PROCESOS DE CONJETURACIÓN Y JUSTIFICACIÓN: EL ROL DE LOS PROGRAMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

ELIZABETH MUÑOZ RAMIREZ
TATIANA MARCELA ROJAS SALAMANCA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá, D.C.
2017

PROCESOS DE CONJETURACIÓN Y JUSTIFICACIÓN: EL ROL DE LOS PROGRAMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

ELIZABETH MUÑOZ RAMIREZ
TATIANA MARCELA ROJAS SALAMANCA

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Asesor
Mg. Camilo Sua Flórez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá, D.C.
2017

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Procesos de conjeturación y justificación: el rol de los programas de geometría dinámica***, presentado por las estudiantes:

Elizabeth Muñoz Ramirez, Cód. 2015185009, CC. 53.076.549
Tatiana Marcela Rojas Salamanca, Cód. 2015185014, CC. 1.013.590.736

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 44 puntos.

Observaciones:

____.

En constancia se firma a los 29 días del mes de agosto de 2017.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: Camilo Sua Flórez
CAMILO SUA FLÓREZ (UPN)

Jurados:

Profesora:
CLAUDIA VARGAS GUERRERO (UPN)

Profesor: MARTIN ACOSTA
MARTIN ACOSTA GEMPELER
(UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS)

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a:

Dios porque de él procede todo conocimiento y nos brindó la posibilidad de tener una parte de él.
Nuestros Familiares, especialmente a nuestros esposos Andrés y Octavio, por su apoyo, aliento, paciencia y amor.
Al colegio Fundación Educacional Ana Restrepo del Corral por abrirnos las puertas y poder trabajar con los chicos, a ellos también muchas gracias por su disposición.

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado de maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Procesos de conjeturación y justificación: el rol de los programas de geometría dinámica
Autor(es)	Muñoz Ramirez, Elizabeth; Rojas Salamanca, Tatiana Marcela
Director	Mg. Sua Flórez, Jeison Camilo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 100 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA, ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA, MEDIACIÓN. GÉNESIS INSTRUMENTAL

2. Descripción

El presente trabajo, evidencia una investigación de estudio de caso desarrollada en los años 2015, 2016 y 2017. Desarrollada con un grupo de tres estudiantes, de grado noveno de una institución privada sin ánimo de lucro de la ciudad de Bogotá. La investigación constó del diseño de siete problemas, que desarrollaron el grupo de estudiantes con la ayuda de un Software de Geometría Dinámica (Geogebra), con el fin de evidenciar la mediación de software en el proceso de conjeturación y justificación, propios de la actividad demostrativa. Para realizar el análisis de la interacción de los estudiantes con el software, se contó con la integración de marcos de referencia como la Actividad Demostrativa, el Enfoque Instrumental y la Mediación del Software. Éstos se articularon sistemáticamente y dieron cuenta del rol del software en cada proceso de la activiad demostrtiva. Pero además fue posible caracterizar aquellos artefactos (que a la luz del Enfoque Instrumental) lograron convertirse en instrumentos para los estudiantes. Se concluye que el uso del software permitió a los estudiantes formular tanto conjeturas como de justificaciones, basados tanto en un sistema teórico local construido en comunidad, como en fuentes no teóricas.

3. Fuentes

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. *Cuadernos de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 1–15.

Artigue, M., Iranzo, N., Fortuny, J. M., Leung, A., Chan, Y., Lopez-Real, F., & Rabardel, P. (2011). Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra. *Cuadernos de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 91–103.

Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring: physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments. *CabriWorld 2001*, 1–26.

Arzarello, F., Bartolini, M., Leung, A., Mariotti, M., & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. In *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 97–143). Retrieved from http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Baccaglini-frank, M., & Mariotti, A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry : The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225–253. http://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Bartolini, M., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (1962), 746–783.

Bartolini, M., & Schoen, R. (2011). Lingguo bu and robert schoen geogebra for model-centered learning. In *Model-Centered Learning* (Lingguo Bu, pp. 1–6). Florida, USA: Sense Publishers.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703–724. http://doi.org/10.1080/0020739042000232556

Del Castillo, A., & Montiel, G. (2009). ¿ Artefacto O Instrumento? Esa Es La Pregunta. *Acta Latinoameticana de Matemática Educativa*, *22*, 459–468. Retrieved from http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(ADelCastillo-GMontiel2009a)-ALME22-.pdf

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., … Meagher, M. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89–132). Paris.

Flores, C., Gómez, A., & González, S. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. *V Foro de Investigación Educativa*, *5*, 473–477. Retrieved from http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/3331

Flores, J. (2015). Génesis Instrumental : El caso de la función cuadrática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *41*, 57–67.

Gal, H., & Linchevsk, L. (2010). Ver o no ver : análisis de las dificultades en geometría desde la perspectiva de la percepción visual. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 163–183.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 5–23. Retrieved from https://link.springer.com/article/10.1023/A:1012737223465

Hershkowits, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*, 61–76.

Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. *Computer Technology and the Teaching of Geometry*, 121–128.

Iranzo, Nuria y Fortuny, J. M. (2011). 6 . Influence of Geogebra on Problem. *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, 91–103.

Iranzo, N., & Fortuny, J. (2009). La Influencia Conjunta del Uso de Geogebra y Lápiz y Papel en la Adquisición de Competencias del Alumnado. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(3), 433–446.

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas*. *Repositorio académico de la Universidad de Chile*. Universidad de Chile.

Leung, A., Chan, Y., & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental Genesis in Dynamic Geometry Environments. *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: Technology Revisited*, *17*, 346–353. Retrieved from http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c65.pdf

Lingefjard, L. (2011). Rebirth of euclidean geometry? In *Model-centered mathematics learning using Geogebra* (pp. 205–215). Sense Publishers.

Mariotti, M. (2006). Prof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173–204). Rotterdam: Sense Publishers. Retrieved from http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=OTCsKu0BZ0kC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Handbook+of+Research+on+the+Psychology+of+Mathematics+Education+Past,+Present+and+Future&ots=4sJnBHNKGC&sig=imNVmKY4SWycDIp0AcBmeLjpRmM

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1–2), 25–53. http://doi.org/10.1023/A:1012733122556

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems : how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*, 441–452. http://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5

Martínez, P. C. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento Y Gestión: Revista de La División de Ciencias Administrativas de La Universidad Del Norte*, (20), 165–193. http://doi.org/10.1055/s-0029-1217568

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá. Retrieved from http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias Y Cuidadanas*, 46–95. Retrieved from http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moreno, L. (2001). Cognición, Mediación y tecnología. *Avance Y Perspectiva*, *20*, 65–68.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. *Memorias Del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Las Tecnologías Digitales En El Aula de Matemáticas*, *1*, MEN. Colombia, 81-86. Retrieved from http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo1.pdf

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional*, *53(2)*(1), 129–150.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Rabardel, P. (2002). *People and technology a cognitive: approach to contemporary instruments.* (<hal-01020705>, Ed.). Springer US. Retrieved from http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Samper, C., Molina, O., Perry, P., & Camargo, L. (2013). Geometría plana: un espacio de aprendizaje. In C. Samper & O. Molina (Eds.), (1st ed., pp. 14–32). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Retrieved from http://editorial.pedagogica.edu.co/docs/files/Geometria Plana-2.pdf

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5–27.

Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21–29.

SED. (2007). Componentes del pensamiento espacial. In H. Figueredo (Ed.), *Colegios Públicos de excelencia para Bogotá. Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático* (pp. 67–70). Bogotá.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281–307. http://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (Vol. 12, pp. 307–313).

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, *9*(1), 77–101.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65–81.

4. Contenidos

El documento se encuentra compuesto por seis capítulos, descritos a continuación:

1. Planteamiento del problema, en este capítulo se describe la problemática que enmarca el desarrollo del trabajo, además se presenta la pregunta de investigación, los objetivos y los antecedentes que sirven de base como referente teórico.
2. Marco Teórico, presentan la propuesta teorica que adoptamos, en la construcción, desarrollo y análisis de la propuesta elaborada. Estos referentes son: Enfoque Instrumental, Actividad Demostrativa y Software de Geometría Dinámica.
3. Metodología, la perspectiva utilizada en la investigación es estudio de caso, cuya característica fundamental es el análisis de datos en forma cualitativa y descriptiva. También se aclara el proceso realizado en la construcción de los diferentes problemas (7 problemas), el tipo de tarea desarrollado, los recursos utilizados en la toma de información y la organización de datos.
4. Análisis, este capítulo se presenta, en siete apartados, cada uno presenta el análisis de un problema, se describe el proceso de solución en contraste con la propuesta teorica.
5. Resultados, este capítulo presenta los resultados más destacados en el análisis, evidenciando el logro o no de los objetivos.
6. Conclusiones, se expresan algunas reflexiones que emergieron en el desarrollo de la investigación.

5. Metodología

La investigación reportada en este documento se enfoca en la aplicación de una secuencia de siete problemas a un grupo de 3 estudiantes y con base en ello la caracterización de la mediación de un *Software de Geometría Dinámica*, en los procesos de la actividad demostrativa.

Para el desarrollo de la investigación se hizo uso de la perspectiva investigativa estudio de caso, cuyo análisis de datos es de carácter cualitativo-descriptivo. Para Martínez (2006), el estudio de caso es un instrumento valioso en el ámbito de la investigación, cuya fortaleza emerge de sí misma, registrando la conducta de las personas que se involucran en el desarrollo del estudio; pues las estrategias metodológicas cuantitativas centran su información en los resultados arrojados por cuestionarios. En este sentido, la investigación busca ofrecer diferentes perspectivas sobre el comportamiento de los sujetos de la muestra haciendo uso de diferentes fuentes de datos, para que de esta manera se determinen conclusiones sobre sus actuaciones.

6. Conclusiones
Describir y caracterizar la mediación del software de geometría dinámica, en los procesos de la actividad demostrativa, nos fue posible gracias a que la propuesta de aprendizaje que se desarrolló con los estudiantes, se diseñó con el propósito de incluir situaciones problema que dependieran exclusivamente de la interacción dinámica que ofrece el software. A partir de allí analizamos las producciones de los estudiantes, en correspondencia con las propuestas teóricas, “Constructo actividad demostrativa” del grupo de investigación (Æ•G) y el “Enfoque Instrumental” derivado de la teoría de la Ergonomía Cognitiva desarrollada por Rabardel (2002). En el análisis, estas propuestas se articularon con el proceso de solución de los problemas llevado a cabo por los estudiantes y permitió reconocer que en la mediación del software, los estudiantes lograron evolucionar no sólo en las justificaciones (pasar de un nivel no teórico a uno que sí lo era), sino que también lograron apropiarse de artefactos proporcionados por el software a tal grado que se convirtieron en instrumentos para ellos. A su vez se observó que algunos de los artefactos que alcanzaron el nivel de instrumento para los estudiantes fueron, Arrastre Guiado, Distancia o Longitud y Circunferencia.

Elaborado por:	Muñoz Ramirez, Elizabeth Rojas Salamanca, Tatiana Marcela
Revisado por:	Mg. Camilo Sua Flórez

Fecha de elaboración del Resumen:	10	6	2017

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En este documento presentamos un estudio que pretende analizar cómo media un software de geometría dinámica en los procesos de conjeturación y justificación. Estos procesos fueron observados en el trabajo realizado por un grupo estudiantes de grado noveno, pertenecientes a una institución educativa privada ubicada en el nororiente de Bogotá (Colombia) en el segundo semestre del año 2015. A partir del diseño e implementación de una propuesta de aprendizaje que promueve procesos de conjeturación y justificación en geometría, describimos y caracterizamos el papel mediador del software durante el desarrollo de cada proceso.

Para el diseño y análisis de la propuesta acogemos como parte del marco teórico, la aproximación metodológica para el aprendizaje de la demostración "*actividad demostrativa",* desarrollada por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G). Adicionalmente, para el análisis involucramos el Enfoque Aproximación Instrumental que se enmarca dentro de la teoría de la Ergonomía Cognitiva propuesta por Rabardel (2002), dado que a través de este es posible caracterizar la interacción entre estudiantes, el conocimiento matemático y un ambiente tecnológico. Así mismo nos proveemos del enfoque Mediación Instrumental para contar con elementos que nos permitan caracterizar la mediación del Software.

El presente estudio, al corresponder a un enfoque descriptivo e interpretativo, atiende a la metodología Estudio de Caso (Martínez, 2006), mediante la cual reconstruimos teóricamente la interacción entre los estudiantes, el conocimiento matemático y un software de geometría dinámica.

La estructura del documento se encuentra compuesta por seis capítulos. En el primero exponemos la problemática que motivó la realización del trabajo, al igual que la pregunta de investigación, los objetivos, y los antecedentes. En el segundo capítulo presentamos el marco teórico dando a conocer los enfoques que tuvimos en cuenta en la investigación: enfoque instrumental, actividad demostrativa y Software de Geometría Dinámica (en adelante SGD). En el tercer capítulo se presenta la metodología que utilizamos en el desarrollo de la actividad, describimos el proceso de construcción, implementación y análisis de los datos acopiados. En el cuarto capítulo describimos en detalle el proceso de análisis de los datos recopilados en la implementación de la secuencia de problemas. En el quinto capítulo presentamos los resultados arrojados en el análisis de datos, exponiéndolos frente a los objetivos planteados en el inicio del trabajo. Por último tenemos las conclusiones, comentando los resultados arrojados en el capítulo anterior.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos la problemática que fue objeto de estudio en esta investigación. Iniciamos presentando la descripción del problema a partir de aquellos puntos de tensión que aparecen en el campo de la educación matemática y algunas razones por las que consideramos viable y pertinente realizar este estudio. Posteriormente daremos a conocer la pregunta de investigación y los objetivos que orientaron el desarrollo del mismo, a través de los cuales se espera dar respuesta a la pregunta formulada. Por último, presentaremos algunos antecedentes investigativos que se aproximan a nuestro objeto de estudio, los cuales nos permiten situarnos dentro del campo investigativo y reconocer los avances realizados en esta línea.

1.1 Planteamiento del problema

El impacto de la tecnología ha cambiado la forma en que vivimos, nos relacionamos, comunicamos y aprendemos. El campo de la Educación Matemática no es ajeno a este resultado; por el contrario, ha adelantado estudios alrededor del potencial de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. En esta línea, Artigue (2007) señala que los primeros estudios adelantados centraban su atención en la influencia de la tecnología en las prácticas matemáticas, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los planes de estudio y la formación de profesores. Sin embargo, esta autora también señala que en este primer intento existían diferencias entre el discurso de los expertos, sobre el potencial de los programas computacionales de cálculo formal para el aprendizaje de las matemáticas y la realidad en el contexto escolar. De un lado, se reconocía que dichos programas contaban con una fuerte influencia sobre las matemáticas, pero, aunque se daban numerosos ejemplos de esta nueva forma de hacer matemáticas, su vínculo con la enseñanza y aprendizaje no estaba claramente definido, se requería investigar al respecto.

Estudios adelantados por investigadores del campo de la educación matemática revelan que en las últimas dos décadas se ha concentrado el interés en la investigación sobre la influencia de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Al respecto, Sandoval y Moreno (2012), sostienen que las tecnologías digitales en educación están promoviendo diferentes formas de relación y comunicación entre los actores involucrados. Particularmente, en la geometría, autores como Leung, Chan, y Lopez-Real (2006) señalan que la investigación ha girado en torno a cómo el SGD puede cambiar nuestra percepción frente a lo que son y cómo se hacen las matemáticas, con la intención de enriquecer las prácticas pedagógicas.

Respecto al SGD, tensiones asociadas a su uso también han sido reconocidas en el campo de la geometría, estas han sido señaladas por investigadores como Hanna (2000). Esta autora reconoce que el SGD posee el potencial para fomentar la exploración y la demostración en geometría, puesto que permite plantear y demostrar conjeturas. Sin embargo, sostiene que debido al potencial del software para la exploración, se ha generado la visión de que hay que reemplazar la demostración en geometría, por un enfoque totalmente experimental. Por tanto, sugiere que no se debe realizar una separación entre el proceso de exploración y la demostración, dado que por un lado, la exploración de un problema puede llevar a comprender su estructura y sus ramificaciones, y por el otro, la demostración proporciona certeza y comprensión real de las matemáticas. En esta misma línea Mason (citado en Mariotti, 2006 p.189), refiriéndose a la función de arrastre de los programas de geometría dinámica, expone que el arrastre proporciona a los estudiantes una fuerte evidencia perceptiva de que determinada propiedad es cierta y los lleva a considerar la exploración como suficiente para garantizar la verdad de lo que se observa. Esto hace que para los estudiantes sea innecesario hacer una demostración, lo cual es un problema.

Por otro lado, De Villiers (2004), sugiere que una postura tradicional frente al tratamiento de la demostración mediante el uso de software, ha consistido en generar dudas en los estudiantes sobre la validez de sus observaciones empíricas y luego intentar introducir la demostración como un proceso de “verificación”. Esto es considerado como un problema, dado que los estudiantes adquieren un alto grado de confianza durante la manipulación y basan la demostración en observaciones empíricas, dejando de lado procesos de conjeturación y justificación incorporados en la actividad demostrativa y que pueden ser promovidos en la interacción con los SGD.

La actividad demostrativa en el aula es hoy en día parte esencial del currículo de matemáticas en Colombia, dado que está ligada a los procesos de pensamiento matemático propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006). Por ejemplo, la formulación, planteamiento, transformación y resolución de un problema exige de los estudiantes formular argumentos que justifiquen los análisis, los procedimientos realizados y la validez de las soluciones. Como consecuencia, en relación al razonamiento, el MEN (1998) pretende que los estudiantes expliquen el por qué de la solución de una tarea específica, que estructuren argumentos para sustentar generalizaciones, que sometan dichos argumentos a la demostración y que exploren nuevos caminos de solución.

De acuerdo a lo anterior, se ha hecho evidente la necesidad de promover procesos de conjeturación y justificación en geometría. Algunas propuestas han estado encaminadas al uso del SGD como mediador en estos procesos. Por ejemplo, Lastra (2005) manifiesta que el software en geometría permite desarrollar la visualización, las múltiples representaciones y la elaboración de conjeturas, actividades que están relacionadas con los procesos de conjeturación y justificación. A su vez, en las orientaciones curriculares de la Secretaría de Educación Distrital (SED, 2007) se indica que el SGD exige un tipo de construcción que favorece la visualización de las relaciones y propiedades de determinado objeto geométrico que esté en juego, al poder manipular sus componentes sin que sus propiedades se alteren.

En concordancia con lo anterior, Sandoval (2009) sostiene que el software proporciona herramientas de apoyo para la exploración. Algunas de estas herramientas hacen referencia a la visualización y al reconocimiento de relaciones y propiedades que no son explícitas en el enunciado de un problema. Además permite establecer un puente entre la representación y los elementos teóricos del objeto geométrico estudiado, lo que da un carácter matemático a la conjeturación y justificación en geometría. Lo anterior lleva a considerar que el aprendizaje de la geometría recobra su valor y significado gracias a la mediación del software, puesto que en la manipulación y exploración de los objetos y propiedades, es posible hallar argumentos que permiten al estudiante apropiarse significativamente de los conceptos geométricos así como plantear y demostrar conjeturas.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, Leung et al. (2006), Hanna (2000) y Sandoval (2009) reconocen el SGD como una potente herramienta para pasar de un nivel empírico a uno teórico, pero a su vez identifican en su uso una fuerte tendencia a permanecer en un enfoque empírico dado su alto potencial en acciones como la exploración. Idea también apoyada por De Villiers (2004) y Mason (citado en Mariotti, 2006 p.189), este último se refiere específicamente a la función de arrastre, argumenta que esta dado que produce fuerte evidencia perceptiva lleva a considerar que no es necesario realizar una justificación teórica. Estas tensiones que se presentan a la hora de emplear una herramienta de geometría dinámica, nos lleva a considerar que es importante caracterizar el papel mediador del SGD, por un lado porque teniendo una clara caracterización será posible identificar puntualmente qué lleva a que su uso se arraigue al nivel empírico y por el otro porque en la medida en que esto sea posible, estaremos en la capacidad contribuir a superar la brecha que hay entre el nivel perceptivo y el teórico. Es por ello que surge la siguiente pregunta de investigación:

1.2 Pregunta de investigación

De acuerdo a lo anterior, surge entonces la siguiente pregunta: *¿Cuáles son las características del papel mediador que desempeña el software de geometría dinámica, en procesos de conjeturación y justificación en geometría?*

1.3 Objetivos

1.1.1 General

- Describir y caracterizar el papel mediador que desempeña el software de geometría dinámica en los procesos de conjeturación y justificación en geometría.

1.1.2 Específicos

- Diseñar e implementar una propuesta de aprendizaje que promueva procesos de conjeturación y justificación en geometría, mediante el uso de un software de geometría dinámica.
- Describir los procesos de conjeturación y justificación desarrollados por los estudiantes a través de la solución de una secuencia de problemas, en contraste con las herramientas del software de geometría dinámica que median en su desarrollo.
- Reconocer el papel mediador que desempeña el software de geometría dinámica al desarrollar procesos de conjeturación y justificación en la propuesta de aprendizaje.

1.4 Antecedentes de la Investigación

La literatura permite reconocer distintos estudios asociados a la mediación del software en el aprendizaje de la geometría. Presentamos algunos de estos estudios con el fin de ubicarnos dentro del campo investigativo en el que se adscribe la propuesta desarrollada en este documento. A través de la revisión literaria realizada queremos reconocer el tipo de propuestas que favorecen la actividad demostrativa y la pertinencia e impacto del SGD como mediador en los procesos de conjeturación y justificación. Para ello presentamos los siguientes tres apartados:

Potencial del SGD en la actividad demostrativa

✓ Samper, C., Camargo, L., Molina, O., Perry, P. (2013), Geometría plana un espacio de aprendizaje. Vol. 1, pp. 11-34. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En el libro *Geometría plana: un espacio de aprendizaje,* Samper, Molina, Perry, y Camargo (2013) presentaron el proceso de innovación llevado a cabo en el curso de Geometría Plana, del programa Licenciatura en Matemáticas, que la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) ofrece para la formación inicial de profesores de matemáticas. Este proceso se suscitó gracias al reconocimiento de problemáticas asociadas a la práctica demostrativa que estaban llevando a cabo los estudiantes para profesor y su incidencia en el desempeño profesional. La práctica demostrativa estaba dirigida hacia la validación de un enunciado que en gran medida no se entendía. El profesor presentaba a los estudiantes el sistema teórico que se encontraba en un libro de texto que era abordado en el curso, mientras que los estudiantes aprendían individualmente y en gran medida por fuera del aula, axiomas, definiciones y teoremas a la vez que imitaba esquemas de demostración presentados por el profesor o presentes en el libro de texto.

Lo anterior llevó al equipo docente investigador a cuestionarse sobre “¿qué ideas de demostración y práctica demostrativa podrían forjarse, en consecuencia, los estudiantes?” (Samper et al., 2013, p.13). Es por ello que, apoyados en distintos autores especialistas en su cuestionamiento, se propuso y desarrolló el constructo

“Actividad Demostrativa”. A partir de este se implementó la aproximación metodológica basada en el tipo de tareas propuestas a los estudiantes, el recurso tecnológico y el tipo de interacción entre profesor y estudiantes o entre estudiantes.

En un balance de la experiencia de innovación el grupo de investigación se dio a la tarea de examinar los alcances y las posibilidades reales de éxito que tenía la propuesta a través de dos estudios. Estos revelaron que hasta ese momento los estudiantes habían adquirido habilidades en la comunicación, en aspectos teleológicos y epistémicos, lo que les permitió aprender a demostrar.

De este texto rescatamos, particularmente, la conceptualización y la formalización de la actividad demostrativa que presentaremos en nuestro marco teórico, así como el reconocimiento que realizan de las bondades que ofrece el SGD para promover procesos de justificación en el marco de una demostración, “…el uso de la geometría dinámica para explorar y experimentar favorece la generación de un ambiente de indagación y, si se usa para buscar ideas para la justificación, se convierte en herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración” (Samper et al., 2013 p.13).

- ✓ Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 25–53.

El propósito de la investigación llevada a cabo por Mariotti (2000) consistió en desarrollar el pensamiento teórico de un grupo de estudiantes a partir de un Experimento de Enseñanza. El estudio fue realizado en una escuela italiana, con estudiantes de los grados noveno y décimo de secundaria. Haciendo uso del SGD Cabri. Mariotti (2000) centró su atención en la Construcción Social del Conocimiento a través del software. Pues hasta el año 2000 el tratamiento que la escuela Italiana estaba dando a la enseñanza de la geometría se encontraba fragmentado. Por un lado era tradición trabajar la geometría desde un entorno intuitivo (se presentaba a los alumnos como una colección de definiciones, denominación y descripción de las figuras geométricas) hasta grado octavo; mientras que desde el grado noveno, en adelante, se realizaba un trabajo en un entorno de geometría deductiva pero con un enfoque tradicional, dado que era el docente quien proporcionaba a los estudiantes los argumentos necesarios para construir las pruebas. Este hecho dificultaba la transición de un entorno al otro, así como desarrollar un pensamiento teórico en los estudiantes. Es por ello que la autora reconoció en la geometría dinámica un ambiente propicio para superar tal dificultad. El principal objetivo de las actividades fue el desarrollo del significado de "construcción" como un procedimiento teórico que podía ser validado por un teorema. Al desarrollar las actividades con esta visión halló como resultado que Cabri ofreció un complejo sistema de signos que apoyaban el proceso de mediación semiótica en el desarrollo del significado de las construcciones geométricas.

Este documento contribuye a esta investigación en tanto permite comprender el potencial semiótico que tiene el uso de un SGD en el aula, ante la posibilidad de proponer tareas en torno al proceso de justificación, que posibilitan la transición de construcciones con regla y compás, a un entorno dinámico. En este último la manipulación de los objetos geométricos brinda la posibilidad de acceder a un sistema de signos que contribuyen en la construcción de significado de las construcciones geométricas.

✓ Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics*, 44*(1–2), 5–23 Toronto: Kluwer Academic Publishers. Universidad de Toronto

Una de las razones que dio origen al desarrollo de esta investigación fue la poca importancia que algunos profesores daban a la demostración en el currículo de matemáticas. Al respecto, Hanna (2000) reportó que para algunos profesores, las técnicas heurísticas eran más útiles que la demostración en el desarrollo de habilidades, tanto en las matemáticas como para la vida. Es por ello que a lo largo de este documento Hanna (2000), apoyada en resultados de una investigación empírica realizada con anterioridad, argumentó que la comprensión matemática era posible a partir del trabajo alrededor de la demostración. Ella sugirió que para lograr una actividad demostrativa y por ende la comprensión de las matemáticas, era pertinente usar el SGD Cabrí, pues esta herramienta permitiría la enseñanza eficaz de la demostración. La autora, a partir de un marco de referencia basado en el uso herramientas heurísticas, la exploración y la visualización, clarificó el papel que desempeñaba el SGD en la demostración en el aula.

En relación al papel del SGD en la prueba, esta autora resaltó que las pruebas son la maquinaria matemática para resolver problemas y para justificar, y que estas contribuyen en el aula cuando el profesor es capaz de usar pruebas que comunican el entendimiento. De acuerdo a las heurísticas, propuso que estas no fuesen tomadas como suficientes y necesarias en el proceso de resolución de un problema, ya que algunos docentes han creído erróneamente que como ellas establecen relaciones importantes en el proceso de razonamiento se debe restar importancia al desarrollo de la prueba en el aula. Por su parte, aludió a que la exploración permite el proceso de conjeturación, sin embargo esta queda corta cuando se pretende generar conocimiento matemático, ya que aunque este promueve procesos de conjuración y la evidencia de características esenciales en un teorema, no puede evidenciar explícitamente como se relacionan dichas conjeturas y características encontradas.

A modo de reflexión, el estudio de este documento nos permitió reconocer la necesidad de ampliar nuestra mirada y tener una visión clara frente a los procesos deductivos con la experimentación que surge en un ambiente de geometría dinámica.

Perspectivas del docente cuando media el SGD en la actividad demostrativa

- ✓ Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. ZDM - *International Journal on Mathematics Education*, *45*, 441–452

Este estudio hizo parte de diversas investigaciones que se realizaron alrededor del trabajo desarrollado por Mariotti (2000). De este trabajo se tomaron ejemplos del Experimento de Enseñanza, como datos de la nueva investigación desarrollada por Mariotti (2013), con el fin de dar a conocer cómo el profesor podía explotar el potencial semiótico de un SGD y su vez ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que presentaban al pasar de un enfoque intuitivo a uno de carácter deductivo en la geometría. Uno de los ejemplos consistió en trazar un segmento (en la pantalla del software Cabri) y a partir de este construir un cuadrado. Los estudiantes debían describir el procedimiento y razonamiento llevado a cabo durante su construcción. Cuando ellos habían resuelto la tarea, el profesor analizó las diferentes soluciones y las clasificó en dos grupos: las que presentaban una cadena de propiedades geométricas y las que obedecían a un dominio perceptivo. Luego las socializó y de algunas de ellas surgieron criterios comunes de justificación, como el uso de la medida (segmentos y ángulos) y su precisión.

Basada en la Teoría de la Mediación Semiótica propuesta por Bartolini y Mariotti (2008), esta autora mostró que la acción semiótica del profesor afectaba el desarrollo de los significados personales de los estudiantes hacia el significado matemático. Esto la llevó a sostener que la mediación del docente era clave en la construcción del conocimiento matemático y que Cabrí podría ser explotado por el maestro para hacer que los estudiantes desarrollaran auténticos significados matemáticos a través de las actividades en clase con propósitos organizados. Aspecto que es de nuestro interés dado que nos permite tener una visión clara de nuestro papel en el aula pues debemos esforzarnos en saber orientar el proceso de solución de los problemas llevado a cabo por los estudiantes para favorecer el cumplimiento de nuestros objetivos.

- ✓ De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *IJMEST* 35 (5), pp. 703-724

Desde un enfoque reconstructivo de la enseñanza, De Villiers (2004) presentó en este documento una reseña descriptiva de algunas actividades que diseñó de acuerdo a los niveles de Van Hiele y que consistieron en la conceptualización de trapezoide isósceles. Las actividades fueron trabajadas en el SGD *Geometer´s Sketchpad,* con el propósito de acercar a docentes desde la conceptualización a diferentes funciones de la prueba. Esto porque según el autor la enseñanza de la prueba en geometría se había reducido a su función tradicional de “verificación”. Los docentes procuraban crear dudas en las mentes de sus estudiantes sobre la validez de sus observaciones empíricas. Hecho que resultaba problemático en un ambiente de geometría dinámica porque los estudiantes comúnmente obtenían un nivel de confianza tan alto durante la manipulación de los objetos geométrico que no eran capaces de distinguir otras funciones de la prueba (explicación, descubrimiento, desafío intelectual y sistematización).

Algunos de los resultados más relevantes que De Villiers (2004) señaló de su estudio correspondieron al sentido que recobró para los docentes la definición en el contexto de la geometría, al ser construida en el ambiente de geometría dinámica. A su vez señaló que la investigación dejó abierta la posibilidad de reflexionar y discutir sobre las funciones de la prueba como explicación, descubrimiento y sistematización, y sobre su posible incorporación el plan de estudios de la geometría de la escuela.

- ✓ Flores, C. Gómez, A. Gonzales, C. (2010). Esquemas de argumentación en Actividades de Aprendizaje con ayuda de Geometría Dinámica.

El documento fue producto de una investigación en la que se desarrolló un conjunto de actividades apoyadas en la metodología Experimento de Enseñanza y que fueron aplicadas a 16 grupos de 4 o 5 integrantes en el Instituto Politécnico Nacional de México, con el fin de observar esquemas de argumentación en los estudiantes. Dado que según ellos en los niveles básico, medio y medio superior no se privilegiaba el uso del razonamiento en la resolución de problemas tanto en la validación de conjeturas, como en el desarrollo de esquemas de argumentación en los estudiantes.

Flores, Gómez, y González (2010), manifestaron la importancia que se debía dar al desarrollo del pensamiento deductivo, pues indicaron que este era relevante en el pensamiento matemático. Apoyados en los esquemas de argumentación y el uso de la geometría dinámica propuesto en 2007 por uno de los autores de este documento, analizaron las diferencias que surgían cuando estudiantes de licenciatura y profesores de matemáticas en ejercicio se enfrentaban a una actividad con lápiz y papel y cuando lo hacían con el software *The Geometer's Skecthpad*. Flores et al. (2010) hallaron que herramientas como el arrastre proporcionado por el software permitían observar relaciones que permanecían invariantes aun cuando cambiaban las propiedades de los objetos. Ellos manifestaron que en los dos ambientes existía una fuerte tendencia por parte de algunos docentes en realizar argumentos fácticos y empíricos, en los que se consideraba suficiente la descripción de la exploración en el software para exponer un argumento. Esto llevó a concluir que si los docentes hacían uso del software enfocado en la exploración, también orientarán al estudiante al mismo uso.

