo, una pincelada sobre la reforma educativa en la Educación Media en Paraguay, el desarrollo de las competencias matemáticas en el nivel

medio, la definición de Pisa de las competencias matemáticas, la modelación matemática como estrategia didáctica, orientaciones para el desarrollo de las capacidades Génesis historia y evolución del cálculo temas del cálculo diferencial desarrollado en educación media, las nociones básicas del Cálculo y la notación actual de la derivada.

El capítulo III: describe el marco metodológico.

En el capítulo IV: se presenta la estructura de una propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática cálculo diferencial, a partir de la modelización matemática, dividido en tres sesiones: modelización matemática para estudiar la idea intuitiva de límite; modelación matemática para construir el concepto de la derivada y la modelación matemática para aplicar el concepto de la derivada, incluye además un cuadro resumen describiendo el modelo, las actividades, los recursos propuestos y el alcance didáctico.

El capítulo V: Conclusión y recomendación

El capítulo VI: Referencias bibliográficas

## **5. Metodología**

El presente trabajo se enmarca en la investigación acción, ya que se configura para dar solución a la situación suscitada en la práctica educativa del docente, a partir de un análisis crítico – reflexivo de las experiencias en el aula al impartir la unidad temática, reconociendo las debilidades como oportunidad de transformar la praxis como plan de mejora de la realidad y generar un cambio en la actuación del docente y por ende en la de los estudiantes. La investigación – acción se llevó a cabo en dos fases, de las cuatro que se propone en el clásico triángulo de investigación – acción - formación de Kurt Lewin(1946):

Fase I: Descubrir una preocupación temática, que se aprecia en la enseñanza del Cálculo Diferencial, específicamente en el desarrollo de la derivada, que recae en la búsqueda de propuesta metodológica activa para responder a las necesidades, expectativas de los estudiantes y por supuesto dar respuesta asertiva a interrogantes que plantea la propia práctica.

Fase II: Construcción del plan de acción que consiste en diseñar una propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo Diferencial, cabe destacar en este apartado, que el soporte teórico se delimitó a partir de las orientaciones recibidas en los diferentes seminarios y la revisión del estado de arte de otras investigaciones referentes a la situación planteada. En esta fase queda configurada el referente teórico que sustenta al trabajo.

Fase III ejecución del plan de acción

#### Fase IV: proceso de reflexión permanente

Estas dos últimas fases no se incluyen en la investigación, sin embargo, queda pendiente su desarrollo e implementación en Paraguay, en cuanto a la reflexión en este trabajo se presentarán en torno a lo que fue posible pensar durante el diseño de la propuesta y lo investigativo, quedando pendiente después de su implementación un trabajo de este orden que dé cuenta de aquello que posibilita la aplicación de la propuesta, que se continuará en uno de los sitios de trabajo y se hará la sistematización de esta.

### **6. Conclusiones**

Este proyecto se ha trazado estructurar una propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada de la unidad temática Cálculo Diferencial en el área de Matemática basada en la modelización para generar aprendizajes significativos de los educandos del Tercer Curso de la Educación Media en Yhú, Paraguay, identificando previamente las dificultades que se presentan para la enseñanza de la derivada y a partir de la reflexión y la revisión exhaustiva del estado de arte, se ha configurado un referente teórico que fundamenta el diseño de una propuesta mencionada.

Se ha profundizado en las bondades que ofrece la modelización matemática para aplicar como estrategia didáctica para desarrollar tres ejes centrales como el estudio del límite, el concepto de la derivada y la aplicación de la derivada en situaciones problemáticas, así también se ha implementado las nuevas tecnologías, proponiendo la utilización del software matemático GeoGebra para dinamizar el entorno educativo.

Este proyecto ha generado un gran impacto en la autora ya que ha posibilitado una profunda reflexión de la práctica pedagógica para detectar las debilidades, transformando en oportunidades de mejora, además vinculando con la preparación recibida en el transcurso de la especialización y las experiencias acumuladas para desarrollar la propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Cálculo Diferencial, a partir de la modelización.

Cabe destacar que se ha estructurado la propuesta de estrategia didáctica, sin embargo, queda pendiente la puesta en escena y la sistematización en una de las instituciones de la zona, reportando los resultados obtenidos.

Se entiende que la investigación y la docencia no es tarea fácil, sobre todo si se considera la diversidad de los paradigmas teóricos usados en la investigación y los sistemas educativos. Se ha hecho un gran intento para que esta investigación sea útil y contribuya de algún modo al mejoramiento de la práctica docente y por ende redunde en el mejoramiento de la calidad educativa, aportando elementos interesantes.

La intención es dejar abierta las posibilidades de profundizar este trabajo recibiendo aportes de otros colegas.

Es el propósito que al finalizar esta investigación se ponga a disposición tanto de los colegas del área como de los alumnos todas las novedades adquiridas en este lapso de la preparación, contribuyendo al mejoramiento de la tarea pedagógica.

<b>Elaborado por:</b>	Olga Francisca Jara Avalos
<b>Revisado por:</b>	José Bernardo Galindo Ángel

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	09	03	2018
--	----	----	------

## DEDICATORIA

Con todo mi cariño y respeto a  
la memoria de mi hermano:

**FERNANDO OMAR**

## Indice

Introducción .....	1
Capítulo I .....	1
1. Marco referencial .....	1
1.1. Planteamiento del problema:.....	1
1.2. Pregunta de la investigación .....	3
1.3. Antecedentes .....	3
1.4. Justificación .....	11
1.5. Objetivos .....	12
1.5.1. General.....	12
1.5.2. Específicos .....	12
□ Describir las dificultades que se presentan en la enseñanza de la derivada.....	13
Capítulo II .....	13
2. Marco teórico .....	13
2.1. Una mirada didáctica para plantear la enseñanza del Cálculo Diferencial con estrategias metodológicas innovadoras en la educación media.....	13
2.2. Elementos para el diseño de propuestas didácticas en Cálculo .....	14
2.3. Transposición didáctica en la enseñanza de la derivada.....	15
2.4. Didáctica de los saberes .....	16
2.5. Aprendizaje significativo bajo el enfoque constructivista .....	18
2.5.1. Aprendizaje Significativo.....	18
2.5.2. Constructivismo .....	18
2.5.3. Características:.....	19
2.5.4. Principios:.....	19
2.6. El sujeto de aprendizaje .....	19
2.7. Las operaciones formales .....	20
2.8. El aprendizaje cooperativo .....	21
2.9. Una pincelada sobre la reforma educativa en la educación media en Paraguay.....	21

2.10.	El desarrollo de las competencias matemáticas en el nivel medio .....	22
2.11.	¿Cómo define Pisa la competencia matemática?.....	24
2.12.	La modelización matemática como estrategia didáctica .....	24
2.13.	Etapas de la modelización matemática .....	28
2.14.	Proceso de modelación como recurso en las aulas de Matemáticas.....	28
2.15.	Orientaciones para el desarrollo de las capacidades .....	30
2.16.	Génesis – historia y evolución del cálculo .....	32
2.17.	Temas del Calculo Diferencial desarrollado en la Educación Media.....	33
2.18.	Nociones básicas .....	35
2.19.	Notación actual de la derivada .....	36
Capítulo III	.....	38
3.	Marco metodológico .....	38
Capítulo IV	.....	41
4.	Propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Cálculo Diferencial, a partir de la modelización .....	41
4.1.	Modelización matemática para estudiar la idea intuitiva de límite.....	43
4.2.	Modelización matemática para construir el concepto de la derivada .....	53
4.3.	Modelización matemática para aplicar el concepto de la derivada .....	56
Capítulo V	.....	64
5.1.	Conclusión .....	64
5.2.	Recomendación .....	65
6.	Bibliografía.....	67

## Introducción

Este trabajo aborda la enseñanza de la derivada en el tercer curso de la Educación Media, se enfoca en estructurar una propuesta de estrategia metodológica, basada en la modelización matemática. Particularmente, el estudio de la matemática en las instituciones de educación pretende que las personas sean capaces de desenvolverse en una sociedad tecnológicamente avanzada, lo cual incluye, entre otras cosas, la capacidad para razonar lógicamente, resolver problemas no rutinarios y comunicarse por medio de ideas fundamentadas en las matemáticas (Sánchez, 2005).

Seguidamente se presenta un breve panorama del contenido de los capítulos incluidos en este trabajo de investigación:

El capítulo I: proporciona una pincelada general del marco referencial, en donde se presenta el estado de arte actual que guarda la enseñanza del Cálculo Diferencial. De igual forma se describe el problema de investigación, la justificación, así como los objetivos que se persiguen con este trabajo.

El capítulo II: presenta el marco teórico que configura el trabajo, partiendo de la didáctica del Cálculo, los elementos para el diseño de propuestas didácticas en cálculo, transposición didáctica en la enseñanza de la derivada, la didáctica de los saberes, el aprendizaje significativo bajo el enfoque constructivista, el aprendizaje cooperativo, una pincelada sobre la reforma educativa en la Educación Media en Paraguay, el desarrollo de las competencias matemáticas en el nivel medio, la definición de Pisa de las competencias matemáticas, la modelación matemática como estrategia didáctica, orientaciones para el desarrollo de las capacidades, el génesis, historia y evolución del cálculo, temas del cálculo diferencial desarrollado en educación media, las nociones básicas del Cálculo y la notación actual de la derivada.

El capítulo III, describe el marco metodológico

En el capítulo IV, se presenta la propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática cálculo diferencial, a partir de

la modelización matemática, dividido en tres sesiones: modelización matemática para estudiar la idea intuitiva de límite; modelación matemática para construir el concepto de la derivada y la modelación matemática para aplicar el concepto de la derivada, incluye además un cuadro resumen describiendo el modelo, las actividades, los recursos propuestos y el alcance didáctico.

El capítulo V: Conclusión y recomendación

El capítulo VI: Referencias bibliográficas

## Capítulo I

### 1. Marco referencial

#### 1.1. Planteamiento del problema:

La matemática debe ser vista como una parte integrante de la cultura de la humanidad no solo por su valor instrumental sino también porque ayuda a la formación de mentes críticas y creativas, desarrolla la capacidad de abstracción y concentración, a fin de comprender y modificar nuestro entorno.

Al mismo tiempo propicia el desarrollo y afianzamiento de capacidades de tipo afectivo, como la autoestima y las relaciones interpersonales.

Las competencias matemáticas requeridas en la Educación Media se desarrollan a través de un proceso constructivo. Parte de los conceptos trabajados en la E.E.B., y se proyectan hacia nuevos conocimientos, los que serán introducidos de una manera paulatina, con un progreso cualitativo en cuanto a la complejidad de los conceptos. La tarea del docente conlleva entonces la gran responsabilidad, en el uso de estrategias metodológicas pertinentes, así como en el empleo de las tecnologías (calculadoras y ordenadores) que contribuyan a promover en el alumno nuevas capacidades y conductas favorables hacia el aprendizaje de las matemáticas, aquí se abren preguntas como: ¿desde dónde pensarse el uso de esas nuevas herramientas?, ¿son ellas realmente posibilitadoras del aprendizaje de los estudiantes o se convierten en distractores potenciales del aprendizaje?, ¿cambian los modos de la clase cuando se usan este tipo de elementos en aula?, en fin son muchas las preguntas que a partir de este tema surgen.

A lo anterior es posible agregarle la separación entre el discurso y la práctica aquí vemos una situación compleja, pues se enseña al maestro a trabajar de una forma, pero la realidad con la que se encuentra le muestra que eso no es posible o simplemente que eso no se da y empieza entonces la búsqueda de

alternativas de trabajo que le solucionen o faciliten atender esta problemática, y entonces ¿por qué se da esa separación?, ¿qué es aquello que conecta el discurso con la práctica?, ¿cómo hacer posible que discurso y práctica se conecten?

Además, se genera un dilema, los alumnos no asimilan y por ende no aprenden los conceptos dados, mucho menos resuelven situaciones problemáticas apenas más complejas que las desarrolladas en clase. Ese puede ser un asunto de poca motivación del estudiante o unas metodologías desfasadas y que no conectan el contenido con las necesidades o intereses de quienes la están aprendiendo y entonces me pregunto ¿por qué?, ¿qué es aquello que motiva?, ¿cómo hacer posible que los estudiantes aprendan? ¿a qué puede apelar el docente para favorecer el aprendizaje? ¿qué tipo de recurso creativo se puede usar para presentar algo novedoso a los estudiantes?

Como todo proceso educativo se realiza con la intención de que los discentes asimilen los conocimientos propuestos, activando sus potencialidades y poniendo en juego todas las condiciones que tienen para enfrentar los desafíos, pero al analizar el aprendizaje y el rendimiento académico, nos tropezamos con resultados inesperados, cabe entonces revisar la práctica docente y buscar respuestas indagando otras aristas que hacen referencia a las formas de aprender de las personas en general y en particular de los educandos para mejorar el acercamiento y empoderamiento de las matemáticas, proponiendo desde nuestras prácticas nuevas concepciones, nuevos aportes didácticos para generar el cambio que tienda a la consecución de la tan anhelada calidad educativa. En este apartado cabe cuestionar cuanto sigue ¿los docentes desarrollan estrategias de enseñanzas centrada en los estudiantes para permitir un ambiente de aprendizaje activo?

El área de Matemática y en especial los contenidos de la unidad temática Cálculo Diferencial, debe ser presentada a los estudiantes de la Educación Media de manera atractiva, con situaciones contextualizadas, que despierten la curiosidad e impulsen la investigación y experimentación; se debe lograr que

los estudiantes puedan visualizar el alcance de cada tema desarrollado, su importancia e implicancia tanto en el quehacer cotidiano como en otras áreas del saber cómo las Ciencias Básicas, Medicina, la Navegación, la Astronomía, la Ingeniería, entre otras, entonces se vuelve prioritario pensar en ¿qué aspectos se deben considerar al momento de seleccionar las estrategias metodológicas para la enseñanza del Cálculo Diferencial? ¿Qué tipo de estrategia presenta el maestro? ¿La estrategia aplicada es pertinente para la enseñanza del Cálculo Diferencial?

Ahora bien, uno de los conceptos fundamentales del Cálculo, es la derivada, que en la mayoría de los casos su comprensión presenta dificultades para los estudiantes, al no lograr construir el significado adecuado del concepto, lo cual trae consigo un desempeño deficiente por parte de los estudiantes para avanzar en el proceso de aprendizaje, cabe destacar que no solo se limita al conocimiento del concepto sino que debe desarrollar la capacidad de aplicarlo en la resolución de situaciones problemáticas, por tal motivo es necesario plantear: ¿qué hacer para enseñar la derivada?

## **1.2. Pregunta de la investigación**

¿De qué manera una propuesta de estrategia didáctica, basada en la modelización matemática puede favorecer la enseñanza de la derivada para lograr que los estudiantes del tercer curso de la Educación Media, lo apliquen en las situaciones de la vida diaria?

