

CARACTERÍSTICAS Y CONCEPCIONES ACERCA DE LA NOCIÓN DE
DISTRIBUCIÓN EN EL RAZONAMIENTO SOBRE LA COMPARACION DE
CONJUNTOS DE DATOS

VIVIAN YULIETH MARULANDA AROCA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2019

CARACTERÍSTICAS Y CONCEPCIONES ACERCA DE LA NOCIÓN DE
DISTRIBUCIÓN EN EL RAZONAMIENTO SOBRE LA COMPARACION DE
CONJUNTOS DE DATOS

VIVIAN YULIETH MARULANDA AROCA
Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Docencia de la Matemática

Asesora
MARITZA MÉNDEZ REINA
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2019

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales se ha requerido el trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

(Parágrafo 2 del Artículo 42 del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad Pedagógica Nacional)

DEDICATORIA

A mis padres por su amor ilimitado, esfuerzo, ejemplo y porque siempre me han mostrado lo orgullos que están de mis logros. A mi esposo por su apoyo incondicional y desinteresado, por confiar en mis capacidades y por sus palabras de aliento durante este proceso.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme alcanzar esta meta en mi vida.

A mis padres y esposo por su apoyo incondicional, por su sacrificio, paciencia y compañía.

A mi asesora Maritza Méndez Reina por su vocación, paciencia, sapiencia, orientaciones y exigencias para poder culminar este trabajo y por su entrega constante por mi formación.

A los docentes de la Maestría en Docencia de la Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional por incentivar la reflexión alrededor de mis actuaciones en el aula de matemáticas.

A mis compañeros de la Maestría cohorte 2018-1 que me brindaron espacios de alegría y reflexión.

A los profesores Leonor Camargo y Felipe Fernández por sus comentarios y correcciones que enriquecieron mi trabajo.

A los estudiantes que participaron en la implementación de la entrevista basada en tareas.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**ACTA DE VALORACIÓN
DE TRABAJO DE GRADO**

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Características y concepciones acerca de la noción de distribución en el razonamiento sobre la comparación de conjuntos de datos***, presentado por la estudiante:

Vivian Yulieth Marulanda Aroca, Cód. 2018185014, CC. 1110480580

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con cuarenta y cinco (45) puntos.

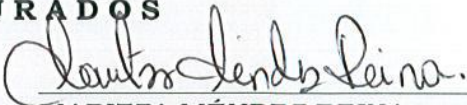
Observaciones:

En constancia se firma a los 24 días del mes de febrero de 2020.

JURADOS

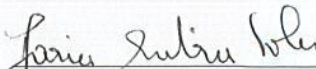
Director del Trabajo:

Profesora:

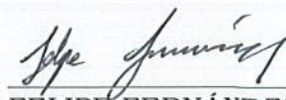

MARITZA MÉNDEZ REINA (UPN)

Jurados:

Profesora:


MARÍA NUBIA SOLER (UPN)

Profesor:


FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ (UPN)

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Calidad de la educación</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de Maestría en profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Características y concepciones acerca de la noción de Distribución en el razonamiento sobre la comparación de conjuntos de datos
Autor(es)	Marulanda Aroca, Vivian Yulieth
Director	Méndez Reina, Maritza
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 119 p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DISTRIBUCIÓN; RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO; TECNOLOGÍA DIGITAL; CONCEPCIONES DE DISTRIBUCIÓN; CARACTERÍSTICAS DE DISTRIBUCIÓN; COMPARACIÓN DE CONJUNTOS DE DATOS.

2. Descripción

El siguiente trabajo de grado se presenta para optar al título de Magíster en Docencia de las Matemáticas, de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. En este trabajo se presenta el análisis de una entrevista basada en dos tareas mediadas por tecnología digital. En particular, se expone la evolución y el análisis de los razonamientos que dos estudiantes de grado séptimo cuando comparan conjuntos de datos. El análisis de las tareas está enmarcado en los elementos teóricos centrados en las características y concepciones de la noción de distribución y se realizó a partir de la estrategia investigativa entrevista basada en tareas. Los resultados sugieren que los estudiantes consideran aspectos de la noción de distribución de manera informal cuando hacen comparaciones de conjuntos de datos.

3. Fuentes

- Andrade, L., Fernández, F. y Méndez, M. (En prensa). Exploración de la noción de distribución desde la variabilidad. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología –Tecné, Episteme y Didaxis*.
- Arteaga, P. (2009). Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos. Trabajo de Maestría. Universidad de Granada.
- Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Bakker y Gravemeijer (2004). Learning to reason about distribution. Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Conferencia inaugural.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Revista Números*, 83, 7-18.
- Batanero y Godino (2001). Análisis de Datos y su Didáctica. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Belfiori, L. (2014). Enseñanza De Estadística Con Recursos TIC. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.
- Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Documento en proceso de evaluación.
- Colegio Kimy Pernía Domicó IED (2017). PEI, Manual de Convivencia.
- Contreras, J. y Molina, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos.
- Faustino, A., y Pérez, L. (2013). Utilización de las TIC en la enseñanza de la Estadística en la educación superior angolana. *Prisma Social*, núm. 11. IS+D Fundación para la Investigación Social Avanzada Las Matas, España.

- Garfield y Ben-Zvi (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning*. Springer Science+Business Media B.V.
- Gutiérrez, N. (2017). Conceptualizando el objeto estadístico distribución de frecuencias: Una propuesta con estudiantes de grado 8°
- Konold, Higgins y Russell (2014). *Data seen through different lenses*. Publicado en línea el 08 de enero de 2014.
- Konold, C., and Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(4), 259-289.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y fundamentales*. Punto Exe Editores. Bogotá D.C.
- Ministerio de Educación Nacional República de Colombia [MEN] (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. pp. 46-95.
- Moreno, L. y Waldegg, G (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En C. Castiblanco y L. Moreno. *Seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Holanda: Kluwer.
- Riascos, Y. (2014). El Pensamiento estadístico asociado a las medidas de tendencia central: Un estudio psicogenético sobre la media aritmética, la mediana y la moda.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26, <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj> © International Association for Statistical Education (IASE/ISI), November, 2006. Wild, C. J., and Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

4. Contenidos

El presente documento se encuentra organizado en 5 secciones. En la primera se exponen las preocupaciones previas al estudio empírico realizado en la institución educativa para definir el problema, la justificación y objetivos planteados que orientan el trabajo y se mencionan algunas aproximaciones teóricas que permiten fundamentar la propuesta; en la segunda se mencionan los argumentos teóricos necesarios para estructurar y direccionar el trabajo, referidos principalmente a la noción de distribución mediante el uso de tecnología digital; en la tercera se estructura la metodología empleada para la fundamentación, gestión, generación e implementación de la propuesta en el aula; en la cuarta sección se realiza un análisis de resultados de las actividades a través de las cuales se abordó el problema; por último, se presentan las conclusiones y reflexiones con relación a los alcances de la propuesta seguidas de referencias y anexos.

5. Metodología

La metodología de investigación empleada es la estrategia entrevista basada en tareas, dado que permite observar, describir e interpretar, de forma sistemática, el proceso de resolución de tareas que lleva a cabo una o varias personas; y aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos. La estrategia descrita con anterioridad incluye algunas fases para su desarrollo: la identificación de un problema, la planificación de acciones para abordarlo, la recolección de datos, los análisis de la información recolectada y finalmente el establecimiento de las conclusiones e ideas finales alrededor del problema. La articulación entre la metodología de investigación y la metodología de enseñanza, permiten estructurar, analizar y determinar los alcances de la propuesta con relación al razonamiento estadístico y al uso de las tecnologías digitales.

6. Conclusiones

Las conclusiones expuestas a continuación se presentan atendiendo a los objetivos, a la delimitación del problema, a la fundamentación teórica, a la implementación del proyecto estadístico y a los análisis desarrollados.

El primer objetivo específico perseguía el establecimiento de la relación entre distintos enfoques didácticos de la Educación Estadística de forma tal que dicha relación orientara el diseño tanto del Applet como de las tareas para promover y observar cómo evoluciona el razonamiento de los estudiantes sobre la distribución de manera informal cuando comparan distribuciones de datos, este objetivo se concretó al efectuar la revisión y definición de los marcos teóricos de referencia sobre las características de las distribuciones (Bakker y Gravemeijer, 2004, Andrade, Fernández y Méndez, en prensa), los niveles sobre las concepciones de las distribuciones (Konold, Higgins, Russell y Khalil, 2014) y los usos de las herramientas tecnológicas en educación estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

Respecto al segundo objetivo específico que se encamina al diseño, implementación y análisis de la secuencia de tareas para favorecer la caracterización de distribuciones de datos a partir de la visualización gráfica. Aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos, se consideró diseñar el Applet en GeoGebra, dado que es una herramienta dinámica que ofrece diversas representaciones de conjuntos de datos como vistas gráficas, hojas de datos dinámicamente vinculadas, entre otras. Para el caso de esta propuesta, en la interfaz se privilegia la vista de representaciones gráficas de dos o más distribuciones, ya que para desarrollar la noción de distribución es necesario que los estudiantes se enfoquen en aspectos de su forma, la cual está influenciada por atributos tales como la centralidad, la dispersión, la densidad y la simetría de los datos (Bakker y Gravemeijer, 2004), de este modo el Applet empleó representaciones de los datos tales como gráficos de casos individuales y gráficos de puntos, y en algunas ocasiones la vista simultánea de datos en tablas y gráficos de casos, las características fueron ampliadas en el capítulo 3.

Ahora bien, siguiendo a Ben-Zvi y Arcavi (2001; citados en Garfield y Ben-Zvi, 2008), la implementación de esta propuesta lleva a reconocer que la aplicación de recursos tecnológicos no es suficiente para promover la noción de distribución, en tanto las tareas deben ser cuidadosamente diseñadas y deben contar con la orientación del docente quien, mediante el planteamiento de preguntas desafiantes, logrará que los estudiantes expresen a través de palabras, gestos, dibujos, etc. sus razonamientos frente a los atributos del objeto estadístico (en este caso la distribución), y que manifiesten las razones que los lleva a tomar las elecciones realizadas ya sea de manera individual o en consenso cuando trabajan de manera grupal en la comparación de distribuciones, es decir que expresen sus ideas y a su vez desarrollen concepciones y características de la distribución de una manera informal, o que se evidencie lo que

Noss y Hoyles (1996) conocen como abstracción situada. A su vez, es necesario proporcionar a los estudiantes conjuntos de datos motivadores y acompañar las tareas con herramientas tecnológicas apropiadas, con miras a ayudarlos a identificar distintos aspectos de las distribuciones.

Producto de la implementación de las tareas, se reconoce que estas deben abordar las situaciones planteadas de forma gradual y acumulativa, de forma tal que les permita a los estudiantes transitar por el reconocimiento de los distintos atributos de las distribuciones y complejizar sus concepciones acerca de la noción de distribución. Por ejemplo, al observar en primera instancia los datos representados en gráficos de casos individuales, los estudiantes se fijaron principalmente en aspectos de la dispersión de los datos, exhibiendo a su vez, concepciones iniciales de la distribución (ver los datos como apuntadores o como valores de cada caso); mientras que con los datos representados en gráficos de puntos, se centraron en aspectos de la densidad tales como aglomeraciones, valores faltantes, datos atípicos, frecuencia modal, entre otros, y exhibieron concepciones más avanzadas de la noción de distribución (ver los datos como clasificadores o como agregado).

Por otra parte, respecto a las funciones que proporcionó el uso de la tecnología digital en la propuesta, en particular el Applet diseñado, se observa que, al manipular las herramientas de este, los estudiantes lograron verbalizar y profundizar en aspectos de las distribuciones que no fueron evidentes con representaciones estáticas. Por ejemplo, inicialmente cuando se les presentó a los estudiantes conjuntos de datos en gráficos de casos individuales de manera estática, se limitaron a señalar algo sobresaliente del evento (v.g. los que no pasan el examen “muestra que no pusieron atención y que no trabajan”) exhibiendo la concepción de los datos como apuntadores, y aunque reconocían que las distribuciones eran diferentes no empleaban sus atributos para verbalizar las diferencias. En cambio, cuando los estudiantes usaron la herramienta de “arrastre” en el Applet para organizar los datos, esta acción los movilizó a comparar datos de las distribuciones, mediante la identificación del valor máximo y del valor mínimo, el reconocimiento de datos atípicos, aglomeraciones y la agrupación de los datos por valores de la variable.

A su vez, se reconoce que el cambio de representación de las distribuciones tratadas que permitía el Applet, de gráficos de casos a gráficos de puntos, les permitió a los estudiantes verbalizar aspectos que no habían sido tenido en cuenta previamente, tales como la frecuencia y moda y datos atípicos. A sí mismo, la representación de los gráficos de puntos en combinación con el estimador, movilizó a los estudiantes a dejar de lado por un momento concepciones de valores de cada caso o como clasificadores, para concebir la distribución como un todo, en tanto el estimador se debía fijar con ayuda del arrastre, así los estudiantes elegían “el mejor representante” de los datos usando de manera intuitiva la mediana con miras a comparar los estimadores entre las distribuciones, y determinar quiénes obtuvieron mejores resultados en las pruebas o qué grupo tuvo mejor rendimiento en el examen de matemáticas,

En relación con quién provee los datos, se advierte que es un asunto que influye también en los razonamientos de los estudiantes sobre la noción de distribución. En las tareas diseñadas se previó que inicialmente fuera la profesora que orientaba la propuesta quien suministrara los datos, y que luego los estudiantes plantearan sus propios datos de una situación cercana a ellos (tiempo que tardan en dar una vuelta al colegio corriendo). Se observa que cuando inventan su propio conjunto de datos y este requiere ser comparado junto con otros conjuntos de datos preestablecidos con distinta dispersión e igual centro, contribuye a consolidar el reconocimiento de los atributos de las distribuciones estudiadas y promovió otros tales como fijarse en mayor medida en la dispersión de los datos cuando su centralidad es la misma, para decidir sobre el mejor conjunto de datos.

En suma, los estudiantes señalan elementos que tienen que ver primordialmente con la forma, la densidad, la dispersión y la centralidad de los datos, mientras que la simetría no fue nombrada. De igual manera, los estudiantes exhibieron concepciones de la noción de distribución como valor de

cada caso, como apuntadores y como clasificadores, aunque no ven la distribución de los datos como un agregado hacen uso de atributos de la distribución acordes con su nivel escolar.

Para finalizar, se puede señalar el aporte de los resultados de esta propuesta para con las investigaciones acerca del desarrollo de la noción de distribución, pues amplía los aspectos que los estudiantes suelen considerar a la hora de tomar decisiones frente a distribuciones de datos.

Elaborado por:	Marulanda Aroca, Vivian Yulieth
Revisado por:	Méndez Reina, Maritza

Fecha de elaboración del Resumen:	21	01	2020
--	----	----	------

Contenido

INTRODUCCIÓN	1
1. PRESENTACIÓN DEL TRABAJO	3
1.1. Justificación	3
1.2. Formulación de la problemática	6
1.3. Pregunta de indagación	9
1.4. Objetivos	9
1.4.1. General.....	10
1.4.2. Específicos	10
1.5. Antecedentes	10
2. MARCO DE REFERENCIA	19
2.1. Alfabetización Estadística	19
2.2. Distribución	20
2.2.1. Distribución y Variabilidad	22
2.2.2. Sobre la variabilidad	22
2.3. Características de las distribuciones.....	25
2.3.1. Centralidad	25
2.3.2. Dispersión.....	27
2.3.3. Forma de una distribución	29

2.4.	Concepciones acerca de la noción de distribución	29
2.4.1.	Datos vistos como apuntadores.....	30
2.4.2.	Datos vistos como valor de cada caso	30
2.4.3.	Datos vistos como clasificadores.....	30
2.4.4.	La distribución vista como un agregado	31
2.5.	Herramientas tecnológicas para desarrollar la noción de distribución	33
2.5.1.	Funciones de las tecnologías digitales	34
2.5.2.	Usos de las tecnologías digitales en la educación estadística	35
2.5.3.	Procesos y habilidades cognitivas que favorecen el uso de tecnologías digitales.....	36
3.	MARCO METODOLÓGICO	38
3.1.	Perspectiva investigativa.....	38
3.2.	Estrategia de indagación.....	39
3.2.1.	Contexto experimental	40
3.2.2.	Desarrollo de las fases de la estrategia metodológica.....	41
4.	ANÁLISIS RETROSPECTIVO	59
5.	CONCLUSIONES	79
6.	REFERENCIAS	85
7.	ANEXOS.....	88

TABLAS

Tabla 1. Características de la noción de distribución	16
Tabla 2. Características de la distribución de datos	23
Tabla 3. Características de la variabilidad ligadas a la noción de distribución	24
Tabla 4. Representación de las perspectivas en que los estudiantes pueden entender la información de la Ilustración 12	32
Tabla 5. Concepciones acerca de la noción de distribución.....	33
Tabla 6. Características y concepciones de la noción de Distribución que se emplean en la comparación de conjuntos de datos.	83

ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Datos vistos como apuntadores y agrupación de datos por valores de la frecuencia.....	9
Ilustración 2. Gráficos de barras de casos individuales de dos marcas de baterías	11
Ilustración 3. Gráficos de puntos a Histogramas	12
Ilustración 4. Gráfico de barras de valores de casos del puntaje de los exámenes de un grupo de estudiantes	14
Ilustración 5. Gráfico de puntos del puntaje alcanzado por un grupo de estudiantes en un examen.....	15
Ilustración 6. Histograma del puntaje de los exámenes de un grupo de estudiantes	15
Ilustración 7. Fotografía de personas que atraviesan un puente y que asistieron a un evento.....	17
Ilustración 8. Gráfico de barras de valores individuales de los huevos puestos por 28 gallinas	18
Ilustración 9. Distribución como lente	21
Ilustración 10. Distribución Empírica- Distribución Teórica	21
Ilustración 11. Distribuciones con igual media y distinta dispersión	26
Ilustración 12. Atracción mecánica favorita de 14 estudiantes hipotéticos (Distribución de datos en bruto).	30
Ilustración 13. “Hoja 1”. Gráficos de barras de casos en GeoGebra de las notas de dos cursos en un examen de matemáticas.	44

Ilustración 14. “Hoja 1”. Representación en gráficos de puntos en GeoGebra de las notas obtenidas por dos cursos en un examen de matemáticas.....	47
Ilustración 15. “Hoja 1”. Estimador de puntaje representativo de cada curso en GeoGebra.....	48
Ilustración 16. Vista gráfica y hoja de cálculo.....	50
Ilustración 17. “Hoja 2”. Gráficos de barras de casos en GeoGebra del tiempo en que tardan los hombres en dar una vuelta al colegio.	51
Ilustración 18. Gráficos de barras de datos individuales organizados del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio.....	51
Ilustración 19. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.	52
Ilustración 20. Gráficos de puntos del tiempo que tardan las mujeres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.	53
Ilustración 21. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de dos cursos (701 y 702).....	59
Ilustración 22. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos (701 y 702). Forma de las distribuciones.	60
Ilustración 23. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 702.....	61
Ilustración 24. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. E1 señala las notas altas y las notas bajas.	62
Ilustración 25. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. E1 señala aglomeraciones	62

Ilustración 26. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. Agrupación de los datos por valores de la variable.	63
Ilustración 27. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de dos cursos (701 y 702). Comparación de valores mínimos....	64
Ilustración 28. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702 organizados del menor dato al mayor. .	65
Ilustración 29. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702. Importancia de organizar los datos.	65
Ilustración 30. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702. E2 identifica valores máximos y mínimos.	66
Ilustración 31. Gráfico de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. E2 agrupa los datos.....	67
Ilustración 32. Gráfico de puntos de las notas en un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702.	67
Ilustración 33. Gráfico de puntos de las notas en un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702. Valores máximos, frecuencia de los datos de manera cualitativa y moda.	68
Ilustración 34. Gráfico de puntos de las notas de un examen de matemáticas del curso 702. Identificación de datos atípicos.....	68
Ilustración 35. Gráfico de puntos de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. Identificación de datos atípicos.....	69
Ilustración 36. Gráficos de barras de datos individuales organizados del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.....	70

Ilustración 37. Gráficos de barras de datos individuales del tiempo que tardan los hombres en dar una vuelta al colegio. E1 y E2 señalan valores máximos y mínimos.	71
Ilustración 38. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.	72
Ilustración 39. Gráfico de puntos del tiempo que tardan los hombres del curso 703 en dar una vuelta al colegio corriendo. Valor medio estimado.	73
Ilustración 40. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres en dar una vuelta al colegio. Relaciones de distancias del valor mínimo respecto a cero.	74
Ilustración 41. Gráfico de puntos del tiempo que tardan los hombres del curso 702 en dar una vuelta al colegio corriendo. Aglomeración de los datos.....	75
Ilustración 42. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de los cursos 702 y 703 en dar una vuelta al colegio corriendo. Máximos, mínimos y datos atípicos.	75
Ilustración 43. Gráficos de puntos del tiempo que tardan las mujeres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.	76
Ilustración 44. Gráfico de puntos del tiempo que tardan las mujeres del curso 701 en dar una vuelta al colegio. Agrupación de los datos por valores de la variable.	77
Ilustración 45. Gráfico de puntos del tiempo que tardan las mujeres del curso 702 en dar una vuelta al colegio corriendo. Aglomeración de los datos.....	77
Ilustración 46. Gráfico de puntos del tiempo que tardan las mujeres del curso 702 en dar una vuelta al colegio corriendo. Estimación de la media visualmente.....	78

INTRODUCCIÓN

La forma en que se presenta la información en los medios de comunicación de hoy en día no es la misma que en años anteriores donde se describía la situación a través de un cúmulo de palabras. Al respecto, Arteaga (2011) indica que mucha de la información expuesta en los medios de comunicación e internet se hace mediante gráficos estadísticos, por lo que la estadística y su interpretación juega un papel importante en la vida de cualquier ciudadano por sus aplicaciones en el sector educativo, económico, biológico y social. De ahí la importancia de que la estadística se constituya en un eje central en la formación matemática, sin embargo, Wild y Pfannkuch (1999; citados en Batanero, 2002) afirman que abordar la estadística en la escuela no es tarea fácil, ya que los estudiantes a menudo usan los gráficos como ilustraciones y no como herramientas de razonamiento. Esta problemática no está alejada de la realidad de la institución donde se desarrolla esta propuesta, en particular los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kimy Pernía Domicó IED, al emprender esta propuesta se encuentra que conciben los datos como “apuntadores” (Konold, Higgins, Russell y Khalil, 2014), pues al momento de tomar decisiones o dar conclusiones sobre conjuntos de datos que le son presentados, estos tratan la distribución como una imagen que les recuerda lo que es sobresaliente del evento y no sobre el problema o situación que representan los datos.

Según Bakker y Gravemeijer (2004) para interpretar un conjunto de datos se debe prestar atención a las características de su distribución, atendiendo a lo anterior y considerando que según Garfield y Ben-Zvi (2008) las tareas diseñadas sobre la comparación de conjuntos de datos pueden ayudar a los estudiantes a hacer la

transición del razonamiento local¹ al razonamiento global² de los datos, se propone este trabajo de grado, cuyo propósito se centra en promover el razonamiento de los estudiantes sobre las distribuciones de manera informal cuando comparan distribuciones de datos, y observar su evolución a partir del trabajo con tareas mediadas por tecnología digital.

En esta propuesta se fija la atención en el análisis de las entrevistas basadas en dos tareas sobre la comparación de conjuntos de datos aplicadas a dos estudiantes de grado séptimo, desde el interés se centra en documentar y analizar las actuaciones y manifestaciones de estos. La entrevista se dirige a través de la gestión de dos tareas, la primera de ellas requería que el estudiante observara y manipulara gráficos de dos conjuntos de datos para dar respuesta a la pregunta: ¿qué puedes decir de los gráficos?, la segunda tarea, requería que los estudiantes propusieran datos para una situación cercana a su quehacer escolar, luego debían comparar sus datos con otros tres conjuntos de datos proporcionados por la docente para dar respuesta a una serie de preguntas relacionadas con sus atributos y diferencias.

Una vez se eligen los episodios más relevantes, se hace el análisis de estos para dar cuenta de los atributos que los estudiantes emplean para caracterizar las distribuciones estudiadas y la evolución de las concepciones de la noción de distribución que exhiben cuando comparan conjuntos de datos. Además del análisis de los episodios de la entrevista, se presentan los fundamentos teóricos que se consideraron para realizar el análisis, la estrategia investigativa que se siguió en el estudio, los resultados y las conclusiones obtenidas a partir del desarrollo del trabajo de grado.

¹ Razonamiento local: considera únicamente los valores individuales de un conjunto de datos. (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

² Razonamiento global: considera características de la distribución de los datos (centralidad, dispersión, densidad y simetría) (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

1. PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

En este capítulo, se presentan los aspectos generales que tuvieron lugar en la formulación del trabajo de grado, para lo cual se presentan la justificación del desarrollo de la propuesta, la formulación del problema a partir de las evidencias empíricas y teóricas de este, y se presentan la pregunta de indagación, los objetivos y los antecedentes.

1.1. Justificación

Investigadores como Batanero (2002), Arteaga (2009), Contreras y Molina (2019) concuerdan en que la Estadística juega un papel importante en la vida social de los ciudadanos, pues según Gal (2002; citado en Batanero, 2002) esta les proporciona un conjunto de herramientas que les permite interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que se pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos; y discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

A nivel escolar, la Estadística posibilita el desarrollo de competencias cognitivas tales como la abstracción, predicción e interpretación de tablas y gráficos estadísticos (MEN, 2006). Para Arteaga (2009), esta última competencia supone no sólo la lectura literal de la tabla o gráfico, sino identificar la posible asociación y variabilidad de los datos. Según Wild (2006) para reconocer la variabilidad de los datos es necesario estudiar la distribución de estos, porque es a través de esta que se puede observar cómo varían los datos, de igual manera dice que, mirar la variación en los datos a través de la distribución, conduce a la exploración de la naturaleza de la variación explicada e inexplicada. Para este mismo autor, la noción de distribución es, en su nivel más básico, “el patrón de variación en una variable”; esta noción es el fundamento del trabajo estadístico que investiga, desentraña y modela patrones de variación, con el fin de aprender de ellos y hacerlos predecibles. Claramente para Wild (2006) existe una estrecha relación entre la variabilidad de

una colección de datos que constituye una variable y la distribución correspondiente. En la misma línea, Konold, et al. (2014) indica que la estadística se trata de percibir, describir y generalizar a partir de características agregadas de datos, es decir a partir de características de la distribución de los datos.

Lo anterior hace pertinente la reflexión sobre la incorporación del estudio de la distribución de los datos en el currículo escolar de matemáticas, puesto que al llevar al aula dicho objeto se podrán reconocer características del proceso referido a ésta y se podrán diseñar tareas que faciliten en los estudiantes el alcance de objetivos de aprendizaje relacionados con la noción de la distribución.

Según Bakker y Gravemeijer (2004) una forma de ayudar a que los estudiantes desarrollen la idea de distribución es mediante secuencias de instrucción sobre la comparación de conjuntos de datos apoyadas por el uso de herramientas tecnológicas digitales. Al respecto, Sánchez y Orta (2013, p. 68; citados en Gutiérrez 2017) mencionan que para promover la noción de distribución se pueden realizar actividades donde se comparen conjuntos de datos, pues según ellos existen tres razones por las cuales se deben establecer comparaciones de conjuntos de datos para promover la noción de distribución:

1. Comparar dos o más conjuntos de datos puede estructurarse como una versión inicial e informal de inferencia estadística.
2. Los problemas que involucran comparaciones de conjuntos de datos son a menudo más interesantes que los que involucran a un solo conjunto.
3. Estudiantes de cualquier nivel requieren desarrollar estrategias para comparar conjuntos de datos. (p. 4)

De igual manera, Ben-Zvi y Arcavi (2001; citados en Garfield y Ben-Zvi, 2008) señalan que las tareas cuidadosamente diseñadas (por ejemplo, comparar distribuciones, manejar valores atípicos), la orientación de los docentes, las preguntas desafiantes, junto con conjuntos de datos motivadores y herramientas tecnológicas apropiadas, pueden ayudar a los estudiantes a hacer la transición del razonamiento estadístico local al global.

En línea con lo anterior, Garfield y Ben-Zvi (2008) expresan que la tecnología digital puede usarse para ayudar a que los estudiantes vean las conexiones entre las diferentes representaciones gráficas de datos, permitiéndoles construir la idea de la distribución como una entidad, señalando a su vez, que el uso de dichas herramientas posibilita la visualización de la transición entre diversos gráficos de un mismo conjunto de datos (gráficos de casos, a gráficos de puntos y a histogramas). A su vez, afirman que el uso de tecnologías digitales permite la ilustración de las diferentes formas en que puede ser graficado un mismo conjunto de datos y así revelar distintos aspectos de estos, ya que al tener múltiples representaciones en la pantalla al mismo tiempo permite identificar dónde se encuentran uno o más aspectos en un gráfico.

El uso de tecnologías digitales en la educación estadística según Garfield y Ben-Zvi (2008) permiten a su vez, cambiar un gráfico (por ejemplo, hacer que los intervalos de los histogramas sean más anchos o estrechos) para que un patrón o forma sea más clara, o que luego de agregar o eliminar valores se vea el efecto en el gráfico resultante. Los mismos autores agregan que los softwares actuales permiten a los estudiantes resaltar valores de datos particulares y ver dónde están ubicados en cada gráfico. Estas exploraciones se utilizan para hacer preguntas sobre los datos, las cuales permiten que los estudiantes vuelvan a examinar y debatir constantemente las representaciones gráficas de datos.