Al considerar que nuestro interés se centra en caracterizar el papel mediador de SGD en procesos de conjeturación y justificación, vemos pertinente este documento para orientar a los estudiantes que participaran de esta investigación hacia la propuesta de justificaciones que trasciendan a los de naturaleza fática y empírica.

Perspectiva teórica de la mediación del SGD en geometría.

- ✓ Baccaglini-frank, M. & Mariotti, A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225–253.

Este estudio tuvo como objetivo principal investigar los procesos cognitivos que se desarrollaban durante la fase de producción de conjeturas, particularmente cuando se hacía uso de ciertos modos de arrastre en el SGD Cabri en la solución de problemas abiertos. Es por ello que el soporte teórico de esta investigación estuvo ligado a tres nociones fundamentales: la de SGD, la noción de problema abierto en un SGD, y el de arrastre en SGD. Las nociones fueron desarrolladas por Baccaglini-frank y Mariotti (2010), a lo largo de su carrera profesional e investigativa y adaptadas de acuerdo a los propósitos de la investigación. De la noción de SGD resaltaron que la herramienta arrastre permitía una manipulación en tiempo real de la experiencia física y dinámica de los objetos geométricos, que a su vez permitían reconocer una dependencia lógica entre los elementos teóricos, así como superar la brecha entre el entorno experimental y el teórico del que hace parte la geometría. De la noción de problema abierto en un SGD Baccaglini-frank y Mariotti (2010), resaltaron las posibilidades de formular conjeturas a partir de una tarea de la que no se sabía con exactitud cuál es el camino a seguir para resolverla o su solución. Del arrastre en un DGS resaltaron su potencialidad como instrumento (dentro de la teoría de Rabardel) para producir argumentos y su utilidad en la solución de problemas abiertos.

Esta investigación se desarrolló en dos fases, en la primera se realizó la construcción del modelo mediante el que se pudiesen describir ciertos aspectos cognitivos de un proceso de producción de la conjetura a partir de la herramienta arrastre Cabrí. En la segunda se aplicó el modelo para ser probado como una herramienta de análisis con estudiantes entre los 15 y 16 años de edad.

Del estudio se concluyó que el modelo describía adecuadamente el uso de cuatro modalidades diferentes de arrastre aunque se enfatizó sobre el arrastre mantenido. El modelo, desde la perspectiva instrumental de Rabardel, fue visto como una descripción de un esquema de utilización; en otras palabras, el esquema de utilización fue visto como el esquema arrastre mantenido.

El análisis de las exploraciones través del modelo permitió a Baccaglini-frank y Mariotti (2010), la emergencia de dos nociones adicionales: por un lado, la de *trayectoria* "...como descripción de una construcción mental que puede surgir durante una exploración dinámica cuando se usa el esquema arrastre mantenido…". Por otro lado, la de *argumento instrumentado* como "...una argumentación que soporta una inferencia lógica...", en la que se produce un orden lógico a través del uso de la herramienta de arrastre y con la que se pretende convencerse a sí mismo o a otra persona de una demanda específica, cambiando así el estatus epistémico de quien la pone en práctica.

Este documento aporta a nuestra investigación desde diferentes perspectivas, primero nos permite reconocer el ambiente favorable que garantiza el SGD para la formulación de conjeturas; segundo, conocer que es pertinente abordar en un SGD problemas abiertos para favorecer la formulación de conjeturas; tercero, tener una perspectiva teórica desde la cual analizar la mediación del SGD en los procesos de argumentación, como lo es la perspectiva instrumental de Rabardel.

- ✓ *Iranzo N. y Fortuny J.* (2009), La Influencia Conjunta del Uso de Geogebra y Lápiz y Papel en la Adquisición de Competencias del Alumnado*. Enseñanza de Las Ciencias*, 27(3), 433–446.

El estudio desarrollado por Iranzo y Fortuny (2009) hizo parte de un proyecto de investigación sobre la integración de la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de la geometría y fue motivado por el fuerte impacto que estas habían provocado en la educación matemática, pero a su vez por diversas dificultades que se habían presentado al integrar la tecnología en las clases de matemáticas. Como aporte para superar estas dificultades, los autores se propusieron analizar la relación entre la resolución de problemas de geometría analítica en un ambiente de lápiz y papel y en uno de geometría dinámica. Apoyados en el enfoque instrumental de Rabardel (2001) y en el uso de los modos de arrastre propuesto por Arzarello (2002), orientaron dicha investigación hacia la caracterización de las estrategias de resolución de los estudiantes, el análisis de los procesos de instrumentación e instrumentalización para esbozar diferentes tipologías de alumnos y la exploración de la influencia de los dos ambientes en la adquisición de conocimiento, visualización y pensamiento estratégico en el alumno. Para ello se propuso a un grupo de 10 estudiantes resolver dos problemas de geometría analítica en ambientes de lápiz y papel y Geogebra.

Mediante la metodología estudio de caso realizaron el análisis de la información desde una perspectiva cualitativa-interpretativa. De su análisis, Iranzo y Fortuny (2009) lograron categorizar el actuar de los estudiantes como: autónomos, instrumentales, procedimentales y naif[1], considerando estas categorías como un prototipo para tipificar y analizar el comportamiento de los estudiantes. A su vez obtuvieron como resultado un listado de técnicas instrumentadas utilizada por los estudiantes al desarrollar los ejercicios en GeoGebra. También observaron que los estudiantes presentaron dificultades al tratar de transferir las estrategias usadas en lápiz y papel a GeoGebra.

De este documento destacamos que en el enfoque instrumental de Rabardel y en los modos de arrastre que propone Arzarello, podemos hallar elementos que nos permitan perfilar el sustento teórico de nuestra investigación. Ahora, como este estudio fue desarrollado con la metodología estudio de caso desde la perspectiva cualitativa-interpretativa también consideramos que nos es de utilidad para

[1] Según el autor son alumnos con muchas dificultades conceptuales, algebraicas y de visualización y su grado de instrumentación es bajo

reconocer como implementar este tipo de metodología dado que en nuestro trabajo consideramos adoptarla.

- ✓ Leung, A., Chan, Y., & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental Genesis in Dynamic Geometry Environments. *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: Technology Revisited*, *17*, 346–353.

En este documento Leung et al. (2006), en respuesta a cómo se conceptualiza la geometría y se aprende en entornos de geometría dinámica, presentaron una propuesta que se desarrolló en torno a la solución de una tarea de geometría en la que se pretendía determinar la condición necesaria para la conceptualización del teorema de Ceva. Basados en el constructo Génesis Instrumental planteado por Verillon y Rabardel, los autores estudiaron la evolución de los esquemas de utilización de los estudiantes, particularmente aquellos que emergían al implementar la herramienta *arrastre* desde sus diferentes modalidades. Para interpretar y describir el hallazgo de los esquemas de utilización en este estudio, los autores usaron como instrumento la Teoría de la Variación y el enfoque de investigación fenomenográfico.

Los resultados de este estudio demostraron que el SGD era clave para el aprendizaje de la geometría, particularmente para representar visualmente invariantes geométricas en medio de las variaciones simultáneas involucradas al usar la herramienta arrastre. Mediante el uso de esta herramienta dinámica hallaron que existía un potencial dialéctico entre el ámbito conceptual de la geometría y el mundo de los objetos empíricos virtuales.

Dado que este estudio se centró en la geometría euclidiana y que a la vez se basó en el constructo génesis instrumental de Verillon y Rabardel para observar la evolución de los esquemas de utilización de los estudiantes, lo consideramos como un referente significativo pues permite tener un panorama sobre cómo poner en práctica el constructo génesis instrumental a la hora de analizar la información.

- ✓ Sandoval, I (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21 (1), pp. 5-27

Este documento formó parte de una investigación doctoral desarrollada por Sandoval en la Universidad Pedagógica Nacional de México cuyo propósito fue estudiar "la influencia de la geometría dinámica en el surgimiento y desarrollo de estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos de los estudiantes de preparatoria" (Sandoval, 2009, p.2). En el documento la autora reportó el papel de la geometría dinámica como una herramienta mediadora entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. Dicho reporte fue motivado porque en la literatura encontró que existían dificultades en los estudiantes para describir y comunicar las relaciones estructurales de los objetos geométricos así como en la habilidad para justificarlas en el marco de una teoría.

Para explicar el papel de la geometría dinámica, Sandoval (2009) se apoyó en el enfoque Instrumental de Rabardel y en la secuencia de acciones de los *esquemas de acción* definida por Laborde. A partir de ellos y una metodología exploratoria-descriptiva halló la existencia de una relación estrecha entre las herramientas utilizadas y el conocimiento matemático. En otras palabras, encontró que el buen manejo de determinada herramienta dependía de su articulación con el conocimiento matemático. También encontró que la herramienta de medición del software propició la reflexión de los estudiantes en torno a lo que observaban numéricamente y su conocimiento geométrico, la cual se convirtió en un puente entre el conocimiento perceptivo y el geométrico.

El anterior es un documento que también se acerca a los intereses de nuestra investigación y la postura teórica que pretendemos tomar. Nos brinda la oportunidad de reconocer que pese a los hallazgos de algunos investigadores que reportan un alto grado de desarrollo intuitivo por los estudiantes cuando media un SGD en el proceso de justificación, esta autora brinda otro panorama que reconoce en el SGD un soporte para pasar de un enfoque intuitivo a uno teórico.

A modo de cierre

En síntesis, al indagar sobre las investigaciones que se han desarrollado alrededor del impacto del SGD en los procesos asociados a la Actividad Demostrativa en geometría, hemos encontrado que el SGD es una potente herramienta que puede ser empleada para pasar de un proceso experimental a uno deductivo o teórico. Este paso es posible siempre y cuando el estudiante logre una articulación entre el conocimiento matemático y la herramienta utilizada. Pero además si en la exploración y experimentación se propicia un ambiente de indagación que sea útil para la formulación de conjeturas, así como para buscar ideas que lleven a una justificación.

En estos estudios se reconoce que en el proceso de la elaboración de construcciones geométricas, cuando estas soportan el arrastre y la demostración matemática, se contribuye a la introducción del pensamiento teórico. Esto porque la herramienta arrastre permite observar relaciones que permanecen invariantes aun cuando cambian las propiedades de los objetos y porque favorece una interacción dialéctica entre el ámbito conceptual de la geometría y el mundo de los objetos empíricos virtuales.

Otro asunto que consideramos importante y que sobresale en la literatura presentada es el papel que juega la experiencia y el conocimiento del profesor cuando pretende usar como herramienta el SGD para favorecer el paso de un entorno intuitivo a uno teórico en sus estudiantes. Él debe tener una visión clara frente a la naturaleza de las matemáticas y la capacidad de relacionar procesos deductivos con la experimentación que se da al emplear determinado SGD. A su vez los problemas, tareas o actividades que propaga deben tener propósitos claros y organizados. También reconocemos que algunos estudios señalaron que si bien el SGD es una potente herramienta para introducir a los estudiantes en la construcción del pensamiento teórico, puede convertirse en un obstáculo para ello si su uso se queda en un proceso netamente empírico. El estudiante, al adquirir un alto grado de confianza en este proceso, terminará desconociendo la importancia de escalar su uso a niveles teóricos.

Por último, los documentos que fueron objeto de estudio nos brindaron un panorama de las investigaciones que se han realizado alrededor de los intereses de nuestra investigación. El estudio de la mediación del SGD en la actividad demostrativa se ha centrado en aspectos como: reconocer el potencial de la mediación del SGD en procesos de argumentación, conjeturación y demostración; determinar el rol y ofrecer un cambio de perspectiva a los profesores frente a la actividad demostrativa a través de la mediación del SGD para favorecer el tránsito entre un enfoque intuitivo y uno teórico; estudiar y analizar en el marco de la génesis instrumental la relación entre la resolución de problemas de geometría analítica en un ambiente de lápiz y papel y en uno de geometría dinámica, la evolución de los esquemas de utilización de los estudiantes al implementar la herramienta *arrastre* desde sus diferentes modalidades y determinar papel de la geometría dinámica cuando media entre el conocimiento perceptivo y el geométrico.

Al reconocer tales estudios en la literatura, observamos que en el campo de la geometría dinámica y particularmente cuando esta media en la actividad demostrativa, se han realizado estudios de diversa naturaleza que no distan de nuestro objeto de estudio. Sin embargo nuestro interés se centra en dar cuenta del papel mediador del SGD en la actividad demostrativa, específicamente en los procesos de conjeturación y justificación a la luz del constructo de la génesis instrumental.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los elementos conceptuales que sustentan el desarrollo de estudio aquí reportado. Presentamos en primer lugar el *Enfoque Instrumental*, a través del cual analizaremos la mediación del SGD en los procesos de conjeturación y justificación. En un segundo momento presentamos el constructo *Actividad Demostrativa*, dado que este nos brinda herramientas, tanto para el diseño de la propuesta que se implementará en el aula, como para su posterior análisis. En un tercer momento caracterizamos la mediación del SGD desde el reconocimiento de sus beneficios, potencialidades y desventajas.

2.1 Aproximación desde el enfoque Instrumental

2.1.1 Enfoque Instrumental

Realizar la investigación presentada en este documento requiere involucrar un marco de referencia que permita interpretar la presencia y uso de las herramientas tecnológicas en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Autores como Drijvers, Kieran, Mariotti, Ainley, Andresen, Chan, Picard, Thierry, Gueudet, Kidron, Leung, Meagher (2009), coinciden en que un marco dominante para este fin es el Enfoque Instrumental. Un motivo fundamental para adoptar este enfoque como referente teórico, radica en que la construcción del conocimiento matemático a través de la historia ha estado mediado por el uso de herramientas. Algunas de estas herramientas han estado vinculadas directamente con las matemáticas, otras con el proceso de razonamiento. Por ejemplo, el ábaco, de acuerdo a Bartolini y Mariotti (2008), es una herramienta que desde su origen ha estado íntimamente ligada con la historia del conteo y ha sido considerada como una ayuda didáctica en la enseñanza de las matemáticas.

De otro lado, Artigue (2002, como se cita en Trouche, 2014, p.307) sostiene que el conocimiento matemático siempre ha sido dependiente del uso de herramientas materiales y simbólicas. Esta afirmación se ve apoyada por Arzarello, Bartolini, Leung, Mariotti y Stevenson (2012), quienes manifiestan que a través de la historia los instrumentos han establecido vínculos profundos con la génesis y el desarrollo de conceptos abstractos e ideas matemáticas.

Trabajos como el de Artigue (2007) dan a conocer que los procesos de aprendizaje cuentan con una dimensión instrumental, ofrecida por las herramientas tecnológicas. Esta autora sostiene que en los últimos diez años (previos al 2007) ha aumentado la sensibilidad en la comunidad de investigadores respecto a esta dimensión. Sin embargo, la mayoría de trabajos enfocados en la dimensión instrumental han estado orientados al uso de los programas computacionales del cálculo formal o CAS (ver Artigue, 2002, 2007; Trouche 2004; Flores y Chumpitaz, 2013; Flores 2015). Leung et al. (2006) reconocen que existe una amplia investigación en el Enfoque Instrumental, relacionada con el proceso de génesis instrumental (explicado en el siguiente apartado) en sistemas algebraicos, mediados por un software, pero al parecer hay un vacío en la literatura sobre el Enfoque Instrumental en SGD y por ello lo hace su objeto de estudio.

Autores como Leung et al., (2006), Artigue (2007), Drijvers et al. (2009), Artigue, Iranzo, Fortuny, Leung, Chan, Lopez-Real y Rabardel (2011), Arzarello, Bartolini, Leung, Mariotti y Stevenson (2012) y Trouche (2014), han reconocido en el enfoque instrumental un marco propicio para interpretar la interacción entre estudiantes, el conocimiento matemático y un ambiente tecnológico. Este enfoque, aunque ha sido abordado desde diferentes perspectivas y con objetivos diferentes, está basado, según Trouche (2014), en un dominio científico donde se investiga sobre los instrumentos y la cognición, en particular la Ergonomía Cognitiva, propuesta por Verillon y Rabardel (1995) y Rabardel (2002).

En el siguiente apartado hablamos de los elementos conceptuales que en el Enfoque Instrumental integra la teoría de la Ergonomía Cognitiva (EC), puesto que, como ya se ha mencionado, el propósito de esta investigación es describir y caracterizar el papel mediador que desempeña el SGD (herramienta tecnológica) en los procesos de conjeturación y justificación en geometría. Para lograr este propósito, es esencial adoptar un marco de referencia que permita examinar los procesos de interacción que se dan en entre el estudiante y el SGD, cuando el estudiante se enfrenta a un problema de justificación. Es por ello que se adoptarán las herramientas conceptuales que ofrece la EC presentada por Verillon y Rabardel (1995) y Rabardel (2002). Es de aclarar que a partir de la teoría de la EC se estudia la transformación de un *artefacto* en un *instrumento* y los procesos en los que está inmersa la transformación progresiva que se da entre estos dos elementos. A su vez se reconoce que al momento de utilizar artefactos existe una conjugación entre tres elementos principales, a saber, el sujeto (estudiante), el artefacto (Software y/o herramientas del software) y el instrumento, donde este último es el intermediario entre el sujeto y el artefacto.

2.1.2 Conceptos de la teoría

La Ergonomía Cognitiva ofrece un marco de referencia alrededor de algunos elementos conceptuales que permiten evidenciar y analizar el uso que le da un individuo a una herramienta, entre los cuales se destacan: *Artefacto, Instrumento, Esquemas de Utilización* y *Génesis Instrumental*. Estos se describen sucintamente a continuación, mostrando una relación entre los mismos.

Artefacto. Definido como "algo que ha sufrido una transformación de origen humano" (Rabardel, 2002, p. 39), es decir, un objeto que puede ser elaborado o usado con un fin específico y de naturaleza material o simbólica. Investigadores en el campo de la Educación Matemática han reconocido como artefacto tanto herramientas tecnológicas, como objetos matemáticos, usados con un fin específico: promover el desarrollo de la actividad matemática. Autores como Flores (2015) señalan que el artefacto puede ser un medio material como un computador, un medio simbólico como el lenguaje algebraico o uno gráfico en un sistema de coordenadas. En el caso de los software especializados de matemática, caso particular de Geogebra, Cabri y otros similares, autores como Pérez (2014) consideran que no siempre es claro lo que es exactamente un artefacto, dado que este puede ser el software en su globalidad (por ejemplo GeoGebra) o puede ser en el software una colección de estos, es decir las herramientas que ofrece el software (v.g. el artefacto construcción, el artefacto medida, el artefacto arrastre). Leung et al. (2006), en el marco de la Teoría de la Variación, perciben como artefacto la herramienta arrastre. Para ellos las herramientas que poseen los SGD son artefactos que pueden amplificar o modificar la capacidad del individuo para transformar el mundo que lo rodea y tienen el potencial de materializar la imaginación del ser humano. Luego, para estos autores los artefactos son las herramientas que el software provee, idea que adoptaremos en este documento.

Esquemas de utilización. En la teoría de la Ergonomía Cognitiva la noción de esquema es desarrollada, según Drijvers et al. (2009), a partir de la definición que le da Vergnaud. Para él, un *esquema* es una organización invariante de la conducta para desarrollar una clase dada de situaciones, o lo que es semejante, un constructo que da cuenta de la organización del pensamiento más o menos estable y estructurada para resolver situaciones o tareas específicas. De acuerdo a Leung et al., (2006), los esquemas de utilización hacen parte del proceso *génesis instrumental* y son los planes que se elaboran sobre la forma de experimentar la potencialidad de un artefacto. Este planteamiento se corresponde con lo que sostiene Drijvers et al. (2009) en relación a que los esquemas de utilización están directamente relacionados con el artefacto dado, que son una construcción mental aplicable a la acción ejercida sobre el artefacto. Adicionalmente para estos autores, en los esquemas mentales, los aspectos técnicos del artefacto y conceptuales del sujeto se entrelazan y codesarrollan.

Una importante aclaración que realizan Drijvers et al. (2009) es que los esquemas no son observables directamente (por su naturaleza cognitiva), por lo que al observar la interacción de un sujeto con un artefacto, se centra la mirada en las *Técnicas instrumentadas* observables. Estas son definidas por ellos como "una secuencia más o menos estable de las interacciones entre el usuario y el artefacto con un objetivo en particular. Bajo esta interpretación, la técnica puede ser vista como el homólogo observable del esquema mental invisible" (Drijvers et al., 2009, p. 109). Al interpretar los planteamientos de Rabardel (2002), con respecto a los esquemas de utilización y en sintonía con lo expuesto anteriormente, los esquemas son un puente no materializable, pero sí observable, que permiten el paso de un artefacto a un instrumento.

Instrumento. Desde los planteamientos de Rabardel (2002) este concepto es abordado como un constructo psicológico y es claramente distinguido del artefacto puesto que nace de la interacción o relación funcional entre el sujeto y el artefacto con el fin de realizar una tarea específica. El instrumento está constituido por dos componentes que mantienen una relación de dependencia entre ellos: el artefacto o conjunto de artefactos y uno o más esquemas de utilización que son resultado de una construcción autónoma. Por lo tanto, un instrumento resulta de establecer, por parte del sujeto, una relación funcional con un artefacto, material o simbólico.

Trouche (2014) señala que un instrumento no existe en sí mismo, es una transformación de un artefacto que se convierte en instrumento cuando el sujeto es capaz de apropiarse de él significativamente y lo integra a su constructo psicológico. En palabras de Pérez (2014) "…se habla de un instrumento si existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario para un tipo específico de tarea". En esta misma línea, Leung et al., (2006) manifiestan que en los ambientes de geometría dinámica el artefacto arrastre puede llegar a convertirse en un instrumento, gracias a la posibilidad de representar en los SGD visualmente invariantes geométricas mientras se reconocen variaciones simultáneas inducidas por el artefacto arrastre. El artefacto arrastre, al ser una herramienta dinámica establece una relación dialéctica entre elementos conceptuales de la geometría y el mundo de los objetos empíricos virtuales.

Génesis instrumental: se define como el *proceso* de construcción y desarrollo del instrumento realizado por el sujeto, mediante el uso del artefacto y los esquemas de utilización. Para Rabardel (2002), este proceso involucra tanto las funciones que da el sujeto al artefacto que usa en una tarea, como las habilidades que desarrolla mientras pone el artefacto en uso. El proceso evolutivo de los artefactos en instrumentos está determinado por dos dimensiones que difieren en su enfoque pero que son complementarias. La instrumentalización -orientada hacia el artefacto- y la instrumentación -orientada hacia el sujeto- (véase *Figura 1*).

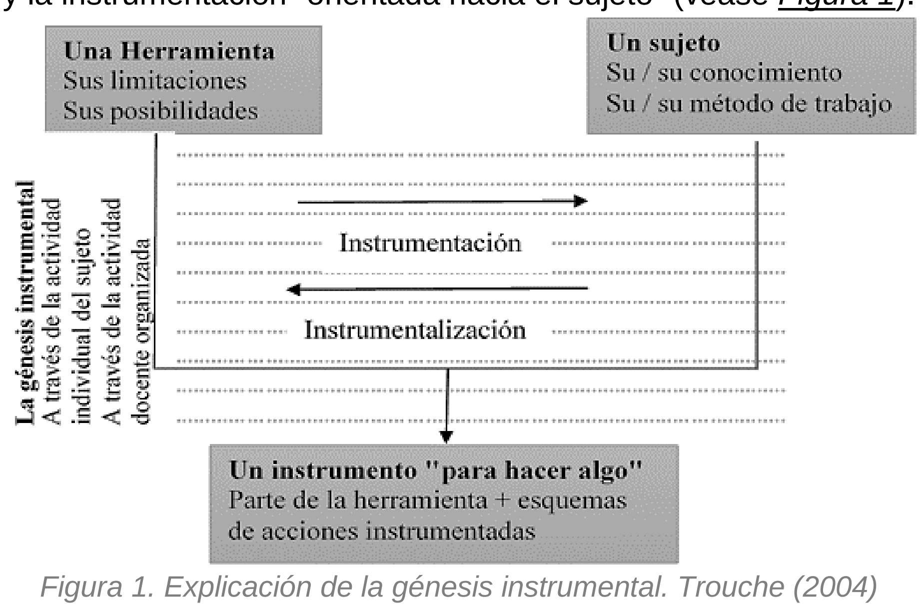


Figura 1. Explicación de la génesis instrumental. Trouche (2004)

En la teoría de la Ergonomía Cognitiva el *Proceso de Instrumentalización* está definido como las acciones que realiza el sujeto (el estudiante) sobre el artefacto, dichas acciones son "… selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos derivados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc." (Rabardel, 2002, p. 103). En relación a este proceso, autores como Del Castillo y Montiel (2009), sostienen que durante su desarrollo, el sujeto se apropia de las propiedades del artefacto y lo adapta a sus necesidades e incluso puede llegar a realizarle modificaciones, como construir nuevas funciones sobre el artefacto.

De acuerdo a Trouche (2004), el proceso de instrumentalización atraviesa por tres etapas. Una etapa inicial de *descubrimiento y selección de las funciones* pertinentes, que en un ambiente de geometría dinámica hace alusión a los comandos y herramientas que ofrece el software. Una etapa posterior de *personalización* en la que el sujeto decide sobre el conjunto de comandos o herramientas del software que usará para desarrollar un tipo de tarea particular. Finalmente, una etapa de *transformación del artefacto* en la que el sujeto modifica, adapta o crea comandos y/o herramientas no concebidas por quien ha diseñado el artefacto.

Por otro lado, el *Proceso de Instrumentación* refiere a "la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada…" (Rabardel, 2002 p. 103), en este proceso es el artefacto quien actúa sobre el sujeto (cuando él lo manipula) permitiendo una modificación de los esquemas de utilización, pues según Trouche (2014) al trabajar sobre la actividad la acción de instrumentación influencia la actividad misma y el conocimiento del sujeto. En otras palabras, a medida que el sujeto va reconociendo el potencial de las herramientas del software, va adaptando sus conocimientos previos de los asuntos de carácter conceptual a la actividad, es así como sus esquemas van evolucionando y la significación sobre el artefacto va cambiando.

A modo de ilustración, la génesis instrumental en un ambiente de geometría dinámica puede verse de la siguiente manera: Supongamos que estamos trabajando sobre el *artefacto* geométrico "punto medio o centro" (una herramienta de Geogebra) y que queremos llegar a que este se convierta en un *instrumento* para el *sujeto* tal y como lo podemos observar en la figura 2. Para que esto sea posible es necesario que el *artefacto* sea incorporado en la mente del *sujeto* de manera significativa, es decir haga parte de un *esquema de utilización* que es construido en la interacción del sujeto con el artefacto en diferentes problemas que requieran su uso.

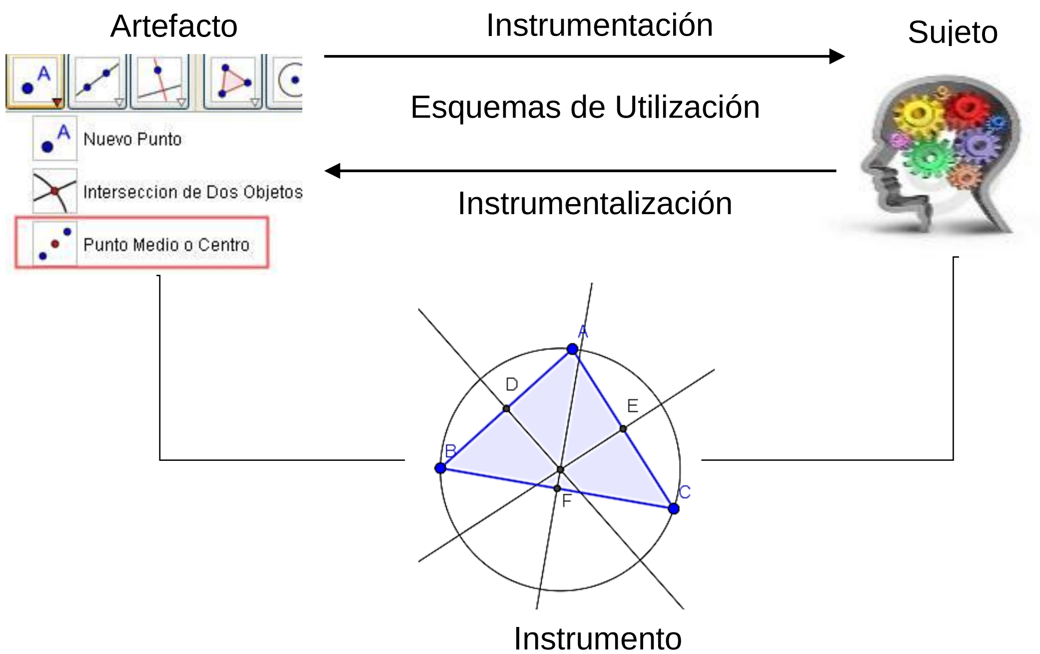


Figura 2 Ejemplificación Génesis Instrumental

La incorporación del *artefacto* "punto medio o centro" en el *esquema de utilización* del sujeto, dependerá de dos procesos: el de *instrumentalización* y el de *instrumentación*. Cuando el sujeto obra sobre el artefacto asignándole funciones y toma decisiones acerca de cómo usarlo (v.g. decide usarlo para determinar el punto medio entre dos puntos y/o punto medio de un segmento) podemos decir que está desarrollando el proceso de *instrumentalización*. Pero si es el *artefacto* quien obra sobre el *sujeto* mientras este lo manipula y le permite trasladar su uso a la solución de diferentes problemas (v.g., construir la mediatriz de un segmento, construir las mediatrices de los lados de un triángulo para hallar su circuncentro, entre otros) indicamos que se encuentra en el proceso de *instrumentación*. De acuerdo al ejemplo presentado, ¿cuándo el artefacto se ha transformado en instrumento? Básicamente cuando el artefacto ha pasado por los procesos de *instrumentalización* e *instrumentación* para hacer parte de los esquemas de utilización del sujeto. En el caso de la figura 2, cuando el sujeto interactúa con el artefacto "punto medio o centro" y a su vez atraviesa por los procesos mencionados para poder solucionar problemas como "construir el circuncentro de un triángulo" pero además como insumo para proponer una justificación de un teorema como "La intersección de la mediatrices de un triángulo es el circuncentro".

2.2 Actividad demostrativa

Desde la consolidación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el MEN para las escuelas y colegios de Colombia, se ha propuesto favorecer en los estudiantes el desarrollo de *procesos de pensamiento* asociados a la adquisición y comprensión del conocimiento matemático, más allá de los contenidos. Es por ello que se ha considerado pertinente en esta sección partir de algunas observaciones que ha realizado el MEN, particularmente en relación con la argumentación. La argumentación se encuentra estrechamente ligada al proceso general de razonamiento, pues según el MEN (1998), para desarrollar el razonamiento matemático se debe hacer uso de "argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar" (p.77), sin embargo, para desarrollar el proceso de razonamiento, de acuerdo al MEN (2006) el estudiante previamente [deberá ser capaz de formular] "…predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones" (p.54).

Dada la importancia que el MEN otorga a la argumentación en el marco de la conjeturación y justificación, dentro del proceso de razonamiento, consideramos oportuno adoptar la aproximación metodológica para el aprendizaje de la demostración "*actividad demostrativa",* desarrollada por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Esta elección se da con la intención de favorecer tanto el diseño de los problemas que se proponen a los estudiantes, como el análisis de los datos que se obtiene al llevar a cabo la investigación.

Desde nuestro punto de vista, el constructo actividad demostrativa incluye dos procesos conformados por acciones que sustentan la producción de una conjetura y su justificación. Estas acciones consisten en: la exploración de una situación para buscar regularidades, la formulación de conjeturas con base en las regularidades encontradas, la respectiva constatación de la veracidad del hecho geométrico enunciado, y la búsqueda y organización de ideas que conforman la demostración. Esta última se refiere a un argumento, generalmente de índole deductivo, fundamentado en un sistema axiomático de referencia del que puede hacer parte el enunciado demostrado (Samper et al., 2013, p. 39).

Los procesos de la actividad demostrativa presentes en la propuesta del grupo Æ•G que están involucrados con este trabajo de grado son los procesos de conjeturar y justificar. Estos a su vez están apoyados en acciones de carácter heurístico como la visualización y la exploración y se constituyen en marco de referencia para el diseño e implementación de problemas a solucionar por los estudiantes.

2.2.1 Proceso de conjeturación

De acuerdo a Samper et al. (2013), el proceso de conjeturar tiene como meta formular un enunciado hipotético de carácter general (conjetura), para luego validarlo dentro de un sistema teórico construido. En la formulación de dicho enunciado intervienen acciones tales como: visualizar, explorar, conjeturar y verificar, las cuales promueven que los estudiantes reconozcan los objetos geométricos puestos en juego y enuncien las propiedades bajo las cuales se relacionan.

Particularmente, la acción de *visualizar* provee a los estudiantes información sobre los elementos que componen un objeto geométrico y las configuraciones entre los mismos. En esta acción también el estudiante detecta, descubre y evoca propiedades geométricas, al establecer nexos con la representación gráfica y los conocimientos previos.