## **1.3. Antecedentes**

Un rastreo inicial de algunas investigaciones que han abordado el tema muestra trabajos como el de José David Zaldívar Rojas (México, 2006), quien en su obra denominado “Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo”, cuyo problema de investigación señala una tensión muy frecuente, pero pocas veces analizada profundamente, que en sus palabras resume de la siguiente manera: “La poca o nula vinculación entre las investigaciones en Didáctica del Cálculo y la Práctica Docente en Cálculo, así

como el desconocimiento, muchas veces inconsciente (otras tantas no) de los profesores sobre la existencia de resultados empíricos relacionados con los conceptos básicos del Cálculo; resultados que comprenden explicaciones y análisis epistemológicos, cognitivos y didácticos que encierra el problema de la enseñanza-aprendizaje del cálculo” y de ahí surge su trabajo: “la investigación didáctica como base científica de planeación y orientación de la práctica docente en Cálculo”. En donde, escoge como principal problema de investigación, la búsqueda de una manera de engranar estos dos aspectos. En efecto, indagó y delimitó el tipo de elementos inmersos en las investigaciones, que, aunque obedecen a paradigmas teóricos y metodológicos distintos, comparten perspectivas específicas, por ejemplo, la crítica hacia lo deficiente de la enseñanza tradicional y la necesidad de enfatizar aspectos más centrados en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Su aporte al proyecto se centra en los temas específicos como los elementos para el diseño de propuestas didácticas en cálculo diferencial, dentro de la propuesta didáctica incorpora actividades de institucionalización para el desarrollo metodológico del cálculo.

En el apartado sobre los elementos para el diseño de propuestas didácticas en cálculo diferencial, el autor, presenta los elementos de suma importancia para el diseño de las propuestas didácticas en Cálculo Diferencial. El mismo dice que: tales elementos derivaron del análisis de artículos de investigación relacionados con el diseño de propuestas didácticas en la enseñanza de algunos conceptos del cálculo diferencial. Los temas de búsqueda fueron: funciones reales, límites de funciones reales, continuidad de funciones y derivadas. Se examinaron artículos de investigación que desarrollarán, mediante actividades y propuestas, alguno de estos temas.

De este trabajo también se recogen las recomendaciones para el diseño de las estrategias metodológicas pertinentes a tener en cuenta al momento de planear las propuestas didácticas:

- Para el diseño y desarrollo de propuestas de aprendizaje es conveniente que primero se decidan las competencias matemáticas que queremos desarrollar en los estudiantes.

- Tomar en consideración el uso del Aprendizaje Cooperativo como técnicas de trabajo de los estudiantes dentro del aula.
- Es conveniente que los profesores tengan en consideración los diferentes Estilos de Aprendizaje y Estilos Cognitivos que sus estudiantes manejan y prefieren (Cantoral, 1993).
- Atender, en todo lo que sea posible a los aspectos funcionales de los conceptos. Se podría interpretar también como el surgimiento del concepto o del tema a partir de necesidades, o como herramientas para resolver situaciones problemáticas.
- Tratar de emplear situaciones concretas y cotidianas a los estudiantes, cuanto sea posible. Los conceptos básicos deben procurarse de esta manera.
- Es muy importante considerar cual será la actividad de los estudiantes a lo largo de las actividades de las propuestas. Es conveniente definir si la actividad del estudiante será activa o pasiva.

Es digno mencionar que este autor pretende, hacer más accesible a los profesores los principales resultados de la investigación en didáctica del cálculo, de manera que se puedan aprovechar al máximo tales resultados e innovaciones que la investigación reporta, hecho tan relevante, haciendo que su esfuerzo se vea retribuido al aportar con cuestiones prácticas y no meras teorías.

En este trabajo de investigación se realizó una revisión de diferentes fuentes de información relativas a investigación en Didáctica de las Matemáticas. Para la revisión documental se enfocó en artículos de investigación que se reportaban en la literatura. Podríamos decir que la metodología que se aplicó fue la revisión del “Estado del arte” constituyéndose en una investigación de tipo Documental.

Una segunda investigación fue la de Daniel Aguayo Sosa (México, 2010), en su trabajo titulado, “Experimentando el Cálculo Diferencial” que abordó como tema central la problemática en la asignatura de Cálculo Diferencial, el mismo refiere: se percibe que el docente tiene dificultades para lograr que sus alumnos se apropien de los conocimientos, ya que no cuenta con herramientas que le

permitan mostrarle al alumno la importancia y la aplicación de la materia misma.

Además, menciona que, la mayoría de los estudiantes tienen dificultad para lograr la comprensión del cálculo diferencial, dado que es una materia en la que el nivel de análisis es mayor y en la que en muchas ocasiones ellos no le encuentran aplicabilidad en su vida cotidiana. Siendo su objetivo principal: Mejorar y contribuir al aprendizaje de los alumnos en la materia de cálculo diferencial, ligando la teoría y práctica, acentuando su relación con otras asignaturas. En su estudio mostró las bondades de incluir una serie de experimentos para desarrollar los diferentes temas del cálculo, describiendo detalladamente, el objetivo, las metas, los materiales necesarios y el procedimiento, con estos experimentos logró complementar el trabajo del docente, a la vez que permitió que el alumno comprenda mejor los temas de esta asignatura, tomando como base la perspectiva de que el alumno aprende mejor si manipula objetos o realiza actividades que le sean significativas para con ello construir su propio conocimiento; este se convierte en un aporte importante para pensar la propuesta investigativa de este proyecto, pues muestra que es posible revertir la situación problemática que plantea la enseñanza del cálculo para los jóvenes de educación media.

Para el diseño de las estrategias metodológicas innovadoras del Cálculo Diferencial puede contribuir con las situaciones prácticas que ayuden a mejorar el aprendizaje a los alumnos en la materia mencionada.

En la propuesta “Estrategias didácticas para el análisis y estudio de funciones algebraicas a través de la derivada de una función” de Alejandro Salmerón Jiménez, (Colima- México, 2012) presenta aportes muy valiosos como el origen del cálculo, su estado de arte, revisión de la lógica de construcción del conocimiento de matemáticas, se centra en los diferentes estilos de enseñanza de las Matemáticas que se han utilizado a lo largo del tiempo, además sugiere las propuestas didácticas sobre la enseñanza de la matemática considerando que el conocimiento matemático no es algo totalmente acabado sino que es un proceso en plena creación y transformación, asunto que éste que mueve en parte el desarrollo de este proyecto.

Adentrando en el trabajo de Carlos Eduardo Pineda Ruiz, (Colombia, 2013) en su investigación presenta: “Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria”, parte de las razones del porque el concepto de derivada de una función es una de las ideas matemáticas fundamentales que debe conocer todo estudiante de último curso de educación secundaria, sin embargo, a pesar de su importancia, existen factores que pueden llegar a dificultar el correcto aprendizaje de dicho concepto. Un factor que le impide a los estudiantes un adecuado aprendizaje de la noción de derivada de una función es el tiempo que se le dedica a este concepto dentro del currículo de matemáticas en el último grado de educación secundaria, ya que según lo que he podido apreciar desde mi experiencia como docente de secundaria, la derivada se empieza a enseñar en el último grado al finalizar la asignatura de cálculo. Esto se debe a que los estudiantes deben iniciar el estudio de dicha asignatura con temas como números reales, funciones, límite y continuidad. Es decir, el tiempo que se le asigna a la enseñanza del concepto de derivada es relativamente poco, ya que es cuestión de un semestre académico, tiempo que es insuficiente para que los estudiantes aprendan a derivar funciones y menos aún entender el significado de este concepto matemático y sus aplicaciones.

En sus reflexiones didácticas sobre el concepto de la derivada, menciona que, según Azcárate et al. (1990), para que la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada tenga éxito el docente debe tener en cuenta cuatro factores claves que son:

- ✓ Partir de las concepciones previas que los alumnos tengan del concepto de velocidad.
- ✓ Usar gráficos de funciones que permitan visualizar claramente las ideas especialmente cuando se habla de pendiente de una recta y tasas medias de variación.
- ✓ Usar problemas concretos en los cuales el estudiante relacione lo que aprende con situaciones de la vida diaria.
- ✓ Tener claro las dificultades que se presentan cuando se realiza el proceso de paso al límite en una función y entender que el límite no es solo un proceso de sustitución de una variable por un valor y realizar unas operaciones, ya que este concepto va más allá de esto.

Hace hincapié en los factores claves para lograr el éxito y garantizar una enseñanza de calidad en Cálculo, y además menciona que fortuitamente empezó a trabajar con el software GeoGebra, he aquí la aparición de la niña bonita de la literatura actual de la enseñanza, las TICs, al respecto escribe lo siguiente: En cuanto al uso de las (TICS) Tecnologías de la Información y Comunicación, estas han hecho que el campo de la educación se revolucione de tal manera que hoy en día no se habla sobre la necesidad de éstas al interior del aula de clase, sino de las ventajas que tienen en el desarrollo de pensamiento por parte del estudiante y de cómo el docente puede cada día innovar estrategias para brindar una educación de mejor calidad. Es por esta razón que el uso de softwares como el GeoGebra, permite que el estudiante pueda aprender los conceptos matemáticos rápidamente, especialmente aquellos que están relacionados con la derivada de una función. Además de lo anterior GeoGebra hace que la labor del docente sea más fácil en cuanto a las explicaciones matemáticas, permitiendo que sus clases sean más dinámicas y se acerquen más a las necesidades de los jóvenes de hoy, quienes necesitan de una formación más interactiva a través del uso de las nuevas tecnologías como el computador, las tabletas y los celulares.

En su trabajo asevera que con el uso de GeoGebra este proceso es fácilmente verificable y el estudiante puede apreciar fácilmente que esto es así. Hace un tiempo atrás era imposible dar una explicación de la derivada en un punto usando este tipo de programas matemáticos. Hoy en día podemos ver como en diferentes páginas de internet existen aplicaciones que explican este concepto de una manera clara, haciendo que el estudiante pueda comprender el concepto de derivada de manera rápida y efectiva. Esta conclusión servirá de aliciente para incluir en el trabajo un diseño basado en la aplicación de software educativos (como Geogebra, Desmos, Graph, Cabri, entre otros) dinámicos, efectivos y muy aplicados en las comunidades de los matemáticos y en aulas.

El trabajo de Nancy Abarca, (Bolivia 2007) que trata sobre: “La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora”. Parte previamente de estudios realizados sobre

estudiantes de Cálculo I, en relación con la solidez de los conocimientos asimilados, se ha podido constatar que:

- ✓ Los estudiantes prefieren sólo resolver ejercicios, sin emplear axiomas, teoremas, definiciones, conceptos, etc.
- ✓ La negativa para resolver problemas permite aseverar que usualmente los estudiantes olvidan lo que en un momento determinado demostraron haber aprendido, porque retuvieron en su memoria los conceptos y procedimientos objetos de aprendizaje como hechos aislados y no inmersos en una organización o estructura lógica.
- ✓ Generalmente lo aprendido en su momento al lapso del tiempo se reproduce tal cual sin conexiones con otros conocimientos y esto es debido a la falta de solidez.

Toma como eje central la resolución de problemas y detecta que en la misma hay bloqueo y es porque no hay una organización efectiva del conocimiento por parte de los estudiantes. Se reconoce la deficiencia en la preparación de los estudiantes para “resolver problemas”. Se atribuyen distintas causas, a crear esta situación, y una de ellas se debe a la enseñanza tradicional que aún se practica, es decir, el “Modelo Transmisión-recepción”, puesto que el profesor de matemáticas está estigmatizado como una persona implacable y que los conocimientos que vierte son indiscutibles, eso hace que los estudiantes sean muchas veces sujetos pasivos de su aprendizaje, porque no se propician discusiones, diálogos y muchas veces no se sabe cómo motivarlos. Así la autora se propone implementar estrategias y métodos heurísticos basados en la teoría de Polya y Shöenfeld, para motivar al estudiante a desarrollar la capacidad de resolver problemas y tener un mejor aprovechamiento.

El aporte de esta investigación es la aplicación de estrategias y métodos heurísticos basados en las teorías de Polya y Shöenfeld, como un híbrido se emplearon para la resolución de problemas, mediante una estrategia didáctica para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en una variable (Cálculo I), con resolución de problemas, de modo que el estudiante se sienta motivado a estudiar las matemáticas con profundidad y organice sus conocimientos mediante una estructura lógica, La estrategia didáctica que se plantea en este trabajo, consiste en la elaboración de fichas de trabajo como alternativa metodología para el tratamiento de la resolución de problemas , así como un

proceder generalizado para llevar a cabo la resolución de problemas en general mediante las técnicas de solución adaptadas para la asignatura de Cálculo.

Mientras que, los autores John Fredy Morales García y Lina María Peña Páez, (VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Uruguay, 2013 ) en la “Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática”, presenta a la “La modelación matemática concebida como una herramienta didáctica” En la propuesta metodológica de enseñanza-aprendizaje basada en la modelación matemática, hacen mención de la dificultad de instaurar un nuevo método de enseñanza aprendizaje, pero así mismo, reconocen la importancia de tomar como punto de partida el contexto, es decir, los modelos que se encuentran en la realidad, para la formación de los estudiantes. Al idear la modelización, asumen el compromiso de iniciar un cambio en la perspectiva tanto de los profesores como de los estudiantes en la formación matemática de los estudiantes. Entonces tomando como referencia este estudio, sería interesante adaptar situaciones concretas de la vida cotidiana para modelizar matemáticamente ajustando al contenido programático.

Todas las anteriores investigaciones trabajaron de manera investigativa desde la Didáctica del Cálculo, la Práctica Docente en Cálculo, el origen, la evolución, la aplicación del Cálculo, la necesidad de contar con el diseño de las estrategias metodológicas innovadoras bien estructurado, dada la complejidad de la enseñanza - aprendizaje, donde la mayoría de los estudiantes tienen dificultad para lograr la comprensión del cálculo diferencial, sabiendo que es una materia en la que el nivel de análisis es mayor y en la que en muchas ocasiones ellos no le encuentran aplicabilidad en su vida cotidiana, como también se evidencia la falta de motivación y la suficiente preparación de los estudiantes para “resolver problemas”, ellas aportaron a este proyecto las teorías, las recomendaciones para el diseño de las estrategias metodológicas pertinentes a tener en cuenta al momento de planear las propuestas didácticas, las actividades que evidentemente se pueden insertar dentro de las estrategias de modo que los alumnos puedan trabajarlas, participando activamente en la construcción de sus aprendizajes, la importancia de los recursos tecnológicos

en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, implementado exclusivamente como herramienta didáctica, para ello, es necesario conocer y saber cómo aplicar algunos recursos tecnológicos.

El problema de la enseñanza – aprendizaje del cálculo diferencial se traduce, en breves palabras, en que los estudiantes no logran las competencias que de ellos se esperan al revisar los contenidos que esta área del conocimiento matemático involucra, y, por tanto, los malos rendimientos académicos no se hacen esperar, entonces para tratar de remediar y revertir tal situación, conviene realizar una profunda revisión de la práctica docente a la luz de la didáctica del Cálculo, propuestos por los autores cuyas obras fueron analizados, la idea aquí es plantear estrategias metodológicas de enseñanza que sean innovadoras que permitan acercar a los estudiantes de la Educación Media a los contenidos propuestos, con variadas actividades de situaciones prácticas que se les presentan en la vida cotidiana centradas a movilizar y encender la flama de la curiosidad e interés por las Matemáticas y en particular por el Cálculo Diferencial, Se tratará de presentar los temas de una manera amena pero sin perder cierto grado de rigor matemático de acuerdo con el programa de la materia, además se pretende usar el GeoGebra como una herramienta que permita a los estudiantes una adecuada comprensión de algunos temas propuestos, las actividades se plantearán en el salón de clase para que los estudiantes reconozcan las ventajas que proporcionan el uso de herramientas tecnológicas.