Además de las potencialidades del uso de las tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de la noción de la distribución señaladas previamente, autores como Belfiori (2014) consideran que:

La inclusión de la tecnología en las escuelas permite procesar una gran cantidad de información con distintas herramientas ahorrando un tiempo precioso que llevaría realizar todos esos cálculos a mano. Ese tiempo puede ser usado para analizar, interpretar y razonar el significado de los resultados obtenidos. (p. 3).

Por lo que se supone necesario presentar los temas referentes a la clase de estadística con recursos diferentes a la pizarra. Por su parte, Faustino y Pérez

(2013) consideran que “para el desarrollo de conceptos estadísticos, pueden utilizarse softwares interactivos que faciliten su estudio y contribuyan al fortalecimiento del razonamiento estadístico de los estudiantes” (p. 7). De manera que aprovechando estos aspectos respecto a la implementación de las tecnologías digitales en el aula, se pretende hacer uso de dichas herramientas y ver cómo se promueve el razonamiento de los estudiantes sobre las distribuciones cuando comparan distribuciones de datos y observar su evolución. En este sentido, esta propuesta parte del supuesto que los estudiantes haciendo uso de una herramienta digital diseñada en GeoGebra, pueden razonar sobre los atributos de la distribución a partir de la comparación de distribuciones de conjuntos de datos.

Además de los planteamientos propuestos con anterioridad, la importancia de este trabajo se apoya en las directrices dadas en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de Colombia (MEN, 2006) al plantear que los estudiantes del nivel de estudio (grado séptimo) al finalizar el año escolar deben “comparar diferentes representaciones de un conjunto de datos e interpretar la información presentada en tablas y gráficas” (MEN, 2006, p. 83). Por lo que se considera que esta propuesta cumple con las expectativas comunes de calidad del sistema educativo colombiano.

1.2. Formulación de la problemática

La cultura estadística, tiene como fin la interpretación de la información estadística que se puede encontrar en diferentes contextos mediante la comprensión adecuada de las ideas estadísticas fundamentales, específicamente la de distribución de frecuencias (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013), para ello es necesario promover el razonamiento estadístico, que según Wild y Pfannkuch (1999; citados en Batanero, 2002) incluye tres componentes claves: 1. reconocer la necesidad de los datos, 2. comprensión de las distintas representaciones, y 3. percepción de la variación de los datos; este último componente según Bakker y Gravemeijer (2004) se refiere a describir la forma de los datos y a usar las características de la distribución como las medidas de centralidad, dispersión, densidad y simetría de los

conjuntos de datos para que sean concebidos como agregados. Sin embargo, los mismos autores indican que concebir los valores individuales de un conjunto de datos como un agregado, no es fácil para los estudiantes. Al respecto, Cobb (1999; citado en Konold, et al., 2014) señala que muchos de los estudiantes de secundaria que trabajaron con los datos representados en gráficos de puntos percibieron los datos como "colecciones de puntos", en lugar de atender a las características de la distribución como una entidad o como un todo.

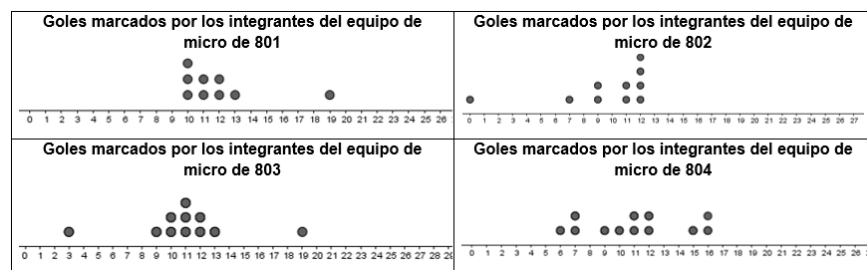
Investigadores como Hancock, Kaput y Goldsmith (1992; citados en Konold, et al., 2014) mostraron una intervención en la que alentaron a los estudiantes (entre 8 a 15 años) a que atendieran cualidades agregadas de las distribuciones y que emplearan estos atributos para el análisis de datos. Sin embargo, los estudiantes persistieron en enfocarse en "casos individuales" y, tuvieron dificultades para hacer el tránsito entre ver más allá de los detalles de un solo caso, a una imagen generalizada del grupo, es decir ver los datos como agregado. Mokros y Russell (1995; citados en Konold, et al., 2014) también observaron que, para muchos estudiantes "un valor representativo" no tenía significado porque el conjunto de datos era, para ellos, solo los valores de los números.

Además, Wild y Pfannkuch (1999); y Konold y Pollatsek (2002), afirman que los estudiantes a menudo ven y usan gráficos como ilustraciones y no como herramientas de razonamiento para aprender algo sobre un conjunto de datos u obtener nueva información sobre un problema o contexto en particular.

Esta problemática no es ajena a los estudiantes de grado séptimo con los que desarrolla esta propuesta, en un estudio exploratorio inicial (Anexo A), que pretendía mostrar las características de las distribuciones que los estudiantes aludían cuando se les presentan conjuntos de datos en una representación gráfica estática, se observó que uno de cada cinco estudiantes concibe los datos como apuntadores (Konold, et al., 2014), pues al momento de tomar decisiones sobre la comparación de conjuntos de datos tratan la distribución como una imagen que les recuerda lo que es sobresaliente del evento (Ilustración 1). De igual manera cuatro de cada

cinco estudiantes hacen uso de características de la densidad de los datos, pues, cuando se les pregunta sobre el equipo de microfútbol que debe representar al colegio en los intercolegiados teniendo en cuenta el número de goles marcados por los jugadores de cada equipo, los estudiantes agrupan datos por valores de la frecuencia, es decir, determinan grupos para la frecuencia y asignan a estos los valores de la variable correspondientes, dejando a un lado características de la dispersión, centralidad y simetría de los datos. Muestra de esto son los resultados (Ilustración 1) de la prueba diagnóstica

El profesor de educación física quiere elegir de entre los equipos de microfútbol de grado octavo el mejor equipo para que represente al colegio en los intercolegiados. Ayuda al profesor de educación física a elegir el mejor equipo, para esto, observa los siguientes gráficos que muestran los goles marcados por los integrantes de cada equipo de microfútbol en los últimos tres campeonatos. Redacta tus razones para elegir uno sobre el resto de equipos de microfútbol.



¿Cuál equipo de octavo consideras que debe elegir el profesor de educación física para que represente al colegio en los intercolegiados? ¿Por qué?

801= Es un buen equipo pero les falta más atención a la hora de jugar 802= Es un equipo que falta entrenamiento más atención a la hora de jugar 803= Es muy bueno el equipo pero tiene que arriesgar más en la cancha 804: El número de Goles hace ver que es un equipo muy bueno que trabajan en equipo y que tiene un buen entrenador.
Números de Goles: 801=108
802=95 803=110 804=132
y por eso pienso que 804 se merece estar en el juego.

Datos vistos como apuntadores

Agrupar datos por valores de la frecuencia, es decir, determina grupos para la frecuencia y asigna a estos los valores de la variable correspondientes

Ilustración 1. Datos vistos como apuntadores y agrupación de datos por valores de la frecuencia.

Otro asunto problemático se refiere al uso del lápiz y el papel, pues este ha sido por mucho tiempo el artefacto para abordar situaciones como la descrita con anterioridad. Sin embargo, es evidente que el uso del lápiz y el papel exhibe en los estudiantes procesos algorítmicos como la suma de frecuencias (Ilustración 1), pero no potencia la enseñanza de procesos cognitivos más avanzados como concebir los datos como un agregado (Bakker y Gravemeijer, 2004).

Ahora bien, según el MEN (1999) con la invención de las calculadoras y los computadores se ha dado un giro a la importancia de los procedimientos aritméticos y algebraicos. De tal manera que los procesos algorítmicos como hallar sumas de frecuencias, frecuencias relativas, promedios, etc., son cubiertos hoy día por las calculadoras y los computadores. Sin embargo, el uso del computador en las aulas de clases se ha reducido a presentar la misma información que se puede mostrar en el tablero con dibujos y colores, y no a potenciar procesos mentales en los estudiantes como el razonamiento, la abstracción, etc. En el Colegio Kimy Pernía, aunque se cuenta con sala de sistemas esta ha sido usada por mucho tiempo como un tablero digital, en el que se muestra cómo hacer procesos algorítmicos en lugar de potenciar otros procesos mentales.

1.3. Pregunta de indagación

¿Cómo evolucionan las concepciones de los estudiantes acerca de la noción de distribución cuando se proponen tareas que involucran el uso de tecnología digital con miras a promover su caracterización, a través de la comparación de conjuntos de datos?

1.4. Objetivos

Para dar respuesta a la pregunta de indagación, se plantean los objetivos que siguen.

1.4.1. General

Promover el razonamiento informal de los estudiantes sobre la noción de distribución cuando se comparan distribuciones de datos, y observar la evolución de sus concepciones a partir del trabajo con tareas mediadas por un Applet de GeoGebra.

1.4.2. Específicos

- Establecer la relación entre distintos enfoques didácticos de la educación estadística que oriente el diseño de un Applet en GeoGebra y la secuencia de tareas que lo acompañan para promover y observar cómo evoluciona el razonamiento de los estudiantes sobre las distribuciones de manera informal cuando comparan distribuciones de datos.
- Diseñar, implementar y analizar una secuencia de tareas para favorecer la caracterización de distribuciones de datos a partir de la visualización gráfica, aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos como GeoGebra.
- Analizar la contribución de la secuencia de tareas mediada por el Applet, desde los razonamientos de los estudiantes sobre la noción de distribución, cuando se comparan conjuntos de datos.

1.5. Antecedentes

Un último aspecto que permitió la delimitación del problema que es objeto de estudio en este trabajo y que se pone de manifiesto en este apartado, fue la revisión de literatura relacionada con los objetivos y tema central. A continuación, se mencionan estudios que se consideraron relevantes en tanto aportan referentes tanto teóricos como metodológicos de esta propuesta.

Uno de los primeros referentes teóricos revisados, es el estudio realizado por Bakker y Gravemeijer (2004), en el que desarrollaron un experimento de enseñanza con estudiantes de grado séptimo, cuyo propósito era el de impulsar el

reconocimiento de diversos aspectos de las distribuciones de manera informal. Las actividades propuestas giraron en torno a las distintas representaciones gráficas que facilita el software Minitool en el marco de diversas situaciones tales como la comparación del rendimiento de dos marcas de baterías.

Para dar inicio al experimento de enseñanza, los autores les propusieron a los estudiantes realizar un informe para decidir cuál marca de baterías es mejor. En la primera etapa de desarrollo del informe, los estudiantes usaron gráficos de barras de casos individuales (Ilustración 2). Según los autores, al emplear esta representación, se buscaba que los estudiantes razonaran acerca de las diferentes características de la distribución como la simetría, el centro, y su densidad (específicamente que razonaran sobre la mayoría de los datos), la media, y los valores extremos de los datos. Al analizar la información recolectada de esta primera actividad, los investigadores encontraron que los estudiantes razonaron acerca de la media de los datos, de la simetría, de los datos atípicos y de valores extremos de los datos.

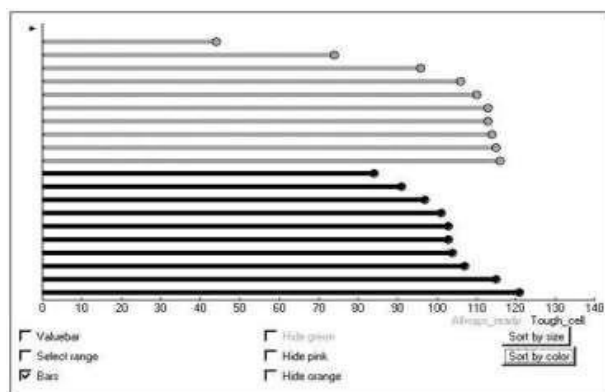


Ilustración 2. Gráficos de barras de casos individuales de dos marcas de baterías. Fuente: Bakker y Gravemeijer (2004)

Posteriormente en la segunda etapa del experimento de enseñanza, los investigadores propusieron a los estudiantes un problema en el que debían generar un informe para una fábrica textil sobre el porcentaje de tallas de jeans que debería producir según un conjunto de datos que contenía la longitud de la cintura (en pulgadas) de 200 hombres. El problema tenía la intención de que los estudiantes

centraran su atención en la media y que razonaran sobre frecuencias absolutas y relativas. La ilustración 3 muestra el proceso que llevaron a cabo los estudiantes para responder al problema.

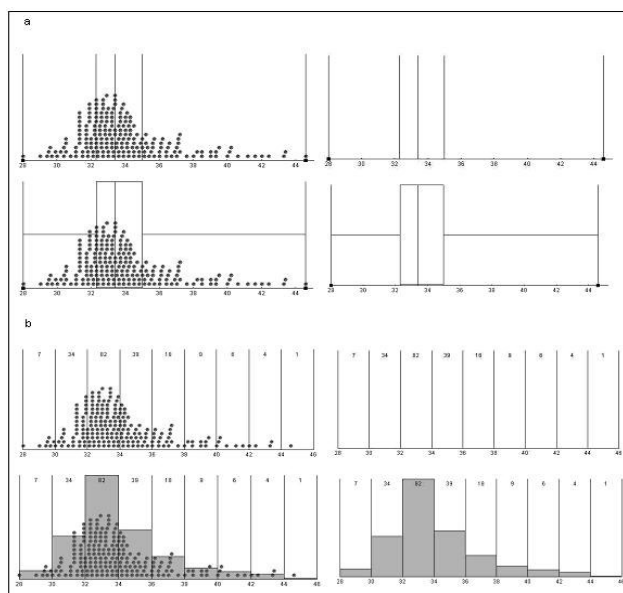


Ilustración 3. Gráficos de puntos a Histogramas. Fuente: Bakker y Gravemeijer (2004)

En esta misma etapa, los investigadores les propusieron a los estudiantes el siguiente problema: En cierta canasta de globos aerostáticos, se permiten ocho adultos [además del conductor]. Suponga que va a dar un paseo con un grupo de alumnos de séptimo grado. ¿Cuántos alumnos de séptimo grado podrían ingresar de manera segura a esa canasta de globos si sólo se considera el peso? Esta pregunta tenía la intención de que los estudiantes razonaran sobre la variación de los datos a partir de la discusión y predicción de lo que sucedería si agregaran más datos a la muestra inicial. Una solución común entre los estudiantes fue hallar el peso promedio de los estudiantes de séptimo. Los autores encontraron que los estudiantes tienden a dividir las distribuciones unimodales en tres grupos de valores, bajos, promedio y altos.

En la tercera y última etapa del experimento, para dar respuesta a la pregunta de globos aerostáticos, los estudiantes propusieron dos conjuntos de datos para el peso y la estatura de un grupo de niños de grados séptimo, luego hicieron gráficas y razonaron sobre estas. Según los autores los estudiantes razonaron sobre la

forma de las distribuciones y desarrollaron una visión más amplia de los datos, pues comenzaron a razonar sobre la densidad y la forma de toda la distribución.

Con estas tres etapas Bakker y Gravemeijer (2004) mostraron cómo ciertas actividades de instrucción apoyadas por el uso de herramientas tecnológicas, estimularon a los estudiantes a razonar sobre aspectos de las distribuciones, pues mediante el uso del Minitool los estudiantes usaron razonamientos informales sobre el centro, la dispersión, la densidad y la simetría de los datos. La representación en gráficos de barras de casos individuales (Ilustración 2) estimuló en los estudiantes una estrategia visual para encontrar la media. Mientras que la representación en gráficos de puntos e histogramas (Ilustración 3), desarrolló en los estudiantes nociones cualitativas de aspectos más avanzados de distribución, como la frecuencia, mediana y densidad.

Otro de los estudios referentes al desarrollo de la noción de distribución es el trabajo adelantado por Garfield y Ben-Zvi (2008), en el que proponen una secuencia de actividades mediadas con una herramienta tecnológica llamada Tinker-Plots. Inicialmente, los autores les muestran a los estudiantes un gráfico de barras de casos individuales (de los puntajes obtenidos por 40 estudiantes en un examen), para ayudarlos a asociar un dato al valor de una variable particular (Ilustración 4).

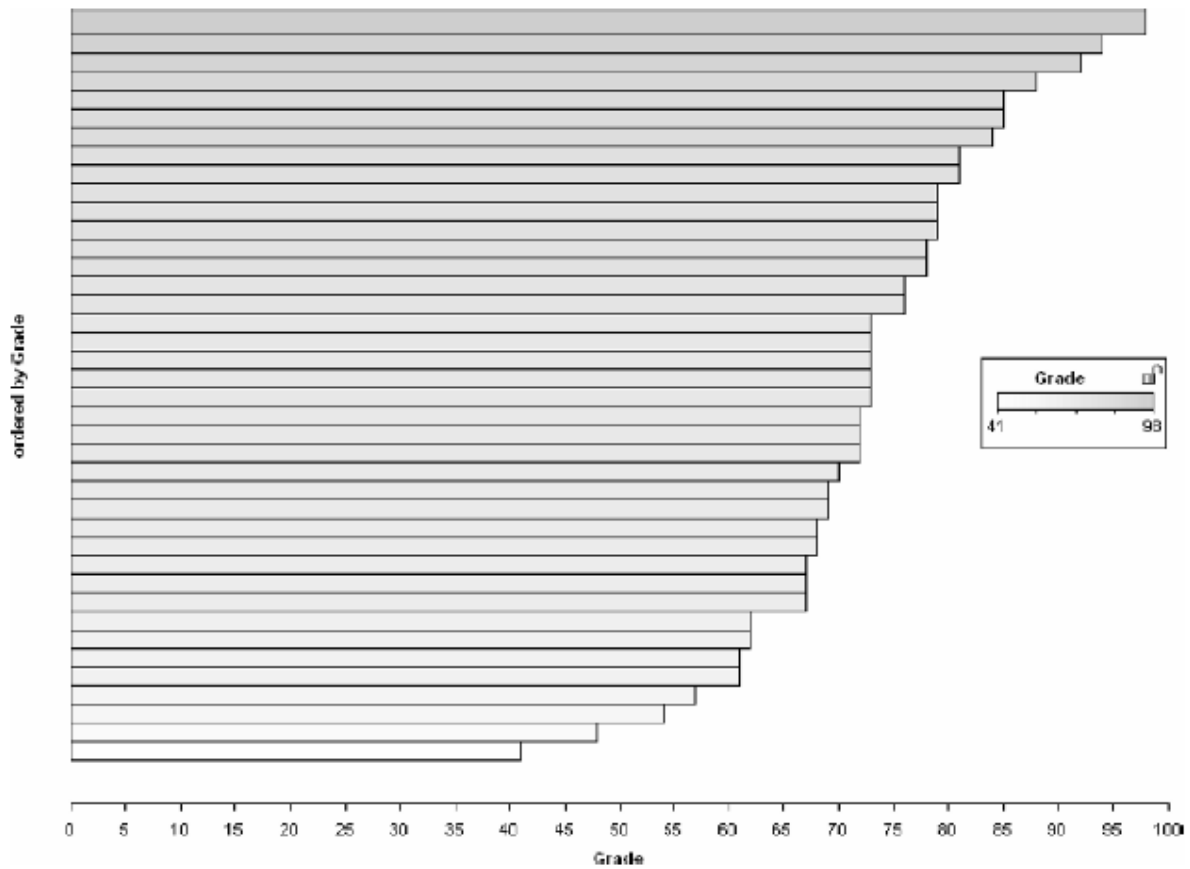
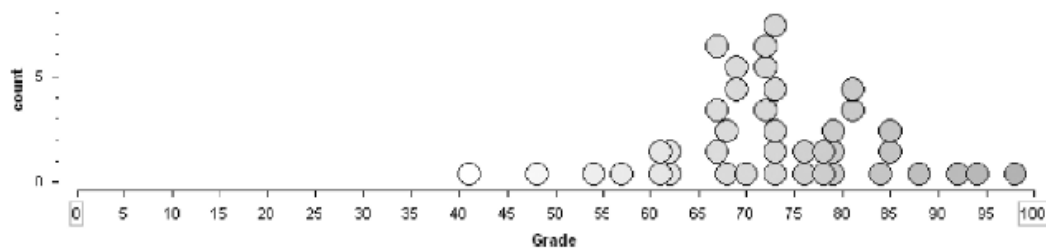


Ilustración 4. Gráfico de barras de valores de casos del puntaje de los exámenes de un grupo de estudiantes. Fuente: Garfield y Ben-Zvi (2008)

Posteriormente, los investigadores les sugieren a los estudiantes que hablen sobre las categorías que son útiles para agrupar los datos con el fin que realicen la transición a una segunda representación que toma puntos finales de las barras de casos individuales y los apila a un diagrama de puntos (Ilustración 5).



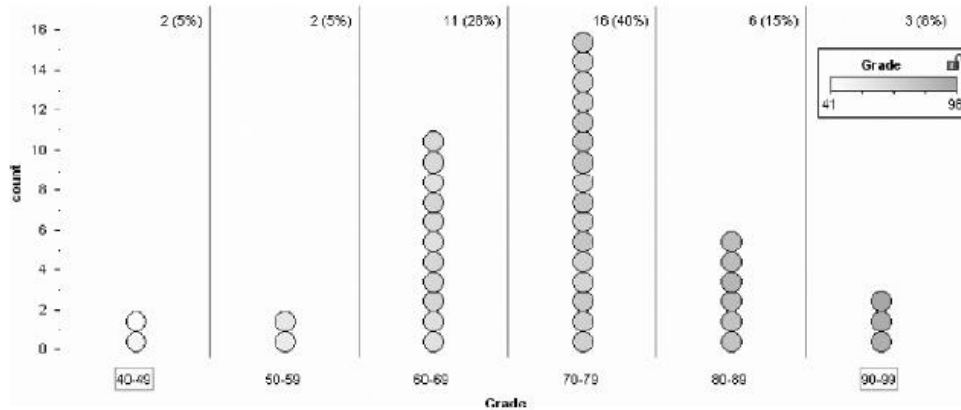


Ilustración 5. Gráficos de puntos del puntaje alcanzado por un grupo de estudiantes en un examen. Fuente: Garfield y Ben-Zvi (2008)

Según los autores, las agrupaciones de los datos realizadas por los estudiantes podrían conducir a histogramas (Ilustración 6). Según Garfield y Ben-Zvi (2008), se debe alentar a los estudiantes a que comparen los tres tipos de representaciones del mismo conjunto de datos, discutiendo que muestra y que no muestra cada gráfico, en que se asemejan y en que se diferencian.

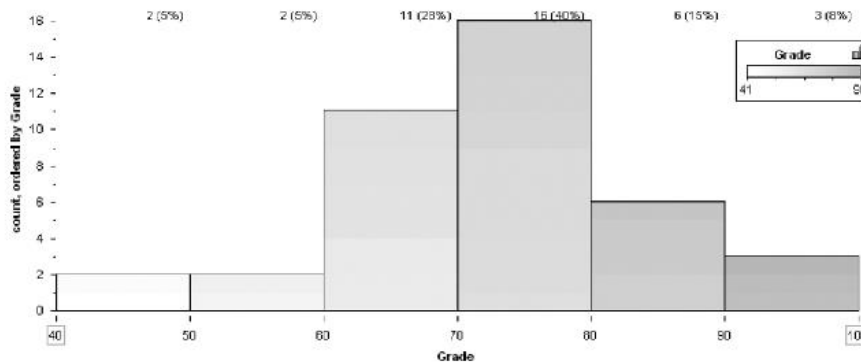


Ilustración 6. Histograma del puntaje de los exámenes de un grupo de estudiantes. Fuente: Garfield y Ben-Zvi (2008)

Finalmente, los autores sugieren que otra forma de ayudar a que los estudiantes desarrollen la idea de distribución es mediante la comparación, proporcionándoles conjuntos de datos con forma y dispersión similar, pero con centros diferentes, o suministrándoles conjuntos de datos con formas y centros similares, pero con diferente dispersión.

Con su trabajo Garfield y Ben-Zvi (2008) hacen uso de una transición de gráficos de barras de casos individuales a histogramas con el fin de promover la noción de distribución en los estudiantes y aportan un ejemplo de cómo las herramientas tecnológicas como Tinkerplots pueden estimular el razonamiento de los estudiantes acerca de las distribuciones.

Otro de los estudios revisados, es el desarrollado por Arteaga, Batanero y Ruiz (2009), en este se muestra cómo futuros profesores se enfrentaron a la comparación de dos distribuciones de datos, cada uno de los participantes realizó sus registros de la manera en que considerara pertinente. La tabla 1 muestra las características de las distribuciones que los profesores tuvieron en cuenta para comparar los conjuntos de datos.

	Correcto	Incorrecto	Total
Media	98	12	110
Mediana	62	26	88
Moda	93	4	97
Rango	60	6	66
Otra medida dispersión	43	0	43

Tabla 1. Características de la noción de distribución. Fuente: Arteaga, Batanero y Ruiz (2009)

Según los autores, la manera en que los profesores en formación abordaron los conjuntos de datos es una primera aproximación de la idea de distribución, pues ya no consideran los datos como casos individuales, sino que emplean un resumen estadístico de un conjunto de datos, aunque esto no indica que los profesores entendieran en su totalidad el concepto de distribución, pues para los autores la noción de distribución está asociada a la dispersión, la forma y la variabilidad de los datos.

Otro de los estudios referentes al desarrollo de la noción de distribución es el trabajo realizado por Gutiérrez (2017). En este se muestra una secuencia de actividades aplicada a un grupo de estudiantes de grado octavo que no contaban con formación

en Estadística preliminar. Cada una de las actividades estuvo enfocadas al desarrollo de algunos aspectos de la distribución. En una de las actividades “estimando cantidades”, los estudiantes debían estimar la cantidad de personas que asistieron a un evento particular a partir de la observación de una imagen (Ilustración 7) y explicar el método que usaron para ello.



Ilustración 7. Fotografía de personas que atraviesan un puente y que asistieron a un evento.
Fuente: Gutiérrez (2017)

La mayoría de los estudiantes estimaron dicha cantidad a través de divisiones del área del puente, lo que los ayudó a ver la dispersión de los datos.

En otra actividad “la decisión de la granja”, los estudiantes debían decidir sobre la eficacia de una nueva dieta para las gallinas, para esto Gutiérrez (2017) les presentó a los estudiantes un gráfico de barras de valores individuales (Ilustración 8) del número total de huevos puesto por las gallinas que fueron alimentadas con la dieta tradicional (en color verde) vs la cantidad de huevos puestos por las gallinas que fueron alimentadas con la nueva dieta (en color Fucsia).

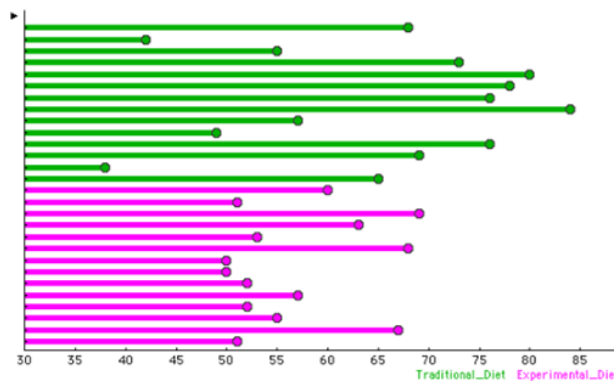


Ilustración 8. Gráfico de barras de valores individuales de los huevos puestos por 28 gallinas.
Fuente: Gutiérrez (2017)

Los reportes de Gutiérrez (2017) señalan que algunos estudiantes basaron su decisión por la comparación de las frecuencias absolutas de la cantidad de huevos producidos por ambos grupos de gallinas, mientras que otros tuvieron en cuenta otros aspectos como la variación de los datos, pues concluyeron que la nueva dieta era más conveniente porque la cantidad de huevos producidos era más estable que con la dieta tradicional.

Es interesante ver cómo los estudiantes empezaron a desarrollar la idea de distribución a partir de una situación sobre un conjunto de datos (cantidad de personas que asistieron a un evento) y se amplió en la comparación de conjuntos de datos con actividades como la descrita anteriormente.

Con su trabajo Gutiérrez (2017) aportó para que los estudiantes pudieran razonar de una manera informal sobre distribuciones de datos y pudieran usar un vocabulario no formal para algunos conceptos asociados a la noción de distribución.

Los aportes de las investigaciones citadas al presente trabajo de grado están asociados específicamente a la herramienta analítica y a las actividades planteadas, pues buscan que los estudiantes razonen sobre la comparación de distribuciones identificando y ampliando los atributos de la noción de distribución que plantean Bakker y Gravemeijer (2004) que se explicaran más adelante en el capítulo que sigue.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan los marcos de referencia que son tenidos en cuenta para el desarrollo de la propuesta, específicamente los asociados a la noción de distribución y la comparación conjuntos de datos, en particular se amplían aspectos sobre la alfabetización estadística, la distribución, las características de las distribuciones, las concepciones acerca de la noción de distribución y las herramientas tecnológicas que contribuyen a desarrollar la noción de distribución.