Visualizar se entiende por algunos autores como proceso de visualización, por ejemplo Gal y Linchevsk (2010), se refieren a este como una habilidad que permite representar, generalizar, documentar y analizar información adquirida visualmente. Se puede identificar que la conceptualización de un objeto geométrico, movilizada por la construcción de un lugar geométrico de puntos y la identificación de los invariantes de dicho lugar, favorece tanto la visualización como el reconocimiento de propiedades suficientes para definir dicho objeto. En palabras de Hershkowits (1989), estas propiedades se reconocen como atributos críticos y se constituyen como marco de referencia en la formación de los conceptos. Bajo esta perspectiva, la conceptualización se da a partir de la visualización de los elementos que componen una representación gráfica. Según Vinner (1991), otro elemento importante en la formación conceptual de los objetos geométricos, tiene que ver con el papel que desempeñan las definiciones, estas no sólo ayudan en la formación del concepto imagen, sino que también tienen un papel fundamental en las tareas cognitivas. Por ejemplo, en la actividad demostrativa forman parte esencial del sistema teórico cuando se pretende justificar una conjetura.

Ahora, de acuerdo a Samper et al. (2013), la acción de *explorar* se da por dos vías: la empírica y la teórica. La primera se apoya en las representaciones gráficas y la segunda sobre los enunciados que conforman el conocimiento individual. Pero más allá de diferenciarlas, para el desarrollo de esta investigación interesa reconocer las posibilidades que ofrecen en términos de la manipulación de los objetos geométricos mediante el uso de un SGD y en función de formular una conjetura. La exploración empírica en un SGD es dinámica y por ende posibilita determinar propiedades de las representaciones gráficas que permanecen invariantes y que se modifican, bien sea a partir de la herramienta de arrastre, la toma de medidas o las construcciones auxiliares.

Sin embargo, según Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006), la finalidad en la acción de explorar no consiste sólo en identificar o establecer relaciones entre propiedades, sino también de involucrase y atender al objetivo específico de la tarea planteada. En función de formular una conjetura, la exploración teórica juega un papel importante, dado que dirige la exploración empírica hacia la búsqueda, reconocimiento y planteamiento de afirmaciones matemáticas, que se convertirán en conjeturas y que luego serán justificadas.

La acción de *conjeturar* tiene como finalidad producir una conjetura, la cual surge a partir de las acciones de visualizar y explorar. De estas, los estudiantes obtienen como producto el reconocimiento de propiedades y relaciones geométricas de figuras, que se configuran en un enunciado o conjetura a manera de proposición condicional. Con la acción de *verificar* se pretende que los estudiantes justifiquen empíricamente la veracidad de la conjetura planteada, para ello hacen alusión a las propiedades que visualizan en una figura y permanecen invariantes o que se modifican mediante la exploración.

2.2.2 Proceso de justificación

En el proceso de justificación, según Samper et al. (2013), se espera que los estudiantes lleguen a validar la conjetura dentro del sistema teórico que ellos han construido. Cuando los estudiantes poseen un alto grado de certeza sobre la veracidad de la conjetura propuesta, el constructo actividad demostrativa ofrece tres vías para que ellos validen su conjetura.

La explicación de validación: es una justificación cuyas garantías provienen de fuentes no teóricas; es decir, los argumentos de los estudiantes se apoyan en las evidencias, relaciones, invariantes, propiedades, que les proporciona la visualización y la exploración.

La prueba: se consolida en una argumentación parcial, dado que las garantías son teóricas pero no todas provienen del sistema teórico construido y porque no se presenta una organización deductiva de las ideas.

La demostración: toda justificación proviene del sistema teórico que se construye e incluye todos los argumentos esenciales.

Adicional al constructo *Actividad Demostrativa,* el grupo Æ•G, como parte de su aproximación metodológica, destaca tres elementos fundamentales para generar un entorno favorable en el aprendizaje de los procesos antes mencionados: *las tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes, la interacción social en la clase y el papel de la geometría dinámica.* A continuación describiremos brevemente lo que el grupo Æ•G propone.

Tareas matemáticas. Teniendo en cuenta que en el marco de la *Actividad demostrativa* se espera que los estudiantes lleguen a la justificación de enunciados matemáticos, las tareas que se les proponen deben conducir al desarrollo de los procesos tanto de conjeturación como de justificación y las variables que cada uno de ellos contemplan las cuales ya han sido descritas. Por lo tanto es necesario que se diseñen y propongan problemas abiertos, interesantes y pertinentes que permitan un trabajo sistemático en la construcción y ampliación de un sistema teórico, alrededor de un núcleo temático. Para impulsar la construcción del sistema teórico se deben formular preguntas que lleven al estudiante a explicitar y examinar sus concepciones, imágenes mentales, conocimientos, entre otros.

Interacción social en la clase. Para los autores la transición del proceso de formular una conjetura al de proponer una justificación dentro determinado sistema teórico requiere de la interacción que se da en la clase entre profesor y estudiantes y entre estudiantes. La razón de ello es la siguiente:

> "…es en la comunicación de ideas, en el análisis crítico de estas, en la argumentación colectiva donde surgen los elementos teóricos necesarios para construir una demostración, se comprende el papel que juegan dichos elementos en el proceso y también se comprenden las conexiones entre ellos para ligarlos en una justificación" (Samper et al., 2013, p.26).

Sumado a lo anterior, el grupo caracteriza el rol del profesor en la interacción como aquel que la guía y no como quien tiene el conocimiento absoluto. Él, como "experto de la comunidad de clase", orienta el proceso de los estudiantes hacia la formalización y comunicación del conocimiento matemático. Además regula y dirige el cumplimiento de las normas que orientan la producción de justificaciones dentro del sistema teórico. Por su parte, los estudiantes participan, comprometidos y como equipo, en pro de la construcción y consolidación sistema teórico.

El papel de la geometría dinámica. Para los autores la geometría dinámica se constituye en una herramienta mediadora que incrementa la posibilidad de aprender a demostrar dada la correspondencia entre el software Cabri y los postulados de la geometría plana. Además, porque a través del arrastre es posible formular conjeturas con una probabilidad alta de que sean verdaderas dentro del sistema teórico.

Puntualmente, la geometría dinámica, según Samper et al. (2013), favorece en el marco de una proposición condicional, el reconocimiento de las partes esenciales de la hipótesis de un teorema o la necesidad de prescindir de algunas propiedades de alguna definición para poder comprender el papel que desempeña cada una de ellas. Adicionalmente, las posibilidades que brinda el SGD para realizar y/o eliminar construcciones auxiliares en la solución de un problema abierto abre el camino para formular un conjunto diverso de conjeturas y el desarrollo de una justificación. Al explorar sobre las propiedades geométricas estas se pueden ir organizando para consolidar un sistema teórico valioso en la demostración.

2.3 El software de geometría dinámica

2.3.1 ¿Qué es un software de geometría dinámica?

El campo de la geometría ha sido importante para la historia de la humanidad, las figuras y formas se han asociado a imágenes comunes de la naturaleza y la cotidianidad, haciendo de esta rama de las matemáticas una de las más estudiadas y estructuradas. Sin embargo, tal como lo muestra Lingefjard (2011), en su análisis sobre el renacimiento de la geometría euclidiana, la geometría ha perdido interés en el campo de la educación matemática y ha sido reemplazada en los planes de estudio de muchos países por la enseñanza del álgebra y el análisis de funciones. Hoyles y Jones (1998) manifiestan frente a esta situación que efectivamente, esto representa para los estudiantes que existen pocas oportunidades de apreciar la importancia de la argumentación en geometría, pues los procesos que requieren ser justificados se enfocaron en el área de algebra, por lo cual los estudiantes presentan deficiencias al demostrar teoremas de geometría.

Esto representa una preocupación para la comunidad de investigadores en educación matemática. Frente a esta situación, algunas preguntas importantes que se deben hacer son: ¿por qué se ha perdido el interés por la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la escuela?, ¿cómo podemos incentivar un interés por introducir nuevamente la geometría euclidiana en los planes de estudio?, ¿qué estrategias nos ofrece la educación matemática para reinventar la enseñanza de la geometría en el aula? Gracias a los avances tecnológicos, la literatura ha brindado respuesta a algunas de estas preguntas. Lingefjard (2011) señala que el SGD ha permitido observar en los estudiantes, a través de su uso, el favorecimiento de procesos como visualizar, explorar, conjeturar y justificar, necesarios en la comprensión de la geometría.

Mariotti (2000) muestra cómo la aparición de diferentes SGD en los últimos años permite tener una nueva mirada de la geometría euclidiana, donde los objetos geométricos son dotados de movimiento, permitiendo reconocer propiedades que no era posible identificar tan fácilmente con regla y compás en representaciones estáticas. Al realizar una comparación entre el trabajo clásico de figuras con lápiz y papel, con un entorno que involucra el uso de SGD, se puede evidenciar que en el segundo existe la posibilidad de manipular los objetos geométricos, permitiendo reconocer propiedades y relaciones entre ellos. Esto permite acercar la geometría a los estudiantes, algo que antes en el trabajo de regla y compás no era posible.

Estos entornos además han conducido al surgimiento de un nuevo campo de investigación en la educación matemática que analiza los beneficios y desventajas del uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría, cambiando las necesidades, los recursos y las hipótesis con las que cuenta la comunidad investigativa.

Uno de los SGD más destacados en el ámbito de la educación matemática y resultado de un proyecto de la comunidad de educación matemática internacional es Geogebra (GG), un software gratuito que puede ser descargado a través de internet. Al igual que otros software de geometria dinamica, su popularidad radica no solo en la gratuidad, sino en el uso que se le puede dar como herramienta o instrumento de trabajo en clase. Su fácil manipulación y variedad de comandos geométricos (objetos y relaciones) permite disponer de diversos usos como: explorar construcciones, determinar invariantes, comprobar propiedades, evidenciar relaciones entre objetos matemáticos, entre otros. Este software se escoge por las herramientas que lo componen, pues estas nos permitirán desarrollar las actividades diseñadas en potencializar los procesos de conjeturación y justificación.

Para autores como Iranzo y Fortuny (2011) GG se ha dado a conocer en los últimos años en la comunidad de educadores matemáticos como una herramienta didáctica que tiene gran potencial para abarcar situaciones de enseñanza y aprendizaje no solo en el área de la geometría, sino también en otras áreas como el álgebra y el cálculo, permitiendo realizar gráficas de funciones y análisis de tablas de valores, destacando los diferentes usos, recursos y beneficios que esta herramienta tecnológica ofrece. En nuestra investigación este recurso tecnológico tendrá un papel relevante, porque es a través de él que potencializaremos los procesos de la actividad argumentativa (proceso de conjeturación y proceso de justificación).

Acciones como el arrastre y la medición que se pueden hacer en GG, pueden usarse como herramienta que ayudan a la construcción de conocimiento matemático. Arzarello (2001) se refiere a la medición y el arrastre como prácticas que median en la relación teórico-perceptual. Este autor afirma que el uso del arrastre y la medición ayuda en la producción de conjeturas: explorando figuras al moverlas, realizando medidas que le permiten al estudiante encontrar invariantes y propiedades. El uso de ellas en el software puede hacer un cambio cognitivo de ida y vuelta, entre las percepciones y las ideas abstractas. Por ejemplo los estudiantes pueden tener la percepción de que tres puntos están alineados y pertenecen a una misma recta, entonces para comprobar si es cierto los estudiantes pueden: construir una recta y confirmar que pase por los tres puntos, o arrastrar cada uno de los tres puntos y confirmar si alguno de ellos no es colineal a los otros.

Arzarello (2001) identificó diferentes usos que los estudiantes hacen de la herramienta de arrastre. La clasificación que presentó en su investigación atiende al propósito que el estudiante tiene a la hora de hacer uso del arrastre. Al observar el uso dado por los estudiantes a la función de arrastre, a la hora de solucionar una situación planteada, determinó: el arrastre errático (Wandering dragging), el arrastre limitado (Bound dragging), el arrastre guiado (Guided dragging), el arrastre en lugar oculto (*Lieu muet* dragging), el arrastre de línea (Line dragging), el arrastre vinculado (Linked dragging) y el arrastre de test (Dragging test).

DESCRIPCIÓN DE LOS TIPOS ARRASTRES		
Tipo de arrastre	**Definición**	**Ejemplo**
Arrastre errático	Se realiza un arrastre sin un objetivo particular, la finalidad es encontrar invariantes	Cuando los estudiantes empiezan a explorar y observar ¿qué pasa?
Arrastre limitado	Es aquel que tiene algún tipo de restricción, ya sea por las propiedades del elemento o por la construcción que se realizó.	Por lo menos cuando se construye un punto de intersección, el arrastre es permitido, solo en los lugares que cumple con la relación de intersección.
Arrastre guiado	Se arrastra un objeto para obtener una figura particular	Hay una instrucción para realizar la construcción: Construyan el cuadrado ABCD.
Arrastre en lugar oculto	Se arrastra un objeto con el fin de encontrar el recorrido de un punto particular de la figura	Es cuando se hace el arrastre por ejemplo de un punto y se identifica el lugar geométrico que describe su movimiento.
Arrastre vinculado	Este arrastre relaciona diferentes elementos.	Por ejemplo cuando se hace uso de un vínculo, y al arrastrarlo mueve objetos como una circunferencia.
Arrastre de test	es aquel que me permite verificar si una figura conserva las propiedades matemáticas	Cuando se hace un arrastre con una intención previa, por ejemplo para comprobar congruencias.

Tabla 1 Caracterización de los tipos de arrastre

2.3.2 Beneficios y desventajas

La creación de diversos SGD han cambiado la manera en cómo se percibe la educación matemática. Bu y Schoen (2011), muestran cómo las nuevas tecnologías permiten superar las dificultades de aprendizaje y de enseñanza de la geometría. Ellos señalan que el uso de estos programas permite abordar problemas tradicionales de la enseñanza de las matemáticas y desarrollar prácticas pedagógicas para tener nuevas perspectivas teóricas de la enseñanza y el aprendizaje. Además fortalecen procesos que no eran tenidos en cuenta en el desarrollo de conceptos geométricos, como lo es la exploración. La exploración permite a los estudiantes determinar propiedades y reconocer relaciones que permiten solucionar o demostrar un hecho geométrico.

Por otro lado, Samper et al. (2013), aclaran que se puede potencializar el uso de las tecnologías, si se hace uso de tareas que necesiten del uso de SGD y que no puedan solucionarse por regla y compás. Estas tareas deben tener como propósito generar procesos de duda e inquietudes, buscando que el estudiante explore las herramientas y formule una conjetura que podrá justificar. Es así como la manipulación del SGD favorece el interés por las construcciones y el conocimiento geométrico, revolucionando la forma en que se conciben los objetos geometricos en la escuela.

El uso de SGD en la clase de matemáticas, permite al estudiante generar un medio lingüístico emergiendo su propio vocabulario, dando sentido a expresiones como arrastre, explorar, ocultar, traza, entre otros. Defensores de los entornos de geometría dinámica (ver DiSessa, 2000; Hoyles y Sutherland, 1989; Hoyles y Noss, 1992; Hoyles et al., 1992) afirman que es a través de estos vocabularios que los estudiantes construyen la matemática. Por otro lado, autores como Laborde (1995) citado por (Healy & Hoyles, 2001) afirma que la mayoría de dificultades matemáticas que se presentan en el uso del SGD se adjudican a una dificultad en la comunicación y problemas de lenguaje. Es importante que los estudiantes hagan la construcción de su propio lenguaje y lo usen en su comunicación.

Para esta investigación hacemos uso de Geogebra (GG) como recurso en la resolución de problemas que demandan su uso explícitamente y que no podrían ser resueltos en lápiz y papel. Sobre esta intervención del software, analizaremos la forma en que este recurso media en los procesos de conjeturación y justificación. Iranzo, Nuria y Fortuny (2011) consideran que el uso de GG permite que este actúe como un instrumento que posibilita una construcción mental; sin embargo, es la forma de pensar del estudiante y el conocimiento que utiliza los que modelan la forma de utilizar la herramienta.

2.3.3 Mediación Instrumental.

Hasta el momento hemos expuesto la importancia, ventajas y desventajas que trae el uso de un SGD en el aula, ahora es pertinente dar a conocer nuestro posicionamiento frente a la caracterización de la mediación del software, dado que constituye parte fundamental de los objetivos de nuestra investigación.

De acuerdo a Pérez (2014), en la actualidad están presentes cuatro enfoques preocupados por la integración de la tecnología en la educación matemática, a saber, Aproximación Instrumental, Mediación y Mediación Semiótica, Orquestación Instrumental y Seres-humanos-con-medios. De estos ya hemos adoptado el primero, Aproximación Instrumental, con el que pretendemos dar cuenta del proceso de transformación de un artefacto a instrumento en la génesis instrumental, durante desarrollo de la actividad demostrativa. Sin embargo, otro referente que es indispensable analizar es el papel mediador del software entre el conocimiento matemático y el estudiante. Es por ello que en este apartado centraremos la atención en otro enfoque de los que menciona Pérez (2014), la Mediación, particularmente en lo que refiere a la Mediación Instrumental (MI), dado que guarda un alto grado de afinidad con el propósito y marco de referencia de este trabajo. Sus raíces se encuentran en el enfoque Aproximación Instrumental.

Uno de los autores de habla hispana que ha sido reconocido por sus estudios alrededor de la MI en el campo de la educación matemática, es el Doctor Luis

Moreno Armella. Moreno (2001) ha reconocido la MI como una de las teorías cognición de mayor impacto, bajo el principio “Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico” p.67. Para este autor las matemáticas y las herramientas tecnológicas cuentan con un escenario propicio que posibilita su estudio. En esta línea de discusión, Moreno (2002), resalta que la presencia de las herramientas computacionales en la educación median entre la actividad cognitiva y el aprendizaje.

Para Moreno (2002), los sistemas de representación de una herramienta computacional constituyen el primer elemento mediador, dado que las representaciones son *ejecutables*, esto significa que,

> …una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en un entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras (*dragging*) conservando relaciones estructurales de las mismas, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones informáticas, que contribuye al realismo de estos objetos geométricos (Moreno 2002, p.84).

Adicionalmente, este autor considera que la MI inicia cuando se re-definen los objetos matemáticos en términos de las construcciones ejecutables, para él en un ambiente de geometría dinámica no sólo hay representaciones ejecutables sino también construcciones ejecutables.

Para sustentar la re-definición de los objetos matemáticos Moreno (2002), expone otros dos componentes que se entretejen y complementan la MI. Uno es el proceso de *amplificación* y el otro de *re-organización cognitiva*. Los dos procesos y la transición del uno al otro, son asociados al artefacto y al instrumento respectivamente, componentes propios a la Aproximación Instrumental.

De un lado, el proceso de *amplificación* es equiparado con un *artefacto* en tanto su uso no modifica el tren de pensamiento de un estudiante, sino que lo complementa. Para contextualizar, el autor pone como ejemplo una situación en la que un estudiante ha resuelto un problema que involucra la realización de ciertos cálculos y emplea la calculadora para verificar sus resultados. Para él el uso de la calculadora media como un auxiliar de su cognición, pero no lo modifica.

Por otro lado, el proceso de *re-organización cognitiva* es puesto al mismo nivel del *instrumento,* pues el uso sostenido de un *artefacto* puede afectar radicalmente el pensamiento matemático de un estudiante produciendo una *re-organización*, a nivel de estrategias de solución de problemas, incluso en la manera como se plantean, etc. La transición de un proceso a otro, al igual que en la Aproximación instrumental, está mediado por el proceso de *génesis instrumental*.

A modo de síntesis, la MI es un marco de referencia favorable para caracterizar la mediación del SGD, dado que su estrecho vínculo con la Aproximación Instrumental permite reconocer las diferentes formas en que puede mediar el SGD, desde los sistemas de representación y construcciones que son *ejecutables,* pasando por el procesos de *amplificación,* hasta llegar al proceso de *re-organización cognitiva.*

3. METODOLOGÍA

A continuación se presenta la metodología de la investigación realizada, describiendo el proceso de diseño e implementación de una secuencia de problemas, en los que se requería el uso de Geogebra (GG) y con los que se pretendía analizar la mediación de este recurso en los procesos de argumentación.

En este capítulo se presentan seis apartados. En el primero se hace referencia a la *perspectiva investigativa*, donde se determina el enfoque investigativo adoptado para el desarrollo del presente estudio. El segundo apartado menciona el *proceso de revisión literaria*; allí se describe el tipo de búsqueda que se llevó a cabo para el acopio de literatura y documentos que sirvieron como referentes literarios, todas en consonancia con el objeto de estudio. En el tercer apartado, se habla del c*ontexto de estudio*, donde se contextualiza la institución en la que se ejecutó la investigación, el tipo de población involucrada para el desarrollo de la propuesta y las características del grupo escogido. En el cuarto apartado, *diseño de la secuencia*, se muestran los problemas elaborados y un análisis de los mismos, en función de la presencia de GG para su desarrollo y las rutas de solución presupuestadas. El quinto apartado, a*copio de datos*, da cuenta de los procedimientos y elementos utilizados para la toma de datos. Finalmente, el *Análisis retrospectivo,* explica cómo se sistematizó la información acopiada y cómo se analizaron los datos recogidos, a partir de unas categorías contempladas para ello.

3.1 Perspectiva Investigativa: Estudio de Caso

La investigación reportada en este documento se enfoca en la aplicación de una secuencia de siete problemas a un grupo de 3 estudiantes y con base en ello la caracterización de la mediación de un *Software de Geometría Dinámica*, en los procesos de la actividad demostrativa.

Para el desarrollo de la investigación se hizo uso de la perspectiva investigativa estudio de caso, cuyo análisis de datos es de carácter cualitativo-descriptivo. Para Martínez (2006), el estudio de caso es un instrumento valioso en el ámbito de la investigación, cuya fortaleza emerge de sí misma, registrando la conducta de las personas que se involucran en el desarrollo del estudio; pues las estrategias metodológicas cuantitativas centran su información en los resultados arrojados por cuestionarios. En este sentido, la investigación busca ofrecer diferentes perspectivas sobre el comportamiento de los sujetos de la muestra haciendo uso de diferentes fuentes de datos, para que de esta manera se determinen conclusiones sobre sus actuaciones.

Al ser una investigación de carácter cualitativo, su análisis se realiza de forma descriptiva y explicativa contrastando los resultados con la teoría, lo cual permite observar la dinámica de comportamiento situacional, en donde el investigador requiere compromiso y dedicación en la recolección y documentación de datos, evitando de esta manera indagar aspectos irrelevantes de la investigación. Otra característica del estudio de caso son los limitantes en cuanto a la generalización de los aspectos observados en el análisis, ya que son propios de desarrollo de la propuesta y en consecuencia se trazan conclusiones a partir de la observación en un contexto particular; aunque en ocasiones cuando se trabajan múltiples casos, estos comparten particularidades propias del estudio, lo que lleva a proyectar conclusiones de envergadura más amplia.

3.2 Revisión Literaria

La documentación utilizada para el trabajo provino de diferentes fuentes. Para el acopio de estos documentos se realizaron búsquedas bibliográficas en bases de datos de notable reconocimiento como Springer, Scielo y Ebsco, algunas de ellas de carácter gratuito y otras que requerían de permisos para el acceso completo a su contenido. Dada la búsqueda realizada en estas plataformas virtuales, cuyo alcance es de naturaleza internacional, fue posible observar resultados investigativos con contenido similar al de nuestra investigación, que además fueran recientes y con ello proveyeran una mirada contemporánea sobre el objeto de estudio y su desarrollo actual.

A partir de la búsqueda bibliográfica se determinaron aspectos relevantes que contribuyeron a la configuración de la investigación misma, entre estos se determinó el problema e hipótesis a desarrollar en la propuesta, ya que se observó la dificultad de generar procesos de argumentación (conjeturación y justificación), al desarrollar actividades a través del uso de un SGD. Por otra parte, la revisión permitió elaborar el marco teórico, a partir de la configuración de tres conceptos nucleares, a saber: actividad demostrativa, software de geometría dinámica y génesis instrumental. El establecimiento de estos permitió reconocer características de los problemas que debían involucrarse, así como reconocer elementos sobre los cuales debería versar el análisis de la información acopiada.

Dentro del proceso de acopio de literatura se utilizó el gestor bibliográfico Mendeley, el cual permitió la organización de los documentos y su fácil acceso, favoreciendo el intercambio de información con otros usuarios. Esta herramienta computacional actualiza las referencias conceptuales que el usuario utiliza, manteniéndolo informado de los últimos documentos que se cargan al sistema. Para la investigación, la herramienta Mendeley permitió la organización de los documentos estudiados en una biblioteca virtual e insertó las citas y referencias bibliográficas bajo el formato APA en el documento escrito. Esto último facilitó la conformación de la bibliografía utilizada (automática) y permitió a las investigadoras tener la seguridad de que todas las citas realizadas se encontraban referenciadas.

3.3 Contexto de Estudio

La implementación de la secuencia diseñada se llevó a cabo en el Colegio Fundación Educacional Ana Restrepo del Corral, ubicado en Bogotá. La institución educativa atiende estudiantes cuyo estrato social es bajo y su carácter funcional es sin ánimo de lucro. El Colegio se encuentra organizado en niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media; en este último se tiene convenio con la institución SENA, en formación técnica. La elección de la institución para el desarrollo de la investigación atendió principalmente a la vinculación laboral de una de las investigadoras y autoras del documento.

El grupo de estudiantes seleccionado para el desarrollo la propuesta estaba conformado por tres estudiantes de grado noveno. La elección de este grado atendió al conocimiento de dicha población por parte de la investigadora vinculada al Colegio. A los estudiantes de grado noveno se les invitó a participar en este proyecto y aquellos que aceptaron fueron convocados para el desarrollo de los problemas en un horario alterno al escolar. Para efecto de la presentación de la información acopiada, los nombres de los estudiantes fueron cambiados por los seudónimos (E1, E2 y E3), de esta forma también se protegía su identidad.

Frente a los conocimientos previos en geometría de los estudiantes, se observó que ellos tenían una baja conceptualización en elementos básicos, debido posiblemente a que la geometría, como asignatura dentro del currículo del Colegio, es prácticamente nula y se da prioridad al desarrollo del algebra en grado noveno. Además, se reconoce la falta de competencia frente al manejo de un SGD, debido a que previamente este tipo de recurso no se había utilizado. Esto motivó a desarrollar un conjunto de actividades de instrucción, orientadas a reconocer el ambiente computacional, sus herramientas y algunos objetos y relaciones básicos de la geometría, potencialmente útiles en el desarrollo de los problemas contemplados en la secuencia.

3.4 Diseño de la Secuencia

Para el diseño de los problemas propuestos se tuvo en cuenta que estos involucraran situaciones que permitieran a E1, E2 y E3 tener una comprensión sobre lo que se realizaba y los objetos geométricos utilizados, lo que implicó que los problemas debían favorecer el diálogo y promover una discusión alrededor de las relaciones evidenciadas. En este sentido, los estudiantes debían explorar distintas aproximaciones y visualizar, conjeturar y justificar diferentes relaciones que surgían en el proceso de solución de los problemas. Este panorama situaba la necesidad de valerse de la aproximación metodológica del grupo AEG, la Actividad Demostrativa. Para el grupo AEG, en el marco de la Actvidad Demostrativa, las tareas deben generar ambientes de indagación (Samper et al., 2013) formular preguntas abiertas que lleven a diferentes soluciones en donde se debe hacer uso de sus conocimientos matemáticos y de las herramientas que provee el SGD.

La propuesta desarrollada tuvo como punto de partida una actividad introductoria (Anexo 1), elaborada por Samper et al. (2013), miembro del grupo de investigación Æ•G. Con esta primera actividad se buscaba que E1, E2 y E3 se familiarizaran y adquirieran habilidades en el manejo de GG e iniciar la construcción de un sistema axiomático, con elementos básicos de la geometría, fundamentales para la resolución de los problemas diseñados. Esta primera aproximación, permitió a los estudiantes, conocer el manejo del software geogebra y tener un primer acercamiento a elementos geométricos (básicos de la geometría plana) necesarios para el desarrollo de los problemas y construcción de otros objetos geométricos, que se vincularan al sistema axiomático local.

La secuencia contemplada para esta investigación involucró siete problemas abiertos, los cuales giraban en torno a la conceptualización de equidistancia, teniendo como objetivo construir y caracterizar objetos geométricos, necesarios para el desarrollo posterior de los problemas, tales objetos son: equidistancia, circunferencia y mediatriz. Por lo que es fundamental el orden en que se presentan los problemas. Cada problema fue abordado por el grupo de estudiantes en una sesión de trabajo de una hora. A continuación, se establecen los problemas, su objetivo y una posible aproximación de solución, en la que se reconoce la pertinencia del software.

Problema 1
Objetivo: Reconocer la circunferencia como el conjunto de todos los puntos que equidistan del centro.
A los estudiantes se les presenta un archivo en geogebra llamado “conjunto de puntos” en él encontraban 15 puntos, sin orden alguno: 7 puntos azules, 7 puntos rojos y un punto verde llamado B. Los puntos azules tienen una relación de simetría con los puntos rojos, con respecto al punto B, esto quiere decir que:

cada punto azul, tiene un punto rojo que se encuentra en la misma recta con B y que al ser manipulados, se separan a la misma distancia de B (esta relación debe ser descubierta por los estudiantes). También se hace entrega de una guía con enunciado:

1. Abran el archivo “conjunto de puntos” que se encuentra en la carpeta de trabajo.
2. Intente mover uno de los puntos azules. ¿Es posible realizar esto?
3. Arrastre un punto rojo y comente con su compañero lo que ocurre.
4. ¿Qué relación hay entre el punto rojo que se mueve y el punto azul que depende de él? Usando las herramientas de Geogebra corrobore su respuesta.
5. Arrastren todos los puntos rojos, de tal forma que ellos estén a la misma distancia (equidisten) del punto B.
6. ¿Qué figura geométrica determinan los puntos? Verifique su respuesta.
7. Con base en la exploración y las propiedades encontradas, enuncien una definición de la figura geométrica obtenida.

Posible solución:
Iniciando la actividad, se espera que los estudiantes exploren y arrastren los objetos geométricos (puntos azules, puntos rojos y punto B) que contiene el archivo de GG, de esta manera pueden determinar la relación de dependencia existente entre los puntos rojos y los puntos acules, la cual corresponde a que el movimiento de los puntos azules se da únicamente si los puntos rojos se mueven, al mismo tiempo que B representa el punto medio de la distancia entre cada punto azul y uno rojo. Esta relación permite garantizar distancias iguales, acción necesaria para trabajar la concepción de equidistancia.

Para lograr que los puntos se encuentren a la misma distancia de B, se espera que inicialmente una manipulación a mano alzada, donde los estudiantes ubiquen los puntos rojos alrededor de B formando una circunferencia, debido a la relación mencionada anteriormente, los puntos azules también se ubicaran a la misma distancia y esto permitirá tener una aproximación grafica de un objeto geométrico familiar a ellos, la circunferencia. En la pregunta seis, se espera que los estudiantes realicen la asociación con la figura y verifiquen su idea construyendo una circunferencia. Para esta acción el docente debe estar atento para colaborar con la manipulación de una nueva herramienta que los estudiantes necesitaran usar. Con ello se busca crear una concepción no trabajada por ellos anteriormente, alimentando el sistema axiomático local, por un lado aparece el concepto de equidistancia, definida y trabajada a partir de la igualdad de medidas y por el otro lado el objeto geométrico circunferencia.