#### **1.4. Justificación**

El presente trabajo nace de la necesidad de estructurar una propuesta de estrategia didáctica innovadora para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Calculo Diferencial, en el área de Matemática, que sean eficientes y que tiendan a mejorar la práctica educativa, para encarar con éxito el reto que supone enseñar en nuestro tiempo, además con esto se da un paso fundamental en la búsqueda de una formación integral en el quehacer pedagógico y por sobre todo aplicar esas estrategias para elevar el rendimiento

académico de los educandos del Tercer Curso de la Educación Media en Yhú, Paraguay.

Se entiende que el educador se forma en el proceso de producir conocimientos y soluciones a los problemas que le plantea su propia experiencia, se forma en un hacer constante y reflexivo sobre su práctica, en este caso es pertinente ahondar en la forma en que se enseña a los alumnos, en donde a partir de los resultados se puedan diseñar la implementación de metodologías activas y seleccionar las actividades más coherentes tanto con las metodologías planteadas como los intereses de los educandos e insertarlo en el proyecto anual del área para aplicarlo con eficiencia y eficacia.

Cabe resaltar que el interés central de esta investigación es realizar la estructura de una propuesta metodológica para enseñar la derivada, y he aquí que se impone con fuerza el hecho de intentar que cambie, en alguna medida, las prácticas habituales sobre la enseñanza del Cálculo, de modo tal que se pueda avanzar en la comprensión del concepto y, así, dotar a los estudiantes de las competencias necesarias para que puedan resolver los problemas que el cálculo diferencial hace posible con las herramientas de las que se disponen.

Con esta propuesta se buscará favorecer aún más la aprehensión de los contenidos del Cálculo Diferencial durante el proceso de enseñanza aprendizaje de manera fácil, entretenida y práctica para generar aprendizajes autónomos, significativos y duraderos, sobre todo que sirva de base para que el alumno siga aprendiendo y aplicando en otro ámbito de la vida cotidiana.

## **1.5. Objetivos**

### **1.5.1. General**

- Estructurar una propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Calculo Diferencial en el área de Matemática, basado en la modelización para generar aprendizajes significativos de los educandos del Tercer Curso de la Educación Media, en Yhú - Paraguay.

### **1.5.2. Específicos**

- Describir las dificultades que se presentan en la enseñanza de la derivada.
- Construir un marco referencial que fundamente una propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada.

## Capítulo II

### 2. Marco teórico

#### **2.1. Una mirada didáctica para plantear la enseñanza del Cálculo Diferencial con estrategias metodológicas innovadoras en la educación media.**

El cálculo es una de las disciplinas más relevantes de la matemática, mediante él se pueden formular modelos matemáticos precisos que permiten entender el mundo que nos rodea; su desarrollo ha contribuido con la solución de problemas importantes en diferentes áreas del conocimiento humano como la física, la química, la ingeniería, la astronomía, la economía, la navegación, las comunicaciones y la salud entre otras. Con la ayuda del cálculo, el hombre inició la conquista del espacio, así como el redescubrimiento del planeta a través de viajes submarinos en los cuales se necesita medir la resistencia máxima de las naves y los trajes utilizados por los buzos para descender a grandes profundidades. Una de las ideas centrales del cálculo es el concepto de derivada y aunque ésta se introdujo inicialmente para resolver problemas relacionados con la determinación de la recta tangente a una curva en un punto dado, pronto se pudo establecer que era una poderosa herramienta para estudiar el comportamiento de una función. Teniendo tantas aplicaciones en muchas áreas del saber, se entiende que su aprendizaje es ineludible, pero ¿cómo enseñan los maestros? y ¿cómo aprenden los alumnos?, asuntos estos que bien vale la pena mirar desde lo didáctico.

## 2.2. Elementos para el diseño de propuestas didácticas en Cálculo

Se entiende por Sistema Didáctico al conjunto de relaciones que en general se establecen entre profesor y los alumnos con la intencionalidad explícita de desarrollar enseñanza para producir aprendizajes específicos.

Los elementos que se presentan pueden ser agrupados como inherentes al objeto matemático, o propios de la persona; de igual manera pueden ser categorizados como elementos del tipo: epistemológicos, cognitivos y didácticos.

La primera distinción atiende a que los conceptos matemáticos muchas veces son complicados en sí mismos, las problemáticas relacionadas a su aprendizaje son debidas a su propia naturaleza y a su epistemología de desarrollo (propios del objeto); otras veces, las dificultades de los conceptos matemáticos están relacionadas a consecuencias del lenguaje, motivaciones personales o a las concepciones previas de los estudiantes (propios de la persona). La segunda distinción se realiza atendiendo a las tres dimensiones centrales en el análisis y funcionamiento del sistema didáctico. Básicamente estas tres dimensiones atienden a diferentes preguntas que las rigen; la dimensión epistemológica es guiada por la pregunta: ¿cómo se constituye el objeto de conocimiento?; la dimensión cognitiva responde a la pregunta: ¿cómo el estudiante aprende el objeto?, por último, la dimensión didáctica responde a la pregunta: ¿cómo se enseña el objeto? (Arrieta, 2003).

La dimensión epistemológica se refiere a las distintas evoluciones de los conceptos que en la historia se han presentado a través de su ubicación en la enseñanza. Las evoluciones forman parte de la aproximación del saber hacia un estadio científico propio de la época en estudio. En esta dimensión es importante reconocer aquellos obstáculos para el aprendizaje a través de un desarrollo histórico de las ideas y su devenir en la enseñanza actual.

La dimensión cognitiva tiene que ver con los diferentes puntos de vista, las concepciones, representaciones y modos en que los involucrados abordan e interpretan el concepto, objeto, noción, etc., que profesores, estudiantes y en general, las comunidades académicas tienen o se forman al respecto.

La dimensión didáctica se relaciona con las características de la labor docente dentro del sistema educativo en el estudio de las nociones de la enseñanza a través de los libros de texto, en la manera en que se enseña el concepto por parte de los profesores, así como de las exigencias que estos hacen.

Tanto la investigación en didáctica del cálculo y la práctica docente tienen sus propios problemas y dificultades, que quizás, hoy día, tienen muy pocos puntos en común. Lo anterior es debido principalmente a que el conocimiento basado en la investigación no se transforma fácilmente en estrategias educativas efectivas aunado con la poca accesibilidad e interés de los profesores hacia los resultados de la investigación o por el poco interés de los profesores en ejercicio hacia los problemas propios del proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo. Cabe mencionar que, en varios casos, la investigación ha conducido a la producción de diseños de instrucción que han mostrado ser efectivos, al menos en entornos experimentales. Sin embargo, también debemos reconocer que la investigación no nos da una forma general de mejorar fácilmente los procesos de enseñanza y aprendizaje (Artigue, 2003).

El florecimiento de investigaciones cuyo fin sea crear “puentes” entre la investigación y la práctica docente, serán las bases para poder aspirar a un cambio, aunque no radical, si muy valioso en la práctica docente actual, pero ello significa encontrar formas de hacer que el conocimiento basado en la investigación sea útil fuera de las comunidades y los entornos experimentales donde se desarrolla, no pudiendo ser esto sólo responsabilidad de los investigadores. Los aportes de la investigación en Matemática Educativa pueden ayudarnos considerablemente si llegamos a hacer posible que sus resultados muevan a un gran número de profesores.

También a la luz de la propuesta didáctica se plantea cambiar, en gran medida, los roles del profesor y del estudiante, haciendo que el del último sea cada vez más activo, mientras que para el primero implicaría un conocimiento personal.

### **2.3. Transposición didáctica en la enseñanza de la derivada**

Se llama transposición didáctica al proceso por el que un saber sabio o saber científico se convierte en un saber objeto de enseñanza. La educación formal

es un proceso en el cual ciertos contenidos son transformados en contenidos de la enseñanza. Para que ello sea posible debe operar un doble proceso de descontextualización y recontextualización, que transforma el contenido inicial en un contenido con fines pedagógicos.

En el proceso de traducción de los contenidos podemos identificar algunas operaciones frecuentes: simplificación, modificación y reducción de la complejidad del saber original; así como la moralización del contenido. Generalmente, en la transposición didáctica se dan por sentados saberes anteriores y necesarios para poder moverse en el marco del contenido que se va a enseñar. Así, al partir de algunos problemas de la enseñanza de las matemáticas, Yves Chevallard, plantea, en términos sintéticos, que “la transposición didáctica es la capacidad que desarrolla un sujeto para convertir un conocimiento disciplinar en un conocimiento enseñable y aprendible, y por ello constituye la esencia del acto pedagógico” (1998, p.15).

#### **2.4. Didáctica de los saberes**

La transposición didáctica tiene un peso especial, porque se trata de la fidelidad. En lo didáctico es clave asumir el concepto de transposición didáctica. De acuerdo con esta teoría (Chevallard, 1997), el saber que se va a enseñar se presenta mediante textos de saber. Estos tienen como característica seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo el discurso tiene un principio y un fin (autocontención de los textos de saber) y opera por un encadenamiento lógico de razonamientos. Hoy sabemos un hecho fundamental: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje (el ejemplo más conocido es el que nos proporciona la llamada reforma de la matemática moderna).

Esta teoría sugiere que el saber que se va a enseñar difiere cualitativamente del saber erudito (esto, claro está, debido a los fenómenos de la transposición didáctica). Este principio se aplica con el nombre de funcionamiento didáctico de los saberes que proporciona la teoría, la que establece diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico (Chevallard, 1997), que son:

Nociones protomatemáticas: aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas.

Nociones paramatemáticas: nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumento para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera objetos de estudio en sí mismas.

Nociones matemáticas: objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

A este respecto, Chevallard (1997) menciona que la noción paramatemática de demostración puede ser objeto de definiciones lógicas y precisas en la lógica matemática. Estas nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar que es posible dividir en dos grandes grupos: nociones explícitas, que están conformadas por las nociones matemáticas, y nociones implícitas, conformadas por las nociones paramatemáticas y las nociones protomatemáticas. La importancia de estas distinciones en niveles de explicitación es que proporcionan elementos para el análisis del discurso didáctico, en particular en la enseñanza del cálculo diferencial.

En la comunicación (elemento de la transposición didáctica) se parte de un saber académico que pasa por diversas etapas en las que ese saber es formateado, y en esos pasos se corre riesgo de que el saber académico llegue tergiversado al destinatario (Cantoral y Mirón, 2000). El proceso es así:

- Saber académico-magisterial. Todas las fuentes que se emplean para apropiarse del tema que se quiere proponer: los libros más científicos, los textos, etc. Ese saber debe convertirse en:
  - Un saber enseñable (primer formateo): qué y cómo se presenta, de manera que suene comprensible y relevante.
  - El saber efectivamente enseñado: la presentación concreta que sucede en el tiempo y espacio del curso.
  - El saber recibido efectivamente por el sujeto que aprende (nunca lo es porque el destinatario apropia el saber con las marcas de todo su mundo idiosincrático: sus experiencias, sus conocimientos previos, etc.).

Chevallard (1991) agrega que es necesaria una vigilancia epistemológica que aluda a la atenta mirada que debe haber respecto a la brecha existente entre el saber académico y el saber que se va a enseñar, pues es un aspecto fundamental que debe tener en cuenta el docente en el momento de hacer el proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo con sus estudiantes. Una vez instalada la duda sistemática, es posible una ruptura epistemológica que permita al docente deshacerse de la ilusión de transparencia aparente dentro del universo en el cual enseña.

Cabe resaltar que el proceso de enseñanza del Cálculo Diferencial merece una atención especial por dos motivos: por su complejidad para enseñar y aprender, y, por su aplicabilidad en la vida del ser humano, entonces el docente procurará utilizar todos los medios que está a su alcance para lograr que los estudiantes se apropien de los saberes que propone el cálculo, sabiendo que para que el aprendizaje sea efectivo y útil, evidentemente se necesita una buena preparación en Geometría, Álgebra y Geometría Analítica, entonces aquí entra a tallar una herramienta imprescindible para el profesional, la aplicación de los conocimientos didácticos aportados por varios estudiosos, en particular en este caso de Chevallard, para hacer frente a la realidad que le plantea su práctica.

## **2.5. Aprendizaje significativo bajo el enfoque constructivista**

### **2.5.1. Aprendizaje Significativo**

Según los planteamientos de Ausubel (1976), Díaz Barriga (2003) menciona que, durante el aprendizaje significativo el aprendiz relaciona de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas, por lo que es necesario que haya disposición del aprendiz para aprender significativamente y enfocar la intervención del docente en esa dirección.

Por otra parte, el aprendizaje significativo es aquel que supone un interés del alumno y ocupa un papel central en el modelo mental que el estudiante tiene del mundo; supone una conexión con el resto de lo que sabe y la posibilidad de compartir esos contenidos de aprendizaje con otros. Carretero, (1998)

### **2.5.2. Constructivismo**

Es la corriente aplicada actualmente en la Educación Media en nuestro país porque todas sus acciones tienden a lograr que los alumnos construyan su propio aprendizaje conociéndose como aprendizaje significativo. Las experiencias y los conocimientos previos del alumno son parte del buen aprendizaje.

El modelo Constructivista está centrado en la persona, en sus experiencias previas de las que realiza nuevas construcciones mentales.

Es todo proceso de enseñanza- aprendizaje activo, basado en la reflexión de las personas, de manera que el educando va construyendo mentalmente su entendimiento de la realidad, con base al conocimiento previo y a las nuevas experiencias.

### **2.5.3. Características:**

- ✓ Toma como punto de partida los saberes previos.
- ✓ Confrontan lo conocido por lo nuevo por conocer.
- ✓ Promueve la solución del conflicto cognitivo.
- ✓ Desarrollan la autonomía y capacidad crítica.
- ✓ Los aprendizajes son útiles para toda la vida

### **2.5.4. Principios:**

- ✓ Los alumnos son el centro del proceso educativo.
- ✓ Los alumnos construyen sus propios aprendizajes.
- ✓ Los alumnos aprenden en la interacción con su realidad natural, social y cultural.
- ✓ Asumen las condiciones del aprendizaje: uso óptimo del tiempo, del espacio y material educativo, así como el trabajo en grupos.

## **2.6. El sujeto de aprendizaje**

En la Educación Media se trabaja con estudiantes cuyas edades oscilan entre 15 y 18 años, entonces cabe analizar el comportamiento de los mismos en esta etapa difícil, en general existen acuerdos en considerar la adolescencia como

un periodo de crisis, pero no desde una visión negativa y pesimista sino desde una visión positiva que considera a la crisis como un factor que incita a la movilidad necesaria para el crecimiento.

Estas reflexiones comprometen a docentes, porque mucho dependerá de las experiencias de aprendizaje que se les ofrezcan a los sujetos que aprenden, el que ejerciten la competencia o la cooperación, la apatía o el compromiso, la agresividad o la solidaridad, la formación de nuevos instrumentos de pensamiento o el refuerzo de la memoria mecánica, los impulsos constructivos o destructivos.