2.1. Alfabetización Estadística

Según Batanero (2002), el objetivo principal de la Educación Estadística no es convertir a los futuros ciudadanos en “estadísticos aficionados”, ya que, para esto, se requiere un amplio conocimiento de esta materia. Tampoco se trata de convertirlos en expertos en el cálculo y representación gráfica, puesto que hoy día hay softwares que se encargan en hacerlo, lo que se quiere es proporcionar una alfabetización estadística, también conocida como cultura estadística. Según Batanero (2002), para educar en cultura estadística, es necesario “educar en los componentes básicos conceptuales y procedimentales de la estadística” (p.3.), esto es promover la comprensión de las ideas básicas sobre los gráficos, impulsar la interpretación de lo que las medidas de centralización indican sobre el conjunto de datos, cuando se analizan o comparan dos o más distribuciones de datos. Uno de los fines de la Educación Estadística es entonces, que los estudiantes sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, es decir, describir su forma y usar las características estadísticas como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos.

Lo anterior según Arteaga (2009), se relaciona con el concepto de distribución de frecuencias, concepto complejo, que se refiere al agregado (población o muestra) y no a los datos particulares. Batanero y Godino (2001) señalan que para entender la distribución de un conjunto de datos, basta con conocer las medidas de centralidad, de dispersión, de densidad y de simetría, sin embargo, Pfannkuch y Reading (2006)

consideran que el razonamiento sobre las distribuciones implica interpretar una estructura compleja que no solo incluye el razonamiento sobre características tales como la centralidad, la dispersión, la densidad, el sesgo y los valores atípicos, sino que también incluye otras ideas, como el muestreo, la población, la causalidad y el azar, sin embargo esto último atiende principalmente a ideas relacionadas con la probabilidad, que en este estudio no tiene lugar como se explica más adelante. Por lo que la premisa de Garfield y Ben-Zvi, (2008) “la educación estadística debería contribuir a que los estudiantes entiendan la noción de distribución como un agregado” toma especial relevancia, ya que un aspecto esencial para el análisis de un conjunto de datos es describir las características de las distribuciones de los conjuntos de datos.

Por tanto, nos adentraremos en la noción de distribución vista desde las perspectivas de autores como Batanero y Godino (2001); Wild (2006); y Bakker y Gravemeijer (2004).

2.2. Distribución

Para Batanero y Godino (2001) la distribución proporciona información para analizar una variable, en particular sobre aspectos como saber cuántos datos hay en total, con qué frecuencia aparecen los diferentes valores de la variable y el comportamiento de los datos, sin embargo, no señalan una definición clara sobre esta noción.

Algunos autores se han interesado por investigar sobre la noción de distribución, al respecto, Wild (2006) indica que la distribución es el lente a través del cual se observa cómo varían los datos, por lo que comprender la idea de variabilidad de los datos es un componente clave para comprender el concepto de distribución.

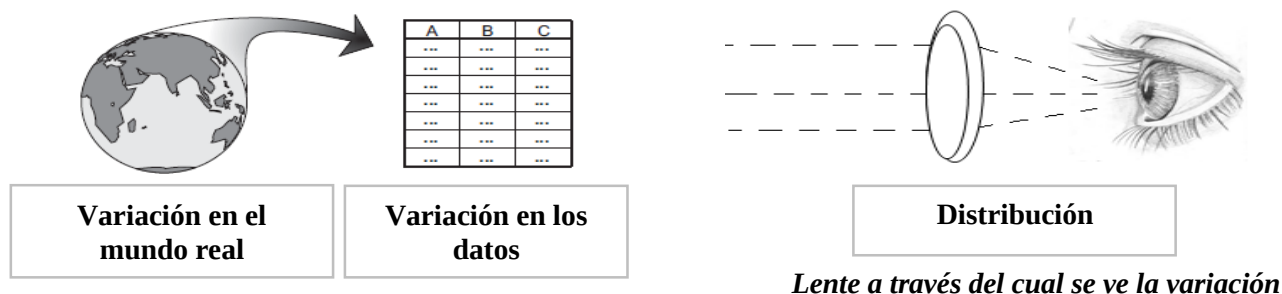


Ilustración 9. Distribución como lente. Fuente: Wild (2006).

Acorde con las perspectivas mencionadas, Wild (2006) hace una distinción entre dos tipos de distribuciones, las empíricas y las teóricas. Las *distribuciones empíricas*, como aquellas en las que se explica la variación de los datos mediante la observación directa de diferentes representaciones del conjunto de datos, dicha observación permite describir la variabilidad existente en los datos, por ello, este tipo de distribuciones no tienen un componente inferencial. Las *distribuciones teóricas* por su parte hacen alusión a las distribuciones que explican la variación de los datos de variables aleatorias bajo modelos paramétricos como la distribución normal, binomial, etc., es decir, se asocian a modelos de probabilidad.

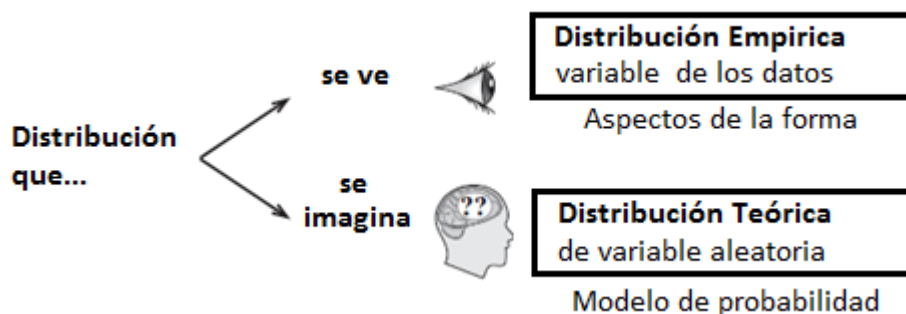


Ilustración 10. Distribución Empírica- Distribución Teórica. Fuente: Wild (2006)

Esta propuesta centra su atención en las distribuciones de tipo empírico, dado que, lo que busca principalmente con la propuesta, es favorecer la caracterización de distribuciones de datos a partir de la visualización gráfica, aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos. Así mismo se busca promover el aprendizaje de la estadística, particularmente, una de las ideas fundamentales, la

distribución (Wild, 2006), mediante la exploración dinámica de dos o más conjuntos de datos.

A continuación, se presentan las características de la distribución basadas en las investigaciones de algunos autores con desarrollos en el tema.

2.2.1. *Distribución y Variabilidad*

Antes de describir aspectos importantes acerca de la variabilidad, es necesario abordar la cuestión de la terminología que se usará a partir de este momento. Algunos autores usan el término “variación” y “variabilidad” para referirse al mismo concepto, sin embargo, hay quienes hacen distinción de los términos. Reading y Shaughnessy (2004; citado en Garfield y Ben-Zvi, 2008) hacen las siguientes distinciones entre “variación” y “variabilidad”, variación es el nombre que se usa para describir el acto de variar, mientras que variabilidad es el nombre del adjetivo “variable”, lo que significa que es probable que algo varíe o cambie. Teniendo en cuenta que esta distinción no ha sido acordada en la comunidad de la investigación en Educación Estadística, para este trabajo se tomará el argumento de los autores mencionados y se usará el término variabilidad para las ideas descritas y desarrolladas en este capítulo.

Como se había señalado anteriormente, un requisito para comprender la distribución es la idea de variabilidad, que según Wild (2006) está siempre presente en la distribución, por lo tanto, es importante que los estudiantes perciban la variabilidad los conjuntos de datos tratados o analizados.

2.2.2. *Sobre la variabilidad*

Según Garfield y Ben-Zvi (2008), un requisito para comprender la noción de distribución es que los estudiantes perciban la presencia de la variabilidad en las distribuciones, aun cuando no se hable de ella, por lo que es necesario mostrarles que la variabilidad es una idea que subyace a la distribución y que puede ser

explicada mediante una comprensión profunda de esta, según los mismos autores, esta exploración puede ser guiada a través de acciones como:

1. Desarrollar ideas intuitivas de variabilidad
2. Describir y representar la variabilidad con medidas numéricas
3. Usar la variabilidad para hacer comparaciones
4. Reconocer la variabilidad en tipos especiales de distribuciones
5. Identificar patrones de variabilidad en los modelos de ajuste
6. Usar la variabilidad para predecir resultados en muestras aleatorias
7. Considerar la variabilidad como parte del pensamiento estadístico (p. 208)

Otro requisito para concebir la noción de distribución según Bakker y Gravemeijer (2004) es enfocarse en los aspectos de la forma, la cual está influenciada por varios aspectos estadísticos como la centralidad, la dispersión de los datos, la densidad y la simetría.

Al respecto Bakker y Gravemeijer (2004) proponen una estructura (Tabla 2) que puede ser leída de manera descendente o de manera ascendente. Su lectura en forma descendente indica la centralidad, la dispersión, la densidad y la simetría como características de una distribución; en la lectura de manera ascendente según Mokros y Russell (1995; citados en Bakker y Gravemeijer, 2004), se conciben los datos como casos individuales, que se pueden usar para calcular, por ejemplo, la media, la mediana, la desviación estándar y el rango. Esto no implica que se vea la media o la mediana como medida de centralidad o como representante de un conjunto de datos, no obstante, esta perspectiva puede conducir a la comprensión de la noción de distribución.

DISTRIBUCIÓN (Entidad conceptual)			
Centralidad	Dispersión	Densidad	Simetría
Media y Mediana	Desviación estándar y Rango	Frecuencia relativa y Cuartiles	Posición de la mayoría de los datos
Datos (Valores individuales)			

Tabla 2. Características de la distribución de datos. Fuente: Bakker y Gravemeijer (2004).

En Andrade, Fernández y Méndez (en prensa) se presenta una caracterización de la variabilidad (Tabla 3) ligada a la noción de distribución que amplía la conceptualización propuesta por Bakker y Gravemeijer (2004).

Dispersión
Ver la necesidad de organizar u ordenar los datos
Identificar valores máximo y mínimo
Determinar el rango
Establecer relaciones cualitativas entre los datos, y/o relaciones cuantitativas como distancias
Apreciar de manera general la variabilidad
Reconocer valores atípicos
Estimar varianza, desviación estándar
Densidad
Apreciar de forma cualitativa la variación de las frecuencias
Agrupar datos por valores de la frecuencia, es decir, determinar grupos para la frecuencia y asignar a estos los valores de la variable correspondientes
Agrupar datos por valores de la variable, es decir, determinar grupos para la variable y asignar a estos las frecuencias correspondientes
Referirse a la colección de datos por frecuencias relativas o porcentajes de valores particulares de la variable
Apreciar variación entre las longitudes de los intervalos o clases de una o más tablas de frecuencias
Apreciar de forma cualitativa la variación en la relación entre la variable y la frecuencia, determinar si la gráfica es ascendente, descendente, creciente, decreciente, describir curvas, inflexiones de las curvas, prolongaciones, colas
Apreciar de forma cuantitativa la variación en la relación entre la variable y la frecuencia
Describir relaciones de cercanía o lejanía entre las barras, reconocer condensaciones, aglomeraciones
Reconocer valores faltantes, frecuencias nulas, valles, llanos
Describir relaciones de altura entre las barras, reconocer picos, apuntamientos
Reconocer el valor de la variable que corresponde a la mayoría de los datos
Comparar partes con el todo
Centro
Reconocer el valor de la frecuencia más alta, moda
Calcular mediana, media (promedio)
Simetría y asimetría
Reconocer simetría o asimetría
Modelos teóricos
Relacionar con modelos teóricos

Tabla 3. Características de la variabilidad ligadas a la noción de distribución. Fuente: Andrade, Fernández y Méndez (en prensa)

Estas características serán tenidas en cuenta para analizar los razonamientos de los estudiantes sobre la noción de distribución y se adaptarán o ampliarán de forma que estén orientadas a la comparación de conjuntos de datos.

2.3. Características de las distribuciones

Atendiendo a lo anterior, es necesario ampliar las características de las distribuciones tales como la centralidad, dispersión, densidad y simetría que Bakker y Gravemeijer (2004) señalan, ya que se consideran importantes para caracterizar la variabilidad presente en las distribuciones. A continuación, se describen algunos elementos de estos componentes:

2.3.1. Centralidad

Para entender la noción de distribución, es clave comprender la idea de centro, ya que es fundamental al momento de interpretar gráficos y conjuntos de datos (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Para caracterizar el centro de una distribución se emplean medidas de tendencia central tales como la media y la mediana.

A. La media

Según Batanero (2004; citada Gutiérrez, 2017) la media es “la mejor estimación de una cantidad desconocida, cuando hemos hecho varias medidas de la misma y es la cantidad equitativa a repartir cuando tenemos diferentes cantidades de una cierta magnitud y queremos distribuirla en forma uniforme” (p. 11). Entre algunas propiedades de la media que mencionan Garfield y Ben-Zvi (2008), se destacan las siguientes:

1. La media es un punto de datos ubicado entre los valores extremos de una distribución.
2. Cuando se calcula la media, se debe tener en cuenta cualquier valor de cero.
3. El valor promedio es representativo de los valores que se promedian (p. 189).

Si bien, la media es un valor representativo de una distribución, no siempre permite mostrar el comportamiento de la distribución; por ejemplo, dos conjuntos de datos podrían tener la misma media, pero no estar distribuidos de la misma manera, lo cual sugiere que la media no es suficiente para explicar el comportamiento de los datos, como se muestra en la Ilustración 11.

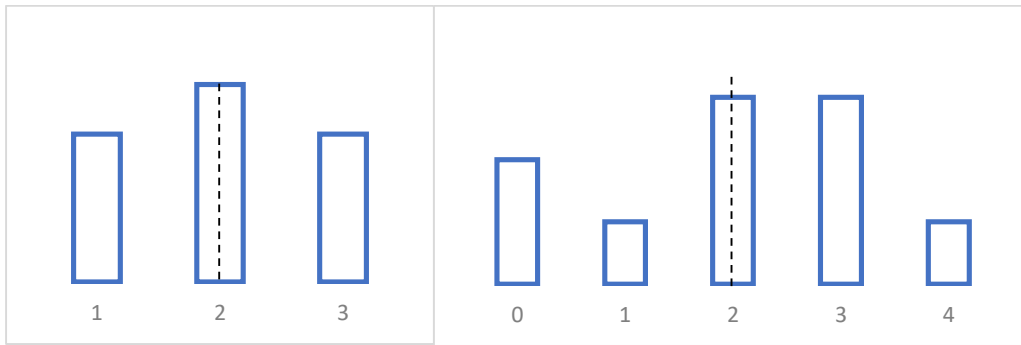


Ilustración 11. Distribuciones con igual media y distinta dispersión. Elaboración propia.

B. La mediana

Según Batanero y Godino (2001), la mediana permite una vez ordenados un conjunto de datos de menor a mayor, encontrar un número, tal que existen tantos valores superiores o iguales como inferiores o iguales a él. Al igual que la media, la mediana también presenta limitaciones

1. No se usan todos los valores observados de la variable, lo que la limita como medida de tendencia central (Batanero y Godino, 2001), por ejemplo, suponga que se toma el peso de tres personas, de las cuales la primera pesa 55 kg y la segunda 60 kg. Si la mediana es 60 kg. ¿Cuánto pesa la tercera persona?, esta es una pregunta que nadie puede contestar exactamente, sin embargo, si la media aritmética es 60 kg, podemos afirmar que la tercera persona pesa 65 kg.
2. No puede ser aplicada a distribuciones de variables cualitativas (Batanero y Godino, 2001).
3. Como medida de tendencia central, presenta ciertas ventajas frente a la media en algunas distribuciones ya que no se ve afectada por valores extremos de las observaciones. La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior, puesto que solo se tienen en cuenta los valores centrales de la variable. Por ello es adecuada para distribuciones asimétricas o cuando existen valores atípicos (Batanero y Godino, 2001)
4. Conserva los cambios de origen y de escala, es decir, si se suma, se resta, multiplica o divide cada dato por un mismo número esta operación se traslada a la mediana (Batanero y Godino, 2001).
5. La mediana es resistente, es decir, con pequeñas fluctuaciones de la muestra, no cambia su valor, se pueden cambiar uno o varios datos sin que por ello cambie el valor de la mediana, basta con no modificar las dos partes del mismo tamaño en que esta divide a la distribución (Batanero y Godino, 2001).

Una idea que puede ser usada para que los niños entre los 12 y 14 años comprendan las medidas de centralidad según Bakker y Gravemeijer (2004) es la de permitir a los estudiantes estimar visualmente la mediana en un diagrama de puntos (buscando un valor para el cual las áreas de la izquierda y la derecha sean las mismas).

Según Bakker y Gravemeijer (2004) las medidas de centralidad indican los valores en torno a los cuales se distribuyen los datos, sin embargo, no basta solo con estas medidas para analizar un conjunto de datos, para ello es necesario hacer uso de otras medidas como las de dispersión, las cuales se ampliarán a continuación.

2.3.2. Dispersión

Batanero y Godino (2001) definen la dispersión como el atributo que proporciona una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central. Todas las medidas de dispersión son mayores o iguales a cero, en el caso en que esta sea cero, indica la ausencia de dispersión. Dentro de las medidas de dispersión se encuentran:

A. Rango

Batanero y Godino (2001), definen el rango de un conjunto de datos como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos, algunas de las características que propone Orellana (2001; citada en Gutiérrez, 2017; p. 16) son:

1. Fácil de obtener
2. Sensible a la presencia de datos atípicos.
3. Ignora la mayoría de los datos
4. En general aumenta, cuando aumenta el tamaño de la muestra (las observaciones atípicas tienen más oportunidad de aparecer en una muestra con muchas observaciones).

Por lo que el rango de un conjunto de datos es el índice de dispersión más básico y muestra el recorrido de variación de los valores de una variable estadística.

B. Rango Intercuartílico

Según Batanero y Godino (2001), a partir de los cuartiles se pueden definir algunos índices de dispersión, es el caso de la diferencia entre el tercer y el primer cuartil, llamado recorrido intercuartílico. Este recorrido contiene el 50% de la población, dejando tanto a la izquierda como a la derecha el 25% de las observaciones.

Aunque el rango intercuartílico puede informar sobre la dispersión de los datos en una distribución, para efectos de esta propuesta no se toma como referente debido a que las tareas diseñadas emplean únicamente representaciones de los datos en gráficos de barras de casos individuales y gráficos de puntos, representaciones que no privilegian el reconocimiento del rango intercuartílico de una distribución, en tanto este puede ser visualizado a través de gráficos de caja y estos no tienen lugar en este trabajo.

C. Varianza y desviación estándar

La varianza es el promedio de las distancias de las observaciones a la media elevadas al cuadrado (Batanero y Godino, 2001). Un inconveniente de la varianza al ser utilizada como medida de dispersión respecto a la media, es que no está expresada en la misma unidad de medida. Por ello suele utilizarse la desviación estándar que es la raíz cuadrada de la varianza,

Siguiendo a Garfield y Ben-Zvi (2008) el término desviación se introduce para representar la distancia de cada valor de los datos a la media. La desviación estándar “es invariante por traslaciones y viene expresada en la misma unidad de medida que la media y los datos” (Batanero y Godino, 2001; p. 3.16). Por su parte, Garfield y Ben-Zvi (2008) sugieren que desarrollar la comprensión de desviación estándar puede ser una parte importante en la comprensión de la media como un punto de equilibrio, y por ende puede ayudar a entender la distribución de un conjunto de datos, sin embargo, puede no ser suficiente.

2.3.3. Forma de una distribución

Cuando se conocen los aspectos de centralidad y de dispersión es conveniente conocer aspectos ligados a la forma de una distribución, para ello es necesario estudiar la simetría y la asimetría de los datos.

A. Simetría y asimetría

Una distribución es simétrica cuando los valores de la variable que están representados gráficamente equidistan a un valor central de la misma variable y tienen frecuencias iguales, también el valor central coincide con la media y la mediana, además si la distribución tiene una sola moda, esta también coincide con las otras medidas de centralidad (Batanero y Godino, 2001), entonces:

$$\bar{x} = \tilde{x} = Mo$$

Una distribución que no tiene simetría se llama asimétrica, y en estas suele ocurrir que:

$$\bar{x} > \tilde{x} > Mo \quad \text{ó} \quad \bar{x} < \tilde{x} < Mo$$

2.4. Concepciones acerca de la noción de distribución

El estudio acerca del razonamiento de los estudiantes sobre los datos desarrollado por Konold, et al. (2014), sugiere un marco para describir a través de niveles, la forma en que las personas entienden los datos, este se centra en cómo las distintas representaciones y el uso de estas resaltan o le quitan énfasis a las distintas características de los datos. Se considera necesario describir estos niveles, ya que es un marco para describir la manera en que cada estudiante percibe un conjunto de datos. Para explicar en qué consisten dichos niveles, se definen a partir de la teoría de Konold, et al. (2014), y se ilustran mediante el siguiente ejemplo: La profesora de matemáticas registra en el tablero la atracción mecánica del parque mundo aventura que más les gustó a sus estudiantes (Ilustración 12).

araña, araña, araña, araña, araña, araña	martillo, martillo, martillo	montaña rusa, montaña rusa, montaña rusa, montaña rusa, montaña rusa.
		

Ilustración 12. Atracción mecánica favorita de 14 estudiantes hipotéticos (Distribución de datos en bruto). Elaboración propia.

2.4.1. Datos vistos como apuntadores

En esta perspectiva, los datos y el evento del que provienen no están claramente diferenciados. Esta manera de ver los datos se percibe usualmente en estudiantes muy jóvenes que han recolectado datos por sí mismos. En general, la distribución es tratada como una imagen que evoca algo sobresaliente del evento. Para el caso del ejemplo, la profesora les pide a sus estudiantes que den una conclusión acerca de los datos registrados en el tablero, a lo que Juan contesta que todos subieron a muchas atracciones mecánicas, lo que hace pensar que Juan ve la distribución como una imagen para recordar su visita al parque mundo aventura.

2.4.2. Datos vistos como valor de cada caso

Esta perspectiva implica asociar un valor con un caso individual. A diferencia de los datos vistos como apuntadores, esta perspectiva reconoce que los datos codifican solo aspectos particulares de un evento. Es decir, el estudiante ve los datos como códigos de aspectos particulares de un evento. Continuando con el ejemplo, la profesora le pregunta a Jaime qué puede decir de los datos registrados en el tablero, a lo que Jaime contesta que la atracción mecánica que más le gustó es el martillo, esto muestra que el estudiante, aunque reconoce que los datos pertenecen a un evento específico no es capaz de concluir acerca de los datos, sino que lo hace desde su experiencia.

2.4.3. Datos vistos como clasificadores

En este nivel, el estudiante da conclusiones del comportamiento de los datos fijándose en aspectos de las frecuencias, por ejemplo, la moda, es decir, brinda

información del conjunto de datos teniendo en cuenta la mayor frecuencia de estos. En el ejemplo, la profesora le pregunta a Valentina qué puede decir de los datos registrados en el tablero, a lo que Valentina contesta que los niños de su curso prefieren la atracción mecánica de la araña, con lo que se observa que la niña se remite a la variable que tiene mayor frecuencia.

2.4.4. La distribución vista como un agregado

En este nivel se atiende a las características emergentes que no son evidentes en ninguno de los valores de datos individuales. Estas características incluyen la forma general de la distribución de frecuencias, qué tan dispersos están los casos y dónde se concentran estos en la distribución. Utilizando el razonamiento agregado, se podría describir el número relativo de casos en varias partes de la distribución, utilizando porcentajes o descriptores cuantitativos como "mayoría". Con atributos numéricos, se podrían resumir las características del grupo con medidas de centro, de propagación o de forma. Las preguntas que se destacan en los estudiantes que aplican esta perspectiva, son si dos o más grupos difieren en alguna medida agregada o si dos atributos están relacionados entre sí.

Es decir, en este nivel, el estudiante da conclusiones atendiendo a características que no son evidentes en ninguno de los valores de los datos individuales, ya que hace uso de aspectos como la centralidad (media, mediana y moda), densidad (frecuencia relativa, mayoría de datos y cuartiles), dispersión (desviación estándar y rango) y asimetría (posición de la mayoría de los datos) para hablar acerca del conjunto de datos. Para el caso del ejemplo, la profesora le pregunta a Milena qué puede decir acerca de los datos recolectados, a lo que contesta que la mayoría de los niños no prefieren la atracción mecánica de la araña, con lo que se evidencia que Milena agrupa los casos para dar conclusiones que no son evidentes.

La Tabla 4 sintetiza las concepciones acerca de la noción de distribución desarrolladas por Konold, et al. (2014), ilustradas con el ejemplo de las atracciones mecánicas del parque mundo aventura.

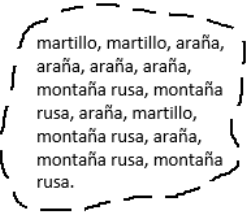
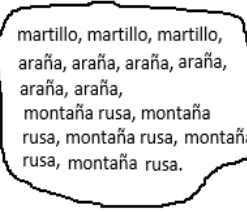
Vista de datos	Unidad perceptual	Estructura de los datos	Observación del estudiante
Como apuntadores	¿?		Todos subimos a muchas atracciones mecánicas
Como valor de cada caso	martillo		La atracción mecánica que le gusta a Jaime es el martillo
Como clasificadores	araña, araña, araña, araña, araña, araña		La araña es la atracción favorita por la mayoría de los niños.
Como agregado	araña araña araña araña araña araña martillo martillo martillo montaña rusa montaña rusa montaña rusa montaña rusa	martillo, martillo, martillo araña, araña, araña, araña, araña, araña montaña rusa, montaña rusa, montaña rusa, montaña rusa, montaña rusa	La mayoría de los estudiantes no prefieren la atracción mecánica araña.

Tabla 4. Representación de las perspectivas en que los estudiantes pueden entender la información de la Ilustración 12. Elaboración propia.

Los niveles descritos tienen importancia en este trabajo, ya que como lo menciona Garfield y Ben-Zvi (2008), un objetivo central en la formación en educación en estadística es ayudar a los estudiantes a ver una distribución como un agregado, y es importante prestar atención a los puntos de vista iniciales de los estudiantes para ayudarlos a desarrollar gradualmente esa visión, es decir pasar de un nivel a otro.

Considerando los cuatro aspectos de concepciones de la distribución de Konold, et al. (2014), se puede caracterizar las concepciones acerca de la noción de distribución como se muestra en la Tabla 5.

Concepciones acerca de la noción de distribución
Ver los datos como valores individuales de cada caso
Ver los datos como apunadores
Ver los datos como clasificadores
Ver los datos como un agregado

Tabla 5. Concepciones acerca de la noción de distribución. Fuente: Konold, Higgins, Russell y Khalil (2014)

2.5. Herramientas tecnológicas para desarrollar la noción de distribución

Los artefactos que han primado en la Educación Matemática por mucho tiempo han sido el lápiz y el papel. Por tal razón, lo que es posible hacer con dicha tecnología es lo que ha sido considerado como esencial. Sin embargo, la aparición de las tecnologías digitales ha obligado a los profesores de matemáticas a incorporar dichas herramientas en sus clases, no solo por su auge, sino porque hacer caso omiso de las nuevas tecnologías en la enseñanza sería crear una barrera entre la vida diaria de los estudiantes y las experiencias que tienen en la escuela (MEN, 1999). Además, las nuevas tecnologías no solo han hecho más fáciles los cálculos y la elaboración de gráficas, sino que han cambiado la naturaleza misma de los problemas que interesan a las matemáticas y los métodos que se usan para investigarlas (MEN, 1999).

En ese sentido, cabe preguntarse en qué debería enfocarse la Educación Matemática hoy en día, ya que las tecnologías digitales hacen lo que los estudiantes solían hacer (cálculos numéricos y graficación). En busca de dar respuesta a este interrogante, Noss y Hoyles (1996) construyen un fundamento conceptual que articula el papel de las tecnologías digitales con asuntos que tienen que ver con la educación matemática, ese se denomina *abstracción situada*.

La abstracción situada no sólo permite profundizar en la influencia que las tecnologías digitales tienen sobre la construcción de las ideas, sino que destaca el papel de estas para favorecer procesos de exploración que apoyan la expresión de ideas y su posterior organización en redes conceptuales. En el caso del desarrollo de la noción de distribución, la abstracción situada es evidente cuando los estudiantes desarrollan concepciones y exhiben el uso de características de la

distribución de manera informal, de tal manera que les permite entender un conjunto de datos como un todo mediante el tránsito entre las tareas propuestas.

Con el auge de las tecnologías digitales y su incorporación en las clases de matemáticas, la noción de abstracción situada ha cobrado interés, porque señala la influencia que dichas tecnologías ejercen en los significados matemáticos que construyen los estudiantes y que son expresados con ideas informales. Así, por ejemplo, cuando se le presenta a un estudiante un gráfico de barras de casos individuales de un conjunto de datos en un software estadístico con funciones de arrastre que le permiten organizar las barras según su tamaño, el estudiante identifica valores atípicos, aglomeraciones y hace agrupación de datos.

Ahora bien, según Noss y Hoyles (1996) la abstracción que se logra mediante las tecnologías digitales es situada y el medio funciona como un domino de abstracción. Según Moreno y Waldegg (2002), estos son recursos que van formando la actividad matemática de los estudiantes, pues les permiten explorar ideas en ambientes particulares concretos y manipulables que “contienen la semilla de lo general, lo abstracto y lo virtual” (Moreno y Waldegg, 2002, p. 64).