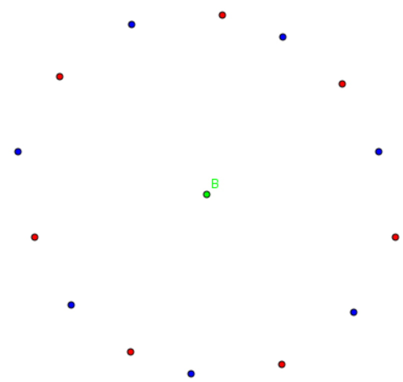


Figura 3 Representación esperada - problema 1

Tabla 2 Descripción Problema 1

Problema 2
Objetivo: Reconocer la mediatriz como el conjunto de todos los puntos que equidistan de dos puntos fijos.
A los estudiantes se les presenta un archivo de geogebra llamado “equidistancia de dos puntos”, allí encontraran dos puntos fijos A y B (no pueden ser movidos) en el plano, estos puntos no tienen alguna relación en particular. También se hace entrega de una guia cuyo enunciado es: 1. Abran el archivo “equidistancia de dos puntos”. Allí encontrará dos puntos A y B fijos. 2. Ubique un punto C que se encuentre a la misma distancia (equidiste) de los puntos A y B. ¿Está el punto C realmente a la misma distancia del punto A y del punto B? ¿Por qué? 3. ¿Pueden ubicar más puntos bajo la misma condición? Justifiquen su respuesta. 4. ¿Los puntos ubicados permiten determinar alguna figura geométrica? ¿Cuál? 5. Describan algunas propiedades de esta figura y defínanla.
Posible Solución: Lo primero que se espera en la solución de la actividad, es que los estudiantes ubiquen como primer punto, el punto medio del segmento determinado por los puntos A y B, pues ya han tenido acercamiento a este objeto (punto medio), el cual cumple con las condiciones solicitadas. Para identificar otro punto los estudiantes deben explorar las herramientas que les ofrece GG. Ellos pueden, por ejemplo, hacer uso de la herramienta Distancia o Longitud, para verificar la

distancia entre los puntos A y B o para determinar la distancia de un tercer punto con respecto a A y a B. Pueden pensar también en triángulos isósceles y determinar un punto que haga las veces de vértice de dicho triángulo, el cual determine junto a A y B los segmentos congruentes del triángulo. Otra herramienta que puede ser utilizada por ellos es la de circunferencia, pues es un objeto que han definido y trabajados en problemas anteriores, teniendo en cuenta la equidistancia de los puntos que la conforman con respecto al centro. Al solucionar la pregunta 3, con ayuda de la intervención del docente, se espera que los estudiantes descubran varios puntos que equidistan de A y de B, para poder observar en el desarrollo de la pregunta 4, que la figura que se asemeja es la de una recta, de allí que en la discusión de cierre, se hable de la recta formada por todos los puntos que equidistan de dos puntos fijos cuyo nombre (se les enseña el nombre técnico) es mediatriz. Nuevamente, se piensa en la retroalimentación del sistema axiomático local.

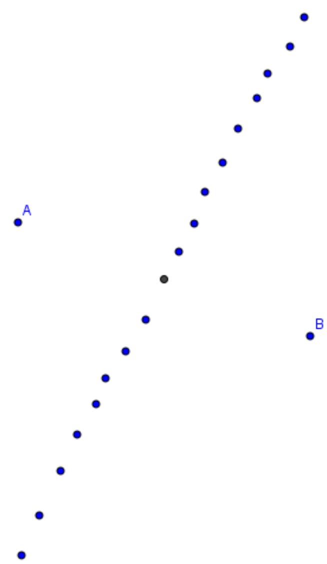


Figura 4. Representación esperada - problema 2

Tabla 3 Descripción Problema 2

Problema 3
Objetivo: Apoyar la conceptualización de mediatriz, como conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento.
Para el desarrollo de este problema, no se entrega un archivo en particular, los estudiantes desarrollaran la construcción en un plano nuevo de geogebra. Se trabajara frente a una herramienta no conocida por los estudiantes, Compas, las características de esta herramienta se asemeja a las de la circunferencia, pues es necesario un punto que se determinara como centro y una distancia que sera el valor del radio, lo único que varía es que la circunferencia que se forma no

puede ser manipula ni modificada, a menos que se realice el cambio a la distancia tomada para determinar el radio. Se recomienda a los docentes abordar el manejo y las características de esta herramienta antes de iniciar con el desarrollo del problema.

Primera fase: construcción
Use las herramientas de Geogebra para realizar la siguiente construcción

1. Trace una recta que pase por dos puntos, llámelos M y N.
2. Sobre la misma recta trace un segmento entre los puntos M y N (ubíquense sobre el punto M y den clic sobre el icono objeto fijo, realicen lo mismo con el punto N).
3. Tracen una circunferencia con centro en M y radio de medida desde M hasta cualquier punto sobre la recta (llamen ese punto O y cambien su color).
4. Tracen otra circunferencia con la herramienta compás, tomando como distancia el radio de la circunferencia anterior y centro en el punto N.
5. Marquen los puntos de intersección de las dos circunferencias, nómbrenlos P y Q (cambien el color de esos puntos).
6. Den clic derecho sobre el mouse y active la opción Rastro.

Segunda Fase: Exploración
Con base en la construcción realizada, respondan a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relaciones y propiedades observan? Verifiquen su respuesta.
2. Con base en las definiciones que han construido hasta el momento, ¿Cómo podrían justificar su respuesta?, descríbanlo

Posible Solución:
Esta actividad tiene dos propósitos, por un lado que los estudiantes se inicien en la elaboración de construcciones que impliquen uso de diferentes objetos geométricos y por el otro que puedan reconocer que existe una construcción que permite determinar la mediatriz de un segmento.

Se espera que los estudiantes empiecen a explorar los diferentes elementos que componen la construcción, hasta que identifiquen que moviendo el punto O a lo largo de la recta, se empieza a visualizar en pantalla un rastro o huella generado por dos puntos. Al preguntar por lo que observan, los estudiantes deben identificar las características de cada punto sobre el rastro generado, pues al aclarar las características de la herramienta compas, se espera que los estudiantes identifiquen la congruencia en las medidas de los radios de las dos circunferencias, así podrán determinar que cada uno de los puntos que forma la intersección de las dos circunferencias se encuentran a la misma distancia de los centros de la circunferencia, es decir que equidistan de M y N (objetivo de la

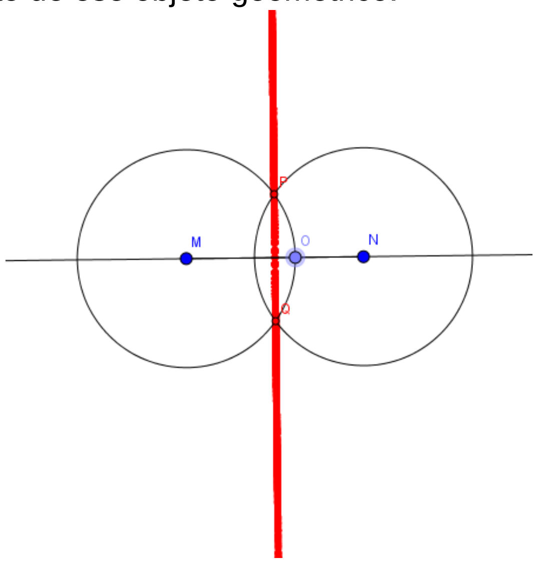
actividad) y que al mover O por la recta, el rastro determinado se convierte en una recta perpendicular a la que conocemos como mediatriz. En el desarrollo de este problema, se trabajan herramientas de software nuevas, como: compas y arrastre, herramientas necesarias para el desarrollo de tareas posteriores. Nuevamente se aclara la importancia de presentar las tareas, en el orden en que fueron diseñadas y expuestas en el documento. Sobre el sistema axiomático local, se determinan características diferentes de la mediatriz, reforzando el concepto de ese objeto geométrico.  *Figura 5. Representación esperada - problema 3*

Tabla 4 Descripción Problema 3

Problema 4:
Objetivo: Hacer uso de la equidistancia de puntos, para construir triángulos isósceles.
Nuevamente los estudiantes trabajaran sobre un documento de GG en blanco, se ve la necesidad de discutir sobre los tipos de triángulos, antes de iniciar la actividad. De esta manera los estudiantes recordaran las características fundamentales de los triángulos isósceles, acción necesaria para el desarrollo del problema. También se le sugiere al docente, preguntar a los estudiantes por las herramientas trabajadas en clase, en los problemas anteriores. Esto permitirá a los estudiantes no solo recordar que herramientas han utilizado y ya son conocidas por ellos, si no que además reforzaran las características y uso de cada una de ellas. Enunciado: 1. Abran un archivo nuevo en Geogebra con la pantalla de geometría. 2. Haciendo uso de las herramientas conocidas, construyan un triángulo

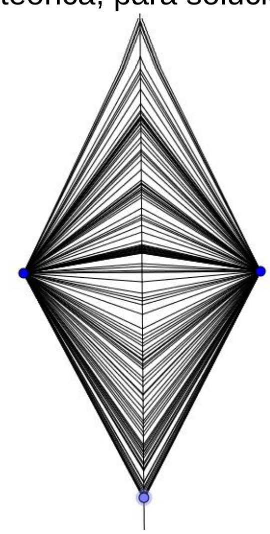
isósceles. Proponga dos métodos diferentes. 3. Proponga una justificación haciendo uso de los elementos geométricos (trabajados en la construcción) que les permiten garantizar que son triángulos isósceles.
Posible Solución: Para dar solución a este problema, primero los estudiantes deben tener claras las características de un triángulo isósceles, se espera que para dar alguna o las dos propuestas de construcción, ellos hagan uso de los conceptos trabajados y asociados en el desarrollo de las tareas anteriores. Una de las posibles soluciones que se espera, involucra el uso de la mediatriz: para construir el vértice del triángulo que une los dos lados congruentes, los estudiantes pueden construir un segmento cualquiera y la mediatriz del mismo, ubicando un punto sobre la mediatriz. Este punto como se ha comprobado en tareas anteriores equidista de los extremos del segmento (formando los dos lados congruentes). En la imagen se representan los diferentes triángulos que se pueden construir ubicando el vértice sobre la mediatriz. Este problema, permitirá a los estudiantes implementar objetos geométricos, formados en la construcción teórica, para solucionar situaciones geométricas.  *Figura 6. Representación esperada - problema 4*

Tabla 5 Descripción Problema 4

Problema 5
Objetivo: Reconocer la circunferencia como el lugar geométrico del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, en diferentes posiciones.
En este problema, se les presenta a los estudiantes un archivo en GG llamado “ángulo constante”, en él se encuentra un triángulo rectángulo con dos de sus

vértices (los que contienen los ángulos agudos) fijos. El tercer vértice, aquel que contiene el ángulo recto (cuya medida es mostrada) puede ser manipulado. La idea del problema es que los estudiantes muevan el vértice tratando de conservar el ángulo recto, de manera que observen que sucede con el punto cuando realizan esta acción.

Enunciado:

1. Abra el archivo “ángulo constante”
2. Arrastre el punto P en el plano, de tal forma que la medidadel angulo EPQ sea siempre de 90°.
3. Al arrastrar el punto Q bajo la construcción solicitada, ¿observan alguna propiedad?
4. ¿Qué objeto geométrico describe el movimiento del punto?
5. Realicen una construcción que muestre su punto de vista.

Posible Solución:

Esta tarea tiene diferentes objetivos: por un lado tenemos el objetivo conceptual que busca que los estudiantes identifiquen relaciones propias de la circunferencia y por otro lado, se espera que los estudiantes hagan uso de las herramientas que el SGD ofrece para dar solución a una dificultad o inquietud que se les presenta (en este caso se espera exploración de herramientas conocidas como: rectas, circunferencia, compas y no conocidas por los estudiantes, aquellas que se encuentran en el panel de herramientas pero que no han tenido la necesidad de usar). Los estudiantes deben seguir las indicaciones dadas en el problema, después de explorar la construcción y tratar de mantener el arrastre conservando el ángulo de 90º, se espera que ellos identifiquen que el lugar geométrico es una circunferencia. Una de las posibles opciones que pueden usar los estudiantes para comprobar su conjetura es construir una circunferencia con ayuda de la herramienta y comprobar que efectivamente cuando el punto está sobre ella, conserva el valor del ángulo.

Hay que recordar que al realizar la ubicación del vértice a mano alzada puede existir la posibilidad que el valor de la medida del ángulo se aproxime a 90º, pero no los sean exactamente, como docentes se puede ayudar a los estudiantes solicitándoles que pongan un punto sobre la circunferencia, garantizando que siempre medirá el ángulo 90º.

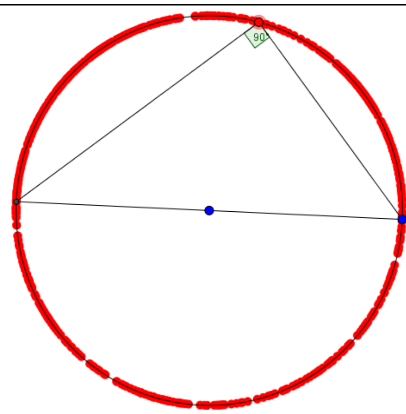


Figura 7. Representación esperada - problema 5

Tabla 6 Descripción Problema 5

Problema 6
Objetivo: Construir la mediatriz de un lado de un triángulo, a partir de la intersección de las otras dos mediatrices.
En este problema, se trabajara en un plano nuevo de GG, para la construcción es necesario aclarar términos geométricos como colinealidad, se recomienda debatir el termino con los estudiantes, dando sentido a la indicación 2 del problema. Se les puede aclarar a los estudiantes que pueden hacer uso de la herramienta mediatriz para su construcción, debido a que la importancia de ese objeto geométrico en el problema es mas de uso que de caracterización. Enunciado: 1. Abran un archivo nuevo en Geogebra 2. Construyan tres puntos no colineales y llámenlos A, B y C. 3. Construyan las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. 4. Llame P al punto de intersección de las dos mediatrices. 5. ¿Qué relación o propiedad se observa en el punto P cuando el punto B se mueve? 6. formulen una propiedad que reporte lo encontrado en el anterior punto. 7. justifiquen esta propiedad con base en las propiedades y definiciones construidas.
Posible Solución: Para la solución de este problema, primero los estudiantes deben realizar la construcción sugerida, haciendo uso de la herramienta arrastre, moverán el punto B en diferentes direcciones observando que propiedades cumple P. Después del desarrollo de los anteriores problemas, en donde se inició la construcción el concepto de equidistancia, se espera que los estudiantes observen las distancias de los tres puntos (A, B, C) con respecto a P, las relacionen y se den cuenta que este punto equidista de los tres. Una de las

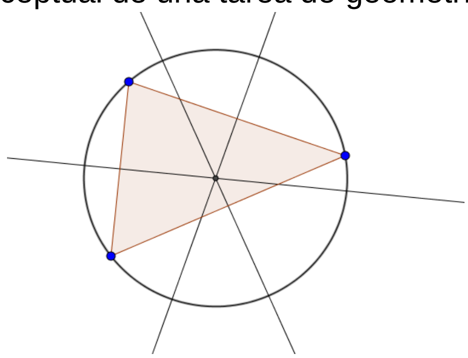
posibles alternativas que pueden usar los estudiantes para comprobar la relación, es hacer uso de la herramienta circunferencia y construir una con centro en P y radio hasta algunos de los puntos y comprobar que los tres puntos (A, B, C) hacen parte de ella. Este problema abarca herramientas y objetos geométricos familiares para los estudiantes, esto nos permite ver que tanto influye el manejo del software en el desarrollo y solución de una situación y así, poder caracterizar la medicación de GG en el desarrollo conceptual de una tarea de geometría.  *Figura 8. Representación esperada - problema 6*

Tabla 7 Descripción Problema 6

Problema 7
Objetivo: Identificar que un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia si sus mediatrices se intersecan en un punto.
El problema se desarrolla en un plano en blanco del software GG, se le recomienda al docente orientador, hacer una discusión antes de iniciar el desarrollo, en donde se aclaren las características de un cuadrilátero, haciendo ejemplos de cuadriláteros conocidos por los estudiantes. Enunciado: 1. Abran un archivo nuevo y construya un cuadrilátero ABCD. 2. Trace las mediatrices de cada uno de los lados. 3. Muevan los vértices del cuadrilátero de tal forma que las mediatrices de sus lados se intersequen en un único punto. ¿Qué propiedades cumplen los vértices bajo esta condición? 4. Construyan otros cuadrilateritos EFGH y JKLM, y realicen el mismo procedimiento anterior. ¿Qué propiedad cumplen los vértices de los cuadrilateritos bajo esta condición? 5. Justifiquen esta propiedad con base en las propiedades y definiciones construidas.
Posible Solución: Esta actividad pretende unificar distintos elementos teóricos e instrumentales

abordados hasta ahora, por un lado reconocer la experiencia adquirida por los estudiantes frente al uso del software GG por otro lado identificar la construcción conceptual de conceptos como equidistancia, circunferencia y mediatriz.

Al mover los vértices y lograr intersecar las mediatrices en un punto, se espera que los estudiantes con ayuda de las herramientas (circunferencia, compás, distancia o longitud) identifiquen que este caso se cumple, si los vértices pertenecen a una misma circunferencia.

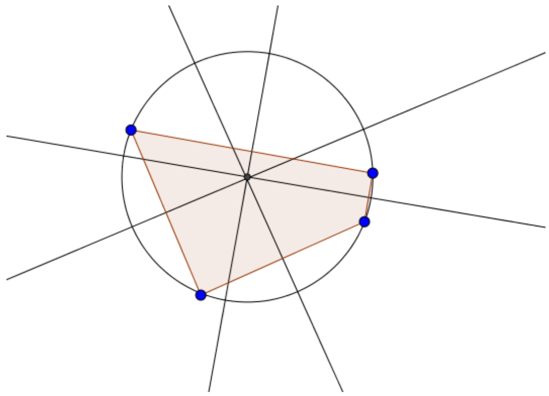


Figura 9. Representación esperada - problema 7

Tabla 8 Descripción Problema 7

3.5 Acopio de Datos

Para la implementación de los problemas se utilizó un espacio cerrado y carente de distractores. Los estudiantes contaron con un computador portátil, donde podían acceder a GG y *Camtasia Studio*. *Camtasia Studio* es un Software que permite la captura y edición de las interacciones sostenidas en la pantalla del computador, el audio que esta genera e inclusive la captura de imagen y audio externos a través de la cámara del computador. Este programa reúne estos elementos y genera un único video que captura la interacción global de los estudiantes al abordar un problema en el que se debe hacer uso del computador y algún programa computacional. De ahí su pertinencia y utilidad al momento de recoger la información deseada.

De igual manera, a los estudiantes se les entregó papel y lápiz para que pudieran registrar las ideas, procedimientos o conjeturas que surgían en el desarrollo de cada problema. En el desarrollo de las sesiones de trabajo, donde se resolvieron los problemas propuestos, las investigadoras repartieron tareas y de esta forma una de ellas se encargó de documentar los datos y observaciones realizadas, mientras su compañera acompañó a los estudiantes y ofrecía orientaciones si llegaba a ser necesario. Así, los datos recogidos para analizar constaron de: los videos elaborados gracias al programa Camtasia Studio, las producciones escritas de los estudiantes y los datos registrados por las docentes investigadoras.

Construcción del conjunto de datos

La construcción del análisis se hizo en forma descriptiva, a partir de la lectura de los datos que se construyeron en el proceso de análisis. Los datos son tablas de Excel por problema (Anexo 2), que contrastan momento a momento, el uso de una herramienta en el desarrollo de una acción. Por ejemplo si los estudiantes estaban haciendo una acción de exploración, se identificaba la herramienta utilizada por los estudiantes y se dejaba registro de ello. Esta acción se realizó para el desarrollo de todo el problema, para ello se hizo uso de los soportes de video y escritos registrados por el grupo de estudiantes.

A continuación, se muestran las abreviaciones correspondientes a las acciones de la actividad demostrativa, en cada uno de los procesos.

Proceso	**Acciones de la actividad demostrativa**	**Abreviación**
Conjeturación	Detectar un invariante	Di
	Verificar invariante	Vi
	Formular conjetura	Fc
	Corroborar la conjetura	Cc
	Visualización (C)	Vi.
	Exploración (C)	E.
	Exploración Empírica (C)	Ee
	Exploración Dinámica (C)	Ed
	Exploración Teórica (C)	Et
Justificación	Selección de elementos teóricos que sustentan la afirmación	Set
	Selección de elementos empíricos que sustentan la afirmación	See
	Organizar elementos de manera deductiva	Oed
	Formular la justificación	Fj
	Visualización (J)	Vi
	Exploración (J)	E
	Exploración Empírica (J).	Ee
	Exploración Dinámica (J).	Ed
	Exploración Teórica (J).	Et
	Explicación de validación	Ev
	Prueba	Pr
	Demostración	De

Tabla 9 Abreviación Acciones de la Actividad Demostrativa

La segunda son los tipos de artefactos (herramientas propias de GG), utilizados en cada una de las acciones, estas son:

Artefactos	Abreviatura
Arrastre. Errático	Ae
Arrastre. Test	Ate.
Arrastre. Vinculado	Av
Arrastre. Traza	Atr.
Arrastre. Guiado	Ag
Cuadrícula	Cu.
Construir	Co.
Representación gráfica	Rg
Distancia o Longitud	DL
Punto	P.
Simetría central	Sc
Objeto fijo	Of.
Mostrar/Ocultar ejes	MO
Aproximar	Ap
Segmento	Se
Recta	Re
Polígono	Po
Circunferencia (centro, punto)	Ci
Semicircunferencia	Sc
Compás	Co
Intersección	In
Mediatriz	Me
Ángulo	Án
Medio o Centro	MC

Tabla 10 Abreviación Artefactos

3.6 Análisis Retrospectivo

Herramienta Analítica

Para llegar a una caracterización de la mediación del SGD en los procesos de la Actividad Demostrativa, objetivo principal de esta investigación, en un primer momento, articulamos el marco de la Aproximación Instrumental con el de la Actividad Demsotrativa. Esto para dar cuenta de qué *artefactos* y *acciones* (de conjeturación y justificación), emplearon los estudiantes para solucionar los problemas, pero además para presentar aquellos *artefactos* que lograron convertirse en *instrumentos* a través del proceso de génesis instrumental y que comprende los esquemas de utilización. A continuación se describen las categorías de análisis (Ver tabla 11).

Categorias	Descripción
Instrumento–proceso de Conjeturación	El artefacto llega a transformarse en instrumento durante el proceso de conjeturación, pues el esquema de utilización se enmarca en téctinicas de instumentación e instrumentalización que obedecen a acciones como: Ee, Ed, Di, Vi, Fc y/o Cc.
Instrumento–procesos de Conjeturación y justificación.	El artefacto llega a transformarse en instrumento durante los procesos de conjeturación y justificación, pues el esquema de utilización se enmarca en técnicas de instumentación e instrumentalización como: Ee, Ed, Di, Vi, Fc, Cc, Et, See, Set, Fj, Ev y/o Pr.

Tabla 11 Herramienta Analítica

En un segundo momento articulamos los resultados del análisis que provee la herramienta anterior con el enfoque Mediación Instrumental, para caracterizar el papel mediador del SGD en términos de los artefactos que se emplearon y aquellos que alcanzaron el nivel de instrumentos para los estudiantes (Ver tabla 12).

Categorías	Descripción
Ejecutabilidad	Re-define los sistemas de representación de un objeto geométrico.
Amplificación	El uso de un artefacto no modifica la estructura de pensamiento, sino que la complementa.
Re-organización cognitiva	El artefacto en su uso un se tranforma en Instrumento.

Tabla 12 Herramienta Analítica: Niveles de Mediación Instrumental

4. ANÁLISIS

Apoyados en el objetivo que nos hemos trazado, en este capítulo nos proponemos presentar y analizar los resultados que dan cuenta de la mediación del software GeoGebra, en la solución de una secuencia problemas que involucran procesos de conjeturación y justificación para su solución. Como se mencionó en el capítulo de metodología, el conjunto de problemas fue desarrollado por un grupo de tres estudiantes a los que llamaremos en este capítulo E1, E2 y E3. Los resultados son presentados de manera descriptiva de acuerdo a lo sucedido durante el proceso de solución llevado a cabo por los estudiantes en cada uno de los problemas, en contraste con la categorización emergente del marco teórico, la cual se explicó en el capítulo de metodología.

4.1 Problema 1. Conjunto de puntos

El primer problema desarrollado tenía como objetivo reconocer la definición de circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo (centro). A partir de la manipulación de los puntos, ubicándolos a la misma distancia del centro, los estudiantes realizaran una construcción de una de las definiciones de circunferencia, “La circunferencia es el conjunto de todos puntos que equidistan del centro”. De esta forma, este objeto geométrico se incorpora al sistema teórico local construido a lo largo de la secuencia implementada.

En la primera parte de este problema, los estudiantes debían abrir un archivo de GeoGebra, en el que encontrarían puntos azules, rojos y un punto verde llamado B, distribuidos en la pantalla. A los estudiantes se les pidió mover los puntos azules y observar qué pasaba con los otros puntos. Esto los llevó a intentar arrastrar un primer punto azul, sobre el cual reconocieron que no era posible modificar su posición en pantalla respecto a los otros puntos. Por lo anterior, se reconoce en este episodio un primer intento de los estudiantes por manipular los objetos geométricos y se incitan a partir de las indicaciones de la guia a identificar la relación de dependencia que existe con entre los puntos azules y los puntos rojos. La manipulación de los puntos permite al estudiante identificar relaciones que no son serían posibles mostrar con el lápiz y el papel, por ello reconocemos que el software medio en el proceso de concepción a través de la función de arrastre, obedeciendo principalmente a una instrucción dada por el enunciado del problema [Ee, Ag]. Este ejercicio fue realizado con los otros puntos azules, obteniendo el mismo resultado, lo que llevó a uno de los estudiantes a concluir que ninguno de estos puntos podía ser arrastrado [E1: *No es posible moverlos*]. En este caso se aprecia el uso de un *Arrastre Errático* dentro de un proceso de exploración [Ee, Ae], dado que se estaba buscando descubrir alguna posibilidad de manipular los puntos azules presentados en pantalla (figura 10), pero este ejercicio obedeció más a una prueba de ensayo y error que a la comprobación de alguna propiedad previamente establecida o al cumplimiento de alguna pauta (v.g. mantener alguna propiedad).

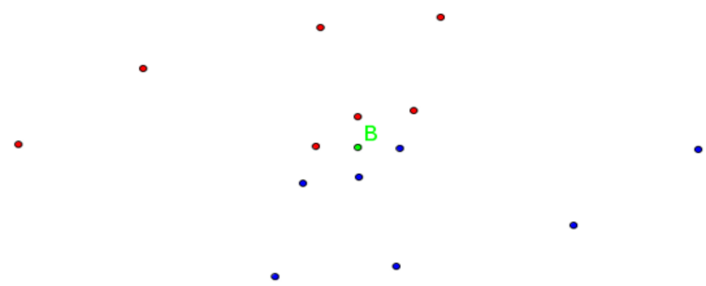


Figura 10. Solución problema 1- Imagen 1

Los estudiantes reconocieron que no era posible manipular el conjunto de puntos azules y procedieron a arrastrar los puntos rojos, instrucción dada también en el enunciado del problema, en busca de alguna propiedad [Ee, Ae], nuevamente incitado por las indicaciones del ejercicio. Esta acción les permitió observar que al mover algún punto rojo, existía un punto azul que también lo hacía, identificando una relación de dependencia con ello [E1: *es como si el azul dependiera del rojo*], la cual se da a través del *Arrastre Errático* sobre los puntos rojos [Di, Ae]. Después de observar este comportamiento, los estudiantes por iniciativa propia decidieron intentar mover el punto verde B (punto fijo), evidenciando que este no podía moverse.

Después de ello, los estudiantes verificaron visualmente el comportamiento del conjunto de puntos (rojos, azules y verde) tratando de observar qué caracterizaba el movimiento de cada conjunto de puntos, apoyándose para ello en la herramienta de *Arrastre*, la cual al tener una intención previa por parte de los estudiantes (verificar las propiedades descubiertas en la visualización), se considera para nosotros como Arrastre *Guiado* [Vi, Ag]. En este punto se presentó una dificultad asociada a la representación en pantalla, en tanto que la cantidad de puntos azules y rojos que se podían observar en pantalla no era la misma (véase figura 11), pues de los puntos rojos se observaban 6 de ellos y de los azules 7.

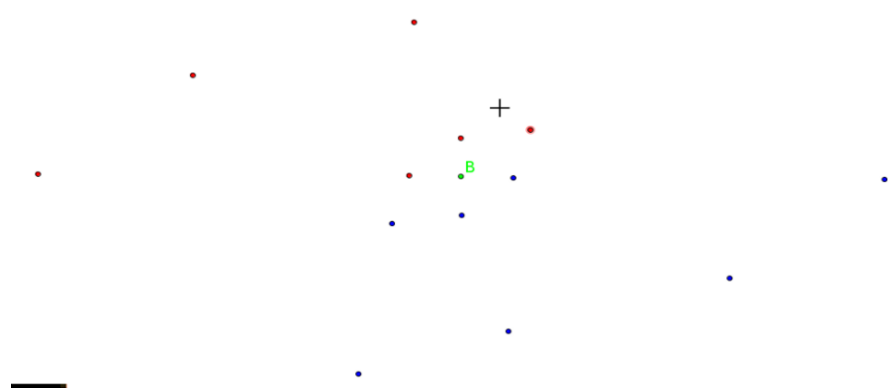


Figura 11. Solución problema 1- Imagen 2

Esto último no permitiría corroborar la relación encontrada.

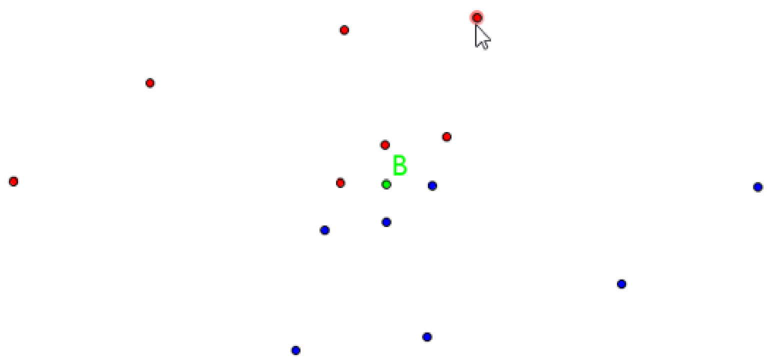


Figura 12. Solución problema 1- Imagen 3

Los estudiantes hicieron uso del *Arrastre de Test* [Vi, Ate], verificando la dependencia descubierta (cada punto azul depende del movimiento del punto rojo) para identificar así si había alguno que no la cumpliera, pues aún no se tenía seguridad sobre el cumplimiento de esta por parte de cada punto (véase figura 12).

El desarrollo del problema era observado por un docente, autor de este trabajo, el cual tenía como misión guiar y observar el desarrollo de cada problema; con ayuda de él, [D: *Sera que el punto no se encuentra en otra parte […] Revisen todo el plano*], los estudiantes identificaron que el problema correspondía a la región del plano mostrada en la pantalla, pues el punto que hacía falta se encontraba por fuera del límite visual que proporcionaba la pantalla del computador (véase figura 13). Para sortear esta eventualidad, el docente acompañante alejó, gracias a la herramienta *Zoom*, la imagen mostrada en pantalla y con ello identificó, junto con los estudiantes, el punto que hacía falta. Los estudiantes movieron este nuevo punto para que quedara cerca al centro de la pantalla. Después de ello, los estudiantes arrastraron todos los puntos rojos y verificaron que para cada uno de ellos había un punto azul cuyo movimiento dependía del movimiento del primero. Superada esta dificultad, los estudiantes se apoyaron de la *Visualización* y en el *Zoom* provisto por el software, al que denominamos en adelante como *Aproximar* [Vi,Ap], para obtener un enunciado que reportara sus hallazgos [E1: *Cada punto rojo tiene uno azul que depende de él*] [Fc, Ag].

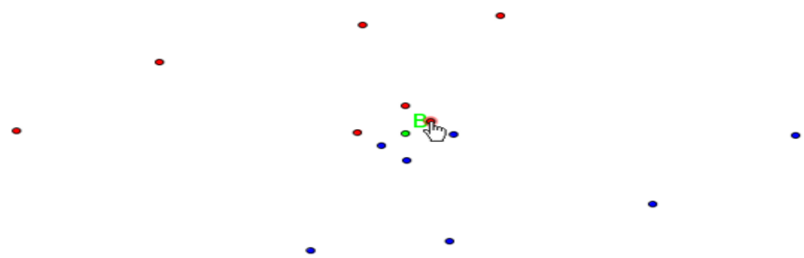


Figura 13. Solución problema 1- Imagen 4

Después de identificar las características de los puntos rojos y azules, el enunciado del problema les pidió a los estudiantes ubicar los puntos rojos a la misma distancia del punto verde llamado B. Ellos iniciaron a arrastrar los puntos indicados, determinando en pantalla una configuración como la presentada en la figura 14 [Ee, Ag]. En este punto E1 preguntó a sus dos compañeros *"¿Cómo hacemos para que la distancia sí sea igual?",* refiriéndose a la distancia de los puntos rojos con respecto a B. Esto movilizó en los estudiantes la búsqueda de métodos que solucionaran su inquietud. Una primera aproximación propuesta hizo uso del artefacto *Cuadrícula*[2] y el intento de arrastrar al punto B hasta una de las intersecciones esta, pero al no poder ubicar el punto B sobre una de estas, debido a que este punto se encontraba fijo en la pantalla, realizaron una exploración de las herramientas que les proporcionó el software. Es en este punto que E1 identificó la herramienta *Circunferencia* y a continuación comentó a sus compañeros *"y ¿si usamos esta "Circunferencia, centro, punto y alineamos todo como si fuera una Circunferencia?",* una posible ayuda en ese momento. Desafortunadamente la idea no es tenida en cuenta por sus compañeros y esta se ignora.