## **2.7. Las operaciones formales**

Según la teoría de Piaget los/as estudiantes desde aproximadamente los 11 años en adelante deberían realizar tareas en las cuales se involucren el pensamiento abstracto y la coordinación de diversas variables. Estas habilidades son las denominadas operaciones formales.

En el nivel de las operaciones formales sigue dándose las operaciones y habilidades correspondientes a etapas anteriores; es decir el pensamiento formal es reversible e interno y está organizado en un sistema de elementos interdependientes. Sin embargo, el centro de pensamiento en esta etapa cambia “de lo que es a lo que puede ser”.

El alumno que posee las habilidades del pensamiento formal es capaz de:

- ✓ Imaginar una situación sin experimentarla.
- ✓ Considerar una situación hipotética y razonar deductivamente.
- ✓ Razonar inductivamente, usar las observaciones particulares para identificar principios generales.
- ✓ Plantear hipótesis, realizar experimentos mentales para probarlas y aislar o controlar variables para realizar una prueba válida de las mismas.
- ✓ Generar sistemáticamente diferentes posibilidades para una situación determinada.

Woolfolk (1999), recomienda a los profesores que ayuden a sus estudiantes a usar las operaciones formales de la siguiente manera:

- ✓ Seguir utilizando los materiales y las estrategias de enseñanza de las operaciones concretas como mapas, ilustraciones, gráficos y diagramas entre otros.
- ✓ Dar la oportunidad de explorar preguntas hipotéticas.
- ✓ Permitir que resuelvan problemas y razonen de manera científica, diseñando experimentos para responder preguntas y hacer que sostengan con argumentos lógicos sus posiciones.
- ✓ Enseñar conceptos generales en lugar de hechos simples, utilizando materiales e ideas que tengan relevancia para la vida.

## **2.8. El aprendizaje cooperativo**

En el documento oficial del Ministerio de Educación y Ciencias se menciona al aprendizaje cooperativo como una técnica válida que favorece la interacción entre los estudiantes. Exige por parte de los mismos, la aceptación de la diversidad como fuente de construcción y aprendizaje. Enriquece el trabajo con una participación real de todos los involucrados, desarrolla la capacidad de negociación y el respeto por las diferencias. No se trata de una simple suma de aportes, sino de una constante retroalimentación que va rescatando los conocimientos, la experiencia, el bagaje cultural que posee cada sujeto. Facilita la confrontación de puntos de vista, argumentaciones, tomar decisiones conjuntas y ofrecer posibles soluciones para los conflictos que se presenten.

## **2.9. Una pincelada sobre la reforma educativa en la educación media en Paraguay**

La historia de la educación paraguaya cuenta con varias reformas. La primera que afectó a la educación secundaria se desarrolló en 1904 cuando se presentó un plan de estudio con especificaciones para los seis cursos del bachillerato. En 1924, se puso en marcha la reforma de la educación elemental y normal. En 1931 se implementó un nuevo plan de estudio para el bachillerato, que definía un ciclo general de cinco años y un curso preparatorio para la universidad. En 1957 se conformó una Comisión de Reforma de la Enseñanza Media con asesoría de la UNESCO. Esta comisión logró la aprobación de un

nuevo plan de actividades educativas. En el año 1973, con Innovaciones Educativas se realizó una reorganización curricular en todos los niveles educativos.

Bajo el eslogan “Educación compromiso de todos”, se implementó de manera gradual la Reforma Curricular en la Educación Escolar Básica (EEB), que se universalizó a partir del año 1994. Este proceso afectó a la Educación Media (EM) desde el año 2002, en un contexto de educación no gratuita ni obligatoria para los tres cursos que corresponden a dicho nivel.

La Educación Media inició el proceso de Reforma Educativa, con la puesta en vigencia de un nuevo Diseño Curricular y los programas de estudio que como novedad más importante tenían el hecho de estar orientados hacia el desarrollo de competencias.

En el 2014, a doce años del inicio de la Reforma de la Educación Media, en el contexto de una constante búsqueda de la calidad, el Ministerio de Educación y Ciencias (MEC) ha emprendido la labor de actualizar los programas de estudio de la Educación Media, en lo que respecta al Plan Común y al Plan Específico de los tres énfasis del Bachillerato Científico.

El actual diseño se organiza en tres planes: común, específico y optativo. El primero posibilita una formación general y facilita la movilidad de estudiantes; el segundo, permite una formación más profunda y vertical, en una determinada área, y el tercero constituye un espacio en el que las comunidades educativas participan plenamente de las decisiones curriculares al seleccionar aquello que consideran relevante en la formación de los estudiantes, como complemento de los planes común y específico. Este hecho conlleva mayor protagonismo de los actores locales y, también, mayor responsabilidad.

La modalidad del Bachillerato Científico propone la formación en tres énfasis: Ciencias Básicas y Tecnología, Letras y Artes y Ciencias Sociales, tiene una duración de 3 años y busca la incorporación positiva del egresado a la vida social, productiva y a la educación superior.

## **2.10. El desarrollo de las competencias matemáticas en el nivel medio**

### **Fundamentación**

El programa oficial del currículo de la Educación Media, se refiere al desarrollo de la Matemática en los siguientes términos: el estudio de la Matemática, en los distintos niveles del periodo educativo, resulta fundamental ya que esta ciencia sirve como herramienta para muchas otras, en los distintos campos del saber.

Así, dando continuidad a la competencia desarrollada en la Educación Escolar Básica, en este nivel se desea que el estudiante sea capaz de formular y resolver situaciones problemáticas extraídas de contextos reales, utilizando nuevos saberes matemáticos. Es decir, se pretende mostrar a los estudiantes una matemática funcional, menos abstracta y abrir de esta manera un mundo de aplicaciones de esta ciencia en la vida cotidiana.

En este nivel se inicia el estudio de ramas de la Matemática como la Trigonometría y el Cálculo Diferencial. Las propiedades estudiadas en las mismas son aplicadas, por ejemplo, a la Física, así como en el nivel preuniversitario y universitario como base para el desarrollo de una matemática de nivel superior. A su vez, en este nivel es abordado el estudio de la Geometría Analítica y se hace énfasis en la necesidad de que los estudiantes puedan apreciar las múltiples utilidades y aplicaciones de la misma en la Ingeniería o la Arquitectura. Asimismo, se da continuidad al estudio del Álgebra, rama ya conocida por los estudiantes pues la misma fue abordada en años anteriores pero que en este nivel será profundizada, resaltando siempre su valiosa utilidad para la modelización de situaciones de la vida real.

Continúa diciendo que, a diferencia de propuestas anteriores, ésta presenta una distribución de las capacidades referentes a la Trigonometría, la Geometría Analítica y el Álgebra a lo largo del periodo comprendido entre el 1º y 2º cursos de la Educación Media. Se busca con esto el desarrollo procesual de los distintos temas presentados y su posterior asimilación y aplicación, para de esta manera alcanzar el desarrollo efectivo de las capacidades propuestas. El 3º año es dedicado de manera exclusiva al desarrollo de capacidades correspondientes al Cálculo Diferencial, apuntando siempre a un estudio reflexivo de los distintos temas abordados.

## **2.11. ¿Cómo define Pisa la competencia matemática?**

Actualmente existe una apuesta política exigente con respecto a los fines a alcanzar durante la etapa educativa y el desarrollo de conocimientos, capacidades y actitudes que resulten útiles a lo largo de la vida. Para dar forma a estas prioridades de aprendizaje se utiliza el concepto de competencia.

A efectos de PISA 2012, la competencia matemática se define como: La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. INEE, 2013, p. 12 (Estudios de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Estudio PISA.)

La definición de la competencia matemática para los propósitos de la evaluación PISA 2015 es la siguiente:

La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

## **2.12. La modelización matemática como estrategia didáctica**

Según Freudenthal (1971): “Como matemático-investigador, hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado.” Argumenta cuál es la relevancia de matematizar en el marco de un enfoque por competencias.

La competencia matemática implica formas de actuar y pensar matemáticamente en diversas situaciones que permitan al estudiante interpretar e intervenir en la realidad a partir de la intuición, el planteamiento de supuestos, inferencias, deducciones, argumentaciones y demostraciones, comunicarse y otras habilidades, así como el desarrollo de métodos y actitudes

útiles para ordenar, cuantificar y medir hechos y fenómenos de la realidad e intervenir conscientemente sobre ella.

Con base en la idea de Freudenthal (1977) de que las matemáticas –si han de tener valor humano– deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad, el uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática. Los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos.

Se debe tener en cuenta que no se forman futuros matemáticos sino a futuros ciudadanos usuarios de las matemáticas con sentido crítico.

La inversión del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es tratada por Freudenthal en 1983, bajo el nombre de “reinvención guiada”, una metodología que requiere de la búsqueda de contextos y situaciones problemáticas que den lugar de modo más o menos natural a la matematización. Para Freudenthal, la enseñanza de la matemática debe de llevarse a cabo mediante un proceso en el que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente.

Para él las matemáticas no eran el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas y buscar problemas y, en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó matematización (Freudenthal, 1968).

Según Freudenthal, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo (ibid., 1968, 1971, 1973), y la matematización es la meta central de la educación matemática: Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas. Se oponía a aislar las matemáticas de situaciones del mundo real y a enseñar una axiomática prefabricada.

En este trabajo se estructura la propuesta, apelando a las bondades que ofrece la modelación matemática como principal estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada.

Las investigaciones en modelación matemática y su relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, muestran que estos procesos son exitosos cuando los docentes utilizan la modelación matemática como estrategia y componente central para abordar el cálculo diferencial, no sólo en el aspecto cognitivo sino que abarca aspectos actitudinales y de percepción positiva, dado que los estudiantes disfrutan más cuando la enseñanza involucra actividades de búsqueda y validación de modelos matemáticos.

Los investigadores como John Fredy Morales García y Lina María Peña Páez en su trabajo, recopilaron el concepto de la modelización matemática, repasando algunos autores como: Bassanezi y Biembengut llaman “Modelación Matemática al método de enseñanza aprendizaje que utiliza procesos de modelización en cursos regulares.” (1997, p.14).

Para Camarena “la modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto” (2011,p.7); por su parte el investigador Villa reconoce la importancia de la modelación matemática y manifiesta que: “la modelación matemática, vista como proceso, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; esas acciones o fases se conocen en la literatura como ciclo de la modelación” (2009, p.5).

Concebir la modelación matemática como un proceso, en el que en cada etapa es posible evidenciar las dificultades y avances de los estudiantes, es una forma de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos.

Investigaciones muestran cómo la modelación matemática permite aproximar al estudiante a temas propios de los cursos de Ciencias Básicas, y el proponer tareas que involucren los pasos de la modelación permite al estudiante

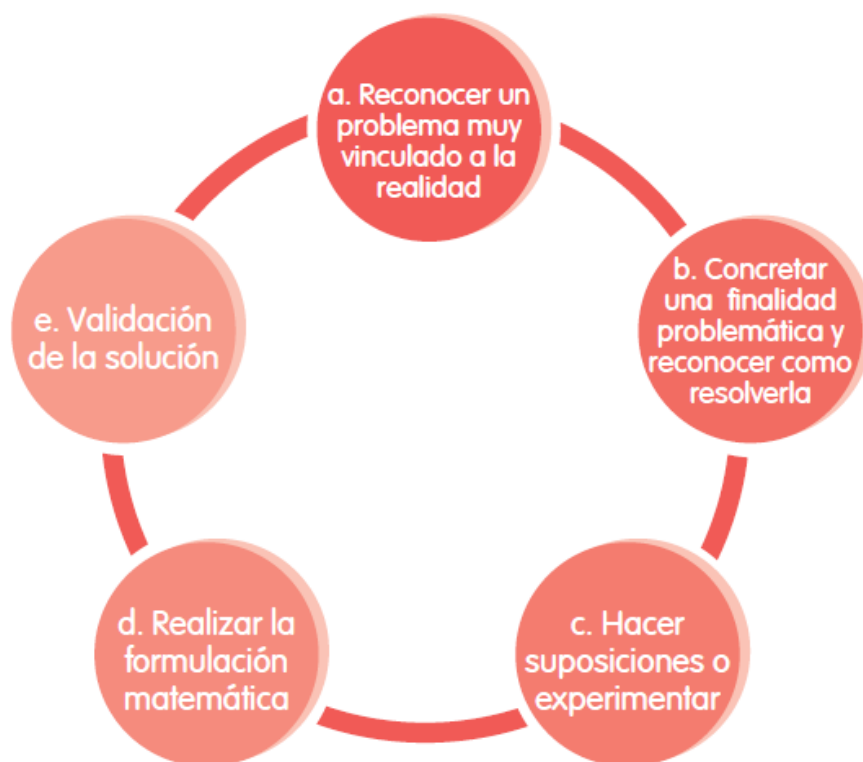
comprender la importancia tanto de la construcción de modelos concretos como de modelos físicos. Asimismo, la retroalimentación en clase de las tareas propuestas permite a los estudiantes verificar sus propias soluciones.

Cuando se plantean las actividades de cálculo diferencial, es bien sabido que el proceso de construcción de los conceptos abstractos les resulta difícil a los estudiantes, de allí que el uso de una didáctica basada en la modelación matemática y a través de sus diferentes etapas, les ofrece una posibilidad para confrontar las nuevas necesidades conceptuales.

La implementación de la modelación como proceso y recurso en el aula de matemáticas. Con respecto a este tema, la literatura reporta su importancia en el diseño de situaciones y actividades para la construcción de algunos conceptos matemáticos en el aula de clase (Bassanezi, 2002; Villa, 2007; Crouch & Haines, 2004; Biembengut & Hein, 2004; Borromeo, 2006; Burkhardt, 2006; Barbosa, 2006).

La modelación en las matemáticas escolares tiene sus fundamentos en la actividad científica del matemático que se encarga de aplicar y construir modelos para explicar fenómenos, resolver problemas de otras ciencias o para avanzar en una teoría o ciencia (generalmente llamado matemático aplicado); dichos modelos emergen en contextos que comúnmente no han sido abordados o se abordan desde una perspectiva diferente al interior de la ciencia. El educador en matemáticas promueve la elaboración e interpretación de modelos, con el ánimo de construir un concepto matemático dotado de un significado, y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a la relación que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contexto real de los estudiantes.

### 2.13. Etapas de la modelización matemática



(Gráfico tomado de la Guía Didáctica Módulo 4 Calculo diferencial y su didáctica USIL MEC 2017, p. 31)

### 2.14. Proceso de modelación como recurso en las aulas de Matemáticas

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma

significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles.