2.5.1. Funciones de las tecnologías digitales

Moreno y Waldegg (2002), indican que las funciones que brindan las tecnologías digitales para acercar a los estudiantes al conocimiento matemático son:

1. Brindar representaciones ejecutables. Este tipo de representaciones simulan acciones primitivas de la cognición humana, como el procesamiento de la información. Por ejemplo, a partir de una tabla de datos, un software provee una gráfica que representa el conjunto de datos ejecutando un proceso sobre la tabla de datos. Este hecho permite que el humano se ocupe de otros asuntos como la interpretación.
2. Ofrecer representaciones simultáneas. Este tipo de representaciones, permiten visualizar simultáneamente distintas representaciones numéricas, graficas, algebraicas, etc., con lo que se favorece el establecimiento de relaciones entre ellas. Por ejemplo, a partir de una tabla de datos, el programa informático representa en gráficos de puntos,

de barras e histogramas el mismo conjunto de datos, dando lugar a razonamientos de relaciones entre las representaciones gráficas.

3. Proporcionar representaciones dinámicas. Este tipo de representaciones son susceptibles de variar ante los ojos del usuario, exhibiendo los atributos invariantes que caracterizan a los objetos representados. Por ejemplo, es posible observar la distribución de un conjunto de datos cuando cambia la dispersión de los datos y la media es la misma.
4. Ofrecer representaciones interactivas. Este tipo de representaciones son, en las que es posible intervenir de formas parecidas a como se interviene sobre objetos materiales. Por ejemplo, las barras de un gráfico de barras de datos individuales se pueden “agarrar”, “arrastrar”, “medir”, etc.

En el diseño del Applet se procura atender a estas funciones.

2.5.2. Usos de las tecnologías digitales en la educación estadística

En particular, la tecnología digital tiene tres usos importantes en la educación estadística, según Garfield y Ben-Zvi (2008):

1. Permite visualizar la transición de gráficos de casos a gráficos de puntos y de gráficos de puntos a histogramas, todos basados en el mismo conjunto de datos.
2. Permite ilustrar las formas en que diferentes representaciones graficas de los datos revelan diferentes aspectos de estos, pues al tener de manera flexible múltiples representaciones en la pantalla al mismo tiempo, permite a los estudiantes identificar dónde se encuentran uno o más casos en un gráfico.
3. Permite cambiar de manera flexible un gráfico (por ejemplo, hacer que los intervalos sean más anchos o estrechos para los histogramas) para que un patrón o forma sea más clara, o para agregar y eliminar valores para ver el efecto en el gráfico resultante.

Atendiendo a lo anterior, la presente propuesta incluye el diseño de un Applet en GeoGebra que considera los atributos señalados previamente por Garfield y Ben-Zvi (2008) pues este fue diseñado de forma tal que los estudiantes pudieran manipular representaciones de una o más distribuciones, a su vez mostraba varios gráficos interconectados del mismo conjunto de datos en una pantalla (un cambio en un gráfico, se muestra en los demás), las tareas se encontraban atravesadas por preguntas orientadoras que guiaban las exploraciones, tales como ¿Qué causa las

aglomeraciones o ausencia de ellas? ¿Hay valores atípicos o errores en la recolección de los datos? Se espera de esta forma, que el Applet diseñado desempeñe un papel significativo en el desarrollo de la noción de distribución, al proporcionar un acceso a múltiples representaciones y posibilite diversas oportunidades para manipular y comparar simultáneamente las representaciones del mismo conjunto de datos.

Por otro lado, es necesario examinar los procesos y habilidades cognitivas que se pueden favorecer a través de las tecnologías digitales. Al respecto el MEN (1999) considera la visualización, la capacidad investigativa, el aprendizaje de la retroalimentación, la observación de patrones y el establecimiento de conexiones como procesos que se promueven a través del uso de las tecnologías digitales en el aula de matemáticas.

2.5.3. Procesos y habilidades cognitivas que favorecen el uso de tecnologías digitales (MEN, 1999)

A. La visualización

El software empleado en el Applet especialmente para la graficación (GeoGebra) tiene muchas ventajas sobre el tablero o el lápiz y el papel, ya que desarrolla gráficas a gran velocidad y precisión. El efecto de la visualización dinámica e interactiva sobre la formación de imágenes conceptuales y la transición de representaciones gráficas de conjuntos de datos es innegable.

B. La capacidad investigativa

Las herramientas tecnológicas proporcionan a los estudiantes un ambiente que promueve actitudes de investigación y exploración, pues facilita el uso de la matemática para transmitir significados, explicar o ilustrar fenómenos y predecir resultados. La posibilidad de realizar múltiples variantes de un ejercicio da pie a la formulación de nuevas y mejores preguntas cada vez.

C. El Aprendizaje de la realimentación

Las herramientas como las calculadoras y el computador son artefactos valiosos para realizar chequeos rápidos y oportunos del trabajo, pues proporcionan la posibilidad de autocontrol del trabajo realizado y permiten verificar un resultado todas las veces que se considere necesario. Además, dan la posibilidad de reflexionar sobre los resultados obtenidos al indagar acerca de la pertinencia o no, de un resultado y estudiar los posibles errores producidos al digitar la información.

D. La Observación de Patrones

La velocidad de los computadores permite a los estudiantes estudiar muchos ejemplos cuando exploran problemas matemáticos. Da la posibilidad de observar patrones y de elaborar y justificar generalizaciones, a partir de por ejemplo la construcción rápida de diversos gráficos estadísticos.

E. El Establecimiento de Conexiones

El computador hace posible que fórmulas, tablas de datos y gráficas se enlacen rápidamente. Cambiar una representación y ver cambios en las otras, ayuda a los estudiantes a comprender las relaciones entre ellas. Por ejemplo, una hoja de cálculo se puede usar para generar un conjunto de datos que se puede graficar en distintas representaciones (gráfico de valores individuales, gráfico de puntos, etc.). Según el MEN (1999) trabajar a través de un software que permita pasar sin esfuerzos entre estas representaciones potencia el desarrollo conceptual. Sin embargo, Ben-Zvi y Arcavi (2001; citados en Garfield y Ben-Zvi, 2008), sugieren que la interpretación y la descripción verbal de los gráficos pueden ser difíciles para los estudiantes cuando usan softwares educativos. Por lo que se hace necesario que al momento de generar actividades con tecnología digital estas vayan acompañadas de preguntas orientadoras.

3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos que fueron tenidos en cuenta en esta propuesta, en particular, se expone el enfoque metodológico, la aproximación investigativa, la estrategia de indagación, las diferentes fases de la estrategia, el escenario y los participantes que se han elegido para caracterizar la evolución de los diversos razonamientos y concepciones de los estudiantes cuando comparan distribuciones de datos a partir del trabajo con dos tareas mediada por tecnología digital, dicha caracterización basada en el marco teórico constituido.

3.1. Perspectiva investigativa

El enfoque que se sigue en este trabajo es de tipo fenomenológico, ya que se pretende comprender las experiencias y los factores que inciden en el razonamiento de los estudiantes cuando comparan distribuciones de datos. El interés se centra en describir y comprender los aspectos relevantes que se presentan a medida que se dan las diferentes interacciones con los estudiantes del grado séptimo cuando desarrollan tareas mediadas con tecnología digital. En consonancia, este enfoque sigue una aproximación investigativa interpretativa, dado que busca rastrear los diversos razonamientos que los estudiantes puedan construir alrededor del objeto matemático distribución. Se asume que el razonamiento está inmerso en las experiencias de los estudiantes y se ve a través de las acciones que son interpretadas mediante las percepciones propias del investigador.

A continuación, se describe la estrategia investigativa empleada para el desarrollo del trabajo, que dará cuenta de las actividades seguidas para dar respuesta a la pregunta problema. Primero, se explica la pertinencia de la estrategia investigativa escogida, posteriormente se presentan las fases de la estrategia, luego se describe el contexto experimental (escenario y participantes de la investigación) y finalmente se describen las fases de la estrategia metodológica.

3.2. Estrategia de indagación

Teniendo en cuenta que el interés de esta propuesta es promover el razonamiento de los estudiantes sobre la noción de distribución de manera informal cuando comparan conjuntos de datos y observar su evolución, se optó por la estrategia investigativa entrevista basada en tareas, ya que permite observar, describir e interpretar, de forma sistemática, el proceso de resolución de tareas que lleva a cabo una o varias personas; y aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos. se diseñó un Applet en GeoGebra que media las tareas.

La estrategia descrita con anterioridad incluye algunas fases para su desarrollo. La fundamentación conceptual sirvió de mecanismo de control parcial para la toma de decisiones en cuanto a la estructura, contenido y complejidad del Applet y las tareas, así como para definir las tareas alternativas, preguntas o pistas que dio la entrevistadora a los estudiantes. El escenario, los recursos, la selección de los estudiantes, el Applet, las tareas y el tiempo para aplicarlas no se dejaron al azar; estos se decidieron cuidadosamente en la fase de preparación de la entrevista teniendo en cuenta fundamentalmente el interés de estudio.

Antes de la etapa de implementación de la entrevista se realizaron pruebas piloto (Anexo C), revisión de expertos de estas (Anexo D), y el entrenamiento de la entrevistadora para la toma de registro de información e interacción con los estudiantes; lo anterior se hizo para evitar al máximo contratiempos e inconvenientes debido a la falta de preparación.

Durante la ejecución de las tareas, la entrevistadora interactuó con los estudiantes tratando que ellos comunicaran de manera clara y precisa sus razonamientos respecto a la resolución de las tareas y empleando al máximo el recurso tecnológico para tal fin. Su intervención fue mínima y no anticipada para evitar desviar el recorrido seguido por los estudiantes.

Después de planteadas las tareas, la entrevistadora dejó un tiempo necesario y suficiente para que los estudiantes pensaran cómo abordarlas, en los casos en que

los estudiantes no comunicaron lo que hacían o el proceso que se quería observar no fluyó o se desvió, la entrevistadora intervino con preguntas y pistas que los hizo expresar lo que estaban haciendo. La finalidad de esta fase fue lograr tener registros (escritos, en videos o en audios donde se registraron las interacciones entre y con los estudiantes) lo más completos posible, para que la investigadora pudiera interpretar e inferir patrones de razonamiento no necesariamente comunes.

Una vez recolectados los registros, en la fase de análisis de la información la investigadora centró su atención en el análisis de la entrevista, definiendo sus interpretaciones a la luz del marco de referencia, para ello se codificó la información en búsqueda de elementos que permitieran una mejor comprensión del razonamiento de los estudiantes participantes, para posteriormente en la fase de producción de resultados, describir los pasos que dio lugar a los mismos.

3.2.1. Contexto experimental

El Colegio elegido para el desarrollo de este trabajo es la Institución Educativa Kimy Pernía Domicó IED, seleccionada, porque la investigadora labora allí y cuenta con acceso libre a este para propósitos pedagógicos. El Colegio se encuentra ubicado en la localidad séptima (Bosa) de la ciudad de Bogotá, es un establecimiento de carácter oficial, de calendario A y cuenta con una población de 3350 estudiantes de los grados transición a undécimo, tiene como filosofía educativa la labor docente orientada hacia la formación en valores, a partir de la diferencia cultural y el progreso social (Kimy Pernía Domicó IED, 2017).

Al observar el plan de estudios (Anexo B), se presume que los estudiantes con los cuales se implementa la propuesta contaban con un proceso de instrucción previo de estadística, pues en el grado anterior se dedica un periodo de 13 semanas al componente de formación estadística, en donde se abarca el análisis de datos en torno a las medidas de tendencia central y la interpretación de tablas y gráficos estadísticos.

Los participantes informantes (una niña y un niño) de esta propuesta son estudiantes que en el 2019 cursaban el grado 703 en la jornada mañana. La elección de los estudiantes se hizo aleatoriamente entre los estudiantes del curso en mención que mostraron interés por participar en el proyecto. Las edades de dichos participantes están entre los 12 y 13 años. Por otro lado, los estudiantes demuestran interés por las clases innovadoras en donde se emplean herramientas tecnológicas, situaciones problemas del contexto, trabajo en equipo, actividades lúdicas en donde se genere la sana competencia ya sea de forma individual o grupal.

3.2.2. Desarrollo de las fases de la estrategia metodológica

A. Fase 1: Marco conceptual

Este apartado tiene por objetivo ubicar los elementos que han sido tomados como puntos de referencia para el diseño del Applet y de las tareas.

Según Batanero (2002), el objetivo principal de la Educación Estadística es proporcionar una cultura estadística. Es decir, enseñar a comprender las ideas básicas sobre los gráficos, comprender qué es lo que las medidas de posición central indican sobre el conjunto de datos y comparar distintas representaciones de datos. Lo anterior según Arteaga (2009) se relaciona con el concepto de distribución de frecuencias, concepto complejo, que se refiere al agregado (población o muestra) y no a los datos particulares. Ahora bien, para Bakker y Gravemeijer (2004) la noción de distribución se asocia con las características de centralidad, dispersión, densidad y asimetría de las distribuciones. De igual manera para Konold, et al. (2014) la noción de distribución está relacionada con las concepciones en que las personas conciben los datos, ya sea como apuntadores, valor de cada caso, clasificadores o como agregados. Las características y concepciones de la noción de distribución mencionadas se ampliaron con anterioridad en el capítulo 2 acerca del marco de referencia.

Teniendo en cuenta el objetivo del presente estudio, es necesario tener claridad sobre el concepto de razonamiento estadístico, ya que es el proceso que se quiere observar en el desarrollo de las tareas por los estudiantes.

Según Riascos (2014) el razonamiento estadístico es “el proceso que permite a los seres humanos extraer conclusiones a partir de premisas o hechos, evidenciados en datos, acaecidos previamente, ayudados por las técnicas y teorías estadísticas disponibles para las personas en el contexto de su conocimiento y utilizados en el marco de la situación” (p. 17). En otras palabras, el razonamiento estadístico, es el proceso que permite adquirir algo nuevo a partir de algo ya conocido.

B. Fase 2: Preparación de la entrevista

Inicialmente se realizó una prueba diagnóstica (Anexo A) en la que se evidencia que los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kimy Pernía Domicó IED, conciben los datos como apuntadores (Konold, et al., 2014), pues al momento de tomar decisiones sobre un conjunto de datos tratan la distribución como una imagen que les recuerda lo que es sobresaliente del evento y no sobre el problema que representan los datos. Por lo que se formula la hipótesis que los estudiantes haciendo uso de una herramienta digital diseñada en GeoGebra, pueden exhibir la evolución de sus diversos razonamientos y concepciones de la noción acerca de la distribución cuando comparan distribuciones de conjuntos de datos.

Posteriormente, se adaptó parte de la secuencia de tareas propuesta Bakker y Gravemeijer (2004) y por Garfield y Ben-Zvi (2008) en las cuales se trabaja con distribuciones empíricas representadas en el Applet Minitool y TinkerPlots (softwares educativos para exploración dinámica de datos) respectivamente. Esta adaptación se hizo mediante la construcción de un Applet (Anexo E) con características similares en GeoGebra, ya que es un software de acceso libre que permite programar Applets dinámicos fáciles de manipular.

La entrevista que se propuso se nutrió de la hipótesis central de aprendizaje, en este sentido, las tareas (Anexo F) que se usaron para exhibir el razonamiento de

los estudiantes en la comparación de distribuciones consideraron las características y concepciones asociadas a la noción de distribución señaladas anteriormente mediante la exploración intuitiva e informal, inicialmente de dos conjuntos de datos y posteriormente de cuatro conjuntos de datos.

Las tareas propuestas en torno al razonamiento en la comparación de distribuciones contienen actividades, que juntas condujeron a que los estudiantes exploraran conjuntos de datos que implican considerar características asociadas a los aspectos de centralidad, dispersión, densidad y asimetría a través de diversas representaciones gráficas para comprender y comparar los datos.

La entrevista se realizó en dos sesiones de clase de 90 minutos cada una, se seleccionó un lugar adecuado diferente al salón de clases para su desarrollo, y solo estuvieron presentes los entrevistados y la investigadora. A continuación, se presentan las tareas y lo que se esperaba de cada una de las actividades que las conforman.

El Applet está dividido en nueve hojas (Anexo E), en la primera se muestran las notas de dos grupos de estudiantes en un examen de matemáticas en dos distintas representaciones (grafico de barras de casos individuales y gráficos de puntos), con dicha hoja se plantea la tarea 1. En las ocho hojas restantes, se muestran los tiempos en que tardan corriendo en dar una vuelta al Colegio tanto de niños como niñas de cuatro grupos de estudiantes en dos representaciones graficas diferentes (grafico de barras de casos individuales y gráficos de puntos). En dichas hojas se plantea la tarea 2.

Tarea 1:

Con la tarea 1 se esperaba que los estudiantes, además de ver los datos como valores que conforman un conjunto de datos con características comunes, logaran comparar distribuciones mediante la identificación, relación y comparación de atributos tales como la centralidad, la dispersión, la densidad y la asimetría de conjuntos de datos.

Actividad 1:

La Hoja 1, muestra dos distribuciones haciendo uso de gráficos de barras que presentan los valores de cada caso (Ilustración 13), los conjuntos de datos considerados ilustran las notas obtenidas por los estudiantes de dos cursos (hipotéticos) en un mismo examen de matemáticas. Con la visualización de ambas distribuciones a través del Applet se esperaba que los estudiantes comprendieran lo que representan cada una de las barras de los casos individuales de un conjunto de datos, para esto, los estudiantes debían reconocer que el largo de la barra corresponde a un valor de una variable en particular (en este caso el puntaje obtenido por cada estudiante), y que cada barra representa un caso que tiene ese valor particular (se muestra el puntaje del examen). Los estudiantes debían aprovechar lo interactivo del Applet, ya que este les dejaba arrastrar las barras a la posición que quisieran. Esta acción les permitiría a los estudiantes ver atributos que no eran posible con la representación estática de los datos, como ver valores atípicos, datos faltantes, frecuencia modal, etc.

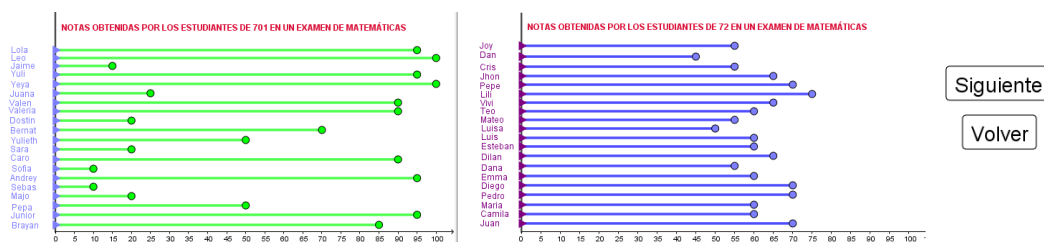


Ilustración 13. "Hoja 1". Gráficos de barras de casos en GeoGebra de las notas de dos cursos en un examen de matemáticas. Elaboración propia

A continuación, se describen las preguntas previstas para la entrevista y los propósitos de estas:

1. ¿Qué información muestran los gráficos? ¿Qué pueden decir sobre estos datos? (Estas preguntas se mantendrán a lo largo de las siguientes actividades). Con estas pregunta, se esperaba que los estudiantes mencionaran qué datos muestran los gráficos (puntaje obtenido en un examen por los estudiantes de los cursos 701 y 702), que señalaran casos puntuales, como por ejemplo que en 701 Sara obtuvo una nota de 20, que

Dilan del curso 702 obtuvo una nota de 65; a su vez que indicaran qué estudiantes de cada curso obtuvieron mayor o menor nota en el examen y qué estudiante obtuvo mayor o menor nota en general en ambos cursos.

2. Para las olimpiadas matemáticas de Bogotá, la profesora debe elegir de entre los dos grupos, el curso que representará al colegio en dicho evento. ¿Cuál curso consideran debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas? ¿Por qué? Expliquen los aspectos que tuvieron en cuenta para elegir el curso que debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas. Con esta pregunta se pretendía que los estudiantes eligieran el grupo que tuvo un mejor desempeño en el examen y argumentaran su elección usando atributos de la dispersión de los datos (v.g. el mejor curso es 702 porque los estudiantes obtuvieron notas muy parecidas) o atributos de la densidad (v.g. el mejor curso es 701 por que son los que tienen notas más altas).
3. Para dar respuesta a la pregunta anterior, pueden considerar el definir una nota representativa, es decir una nota que represente al curso 701 y una nota que represente al curso 702. Expliquen los aspectos que tuvieron en cuenta para elegir la nota en cada curso. Con esta sugerencia se esperaba que los estudiantes estimaran un valor representativo e hicieran aproximaciones del promedio, mediana o moda.

Algunas preguntas contingentes que reorientaron las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación fueron:

(preguntas 1 y 2):

1. Digan que pasa con las notas para al menos tres estudiantes de cada curso.
2. ¿Cuál estudiante obtuvo la mayor nota en el curso 701?
3. ¿Cuál estudiante obtuvo la mayor nota en el curso 702?
4. ¿Cuál estudiante obtuvo la menor nota en el examen en el curso 701?
5. ¿Cuál estudiante obtuvo la menor nota en el examen en el curso 702?

6. ¿Cuántos estudiantes del curso 701 obtuvieron una nota de 10 en el examen de matemáticas?
7. ¿Cuántos estudiantes del curso 701 obtuvieron una nota de 10 en el examen de matemáticas?

(pregunta 3)

Si dicen aspectos de la moda, simetría, etc. (12 a 14) de lo contrario a partir de la 8.

8. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota de 10 en el curso 702?
9. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota de 20 en el curso 701?
10. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota de 20 en el curso 702?
11. ¿Qué proceso están haciendo para responder mis preguntas?
12. consideran que, así como está el gráfico ¿les permite realizar ese proceso rápidamente?
13. ¿hay alguna manera en que este proceso se haga de manera más rápida?
14. Y si organizan las notas de otra manera.
15. ¿De qué manera decidieron organizar las notas? ¿Por qué las organizaron de esa manera?
16. Ahora sí, respondan a la pregunta: Si la profesora de matemáticas necesita decidir cuál de los dos cursos debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas ¿Cuál curso debe elegir? ¿Por qué?

Actividad 2.

Otro aspecto de la distribución es la forma, esta puede caracterizarse a partir de la visualización de gráficos de puntos apilados. Para entender qué representan los puntos en un diagrama de puntos, los estudiantes deben reconocer que cada caso está representado por un punto en el diagrama. Con este fin, se les presentó a los estudiantes dos gráficos de puntos correspondientes a los puntajes obtenidos por los estudiantes del curso 701 y del curso 702 en un examen de matemáticas. Para esto, el Applet mostró un botón de “Siguiente” para que se visualice la representación de los puntajes obtenidos por los estudiantes de dos cursos en

diagramas de puntos (Ilustración 14). Esta acción favorece el establecimiento de relaciones entre la representación de los datos en casos individuales y gráficos de puntos dando lugar a razonamientos de relaciones entre las representaciones gráficas.

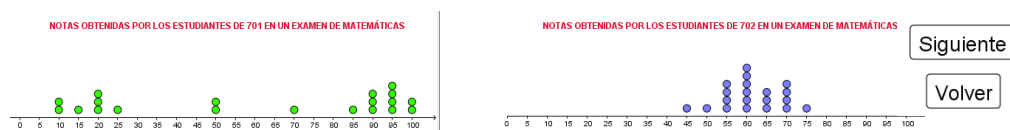


Ilustración 14. “Hoja 1”. Representación en gráficos de puntos en GeoGebra de las notas obtenidas por dos cursos en un examen de matemáticas.

De acuerdo con las representaciones gráficas mostradas en la ventana siguiente de la “Hoja 1” del Applet (Ilustración 14), se les pidió a los estudiantes dar respuesta a la siguiente pregunta:

1. En la actividad anterior dijeron que la nota que debe representar a 701 es: _____, y la que debe representar a 702 es: _____. ¿Creen que estuvo bien su elección? ¿por qué? Con esta pregunta, se esperaba que los estudiantes además de mencionar qué datos muestran los gráficos, identificaran las características comunes de los datos, por ejemplo, las frecuencias mayores a 1, valores faltantes o frecuencias nulas y valores infrecuentes (atípicos) de las distribuciones. También que describieran las características de la dispersión, del centro, de la densidad y de la simetría empleando lenguaje usual como por ejemplo que los puntajes de los estudiantes del curso 701 están “esparcidos” mientras que los del curso 702 no, que los puntajes obtenidos por los estudiantes del curso 702 están alrededor de 60, mientras que en el curso 701 no se puede distinguir alrededor de qué puntaje están los datos, que los puntajes de los estudiantes del curso 702 están concentrados en una sola aglomeración (v.g. Están concentrados en un solo “montón”), mientras que en el curso 701 los datos se encuentran más dispersos (v.g. están concentrados en 2 montoncitos), que la mayoría de los estudiantes del curso 701 obtuvieron un puntaje de 95 en el examen de matemáticas, que la mayoría de los estudiantes del curso 702 obtuvieron un puntaje de 60 en el examen de matemáticas, que ningún

estudiante del curso 702 obtuvo un puntaje de 10, 20, 35, etc., y que solo un estudiante del curso 701 obtuvo un puntaje de 50 en el examen.

2. Pulsen nuevamente el botón “siguiente” de la “Hoja 1” (Ilustración 15) para dar respuesta a la siguiente situación:

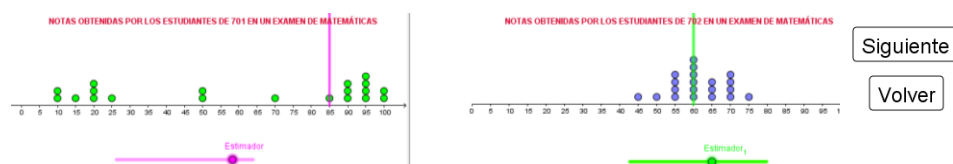


Ilustración 15. “Hoja 1”. Estimator de puntaje representativo de cada curso en GeoGebra.
Elaboración propia.

Si la profesora de matemáticas necesita definir una calificación que represente al curso 701 y una calificación que represente al curso 702. ¿Dónde dejarían el estimador? ¿Por qué? Expliquen los aspectos que tuvieron en cuenta para elegir la nota que representa a cada curso.

Antes de dar el tiempo a los estudiantes para que dieran respuesta a la pregunta, se les explicó lo que muestra la ventana y para qué sirve el estimador:

La ventana siguiente de la Hoja 1, permitió visualizar al igual que en la pregunta anterior los gráficos de puntos para el mismo conjunto de datos trabajados en la actividad 1 y también permitió visualizar un deslizador que recibió el nombre de “estimador”, el cual les permitió a los estudiante arrastrar la línea verde o morada para mostrar el puntaje que representa a cada curso por separado.

Con esta pregunta se esperaba que los estudiantes describieran o reiteraran aspectos sobre las distribuciones. El uso del estimador los ayudó visualmente a exhibir dichos atributos.

Además, con esta pregunta también se esperaba que los estudiantes usaran características de los datos que pudieran sugerir los niveles en la forma en que los estudiantes conciben las distribuciones (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Los estudiantes podrían haber mencionado que el puntaje que mejor representa al curso 702 es 60 y el puntaje que mejor representa al curso 701 es 95, porque es el

dato que más se repite en cada curso y por ende que el curso que debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas es el curso 701. Una respuesta de este tipo ubicaría a los estudiantes en el nivel de “datos como clasificadores”, porque los estudiantes caracterizan las distribuciones haciendo uso de la frecuencia de los datos, es decir dan conclusiones sobre el conjunto de datos fijándose en el número de veces que aparece un valor de la variable en particular.

Los estudiantes también podrían haber respondido que el puntaje que mejor representa al curso 701 es 65 y el puntaje que mejor representa al curso 702 es 60 porque es el dato que divide en dos partes iguales a cada conjunto de datos y por ende que el curso que debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas es el curso 701. Una respuesta de este tipo ubicaría a los estudiantes en el nivel de “distribución como un agregado”, porque dan conclusiones atendiendo a características que no son evidentes en ninguno de los valores de los datos individuales, es decir hacen uso de aspectos como la centralidad (media, mediana y rango medio), densidad (frecuencia relativa, mayoría de datos y cuartiles) y asimetría (posición de la mayoría de los datos) para hablar acerca del conjunto de datos.

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

1. ¿Creen que las notas bajas afectan las altas en ambos cursos? ¿Cuál debe ser la nota que represente a cada curso?
2. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron puntajes más parecidos?
3. ¿En cuál grafico están más esparcidos los datos? Explica.

Tarea 2:

Con esta tarea se pretende consolidar la caracterización de los atributos de las distribuciones reconocidas por los estudiantes o ampliarlas, y que se logre refinar las concepciones acerca de la distribución de datos trabajados en la tarea 1.

Actividad 1:

Bakker y Gravemeijer (2004), sugieren que si los estudiantes inventan sus propios datos y gráficos, los profesores e investigadores pueden evaluar mejor lo que los estudiantes realmente entienden. Atendiendo a lo anterior, se plantea la siguiente actividad:

1. Lean atentamente la siguiente situación:

Para la competencia “Supérate Intercolegiados” de atletismo en la modalidad masculina prejuvenil, el profesor de educación física del Colegio Kimy Pernía Domico, debe seleccionar uno de los cursos de grado séptimo para que los estudiantes representen al Colegio en estas competencias.