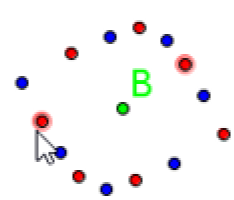


Figura 14. Solución problema 1- Imagen 5

[2] Este artefacto aunque no es característico de los postulados de la geometría euclidiana, es usado por los estudiantes como apoyo en el proceso de solución de algunos problemas.

Los estudiantes empezaron a interactuar con algunas herramientas del software, logrando desbloquear al punto B, el cual no se podía mover al inicio. Esto les permitió manipular dicho punto y ubicarlo en una de las intersecciones de la cuadrícula (véase figura 15).

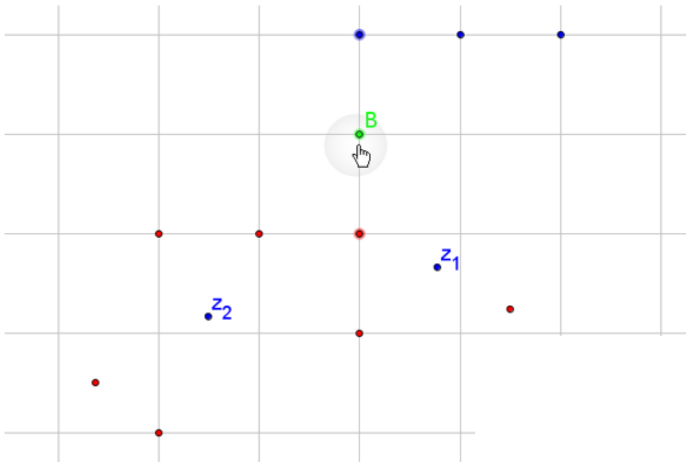


Figura 15. Solución problema 1- Imagen 6

Dado que su objetivo era ubicar los puntos rojos a la misma distancia de B, consideraron que con esta forma de proceder podían lograrlo [E3: *Ubiquemos B en la esquina (intersección) y ubiquemos los puntos*] Una vez arrastraron al punto B y lo dejaron donde se había proyectado, sobre la *Cuadrícula* ubicaron los puntos rojos de forma tal que obtuvieron un rectángulo (véase figuras 16 y 17). En este momento identificamos una acción de exploración buscando solucionar el problema, ya que buscaban la manera de explicar cómo se podía lograr que la distancia de los puntos rojos y azules al punto *B* fueran iguales, acción mediada por dos artefactos diferentes: la *Cuadrícula* y el *Arrastre Guiado* [Ee, Cu] y [Ee, Ag]. Al discutir su procedimiento con el docente acompañante, él les preguntó si los puntos se encontraban a la misma distancia de B *"¿todos los puntos están a la misma distancia del punto B?"*. Los estudiantes, para dar respuesta a esta pregunta, observaron la figura formada en pantalla y, apoyándose en el *Arrastre*

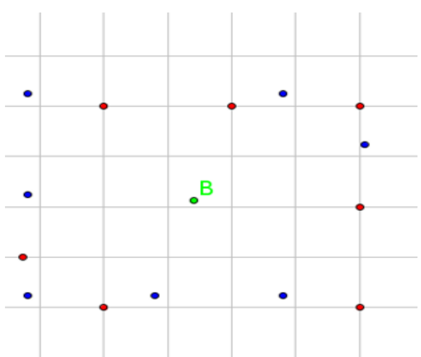


Figura 17. Solución problema 1- Imagen 7

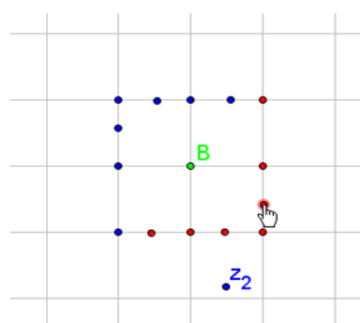


Figura 17. Solución problema 1- Imagen 8

Guiado, movieron los puntos rojos y compararon las distancias (los lados de los cuadrados fueron tomados como unidad de medida), determinando que algunas distancias eran diferentes a otras [Vi, Ag].

Para verificar si efectivamente los puntos rojos estaban a la misma distancia del punto B, los estudiantes exploraron las herramientas del software y descubrieron el artefacto *Distancia o Longitud*. Usando este artefacto, los estudiantes determinaron la distancia entre los puntos rojos y azules (uso inadecuado de la herramienta), hasta que identificaron que debían determinar la distancia entre un punto rojo y el punto B. Los estudiantes determinaron la distancia entre dos puntos rojos y el punto B e identificaron que estas distancias no eran iguales, por lo que los puntos no se encontraban a la misma distancia de B [Ee, DL]. Posteriormente, los estudiantes discutieron sobre otras estrategias que podrían implementar para reorientar el trabajo realizado y encontrar una solución al problema abordado. El docente acompañante sugirió que no desecharan las propuestas mencionadas anteriormente por ellos, por lo que los estudiantes recordaron lo comentado por uno de sus compañeros (E1), quien nuevamente mencionó, señalando la herramienta *Circunferencia* con el mouse "*y si usamos esta, circunferencia, centro, radio y nos*

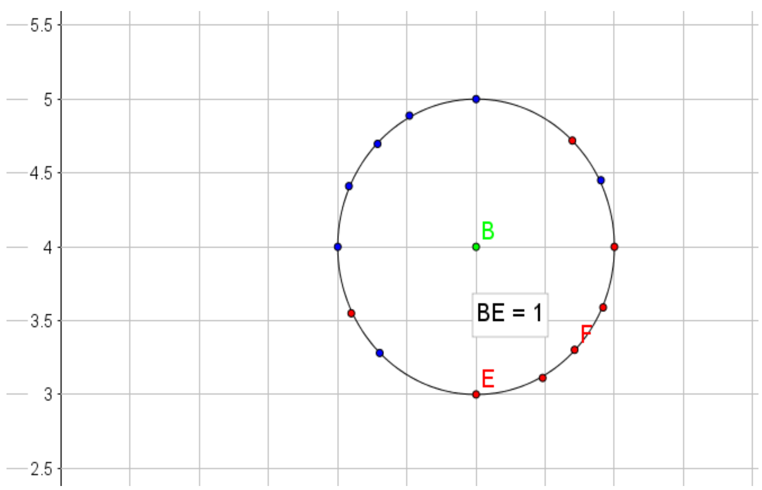


Figura 18. Solución problema 1- Imagen 9

ponemos a ver y la alineamos".

E1 construyó una circunferencia con centro en B y, haciendo uso del *Arrastre Guiado,* ubicó sobre ella los puntos rojos y azules [Set,Ci] (véase figura 18), lo que los llevó a evidenciar el cumplimiento de la equidistancia de manera visual, aun cuando los valores no fueran exactamente iguales. De esta forma, los estudiantes observaron que si los puntos estaban sobre una misma circunferencia entonces estos se encontraban a la misma distancia del centro y reconocieron que los puntos que equidistaban estaban sobre la circunferencia [Set,Ag] [Fc,Ci]. El profesor acompañante cuestionó a los estudiantes por el procedimiento realizado

“¿cómo pueden saber que los puntos están a la misma distancia de B?”. Los estudiantes se apoyaron en la igualdad de longitudes de los radios de una circunferencia para responder a ello [E2: *El circulo tiene radio para todos los lados y todos son iguales* (medidas de los radios)] [Fj, Ci], presumiblemente, esto lleva a pensar que los estudiantes conocían ya la definición de circunferencia en estos términos. Sin embargo el docente aclara que el nombre de la figura es circunferencia y no círculo. Por último se les solicitó enunciar una definición de la figura geométrica obtenida a lo cual respondieron, “*la circunferencia es una figura geométrica la cual posee una cantidad indefinida de puntos que están ubicados a la misma distancia del punto centro o punto B, en este caso”.*

A modo de cierre del proceso de solución de este primer problema, cuyo propósito era definir la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan del centro, se pudo reconocer la emergencia de acciones de la actividad demostrativa a partir de acciones como la *Exploración*, la *Visualización*, la *Formulación de Conjeturas* y el uso de herramientas como: *Distancia y Longitud, Circunferencia, Cuadricula* y los diferentes usos del arrastre, también allí observados.

En el proceso de conjeturación (primeras acciones) se pudo observar el uso de diferentes tipos de arrastre en la exploración, visualización, exploración y finalmente la formulación de una conjetura, aunque también se hace uso de artefactos como la cuadricula. Por otro lado, el arrastre guiado es una herramienta fundamental en el desarrollo del proceso de justificación (tomado desde el momento en que los estudiantes buscaban dar solución al problema) y permite a los estudiantes junto con la herramienta de circunferencia, probar su idea (conjetura), el uso constante y la apropiación de este artefacto, nos da una idea de la posibilidad de convertirse en un instrumento en el desarrollo de los siguientes problemas.

4.2 Problema 2, equidistancia de puntos

El segundo problema abordado por este grupo tenía como objetivo caracterizar y definir el segundo elemento del sistema teórico local, la mediatriz de un segmento, como el lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos fijos. A los estudiantes se les proveyó de un archivo Geogebra llamado “Equidistancia de puntos”, el cual contenía únicamente dos puntos A y B. Dado que el problema les pedía ubicar un punto C que equidistara de los puntos dados A y B, E2 inició una exploración por las diferentes herramientas de Geogebra, pasando el mouse por encima de ellas. Presuntamente, al no reconocer una herramienta que les fuera útil para solucionar el problema, decidieron ubicar un **punto** C entre A y B [Ee, P] (véase Figura 19). Una vez ellos realizaron esto, el docente acompañante les preguntó si realmente el punto C estaba a la misma distancia de los puntos A y B y, como la observación de la representación en pantalla no era suficiente para afirmarlo, los estudiantes decidieron explorar nuevamente en las herramientas del software buscando una que les permitiera determinar el punto medio de A y B:

- E2: *Ahí debe haber una opción “equidisten”, ¿si está la opción?*
- P: *Tienen que buscarla*.

Figura 19. Solución problema 2- Imagen 1

Al no identificar una herramienta de tal naturaleza, los estudiantes decidieron usar la herramienta *Simetría Central*[3]*;* sin embargo, cuando la emplearon (véase figura 20) detectaron que al seleccionar los puntos A y B, el nuevo punto A' que aparecía en pantalla no se ubicaba entre A y B, por lo que descartaron esta posibilidad:

- P: *¿Cuál escogieron?*
- E1: *Simetría central… si ven, ¿y si usamos otra?*.

Hasta ese momento se puede identificar que los estudiantes, a través del proceso de *Exploración Empírica* y del uso de artefactos como *Punto* y *Simetría Central,* intentaron determinar un punto que satisficiera la relación de equidistancia solicitada a través del enunciado del problema [Ee, Sc].

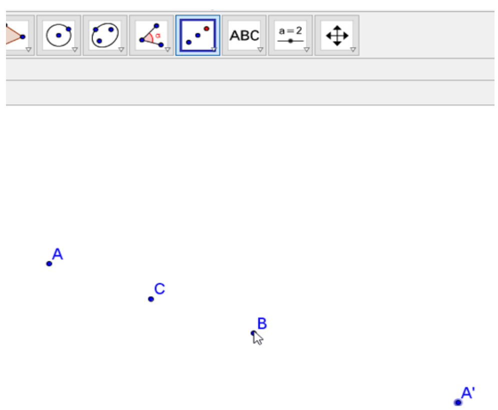


Figura 20. Solución problema 2- Imagen 2

Posterior a ello, los estudiantes decidieron apoyarse en el artefacto *Cuadrícula* y manipular los puntos A, B y C, arrastrándolos hasta los vértices de los cuadrados que se podían observar en esta, de tal forma que visualmente cumplieran la relación de colinealidad y el punto C equidistara de los puntos A y B (véase la transición de la figura 21 a la figura 22). Este proceso llevado a cabo por los estudiantes para ubicar el punto C, con la condición citada anteriormente, involucró la implementación, por parte de ellos, de artefactos como el *Arrastre*

[3] Es uno de los comandos de Geogebra que se emplea para construir transformaciones en el plano, particularmente para construir el simétrico de un punto dado dos puntos, donde uno es el punto del que se va conseguir su simétrico y el otro es el centro de la simetría.

Guiado y la *Cuadrícula,* quienes sirvieron de apoyo para la construcción de relaciones durante un proceso de *Visualización,* pues es mediante este que los estudiantes lograron configurar la colinealidad entre los puntos y la relación de equidistancia solicitada. [Vi, Cu], [Vi, Ag].

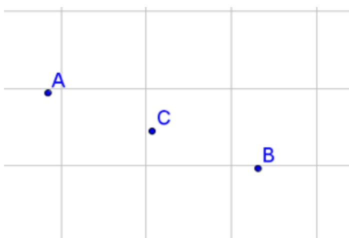


Figura 21. Solución problema 2- Imagen 3

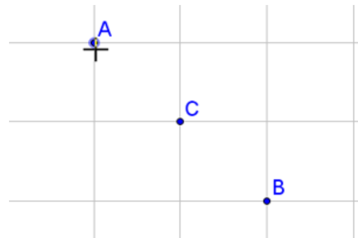


Figura 22. Solución problema 2- Imagen 4

Los estudiantes retomaron el enunciado del problema, el cual ahora les solicitaba que se diera respuesta a si realmente el punto *C* estaba a la misma distancia del punto A y del punto B y que explicaran el por qué de ello. Para ello E1 sugirió usar el artefacto *Distancia o Longitud* y determinar con ello las distancias entre los puntos A, C y B,C (figura 23) [E2: *la herramienta Distancia o Longitud nos permite medir entre* A *y* C *y* C *y* B]. Apoyados en la evidencia proporcionada por la visualización y exploración y el uso de la herramienta *Distancia o Longitud*, E1 verifica que los puntos A y B están aproximadamente a la misma distancia del punto C. Lo anterior permite inferir que E2 apoya su verificación durante una *Exploración Empírica* a través del uso de la herramienta *Distancia o Longitud* [Ee, DL].

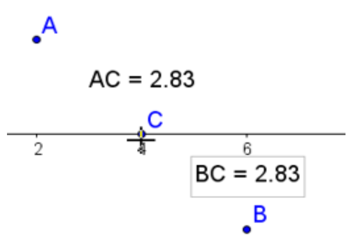


Figura 23. Solución problema 2- Imagen 5

Posteriormente, a los estudiantes se les pidió determinar si era posible ubicar más puntos que equidistaran de los puntos A y B. Frente a esto E2 resolvió involucrar nuevamente el artefacto *Cuadrícula*, alejar la vista (para obtener cuadrados más pequeños) y ubicar los puntos D (en medio de los puntos A y C) y E (en medio de los puntos C y B), tal y como lo podemos observar en la transición de las figuras 24, 25 y 26. E2 acudió a una *Exploración Empírica* apoyada principalmente en la *Cuadrícula* para ubicar los nuevos puntos [Ee, Cu].

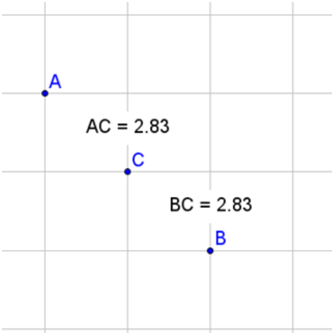


Figura 24. Solución problema 2- Imagen 6

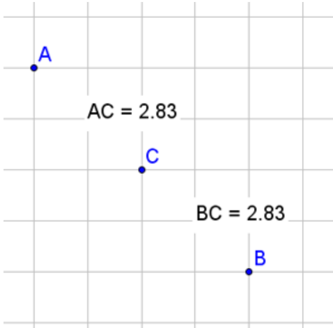


Figura 25. Solución problema 2- Imagen 7

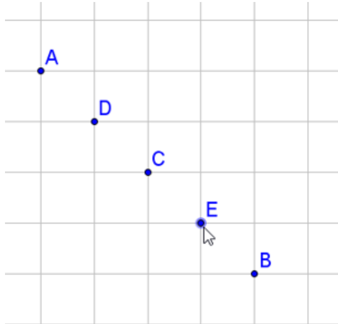


Figura 26. Solución problema 2- Imagen 8

Cuando el docente observó que los estudiantes ubicaron erróneamente los puntos intervino y discutió con ellos con el fin de realizar aclaraciones respecto al enunciado del problema:

- P: *Acuérdense que la condición del punto es que tenga la misma distancia entre quién y quién*
- E2: *¿Entre A y B?*
- P: *Entre A y B, ¿cuál fue el que ustedes dijeron que si se cumplía?*
- E2: *el C*
- P: *El C, porque la distancia entre A y C ¿es igual a…?*
- E2: *a la de C y B*
- P: *ahora ustedes me están ubicando otros puntos D y E ¿la distancia entre A y D es la misma distancia que entre D y B? ahí no más mirándola.*

Del resultado de esta discusión se puede inferir que E2, al percatarse de que ubicó erróneamente los puntos D y E, decidió usar el artefacto *Arrastre Guiado* con la intención de reubicar los puntos D y E a la misma distancia de los puntos A y B, tomando como unidad de medida los lados de los cuadrados determinados en pantalla (véase figura 27). Lo que les permitió reconocer que era posible ubicar más puntos que equidistaran de A y B. Hasta ese momento se puede reconocer un fuerte apoyo en la *Exploración Empírica* que comprende la toma de medidas, el uso de la *Cuadrícula* y del *Arrastre Guiado* para llegar a la solución del problema a través de estrategias de ensayo y error [Ee, Cu],[Ee, Ag].

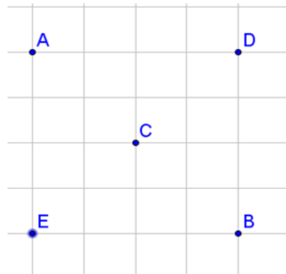


Figura 27. Solución problema 2- Imagen 9

Cuando el docente cuestionó al grupo sobre la posibilidad de ubicar aún más puntos bajo la misma condición, E2 ubicó dos puntos F y G sobre la cuadrícula, colineales a los puntos C, D y E (véase figura 28) y sostuvo ante sus compañeros que los puntos estaban determinando una recta [*Esto es una recta…si seguimos entre puntos formando una recta seguirán siendo equidistantes entre A y B los puntos que pongamos*]. Cuando E2 hizo esta afirmación surgió la *Formulación de una Conjetura* sustentada en la evidencia visual que le proporcionó el artefacto *Cuadrícula* [Fc, Cu]. Luego el docente intervino, pidiendo que construyeran el segmento $\overline{AB}$, al tiempo que preguntó sobre cuál era la relación entre el punto C y los puntos A y B. E3 reconoció que esta relación era la de punto medio [*C es el*

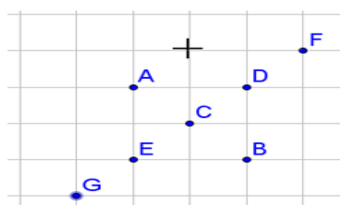


Figura 28. Solución problema 2- Imagen 10

punto medio de A y B].

Los estudiantes verificaron la equidistancia de los puntos D y E respecto a los puntos A y B apoyándose en la *Cuadrícula*, usando como unidad de medida los lados del cuadrado; ellos mencionaron que E estaba a dos unidades de A y a dos unidades de B, lo mismo que el punto D, llegando así a *Corroborar la Conjetura* [Cc, Cu]. El docente les pidió dibujar la recta que, según el grupo, se determinaba con los puntos construidos [P: *¿cuál es la recta, la podrían dibujar?*], acción que también hizo parte del proceso de *Corroboración de Conjetura* [Cc, Re]. E2 trazó esta recta (véase figura 29) y el docente cuestionó la afirmación que este estudiante había planteado anteriormente "*es decir que si ustedes ubican un punto sobre esa recta, ¿medirá lo mismo, hacia A y… hacia B?*", a lo que el grupo respondió afirmativamente.

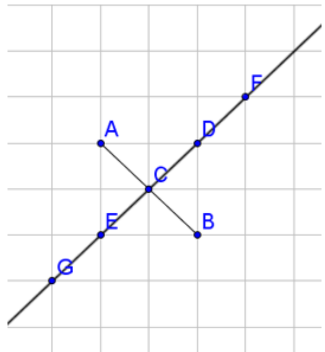


Figura 29. Solución problema 2- Imagen 11

Por lo anterior, el docente les pidió ubicar otro punto sobre la recta pero que preferiblemente no estuviera sobre la cuadrícula. E2 ubicó un punto H con esta condición (véase figura 30), a lo que el profesor les solicitó verificar la equidistancia de este punto a los puntos A y B. Para ello, E2 propuso usar el artefacto *Distancia o Longitud* e inmediatamente determinó las distancias aproximadas del punto H al punto A y al punto B, corroborando así su conjetura [Cc, DL].

De acuerdo a lo ocurrido durante todo el proceso de Corroboración de la Conjetura, fue posible reconocer el uso de artefactos como la *Cuadrícula, Distancia o Longitud, Arrastre Errático, Arrastre guiado y Recta*, los cuales permitieron al estudiante apoyarse en la visualización y la exploración.

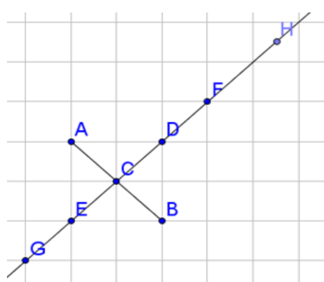


Figura 30. Solución problema 2- Imagen 12

En continuidad con la línea de discusión desarrollada entre el docente y los estudiantes, él preguntó sobre la cantidad de puntos que podían cumplir con las condiciones dadas en el problema. E2 sostuvo que todos los que estuvieran sobre la recta servirían "*todos los que uno quiera pero que estén en la recta…infinitos*". Adicional a esto, el docente les solicitó determinar las características que debía tener dicha recta, a lo que E2 respondió que debía ser una recta que intersecara al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio C [*una recta que intersecta el segmento $\overline{AB}$ …justo en el punto medio*], pero que además permitiera determinar triángulos isósceles, tomando el segmento $\overline{AB}$ como base del mismo y los puntos de la recta como el tercer vértice [*la condición es que el segmento $\overline{AB}$ sea la base y el resto de puntos que vayan en la recta tienen que formar un triángulo isósceles*].

En el momento en que el docente solicitó a los estudiantes enunciar las características que debía tener la recta construida surge la formulación de una afirmación que se presume como una acción de *Formulación de Conjetura,* que aunque no presentó evidencia de haber sido corroborada, surgió del trabajo previo con los artefactos *Distancia o Longitud* y *Cuadrícula* y sirvió de andamio para proponer una definición de la mediatriz, la cual se pedía en el enunciado del probroblema para constituirlo como un elemento del sistema teórico que posteriormente les permitiera realizar justificaciones de nivel teórico [Fc, DL], [Fc, Cu] (Véase figura 31). Esta se dio de acuerdo a la figura determinada por los puntos que ubicaron bajo la condición de equidistancia. E2 propuso la siguiente definición [*Mediatriz, es una recta la cual pasa por el punto medio de un segmento, esta cumple la condición de que los puntos ubicados en la recta equidisten a los*

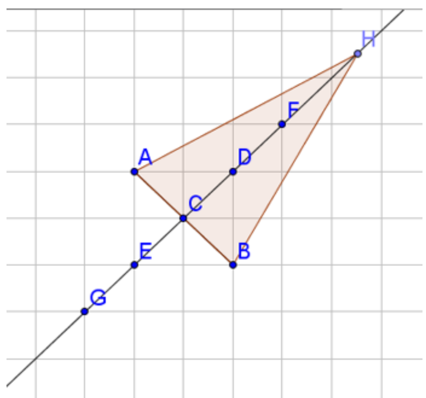


Figura 31. Solución problema 2-Imagen 13

puntos A y B].

Del proceso de solución de este problema, cuyo propósito era definir la mediatriz como lugar geométrico, se pudo reconocer la emergencia de acciones de la actividad demostrativa en el marco de en el marco de la justificación como *Explicación de validación***.** El desarrollo de dicha justificación se reconoció durante tres momentos:

- El primero se caracterizó por ser un momento de desarrollo empírico y de exploración. Los estudiantes, apoyados en acciones como *Exploración Empírica* y *Visualización,* emplearon artefactos como *Punto, Simetría Central, Cuadricula y Arrastre Errático* para construir inicialmente el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y posteriormente los puntos que permitirían la construcción de la mediatriz.
- El segundo momento orientado por las acciones de *Formulación de conjetura* y *Corroboración de la conjetura*, se vio consolidado en la evidencia empírica

de visualización y exploración proporcionada por el artefacto *cuadrícula.* Apoyados en este artefacto formularon como conjetura que los puntos D, E, F y G formaban una recta y que además equidistaban de los puntos A y B. Respaldados por este mismo artefacto corroboraron la conjetura, pues observaron que los puntos D y E se encontraban cada uno a dos unidades de distancia de los puntos A y B. Sumado a esto, al adicionar otro punto H que no estaba sobre la cuadricula se valieron del artefacto *Distancia o Longitud* para corroborar que efectivamente el punto H equidistaba de los puntos A y B. Otros artefactos que también fueron empleados para la corroboración fueron *Arrastre Errático, Arrastre guiado, y Recta*.

- El tercer momento se enfocó en la justificación de la conjetura. Ellos a partir del desarrollo llevado a cabo y apoyados en la construcción del triángulo isósceles mediante el artefacto *Polígono* llegaron a que todos los puntos que estuvieran sobre la recta equidistarían de los puntos A y B, porque todos los puntos ubicados sobre la recta mediatriz deben formar triángulos isósceles.

A propósito de lo anterior, se destacó el uso de algunos artefactos dentro de cada conjunto de acciones del proceso de justificación, es decir, existieron algunos artefactos que se ubicaron dentro de determinada acción o conjunto de estas. Por ejemplo, el artefacto *Cuadrícula* fue uno de los más usados por los estudiantes durante la solución al problema propuesto y se asoció a acciones enfocadas en la *Formulación* y *Corroboración de la Conjeturas*. Otro artefacto implementado con regularidad por los estudiantes fue *Distancia o Longitud*, el uso de este fue posible rastrearlo en acciones tales como *Explicación de Validación* y *Corroboración de Conjetura*, lo que permitió reconocer que su uso se da dentro de acciones que conllevan a una *Explicación de Validación*.

4.3 Problema 3, Construcción mediatriz

La tarea inició con una construcción elaborada por los estudiantes, en esta ellos debían construir una recta a partir de dos puntos, una circunferencia con centro en uno de los puntos y extremo sobre cualquier punto de la recta, luego construir una circunferencia con centro en el otro punto (de los tomados para construir la recta) y un radio igual al de la primera circunferencia (con ayuda de la herramienta *Compás*). Se debían determinar los puntos de intersección de ambas circunferencias y con ayuda de la herramienta traza y la variación de los radios de las circunferencias, descubrir que el arrastre del punto, que era punto extremo del segmento que conformaba el radio de la primera circunferencia mostraba en pantalla el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento, los cuales eran centro de las circunferencias, es decir, su mediatriz.

Los estudiantes E1, E2 y E3 realizaron la construcción con las condiciones dadas en el enunciado del problema. Sin embargo, presentaron una dificultad al construir las circunferencias cuyas intersecciones determinarían los puntos de la mediatriz

(Objeto de exploración de la actividad). Las indicaciones solicitaban la construcción de una circunferencia con centro en el punto M y extremo sobre la recta que determinaban los puntos M y N, pero los estudiantes accidentalmente ubicaron el extremo de la circunferencia en el segmento $\overline{MN}$. A partir de ello se pudo observar que no era intencional ubicar el punto sobre el segmento, en cuanto manifestaron al docente la dificultad de mover el punto más allá de los extremos de este. Esta acción llevó, como consecuencia, a limitar la longitud de los radios de las circunferencias, evitando observar posteriormente la mediatriz como una recta, ya que el rastro generado por los puntos de intersección, se mostraba apenas como un segmento (véase figura 32).

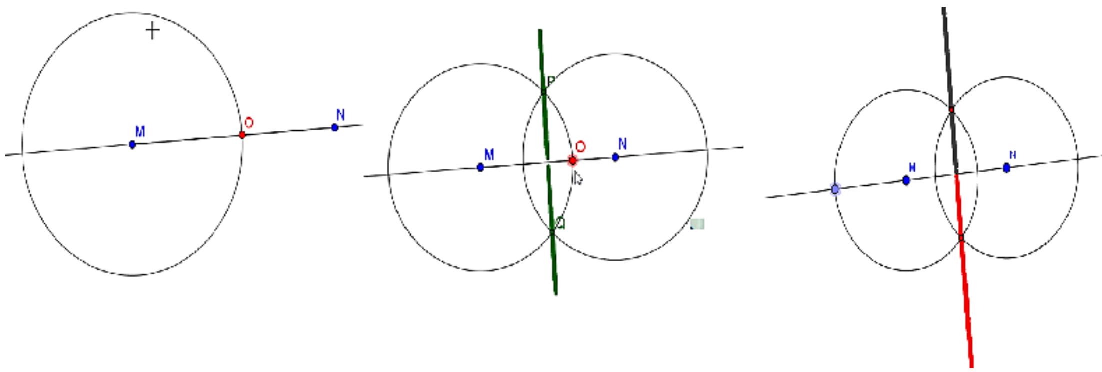


Figura 32. Solución problema 3- Imagen 1

Después de construir la primera circunferencia los estudiantes debían construir con ayuda de la herramienta *Compás* una segunda circunferencia con centro en N y radio igual a la circunferencia anterior. En esta los estudiantes presentaron dificultad al hacer uso de la herramienta, es por esta razón que se hace la recomendación de trabajar y explicar la herramienta compas previo al desarrollo del problema, pues no entendían como determinar el radio de la circunferencia anterior a través de esta herramienta, llevándolos a realizar circunferencias erradas como la mostrada en la imagen (figura 33). Esta dificultad surgió presumiblemente por la ausencia de experiencia en el uso, por parte de los estudiantes, de esta herramienta.

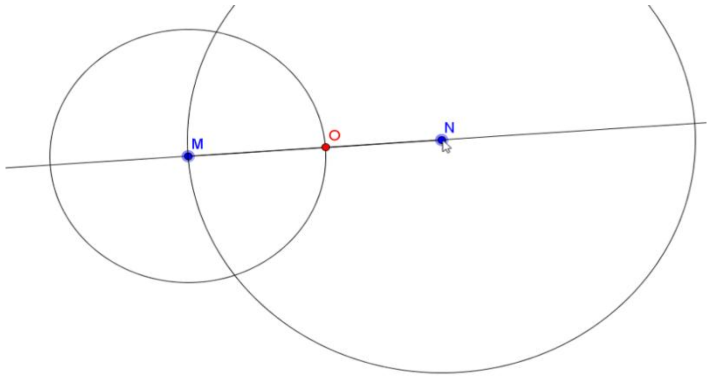


Figura 33. Solución problema 3- Imagen 2

Los estudiantes empezaron a explorar la construcción realizada, arrastrando objetos geométricos sin tener una intención previa, con lo cual identificaron que existían unos puntos que se podían mover pero otros que no (puntos dependientes y puntos independientes). Al mover el punto O (véase figura 34), el artefacto *Arrastre* de *Traza* mostró el recorrido que hacían los puntos de intersección P y Q cuando variaba el radio de las circunferencias.

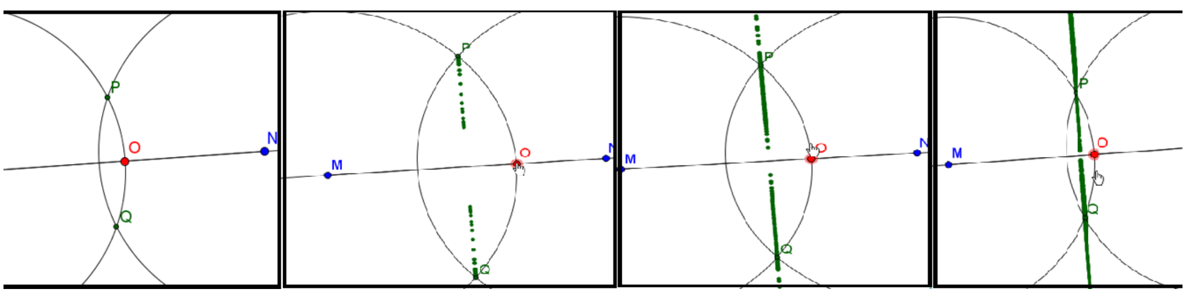


Figura 34. Solución problema 3- Imagen 3

Observamos el uso del *Arrastre Traza* utilizando la herramienta traza en los puntos de intersección (véase figura 35), para nosotros el uso se adjudica a la identificación del lugar geométrico que forman los puntos [Ee, Atr], y de un arrastre guiado, cuando se arrastra el punto O por la recta [Ee,Ag].