CRITERIOS	<p>MODELO MATEMATICO</p> <p>Como herramienta en el aula de clase</p>
PROPOSITO	<p>El estudiante es sometido a procesos de experimentación, indagación, búsqueda de datos, abstracción y simplificación, entre otros.</p>
PROCESO	<p>Como proceso, la modelación matemática es recursiva y cíclica. Se desarrolla a través de una serie de fases en donde el estudiante debe interpretar, abstraer, simplificar, construir el modelo, interpretar matemáticamente dicho modelo y luego, a la luz del problema inicial, debe darse una evaluación del modelo, y de acuerdo con esto puede darse una reformulación del modelo. La validación es interna y/o externa</p>
ARGUMENTO	<p>Al abordar problemas cotidianos y del entorno social y cultural de los estudiantes, permite una (re)significación de la realidad objetiva por parte del estudiante, de</p>

	<p>manera tal que le posibilite asumir una actitud crítica frente a las situaciones de la cotidianidad. Aporta elementos para responder a la pregunta clásica ¿para qué sirven las matemáticas?</p>
--	---

## 2.15. Orientaciones para el desarrollo de las capacidades

Según el documento de Actualización Curricular del Bachillerato Científico del MEC, (2014- pág. 128) refiere, dando continuidad a las capacidades desarrolladas en el Tercer Ciclo de la Educación Escolar Básica, las cuales buscan el logro de la competencia matemática a través de la resolución de problemas, esta propuesta para la educación media está basada también en la resolución de situaciones problemáticas añadiendo además la modelización matemática como medio para alcanzar el aprendizaje de una matemática útil, práctica y aplicable a situaciones concretas.

Se sugiere que, en lo posible, los problemas planteados sean extraídos de contextos reales, de situaciones que resulten atractivas a los estudiantes y de esta manera les resulte interesante la investigación y profundización de los distintos temas abordados. Se busca que las clases impartidas respondan a una matemática práctica, experimental, que puede ser desarrollada tanto dentro como fuera de la sala de clases e inclusive de la institución educativa. Además, si no es posible la simulación de situaciones o la visualización de estas de manera real, se requiere enfatizar en todo momento la utilización de los saberes matemáticos en las distintas áreas del nivel como la Física, la Economía o la Estadística y también a profesiones de la actualidad como son la Informática y la Ingeniería.

Otro punto muy importante es la necesidad de crear espacios y situaciones en la que los mismos estudiantes puedan formular problemas y compartirlos entre pares para que puedan ser resueltos con las herramientas aprendidas. Para ello deben ser establecidos criterios claros a ser tenidos en cuenta para la formulación, por ejemplo, que cuenten con todos los datos necesarios para ser resueltos y que el enunciado de cada situación sea claro, sin ambigüedades.

Con las diversas aplicaciones que ofrece actualmente el mundo tecnológico, las clases de Matemática no pueden estar ajenas a las mismas. Siempre que sea posible, se buscarán programas informáticos en los cuales los alumnos puedan ejercitarse en la aplicación de los algoritmos aprendidos y a la vez reforzar los contenidos estudiados de una manera menos tediosa que la que implica la utilización de papel y lápiz.

En cuanto a la evaluación, se deben utilizar distintos instrumentos y, de ser posible, deben ser los mismos utilizados a la hora de desarrollar las clases. De esta manera se logrará una armonía y coherencia entre la metodología y la evaluación y los resultados obtenidos serán más precisos y reales.

Se aconseja no limitar la evaluación de las capacidades a las pruebas escritas. Las presentaciones orales son muy útiles para medir el nivel de interpretación de los estudiantes de los distintos conceptos matemáticos y a su vez trabajar la expresión oral.

Partiendo de la premisa de la dificultad que tienen los estudiantes para asimilar los temas trabajados en Cálculo Diferencial, este trabajo se enfoca en presentar una de las estrategias metodológicas sugerida por el programa de estudio, que es la modelización matemática, como una herramienta didáctica, ya que las investigaciones arrojan que la modelación matemática y su relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, muestran que estos procesos son exitosos cuando los docentes la utilizan como estrategia y componente central para abordar por ejemplo el estudio de la derivada, no sólo en el aspecto cognitivo sino que abarca aspectos actitudinales y de percepción positiva, dado que el aprendizaje es más placentero cuando la enseñanza

involucra activamente a los educandos en diferentes actividades de búsqueda y validación de modelos matemáticos.

Además, una de las funciones principales de la Matemática es la de servir de lenguaje de la ciencia; ya que los problemas de la realidad se traducen al lenguaje matemático (se modelan matemáticamente), se resuelven matemáticamente y después esta solución se expresa en palabras del mundo real, por lo tanto amerita pensar en este punto que las matemáticas se construyen, se modelizan a partir de situaciones que emergen de la realidad y en muchas ocasiones ayudan a resolver los problemas que la propia vida nos plantea, inclusive llegando a mejorar nuestro confort.

## **2.16. Génesis – historia y evolución del cálculo**

Los orígenes del Cálculo se remontan al siglo III a. C., cuando los griegos intentaban resolver el problema del cálculo de áreas usando el método exhaustivo (inventado por Eudoxo), en el que se aproxima el área de la región que se desea conocer mediante áreas de regiones poligonales inscritas en ella cada vez más precisas. Con este método, Arquímedes (287-212 a. C.) determinó la fórmula exacta del área del círculo y de otras figuras. La sustitución de los números romanos por los caracteres arábigos, aparición de los signos + y -, el importante desarrollo de las notaciones matemáticas que empezó en el siglo XVI d. C., la notación decimal y los resultados sobre soluciones algebraicas de las ecuaciones cúbica y cuártica estimularon el desarrollo de la Matemática y, en particular, de los símbolos algebraicos que permitieron retomar el interés por el método exhaustivo, que se transformó en lo que hoy se conoce como cálculo integral. Sin embargo, el mayor impulso de esta rama de las Matemáticas se dio en el siglo XVII gracias a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), y continuó su desarrollo hasta que Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron una base matemática firme. Los aspectos fundamentales (o piedras angulares) que sustentan el Cálculo son el concepto de derivada y el concepto de integral. Ambos se apoyan en una herramienta fundamental que es el límite. Observemos que: El límite permite estudiar la tendencia de una función cuando

su variable se aproxima a un cierto valor. La derivada permite calcular tasas de variación y pendientes de las tangentes a las curvas, definiéndose pues como un límite. La integral se introduce como límite de una suma “especial” y permite calcular áreas, volúmenes, longitudes de curva, etc.

El Cálculo Diferencial e Integral es una herramienta matemática que surgió en el siglo XVII para resolver algunos problemas de geometría y de física. El problema de hallar una recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado y la necesidad de explicar racionalmente los fenómenos de la astronomía o la relación entre distancia, tiempo, velocidad y aceleración, estimularon la invención y el desarrollo de los métodos del Cálculo. Sobresalieron entre sus iniciadores John Wallis, profesor de la Universidad de Oxford e Isaac Barrow, profesor de Newton en la Universidad de Cambridge, Inglaterra. Pero un método general de diferenciación e integración fue descubierto solo hacia 1665 por el Inglés Isaac Newton y posteriormente por Gottfried Wilhelm Von Leibniz, nacido en Leipzig, Alemania, por lo que a ellos se les atribuye la invención del Cálculo. En la actualidad el Cálculo se aplica al estudio de problemas de diversas áreas de la actividad humana y de la naturaleza: la economía, la industria, la física, la química, la biología, para determinar los valores máximos y mínimos de funciones, optimizar la producción y las ganancias o minimizar costos de operación y riesgos.

### **2.17. Temas del Calculo Diferencial desarrollado en la Educación Media**

Según la Guía didáctica de Matemática del 3° curso, para el abordaje de los temas se sugiere comenzar con la factorización de polinomios y funciones con el propósito de retroalimentar estos temas desarrollados en años anteriores y cuyo conocimiento facilitará el estudio del «Cálculo diferencial», ya que son prerequisites para desarrollar Cálculo. Esta retroalimentación se podría hacer a través de un trabajo en grupo, utilizando las actividades de fijación dadas en el texto, con el propósito de alcanzar el aprendizaje, a través de la combinación de casos de factorización.

Se abordará, inicialmente, el concepto del límite como fundamento de las dos herramientas que nos proporciona el cálculo, la derivada y la integral, siendo la primera, conceptualizada a partir de la noción de razón de cambio de una magnitud.

La idea intuitiva de límite se trabaja a partir de las figuras geométricas, para ampliar el concepto, se toma como ejemplo funciones lineales y cuadráticas, se construye tablas y gráficos de estas se interpreta sus comportamientos para valores próximos a un punto dado del dominio.

Se propone problemas que acercan un poco más a la realidad relacionados con temas desarrollados en Física, Geometría y Economía como, por ejemplo:

- El cálculo de la velocidad de un móvil aplicando límites.
- El cálculo de la función volumen, en la que se mantiene constante la altura y el ancho aumenta tendiendo a  $n$ .
- El cálculo del límite de la función oferta para hallar la cantidad de productos que ofertar.
- El cálculo del límite de la función demanda para hallar la cantidad de productos demandados.

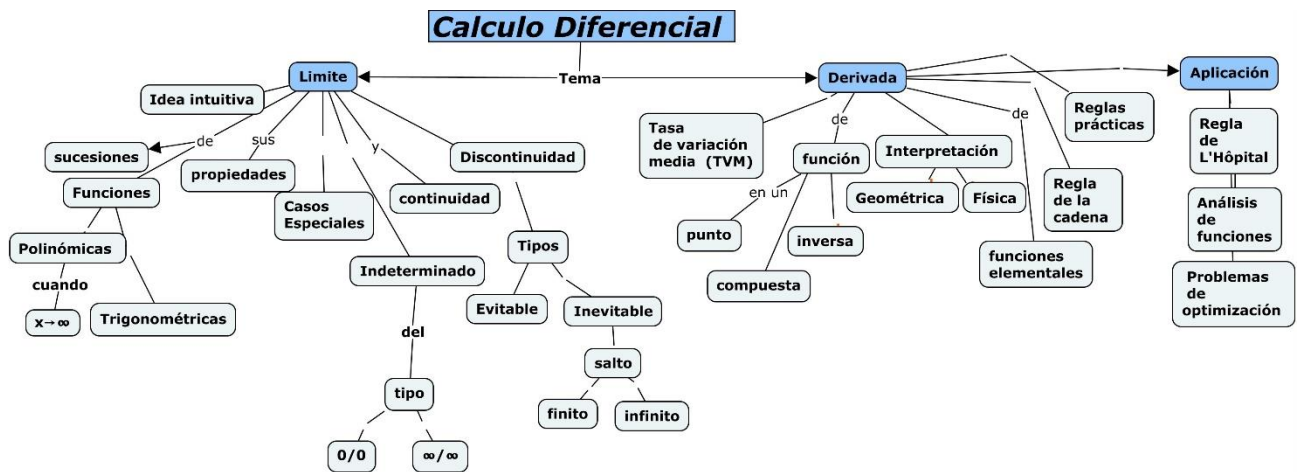
Se trabaja el tema límites indeterminados del tipo  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$  en funciones racionales, utilizando la factorización como un medio de salvar la indeterminación. Para calcular límites de funciones trigonométricas se utiliza el límite fundamental trigonométrico.

Para el estudio de funciones continuas y discontinuas se parte del estudio de gráficas que representan: la cotización del dólar en una semana, el costo de llamadas telefónicas, funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y trigonométricas; se analizan las mismas y se determinan las condiciones de continuidad o discontinuidad.

En el desarrollo de algunos problemas se proponen temas transversales sobre la defensa del consumidor y del usuario, medidas de primeros auxilios, las instituciones que ofrecen cursos de electricidad, plomería, mecánica, etc.

Además, plantea indagar sobre las Genialidades Matemáticas, con el propósito de incentivar el estudio de la materia, a través de la historia de la Matemática. Las mismas podrían ser ampliadas por los estudiantes visitando algunas páginas web.

La unidad temática Cálculo Diferencial, se puede dividir en 3 bloques que son: Límites, Derivada y Aplicaciones de la Derivada.



Esquema creado por la autora

## 2.18. Nociones básicas

A grandes rasgos para abordar este trabajo se encuentra tres conceptos fundamentales: función, límite y derivada, básicamente son los temas claves que se deben manejar cuidadosamente para la comprensión del Cálculo Diferencial.

La función se define como la relación entre dos variables de manera que, a cada valor de la variable independiente, le corresponde uno y solo un valor de la variable dependiente. Comúnmente se representan como  $y = f(x)$  y se clasifican en funciones algebraicas y funciones trascendentes.

Cuando los valores de  $x$  se aproximan cada vez más a un número  $a$ , por la derecha o por la izquierda, y en consecuencia los valores de  $f(x)$  se aproximan cada vez más a un número  $L$ , se dice que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a " $a$ " es igual a  $L$  y se escribe:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

La derivada de una función mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por ello se habla del valor de la derivada de una función en un punto dado.

La derivada es un concepto que tiene variadas aplicaciones. Se aplica en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología, o en Ciencias Sociales como la Economía y la Sociología. Por ejemplo, cuando se refiere a la gráfica de dos dimensiones, se considera la derivada como la pendiente de la recta tangente del gráfico en el punto. Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el límite cuando la distancia entre los dos puntos que determinan una recta secante tiende a cero, es decir, se transforma la recta secante en una recta tangente. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como monotonía de una función (si es creciente o decreciente) y la concavidad o convexidad.

## 2.19. Notación actual de la derivada

Hacia el siglo XII, Isaac Newton y Gottfried Leibniz desarrollaron, casi simultáneamente, una rama de la matemática llamada cálculo infinitesimal.

Dentro del Cálculo infinitesimal, la derivada es un concepto que asociada a la noción de límite y permite resolver varios problemas. Newton, anotaba la derivada de la función “y”, con un punto encima de “y”, lo cual dice muy poco sobre lo que es la derivada. Leibniz en cambio ideó la notación  $\frac{dy}{dx}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{incremento de la función } y}{\text{incremento de la función } x} = \frac{dy}{dx}$$

Esta diferencia de notación originó a comienzos del siglo XVIII una disputa entre los británicos y los demás europeos, pues los británicos se aferraron a la notación de Newton y los otros, a la de Leibniz.

Fue Leonardo Euler quien consagró la notación de Leibniz para la derivada y la integral, notación que se utiliza actualmente.

Finalmente se hace mención a la inclusión de las nuevas tecnologías en la enseñanza del Cálculo Diferencial, en este caso se utiliza como herramienta didáctica el software educativo GeoGebra.

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001, como parte de su tesis, en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad Atlántica de Florida (2006–2008), luego en la Universidad Estatal de Florida (2008–2009) y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria.

Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas.

Su categoría más cercana es software de geometría dinámica.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

## **Capítulo III**

### **3. Marco metodológico**

La idea de este proyecto se gestó a raíz de la dificultad de gestionar idóneamente las acciones formativas en la enseñanza del Cálculo Diferencial con estudiantes del Tercer Curso del Bachillerato Científico con énfasis en Ciencias Sociales de la Educación Media, se propone básicamente diseñar una propuesta metodológica que contribuya al mejoramiento de la enseñanza generando a su paso un aprendizaje significativo al mencionado grupo de alumnos.

El presente trabajo se enmarca en la investigación acción, ya que se configura para dar solución a la situación suscitada en la práctica educativa del docente, a partir de un análisis crítico – reflexivo de las experiencias en el aula al impartir la unidad temática, reconociendo las debilidades como oportunidad de transformar la praxis como plan de mejora de la realidad y generar un cambio en la actuación del docente y por ende en la de los estudiantes.

Lewin (1946) definió a la investigación-acción como “una forma de cuestionamiento autoreflexivo, llevada a cabo por los propios participantes en determinadas ocasiones con la finalidad de mejorar la racionalidad y la justicia

de situaciones, de la propia práctica social educativa, con el objetivo también de mejorar el conocimiento de dicha práctica y sobre las situaciones en las que la acción se lleva a cabo”.