2. Supongamos que en el curso 702 hay 18 estudiantes hombres, ahora consideren posibles tiempos (en segundos) en los que puedan demorarse en dar una vuelta al colegio corriendo. Escríbanlos a continuación:

Tiempo (en segundos) que tardan los hombres del curso 702 en dar una vuelta al colegio.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7	Estudiante 8	Estudiante 9
Estudiante 10	Estudiante 11	Estudiante 12	Estudiante 13	Estudiante 14	Estudiante 15	Estudiante 16	Estudiante 17	Estudiante 18

Abran el archivo “Hoja 2” que se encuentra en la barra de herramientas del computador. En ella encontraran una vista gráfica y una hoja de cálculo (Ilustración 16). En este momento utilizarán sólo la hoja de cálculo. Digiten los tiempos de los 18 estudiantes.



Ilustración 16. Vista gráfica y hoja de cálculo.

- Una vez hayan digitado los tiempos, observen el gráfico resultante (Ilustración 17). De acuerdo con este gráfico sigan las indicaciones y den respuesta a las preguntas.

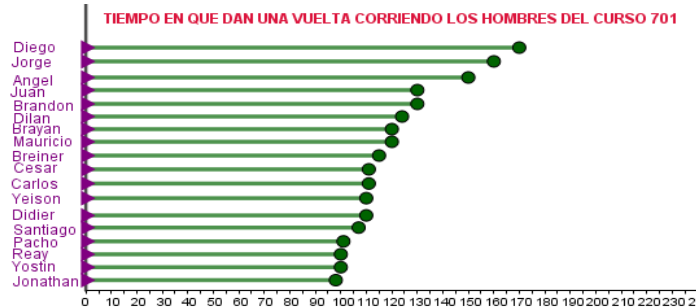


Ilustración 17. “Hoja 2”. Gráficos de barras de casos en GeoGebra del tiempo en que tardan los hombres en dar una vuelta al colegio. Elaboración propia

- Organicen los datos. ¿De qué manera decidieron organizar los tiempos de los estudiantes? ¿Por qué los organizaron de esa manera?
- Abran los archivos “Hoja 3”; “Hoja 4” y “Hoja 5” que se encuentran en la barra de herramientas del computador, en dichas hojas encontraran las representaciones graficas de los tiempos en que tardan en dar una vuelta al colegio otros tres grupos de estudiantes. Observen los gráficos que se muestran en estas “Hojas” (Ilustración 18). Las representaciones mostradas en las Hojas 3, 4 y 5 se hicieron con datos intencionados para mostrar que aunque los conjuntos de datos tengan media igual la distribución de los datos no es la misma si la dispersión es diferente.

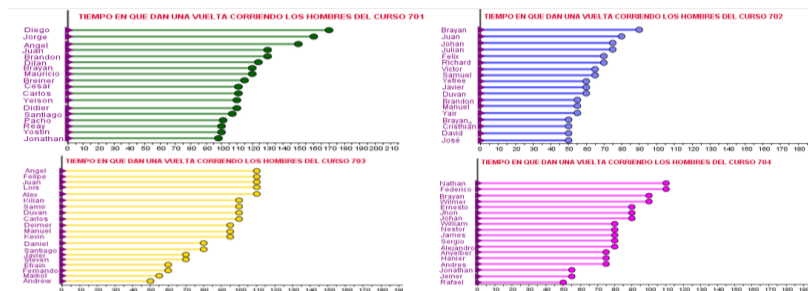


Ilustración 18. Gráficos de barras de datos individuales organizados del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo. Elaboración propia.

¿Qué pueden decir de los tiempos obtenidos por los estudiantes en esos cursos?

6. ¿Qué curso tiene mejores tiempos? ¿Por qué?

En cada “Hoja”, encontraran un botón llamado “siguiente”.

Cuando lo pulsen, encontraran los gráficos que muestran los tiempos en que tardaron los estudiantes de cada curso en dar una vuelta al colegio en una representación gráfica diferente (Ilustración 19)

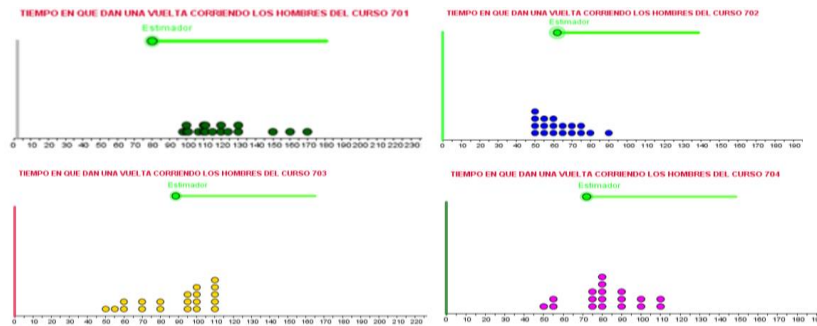


Ilustración 19. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo. Elaboración propia.

7. Respondan lo siguiente: El profesor de educación física necesita decidir a qué curso llevar a la competencia de atletismo. Ayúdalo a decidir a qué curso debe llevar. Para esto, definan un tiempo que represente a los grupos de estudiantes por separado. Usen el estimador en cada “Hoja” para definir un tiempo que represente a los grupos de estudiantes por separado. ¿Dónde dejarían el estimador?

a. Tiempo para el curso 701: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?

b. Tiempo para el curso 702: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?

c. Tiempo para el curso 703: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?

d. Tiempo para el curso 704: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?

8. ¿Qué curso debe llevar el profesor a la competencia de atletismo? ¿Por qué?

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación.

(pregunta 8):

1. ¿Creen que los tiempos altos afectan los bajos en los cursos? ¿Cuál debe ser el tiempo que represente a cada curso?
2. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron tiempos más parecidos?
3. ¿En cuál grafico están más esparcidos los datos? Explica.
4. ¿Dónde vas a dejar el estimador? ¿Por qué?
5. ¿Cuál curso obtuvo mejores resultados en la prueba de atletismo? ¿por qué?

Actividad 2:

1. Ahora el profesor necesita de su ayuda para determinar qué curso de grado séptimo debe ir a los Intercolegiados en la modalidad femenina. Abran las Hojas 6, 7, 8 y 9, organícelas en la pantalla del computador de manera tal que puedan observar todos los gráficos simultáneamente (Ilustración 20). Con ayuda de los estimadores definan un tiempo que represente a los grupos de estudiantes por separado. ¿Dónde dejarían el estimador?

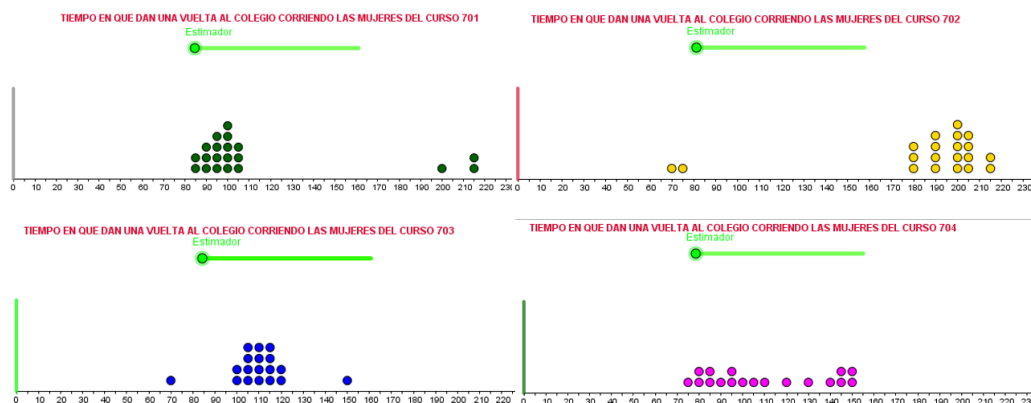


Ilustración 20. Gráficos de puntos del tiempo que tardan las mujeres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo. Elaboración propia.

- a. Tiempo para el curso 701: _____
¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?

- b. Tiempo para el curso 702: _____
¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?
 - c. Tiempo para el curso 703: _____
¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?
 - d. Tiempo para el curso 704: _____
¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?
2. ¿Qué curso debe llevar el profesor a la competencia de atletismo? ¿Por qué?

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación.

(pregunta 2):

1. ¿Creen que los tiempos altos afectan los bajos en los cursos? ¿Cuál debe ser el tiempo represente a cada curso?
2. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron tiempos más parecidos?
3. ¿En cuál grafico están más esparcidos los datos? Explica.
4. ¿Dónde vas a dejar el estimador? ¿Por qué?
5. ¿Cuál curso obtuvo mejores resultados en la prueba de atletismo? ¿por qué?

C. Fase 3: Implementación de la entrevista

Con la primera versión de las tareas (Anexo C) se realiza el primer pilotaje en marzo de 2019 con un grupo de tres estudiantes de grado 7º de la jornada mañana de la institución educativa Kimy Pernía Domicó IED. Basado en los resultados obtenidos se hicieron los ajustes necesarios generando una segunda versión de las tareas (Anexo C) y se implementa un pilotaje final en abril de 2019, posteriormente en mayo de 2019 se realizó la implementación definitiva de las tareas (Anexo F), a través de estas últimas se recoge la información empleada para el análisis de la evolución del razonamiento de los estudiantes sobre las distribuciones de manera informal cuando comparan distribuciones de datos, a partir del trabajo con tareas mediadas por un Applet de GeoGebra y emitir conclusiones a partir de este.

El instrumento básico para la recolección de datos lo constituyen las entrevistas (basadas en tareas), orientadas a partir de la información obtenida de las respuestas dadas por los estudiantes, las interacciones entre los estudiantes y las interacciones entre los estudiantes y la entrevistadora.

El proceso de *recolección de datos* se realizó en dos sesiones de clases. Ambas sesiones de clases se dividieron en dos momentos en los cuales el desarrollo de las tareas fue de manera grupal. En dichas sesiones se generaron discusiones y los estudiantes concluyeron con respuestas compartidas a cada una de las preguntas.

Los momentos de las dos sesiones de clases se registraron con capturas de pantalla del computador y videos, pues durante el desarrollo de las tareas los estudiantes manipularon el applet a través del computador e hicieron uso de lenguaje verbal y gestual. La entrevistadora tomó reporte escrito de lo que sucedió durante cada sesión.

D. Fase 4: Producción de datos investigativos

Organización de la información

Una vez recogida la información, se organizó en dos tipos de archivos: físico y digital. En el archivo físico se organizó la información recolectada en las notas de la entrevistadora de cada sesión de clase. El archivo digital contiene el material registrado en capturas de pantalla y en grabaciones de video y audio. El archivo de la información recolectada tanto en archivo físico como digital está acompañado de códigos con especificaciones sobre la organización de la información. De esta manera la investigadora puede acceder con facilidad a todas las evidencias en el momento que lo requiera.

Redacción de la información

Los archivos con la información en bruto son el punto de partida para la obtención de los datos investigativos. Se seleccionó la información que fue empleada en el

análisis y se descartó la información irrelevante. Se generaron nuevos archivos con la información que se utilizó, especificando de manera escrita: el material registrado, el informante, la fecha, el tiempo empleado, el escenario donde se desarrolló la entrevista, la información que se registró, los dispositivos de registro que se emplearon y la ruta de ubicación del material.

Reducción y depuración de la información

La información se redujo reagrupándola por fechas, por los informantes y conceptos construidos. Puesto que la información reducida no siempre se considera como los datos de estudio (Camargo, 2018), es necesario plantear como se depuró la información reducida. Se editaron los archivos de video para eliminar los segmentos que no se usaron para el análisis y se agruparon las grabaciones que captaron la misma escena. Se editaron las capturas de pantalla con descripciones sobre la captura. Se editaron los escritos de la entrevistadora para eliminar los aspectos que no apoyan la investigación y se completó la información con detalles que se omitieron en estos registros. Se hicieron transcripciones de las diferentes interacciones registradas en archivos de video teniendo cuidado de no afectar la esencia de la información. Llevar a cabo transcripciones de eventos captados por audio y video según Camargo (2018), permite un conocimiento profundo del evento, esencial para el análisis.

Fragmentación e integración de la información

Una vez depurada la información, se agrupó la información por los eventos donde los estudiantes lograron percibir por separado las características de centralidad (media y mediana), dispersión, densidad y asimetría de los datos y las concepciones de la noción de distribución. Luego se agruparon los eventos donde los estudiantes razonaron mediante el uso de tecnología digital sobre las características ya enunciadas en la comparación de distribuciones.

E. Fase 5: Herramienta analítica

El análisis de los datos se hizo con herramientas analíticas pre-estructuradas, ya que se cuenta con categorías preestablecidas de análisis, pero los indicadores fueron surgieron a medida que se hizo el análisis Dichas categorías se relacionan con las características de las distribuciones de Bakker y Gravemeijer (2004), con las concepciones en torno a la noción de distribución de Konold, et al. (2014) y la ampliación de las categorías de la noción de la distribución ligadas a la variabilidad señalada por Andrade, Fernández y Méndez (en prensa).

Para el análisis de los datos se siguió uno de los procedimientos propuestos por Miles y Huberman (1994); Denzin y Lincoln (1998); Confrey y Lanchance (2000) citados en Camargo (2018): Codificación de datos, ya que es un procedimiento que se empleó desde el comienzo de la recolección de la información, además contribuyó a enfocar el estudio hacia el interés de la investigación y en la toma de decisiones sobre la información que se usó y que fue relevante para la producción del análisis y de los resultados del estudio.

Criterios de calidad del estudio

Este apartado tiene como objetivo describir los criterios de calidad del estudio. En primer lugar, se describen los criterios de calidad de proceso y en segundo lugar se describen los criterios de calidad de producto.

Criterios de calidad de proceso

El estudio es legítimo, pues la elección del escenario y los participantes fue idónea para proporcionar la información que se requirió para este. Es objetivo, pues el análisis de los datos se hizo basado en el marco teórico, de tal manera que permitió la objetividad sin desconocer la neutralidad de la investigadora. Es pertinente, porque aporta a la solución de la problemática de “formación de ciudadanos cultos estadísticamente”. Según Batanero (2002), un aspecto de la cultura estadística es enseñar a comprender las ideas básicas sobre los gráficos, comprender qué es lo

que las medidas de posición central indican sobre el conjunto de datos y comparar distintas representaciones de datos. Lo anterior tiene estrecha relación con el objetivo de la investigación, pues para ver como razonan los estudiantes en la comparación de distribuciones de datos, es necesario fijarse en las características (centralidad, densidad, dispersión y asimetría) de los datos y de los gráficos.

La investigación es rigurosa, pues está organizada con claridad, especificando los objetivos, el marco teórico, el marco de referencia, la estrategia investigativa y los resultados obtenidos. De igual manera, la investigación es auditable, pues se organiza y depura la información, de tal manera que el lector puede seguir la ruta de las evidencias de la experiencia con las entrevistas y puede rastrear el proceso que dio lugar a los resultados.

Criterios de calidad de producto

El producto de la investigación se puede adaptar, aplicar y transferir a otros contextos educativos. De igual manera es comparable con otros estudios en donde se trabajan fenómenos similares, para establecer semejanzas y diferencias. El registro de la información, la depuración de los datos y el análisis de los datos es presentado de manera descriptiva detallada, de tal manera que le permite al lector comprender el fenómeno señalado.

4. ANÁLISIS RETROSPECTIVO

El análisis de los resultados está centrado en los elementos que permiten la caracterización de la distribución por parte de los estudiantes en tareas que implican la comparación de conjuntos de datos, para esta descripción se toman como referente las características y concepciones acerca de la noción de distribución descritas por Bakker y Gravemeijer (2004); y Konold, et al. (2014) respectivamente, y se considera a su vez la ampliación de las categorías de la noción de la distribución ligadas a la variabilidad señaladas por Andrade, Fernández y Méndez (en prensa).

A continuación, se presentan las respuestas y expresiones de dos estudiantes de grado séptimo durante el desarrollo de las dos tareas propuestas, y se muestra la caracterización del razonamiento seguido por los estudiantes en la comparación de distribuciones de datos que promueve el uso de un Applet de GeoGebra.

Respuestas de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de instrucción.

Ante la presentación de las notas de un examen de matemáticas en una representación gráfica estática (gráfico de barras de datos individuales, Ilustración 21), surge en los estudiantes en principio, la necesidad de establecer criterios intuitivos para determinar las diferencias entre las distribuciones presentadas. Muestra de esto son las siguientes declaraciones en las que se identifican con “P” las intervenciones de la profesora y con “E” las intervenciones de los estudiantes.

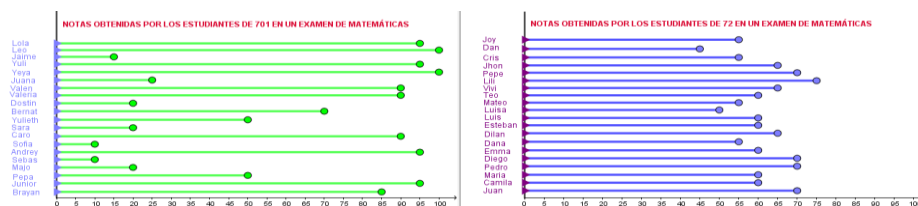


Ilustración 21. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de dos cursos (701 y 702). Elaboración propia.

P: ¿Qué información muestran los gráficos?

E1: Que cada estudiante... que nota tenía, la más alta o la más baja o cuál iba perdiendo.

E2: Pues yo digo que... esto significa el número de las personas que ganaron y perdieron la evaluación de matemáticas. Gracias a que el título... [Refiriéndose al título de los gráficos] observa los estudiantes de 702 en su examen de matemáticas.

A la pregunta: ¿Qué pueden decir sobre esos datos?, se evidencia que los estudiantes ven los datos como apuntadores, pues tratan la representación de los datos como algo que les recuerda un aspecto sobresaliente del evento, en este caso el recuperar la asignatura si la pierden, o que una de las causales de pérdida del examen pueda ser el no poner atención. Así se evidencia en las siguientes descripciones:

E2: En el gráfico de la derecha [refiriéndose a 701] se dice que hay más posibilidad de que las personas pasen el examen, y en el de la izquierda [702] muestra que no ponen atención y que no trabajan, o sea no prestan atención y no trabajan.

P: ¿Estás de acuerdo?

E1: Si, porque digamos que uno puede perder, pero, pues también puede recuperar, pero ellos no tienen posibilidad, porque ya no ponen cuidado, y van muy mal.

En referencia a la forma de las distribuciones, los estudiantes, señalan que las gráficas tienen distinta forma. Así se percibe en las afirmaciones expuestas a continuación.

P: ¿Qué de la gráfica, te hace decir que 702 pone más atención? Señala con el mouse si quieres.

E2: Que la mayoría tiene todas casi por igual [señala las barras el grafico de 702, Ilustración 22], mientras que 701 nada más tienen algunas y las demás bien abajito [Ilustración 22], esto señala que la mayoría si ponen atención.

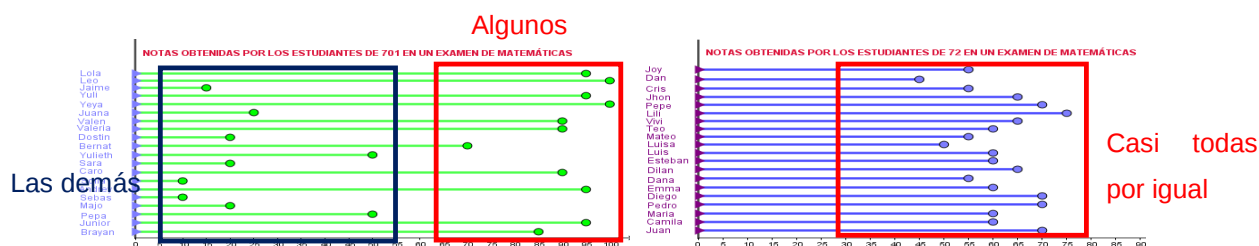


Ilustración 22. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos (701 y 702). Forma de las distribuciones. Elaboración propia.

A la pregunta: Para las olimpiadas matemáticas de Bogotá, la profesora debe elegir de entre los dos grupos el curso que representará al Colegio en dicho evento. ¿Cuál curso consideran que debe representar al Colegio en las olimpiadas matemáticas? ¿Por qué? Se evidencia que su elección la hacen teniendo en cuenta la distribución que visualmente parece tener la menor dispersión de los datos. De igual manera ven los datos como clasificadores, pues brindan información de las notas del curso 702 teniendo en cuenta la frecuencia de los datos. Así se percibe en la siguiente afirmación.

E2: Yo digo que 702.

E1: Si, porque son iguales, tienen casi las notas iguales algunos [Ilustración 23].

E2: Y, pues pueden trabajar en equipo, gracias a que su atención y su conocimiento son casi igual.

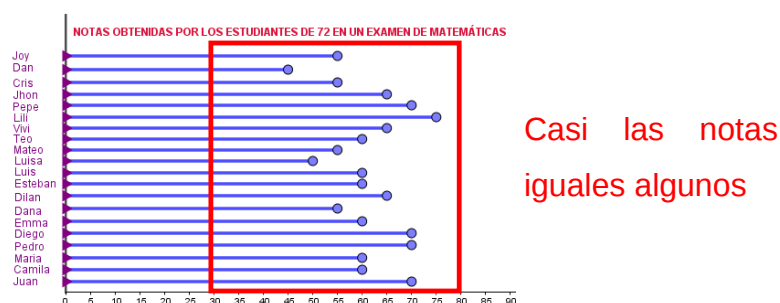


Ilustración 23. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 702. Elaboración propia.

A la solicitud de determinar un valor o nota que represente el desempeño de los estudiantes de cada curso en el examen de matemáticas, suelen fijarse en la dispersión de los datos, pues hacen comparaciones cualitativas entre las longitudes de las barras de los valores individuales. Lo anterior se evidencia en la siguiente declaración.

P: ¿qué nota le darían a 701?

E1: Por ahí yo creo que un 50.

P: ¿Por qué?

E1: Porque digamos, algunos tienen baja nota. Digamos que estos son más altos, pero los otros no [señala las barras del gráfico de notas del curso 701, Ilustración 24], entonces hay más posibilidad que pierdan más que otros [que el curso 702]

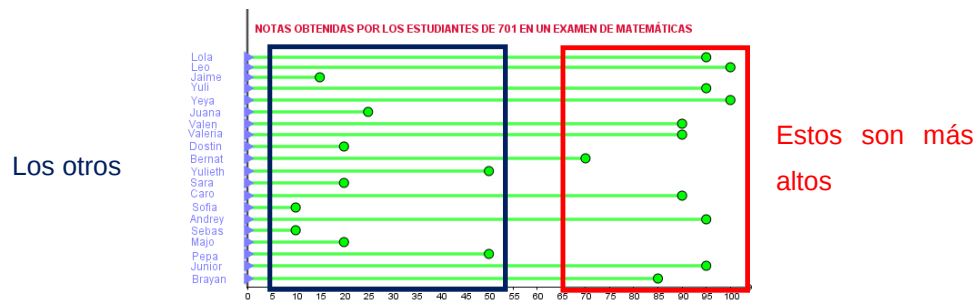


Ilustración 24. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. E1 señala las notas altas y las notas bajas. Elaboración propia.

Continuando con la solicitud de dar un valor o nota representativa a los estudiantes del curso 701 en el examen de matemáticas, los estudiantes establecen relaciones de cercanía o lejanía entre las barras (Ilustración 25), es decir reconocen aglomeraciones considerando un dato como referencia, en este caso respecto al valor menor (la nota más baja que puede obtener un estudiante en el examen). Muestra de esto es la siguiente afirmación:

P: Cuando tú dices 50 [50 como valor representativo de 701], es porque 50 esta ¿cómo?

E1: Que la plancha lo muestra más para allá [indica con la mano la cercanía a cero: flecha] que no tienen tanta posibilidad de pasar.

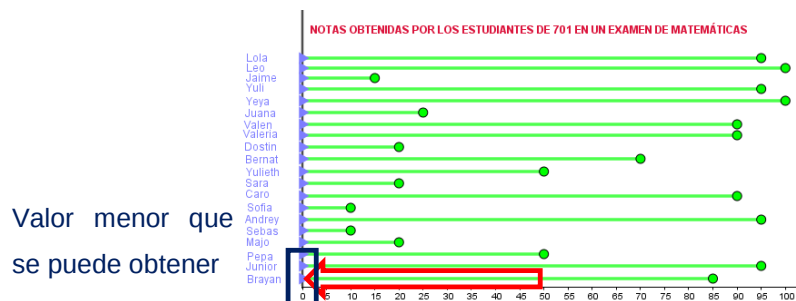


Ilustración 25. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. E1 señala aglomeraciones considerando un dato como referencia. Elaboración propia.

De igual manera se evidencia que los estudiantes prestan especial atención a la agrupación de los datos por valores de la variable, es decir, aunque no brindan información cuantitativa de la frecuencia de los datos, se observa que la consideran como aspecto relevante para brindar información sobre una variable. Lo anterior, permite inferir que el razonamiento de los estudiantes estaba centrado en las

características de la densidad de los datos. Muestra de esto es la siguiente afirmación.

[Respecto a un valor representativo de 701]

E2: O un 75, por lo que el promedio de los que sí tienen más posibilidades de pasar es más alto que los que no, entonces, pues es más probable que sea un 75 para todo el curso.

[...]

P: ¿Y cuál de las dos notas creen que debe ser, 50 o en 75? ¿Cuál debería ser la nota?

E2: en 75, gracias a que pues... se arroja que tienen más posibilidad de pasar, que los que no.

E1: Sí, es mejor 75.

P: ¿En qué te basas para decir eso?

E2: En las notas que aparecen acá mira, acá en las de 65 aparecen más [datos]... acá esta parte [señala las notas mayores a 65] que esto [señala las notas mejores a 65] (Ilustración 26)

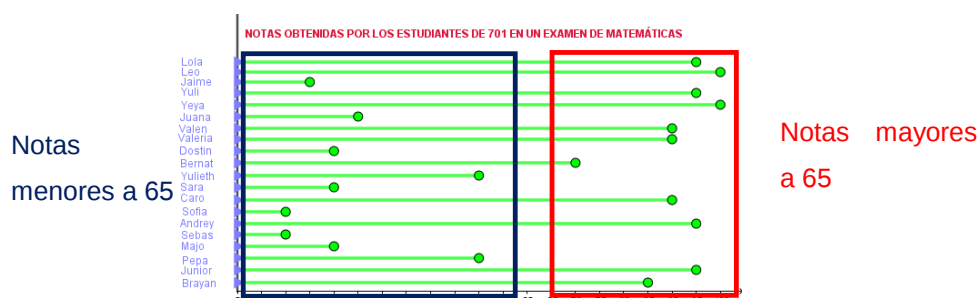


Ilustración 26. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. Agrupación de los datos por valores de la variable. Elaboración propia.

Cuando se solicita que señalen cuál sería una nota representativa para el curso 702, los estudiantes establecen comparaciones entre valores mínimos de ambas distribuciones, esto muestra de nuevo, que prestan atención a la dispersión de los datos, un ejemplo de esto es la siguiente declaración.

P: Y ahora en 702... también deben dar una nota representativa ¿Qué nota podrían dar y por qué?

E1: un 80

E2: 90, porque la mayoría de ellos alcanzan a pasar, entonces pues... no como los de 701 que, pues pasan algunos, pero...

E1: pierden los demás

E2: Si, y pues hay más mayoría pasando y pues se ve que el más bajito de todos es de 45 [en 702] y acá [701] el bajito es de 10 [Ilustración 27], entonces hay más posibilidad que pueda pasar...que la nota sea 90 en 702...

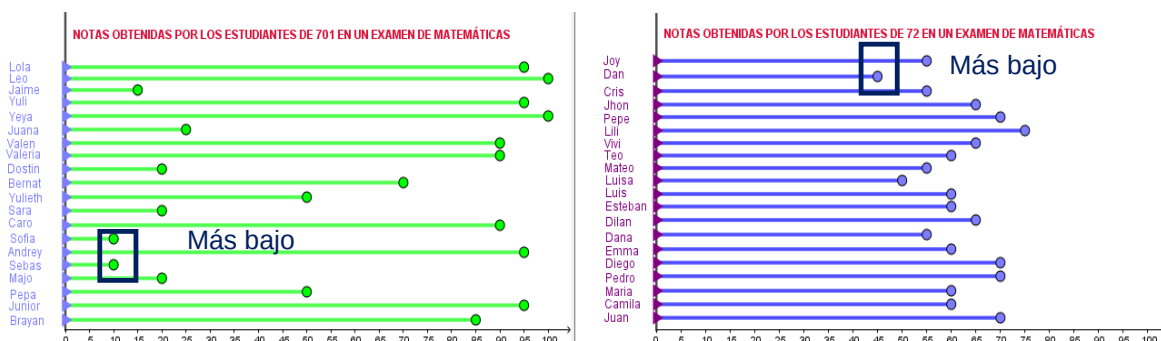


Ilustración 27. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de dos cursos (701 y 702). Comparación de valores mínimos. Elaboración propia.