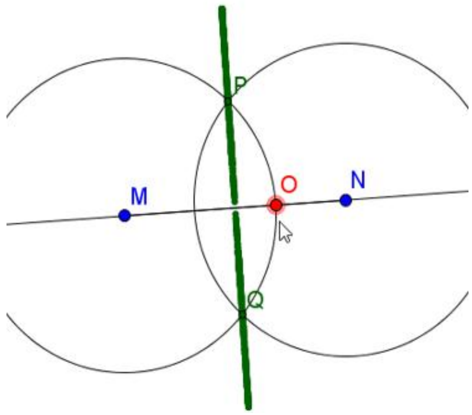


Figura 35. Solución problema 3- Imagen 4

Los estudiantes empezaron a identificar características e invariantes presentes en la construcción [Di,At]: primero identificaron que el punto O solo se desplazaba en el $\overline{MN}$ y no sobre la recta, además que la Traza se determinaba por las distintas posiciones de los puntos P y Q, intersecciones de las dos circunferencias (véase figura 36). Los estudiantes ampliaron y redujeron la construcción (uso del zoom) y verificaron que estas propiedades siempre se presentaban cuando hacían uso del arrastre [*Arrastre Guiado*], teniendo una intención en su manipulación [Vi, Ag], la cual era observar las características de los puntos de intersección, de acuerdo a lo solicitado por la tarea. Sin embargo, en este instante de la tarea E2 y E3 hicieron comentarios sobre la traza [E2: *la traza son los puntos de intersección de las circunferencias que se mueven, cuando se mueve O*] que nos llevan a pensar que ellos veían la traza como la huella que deja el movimiento y no como la unión de diferentes puntos de intersección.

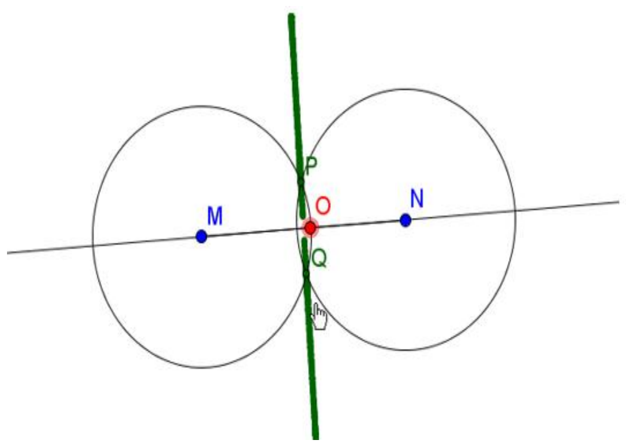


Figura 36. Solución problema 3- Imagen 5

Los estudiantes expresaron al docente sus hallazgos, por lo que él trató de hilar las observaciones de ellos, [D: *Entonces ¿los puntos verdes a que corresponde? […] Pueden ver entonces una relación entre el punto P y los puntos verdes*] apoyados en la construcción actual y lo trabajado en tareas anteriores, con el fin de orientarlos en su exploración. Al expresar sus hallazgos en la construcción E1 manifiesta "*Están a la misma distancia*", refiriéndose a los puntos que estaban en la traza con respecto a los centros de las dos circunferencias. A esta acción la denominamos *Formulación de la Conjetura*, ya que era una primera idea que se tenía y las acciones seguidas buscaban comprobar si esto era verdadero [Fc,Atr], El docente hizo énfasis en este comentario, formulando preguntas a los otros compañeros [*¿Es cierto eso?, ¿Cómo puedo comprobarlo?*]. Los estudiantes observaron las circunferencias (véase figura 37) y de repente E3 expresa "*En este momento la medida del segmento $\overline{MN}$ es radio de las dos circunferencias, por tanto los puntos P y Q se encuentran a la misma distancia de M y N*", hay que aclarar que para este caso en particular, la medida del segmento MN, es el valor del radio de las dos circunferencias, esto permite reconocer que el estudiante se apoya en una de las propiedades de la circunferencia (problema 1, trabajado anteriormente), donde todos los puntos de la circunferencia equidistaban del punto centro.

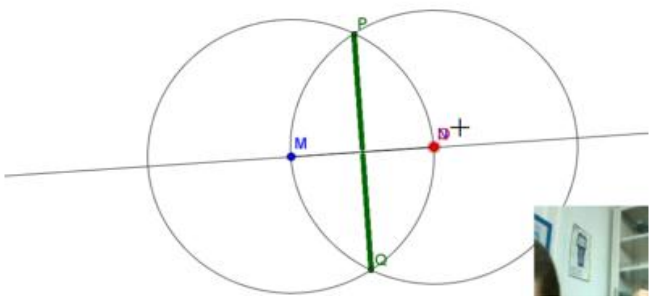


Figura 37. Solución problema 3- Imagen 6

Este intento de justificación lo clasificamos como *Visualización,* debido a que es a partir de la observación de la imagen (figura 37) que encuentra elementos de justificación, siendo esta acción la que involucra el artefacto *Representación Gráfica,* que es la imagen de la construcción [Vi,Rg]. Los estudiantes acomodaron la construcción de manera estratégica para tratar de comprobar su idea, ubicando la construcción centrada en la pantalla e inicialmente ampliando las circunferencias con radio igual a la medida del $\overline{MN}$, tal y como lo muestra la figura 38, esto con el fin de convencerse que efectivamente cuando los radios de las circunferencias tienen igual longitud que el $\overline{MN}$ los puntos P y Q están a la misma distancia de los puntos M y de N.

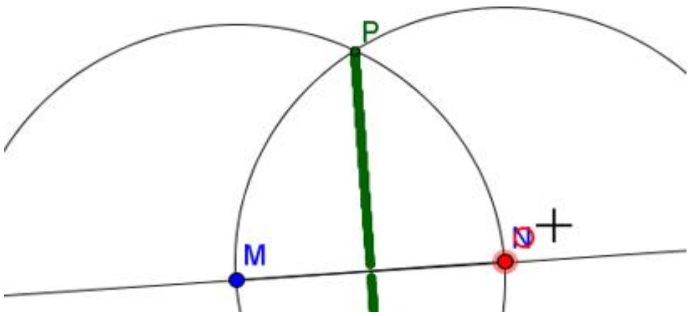


Figura 38. Solución problema 3- Imagen 7

Los estudiantes continuaron explorando la construcción en búsqueda de nuevas relaciones. Dado que las herramientas de GG se caracterizan por permitir mover, girar y desplazar diferentes objetos geométricos, los estudiantes identificaron que existían elementos geométricos que se podían mover (objetos independientes) y otros que no (objetos dependientes):

- [E1: *Este azul tampoco se mueve […] ah, pero los rojos si mueven los azules]*.

En la exploración los estudiantes tuvieron la inquietud de si el "Rastro" (Herramienta Traza) pasaba por el punto medio del segmento MN, pues era lo que aparentemente mostraba la representación gráfica. En este momento identificamos dos acciones: la primera que vuelve a ser una *Exploración Dinámica* [Ed,Ae] y después de suponer que pasaba por el punto medio, una exploración en la que hicieron uso del *Arrastre Guiado* en donde trataron de observar si efectivamente los puntos verdes pasaban por el punto medio del $\overline{MN}$, identificando así una relación [Fc,At].

En un primer intento de comprobar si eso era verdad, los estudiantes usaron el artefacto *Distancia o Longitud*, tratando de medir la distancia entre el punto de intersección del rastro con el segmento $\overline{MN}$ y los extremos de este segmento, pero se dieron cuenta que el punto verde no servía de referencia en el uso de la herramienta distancia y longitud y desistieron de esa idea, entonces construyeron los segmentos de M y N a P y los midieron (véase figura 39). A partir de ello se observa una dificultad en tanto que reconocieron el aporte que ofrecía el artefacto, pero no sabían cómo usarlo, haciendo mediciones erróneas que los confundieron e hicieron cambiar de idea. Para sortear esta dificultad la docente los orientó en el uso correcto del artefacto, de esta manera determinaron la distancia entre los puntos M y P; y los puntos O y P, e identificaron que eran iguales sin importar la ubicación del punto O. Observaron que el punto P equidistaba de los puntos extremos del segmento $\overline{MN}$ y que la traza contenía a los puntos que equidistaban [Cc,DL] y [Fj,DL].

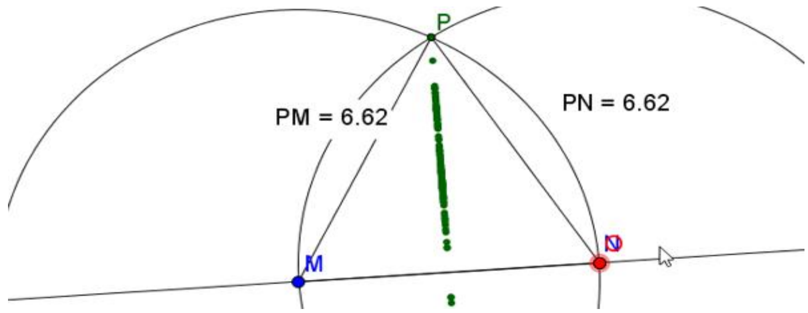
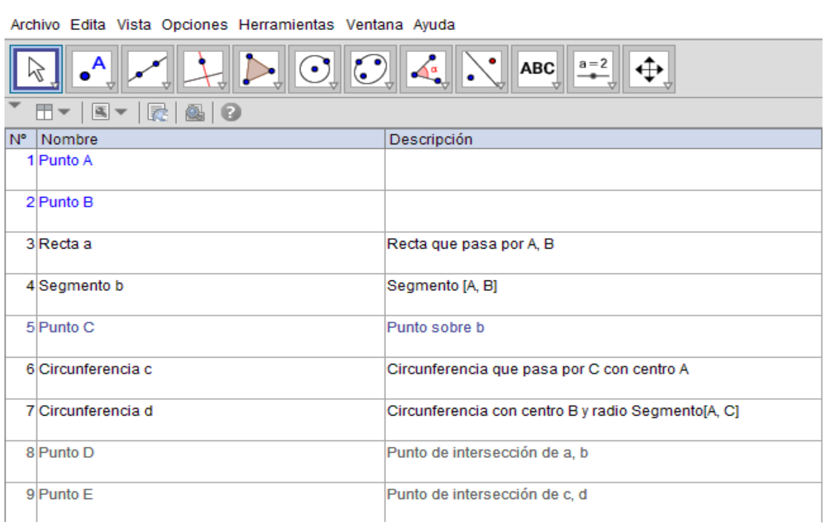


Figura 39. Solución problema 3- Imagen 8

En este problema, podemos observar como nuevamente la herramienta de arrastre permite a los estudiantes desarrollar acciones de exploración y visualización, aunque se inicia con un arrastre errático, al empezar a identificar relaciones e invariantes, podemos observar cómo se transforma el arrastre en uno guiado, lo que da la idea de la transformación de los arrastres a medida que se cambian acciones de la exploración a la visualización, acciones que permiten reconocer una primera idea (conjetura), en el proceso de verificación, involucrado en el proceso de justificación se hace uso de una nueva herramienta (distancia o longitud) que les permite a los estudiantes probar su idea, la selección de este tipo de herramientas nos hace pensar en la selección de elementos empíricos, pues no hace uso de la construcción teórica (equidistancia) que se ha construido en el aula. Se puede observar como la herramienta de arrastre guiado y de test, empiezan a ser apropiadas por los estudiantes siendo su uso más natural.

4.4 Problema 4, construcción triángulo isósceles.

El cuarto problema que abordó el grupo de estudiantes consistió en la construcción de un triángulo isósceles mediante dos métodos diferentes, usando herramientas tanto teóricas como instrumentales construidas a lo largo de esta secuencia de problemas. El primer método de construcción (como se muestra en el protocolo de construcción figura 40) empleado por ellos se basó en el proceso de



Nº	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Recta a	Recta que pasa por A, B
4	Segmento b	Segmento [A, B]
5	Punto C	Punto sobre b
6	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por C con centro A
7	Circunferencia d	Circunferencia con centro B y radio Segmento[A, C]
8	Punto D	Punto de intersección de a, b
9	Punto E	Punto de intersección de c, d

Figura 40. Solución problema 4- Imagen 1

construcción que habían desarrollado en la solución del problema 3.

Sin ninguna insinuación por parte de la tarea o del docente, ellos reprodujeron la misma construcción, obteniendo lo mostrado en la figura 41.

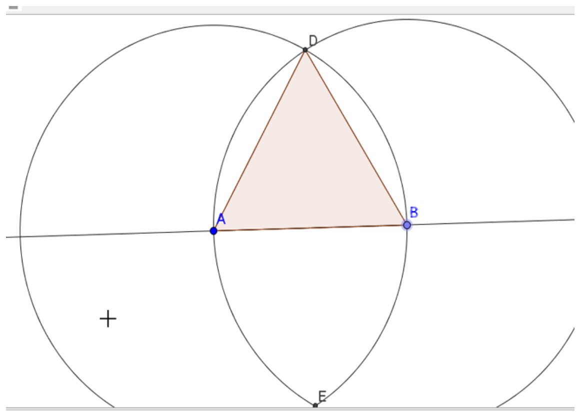


Figura 41. Solución problema 4- Imagen 2

Si bien la anterior construcción obedeció a la reproducción de una ya realizada, es posible identificar que el grupo empleó artefactos como, *Recta, Segmento, Circunferencia, Compás y Polígono,* asociados a la acción de *Exploración Empírica*, puesto que correspondieron a los objetos geométricos utilizados para realizar la construcción del triángulo isósceles ABD [Ee, Re], [Ee, Se], [Ee, Cir], [Ee, Co] y [Ee, P].

La discusión inicia con la intervención del docente pidiendo a los estudiantes caracterizar el triángulo isósceles construido por ellos *[P: ABD es isósceles, me dicen ustedes. ¿Cuándo un triángulo es isósceles?].* Para ello E3 y E2 se refirieron al atributo de esta figura, afirmando que un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados tienen igual longitud *[Cuando tiene dos lados iguales].* En el curso de esta discusión la docente señaló sobre la pantalla la construcción realizada por ellos (véase figura 41) y les pidió indicar cuáles eran los dos lados de igual longitud *[¿cuándo dos lados son iguales para ustedes acá?].* E3 señaló $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$, con lo que el docente le preguntó sobre cómo verificar que tenían la misma longitud *[¿Cómo pueden garantizar que esos dos lados son iguales?].* Ante este cuestionamiento E3 respondió que se podrían determinar las longitudes de los segmentos *[Midiendo],* (afirmación que deja entrever que los estudiantes han comprendido verificar como sinonimo de garantizar) por lo que decidieron usar el artefacto *Distancia o Longitud* y determinar las longitudes de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. Al hacerlo, E2 reconoció que efectivamente estos dos lados tenían igual longitud (véase figura 42).

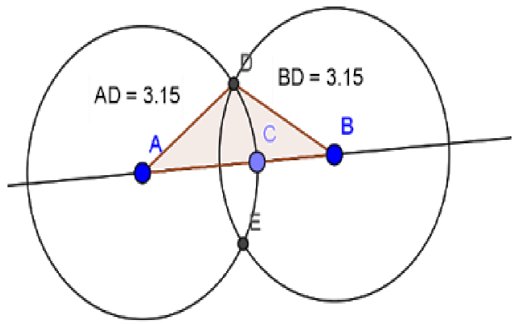


Figura 42. Solución problema 4- Imagen 3

Debido a que el artefacto *Distancia o Longitud* se usó con la intención de contar con evidencia empírica que les permitiera apoyar la afirmación que $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tenían igual longitud, se puede inferir que el uso del artefacto se sujetó al proceso de *Corroboración de la Conjetura* [Cc, DL]. Adicional a esto, E3 arrastró el punto A para verificar la conservación de la propiedad "$\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son de igual longitud". De acuerdo a esta acción se reconoce el uso del arrastre bajo la modalidad de *Arrastre de Test* con el mismo propósito que usó el anterior artefacto, es decir, comprobar la conservación de la propiedad hallada, lo que permitió ubicarlo dentro de la acción de *Corroboración de la Conjetura* [Cc, Ate].

El intercambio comunicativo entre los estudiantes y la docente continuó con un cuestionamiento por parte de ella [*¿Qué me garantiza o por qué sucede que esas medidas son iguales, sin importar cómo mueva el punto [A]? o ¿Cómo pueden garantizarme que siempre van a ser iguales esas medidas?*]. Con esta pregunta se pretendía movilizar en los estudiantes el uso de elementos teóricos. Este propósito fue alcanzado por E1, pues él, en respuesta al cuestionamiento del docente, estableció una relación entre la congruencia de las circunferencias construidas, la construcción del triángulo isósceles y la propiedad "$\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son de igual longitud", que se constituyó mediante el uso del artefacto *Distancia o Longitud*. E1 estableció que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ conservaban la misma longitud porque estos estaban determinados por radios de circunferencias congruentes (circunferencia con centro en A y radio AD y la circunferencia con centro B y radio $\overline{BD}$) lo que les permitió sostener que el triángulo construido era isósceles [*Pues acuérdense, como en la tarea anterior… la circunferencia con centro A… y… la circunferencia con centro B… Tienen el mismo radio… Por tal caso, tienen una misma distancia entre sus intersecciones (refiriéndose a los dos lados del triángulo de igual longitud formados por las intersecciones de las circunferencias). Y eso nos garantiza que siempre van a dar las mismas medidas.*].

Del producto de esta discusión reconocemos la emergencia de la acción *Formulación de Justificación* puesto que los estudiantes apoyados en acciones como la *Selección de Elementos Teóricos* (congruencia de las circunferencias) y la *Selección de Elementos Empíricos* (artefacto *Distancia o Longitud*) evocados por la solución del problema anterior llegan a concluir que los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son de igual longitud [Set, Ci], [See, DL].

Por otro lado, el segundo método que empleó el grupo para construir el triángulo isósceles partió de trazar la mediatriz. Para ello E3 trazó dos puntos A, B y usó el artefacto *Mediatriz* seleccionando los dos puntos A, B. Aunque E2 omite el trazo de $\overline{AB}$ se observó que E3 realizó una *Exploración Teórica*, dado que puso en funcionamiento un elemento del sistema teórico construido durante la solución del problema 2 para solucionar este [Et, M].

Posteriormente, E3 ubicó un punto C sobre la mediatriz, (véase figura 43) seleccionó el artefacto *Polígono* y construyó el triángulo ABC. El uso de este artefacto se reconoció dentro de un proceso de *Exploración Empírica* pues hizo parte del proceso llevado a cabo por los estudiantes para la construcción del triángulo isósceles [Ee, Po]. Adicionalmente E3 arrastró el punto C sobre la mediatriz corroborando que éste se mantenía sobre ella. Esto permitió reconocer y relacionar el uso del artefacto *Arrastre Test* dado que al arrastrar el punto C estaba validando su construcción, con la acción de *Corroboración de Conjetura* (aclaramos que la conjetura no fue presentada por los estudiantes de manera explícita pues ellos parten de considera que "triángulo construido es isósceles"). [Cc, Ate]. En esta misma línea E3 acudió al artefacto *Distancia o Longitud* y corroboró que los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ eran de igual longitud [Cc, DL].

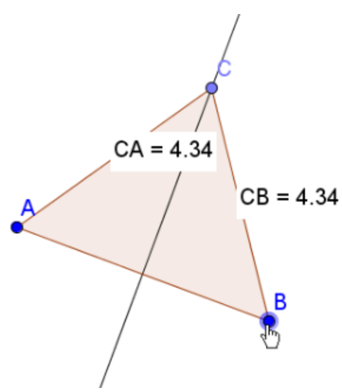


Figura 43. Solución problema 4-Imagen 4

Solo después de realizada la construcción del triángulo isósceles se dio la interacción e intercambio comunicativo entre estudiantes y docente. A continuación este se describe.

La docente inició la interacción pidiendo que arrastraran cada uno de los puntos del triángulo *[Movamos B… Gíralo… ahora movamos A…]* para establecer si la construcción soportaba el arrastre, en otras palabras, para observar si el triángulo conservaba las propiedades. Esto dejó en evidencia el uso del artefacto *Arrastre* *de Test* durante la acción de *Corroborar la Conjetura* [Cc, Ate]. Luego la docente les pidió justificar que el triángulo construido era isósceles *[¿por qué ese triángulo es isósceles?]*. Para ello E1 se remitió a la definición de mediatriz, sostuvo que los puntos que pertenecían a la mediatriz equidistaban de los vértices A y B del triángulo (por lo que el punto C que pertenecía a la mediatriz equidistaba de los puntos A y B). Hecho que le permitió inferir que los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ eran de igual longitud y por consiguiente que el triángulo ABC era isósceles *[E1: al utilizar la herramienta mediatriz los puntos que se encuentran en ella equidistan con A y B… y se puede formar un triángulo isósceles porque la medida de sus lados son iguales].*

Dado que los estudiantes sustentaron su afirmación en las propiedades de la mediatriz, las cuales fueron construidas en el desarrollo de los problemas 2 y 3, fue posible asociar este hecho a la acción *Selección de Elementos Teóricos,* que posteriormente fue de utilidad para garantizar que el triángulo construido era isósceles, lo que también permitió reconocer que se presentó una *Formulación de Justificación.*

Por último, la docente pidió al grupo dar solución al punto 4 del problema, el cual requería establecer una propiedad respecto a la medida de los ángulos del triángulo isósceles. Frente a ello les solicitó usar el artefacto *Ángulo* para determinar la medida de los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle CAB$, el grupo procedió y determinó dichas medidas. De acuerdo a lo anterior se pudo observar que el artefacto *Ángulo* fue utilizado a solicitud de la docente con el fin de *Detectar Invariantes* que les permitiera establecer la propiedad requerida [Di, An]. Después de haber tomado las medidas de los ángulos, E3 *por sugerencia de la docente* arrastró uno a uno los vértices del triángulo en busca de relaciones entre la medida de los ángulos. E2 encontró que los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$ conservaban la misma media al arrastrar el punto C y que la medida del ángulo $\measuredangle BCA$ era diferente. Teniendo en cuenta que los estudiantes se proveyeron del artefacto arrastre para detectar un invariante, clasificamos este artefacto como *Arrastre de Test* dentro de la acción *Detectar invariantes* [Di, At].

Lo anterior llevó a E1 y E2 a concluir que el triángulo ABC era isósceles pues dos de sus ángulos tenían igual medida. [E2: *El ángulo de A y B son iguales… qué pasa, que C no va a tener el mismo ángulo que A y B, va a cambiar*] [E1: *eso nos verifica que es un isósceles*]. La solución a este problema concluyó con una pregunta de la docente con respecto a los triángulos isósceles [*¿Cuándo son isósceles según sus ángulos?*] y la respuesta del estudiante E3 [*Cuando dos de sus ángulos son iguales*].

Del primer método que emplearon los estudiantes para construir el triángulo isósceles fue posible reconocer el desarrollo de procesos de justificación tanto de carácter empírico como teórico. Además se observó que a través de acciones como la *Exploración Empírica*, los estudiantes reprodujeron una construcción que fue desarrollada con el objetivo de verificar relaciones y propiedades de la mediatriz (problema 3), para construir un triángulo isósceles y proponer una justificación que garantizara que efectivamente lo era. La construcción permitió reconocer en los estudiantes un dominio teórico de los hechos geométricos trabajados en el desarrollo de problemas anteriores. Pues las construcciones de figuras geométricas el software GeoGebra se articuló con los postulados de la geometría euclidiana, además porque la construcción soportó el arrastre.

La primera justificación, de carácter empírico, surgió de la combinación entre la acción de *Corroborar Conjetura* y el uso de los artefactos *Distancia o Longitud* y *Arrastre de Test.* A partir de ella los estudiantes lograron proponer una justificación en la que las garantías provinieron de fuentes no teóricas y se apoyaron en evidencias empíricas proporcionadas por la visualización y la exploración, es decir una *Explicación de Validación.*

La segunda justificación, de carácter teórico se presentó cuando E1 estableció que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ conservaban la misma longitud porque estos estaban determinados por radios de circunferencias congruentes, lo que le permitió sostener que el triángulo construido era isósceles. Este tipo de justificación se denominó como *Prueba* dado que el estudiante aludió a un hecho geométrico (garante) que provino del sistema teórico local construido previamente.

Ahora bien, el segundo método que empleó el grupo para construir el triángulo isósceles también dejó en evidencia la relación de artefactos con acciones de la actividad demostrativa dentro de un proceso de justificación. Iniciando con una *Exploración Teórica* dado que los estudiantes acudieron al Artefacto *Mediatriz* para construir el triángulo isósceles y no elementos empíricos, recordemos que la mediatriz fue un elemento del sistema teórico que se construyó en el proceso de solución de los problemas dos y tres. El otro artefacto que se empleó para construir el triángulo fue *Polígono*, este se consideró como parte de la acción de *Exploración Empírica* puesto que hizo parte del proceso de construcción. Después de realizar la construcción los estudiantes emplearon el artefacto *Arrastre Guiado* para arrastrar el vértice C del triángulo y corroborar que éste se mantenía sobre la mediatriz, dicho artefacto fue asociado a la acción *Corroboración de Conjetura*. Es pertinente aclarar que aunque no fue explícita la conjetura, los estudiantes dieron por hecho que el triángulo era isósceles.

El proceso de justificación desarrollado por los estudiantes de esta segunda parte del problema cuatro, se constituyó tipo Prueba, dado que el grupo apoyado en la acción de *Corroboración de Conjetura* en combinación con el artefacto *Arrastre de Test* acudió a un garante de carácter teórico y que además fue construido como parte del sistema teórico de esta secuencia de problemas.

4.5 Problema 5. Ángulo constante

El quinto problema tenía como finalidad, identificar algunas propiedades de la circunferencia; en particular, identificar que si un triángulo es rectángulo, el vértice del ángulo recto pertenece a una circunferencia para la cual la hipotenusa del mismo es diámetro. El archivo Geogebra ofrecía a los estudiantes un triángulo rectángulo FQE, para el cual m$\measuredangle FQE = 90°$ como el representado en la figura 44. El problema solicitaba a los estudiantes mover el punto Q, procurando conservar su medida y observar el lugar geométrico que describía este.

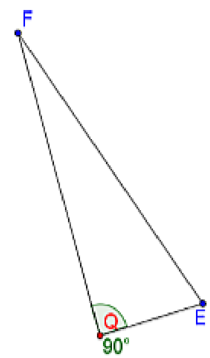


Figura 44. Solución problema 5- Imagen 1

Los estudiantes (E1, E2 y E3) realizaron un primer intento moviendo el mouse "a pulso" tratando de conservar la medida del ángulo recto, acción que determinamos como Arrastre Guiado [Ee,Ag]. Los estudiantes manipularon el vértice Q sin tener una idea previa de cómo debía ser el movimiento, con ello se dieron cuenta rápidamente de la dificultad que representaba conservar la medida del ángulo. Para solucionar esta dificultad, los estudiantes procedieron a buscar una herramienta, dada por el software, que les permitiera conservar el valor de 90° Esto último nos lleva a pensar que los estudiantes reconocen en las herramientas de GG la posibilidad de atender distintas necesidades, reconociendo la posibilidad de solucionar problemas haciendo uso de las herramientas que ofrece el software. Una vez navegaron por algunas herramientas del programa, decidieron hacer uso de la herramienta Ángulo para conocer las medidas de los ángulos $\measuredangle QEF$ y $\measuredangle QFE$ [Ee, An]. Después de determinar las medidas de los ángulos del triángulo, arrastraron el punto Q, encontrando otra posición para este punto en donde la medida del $\measuredangle FQE$ era igual a 90°. Este arrastre tenía una la intención de conservar el valor del ángulo, por lo cual se identificó como Arrastre Guiado [Ee, Ag]. Al observar este comportamiento en el desarrollo de la tarea, el docente aclara el objetivo de la tarea, recordando que la idea no era encontrar solo dos o tres posiciones para el punto Q, en donde la medida del $\measuredangle FQE$ fuera 90°, sino que debían encontrar varios puntos que les permitiera observar el comportamiento del movimiento que hacia el vértice u observar que figura se forma cuando se mueve el punto Q (lugar geométrico) mientras este se arrastraba y se conservaba la medida de 90°.

Los estudiantes nuevamente exploraron, moviendo al punto Q haciendo uso de su pulso, tratando de encontrar el lugar geométrico descrito por este punto [Ee,Ae]. En su exploración los estudiantes observaron que a medida que Q se alejaba del segmento $\overline{FE}$, la medida del $\measuredangle FQE$ disminuía [E2: *Miren que si lo alejo [punto Q], el valor es más pequeño*] y a medida que este punto se aproximaba al segmento$\overline{FE}$, la medida del $\measuredangle FQE$ aumentaba, [E3: *entonces, ¿Si me acerco? […] ah sí, el ángulo [la medida] aumenta*] (véase figura 45). Los estudiantes realizaron el arrastre en diferentes sentidos, encontrando un lugar en donde la medida era aproximadamente 90°.

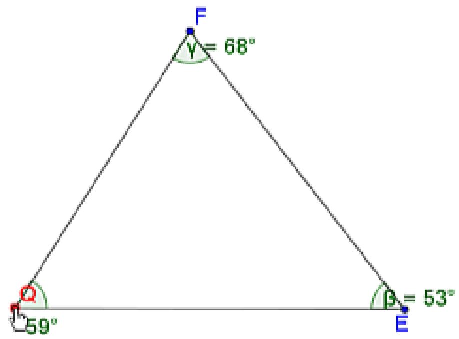


Figura 45. Solución problema 5- Imagen 2

Luego, los estudiantes encontraron una forma de arrastrar el punto Q, conservando la medida del $\measuredangle FQE$, haciendo un movimiento diagonal, de acuerdo a las indicaciones del enunciado del problema (véase figura 46), a medida que E3 manipulaba el software, E1 da indicaciones para conservar la medida de 90° [E1: *Hacia arriba, suba el vértice*]; sin embargo, para ellos era difícil observar el lugar geométrico (Aun no han hecho uso de la herramienta traza) en el cual se mueve el punto, por lo cual, decidieron involucrar la herramienta Traza [Ee,Atr] remitiéndose a problemas trabajados anteriormente [E2: *¿Cómo se llama la herramienta? […] esta usemos traza]*.

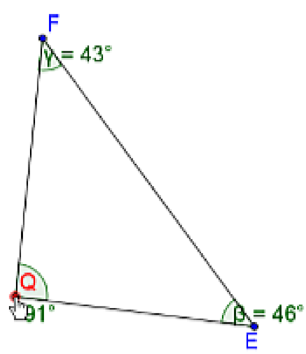


Figura 46. Solución problema 5- Imagen 3

El primer intento de Arrastre en el que se hizo uso de la traza no fue afortunado para los estudiantes, pues al Arrastrar al punto Q y observar el rastro que este iba dejando en pantalla, perdieron el control que habían tenido para conservar la medida del ángulo (véase figura 47). En consecuencia, el rastro generado por el punto no les permitió identificar el lugar geométrico oculto.

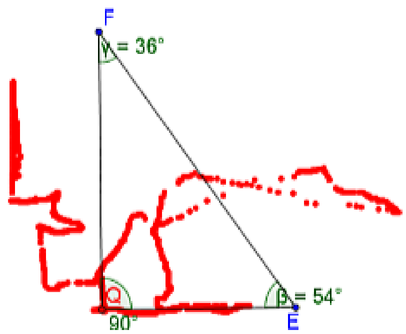


Figura 47. Solución problema 5- Imagen 4

Al observar este resultado en pantalla, uno de los estudiantes propuso construir una recta que pasara por los puntos F y Q [E3: *“y si hacemos una recta que pase por acá [señalando el segmento $\overline{FQ}$] […] pues miremos si por ahí el ángulo conserva la medida”]*. Para ello, los estudiantes hicieron uso de la herramienta cuadrícula como se evidencia en la figura 48 [Ee,Cu].

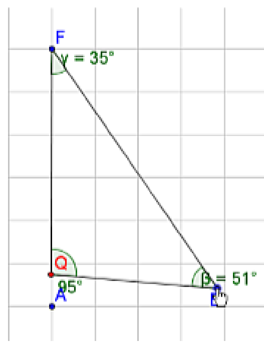


Figura 48. Solución problema 5- Imagen 5

Luego ubicaron el segmento $\overline{FQ}$ sobre una de las líneas verticales de la cuadrícula (véase figura 49).

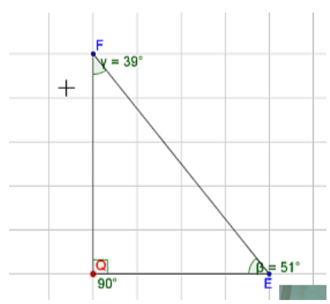


Figura 49. Solución problema 5- Imagen 6

Los estudiantes tomaron dos puntos sobre la línea de la cuadricula en la que ubicaron el $\overline{FQ}$, con la intención de que la recta determinada por ellos contuviera al segmento $\overline{FQ}$ (véase figura 50) [Ee,Re]. Acá se observa nuevamente como los estudiantes recurren a la cuadrícula para poder hacer construcciones particulares y aunque esta es una herramienta ofrecida por GG, consideramos que limita el potencial de la tarea, convirtiéndola en estática, para favorecer el uso de otras herramientas que ofrece geogebra, este uso puede deberse a la familiaridad que los estudiantes tienen con la cuadricula del cuaderno.