La investigación – acción se llevó a cabo en dos fases, de las cuatro que se propone en el clásico triángulo de investigación – acción - formación de Kurt Lewin(1946):

Fase I: Descubrir una preocupación temática, que se aprecia en la enseñanza del Cálculo Diferencial, específicamente en el desarrollo de la derivada, que recae en la búsqueda de propuesta metodológica activa para responder a las necesidades, expectativas de los estudiantes y por supuesto dar respuesta asertiva a interrogantes que plantea la propia práctica.

El reconocimiento del problema exige según Kemmis, McTaggart (1992), proponer alternativas para la mejora de la práctica educativa mediante un cambio, y aprender a partir de las consecuencias de los cambios, dando lugar a que el docente participe activamente al trabajar por la mejora de su propia práctica siguiendo un esquema: un espiral de ciclos de planificación, acción (establecimiento de planes), observación (sistemática), reflexión... y luego la replanificación, nuevo paso a la acción, nuevas observaciones y reflexiones.

Fase II: Construcción del plan de acción que consiste en diseñar una propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo Diferencial, cabe destacar en este apartado, que el soporte teórico se delimitó a partir de las orientaciones recibidas en los diferentes seminarios y la revisión del estado de arte de otras investigaciones referentes a la situación planteada. En esta fase queda configurada el referente teórico que sustenta al trabajo.

Ahora bien, queda construir el diseño de la propuesta a partir del problema planteado, que tienda a construir aprendizajes significativos, que sea realista, que emerja del contexto de los aprendices, sea motivadora, que involucre a la mayoría de los alumnos, que permita al docente cumplir cabalmente su función de ser mediadora, facilitadora y guía de aquello que desea que sus estudiantes aprenda, seleccionando variadas actividades para concretar la aprehensión del

tema, inclusive propiciando la aplicación de las nuevas tecnologías, entonces cabe pensar que en este trabajo se desarrollará la modelación matemática.

Según se expresa en el Módulo IV Calculo diferencial y su didáctica de la guía del docente(2017), la modelación matemática puede entenderse como el proceso de búsqueda o construcción de un modelo matemático, en respuesta a una situación real, más específicamente, la manera de conectar el mundo real con las matemáticas.

Para llevar a cabo la modelación matemática, se requiere transitar por una serie de procesos se conocen como “círculo de modelación”, y son: construcción, estructura, matematización, trabajo matemático (resolución), interpretación, validación y exposición.

Fase III ejecución del plan de acción

Fase IV: proceso de reflexión permanente

Estas dos últimas fases no se incluyen en la investigación, sin embargo, queda pendiente su desarrollo e implementación en Paraguay, en cuanto a la reflexión en este trabajo se presentarán en torno a lo que fue posible pensar durante el diseño de la propuesta y lo investigativo, quedando pendiente después de su implementación un trabajo de este orden que dé cuenta de aquello que posibilita la aplicación de la propuesta, que se continuará en uno de los sitios de trabajo y se hará la sistematización de esta.

## Capítulo IV

### **4. Propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Cálculo Diferencial, a partir de la modelización**

Como el objetivo central del proyecto recae en la construcción del diseño de una propuesta que logre engranar la teoría y la práctica generando un cambio positivo en la percepción de los alumnos sobre la derivada de modo a superar los obstáculos que se presentan en el aprendizaje del tema mencionado, la intención es facilitar actividades que despierten el interés, motiven e inviten a la reflexión sobre la marcha de sus propios aprendizajes y que no se quede solo a nivel aula sino que trascienda más allá, dado la utilidad práctica de la derivada para dar solución a los problemas de la vida cotidiana, dando sentido al ¿por qué deben aprender la derivada?

La riqueza en el aula radica en las diferentes maneras de aprender que tienen los alumnos, cada uno posee su particularidad. Están los que asimilan rápidamente y otros tardan más en procesar la información. Más en el área de Matemática se constata esas diferencias individuales constituyéndose como base angular para diseñar y planificar cada clase o proyecto.

Cada contenido se debe iniciar explorando los conocimientos previos de los alumnos ya que en el área es indispensable partir de las experiencias de estos teniendo presente que cada tema nuevo guarda relación con alguno ya desarrollado previamente, convirtiéndose ésta en una estrategia o en una herramienta en particular.

Crear un buen clima de trabajo, que se basa en el dialogo dentro de un marco de respeto y tolerancia, es un aliciente para motivar a los alumnos, esa motivación que se genera activa la disposición para aprender constituyéndose en el motor principal para el aprendizaje significativo.

La interacción entre docente y alumno es constante ya sea en forma individual o grupal con intervenciones oportunas para subsanar cualquier error de concepto, de procedimiento o de cálculo.

Se busca plantear situaciones de aprendizaje que permiten desarrollar valores y actitudes, porque se trabaja con seres humanos, que piensa, siente, se emociona, comete errores y tiene sus aciertos por lo es imprescindibles establecer pautas, normas de convivencias, basados en los valores como el respeto, la tolerancia, la solidaridad, el trabajo cooperativo dentro de una convivencia sana y democrática en un ambiente saludable y ameno, todo esto es una condición indispensable para poder llevar adelante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Donde aprender es una tarea costosa que requiere

prestar atención, escuchar, reflexionar, pensar, incluso repensar, pero que puede volverse gratificante si se crean todas esas condiciones mencionadas y acá se recalca la función primordial del docente como guía, facilitador, mediador, orientador y gestor para que esa experiencia en el aula cumpla su cometido cabalmente y con la calidad deseada.

En el presente material se obvia las actividades para explorar los conocimientos previos y se enfoca solo a la presentación de los problemas.

Para garantizar y consolidar los conocimientos de la derivada se dividió en tres secciones de aprendizaje y dentro de cada sesión se incluye dos situaciones que se resuelven aplicando algún procedimiento previo para crear algunos elementos, posteriormente se recurre a la modelización matemática para dar respuesta a la situación planteada.

#### **4.1. Modelización matemática para estudiar la idea intuitiva de límite**

El cálculo proporciona dos herramientas básicas (la derivada y la integral de una función) que son útiles para resolver diversos problemas de otros campos del saber. Estas herramientas se fundamentan en el concepto de límite, el cual distingue al cálculo de otras áreas de las matemáticas como son el álgebra y la geometría, de manera informal se dice que el límite es el valor al que tiende una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado o al infinito.

Se entiende que el concepto riguroso del límite no es de fácil comprensión para el alumno que lo estudia por primera vez, por lo que es preciso una aproximación a dicho concepto de manera intuitiva.

Estas dos actividades que se presentan permiten tener una idea clara de lo que es el límite sin recurrir a un razonamiento formal matemático, lo captamos a través del entendimiento, por eso hablamos de idea intuitiva de límite.

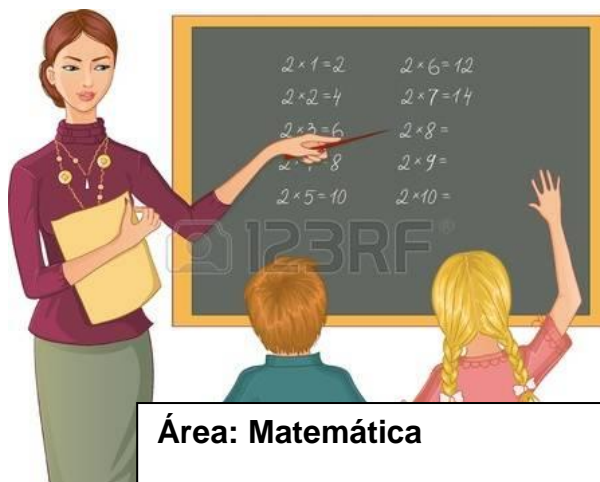
Al consolidar el estudio del límite, se transformará en experiencia previa para aprender la derivada, por eso se justifica plenamente el desarrollo de estas actividades dentro de la propuesta.

A la sesión de aprendizaje I, se denomina: “hacia el concepto de límite”, en donde se presentan dos problemas que parten de las construcciones geométricas, el primero exige construir varios polígonos regulares inscritos en una circunferencia, por lo que es pertinente recurrir al software GeoGebra para agilizar y dinamizar con el deslizador la tendencia de las áreas y los perímetros cuanto mayor sea el número de lados de los polígonos al comparar con el área y perímetro de la circunferencia respectivamente, al tener estas construcciones se pone al servicio de la modelación para comprender el límite, siguiendo los pasos sugeridos en la misma, mientras que en el segundo problema se construyen los cinco primeros polígonos regulares (cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono y octógono) con sus diagonales a lápiz, y papel con la ayuda del compás, transportador y regla, una vez terminada esta actividad, se procede a la modelización para obtener el número de diagonales en función del número de lados del polígono, con las diagonales se forman una sucesión, entonces para encontrar el modelo matemático que describa la situación equivale calcular el término general de la sucesión, en este caso se sugiere realizar por el método de las diferencias finitas, estudiado en Álgebra, finalmente se recurre a la tecnología para validar la solución obtenida.

Es digno mencionar que la Geometría y el Algebra se enlazan sirviendo de herramienta para el estudio del Cálculo Diferencial en general y en particular para construir el concepto del límite de manera intuitiva, el docente debe explicar a sus estudiantes sobre la importancia del estudio de las Matemáticas y motivarlos constantemente para que se esfuercen en utilizar todas sus potencialidades y enriquecer sus aprendizajes.



SESION DE  
N° 1



APRENDIZAJE

*Derivada*

Área: Matemática

Consolidando el aprendizaje de la derivada

Temas: *El Límite como base para aprender la derivada*

Curso: 3°

Responsable: Olga Francisca Jara Avalos

Título de la sesión I: HACIA EL CONCEPTO DE LÍMITE

TEMA: LIMITE. IDEA INTUITIVA

Con la siguiente situación se tratará de aproximar, de manera intuitiva al concepto de límite, considerando los polígonos regulares inscritos en un círculo de radio R y analizando el comportamiento de las áreas de dichos polígonos

cuando el radio  $R$  del círculo es fijo y el número de lados  $n$  de los polígonos van aumentando indefinidamente.

Trabajando con los polígonos inscritos en una circunferencia

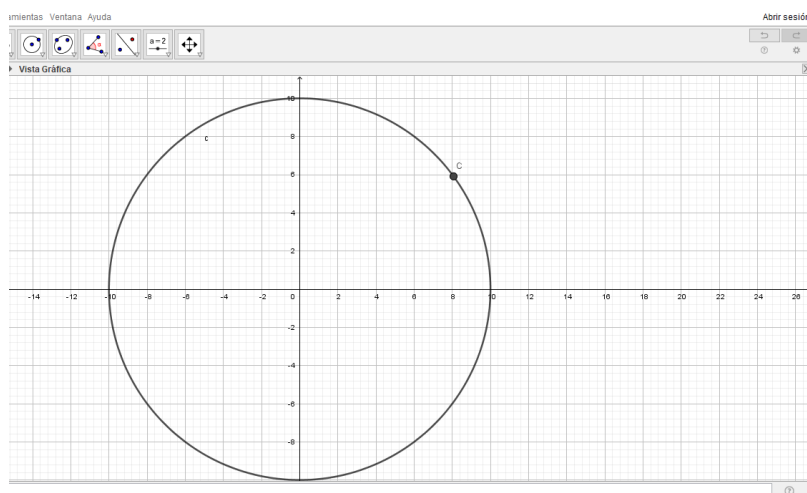
Enunciado de la situación problemática

Aurora maneja el GeoGebra y se pasa dibujando figuras geométricas, en una de esas dibujó varios polígonos regulares inscrito en una circunferencia y se quedó pensando: ¿Cuál es el comportamiento de las áreas y perímetros de los polígonos regulares cuando están inscritos en un círculo de radio fijo  $R$ ? ¿Qué nombre recibe este valor a las cuales tienden las áreas y perímetros obtenidos? ¿Qué restricción se debe tener en cuenta para resolver el caso? ¿Puedes ayudarle a Aurora para resolver su planteamiento?

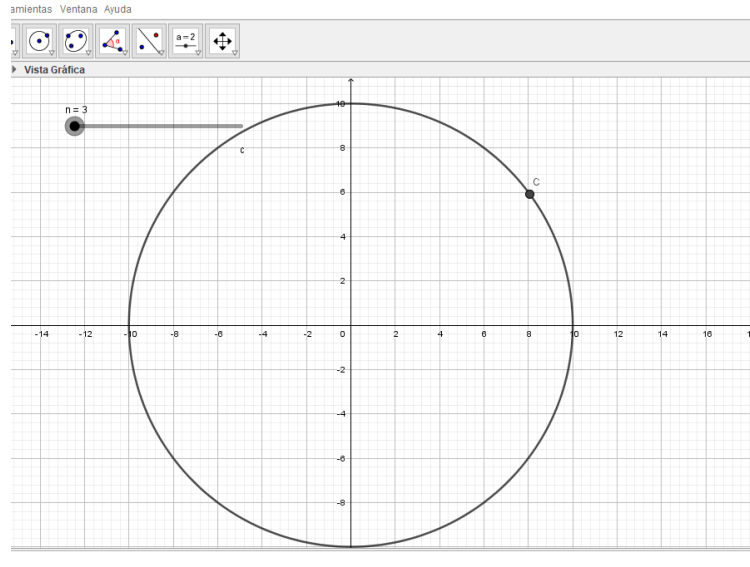
Procedimiento previo para aplicar las etapas de la modelización

Utilizando el software GeoGebra

Graficar un círculo de radio  $R = 10$  u y centro en el origen de las coordenadas

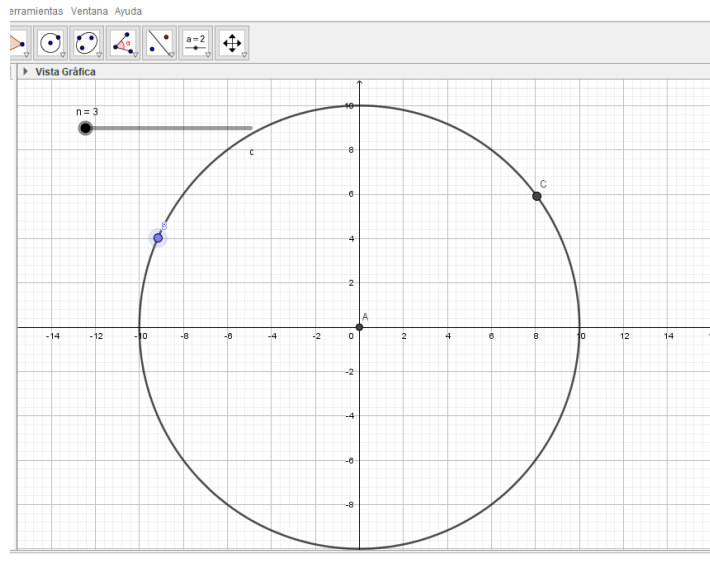


Seleccionar el deslizador que define el número de lados ( $n$ ) del polígono.