Cuando se les muestra a los estudiantes que el Applet permite el desplazamiento de las barras de los valores individuales mediante la herramienta de arrastre, ellos ven la necesidad de organizar los datos del valor mínimo al valor máximo en cada distribución. Muestra de lo anterior son las siguientes afirmaciones.

P: a ver...será que, así como están las están las notas, es más fácil dar la nota representativa o ¿habrá otra manera en la que se pueda hacer que sea más fácil?

E1 y E2: hay otra manera

P: ¿Cuál?

E2: Como los que van perdiendo, ir organizando de los que van perdiendo a los que van ganando hay más posibilidades, así podemos definir la nota...

E1: De cada uno para que puedan pasar...

[...]

P: ¿Listo? [...] primero quiero que expliquen ¿por qué decidieron organizar los datos así?

[Ilustración 28]

E2: Pues nosotros organizamos así los datos, porque así se nos hace más fácil...

E1: ver quién va perdiendo y quién va pasando

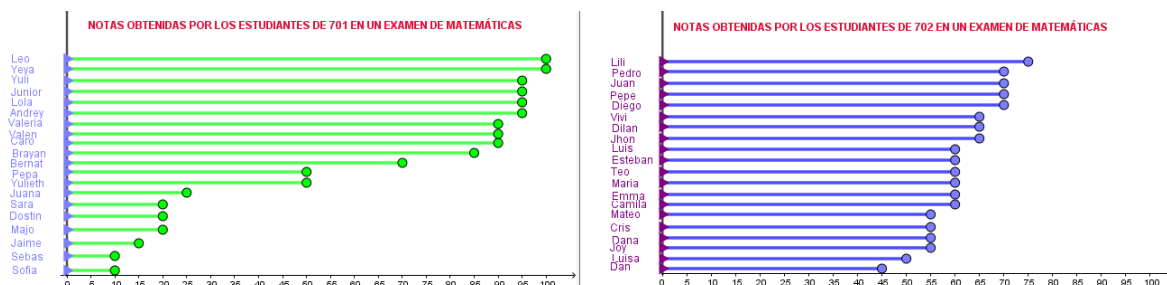


Ilustración 28. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702 organizados del menor dato al mayor. Elaboración propia.

El trabajo con el Applet les permitió a los estudiantes ver la importancia de tener los datos organizados para informar aspectos de la distribución con mayor certeza. Así se evidencia en las siguientes descripciones.

E2: [...] Así pues, nos dimos cuenta de que 702, ya no tiene tanta posibilidad de pasar con 90 sino por ahí con un 75 [como valor representativo]... gracias a que la mayoría está perdiendo como por ahí en 64, y pues en 701 tiene más posibilidades de tener por ahí un 90 o un 85 gracias a que su mayoría ahora sí van pasando [Ilustración 29].

E1: solo era organizarlos para poder ver

E2: Porque mientras que estaban desorganizados, tocaba mirar quien iba pasando y quien iba perdiendo, entonces no podíamos verlos bien.

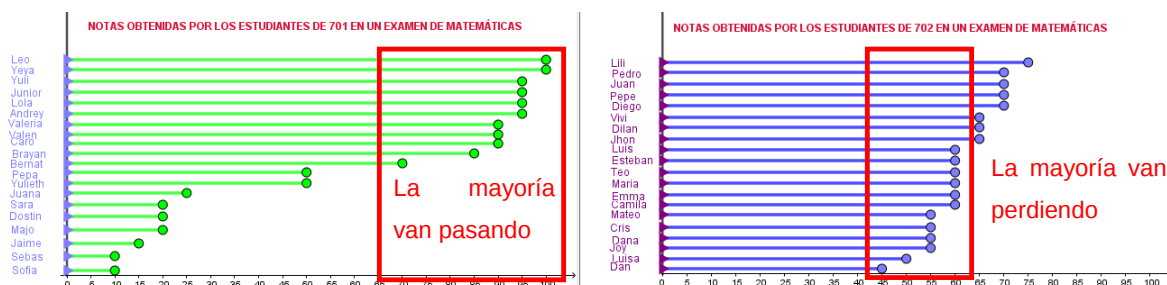


Ilustración 29. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702 organizados del menor dato al mayor. Importancia de organizar los datos. Elaboración propia.

Al solicitarle a los estudiantes que retomen el cuestionamiento de cuál de los dos cursos debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas, se evidencia que una vez terminan de organizar los datos de ambas distribuciones en el Applet, ellos reconocen los valores máximos y mínimos (con expresiones como: los más bajitos, los más altos, poquita nota) y reconocen aglomeraciones, lo cual no fue evidente

para ellos cuando los datos de ambas distribuciones estaban desordenados. La siguiente descripción es evidencia de esto.

E1 y E2: 701

P: ¿Sí?, ¿por qué?

E1: Si porque, ahora ellos son los que van pasando más y nos dimos cuenta cuando arreglamos la plancha [se refiere a los gráficos], porque digamos que ya hay más posibilidades de que ganen.

E2: Pues, también eso, pero, también tienen posibilidades 702, pero no tanto como los 701, gracias a que la mayoría de sus estudiantes van pasando, hay algunos que van perdiendo con poquita nota, como los más bajitos van con 10 y pues, hemos visto que los más altos van con 100, mientras que en 702 el más bajito es 45 pero el más alto es 75. El más lógico sería 701, ya que la mayoría va pasando [Ilustración 30].

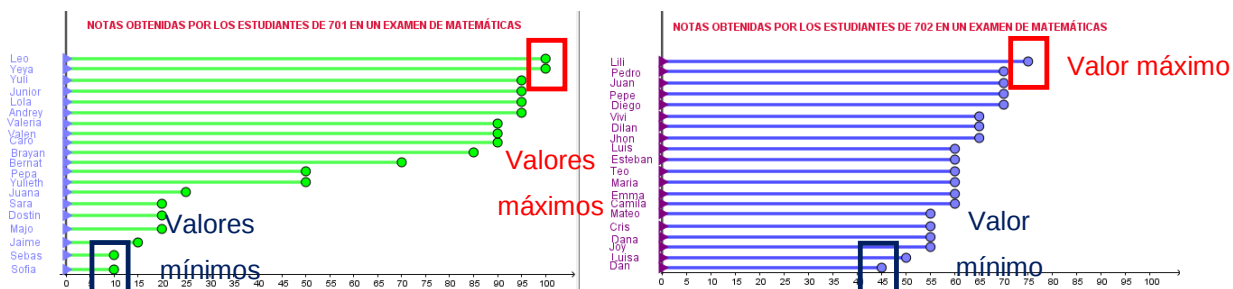


Ilustración 30. Gráficos de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702 organizados del menor dato al mayor. E2 identifica valores máximos y mínimos. Elaboración propia.

A su vez, el visualizar los diferentes valores de los datos de cada distribución de manera ordenada, les permite a los estudiantes ver los datos como valores individuales y como clasificadores. Así se percibe en la afirmación.

E2: La mayoría están perdiendo, por ejemplo, los únicos que van pasando...

E1: ...con alta nota es Lili y Pedro

E2: [los que tienen notas altas] son 5 personas también

De igual manera, los estudiantes agrupan los datos y les asignan la frecuencia correspondiente. Muestra de esto es la siguiente declaración.

P: Listo en 702 ya dijeron [su valor representativo], y ¿en 701 dónde?... Los dos van a pensar ¿Cuál es la nota que debe representar al curso 701? ¿Cuál creen que es la nota que debe representar a ese curso?

E1: Un 90 por ahí

P: ¿O sea por acá? [Señala 90 con el puntero del mouse en el gráfico de 701]

E2: Sí, señora

P: ¿Sí, por qué?

E2: Porque, aunque van pasando artos, 9 o más personas van perdiendo y la mayoría van perdiendo mientras que los demás van pasando, Entonces yo digo por ahí un 85 [Ilustración 31].

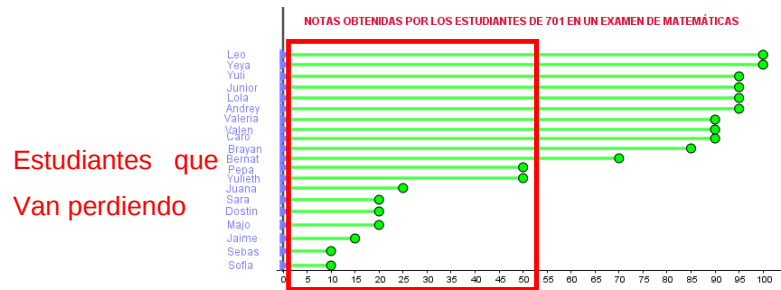


Ilustración 31. Gráfico de barras de datos individuales de las notas de un examen de matemáticas del curso 701 organizados del menor dato al mayor. E2 agrupa los datos.

Al pasar de representación de gráficos de valores individuales a gráficos de puntos (Ilustración 32), los estudiantes, reconocieron valores máximos, frecuencia de los datos de manera cualitativa e identificaron el valor modal.

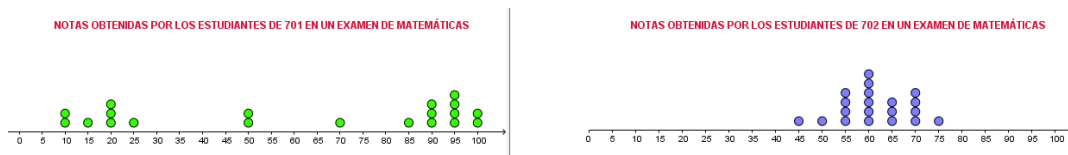


Ilustración 32. Gráfico de puntos de las notas en un examen de matemáticas de los cursos 701 y 702.

P: [...] ¿creen que estuvo bien decir que en 701 la nota qué debe representar al curso es 85?

E2: sí, porque, aunque en 702 se vea que tienen más posibilidades, el mayor número de punticos es en 60 y pues lo máximo que alcanzó a llegar fue a 75, mientras que en 701 se ven poquitas personas pasando, pero es la mayoría que pasa... [Ilustración 33]

[...]

P: Listo. Entonces...tú dices que es 85. Y acá en 702 ¿está bien que la elección sea de 65?

E2: No señora

P: ¿Por qué?

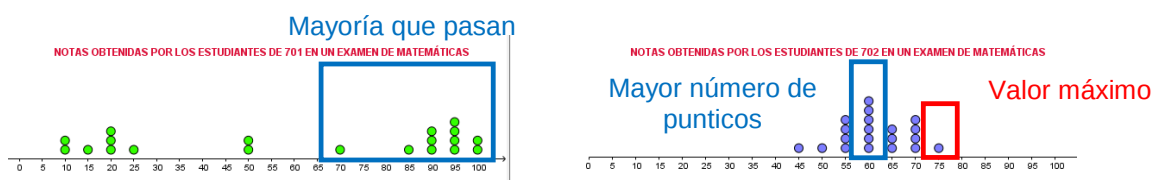
E2: Pues porque ya que vemos esa gráfica, muy pocos alcanzaron a pasar, la mayoría pasaron con 65.

E1: Poquitos pasaron con 65, los que perdieron más fueron con 60

P: O sea que ¿cuál debería ser la nota que represente a 702?

E2: 60, pues porque la mayoría van perdiendo y pues la nota sería con el número de personas que van perdiendo, pues yo digo que 60.

E1: Sí porque son los que van perdiendo más...



De manera similar, al visualizar los datos en gráficos de puntos, los estudiantes identificaron datos atípicos, muestra de esto es la siguiente afirmación.

E1: Sí porque son los que van perdiendo más [se refiere a los estudiantes del curso 702], el único que va pasando por ahí con una nota alta es el de 75 [Ilustración 34]



Cuando se les pide a los estudiantes hacer uso de la herramienta “estimador” (barra vertical que se desplaza con un deslizador en el eje horizontal del gráfico) orientado a que reconocieran atributos de la centralidad de las distribuciones, en el Applet, (Ilustración 35) se aprecia que hacen uso de aproximaciones de la mediana. Muestra de esto es la siguiente declaración.

P: ¿Qué aspectos están teniendo en cuenta para decir que la nota que debe representar a 701 es 85?

E2: Pues el aspecto de que la mayoría van pasando ahí [en 85] y van con mejor nota, que los que van perdiendo.

P: ¿Cómo sabes tú que es la mayoría?

E2: Pues los que van pasando, que yo creo que es la mayoría... Antes de que empezáramos a hacer esta prueba yo conté, y yo di por hecho que es la mayoría, más de la mitad.

[...] [...]

E2: no, pues los que van pasando son más de la mitad

P: O sea ¿Quiénes son los que van pasando?

E2: Desde 70 para arriba

P: o sea tú dices desde acá [señala con el estimador 70]

E2: sí

P: ¿Cuántos hay ahí?

E2: 11 personas

P: o sea que ¿cuántos hay ahí? [Señala de 70 hacia abajo]

E2: 9 personas

P: ¿Siguen pensando que es 85 sí?

E2: sí

P: ¿Sí, por qué?

E2: aunque sea por una persona nomás, son las notas más altas que se ven ahí.

E1: Aunque sea que haya más bolitas, entonces digamos que ganaría 701 porque la nota más alta es 75 y la mitad va perdiendo

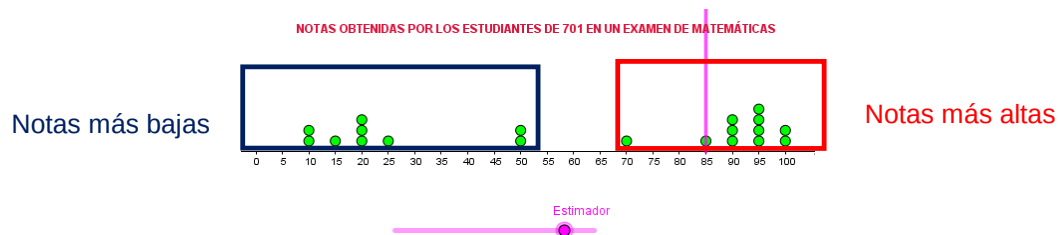


Ilustración 35. Gráfico de puntos de las notas de un examen de matemáticas del curso 701. Identificación de datos atípicos. Elaboración propia.

Una vez los estudiantes dieron tiempos aproximados en lo que tardarían 18 niños en dar una vuelta al colegio corriendo y los organizaron (Ilustración 36), se les solicitó que comunicaran lo que observaban en cuatro distribuciones ilustradas en gráficos de barras de casos individuales, entre ellos el correspondiente a los datos inventados por ellos (tiempo en segundos de los hombres del curso 701).

Los episodios que siguen dan muestra que para los estudiantes, las aglomeraciones no eran simplemente una característica visual del gráfico de cierta distribución,

significaba un número relativamente acumulado de datos con aproximadamente el mismo valor, las aglomeraciones se asocian a un rango donde había una densidad relativamente alta de valores individuales de datos. Los “apuntamientos” incluso se convirtieron en una herramienta para el razonamiento, como lo muestra el siguiente episodio.

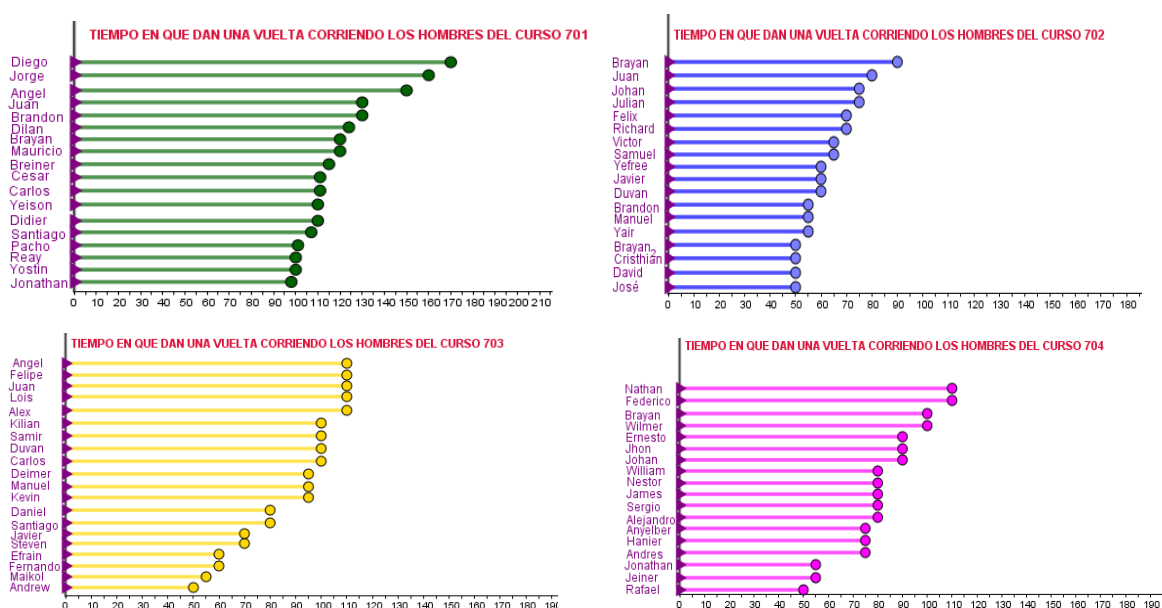


Ilustración 36. Gráficos de barras de datos individuales organizados del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.

E2: en el curso 701 hay varias personas que son rápidas y veloces y hay otras que son muy lentas, Por ejemplo, en el caso de 702, la mayoría corre harto, tiene buena condición física. [...]

P: listo, ¿qué pueden decir del curso 703?

E2: Pues, en el curso 703, hay más personas que corren lento, es un curso que corre a una velocidad muy pequeña y en el curso 704...

E1: Hay unos que corren en menos tiempo...

El trabajo con las gráficas de barras de datos individuales ordenadas les permitió a los estudiantes identificar valores máximos y mínimos (Ilustración 37), para posteriormente comparar las distribuciones y tomar decisiones sobre el curso que debe representar al colegio en la competencia de atletismo masculino. Muestra de esto es el siguiente fragmento de la entrevista.

E2: O sea que los más rápidos de cada grupo [702, 703 y 704] alcanzan 50 segundos, mientras que este (701) los más rápidos alcanzan 100 segundos.

E1: Este [[701] el más lento alcanza 170 segundos y acá [704] alcanza 100 segundos, acá [703] 90 segundos y acá [702] 110 segundos, entonces este [701] es el más lento gracias a que su condición física y sus integrantes se demoran más en dar una vuelta al colegio que los demás cursos.

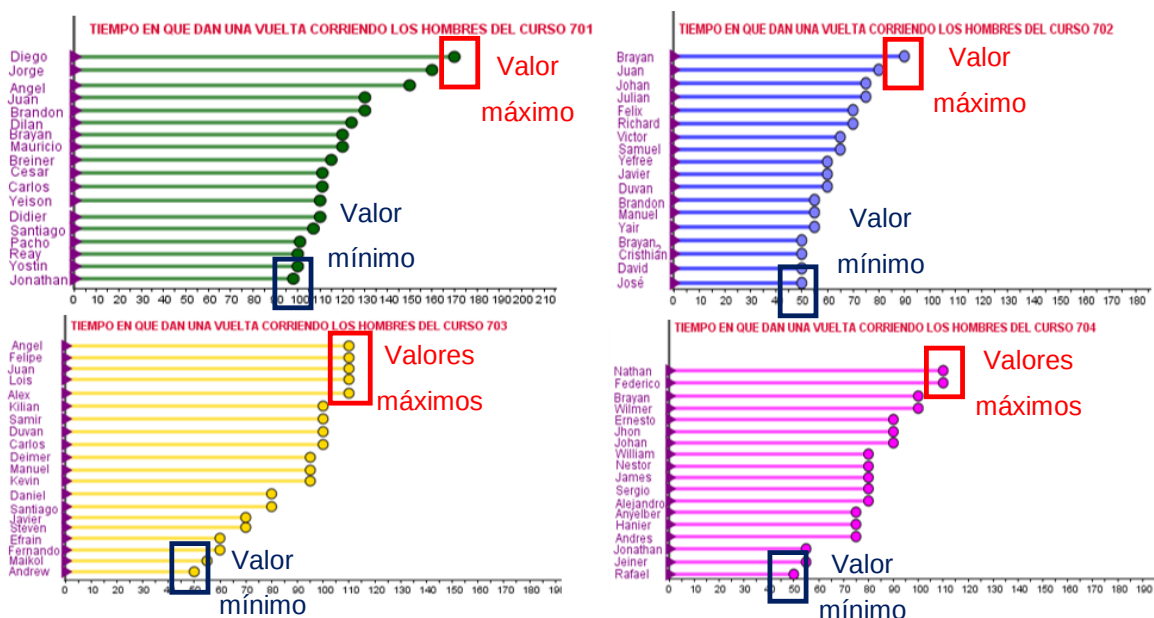


Ilustración 37. Gráficos de barras de datos individuales del tiempo que tardan los hombres en dar una vuelta al colegio. E1 y E2 señalan valores máximos y mínimos.

Cuando se les solicitó a los estudiantes que fijaran un tiempo representativo de los tiempos que tardan en dar una vuelta al colegio los estudiantes del curso 703 mediante el uso de un estimador en el gráfico de puntos (Ilustración 38), los estudiantes expresaron características de la dispersión de los datos, ya que señalan diferencias en las distribuciones de los tiempos entre los cursos. A continuación, se presenta un diálogo que da evidencia de lo señalado anteriormente.



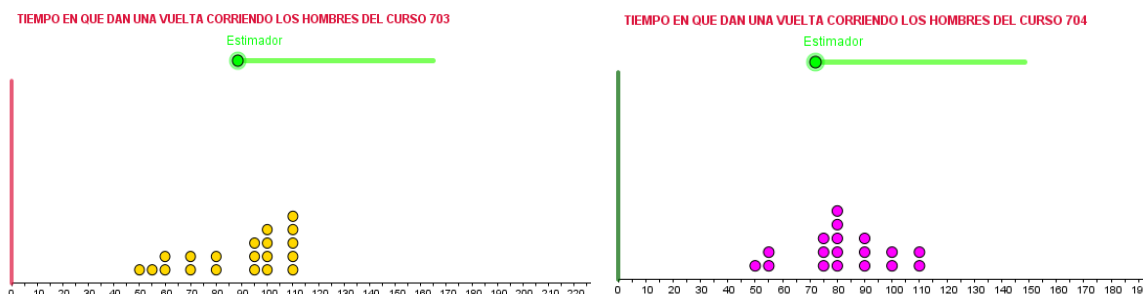


Ilustración 38. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.

E2: En 80 segundos, porque lo hubiera puesto en 70 segundos, pero hay muchas personas que se han demorado y...

E1: No han hecho el tiempo correcto

E2: Para bajar el tiempo

P: ¿Será que no se puede colocar ahí [en 90 segundos] o acá [100 segundos] o acá [110 segundos]? ¿Por qué en 80 segundos y no en otro?

E2: Porque hay varias personas que si corren arto y...

E1: Digamos hay muchas personas que corren más rápido que los otros...

De manera similar, el uso del estimador les permitió a los estudiantes reconocer datos atípicos, asignar frecuencias a los valores de la variable, estimar la mediana y reconocerla como el valor que divide en dos partes iguales un conjunto de datos, y agrupar datos y asignar a estos su frecuencia (Ilustración 39). Muestra de esto son las siguientes afirmaciones.

E1: digamos en 80 segundos [en 703], porque digamos es como la mitad [de tiempos] que hay,

P: ¿seguros?

E2: Pues, no es la mitad, pero nosotros lo pusimos en 80, porque es un número que nosotros decidimos... gracias a que hay varias personas que se demoran mucho pero también hay unas muy buenas...

E1: Más rápidas

E2: Hay dos personas que hacen la diferencia

P: ¿Cómo así?

E1: Pues que hay dos personas que corren más lento

E2: Por ejemplo, acá hay nueve [cuenta a la derecha del estimador] y acá hay 7 [cuenta a la izquierda del estimador]

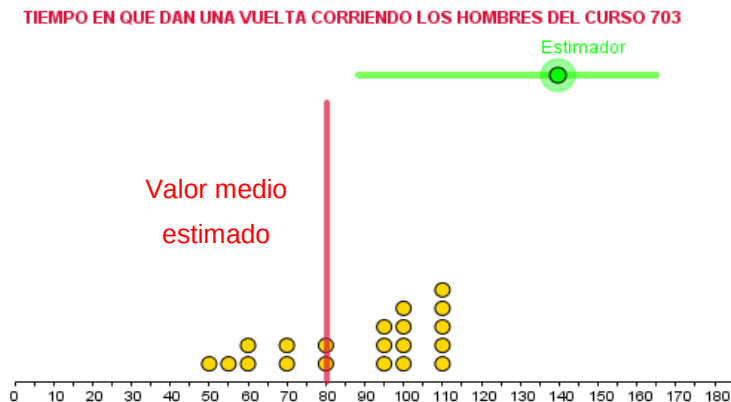


Ilustración 39. Gráfico de puntos del tiempo que tardan los hombres del curso 703 en dar una vuelta al colegio corriendo. Valor medio estimado.

Cuando se solicita dar un tiempo representativo para el curso 701, los estudiantes establecen relaciones cualitativas entre los datos y/o relaciones cuantitativas como distancias (Ilustración 40). El siguiente dialogo es evidencia de esto.

E1: Ahí [ubican el estimador en el curso 701 en 120 segundos]

P: ¿Por qué ahí?

E2: Porque 701 es el más demorado de los demás cursos

P: ¿Cómo así?

E2: El tiempo que ellos [701] se demoran..., [701] es más demorado de los demás cursos, y porque...

E1: Porque digamos que son más lentos y no tienen tanta velocidad como los demás cursos

P: ¿Qué del grafico les hace pensar que son más lentos?

E2: Porque digamos que acá en este [señala la distribución de los segundos en que tardan los estudiantes del curso 703], aunque se demora menos [señala el valor mínimo en 703], tiene menos distancia al cero que acá [señala el valor mínimo en la distribución de los segundos en que tardan los estudiantes del curso 701], pues tiene más distancia, mucha más que este [señala el valor mínimo de la distribución de los segundos en que tardan los estudiantes del curso 702] y que este [señala el valor mínimo de la distribución de los segundos en que tardan los estudiantes del curso 704].

P: Ok. Ya les entendí, entonces 120 segundos ¿sí?

E1 y E2: Sí

P: Y tu Sara, ¿estas convencida de que debe ser 120 segundos el tiempo que represente al curso 701?

E1: Si, porque digamos acá [en 701] terminan en 100 segundos [indica tiempo mínimo], pero los otros no se demoran tanto como ellos, porque ellos se demoran más en dar una vuelta al colegio que los otros [702, 703 y 704]

[...]

P: ¿Que escribieron?

E2: Porque los demás cursos, lo más que han alcanzado, son por ejemplo en 704 es 110 segundos [tiempo máximo], mientras que en 701 es 100 segundos [tiempo mínimo] y terminan en 170 [tiempo máximo]

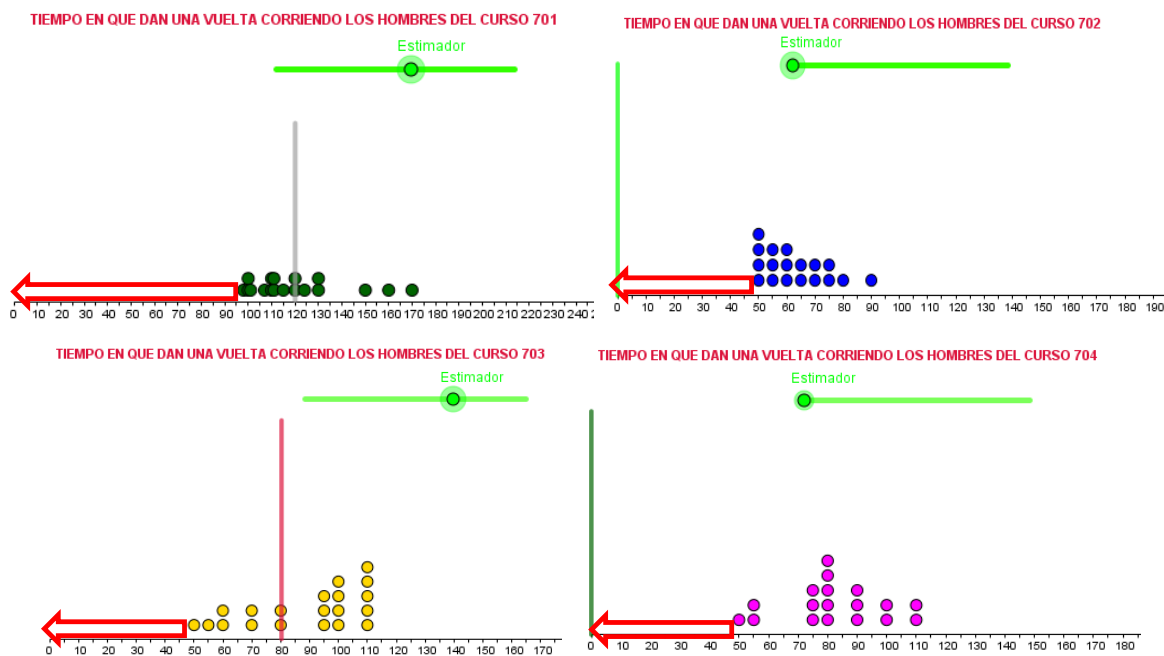


Ilustración 40. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo. Relaciones de distancias del valor mínimo respecto a cero.