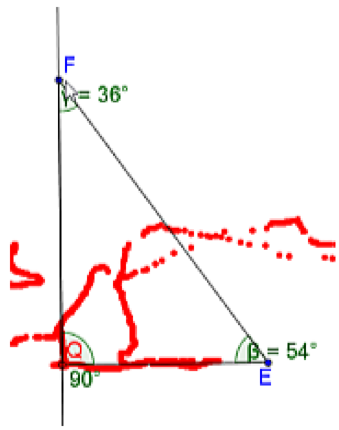


Figura 50. Solución problema 5- Imagen 7

La sospecha de los estudiantes al construir la recta $\overline{FQ}$ era que si se movía el punto Q sobre esta recta, entonces la medida del ángulo $\measuredangle FQE$ se conservaría. Lo anterior significa que para ellos la recta representaba el lugar geométrico del punto Q, para el cual se satisfacía la condición dada en el enunciado del problema (figura 51). Los estudiantes movieron el punto Q sobre la recta y rápidamente observaron cómo empezaba a variar la medida del $m\measuredangle FQE$ [E2: *No, no queda].* lo cual los llevó a descartar esta posibilidad [Ee, Ae].

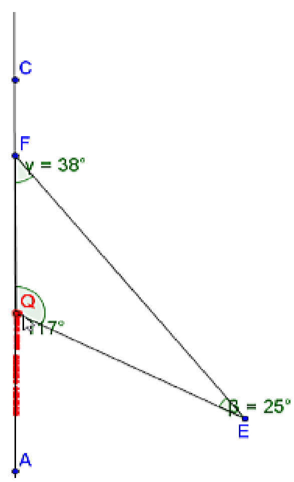


Figura 51. Solución problema 5- Imagen 8

Los estudiantes reconocieron que debía existir un "*área"* (lugar o zona) que cumpliera con la condición para el punto Q y que la cuadrícula debía poderse involucrar. Los estudiantes arastraron a Q manteniendo la medida de 90 y al haber logrado esto por un tiempo E1 comunicó a sus compañeros "*¿si ven el* *movimiento?, es como diagonal*", a lo que E2 agregó *"miren que estamos haciendo como un circulo"* [Ee,Atr]. Los estudiantes visualizaron el lugar geométrico, identificando una figura parecida a una circunferencia (véase figura 52). Después de mostrar sus hallazgos, formularon su conjetura, la cual reportaba que el lugar por donde se movía el vértice Q, conservando la medida del ángulo, tiene forma de circunferencia [Fc,Atr].

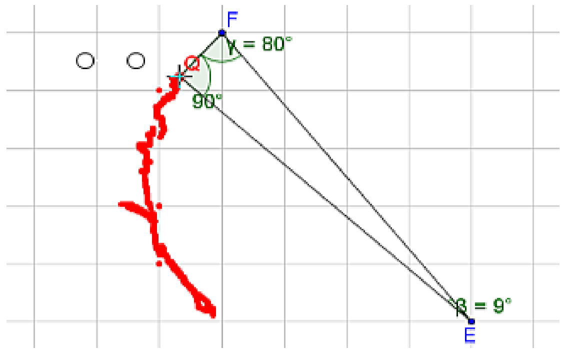


Figura 52. Solución problema 5- Imagen 9

Para comprobar la veracidad de su conjetura, los estudiantes propusieron trazar una circunferencia que se ajustara a la traza que en la pantalla se aprecia y luego de ello mover el punto Q a lo largo de esta circunferencia, verificando así el cumplimiento de la propiedad estudiada. Sin embargo, los estudiantes presentaron dificultad al construir dicha circunferencia, pues no reconocieron que la herramienta Circunferencia Centro - Punto les solicita inicialmente el centro de la circunferencia (el cual sería el punto medio del segmento $\overline{FE}$) y un punto de la circunferencia (F o E), esto se le puede adjudicar a una dificultad de instrumentalización de la herramienta. Ellos, haciendo uso de esta herramienta, trazaron diferentes circunferencias y semicircunferencias (véase figuras 53 a la 56)y fácilmente observaron que estas no les servían, pues ninguna de ellas se asemejaba a la traza obtenida inicialmente, por lo cual decidieron hacer uso de la herramienta semicircunferencia, pero el problema de construir el objeto geométrico adecuado persistió [Ee, Ci], [Ee, Smc]. Las imágenes de abajo representan algunas de las circunferencias que los estudiantes construyeron.

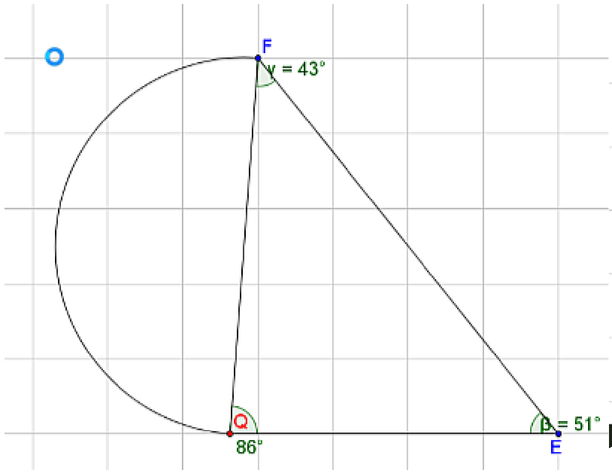


Figura 53. Solución problema 5- Imagen 10

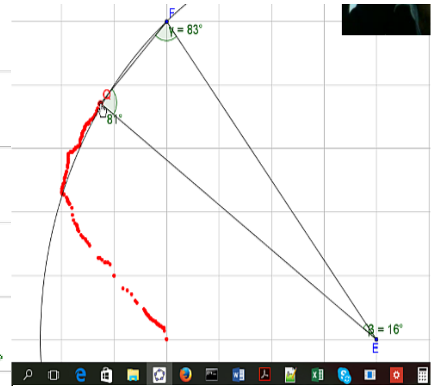


Figura 54. Solución problema 5- Imagen 11

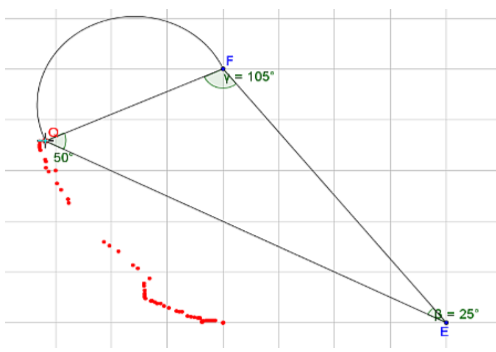


Figura 55. Solución problema 5- Imagen 12

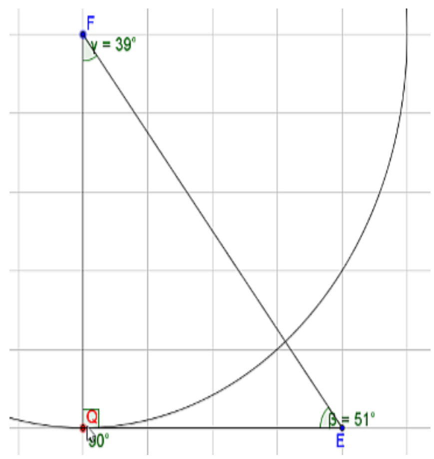


Figura 56. Solución problema 5- Imagen 13

La docente, en su intento de ayudarles a determinar la circunferencia correcta, les recordó a los estudiantes que para poder construir una circunferencia, con ayuda de la herramienta Circunferencia, Punto, Centro, debían determinar primero el centro de esta. Como respuesta, E3 mencionó que "*el centro debe ser la mitad de FQ*" refiriéndose con ello al segmento $\overline{FQ}$. Por su parte E1 aseguró que *"¿$\overline{FQ}$? […] Debe estar entre lado $\overline{FE}$*". E1 ubicó el centro a tanteo, sobre el $\overline{EF}$ tratando de determinar el punto medio de este, pero cuando construían la circunferencia, esta no pasaba por los dos puntos F y E simultáneamente. Cuando la docente preguntó a los estudiantes por su dificultad, ellos mencionaron que no tenían el centro en el punto medio del $\overline{EF}$, ante lo cual la docente preguntó si conocían alguna herramienta que les permitiera atender a su necesidad (ubicar el punto medio de EF). E1 comentó que existía la herramienta Punto Medio, por lo que la docente le aconsejó que hiciera uso de ella y de esta manera lograr la construcción de la circunferencia que les permitirá verificar su idea.

Los estudiantes construyeron la circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{EF}$ y como radio tomaron el segmento determinado por este punto medio y el punto E (véase figura 57) [Cc,Ci]. De esta forma comprobaron, ubicando y arrastrando el punto Q sobre toda la circunferencia, que la medida del ángulo siempre era $90°$ [Fc,Ate], [Fc,Ci]. De esta manera observaron que al conservar el ángulo recto de un triángulo rectángulo, el vértice de dicho ángulo debía pertenecer a una circunferencia [Set,Ci], [Fj, Ci].

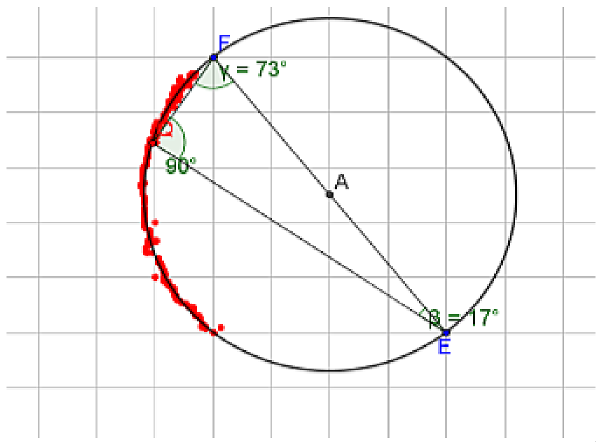


Figura 57. Solución problema 5- Imagen 14

Al ser un problema que tenía como objetivo conceptual reconocer algunas propiedades de la circunferencia, pero como objetivo procedimental, observar estrategias de solución de los estudiantes; se pudo identificar que: el uso del arrastre traza (rastro), se vuelve un apoyo fundamental en los estudiantes, pues les permite identificar relaciones e invariantes de la construcción. Este arrastre es utilizado en diferentes momentos del desarrollo, inicialmente sirve en la exploración y es de gran apoyo para la visualización, luego permite reconocer la característica del movimiento del vértice lo que lleva a la formulación de la conjetura. En el proceso de justificación, aunque se ve inicialmente dificultades conceptuales (no tener clara la definición de circunferencia) y procedimentales (no conocer el uso de algunas herramientas), finalmente los estudiantes hacen uso de elementos teóricos (definición de la circunferencia) para poder comprobar su conjetura. El uso de la herramienta arrastre traza en los dos procesos de la actividad demostrativa, permite reconocer la apropiación de este artefacto por parte de los estudiantes, convirtiéndose en un artefacto fundamental para el desarrollo y solución del problema.

4.6 Problema 6. Triángulo y sus mediatrices

El problema solucionado por el grupo de estudiantes durante esta sesión contemplaba dos partes. En la primera se les pidió ubicar tres puntos no colineales A, B y C. Posteriormente se debían trazar las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y nombrar como P el punto de intersección de estas rectas. En la segunda parte a los estudiantes se les solicitó enunciar la condición que cumplía el punto P cuando el punto B se movía, adicional a esto formular una propiedad que diera cuenta de lo observado y por ultimo justificar dicha propiedad con base en las definiciones y propiedades construidas a lo largo de esta secuencia de problemas.

Los estudiantes iniciaron la construcción de los tres puntos A, B y C y de las mediatrices con el artefacto *Mediatriz,* pasando por alto trazar los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ (véase figura 58) debido a que la herramienta permitía construir el objeto geométrico en mención con sólo seleccionar dos puntos, es por ello que lo asociamos a la acción *Exploración Empírica* [Ee, Me]. Este procedimiento, aunque permitió trazar el punto P de intersección, fue una aproximación inicial que afrontó el grupo para enunciar la condición que cumplía el punto P al arrastrar el punto B, pues una primera condición enunciada por uno de los estudiantes, refirió a una relación de dependencia *[E1: Pues el punto B es el que dirige las dos mediatrices puesto que él pertenece a las dos mediatrices]*

A propósito del artefacto arrastre, implementado en esta aproximación inicial a la solución del problema, fue posible reconocer que su uso correspondía a la modalidad *Arrastre Guiado,* debido a que lo usaron con una intención previa manifestada en el enunciado del problema, detectar relaciones y propiedades. Pero además la acción que acompañó a este artefacto fue la *Exploración Dinámica* ya que se llevó a cabo en un entorno dinámico y la detección de las relaciones y propiedades dependió del movimiento realizado sobre el punto B [Ed, Ag].

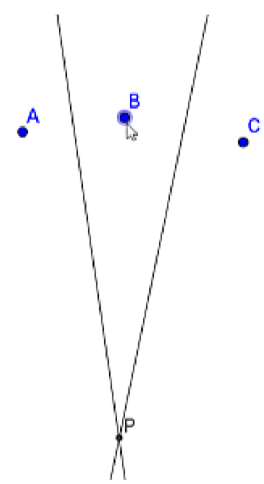


Figura 58. Solución problema 6- Imagen 1

Cuando el docente se percató del procedimiento llevado a cabo por los estudiantes al efectuar la construcción, los invitó a revisar el enunciado del problema y a leerlo correctamente en el punto tres [P: *una pregunta ¿el problema les pide la mediatriz de qué?*]. E3 lee nuevamente esta parte del enunciado [*construya las mediatrices de AB y BC*], pero la profesora les comenta ahora "*no, lean bien por favor*", acción realizada por E3, quien vuelve a leer el enunciado de la misma forma, por lo que la docente toma el documento donde está registrado el problema y pregunta a los dos compañeros de E3 sobre lo que este dice. E2 lee "*construya las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$*". Los estudiantes al revisar el enunciado de inmediato se dieron cuenta de que les faltaba algo, por lo que procedieron a trazar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

El docente pidió que construyeran la mediatriz con las herramientas que ellos ya habían trabajado, pues consideró que ellos tenían las herramientas teóricas e instrumentales para hacerlo sin acudir directamente al artefacto mediatriz:

- P: *Pero entonces stop, ¿con que encontraron la mediatriz, con la aplicación mediatriz?*
- E1: *ajá.*
- P: *pero no vamos a utilizar esa aplicación, porque queremos recordar cómo se construye la mediatriz. Entonces van a borrar la aplicación mediatriz y van a construirla*.

Antes de ello les preguntó si recordaban cómo hacer esta construcción, a lo que los estudiantes respondieron afirmativamente. E2 tomó la palabra *[Buscando el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y del segmento $\overline{BC}$ y luego hacemos una recta]*. E1 suprimió las mediatrices y procedió a realizar la construcción a partir de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ ya construidos. Para ello empleó el artefacto *Medio o Centro* y en cada segmento obtuvo los puntos D y E. Luego de obtenerlos, con el mismo artefacto ubicó los puntos medios F y G de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{AD}$. Ahora, tomado como centro el punto A y distancia el punto F trazó la primera circunferencia y la segunda tomando como centro el punto B y distancia el punto G. Después trazó una recta que pasaba por el punto D (punto medio del segmento $\overline{AB}$) y por el punto H (Punto de intersección de las dos circunferencias), recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$. La construcción de la mediatriz del segmento $\overline{BC}$ fue realizada con un procedimiento análogo (véase figura 59).

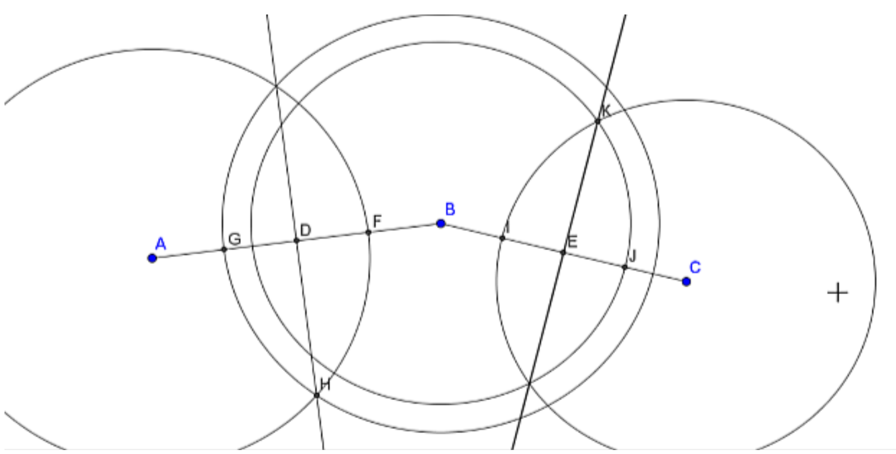


Figura 59. Solución problema 6- Imagen 2

De la anterior construcción fue posible reconocer el uso de los artefactos *Medio Centro*, *Circunferencia* y *Recta* asociados a la acción de *Exploración Empírica*, debido a que corresponden a los objetos geométricos utilizados para realizar la construcción de las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ [Ee, Mc], [Ee, Ci] y [Ee, Re].

Después de haber realizado la construcción de la mediatriz, la docente intervino y solicitó al grupo explicar cómo la habían hecho. Ellos lo explicaron de acuerdo al procedimiento utilizado para la construcción y a sugerencia de la docente procedieron a ocultar las circunferencias y los puntos que apoyaron la construcción de la mediatriz (véase figura 60).

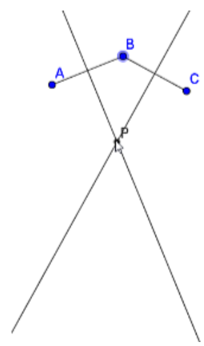


Figura 60.
Solución problema
6- Imagen 3

Realizada la anterior acción el grupo se enfocó en la segunda parte del problema, para ello arrastraron el punto B en diferentes direcciones en busca de relaciones y propiedades del punto P. Esto posibilitó inferir que el uso del arrastre estaba asociado al artefacto *Arrastre Guiado* y a la acción *Exploración Dinámica* [Ed, Ag]. Para favorecer el hallazgo de la propiedad del punto P, la docente pide fijar la atención en el comportamiento del punto P, por lo que se da el siguiente intercambio comunicativo:

- P: *¿Están viendo cómo se comporta P?*
- E1: *sí.*
- P: *¿cómo se comporta?*
- E1: *Buscando la intersección de las mediatrices*
- P: *No, el punto P siempre va a ser la intersección de las mediatrices*
- P: ¿*Cómo es más fácil mirar el comportamiento de P?*
- E1: *Con la herramienta rastro*.

Cuando se llegó a este punto de la discusión los estudiantes procedieron a usar el artefacto arrastre bajo la modalidad de *Arrastre Traza* sobre el punto P. Al realizarlo, E1 y E2 observaron que el rastro generado por el punto P cuando se arrastraba el punto B, era una recta y que esta pasaba por la mitad de los puntos

A y C *[E1: P siempre se va a mover en una línea recta] [E2: esa recta pasa por el medio de A y C]* (véase figura 61). Lo anterior lleva a considerar que al emplear el artefacto *Arrastre Traza* los estudiantes lograron detectar una relación entre la recta que se generó con la traza y los puntos A y C. Dicha relación fue detectada gracias a la evidencia empírica que provino de la visualización en pantalla, por ello la asociamos a la acción de Visualización [Vi, Atr].

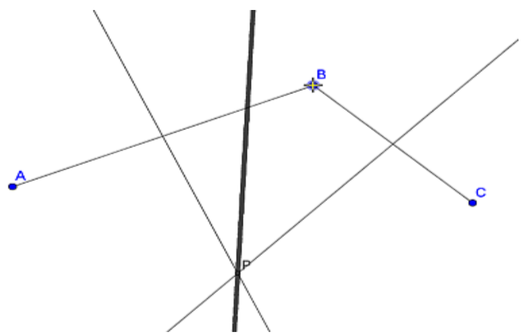


Figura 61. Solución problema 6- Imagen 4

Luego de enunciar la relación, el docente medió para que a partir de lo encontrado los estudiantes llegaran a *Formular una Conjetura* y dio a entender al grupo la necesidad de proponer una justificación al respecto. En este punto surgió la siguiente discusión:

- P: *¿Ya comprobaron que si pasa por el medio?, ¿cómo lo hicieron?]*
- E2: *Con un segmento*
- P: *muéstrenmelo.*
- (E2 construyó el segmento $\overline{AC}$) (Véase figura 62)
- E2: *si ve, la recta pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$?…*
- (Cambiaron el color del punto P por recomendación del docente)
- P: *qué características tiene esa recta*
- E1: *es… la mediatriz del segmento $\overline{AC}$…*
- P: *¿ustedes están seguros de eso?, explíquenme cómo lo probamos*
- E2: *Así como lo probamos la otra vez*
- P: *¿cómo?*
- E2: *Formando un triángulo isósceles y midiendo sus lados*
- P: *Háganlo… pero usted los convence a ellos dos y cuando terminen me llaman a mí para convencerme.*

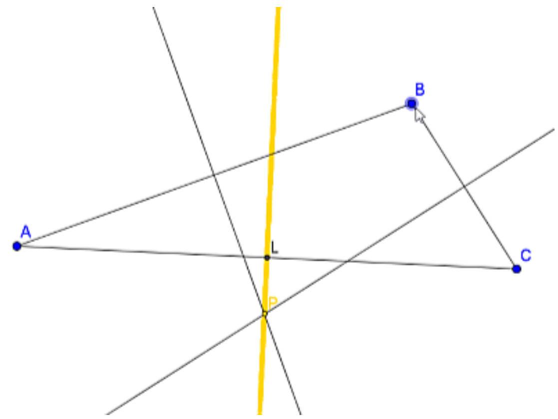


Figura 62. Solución problema 6- Imagen 5

La docente se apartó y E2 dijo a sus compañeros [*muevan B y P que sólo baje un poco… sólo medimos entre A, P y P, C*]. Sin embargo, E1 tomó el mouse y construyó el triángulo APC con el artefacto polígono (véase figura 63), a continuación determinó la longitud de $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ con el artefacto Distancia o Longitud. Sin embargo la docente intervino y pidió que a cambio de la herramienta Distancia o Longitud emplearan objetos geométricos de los ya trabajados. Esto con el fin de favorecer una justificación que los llevara a usar elementos del sistema teórico local ya construido. En este punto observemos la siguiente interacción:

- P: *que elemento geométrico de los ya trabajados les permite demostrarme que esos segmentos son iguale*
- E2: *Circunferencias*
- P: *no sé, deben ser elementos en los que no se use medida*
- E2: *hagamos circunferencias.*

De acuerdo a lo anterior, E1 realizó el mismo procedimiento con el que construyó las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, para construir la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ (véase figura 63). Al hacerlo lograron expresar una justificación con respecto a la recta que determinaba el trazo del punto P y concluyeron que esta era la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

- E1: *¡Wow es equidistante porque tienen el mismo radio!... El triángulo va a tener dos lados iguales puesto que los radios de las circunferencias son los mismos y como tiene al menos dos lados iguales, sabemos que es un triángulo isósceles*
- P: *¿y sí es un triángulo isósceles, según ustedes encontraron?*
- E1: *…la mediatriz.*

Cuando E1 realizó la construcción de la mediatriz del segmento $\overline{AC}$, basado en el método empleado al construir las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, fue posible observar nuevamente el uso de los artefactos *Medio Centro* y *Circunferencia.* En esta oportunidad estos se involucraron en un proceso de *Exploración Teórica,* pues los estudiantes se apoyaron en la *Selección de Elementos Teóricos* como la definición de circunferencia y en artefactos como

Medio Centro y *Circunferencia* para enunciar garantes teóricos que favorecieron ejercer dos acciones: la de *Formulación de Conjetura* y la de *Formulación de Justificación,* pues llegaron a determinar que la recta que se formaba del trazo del punto P era la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ [Et, Mc] y [Et, Ci] [Set, Ci], [Fc,Ci] [Fj,Mc], [Fj,Ci].

El proceso llevado a cabo por los estudiantes al desarrollar este problema evidenció la apropiación de algunos artefactos y hechos geométricos enmarcados en acciones de la actividad demostrativa. Estos han sido trabajados en la solución de problemas anteriores y son de utilidad para ellos a la hora de formular conjeturas y proponer justificaciones. A su vez fue posible reconocer la emergencia de otros artefactos al tener que enfrentarse a realizar construcciones que conservaran tanto relaciones como propiedades de los objetos geométricos involucrados.

Lo anterior se observó en las dos partes en que estaba dividido el problema. Recordemos que en la primera se les pidió construir tres puntos no colineales A, B y C, construir las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y llamar P al punto de intersección de las mediatrices. En la primera parte los estudiantes lograron gracias a los artefactos *Medio Centro*, *Circunferencia* y *Recta,* mediante un proceso de *Exploración Empírica,* construir las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, conservando relaciones y propiedades que la caracterizan.

En la segunda parte del problema, que llevaba al grupo a formular una conjetura y

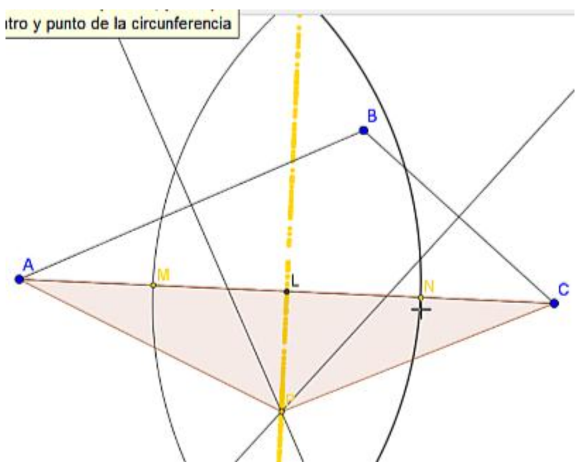


Figura 63. Solución problema 6- Imagen 6

su justificación, se observó que fue de gran utilidad para ellos disponer de artefactos como el *Arrastre Guiado* y el *Arrastre Traza* enmarcados respectivamente en las acciones de *Exploración Dinámica* y la *Visualización,* para detectar relaciones y propiedades. Aunque se reconoció que la *Formulación de la Conjetura* fue mediada por la interacción de la docente con los estudiantes y no de ellos con los artefactos, recordemos que dicha interacción se originó gracias a las relaciones y propiedades que ellos detectaron. Sumado a esto, artefactos como

Medio Centro y *Circunferencia* usados en el contexto de una *Exploración Teórica* fueron determinantes para justificar que "la recta que se formaba del trazo del punto P era la mediatriz del segmento $\overline{AC}$", hecho que garantizaba que el punto P equidistaba de los puntos A y C, pues ellos en uno de los problemas anteriores ya habían justificado que todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistaban de los extremos de dicho segmento.

Lo anterior permitió establecer que el desarrollo llevado a cabo para dar solución al problema se situó dentro de un proceso de justificación tipo *Prueba,* en el que inicialmente se trabajó sobre acciones que apoyaron la formulación de una conjetura y posteriormente sobre acciones que permitieron enunciar la justificación. Algo importante que sobresalió fue el uso recurrente del artefacto *Circunferencia* en dos procesos entrelazados, por un lado en el proceso de construcción de la mediatriz y por el otro en el proceso de justificación. A su vez se destacó la ausencia de la acción *Corroboración de Conjetura*.

4.7 Problema 7, cuadrilátero

Este problema solicitaba construir un cuadrilátero y las mediatrices de cada uno de sus lados. El objetivo era manipular los vértices de forma que las cuatro mediatrices se intersecaran en un único punto e identificar las propiedades que cumplen los vértices del cuadrilátero, cuando esto sucede, se esperaba que los estudiantes identificaran la equidistancia de los vértices del cuadrilátero con el punto de intersección de las mediatrices.

El trabajo de los estudiantes inició con la construcción de un cuadrilátero y las mediatrices de sus lados [Ee, Se]. Para la construcción de las mediatrices, los estudiantes hicieron uso de la herramienta Mediatriz a pedido de ellos [E1: *Profe ¿podemos usar la herramienta mediatriz? O tenemos que hacer la construcción completa]* [Ee, Me] y movieron los vértices del cuadrilátero, logrando que las mediatrices se intersecaran en un único punto (véase figura 65).

Los estudiantes iniciaron con una exploración dinámica, teniendo en cuenta el enunciado del problema, tratando de observar qué cambios presentaban los vértices del cuadrilátero o el punto de intersección de las mediatrices, cuando alguno de los vértices se arrastraba [Ed,Ate]. Esto los llevó a observar que al mover uno de los vértices, dos de sus mediatrices (las determinadas por los lados cuyo extremo era el punto bajo arrastre) se movían y en consecuencia la intersección de las cuatro mediatrices desaparecía. Aquí GG presentó una dificultad, pues el punto de intersección de la construcción fue determinado por los estudiantes con ayuda de la herramienta Punto de Intersección, haciendo creer (al menos visualmente) que la intersección era de las cuatro rectas.

Al manipular alguno de los vértices, aun cuando se esperaba que el punto de intersección desapareciera, el software trasladó el punto de intersección a solo dos mediatrices (véase figura 64) cuando las cuatro no se intersecaban. Para comprobar que la dificultad no hubiese sido causada por la construcción elaborada por los estudiantes, ellos decidieron hacerla nuevamente verificando que el problema permanecía.

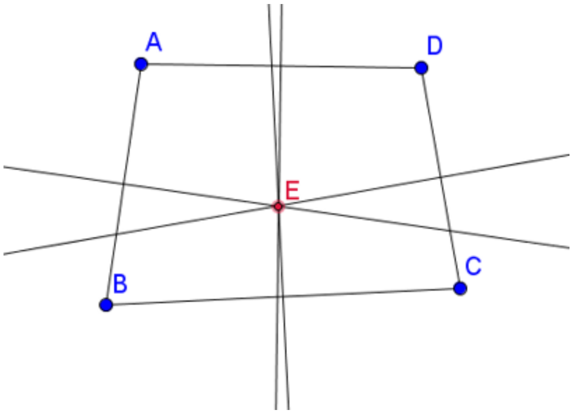


Figura 65. Solución problema 7- Imagen 2

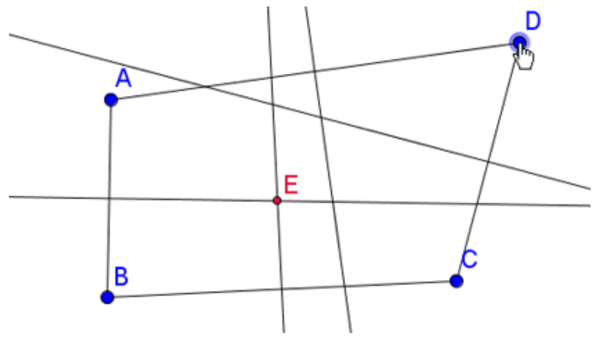


Figura 65. Solución problema 7- Imagen 1

Después de la exploración los estudiantes decidieron detener el arrastre y observar la construcción, dejando una configuración en pantalla donde las cuatro mediatrices del cuadrilátero se intersecaban. Ellos observaron las características que presentaban los vértices cuando tal propiedad se satisfacía, pero no tuvieron éxito en identificarlas. Los estudiantes nuevamente manipularon el cuadrilátero, moviendo sus vértices y configurando así otros cuadriláteros diferentes al original en los que la propiedad de las mediatrices se cumplía [Ed, Ag].

Por sugerencia del docente, los estudiantes construyeron al lado otro cuadrilátero para poder compararlos de manera simultánea y poder avanzar con ello a la identificación de alguna característica [Ee, Se] (figura 66). Uno de los estudiantes [E1] manifiestó a sus compañeros *"ustedes no creen que ¿los vértices están a la misma distancia?"* Comentario que no fue tenido en cuenta por sus compañeros.