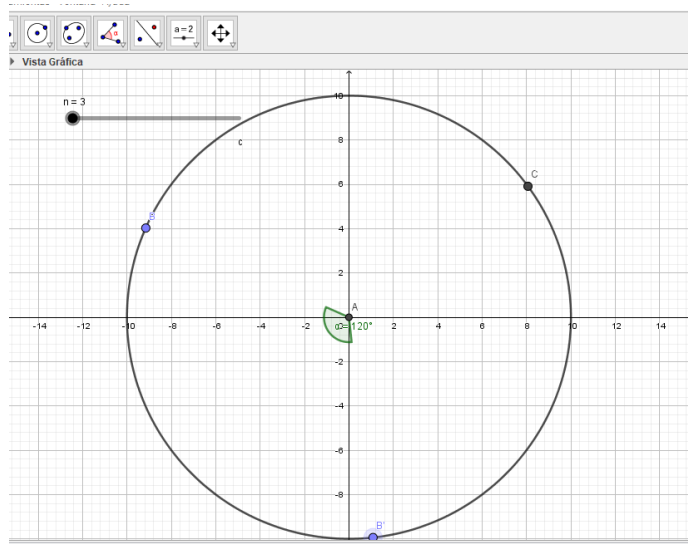


Pensar en la restricción del valor de  $n$

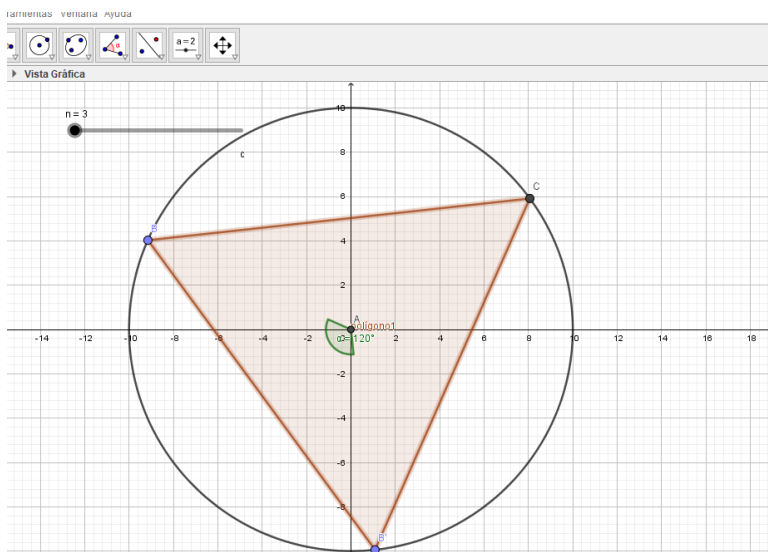
Marcar un punto cualquiera en el círculo



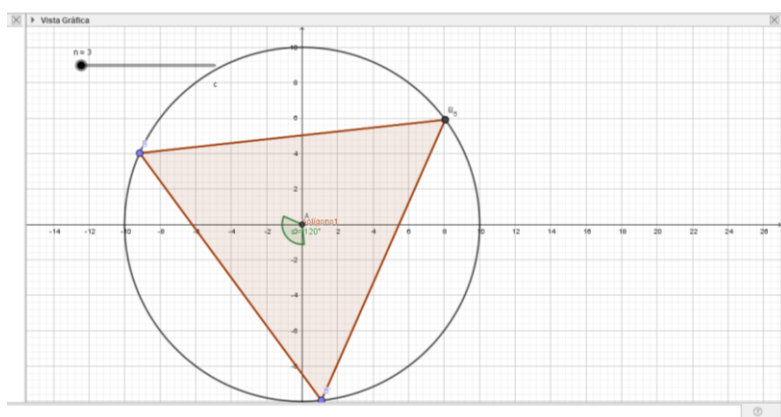
1. Construir un ángulo según su amplitud (amplitud =  $360^\circ/n$ )



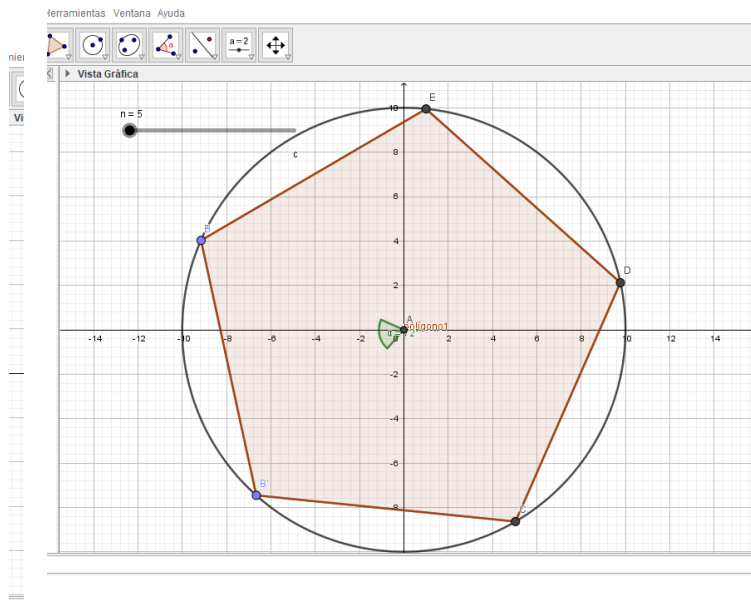
Graficar el polígono regular de n lados



Calcular el área y perímetro de los polígonos y el círculo



Utilizar el deslizador para ver el comportamiento del perímetro y área de los polígonos formados y completa las tablas que se presentan a continuación:



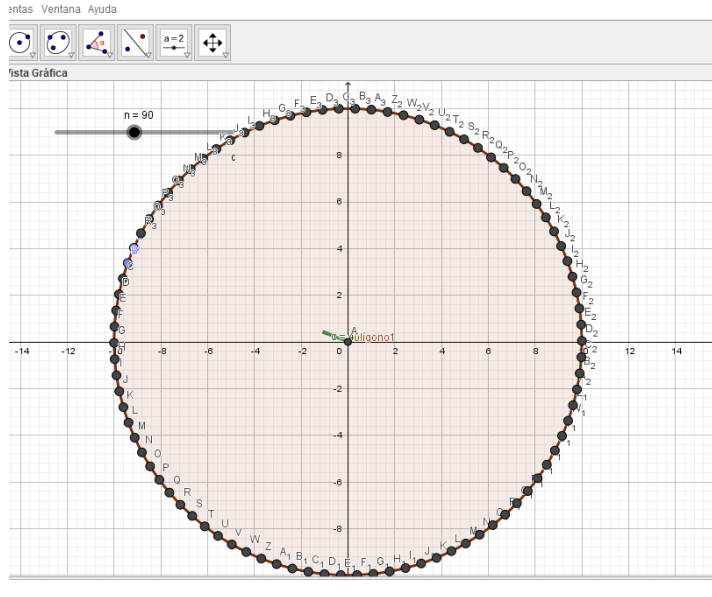


Tabla 1: Registro de perímetro de los polígonos inscritos

$n$	3	4	5	6	10	12	15	100	120	240
$P(n)$										

El perímetro de la circunferencia es:  $C_{ia} =$

Tabla 2: Registro de área de los polígonos inscritos

$n$	3	4	5	6	10	12	15	100	120	240
$A(n)$										

El área del círculo es:  $C_o =$

Luego de cumplir con las actividades propuestas, se aplican las cuatro etapas de la modelación para dar solución al planteamiento dado.

- Reconoce un problema muy vinculado a la realidad

¿Qué conocimientos matemáticos te ayudarán a solucionar esta situación?

¿Qué datos se conocen? ¿En nuestra realidad existe una aplicación del comportamiento de estas áreas?

- Concretar una finalidad problemática y reconocer como resolverla

¿De qué trata la situación?

¿Qué pide hallar?

¿Con qué datos cuentas?

¿Qué debes averiguar?

¿Qué conocimiento te ayudará a resolver la situación?

Diseña un plan para resolver la situación planteada

- Hacer suposiciones o experimentar

Plantea formas para determinar hacia qué valor se aproximan las áreas cuando el número de lados del polígono inscrito crece indefinidamente. Comenta tu planteamiento con el grupo.

¿Qué observaste?

¿Cómo calcularías estas áreas y perímetros, si no tuvieras la aplicación GeoGebra?

¿Este cálculo también es posible cuando el polígono es irregular? Argumente

¿Hacia qué valor se aproximará el valor del área cuando el número de lado del polígono tiende al infinito?

¿Por qué el valor de las áreas no traspasa este valor?

¿Existe relación entre el número de lados y el perímetro de las figuras inscritas?

¿A qué valor se están acercando los perímetros obtenidos conforme aumentan el número de lados?

¿Qué relación encuentras entre el perímetro del círculo y los perímetros de las figuras inscritas?

¿Qué pasará si  $n=2$ ? ¿desde qué valor para  $n$  es posible resolver esta situación problemática? ¿hay que realizar algunas restricciones?

- Realiza la formulación matemática

Trabajando con los poli- diagonales

Enunciado de la situación

A Luis le gusta dibujar polígonos regulares, usando la técnica de los polígonos inscritos en una circunferencia. Luego de dibujar algunos polígonos, traza sus diagonales y observa algo llamativo, el número de diagonales de los polígonos regulares sigue una secuencia. ¿Cómo podrá expresar Luis el término general de la función diagonales de un polígono regular? Calcula el límite del término general.

Procedimiento previo para aplicar las etapas de la modelización

1. Dibujar en el cuaderno los polígonos regulares: cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono y octógono, usando compás, regla y transportador
2. Trazar las diagonales de cada polígono.
3. Preparar una tabla para consignar en ella: el número de lados y el número de diagonales.

N° de orden	1	2	3	4	5
N° de lados ( $n$ )	4	5	6	7	8
N° de diagonales ( $D$ )					

Tabla 1: Registro del orden, número de lados y el número de diagonales de los polígonos

Aplicación de las 5 cinco etapas de la modelización matemática:

**Reconocer un problema muy vinculado a la realidad**

¿Qué debes averiguar? ¿Qué harás primero? ¿Qué conocimientos matemáticos te ayudarán a solucionar esta situación?

### **Concretar una finalidad problemática y reconocer como resolverla**

¿De qué trata la situación?

¿Qué pide hallar?

¿Con qué datos cuentas?

¿Qué necesitas para resolver la situación?

¿Que se forma al escribir ordenadamente el número de diagonales?

### **Diseña un plan para resolver la situación planteada**

Hacer suposiciones o experimentar

¿Qué observaste?

¿Qué relación encuentras entre el número de lados del polígono y el número de diagonales?

### **Realizar la formulación matemática**

Escribe la función diagonal

Calcula el valor de los límites para  $n = 10, 12, 13, 14$

### **Establecer conclusiones**

#### **Validar la solución**

Para validar la solución recurrimos al software GeoGebra

## **4.2. Modelización matemática para construir el concepto de la derivada**

En la sesión de aprendizaje II se trabajan dos situaciones que se analizan en este apartado, partiendo de que todo fenómeno en la naturaleza y en la sociedad está sujeto a cambios. Como ejemplos se puede nombrar: la población de un país varía con los años, las temperaturas también varían en el transcurso del tiempo, la velocidad con que se mueve un objeto, etc.

El estudio de estas variaciones llevará a construir uno de los conceptos fundamentales del Cálculo: la derivada.

Esta sesión de aprendizaje se denomina: “Construyendo el concepto de la derivada”, teniendo como tema generador la tasa de variación media y con ello se pretende que los alumnos aprendan el concepto de la derivada, entendiendo la derivada como tasa de variación o razón de cambio, a través de un ejemplo de la variación de la velocidad, o razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo.

En primer lugar, se busca el modelo matemático que responda a la situación planteada, luego se calcula la razón de cambio en varios intervalos de tiempo, se analiza su comportamiento y se concluye con la definición de la T.V.M. Luego se aplica la T.V.M. en funciones cúbicas, lineales y cuadráticas, se grafican las mismas y se estudia el comportamiento de cada una de ellas.

## SESION DE APRENDIZAJE N° 2

Título de la sesión II: Construyendo el concepto de la derivada
---

TEMA: Tasa de variación media
-------------------------------

### **Trabajando con ciencias**

#### **Enunciado de la situación problemática**

En la tabla de abajo se registra el resultado obtenido en un laboratorio de ciencias sobre el crecimiento de una plántula de poroto (los valores consignados son aproximados):

t(horas)	0	1	2	3	4	5
S(t) en cm	2	3	4	5	6	7

Con la información dada en la tabla:

- Determina el modelo matemático que relaciona el crecimiento con el tiempo transcurrido y la relación existente entre las dos variables. Luego construye el gráfico.
- ¿Hay algún intervalo de tiempo en el cual el crecimiento sea más rápido?
- Calculo la velocidad media de crecimiento en los intervalos  $[1, 2]$  y  $[4, 5]$ .
- ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del crecimiento, en cualquier instante?
- ¿Qué relación existe entre la variación instantánea de crecimiento en cualquier instante  $t$  y la velocidad media en cualquier intervalo?

### **Aplicación de los cinco pasos de la modelización matemática:**

#### **Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad**

¿Qué debes averiguar? ¿Qué harás primero? ¿Qué conocimientos matemáticos te ayudarán a solucionar esta situación?

#### **Concretar una finalidad problemática y reconocer como resolverla**

¿De qué trata la situación?

¿Qué pide hallar?

¿Con qué datos cuentas?

¿Qué necesitas para resolver la situación?

#### **Diseña un plan para resolver la situación planteada**

#### **Hacer suposiciones o experimentar**

¿Qué observaste?

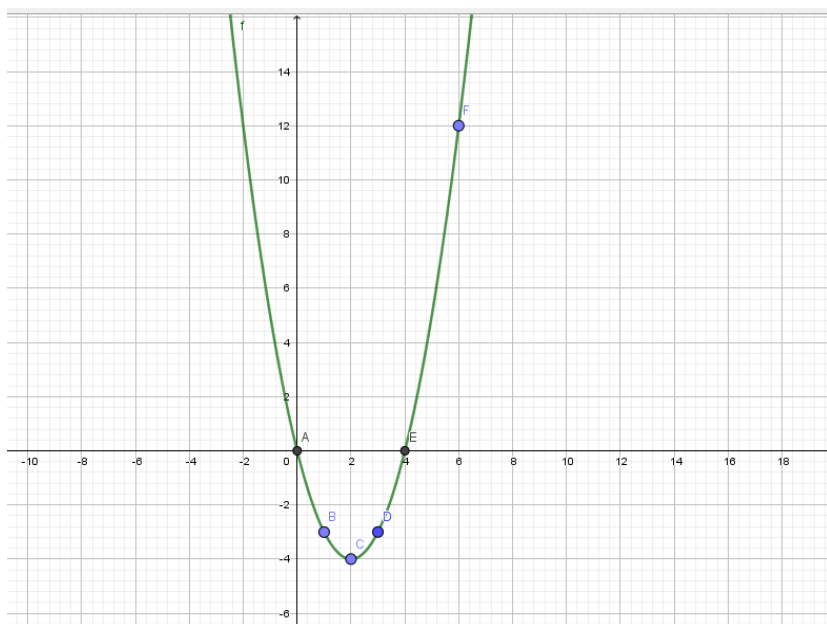
#### **Realizar la formulación matemática**

## Validación de la solución

Para validar la solución recurrimos al software GeoGebra

## Trabajando con Física en Matemática

Un móvil se desplaza sobre una recta horizontal y la función que describe su posición en cada instante  $t$  está dada por  $S(t)$  ( $t$  en segundos y  $S(t)$  en metros), como se indica en la figura:



Te animas a buscar el modelo matemático que representa la posición del móvil en función del tiempo.