Cuando se les solicitó usar el estimador para dar un tiempo representativo para el curso 702, los estudiantes centraron su atención en la aglomeración de los datos (Ilustración 41). Muestra de esto es la siguiente declaración.

E1: Lo dejaríamos en 80 [segundos]

P: ¿Por qué en 80?

E1: Porque hay mas mayoría que los demás [tiempos].

P: O sea ¿la mayoría está en 80?

E1 y E2: Sí.

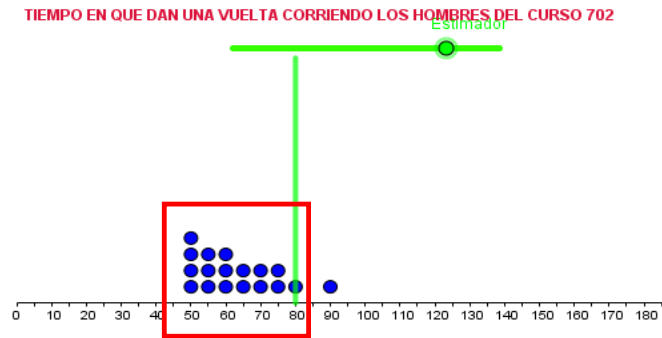


Ilustración 41. Gráfico de puntos del tiempo que tardan los hombres del curso 702 en dar una vuelta al colegio corriendo. Aglomeración de los datos.

De igual manera, identifican máximos, mínimos y datos atípicos y los usan para comparar (Ilustración 42).

E1: Ellos [702] son los más rápidos que los otros. El menos veloz es el de 90 segundos [indica el tiempo máximo] y el más rápido el de 50 [indica el tiempo mínimo]

[...]

P: Entonces, ¿cuál de los cuatro cursos debe llevar el profesor a las olimpiadas?

E1 y E2: A 702

P: ¿Por qué?

E2: Porque es el que más personas tienen, que más rápido son.

P: Mira acá [en 703] hay artos niños rápidos, ¿qué hace sea diferente el curso de 703 del curso 702?

E1: que el curso 702 tiene un integrante que no corre rápido.

E2: Que es el más lento de todos es 90 segundos, mientras que en 703 el más lento es 110 segundos.

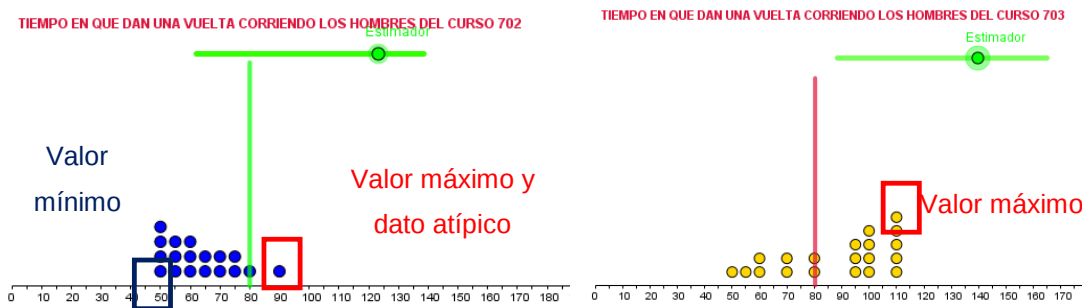


Ilustración 42. Gráficos de puntos del tiempo que tardan los hombres de los cursos 702 y 703 en dar una vuelta al colegio corriendo. Máximos, mínimos y datos atípicos.

En segunda instancia de la tarea, se les presenta a los estudiantes cuatro gráficos de puntos correspondientes a los tiempos en segundos empleados por las niñas de los cursos séptimos en dar una vuelta al colegio (Ilustración 43).

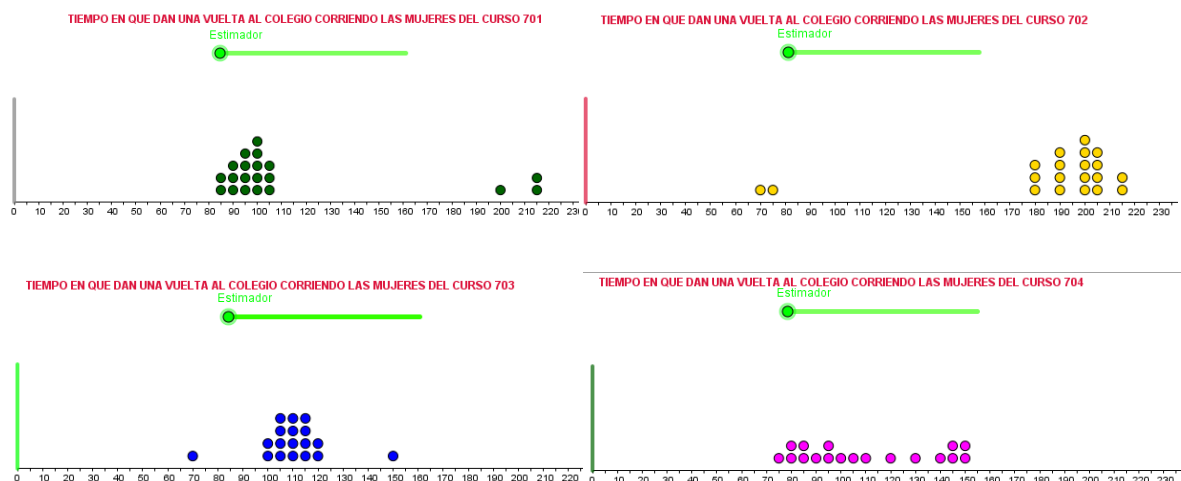


Ilustración 43. Gráficos de puntos del tiempo que tardan las mujeres de cuatro cursos en dar una vuelta al colegio corriendo.

Cuando los estudiantes deciden sobre cuál de los cursos debe ir a los juegos intercolegiados en la modalidad femenina. Ellos agrupan los datos por valores de la variable y asignan su frecuencia como se muestra a continuación (Ilustración 44).

P: ¿Dónde dirían que en 701 es el tiempo que representa a las niñas?

E2: Diríamos antes de 100 segundos

E1: Si un poquito antes de 100 segundos

P: ¿Por qué?

E2: Porque son los estudiantes que se demoraron más

P: ¿Por qué en 100 segundos y no en otro tiempo?

E2: Porque a este lado [después del estimador a la derecha] hay más que en este [a la izquierda del estimador].

P: ¿Cómo saben ustedes que hay mayoría?

E1: Pues contando... hay 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 [cuentan a la derecha del estimador]

P: ¿Y al otro lado cuantos hay?

E2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9.

E1 y E2: 9

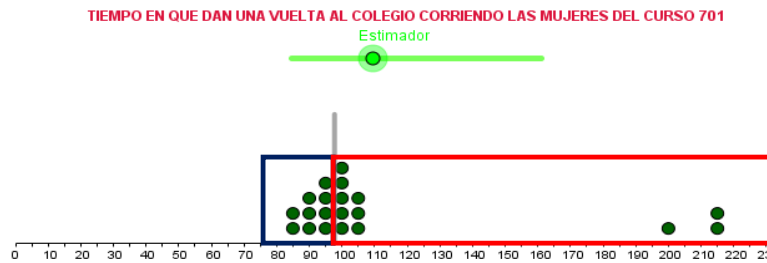


Ilustración 44. Gráfico de puntos del tiempo que tardan las mujeres del curso 701 en dar una vuelta al colegio corriendo. Agrupación de los datos por valores de la variable.

De manera similar, fijan su atención en las aglomeraciones de los datos. Muestra de esto es el siguiente fragmento.

P: Listo. ¿En 702 donde dejarían el estimador?

E1: Ahí... [Mueven el estimador hasta antes de 200 segundos]

[...]

E1: ... acá [en 701] todas están unidas [Ilustración 44], pero acá [en 702] [Ilustración 45] todas están separadas...

P: Y eso que quiere decir

E2: Que hay más mayoría que corren más lento que los que corren más rápido

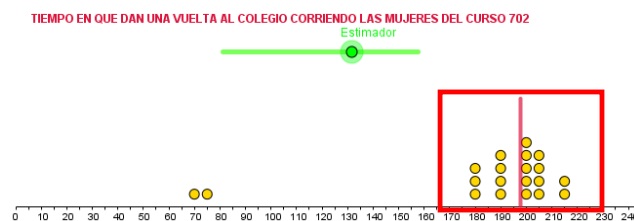


Ilustración 45. Gráfico de puntos del tiempo que tardan las mujeres del curso 702 en dar una vuelta al colegio corriendo. Aglomeración de los datos.

Cuando se les presenta a los estudiantes una distribución de forma simétrica (tiempos de las mujeres del curso 703), los motiva a estimar la mediana visualmente y siguen fijándose en la aglomeración de los datos, tal como se evidencia a continuación.

P: Ahora en 703, ¿dónde dejarían el estimador y por qué?

E1: Ahí

P: ¿En cuál?

E1: En 120 segundos

E2: Porque está ahí la mitad de cada..., porque es igual la mitad del más lento y el más rápido [agrupa los tiempos mayores a 120 segundos y los tiempos menores a 120 segundos]

y concluye visualmente que estas agrupaciones son iguales], son iguales, entonces yo diría que en 120 segundos.

P: ¿Si Sara? ¿Estás de acuerdo?

E1: sí, porque en el curso 703 corren casi por lo mismo...

E2: Corren juntos, en grupo, no son tan separados como los demás.

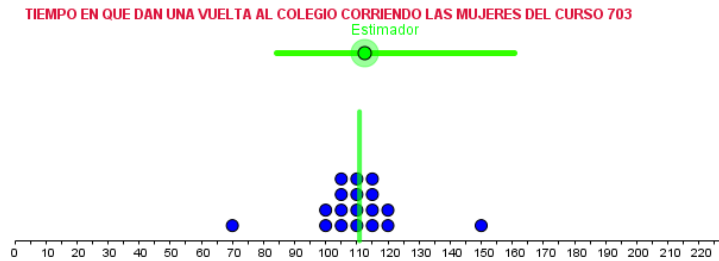


Ilustración 46. Gráfico de puntos del tiempo que tardan las mujeres del curso 702 en dar una vuelta al colegio corriendo. Estimación de la media visualmente.

En la sistematización de las respuestas que se expone, se percibe que a pesar del lenguaje informal utilizado y de que el término distribución no aparece, los estudiantes notan y reafirman diversas características de la centralidad, de la dispersión, de la densidad, de la forma y de la simetría de los datos, así como algunas concepciones ligadas a la distribución, que a su vez son elementos constitutivos de la noción de distribución, lo que va consolidando y formalizando una comprensión de la concepción de distribución más amplia.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo, se presentan las conclusiones que se derivan de la elaboración, aplicación y análisis de la entrevista basada en dos tareas que emplea la comparación de distribuciones con miras a promover el desarrollo de la noción de distribución estadística de una manera más amplia. Junto a este trabajo se logra identificar los diversos razonamientos y concepciones que los estudiantes manifiestan cuando hacen dicha comparación a partir del trabajo con tareas mediadas por tecnología digital. Este apartado incluye a su vez, algunas recomendaciones teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

El primer objetivo específico perseguía el establecimiento de la relación entre distintos enfoques didácticos de la Educación Estadística de forma tal que dicha relación orientara el diseño tanto del Applet como de las tareas para promover y observar cómo evoluciona el razonamiento de los estudiantes sobre la distribución de manera informal cuando comparan distribuciones de datos, este objetivo se concretó al efectuar la revisión y definición de los marcos teóricos de referencia sobre las características de las distribuciones (Bakker y Gravemeijer, 2004, Andrade, et.al., en prensa), los niveles sobre las concepciones de las distribuciones (Konold, et.al., 2014) y los usos de las herramientas tecnológicas en educación estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2008), asunto que se amplía en el capítulo 2.

Respecto al segundo objetivo específico que se encamina al diseño, implementación y análisis de la secuencia de tareas para favorecer la caracterización de distribuciones de datos a partir de la visualización gráfica. Aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos, se consideró diseñar el Applet en GeoGebra, dado que es una herramienta dinámica que ofrece diversas representaciones de conjuntos de datos como vistas gráficas, hojas de datos dinámicamente vinculadas, entre otras. Para el caso de esta propuesta, en la interfaz se privilegia la vista de representaciones gráficas de dos o más distribuciones, ya que para desarrollar la noción de distribución es necesario que

los estudiantes se enfoquen en aspectos de su forma, la cual está influenciada por atributos tales como la centralidad, la dispersión, la densidad y la simetría de los datos (Bakker y Gravemmeijer, 2004), de este modo el Applet empleó representaciones de los datos tales como gráficos de casos individuales y gráficos de puntos, y en algunas ocasiones la vista simultánea de datos en tablas (dato a dato), las características fueron ampliadas en el capítulo 3.

Ahora bien, siguiendo a Ben-Zvi y Arcavi (2001; citados en Garfield y Ben-Zvi, 2008), la implementación de esta propuesta lleva a reconocer que la aplicación de recursos tecnológicos no es suficiente para promover la noción de distribución, en tanto las tareas deben ser cuidadosamente diseñadas y deben contar con la orientación del docente quien, mediante el planteamiento de preguntas desafiantes, logrará que los estudiantes expresen a través de palabras, gestos, dibujos, etc. sus razonamientos frente a los atributos del objeto estadístico (en este caso la distribución), y que manifiesten las razones que los lleva a tomar las elecciones realizadas ya sea de manera individual o en consenso cuando trabajan de manera grupal en la comparación de distribuciones, es decir que expresen sus ideas y a su vez desarrollen concepciones y características de la distribución de una manera informal, o que se evidencie lo que Noss y Hoyles (1996) conocen como abstracción situada. A su vez, es necesario proporcionar a los estudiantes conjuntos de datos motivadores y acompañar las tareas con herramientas tecnológicas apropiadas, con miras a ayudarlos a identificar distintos aspectos de las distribuciones.

Producto de la implementación de las tareas, se reconoce que estas deben abordar las situaciones planteadas de forma gradual y acumulativa, de forma tal que les permita a los estudiantes transitar por el reconocimiento de los distintos atributos de las distribuciones y complejizar sus concepciones acerca de la noción de distribución. Por ejemplo, al observar en primera instancia los datos representados en gráficos de casos individuales, los estudiantes se fijaron principalmente en aspectos de la dispersión de los datos, exhibiendo a su vez, concepciones iniciales de la distribución (ver los datos como apuntadores o como valores de cada caso);

mientras que con los datos representados en gráficos de puntos, se centraron en aspectos de la densidad tales como aglomeraciones, valores faltantes, datos atípicos, frecuencia modal, entre otros, y exhibieron concepciones más avanzadas de la noción de distribución (ver los datos como clasificadores o como agregado).

Por otra parte, respecto a las funciones que proporcionó el uso de la tecnología digital en la propuesta, en particular el Applet diseñado, se observa que, al manipular las herramientas de este, los estudiantes lograron verbalizar y profundizar en aspectos de las distribuciones que no fueron evidentes con representaciones estáticas. Por ejemplo, inicialmente cuando se les presentó a los estudiantes conjuntos de datos en gráficos de casos individuales de manera estática, se limitaron a señalar algo sobresaliente del evento (v.g. los que no pasan el examen “muestra que no pusieron atención y que no trabajan”) exhibiendo la concepción de los datos como apuntadores, y aunque reconocían que las distribuciones eran diferentes no empleaban sus atributos para verbalizar las diferencias. En cambio, cuando los estudiantes usaron la herramienta de “arrastre” en el Applet para organizar los datos, esta acción los movilizó a comparar datos de las distribuciones, mediante la identificación del valor máximo y del valor mínimo (v.g. “el más bajito y el más alto”); el reconocimiento de datos atípicos (v.g. “los únicos”), aglomeraciones (v.g. “la mayoría y casi por igual”); y la agrupación de los datos por valores de la variable (v.g. “9 o más personas van perdiendo”, “[en 702] la mayoría están perdiendo”).

A su vez, se reconoce que el cambio de representación de las distribuciones tratadas que permitía el Applet, de gráficos de casos a gráficos de puntos, les permitió a los estudiantes verbalizar aspectos que no habían sido tenido en cuenta previamente, tales como la frecuencia y moda (v.g. “poquitos pasaron con 65”, “los que perdieron más fueron con 60”) y datos atípicos (v.g. “el único que va pasando por ahí con una nota alta es el de 75”).

A sí mismo, la representación de los gráficos de puntos en combinación con el estimador, movilizó a los estudiantes a dejar de lado por un momento concepciones

de valores de cada caso o como clasificadores, para concebir la distribución como un todo, en tanto el estimador se debía fijar con ayuda del arrastre, así los estudiantes elegían “el mejor representante” de los datos usando de manera intuitiva la mediana (v.g. “más de la mitad, los que van pasando son más de la mitad, la mitad va perdiendo”) con miras a comparar los estimadores entre las distribuciones, y determinar quiénes obtuvieron mejores resultados en las pruebas o qué grupo tuvo mejor rendimiento en el examen de matemáticas,

En relación con quién provee los datos, se advierte que es un asunto que influye también en los razonamientos de los estudiantes sobre la noción de distribución. En las tareas diseñadas se previó que inicialmente fuera la profesora que orientaba la propuesta quien suministrara los datos, y que luego los estudiantes plantearan sus propios datos de una situación cercana a ellos (tiempo que tardan en dar una vuelta al colegio corriendo). Se observa que cuando inventan su propio conjunto de datos y este requiere ser comparado junto con otros conjuntos de datos preestablecidos con distinta dispersión e igual centro, contribuye a consolidar el reconocimiento de los atributos de las distribuciones estudiadas y promovió otros tales como fijarse en mayor medida en la dispersión de los datos cuando su centralidad es la misma, para decidir sobre el mejor conjunto de datos (v.g. “en el curso 701 hay varias personas que son rápidas y veloces y hay otras que son muy lentas”).

En suma, los estudiantes señalan elementos que tienen que ver primordialmente con la forma, la densidad, la dispersión y la centralidad de los datos, mientras que la simetría no fue nombrada. De igual manera, los estudiantes exhibieron concepciones de la noción de distribución como valor de cada caso, como apuntadores y como clasificadores, aunque no ven la distribución de los datos como un agregado hacen uso de atributos de la distribución acordes con su nivel escolar.

Para finalizar, se puede señalar el aporte de los resultados de esta propuesta para con las investigaciones acerca del desarrollo de la noción de distribución, pues amplía los aspectos que los estudiantes suelen considerar a la hora de tomar decisiones frente a distribuciones de datos.

A continuación, la tabla recoge las características y concepciones acerca de la noción de distribución que tuvieron en cuenta los estudiantes para comparar distribuciones de datos (los indicadores que no aparecen referenciados son producto del trabajo de grado).

Características de la Distribución que se emplean en la comparación de conjuntos de datos	
Dispersión (Bakker y Gravemeijer, 2004)	Necesidad de establecer criterios intuitivos para determinar las diferencias entre las distribuciones.
	Comparación cualitativa entre las longitudes de las barras de los valores individuales para determinar qué distribución tiene mayor o menor rango (verbal o gestualmente).
	Ver la necesidad de organizar u ordenar los datos. (Andrade, Fernández y Méndez, en prensa).
	Necesidad de encontrar el valor mínimo para a partir de él, organizar los datos
	Identificar valores máximo y mínimo. (Andrade, Fernández y Méndez, en prensa)
	Compara mínimos.
	Reconocer valores atípicos (Andrade, Fernández y Méndez, en prensa)
	Establece relaciones cualitativas entre los datos y/o relaciones cuantitativas como distancias. (Andrade, Fernández y Méndez, en prensa)
Densidad (Bakker y Gravemeijer, 2004)	Entre dos distribuciones señala la que tiene mayor dispersión.
	Agrupar los valores de la variable, sin determinar la frecuencia asociada.
	Describir relaciones de cercanía o lejanía entre las barras, reconocer condensaciones, aglomeraciones. (Andrade, Fernández y Méndez, en prensa)
	Reconocer el valor de la variable que corresponde a la mayoría de los datos.
	Agrupar datos por valores de la frecuencia, es decir, determinar grupos para la frecuencia y asignar a estos los valores de la variable correspondientes. (Andrade, Fernández y Méndez, en prensa)
Centralidad (Bakker y Gravemeijer, 2004)	Reconocer aglomeraciones considerando un punto de referencia.
	Forma: Reconoce que las gráficas de las distribuciones tienen diferente forma.
Concepciones de la noción de Distribución que se emplean en la comparación de conjuntos de datos (Konold, Higgins, Russell y Khalil, 2014)	
Ver los datos como valores individuales de cada caso	
Ver los datos como apuntadores	
Ver los datos como clasificadores	

Tabla 6. Características y concepciones de la noción de Distribución que se emplean en la comparación de conjuntos de datos.

A manera de sugerencia, se considera importante que el tránsito de los razonamientos de los estudiantes no sólo se dé a través de los gráficos de casos individuales a gráficos de puntos, sino que continúe hasta los histogramas y

posteriormente a los gráficos de caja y que comparen entre los cuatro tipos de gráficos, discutiendo qué representa y que no representa cada gráfico, pues supongo que esta ruta podría evidenciar más indicadores acerca de cómo razonan los estudiantes cuando comparan conjuntos de datos, asunto que evidentemente debe considerar el nivel o grado escolar de los muchachos.

En cuanto al diseño de las tareas, se sugiere proporcionar a los estudiantes conjuntos de gráficos con dispersión similar, pero con diferentes centros, ya que en este trabajo se les facilitó conjuntos de gráficos con centros similares, pero dispersión diferente; esto sería interesante en tanto se puede ampliar este trabajo respecto a las características de las distribuciones que emplearían los estudiantes cuando no pueden hacer uso las referidas a la dispersión de los datos.

Para terminar, en lo concerniente al campo de la Educación Estadística, espero que los resultados de esta propuesta alienten a los profesores a incorporar en sus clases, tareas mediadas por tecnología digital, puesto que la combinación de las tecnologías digitales, las tareas y el rol del docente les permite a los estudiantes transitar de definiciones informales a definiciones más específicas a medida que comprenden un objeto de estudio.

6. REFERENCIAS

- Andrade, L., Fernández, F. y Méndez, M. (En prensa). Exploración de la noción de distribución desde la variabilidad. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología –Tecné, Epistema y Didaxis*.
- Arteaga, P. (2009). Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos. Trabajo de Maestría. Universidad de Granada.
- Arteaga, P., Batanero, C., Ruiz, B. (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 129-138). Santander: SEIEM.
- Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Bakker y Gravemeijer (2004). Learning to reason about distribution. Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Conferencia inaugural.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Revista Números*, 83, 7-18.
- Batanero y Godino (2001). Análisis de Datos y su Didáctica. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Belfiori, L. (2014). Enseñanza de estadística con recursos TIC. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.
- Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Documento en proceso de evaluación.

- Colegio Kimy Pernía Domicó IED (2017). PEI, Manual de Convivencia.
- Contreras, J. y Molina, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos.
- Faustino. A., y Pérez, L. (2013). Utilización de las TIC en la enseñanza de la Estadística en la educación superior angolana. Prisma Social, núm. 11. IS+D Fundación para la Investigación Social Avanzada Las Matas, España.
- Garfield y Ben-Zvi (2008). Developing Students' Statistical Reasoning. Springer Science+Business Media B.V.
- Gutiérrez, N. (2017). Conceptualizando el objeto estadístico distribución de frecuencias: Una propuesta con estudiantes de grado 8°
- Konold, Higgins, Russell y Khalil (2014). Data seen through different lenses. Publicado en línea el 08 de enero de 2014.
- Konold, C., and Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(4), 259-289.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1999). Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y fundamentales. Punto Exe Editores. Bogotá D.C.
- Ministerio de Educación Nacional República de Colombia [MEN] (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. pp. 46-95.
- Moreno, L. y Waldegg, G (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En C. Castiblanco y L. Moreno. Seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Noss, R. y Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meanings. Holanda: Kluwer.
- Pfannkuch, M., y Reading, C. (2006). Reasoning about distribution: A complex process. *Statistics Education Research Journal*.
- Riascos, Y. (2014). El Pensamiento estadístico asociado a las medidas de tendencia central: Un estudio psicogenético sobre la media aritmética, la mediana y la moda.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26, <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj> © International Association for Statistical Education (IASE/ISI), November, 2006. Wild, C. J., and Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

7. ANEXOS

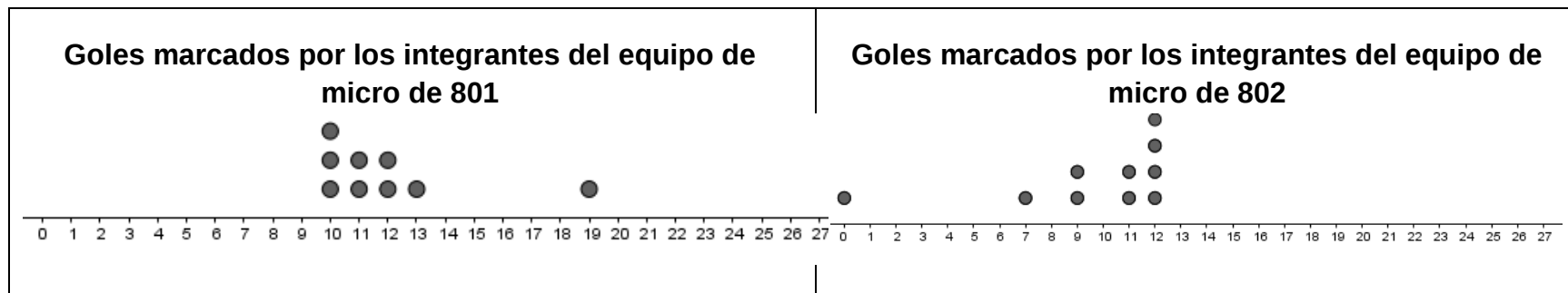
Anexo A

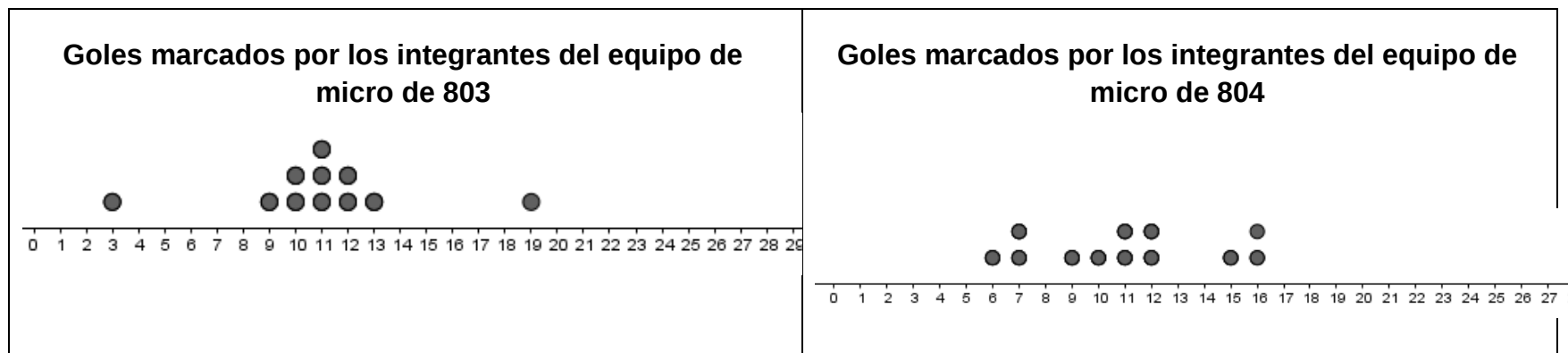
Esta es una prueba diagnóstica que hace parte de un proyecto que se lleva a cabo en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Por lo anterior, solicitamos y agradecemos tu colaboración para responder las preguntas.

Nombre: _____ **Curso:** _____

Lee la siguiente situación:

El profesor de educación física quiere elegir de entre los equipos de microfútbol de grado octavo el mejor equipo para que represente al colegio en los intercolegiados. Ayuda al profesor de educación física a elegir el mejor equipo, para esto, observa los siguientes gráficos que muestran los goles marcados por los integrantes de cada equipo de microfútbol en los últimos tres campeonatos. Redacta tus razones para elegir uno sobre el resto de los equipos de microfútbol.





¿Cuál equipo de octavo consideras que debe elegir el profesor de educación física para que represente al colegio en los intercolegiados? ¿Por qué?

Anexo B

PLANEACIÓN MATEMATICAS 2018				
GRADO	SEXTO			ARITMETICA-GEOMETRIA ESTADISTICA
PERIODO	PRIMERO- SEGUNDO- TERCERP			
COMPETENCIA	Potenciar el trabajo del conjunto de los números enteros y los racionales por medio de la aplicación de problemas de contexto y la relación de las propiedades y los elementos de polígonos para que el educando adquiera habilidades necesarias que le permitan desempeñarse adecuadamente en todos los ámbitos de su vida.			
EJES TEMATICOS	DESEMPEÑOS	ESTRATEGIAS METODOLOGICAS	ESTRATEGIAS EVALUACION	ACTIVIDADES DE NIVELACION
PATRONES Y COMPORTAMIENTO SECUENCIA NUMERICA SENTIDO DE UBICACION PLANO CARTESIANO	Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).	Desarrollo de actividades que involucren: Trabajo individual y grupal puesta en común clase comunitaria clase magistral Trabajo escolar y extraescolar que involucre: Prácticas Ejercicios de lápiz, papel, colores. Sustentaciones	• Participación activa. • Trabajo en clase. • Elaboración de actividades en clase. • Tareas. • Quices. • Evaluación Trimestral • Evaluación oral • Trabajo en grupo • Trabajo individual • Autoevaluación • Coevaluación • Heteroevaluación.	Resuelve una o diversas situaciones específicas, enfatizadas en el comportamiento de diversas variables.
	ECUACIONES problemas de aplicación enfoque temático	Opera sobre números desconocidos y encuentra las operaciones apropiadas al contexto para resolver problemas.		Estrategias de la clase: Explicación del tema Manipulación de Objetos. Inducción y Deducción. Experiencias cotidianas. Talleres de trabajo Colectivo Espacios de reflexión frente a los

MOVIMIENTOS PLANO CARTESIANO Traslación, simetría y combinaciones	Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.	valores. Principios Didácticos: Autonomía, Comunicación y respeto	Dibuje figuras en el plano y realice movimientos de traslación y simetría. Construya poliedros utilizando material, determine sus características principales, área superficial y volumen.
Población y muestra Variables cualitativas y cuantitativas Tipos de recolección de datos	Interpreta información estadística presentada en diversas fuentes de información, la analiza y la usa para plantear y resolver preguntas que sean de su interés.		Realice una encuesta y de ella determine conceptos básicos de estadística: (Poblaciones, muestras, tipos de variables....)

ANALISIS E INTERPRETACION DE DATOS Diagramas (barras y circular) Medidas de tendencia central	Compara características compartidas por dos o más poblaciones o características diferentes dentro de una misma población para lo cual seleccionan muestras, utiliza representaciones gráficas adecuadas y analiza los resultados obtenidos usando conjuntamente las medidas de tendencia central y el rango.			Trabajo escrito (conceptos y análisis) graficas de barras y circular
EXPERIMENTOS ALEATORIOS	A partir de la información previamente obtenida en repeticiones de experimentos aleatorios sencillos, compara las frecuencias esperadas con las frecuencias observadas.			Realice un juego de probabilidad
POLIEDROS Características, Construcción Volumen, Aplicaciones	Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados. Propone y desarrolla estrategias de estimación, medición y cálculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas			Define (área, ángulo, longitud) entre otros conceptos teniendo en cuenta diversos polígonos dados utilizando los instrumentos adecuados y requeridos. Realiza un poliedro utilizando materiales didácticos

Anexo C

Prueba piloto

Tarea 1. Actividad 1: Comparación de distribuciones

Estas son dos tareas que hacen parte de un proyecto que se lleva a cabo en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Por lo anterior, solicitamos y agradecemos tu colaboración para responder las preguntas.

Nombre: _____ Curso: _____

Actividad 1:

En la barra de herramientas del computador encontraran una ventana de GeoGebra, con el nombre “Hoja 1”.

- 1. Pulsen sobre la ventana Hoja 1.
- 2. De acuerdo con los gráficos mostrados en “Hoja 1” den respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué información muestran los gráficos? ¿Qué pueden decir sobre estos datos?

3. ¿A qué curso le fue mejor en el examen y por qué?

4. ¿Pueden organizar los datos? Expliquen cómo organizaron los datos y por qué de esta manera.



5. Luego de organizar los datos, ¿Qué pueden decir de las calificaciones?

6. Nuevamente respondan: ¿a qué curso le fue mejor en el examen y por qué?

Tarea 1. Actividad 2: Comparación de distribuciones

Actividad 2:

En la barra de herramientas del computador encontraran una ventana de GeoGebra, con el nombre “Hoja 2”.

1. Pulsen sobre la ventana Hoja 2.

De acuerdo con los gráficos mostrados en “Hoja 2” den respuesta a las siguientes preguntas:

2. ¿Qué información muestran los gráficos? ¿Qué pueden decir sobre estos datos?

3. Pulsen sobre el botón “siguiente” del applet “Hoja 2” para dar respuesta a la siguiente situación:

Si la profesora de matemáticas necesita definir una calificación que represente al curso 702 y una calificación que represente al curso 701 para decidir cuál de los dos cursos debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas. ¿Dónde dejarías el estimador? ¿Por qué

4. ¿A cuál curso de le fue mejor en el examen y por qué?

Tarea 1. Actividad 3: Comparación de distribuciones

Actividad 3:

En la barra de herramientas del computador encontraran una ventana de GeoGebra, con el nombre “Hoja 3”.

En esta ventana “Hoja 3”, encontraran dos representaciones gráficas diferentes, que presentan la misma situación de la actividad 1 y 2.

Respondan:

1. En la actividad anterior ubicaron el estimador en la calificación _____, ¿Creen que esta bien su elección? ¿por qué?

2. En caso de modificar la calificación indiquen su nueva elección: _____
Retomando la situación final de la actividad 2. Si la profesora de matemáticas necesita definir un puntaje que represente al curso 702 y un puntaje que represente al curso 701 para decidir cuál de los dos cursos debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas. ¿Dónde dejarían el estimador? ¿Por qué?



3. Muevan el deslizador del histograma en ambas ventanas varias veces y expliquen lo que observan en los gráficos acerca de los datos:

Preguntas Contingentes Tarea 1. Actividad 1

1. Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:
2. ¿Qué puedes decir acerca de la calificación obtenida por Juan del curso 702?
3. ¿Qué puedes decir acerca de la calificación obtenida por Majo del curso 701?
4. ¿Qué estudiante obtuvo la mayor calificación en el curso 701 y en el curso 702? Explica.
5. ¿Qué estudiante obtuvo la menor calificación en el examen en el curso 701 y en el curso 702? Explica.
6. ¿A qué curso le fue mejor en el examen y por qué? (Esta pregunta se mantendrá a lo largo de las siguientes actividades).

Preguntas Contingentes Tarea 1. Actividad 2

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

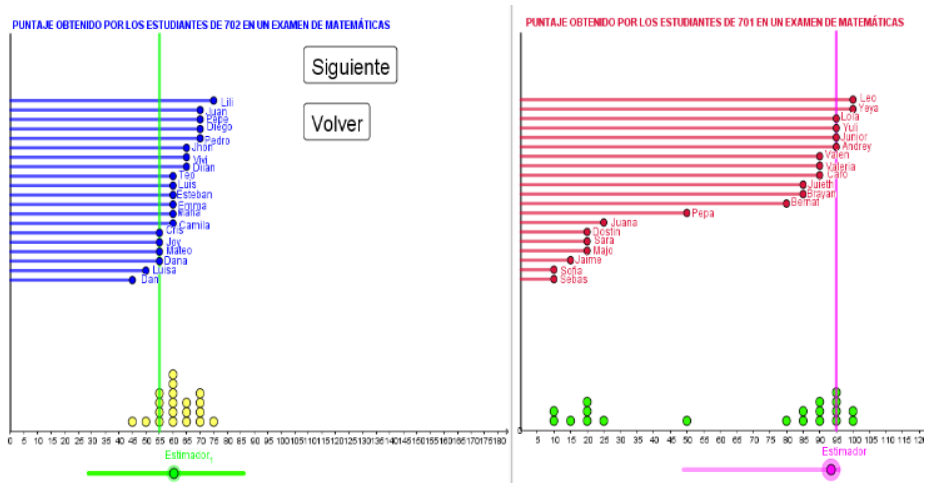
1. ¿Qué tienen en común los gráficos presentados en la ventana Hoja 1 y Hoja 2?
2. ¿Cuántos estudiantes del curso 701 obtuvieron un puntaje de 50 en el examen de matemáticas?
3. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación de 50 en el curso 702?
4. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación de 100 en el curso 701?
5. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación de 100 en el curso 702?
6. ¿Cuál es la calificación más obtenida por los estudiantes en el curso 701?
7. ¿Cuál es la calificación más obtenida por los estudiantes en el curso 702?
8. ¿Cuál es la calificación menos obtenida por los estudiantes en el curso 701?
9. ¿Cuál es la calificación menos obtenida por los estudiantes en el curso 702?
10. ¿Cuál curso obtuvo mejores resultados en el examen? ¿por qué?
Luego de mostrar el estimador.
11. ¿En cuál grafico están más esparcidos los datos? Explica.
12. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron puntajes más parecidos?
13. ¿Creen que esas calificaciones bajas afectan las calificaciones altas? ¿por qué?
14. ¿Dónde van a dejar el estimador?



Preguntas Contingentes Tarea 1. Actividad 3

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

1. Si la profesora de matemáticas necesita definir un puntaje que represente al curso 702 y un puntaje que represente al curso 701 para decidir cuál de los dos cursos debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas. ¿Dejarías el estimador donde se indica? ¿por qué?



Preguntas Contingentes Tarea 1. Actividad 4

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

1. ¿Cuántos estudiantes del curso 701 obtuvieron una calificación menor a 70 en el examen de matemáticas?
2. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación menor a 70 en el curso 702?
3. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación mayor a 70 en el curso 701?
4. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación mayor a 70 en el curso 702?
5. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación entre 40 y 100 en el curso 701 y cuántos estudiantes en el curso 702?
6. ¿Cuáles son las calificaciones más obtenidas por los estudiantes del curso 701?
7. ¿Cuáles son las calificaciones más obtenidas por los estudiantes del curso 702?
8. ¿Cuál curso obtuvo mejores resultados en el examen? ¿por qué?

Tarea 2. Actividad 1: Comparación de distribuciones

En la barra de herramientas del computador encontrarás una ventana de GeoGebra, con el nombre “Hoja 6”. En esa ventana “Hoja 6”, encontrarás una hoja de cálculo.

- Pulsa sobre la ventana “Hoja 6”.
- Crea una situación en la que se compare alguna característica de dos grupos de personas.
- Digita 20 datos para grupo de personas en la hoja de cálculo preparada para esto. De acuerdo con los gráficos mostrados en la “Hoja 6” de GeoGebra da respuesta a las siguientes preguntas:
- ¿Qué información muestran los gráficos? ¿Qué pueden decir sobre estos datos?

- ¿Pueden organizar los datos? Expliquen cómo organizaron los datos y por qué de esta manera.

- ¿Qué pueden decir de los datos?

En la ventana “Hoja 6”, encontrarás un botón llamado “siguiente”. Cuando lo pulses, encontrarás en una misma ventana los gráficos del punto anterior y un deslizador que recibe el nombre de “estimador”, el cual te permitirá arrastrar la línea verde o morada para mostrar la frecuencia que representa a cada grupo por separado.

Pulsa el botón siguiente del applet “Hoja 6” para dar respuesta a la siguiente situación:

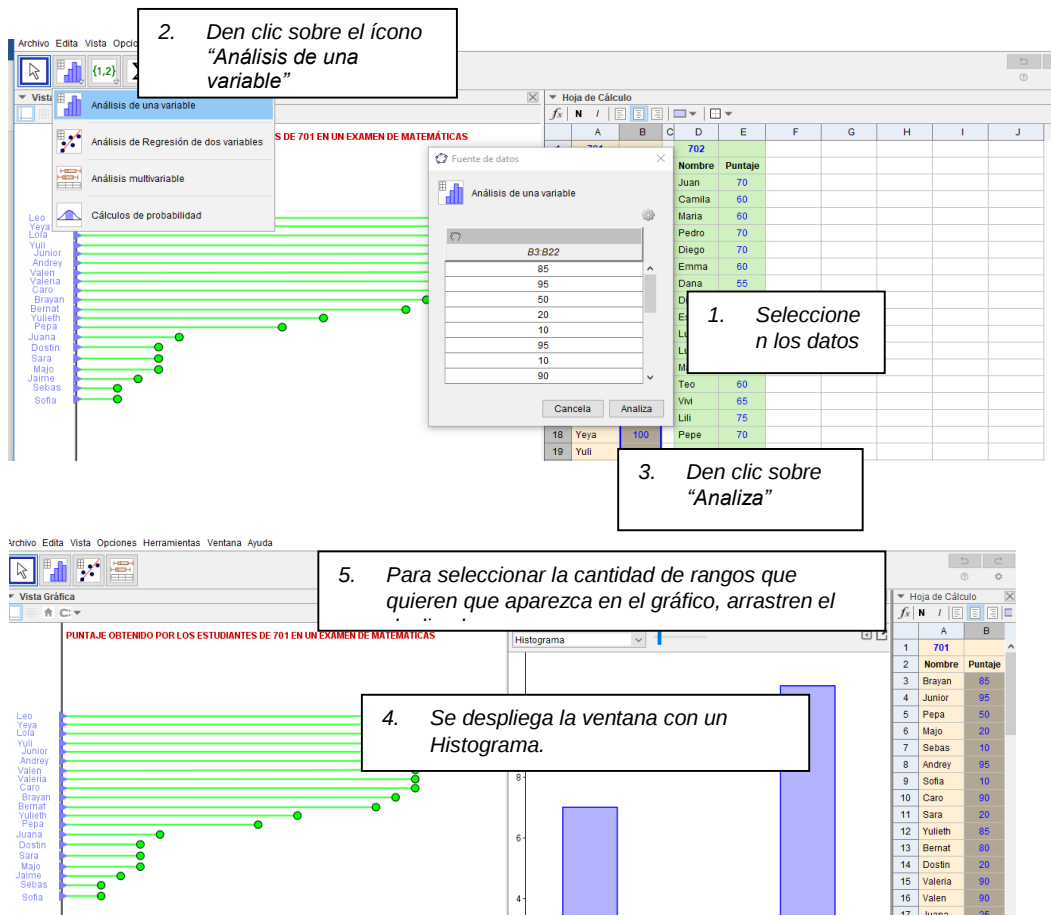
- Si se necesita definir una frecuencia que represente a los grupos de personas por separado ¿Dónde dejarías el estimador? ¿por qué?

Tarea 2. Actividad 2: Comparación de distribuciones

Actividad 2:

En la barra de herramientas del computador encontrarás dos ventanas de GeoGebra, con el nombre “Hoja 7” y “Hoja 8”.

1. Emplea la representación gráfica de GeoGebra “Histograma”. Para esto, realiza los siguientes pasos:



Pasos para representar datos con un Histograma en GeoGebra.

2. Realiza los pasos de la Ilustración 7 con los datos grupo de personas 1 en la “Hoja 7” y luego con los datos del grupo de personas 2 en la “Hoja 8”. Explica lo que observas en los gráficos.



3. Mueve el deslizador del histograma en ambas ventanas varias veces y explica lo que observas en los gráficos:

Preguntas Contingentes Tarea 2. Actividad 1

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

1. ¿Qué puedes decir acerca de la _____ obtenida por Juan del grupo 1?
2. ¿Qué puedes decir acerca de la _____ obtenida por Majo del grupo 2?
3. ¿Qué persona obtuvo la mayor _____ en el curso 2 y en el grupo 1? Explica.
4. ¿Qué persona obtuvo la menor _____ en el examen en el grupo 2 y en el grupo 1? Explica.
5. ¿A qué grupo le fue mejor en el _____ y por qué? (Esta pregunta se mantendrá a lo largo de las siguientes actividades).
Luego de mostrar el estimador.
6. ¿En cuál gráfico están más esparcidos los datos? Explica.
7. ¿En cuál curso las personas obtuvieron _____ más parecidos?
8. ¿Creen que esas _____ bajas afectan las _____ altas? ¿por qué?
9. ¿Dónde van a dejar el estimador?
10. Si la profesora de _____ necesita definir un _____ que represente al grupo 1 y un _____ que represente al curso 2 para decidir cuál de los dos



cursos debe representar al colegio en las _____. ¿Dejarías el estimador donde se indica? ¿por qué? (la profesora coloca el estimador en algún lugar dependiendo los datos.

Preguntas Contingentes Tarea 1. Actividad 2

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

1. ¿Cuántas personas del grupo 2 obtuvieron una _____ menor a un (un dato más o menos central) en _____ y cuantos en el grupo 2?
2. ¿Cuántas personas obtuvieron una _____ mayor a (un dato más o menos central) en el grupo 1 y en el grupo 2?
3. ¿Cuántas personas obtuvieron una _____ entre 50 y 100 en el grupo 1 y cuántas personas en el grupo 2?
4. ¿Cuáles son las _____ más obtenidas por las personas del grupo 1 y del grupo 2?
5. ¿Cuál grupo obtuvo mejores resultados en _____? ¿por qué?



Anexo D

Revisión de Expertos:

Juicio Experto: Profesor Felipe Fernández Hernández

Institución: Universidad Pedagógica Nacional

De: FELIPE JORGE FERNANDEZ HERNANDEZ <fffernandez@pedagogica.edu.co>
Enviado: viernes, 7 de junio de 2019 8:50
Para: MARITZA MENDEZ REINA <mmendezr@pedagogica.edu.co>
Asunto: RE: Favor TAREAS SOBRE COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Hola Maritza:

Devuelvo la propuesta con algunos comentarios. En general me gusta la propuesta.

Por mi parte tienen un visto bueno.

Felipe

De: MARITZA MENDEZ REINA
Enviado: miércoles, 5 de junio de 2019 5:43 p. m.
Para: FELIPE JORGE FERNANDEZ HERNANDEZ
Asunto: Favor TAREAS SOBRE COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Buenas tardes, Profesor Felipe

Como ya debe ser de su conocimiento, me encuentro desarrollando mi trabajo de grado de la MDM con guía de la profesora Maritza sobre comparación de distribuciones. Es mi interés



que usted como conocedor de la materia me oriente con comentarios, en cuanto a la realización de las tareas que pretendo ejecutar.

Le comento que la versión que le envió es la última versión luego de realizar dos pilotajes con estudiantes de grado séptimo.

Pido disculpas porque no me fue posible asistir de manera presencial en el momento que usted dispuso para este fin. Le agradezco su atención y colaboración.

Atentamente:

Vivian Yulieth Marulanda

Estudiante de MDM.

Maritza Méndez Reina

Profesora - Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencia y Tecnología

Calle 72 N°. 11-86 Of. B305

COMENTARIOS EXPERTO:

Tarea 1. Actividad 1

Sobre el Ítem 1. Veo procedente e interesante la situación planteada. Creo que responde bien y es coherente con marco conceptual que se supone subyace al contexto de datos presentado.

Sobre el Ítem 2. Me parece atinada las preguntas sugeridas: Pero estoy suponiendo que ellos aún no hacen uso de las opciones de la Hoja 1 de Geogebra en la que se hace la reorganización de datos.



Sobre el Ítem 3. Hay una representación intermedia que no se considera el applet que es ordenar los segmentos sin agrupar los datos. ¿la consideraron y luego desecharon? Sea que la consideren o no vale la pena mencionarla.

Tarea 1. Actividad 2

Sobre el Ítem 4. Veo que la idea de poner al servicio un estimador es procedente. Me pregunto si dicho estimador también podría ser usado sin necesidad de agrupar u ordenar los datos. ¿Podría ser de interés esa variante? ¿Qué desventajas u oportunidades de observación podría tener? Si no la consideraron en ensayo piloto me genera curiosidad como posible alternativa de indagación.

Tarea 2. Actividad 1

Sobre el Ítem 2. Me gusta la propuesta. Hice mi propia propuesta en Hoja 2, pero creo que puse tiempos muy cortos (no tuve en cuenta la posible dimensión del colegio)

Sobre el Ítem 4. Me imagino que ensayo piloto los estudiantes se dejan influir de la representación trabajada en hoja 1

Sobre el Ítem 5. Interesante las tres formas que sugieren los datos presentados. En particular veo atinado hacer que las estimaciones procedan de manera visual para evitar el “virus” de “promediar aritméticamente” que se inserta en educación tradicional de estadística. Me gusta mucho la propuesta.

Tarea 2. Actividad 2

Sobre el Ítem 1. Interesante dilema el que se plantea al presentar estas cuatro representaciones. El papel que se le hace jugar a los valores atípicos me parece bien sugestivo. Por mi parte visto bueno a toda la propuesta en general.

Preguntas Contingentes Tarea 2. Actividad 1 y Actividad 2

Me parece que está ok esta propuesta de preguntas contingentes. Me gusta la propuesta.



Anexo E

El Applet

El Applet está dividido en nueve hojas, en la primera se muestran las notas de dos grupos de estudiantes en un examen de matemáticas en dos distintas representaciones (ver Hoja 1 en la carpeta llamada Applet), con dicha Hoja se lleva a cabo la tarea 1. En las ocho hojas restantes, se muestran los tiempos en que tardan corriendo en dar una vuelta al Colegio tanto de niños como niñas de cuatro grupos de estudiantes en dos representaciones gráficas diferentes (ver Hoja 2, Hoja 3, Hoja 4, Hoja 5, Hoja 6, Hoja 7, Hoja 8 y Hoja 9 en la carpeta llamada Applet), con dichas Hojas se lleva a cabo la tarea 2.



Anexo F

Tareas versión imprimible para los estudiantes

Tarea 1. Actividad 1: Comparación de distribuciones

Estas son dos tareas que hacen parte de un proyecto que se lleva a cabo en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Por lo anterior, solicitamos y agradecemos tu colaboración para responder las preguntas.

Nombre: _____ Curso: _____

Actividad 1:

Pulsen sobre la ventana Hoja 1 que encontraran en la barra de herramientas del computador. De acuerdo con los gráficos mostrados en la “Hoja 1” den respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué información muestran los gráficos? ¿Qué pueden decir sobre estos datos?

2. Para las olimpiadas matemáticas de Bogotá, la profesora debe elegir de entre los dos grupos, el curso que representará al colegio en dicho evento. ¿Cuál curso consideran debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas? ¿Por qué? Expliquen los aspectos que tuvieron en cuenta para elegir el curso que debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas.



3. Para dar respuesta a la pregunta anterior, pueden considerar el definir una nota representativa, es decir una nota que represente al curso 701 y una nota que represente al curso 702. Expliquen los aspectos que tuvieron en cuenta para elegir la nota en cada curso.

Tarea 1. Actividad 2: Comparación de distribuciones

Actividad 2:

En la “Hoja 1” encontraran un botón llamado “siguiente”.

1. Pulsen sobre el botón “siguiente”.

De acuerdo con las representaciones gráficas mostradas en la ventana siguiente den respuesta a las siguientes preguntas:

2. En la actividad anterior dijeron que la nota que debe representar a 701 es: _____, y la que debe representar a 702 es: _____. ¿Creen que estuvo bien su elección? ¿por qué?

3. Pulsen nuevamente el botón “siguiente” de la “Hoja 1” para dar respuesta a la siguiente situación:

Si la profesora de matemáticas necesita definir una calificación que represente al curso 701 y una calificación que represente al curso 702. ¿Dónde dejarían el



estimador? ¿Por qué? Expliquen los aspectos que tuvieron en cuenta para elegir la nota que representa a cada curso.

Tarea 2. Actividad 1: Comparación de distribuciones

Actividad 1:

1. Lean atentamente la siguiente situación:

Para la competencia “Supérate Intercolegiados” de atletismo en la modalidad masculina prejuvenil, el profesor de educación física del Colegio Kimy Pernía Domico, debe seleccionar uno de los cursos de grado séptimo para que los estudiantes representen al Colegio en estas competencias.

2. Supongamos que en el curso 702 hay 18 estudiantes hombres, ahora consideren posibles tiempos (en segundos) en los que puedan demorarse en dar una vuelta al colegio corriendo. Escribanlos a continuación:

Tiempo (en segundos) que tardan los hombres del curso 702 en dar una vuelta al colegio.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7	Estudiante 8	Estudiante 9
Estudiante 10	Estudiante 11	Estudiante 12	Estudiante 13	Estudiante 14	Estudiante 15	Estudiante 16	Estudiante 17	Estudiante 18



Abran el archivo “Hoja 2” que se encuentra en la barra de herramientas del computador. En ella encontrarán una vista gráfica y una hoja de cálculo. En este momento utilizarán sólo la hoja de cálculo. Digiten los tiempos de los 18 estudiantes.

3. Una vez hayan digitado los tiempos, observen el gráfico resultante. De acuerdo con este gráfico sigan las indicaciones y den respuesta a las preguntas:

4. Organicen los datos. ¿De qué manera decidieron organizar los tiempos de los estudiantes? ¿Por qué los organizaron de esa manera?

5. Abran los archivos “Hoja 3”; “Hoja 4” y “Hoja 5” que se encuentran en la barra de herramientas del computador, en dichas hojas encontrarán las representaciones gráficas de los tiempos en que tardan en dar una vuelta al colegio otros tres grupos de estudiantes. Observen los gráficos que se muestran en estas “Hojas”
¿Qué pueden decir de los tiempos obtenidos por los estudiantes en esos cursos?

6. ¿Qué curso tiene mejores tiempos? ¿Por qué?



En cada “Hoja”, encontrarán un botón llamado “siguiente”.

Cuando lo pulsen, encontrarán los gráficos que muestran los tiempos en que tardaron los estudiantes de cada curso en dar una vuelta al colegio en una representación gráfica diferente.

7. Respondan lo siguiente: El profesor de educación física necesita decidir a qué curso llevar a la competencia de atletismo. Ayúdalo a decidir a qué curso debe llevar. Para esto, definan un tiempo que represente a los grupos de estudiantes por separado. Usen el estimador en cada “Hoja” para definir un tiempo que represente a los grupos de estudiantes por separado. ¿Dónde dejarían el estimador?

- a. Tiempo para el curso 701: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?

- b. Tiempo para el curso 702: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?

- c. Tiempo para el curso 703: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?



- d. Tiempo para el curso 704: _____
¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?

- e. ¿Qué curso debe llevar el profesor a la competencia de atletismo? ¿Por qué?

Actividad 2:

1. Ahora el profesor necesita de su ayuda para determinar qué curso de grado séptimo debe ir a los Intercolegiados en la modalidad femenina. Abran las Hojas 6, 7, 8 y 9, organícelas en la pantalla del computador de manera tal que puedan observar todos los gráficos simultáneamente (Ilustración 20). Con ayuda de los estimadores definan un tiempo que represente a los grupos de estudiantes por separado. ¿Dónde dejarían el estimador?

- a. Tiempo para el curso 701: _____
¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?



b. Tiempo para el curso 702: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en ese curso?

c. Tiempo para el curso 703: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?

d. Tiempo para el curso 704: _____

¿Por qué eligieron ese tiempo en cada curso?

3. ¿Qué curso debe llevar el profesor a la competencia de atletismo? ¿Por qué?



Preguntas Contingentes:

Tarea 1

Actividad 1

Algunas preguntas contingentes que reorientaron las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación fueron:

(preguntas 1 y 2):

1. Digan que pasa con las notas por al menos tres estudiantes de cada curso.
2. ¿Cuál estudiante obtuvo la mayor nota en el curso 701?
3. ¿Cuál estudiante obtuvo la mayor nota en el curso 702?
4. ¿Cuál estudiante obtuvo la menor nota en el examen en el curso 701?
5. ¿Cuál estudiante obtuvo la menor nota en el examen en el curso 702?
6. ¿Cuántos estudiantes del curso 701 obtuvieron una nota de 10 en el examen de matemáticas?
7. ¿Cuántos estudiantes del curso 701 obtuvieron una nota de 10 en el examen de matemáticas?

(pregunta 3)

Si dicen aspectos de la moda, simetría, etc. (12 a 14) de lo contrario a partir de la 8.

1. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota de 10 en el curso 702?
2. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota de 20 en el curso 701?
3. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota de 20 en el curso 702?
4. ¿Qué proceso están haciendo para responder mis preguntas?
5. consideran que, así como está el gráfico ¿les permite realizar ese proceso rápidamente?
6. ¿hay alguna manera en que este proceso se haga de manera más rápida?

Y si organizan las notas de otra manera.

1. ¿De qué manera decidieron organizar las notas? ¿Por qué las organizaron de esa manera?



2. Ahora sí, respondan a la pregunta: Si la profesora de matemáticas necesita decidir cuál de los dos cursos debe representar al colegio en las olimpiadas matemáticas ¿Cuál curso debe elegir? ¿Por qué?

Actividad 2

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación:

1. ¿Creen que las notas bajas afectan las altas en ambos cursos? ¿Cuál debe ser la nota que represente a cada curso?
2. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron puntajes más parecidos?
3. ¿En cuál grafico están más esparcidos los datos? Explica.

Tarea 2

Actividad 1

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación.

(pregunta 8):

1. ¿Creen que los tiempos altos afectan los bajos en los cursos? ¿Cuál debe ser el tiempo represente a cada curso?
2. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron tiempos más parecidos?
3. ¿En cuál grafico están más esparcidos los datos? Explica.
4. ¿Dónde vas a dejar el estimador? ¿Por qué?
5. ¿Cuál curso obtuvo mejores resultados en la prueba de atletismo? ¿por qué?

Actividad 2

Algunas preguntas contingentes que pueden reorientar las caracterizaciones de las distribuciones y su comparación.

(pregunta 2):



1. ¿Creen que los tiempos altos afectan los bajos en los cursos? ¿Cuál debe ser el tiempo represente a cada curso?
2. ¿En cuál curso los estudiantes obtuvieron tiempos más parecidos?
3. ¿En cuál gráfico están más esparcidos los datos? Explica.
4. ¿Dónde vas a dejar el estimador? ¿Por qué?
5. ¿Cuál curso obtuvo mejores resultados en la prueba de atletismo? ¿por qué?