Se pedirá a los alumnos que escriban las etapas de la modelización matemática y que los mismos planteen las preguntas en cada etapa y luego lo vayan resolviendo de manera secuenciada.

### 4.3. Modelización matemática para aplicar el concepto de la derivada

En la sesión de aprendizaje III: “Aplicando el concepto de la derivada en situaciones problemáticas”, se parte de un problema clásico de optimización, la caja sin tapa, en donde se desea maximizar el volumen de la misma.

Una de las expectativas de logro de la Educación Media es que el estudiante aplique el concepto de derivada de funciones en la resolución de problemas en otras disciplinas como Física, Geometría y Economía. Respondiendo a esta expectativa, la sesión se presenta bajo el título de “Problemas de optimización”,

dos propuestas que involucran expresiones algebraicas, en el cálculo de volumen y perímetro de cuerpos geométricos

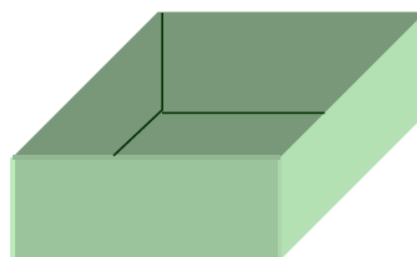
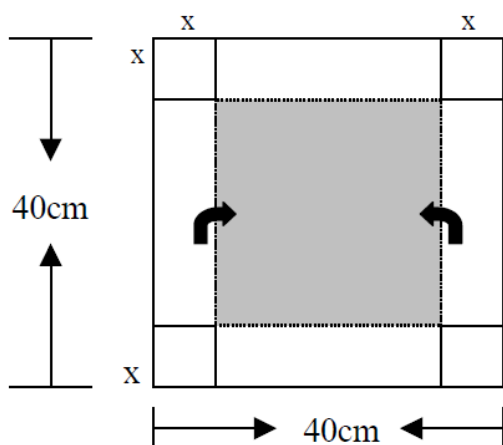
### SESION DE APRENDIZAJE N° 3

Título de la sesión III: Construyendo el concepto de la derivada

TEMA: Problemas de optimización

#### Modelando con las cajitas

Ana, la creativa desea construir cajas de cartón sin tapa a partir de cuadrados de 40 cm de lado, a los cuales se les recortan las esquinas como indica la figura, y doblando a lo largo de las líneas punteadas.



¿Es necesario que Ana recorte las esquinas en forma de cuadrados?

b) Determina la longitud  $x$  de los recortes para que el volumen de la caja sea máximo e indique cuál es este.

#### Procedimiento previo para aplicar las etapas de la modelización

En grupo – aula, los alumnos se organizan y consiguen 20 hojas en forma cuadrangular de lado 40 cm. (las hojas pueden ser de materiales reciclados como diarios, revistas, trozos de cartulinas, etc.)

Se forman grupos de dos integrantes para armar las diferentes cajitas, teniendo presente el recorte de las esquinas que varía de 1 cm hasta 20 cm.

Una vez terminada la construcción de las cajitas, se procede a medir el volumen de cada una de ellas, que se registra en una tabla preparada para el efecto.

Al finalizar la actividad los alumnos analizan los resultados y extraen sus conclusiones.

Para sistematizar los hallazgos se procede a la modelización matemática, siguiendo las directivas dadas en cada etapa

### **Reconocer un problema muy vinculado a la realidad**

¿Qué debes averiguar? ¿Qué harás primero? ¿Qué conocimientos matemáticos te ayudarán a solucionar esta situación?

### **Concretar una finalidad problemática y reconocer como resolverla**

¿De qué trata la situación?

¿Qué pide hallar?

¿Cuáles son las dimensiones de las cajitas?

¿Qué necesitas para resolver la situación?

¿Qué relación hay entre las dimensiones de las cajitas construidas? ¿Cuál es la longitud de los recortes que optimiza el volumen de la cajita?

### **Diseña un plan para resolver la situación planteada**

#### **Hacer suposiciones o experimentar**

Plantea formas para determinar el valor de  $x$ , de modo que se maximice el volumen de la cajita.

¿Qué observaste en la actividad previa a la modelización?

¿Cómo calcularías el volumen de la cajita?

#### **Realiza la formulación matemática**

#### **Valida la solución**

Compara el resultado obtenido en la actividad inicial y la modelación.

## Modelizando el jardín



José tiene un jardín de forma rectangular de  $200 \text{ m}^2$  de área. Para el cuidado de las plantas allí sembradas, va a cercar todo el perímetro con alambre. Si uno de los lados colinda con una pared; ¿Cuáles serán las dimensiones de cada lado del jardín que permita utilizar la menor cantidad de metros lineales de cerca? ¿Si el precio de cada metro lineal de cerca cuesta  $10\,000 \text{ ₡}$ , a cuánto ascenderá su inversión?

Se pedirá a los alumnos que escriban las etapas de la modelización matemática y que los mismos planteen las preguntas en cada etapa y luego lo vayan resolviendo de manera secuenciada.

Propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la derivada en la unidad temática Calculo Diferencial				
Tema: Construyendo el concepto de derivada				
Objetivo General: Generar una actitud positiva de los alumnos hacia el aprendizaje significativo de la derivada y su aplicación en la vida cotidiana basada en la enseñanza de la modelización matemática				
SESION DE APRENDIZAJE 01				
Título de la sesión I: HACIA EL CONCEPTO DE LÍMITE				
TEMA: LIMITE. IDEA INTUITIVA				
MODELO	ACTIVIDADES	RECURSOS PROPUESTOS		ALCANCE DIDÁCTICO
		MATERIALES	HUMANOS	
1. Trabajando con los polígonos inscritos en una circunferencia	1. Incluye los procedimientos previos a la modelización: Construcción del polígono inscrito en la circunferencia, aplicando el recurso GeoGebra. 2. Modelización matemática aplicando los pasos de esta con preguntas orientadoras para guiar cada paso.	Computadora Celular Software GeoGebra Cuaderno de apunte	Formación de equipo de acuerdo a la cantidad de alumnos. Profesora como facilitadora, orientadora y moderadora	Razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Aprendizaje significativo: ya que se espera que el alumno relacione de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas. Contrayendo su propio aprendizaje y lo realiza en interacción con otro, realizando un trabajo cooperativo y colaborativo.

<p>2. Trabajando con las poli-diagonales</p>	<p>Incluye los procedimientos previos a la modelización:  Dibujar en el cuaderno los polígonos regulares: cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono y octógono, usando compás, regla y transportador  Trazar las diagonales de cada polígono.  Preparar una tabla para consignar en ella: el número de lados y el número de diagonales.  Modelización matemática aplicando los pasos de esta con preguntas orientadoras para guiar cada paso.  En esta parte se calcula el término general de la sucesión por el método de las diferencias finitas</p>			<p>El aprendizaje de las matemáticas permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos de forma significativa.  Con esta actividad se busca consolidar el aprendizaje de los alumnos.</p>
--	---	--	--	---

SESION DE APRENDIZAJE 02

Título de la sesión II: Construyendo el concepto de la derivada

TEMA: Tasa de variación media

MODELO	ACTIVIDADES	RECURSOS PROPUESTOS		ALCANCE DIDÁCTICO
		MATERIALES	HUMANOS	
<b>Trabajando con ciencias</b>	Modelización matemática aplicando los pasos de la misma con preguntas orientadoras.	Computadora Celular Software GeoGebra Cuaderno de apunte	Formación de equipo de acuerdo a la cantidad de alumnos. Profesora como facilitadora, orientadora y moderadora	Razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Aprendizaje significativo ya que se espera que el alumno relacione de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas. Construyendo su propio aprendizaje y lo realiza en interacción con otro, dando lugar al trabajo cooperativo y colaborativo.
Trabajando con Física	Modelización matemática aplicando los pasos de la misma con preguntas orientadoras.	Computadora Celular Software GeoGebra Cuaderno de apunte	Alumnos realizan el trabajo en carácter individual. Profesora como facilitadora, orientadora y moderadora	Razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se espera un aprendizaje significativo y que el alumno reflexione en forma individual sobre la marcha de su aprendizaje.

SESION DE APRENDIZAJE 03

Título de la sesión II: Aplicando el concepto de la derivada en situaciones problemáticas”

TEMA: Problemas de optimización

MODELO	ACTIVIDADES	RECURSOS PROPUESTOS		ALCANCE DIDÁCTICO
		MATERIALES	HUMANOS	
Modelando con las cajitas	Modelización matemática aplicando los pasos de la misma con preguntas orientadoras.	Cuaderno de apunte Calculadora	Formación de equipo de acuerdo a la cantidad de alumnos.  Profesora como facilitadora, orientadora y moderadora	Razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.  Aprendizaje significativo ya que se espera que el alumno relacione de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas. Construyendo su propio aprendizaje y lo realiza en interacción con otro, dando lugar al trabajo cooperativo y colaborativo.
Modelando el jardín	Modelización matemática aplicando los pasos de la misma con preguntas orientadoras.	Cuaderno de apunte Calculadora	Alumnos realizan el trabajo en carácter individual.  Profesora como facilitadora, orientadora y moderadora	Razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se espera un aprendizaje significativo y que el alumno reflexione en forma individual sobre la marcha de su aprendizaje.

## Capítulo V

### 5.1. Conclusión

Este proyecto se ha trazado estructurar una propuesta de estrategia didáctica para la enseñanza de la derivada de la unidad temática Cálculo Diferencial en el área de Matemática basada en la modelización para generar aprendizajes significativos de los educandos del Tercer Curso de la Educación Media en Yhú, Paraguay, identificando previamente las dificultades que se presentan para la enseñanza de la derivada y a partir de la reflexión y la revisión exhaustiva del estado de arte, se ha configurado un referente teórico que fundamenta el diseño de una propuesta mencionada.

Se ha profundizado en las bondades que ofrece la modelización matemática para aplicar como estrategia didáctica para desarrollar tres ejes centrales como el estudio del límite, del concepto de la derivada y la aplicación de la derivada en situaciones problemáticas, así también se ha implementado las nuevas tecnologías en el diseño, proponiendo la utilización del software matemático GeoGebra para dinamizar el entorno educativo.

Este proyecto ha generado un gran impacto en la autora ya que ha posibilitado una profunda reflexión de la práctica pedagógica para detectar las debilidades, transformando en oportunidades de mejora, además vinculando con la preparación recibida en el transcurso de la especialización y las experiencias acumuladas para desarrollar la propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en la unidad temática Cálculo Diferencial, a partir de la modelización.

Cabe destacar que se ha estructurado la propuesta de estrategia didáctica, sin embargo, queda pendiente la puesta en escena y la sistematización en una de las instituciones de la zona, reportando los resultados obtenidos.

Se entiende que la investigación y la docencia no es tarea fácil, sobre todo si se considera la diversidad de los paradigmas teóricos usados en la investigación y los sistemas educativos. Se ha hecho un gran intento para que esta investigación sea útil y contribuya de algún modo al mejoramiento de la

práctica docente y por ende redunde en el mejoramiento de la calidad educativa, aportando elementos interesantes.

La intención es dejar abierta las posibilidades de profundizar este trabajo recibiendo aportes de otros colegas.

Es el propósito que al finalizar esta investigación ponga a disposición tanto de los colegas del área como de los alumnos todas las novedades adquiridas en este lapso de preparación, contribuyendo al mejoramiento de la tarea pedagógica.

## **5.2. Recomendación**

- Para el diseño y desarrollo de propuestas de aprendizaje es conveniente que primero se decidan las competencias matemáticas que se pretende desarrollar en los estudiantes.
- Tomar en consideración el uso del Aprendizaje Cooperativo como técnicas de trabajo de los estudiantes dentro del aula.
- Es conveniente que los profesores tengan en consideración los diferentes Estilos de Aprendizaje y Estilos Cognitivos que sus estudiantes manejan y prefieren (Cantoral, 1993).
- Atender, en todo lo que sea posible a los aspectos funcionales de los conceptos. Se podría interpretar también como el surgimiento del concepto o del tema a partir de necesidades, o como herramientas para resolver situaciones problemáticas.
- Tratar de emplear situaciones concretas y cotidianas a los estudiantes, cuanto sea posible. Los conceptos básicos deben procurarse de esta manera.
- Es muy importante considerar cual será la actividad de los estudiantes a lo largo de las actividades de las propuestas. Es conveniente definir si la actividad del estudiante será activa o pasiva.

Además, considerando las reflexiones didácticas sobre el concepto de la derivada según Azcárate et al. (1990), para que la enseñanza y aprendizaje del

concepto de derivada tenga éxito el docente debe tener en cuenta cuatro factores claves que son:

- ✓ Partir de las concepciones previas que los alumnos tengan del concepto de velocidad.
- ✓ Usar gráficos de funciones que permitan visualizar claramente las ideas especialmente cuando se habla de pendiente de una recta y tasas medias de variación.
- ✓ Usar problemas concretos en los cuales el estudiante relacione lo que aprende con situaciones de la vida diaria.
- ✓ Tener claro las dificultades que se presentan cuando se realiza el proceso de paso al límite en una función y entender que el límite no es solo un proceso de sustitución de una variable por un valor y realizar unas operaciones, ya que este concepto va más allá de esto.

## 6. Bibliografía

Abarca, N (2007). La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora. Publicado en la Revista Tecnociencia Universitaria Bolivia. Recuperado en: [www.revistasbolivianas.org.bo/pdf/rtc/v5n5/v5n5a05.pdf](http://www.revistasbolivianas.org.bo/pdf/rtc/v5n5/v5n5a05.pdf).

Aguayo, D. (2010). Experimentando el Cálculo Diferencial [Tesis maestría] recuperado en: <http://mwm.cimav.edu.mx/wp-content/uploads/2015/04/TESIS-Daniel-Aguayo-Sosa.pdf>.

Morales, J. (2012). Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática. Presentada en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Uruguay, 2013) Recuperado en: <http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/942.pdf>.

MEC – Paraguay (2002). Diseño curricular 01 – Reforma Joven

MEC – Paraguay (2014). Actualización curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media.

MEC – Paraguay (2016). Guía didáctica para docente. Matemática 3° curso – Educación Media.

MEC – Paraguay (2016) Matemática 3° curso – Texto para el estudiante Educación Media

MEC – Paraguay (2017) Módulo IV Cálculo diferencial. Guía del docente

Salmerón, A. (2012). Estrategias didácticas para el análisis y estudio de funciones algebraicas a través de la derivada de una función. [Trabajo de grado] recuperado en: [http://digeset.uco.mx/tesis\\_posgrado/Pdf/Alejandro\\_Salmeron\\_Jimenez.pdf](http://digeset.uco.mx/tesis_posgrado/Pdf/Alejandro_Salmeron_Jimenez.pdf).

Zaldívar, J. (2006). Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo. [Trabajo de grado] recuperado en: [https://intranet.matematicas.uady.mx/portal/dme/docs/tesis/Tesis\\_DavidZaldivar.pdf](https://intranet.matematicas.uady.mx/portal/dme/docs/tesis/Tesis_DavidZaldivar.pdf)