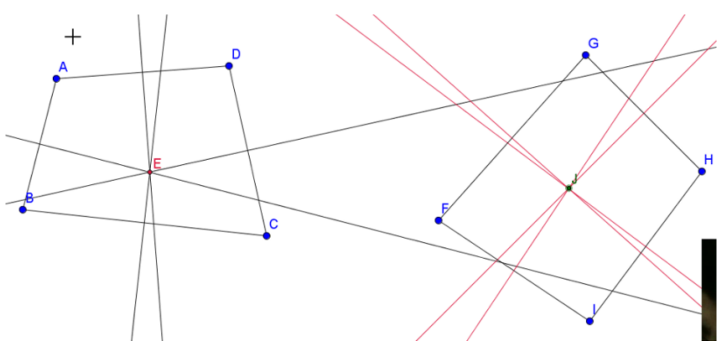


Figura 66. Solución problema 7- Imagen 3

E2 mencionó después de esto: "*¿Qué pasa si el cuadrilátero es un cuadrado*?", pregunta que llevó a los estudiantes a construir un cuadrado con ayuda de la herramienta Polígono Regular [Et,Po], trazar las mediatrices de sus lados [Et, Me] y observar dos cosas: por un lado, que las mediatrices de los lados opuestos se sobreponían, dejando ver en pantalla solamente dos mediatrices y que efectivamente estas se intersecaban en un único punto [Vi, Me]. Tomando uno de los vértices y arrastrándolo en diferentes direcciones, observaron que esas propiedades no se alteraban. Es decir, que un cuadrado cualquiera es un cuadrilátero que cumple las condiciones mencionadas en el problema (véase figura 67) [E3: "*Pues se cumple porque todos los lados son iguales] [E1: "Y están a la misma distancia de O (del punto de intersección)].*

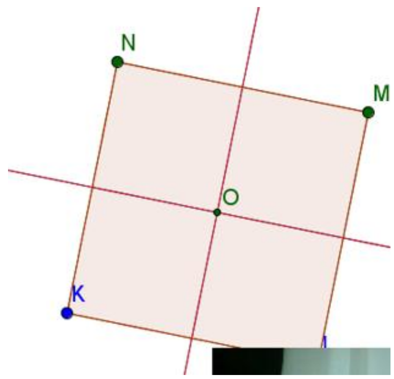


Figura 67. Solución problema 7- Imagen 4

Los estudiantes observaron la figura preguntándose por los motivos que llevaban a que se cumpliera con ese cuadrilátero. Ellos debatieron diferentes posibilidades. Por un lado, E3 comentó que esto podía ocurrir porque todos sus lados son iguales, ante lo cual E1 refutó mencionando que ya se ha comprobado que la propiedad también se cumple en cuadriláteros cuyos lados tienen diferente distancia [RG,SEE] y nuevamente comunicó su sospecha *"Están los vértices a la misma distancia de la intersección"* [Fc, Po]. *En este punto* sus compañeros empezaron a divagar, buscando soluciones posibles. E1 al no sentirse escuchado, decidió tomar el mando de la construcción y empezó a manipular el software haciendo caso omiso a los comentarios de sus compañeros, determinando las distancias desde el punto J de intersección de las mediatrices a los vértices del cuadrilátero en la segunda construcción, corroborando así su conjetura (figura 68).

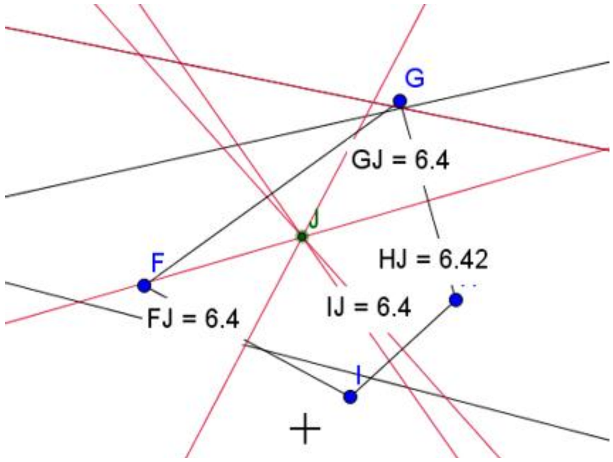


Figura 68. Solución problema 7- Imagen 5

Los compañeros de E1 presentaron dudas frente a la inexactitud de uno de los valores, por lo que E1 realizó este procedimiento en los otros cuadriláteros [Cc, DL] (figuras 69 y 70) y con ello observó que en todos estos casos la distancia de los vértices del cuadrilátero al punto de intersección de las mediatrices era la misma.

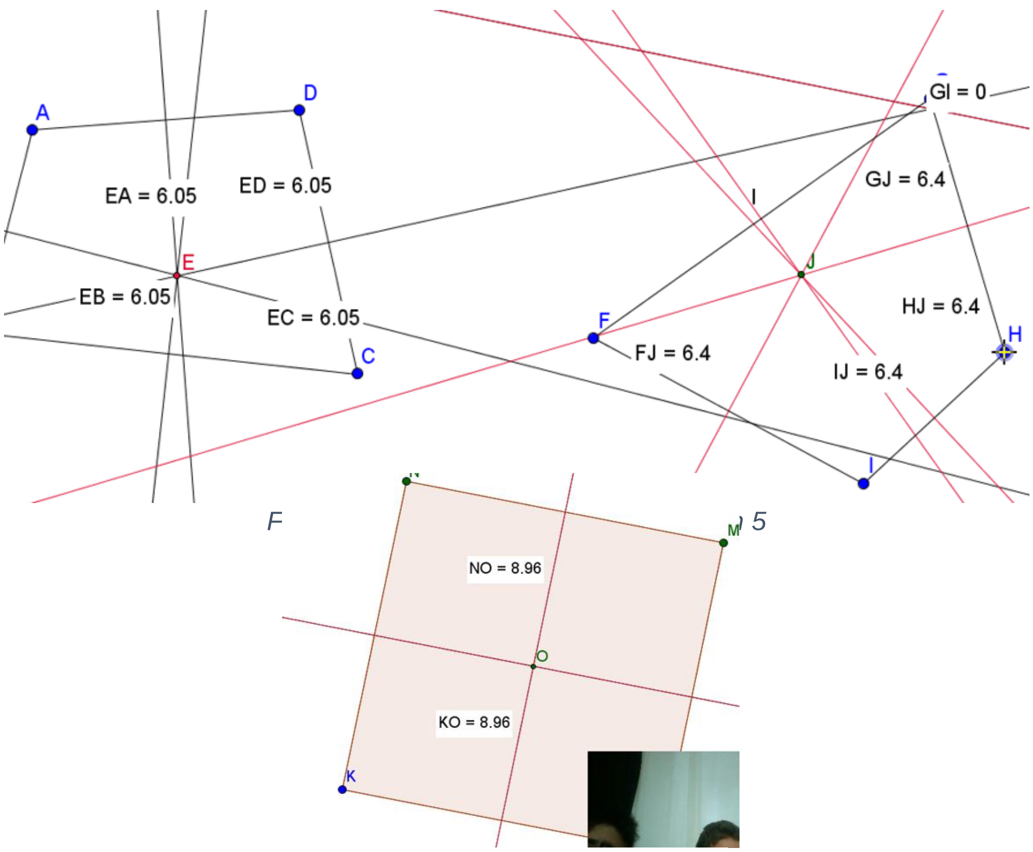


Figura 69. Solución problema 7- Imagen 6

El docente acompañante les pidió que indagaran más, observando las propiedades que se desglosaban después del hallazgo reportado por E1. Los

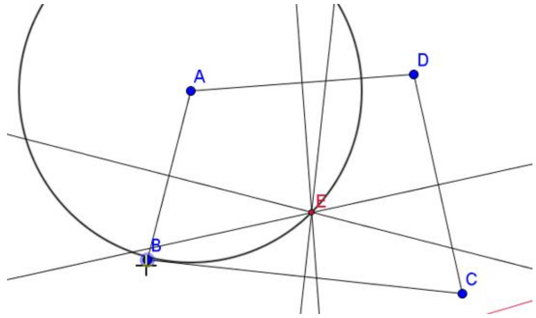


Figura 71. Solución problema 7- Imagen 7

estudiantes hicieron uso de la herramienta circunferencia, construyendo una con centro en uno de los vértices y extremo el punto de intersección de las mediatrices (véase figura 71). Ellos repitieron el procedimiento en los otros tres vértices del cuadrilátero y aseguraron que los radios eran iguales [Et, Ci]. La docente les preguntó: *¿Cómo pueden asegurar que los radios son iguales sin hacer uso de la herramienta Distancia o* Longitud?*”,* buscando con ello la formulación de un argumento a partir de los elementos geométricos conocidos por ellos.

En este punto, los estudiantes tomaron un camino no tenido en cuenta por la docente, pues no contaron con la posibilidad de identificar que los vértices del cuadrilátero eran puntos de una misma circunferencia, es decir, que la condición se cumple cuando el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia. Sin embargo, la docente siguió indagando, tratando de orientar las ideas de los estudiantes.

E1 sugirió hacer uso de la herramienta Compás, pues con ella hacían uso del mismo radio. Es así como construyeron nuevamente una de las circunferencias (véase figura 72) y verificaron, sin hacer uso de la herramienta Distancia o Longitud, su conjetura [Set, Ci] (figura 71). La docente les preguntó por qué creían que esto era posible y, después de una discusión al interior del grupo, los estudiantes concluyeron: *Los puntos que pertenecen a la mediatriz equidistan de los extremos del segmento ¿cierto?, entonces el punto de intersección que pertenece a las cuatro mediatrices equidista de los cuatro vértices, argumento con el que* justificaron su conjetura [Fj, Ci].

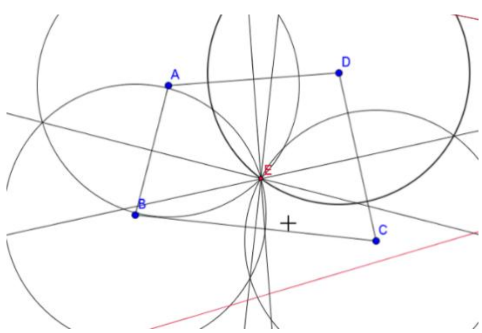


Figura 72. Solución problema 7- Imagen 8

El desarrollo de este problema, permite observar un manejo menos intuitivo por parte de los estudiantes frente al uso del software, reconociendo mejor las propiedades de las herramientas. Esto permite que mejorar el uso por parte de geogebra en el desarrollo y solución del problema. En el proceso de conjeturación los estudiantes hacen uso del arrastre guiado para poder identificar invariantes y de la selección de elementos empíricos, en tanto tratan de trabajar un cuadrilátero regular para poder formular una conjetura. En el proceso de justificación los estudiantes reconocen propiedades de la circunferencia (selección de elementos teóricos) y hacen uso de ella para comprobar su solución. Se destaca el hecho de que este problema es solucionado de una forma no esperada por los investigadores, pues ellos esperaban la comprobación de la conjetura con una circunferencia que contuviera los vértices. Esta acción permitió identificar el logro del objetivo procedimental, pues con la pericia del manejo del software, construida en el desarrollo del conjunto de problemas, los estudiantes pudieron desarrollar estrategias alternas de solución, evidenciando la mediación del software en los procesos de argumentación.

5. RESULTADOS

En este capítulo presentamos los resultados del análisis realizado acerca de la mediación del SGD en el marco de la actividad demostrativa, apoyados en el proceso de solución de los problemas propuestos y los constructos teóricos adoptados.

Para ello nos referimos a la descripción del proceso de solución de cada problema registrado en el capítulo anterior y nos concentramos en dos asuntos principalmente: (i) el reconocimiento de algunos artefactos que a lo largo del proceso observado llegaron a convertirse en instrumentos, bien sea en uno o en ambos procesos de la actividad demostrativa (conjeturación y justificación) y (ii) la determinación de cómo media el SGD en los procesos de la actividad demostrativa.

De acuerdo al marco teórico adoptado, el paso de un artefacto a instrumento se da mediante el proceso de génesis instrumental, el cual a su vez comprende esquemas de utilización y los procesos de instrumentación e instrumentalización. Aclaramos particularmente que los esquemas de utilización serán entendidos en este análisis como el conjunto de *Técnicas instrumentadas observables* que se dan a partir de las funciones que le asignan los estudiantes a determinado artefacto y se consolidan en la influencia que ejerce el artefacto sobre ellos. Además, consideramos como artefactos a cada una de las herramientas que provee GG para solucionar los problemas propuestos, con base en lo propuesto por Leung et al. (2006).

5.1 Génesis instrumental, proceso evolutivo de artefactos a instrumentos

En este apartado nos referiremos a tres artefactos, que de acuerdo al proceso de génesis instrumental, consideramos que lograron alcanzar el nivel de instrumentos, estos son: Arrastre Guiado, Distancia o Longitud, Circunferencia y Mediatriz. Para la descripción del proceso de convergencia señalado con cada artefacto, nos apoyaremos en el recorrido cronológico sobre el uso de cada uno al abordar los problemas propuestos. En este recorrido se reportan las acciones realizadas por el grupo de estudiantes sobre el artefacto estudiado, el objetivo de las mismas y el momento en que estas acontecieron.

5.1.1 Génesis del instrumento Arrastre guiado

Consideramos la herramienta arrastre como un artefacto, dado que esta permitió a los estudiantes manipular los puntos de diferentes figuras geométricas, durante y después de su construcción, así como observar relaciones y propiedades, tanto variantes como invariantes. Sin embargo, pese a que en la literatura se han registrado diferentes modalidades de arrastre, nos hemos centrado en el Arrastre Guiado dado que en los problemas iniciales se requirió el uso de este artefacto con el objetivo particular de detectar relaciones y propiedades. A su vez, porque fue posible rastrear su uso con mayor regularidad durante la solución de los diferentes problemas con otra intencionalidad otorgada por los estudiantes. Recordemos que el Arrastre Guiado se emplea cuando existe una intención previa al arrastrar puntos u objetos en la pantalla.

En la interacción de los estudiantes con el artefacto Arrastre Guiado, durante la solución de los problemas, fue posible observar la incorporación de dicho artefacto a sus esquemas de utilización a través de Técnicas Instrumentadas Observables (TIO). En otras palabras, en el análisis presentado en el capítulo anterior detectamos que en los problemas solucionados, cada acción que ejercían los estudiantes sobre el artefacto contaba con objetivos específicos que aportaban a la solución de la situación afrontada, tal y como lo podemos ver en la *tabla 13*. Al reconocer que las acciones ejercidas sobre el artefacto contaron con un objetivo específico fue posible reconocerlas como TIO.

<table>
<tr><th colspan="3">Proceso de génesis del instrumento Arrastre Guiado</th></tr>
<tr><th>Problema</th><th>Acción</th><th>Objetivo/ Técnica de instrumentación observable</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Conjunto de puntos</td><td>Arrastrar los puntos azules en el plano</td><td>Detectar invariantes en el conjunto de puntos.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Arrastrar los puntos rojos</td><td>Caracterizar el movimiento de los puntos azules en términos de los puntos rojos.</td></tr>
<tr><td>Formular una conjetura asociada al comportamiento de los puntos (relación de dependencia).</td></tr>
<tr><td>Ubicar puntos azules y rojos a la misma distancia del punto centro B.</td></tr>
<tr><td>Ubicar los puntos sobre la cuadricula de tal forma que equidisten del punto B.</td></tr>
<tr><td>Ubicar los puntos sobre la cuadricula formando un rectángulo.</td></tr>
<tr><td>Ubicar los puntos sobre la circunferencia para determinar la equidistancia entre los puntos rojos y azules al punto B.</td></tr>
<tr><td>Equidistancia de puntos</td><td>Arrastrar los puntos D y E</td><td>Ubicar los puntos D y E a la misma distancia de los puntos A y B, tomando una unidad de medida.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Construcción de la mediatriz</td><td rowspan="2">Arrastrar el punto O sobre el segmento $\overline{MN}$</td><td>Descubrir la traza de los puntos P y Q para identificar el lugar geométrico que estos puntos determinan.</td></tr>
<tr><td>Observar las características del lugar geométrico determinado por la Traza que dejan los puntos P y Q</td></tr>
<tr><td>Construcción triángulo isósceles</td><td>Arrastrar el punto O sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$</td><td>Detectar invariantes entre la medida de los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$</td></tr>
<tr><td>Ángulo constante</td><td>Arrastrar el punto Q en el plano</td><td>Conservar el valor de la medida del ángulo $\measuredangle FQE$ igual a 90°</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Triangulo y sus mediatrices</td><td rowspan="2">Arrastrar el punto B en el plano en diferentes direcciones</td><td>Enunciar la condición que cumplía el punto P al arrastrar el punto B.</td></tr>
<tr><td>Detectar relaciones y propiedades del punto P.</td></tr>
</table>

Cuadriláteros y sus mediatrices	Arrastrar los vértices $A, B, C, y\ D$ de los cuadriláteros	Mover los vértices del cuadrilátero de tal forma que las mediatrices de sus lados se intersecaran en un único punto
		Enunciar una conjetura en relación a las propiedades que cumplían los vértices $A, B, C, y\ D$.

Tabla 13. TIO Artefacto Arrastre Guiado

Ahora, teniendo en cuenta que para considerar que el artefacto Arrastre Guiado se ha incorporado al esquema de utilización de los estudiantes, este deberá haber pasado por los procesos de instrumentalización y de instrumentación. Es por ello que de acuerdo a la caracterización que tanto Trouche (2014) como Rabardel (2002) realizan de los dos procesos, hemos reconocido una posible clasificación de las TIO sobre el artefacto.

Por un lado, asociamos al *proceso de instrumentalización* todas las TIO que reportamos en la *tabla 13*, dado que estas correspondieron a las decisiones que tomaron los estudiantes sobre cómo usar y qué funciones atribuirle al artefacto cuando ellos interactuaban con él. De otro lado, para caracterizar la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada correspondientes al *proceso de instrumentación,* agrupamos las TIO de acuerdo a la influencia que ejerció el artefacto sobre los estudiantes cuando ellos lo manipularon durante el proceso de solución de los diferentes problemas.

Cada uno de los esquemas que señalaremos, producto de la influencia ejercida por parte del artefacto sobre los estudiantes, obedece a características particulares cuando ellos lo manipularon, es por ello que a continuación acompañamos el esquema con una breve descripción de su construcción, para ello nos remitimos a la *tabla 13*, anterior producto del análisis presentado en el capítulo anterior.

- *Detectar invariantes, relaciones y propiedades.* Este esquema se da en el proceso de solución de cuatro problemas diferentes y durante cuatro acciones de distinta naturaleza. En el problema “conjunto de puntos” los estudiantes manipularon los puntos azules y rojos presentados en pantalla de acuerdo al enunciado del problema. Ellos detectaron como invariante el movimiento de los puntos azules y una relación de dependencia: el movimiento de los puntos azules dependía del movimiento de los puntos rojos.

En el problema “construcción de la mediatriz” los estudiantes arrastran el punto O sobre el segmento $\overline{MN}$ de manera autónoma al solicitarles desde el enunciado del problema explorar la construcción y dar a conocer las relaciones y propiedades que observan. Ellos detectaron como invariante que el punto O solo se desplazaba en el segmento $\overline{MN}$ y no sobre la recta, además que la Traza se determinaba por las distintas posiciones de los puntos P y Q, intersecciones de las dos circunferencias (ver figura 33).

En el problema “construcción de triángulo isósceles” los estudiantes, por sugerencia de la docente, arrastran uno de los puntos del triángulo isósceles en busca de relaciones entre la medida de los ángulos. Ellos encontraron como relación que los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$ conservaban la misma media al arrastrar el punto C y que la medida del ángulo $\measuredangle BCA$ era diferente por lo general.

En el problema “Triangulo y sus mediatrices” los estudiantes arrastraron el punto B de acuerdo al enunciado del problema y reconocieron que el rastro generado por el punto P cuando se arrastraba el punto B, era una recta que pasaba por la mitad de los puntos A y C.

- *Ubicar los puntos sobre una figura.* Este esquema se desarrolló de manera recurrente durante el proceso de solución del problema “conjunto de puntos” bajo dos acciones de naturaleza similar. Los estudiantes usaron el artefacto con apoyo de la herramienta cuadricula como una estrategia autónoma para ubicar los puntos rojos y azules a la misma distancia del punto B. Ellos activaron la herramienta cuadrícula y arrastraron los puntos rojos formando un rectángulo. Al observar que la ubicación de los puntos en forma rectangular no correspondía a la condición de estar a la misma distancia del punto B, se apoyaron en la herramienta circunferencia; esta se construyó tomando como centro el punto B y distancia uno de los puntos rojos. Posteriormente, ubicaron los puntos rojos sobre la circunferencia.

- *Establecer relaciones de equidistancia entre puntos.* Este esquema surgió durante el desarrollo de dos problemas y bajo acciones que obedecían a las características de cada problema. De un lado, al solucionar el problema “conjunto de puntos” y como consecuencia del esquema anterior, los estudiantes emplearon el artefacto de manera autónoma para ubicar los puntos rojos y azules sobre la circunferencia con la intención de atender a la relación pedida en el enunciado del problema, que el conjunto de puntos equidiste del punto B. De otro lado, al solucionar el problema “equidistancia de puntos” los estudiantes decidieron usar el artefacto para reubicar los puntos D y E a la misma distancia de los puntos A y B, tomando como unidad de medida los lados de los cuadrados determinados en pantalla por la herramienta cuadricula.

- *Formular enunciados de carácter hipotético.* El desarrollo de este esquema por parte de los estudiantes se dio durante el proceso de solución de tres problemas con acciones asociadas a la naturaleza de cada problema. En el problema “conjunto de puntos”, al arrastrar los puntos rojos dispuestos en pantalla llegaron a formular como conjetura que cada punto rojo estaba asociado a un punto azul que dependía de él, formulación que surgió de manera autónoma por los estudiantes mientras observaban las propiedades del comportamiento de los puntos.

En el problema “triángulo y sus mediatrices”, mientras los estudiantes arrastraban el punto B y observaban su movimiento llegaron a determinar que la recta que se formaba del trazo del punto P era la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

En el problema “Cuadriláteros y sus mediatrices” los estudiantes, apoyados en el arrastre de los vértices $A, B, C, y\ D$ de los cuadriláteros, lograron formular como conjetura que el punto de intersección de las mediatrices equidistaba de los cuatro vértices.

Los anteriores esquemas de utilización permitieron evidenciar un cambio de significado de parte de los estudiantes con respecto a la forma de emplear el artefacto arrastre guiado. En su uso ellos le atribuyeron diferentes funciones y lo adaptaron a su proceso de solución en los diferentes problemas. Además se resalta que gran parte de la construcción de los esquemas se desarrolló de manera autónoma.

Ahora, en concordancia con el análisis presentado y teniendo en cuenta que el uso del artefacto arrastre guiado atravesó por el proceso de génesis instrumental, fue posible reconocer que este se consolidó para los estudiantes como un instrumento. Otro asunto que no ha sido mencionado pero que es importante resaltar es que el artefacto arrastre guiado fue instrumentalizado durante el proceso de conjeturación en la solución de los diferentes problemas.

5.1.2 Génesis del instrumento Distancia o Longitud

Reconocemos la herramienta Distancia o Longitud como un artefacto con la virtud de transformarse en un instrumento para los estudiantes, puesto que esta formó parte significativa del proceso de solución de algunos de los problemas propuestos. Los estudiantes apoyados en las características de este artefacto determinaron la distancia entre dos puntos y/o la longitud de un segmento para formular, corroborar, verificar o garantizar sus conjeturas así como justificaciones de explicación de validación.

En el proceso de génesis instrumental fruto de la interacción entre los estudiantes y el artefacto distinguimos las TIO presentes en la *tabla 14*, y a su vez las reconocemos como aquellas funciones o características que le atribuyeron los estudiantes para solucionar los diferentes problemas, lo que hace posible asociarlas al proceso de *instrumentalización*.

Génesis del instrumento Distancia o Longitud		
Problema	**Acción**	**Objetivo/ Técnica de instrumentación observable**
Conjunto de puntos	Tomar la distancia entre el conjunto de puntos (rojos y azules) y el punto B	Verificar si los puntos rojos estaban a la misma distancia del punto B
Equidistancia de puntos	Determinar las distancias entre los puntos A, C y B,C	Verificar que los puntos A y B estaban a la misma distancia del punto C
	Determinar la distancia del punto H al punto A y al punto B	Corroborar relación equidistancia entre el punto H y los puntos A y B
	Enunciar las características que debía tener la recta construida	Formular una conjetura en relación a la definición de mediatriz

Construcción de la mediatriz	Intentar medir la distancia entre el punto de intersección del rastro con el segmento $\overline{MN}$ y los extremos de este segmento	Reconocer si la recta generada por la traza al arrastrar el punto P pasaba por el punto medio del segmento $\overline{MN}$.
	Determinar la distancia del punto P al punto M y al punto O	Corroborar que el punto P equidistaba de los puntos extremos del segmento $\overline{MN}$ y que la traza contenía a los puntos que equidistaban
		Justificar por qué el punto P equidistaba de los puntos extremos del segmento $\overline{MN}$
Construcción triángulo isósceles	Determinar las longitudes de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$	Corroborar la afirmación que $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tenían igual longitud.
		Justificar por qué los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son de igual longitud
Cuadriláteros y sus mediatrices	Tomar las distancias desde el punto J de intersección de las mediatrices a los vértices $A, B, C, y\ D$ de los cuadriláteros	Corroborar que la distancia de los vértices $A, B, C, y\ D$ del cuadrilátero al punto J de intersección de las mediatrices era la misma.

Tabla 14. TIO Artefacto Distancia o Longitud

En concordancia con lo anterior, para dar cuenta del proceso de *instrumentación* y consecuentemente de la emergencia de los esquemas de utilización o técnicas instrumentadas acudimos al mismo criterio que usamos en la descripción de la génesis del artefacto anterior, es decir agrupamos las TIO atendiendo a la influencia que ejerció el uso del artefacto sobre los estudiantes a la hora de afrontar los problemas.

De acuerdo a las TIO observadas tres esquemas de utilización emergieron, E*xploración empírica, corroborar y formular conjeturas, y proponer justificaciones del tipo explicación de validación.* A continuación describimos cada uno de ellos.

- *Exploración empírica:* Este esquema se desarrolla Durante el proceso de solución de los dos problemas iniciales “Conjunto de puntos” y “Equidistancia de puntos”. Los estudiantes emplearon el artefacto Distancia o Longitud para verificar, por un lado si la distancia de dos puntos rojos al punto B eran iguales y por el otro, si los puntos A y B estaban a la misma distancia del punto C. En el primer caso verificaron que los puntos rojos no equidistaban del punto B, lo que los llevó a buscar otra estrategia para ubicarlos a la misma distancia. En el segundo verificaron que los puntos A y B estaban a la misma distancia del punto C. En los dos casos el uso del artefacto surge como una estrategia empírica propuesta por los estudiantes para confirmar la relación de equidistancia.

- *formular y Corroborar conjeturas.* Este esquema surgió en el desarrollo de cuatro problemas diferentes en los que los estudiantes corroboraron y formularon conjeturas entorno a relaciones de equidistancia entre puntos halladas. En el proceso de solución del problema “Equidistancia de puntos” los estudiantes decidieron usar el artefacto Distancia o Longitud cuando la docente les pidió garantizar que el punto H se encontraba a la misma distancia de los puntos A y B;

en este punto los estudiantes tomaron las distancias correspondientes y corroboraron la relación de equidistancia entre los puntos mencionados. También el artefacto fue usado por los estudiantes para formular una conjetura cuando la docente les solicitó enunciar las características que debía tener la recta construida (mediatriz).). Ellos plantearon que la Mediatriz era una recta que pasaba por el punto medio de un segmento y que cumplía la condición que los puntos ubicados en la recta equidistaban a los puntos A y B.

- En el problema "Construcción de la mediatriz" los estudiantes corroboraron a partir del artefacto Distancia o Longitud que el punto P equidistaba de los puntos extremos del segmento $\overline{MN}$ al tomar las distancias del punto P al punto M y del punto P al punto N, además observaron que la traza del punto P contenía a los puntos que equidistaban.

En el problema "Construcción triángulo isósceles" los estudiantes tomaron la medida de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ del triángulo construido para corroborar que los segmentos tenían igual longitud.

En el problema "Cuadriláteros y sus mediatrices" los estudiantes emplearon el artefacto tomando la medida de la distancia del punto de intersección de las mediatrices de los cuadriláteros a cada uno de sus vértices, estrategia que les permitió corroborar que la distancia, por ejemplo de los vértices $A, B, C, y\, D$ del cuadrilátero al punto J de intersección de las mediatrices era la misma.

- *Justificaciones del tipo explicación de validación*. Este esquema se vio reflejado durante el proceso de solución de dos problemas con la intención de justificar las afirmaciones que surgieron entorno a relaciones de equidistancia. En la solución del problema "Construcción de la mediatriz" los estudiantes acudieron a la evidencia proporcionada por el artefacto y a la corroboración realizada previamente para justificar por qué el punto P equidistaba de los puntos extremos del segmento $\overline{MN}$, a partir de las medidas de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{NP}$, lo que les permitió sostener que las distancias eran iguales sin importar la ubicación del punto O.

En el problema "Construcción triángulo isósceles" los estudiantes se apoyaron en la igualdad de las medida de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ para sostener que el ABD era isósceles.

Las TIO, junto a los esquemas de utilización descritos, permitieron reconocer la transición de artefacto a instrumento. De una parte los estudiantes le atribuyeron al artefacto diferentes funciones que se vieron empleadas en la solución de la mayoría de los problemas abordados. Por otra, mientras los estudiantes interactuaron con el artefacto este influyó en ellos de tal forma que las TIO empleadas en la solución de unos problemas fueron trasladadas a la solución de otros.

5.1.3 Génesis del instrumento Circunferencia

En este análisis reconocemos la herramienta Circunferencia como un artefacto idóneo a transformarse en instrumento, porque durante el proceso de solución de algunos de los problemas se evidenció una interacción entre estudiante-artefacto que favoreció la solución de los mismos. Además, porque fue posible el reconocimiento de TIO y esquemas de utilización asociados al uso del artefacto tanto en los procesos de conjeturación como de justificación. Sin embargo, este artefacto hizo presencia en el trabajo realizado por los estudiantes como dos objetos distintos, como una herramienta tecnológica proporcionada por geogebra (herramienta circunferencia) y como un hecho geométrico o elemento del sistema teórico local construido (definición de circunferencia como el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto fijo).

La génesis instrumental que describiremos y que comprende tanto los procesos de instrumentalización como de instrumentación en la interacción de los estudiantes con el artefacto Circunferencia son producto, por un lado de las funciones que le atribuyeron los estudiantes al artefacto, es decir de las TIO registradas en la *tabla 15*, y por el otro de los esquemas de utilización que emergieron del conjunto de TIO y que revelan la influencia del artefacto sobre los estudiantes.

<table>
<tr><th colspan="3">Génesis del instrumento Circunferencia</th></tr>
<tr><th>Problema</th><th>Acción</th><th>Objetivo/ Técnica de instrumentación observable</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Conjunto de puntos</td><td>Construir circunferencia con cetro en el punto B y distancia uno de los puntos rojos</td><td>Determinar el lugar geométrico del conjunto de puntos que cumplía la condición “ser equidistantes al punto B”</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ubicar el conjunto de puntos sobre la circunferencia anterior</td><td>Formular una conjetura en relación a la ubicación de los puntos rojos y el punto B.</td></tr>
<tr><td>Justificar por qué el conjunto de puntos sobre la circunferencia equidistaban del punto B.</td></tr>
<tr><td>Proponer una definición de la figura geométrica obtenida.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Construcción de la mediatriz</td><td>Trazar una circunferencia con centro en el punto M y distancia el punto O sobre la recta que pasa por los puntos M y N</td><td>Construir la mediatriz del segmento $\overline{MN}$</td></tr>
<tr><td>Trazar otra circunferencia con la herramienta compás, tomando como distancia el radio de la circunferencia anterior y centro en el punto N</td><td>Construir la mediatriz del segmento $\overline{MN}$</td></tr>
<tr><td>Activar el rastro de los puntos de intersección de las dos circunferencias anteriores P y Q</td><td>Caracterizar la figura geométrica determinada por el rastro.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Construcción triángulo isósceles</td><td rowspan="2">Construir circunferencia con cetro en el punto A y distancia a un punto C sobre el segmento $\overline{AB}$ y otra con la herramienta compas, usando el mismo radio y ubicando el centro</td><td>Construir el triángulo isósceles ABD.</td></tr>
<tr><td>Justificar por qué los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ conservaban la misma longitud porque estos estaban determinados por radios de circunferencias congruentes.</td></tr>
</table>

	sobre el punto B	Justificar por qué el triángulo construido era isósceles.
Ángulo constante	Construir circunferencia con cetro en el punto F y distancia en el punto Q,	trazar una circunferencia que se ajustara a la traza que en la pantalla se apreciaba y luego de ello mover el punto Q a lo largo de esta circunferencia
	Construir circunferencia con cetro en el punto E y distancia en el punto Q.	
	construir circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{EF}$ y como radio el punto E	Formular una conjetura sobre el tipo de desplazamiento que debía realizarse sobre el punto Q para conserva la medida de 90° del el ángulo $\measuredangle EQF$
		Justificar que el ángulo recto se conservaba cuando este pertenecía a una circunferencia
Triangulo y sus mediatrices	Tomado como centro el punto A y distancia el punto F construir una primera circunferencia y la segunda tomando como centro el punto B y distancia el punto G.	Construir la mediatriz del segmento $\overline{AB}$
	Tomar como centro el punto C y distancia el punto I construyeron una tercera circunferencia y la cuarta tomando como centro el punto B y distancia el punto J	Construir la mediatriz del segmento $\overline{BC}$
	Tomar como centro el punto A y distancia el punto N construyeron una quinta circunferencia y la sexta tomando como centro el punto B y distancia el punto M	Construir la mediatriz del segmento $\overline{AC}$
		Formular una conjetura sobre la relación entre el punto P y los puntos A y C, a partir de la definición de circunferencia
		Justificar que "la recta que se formaba del trazo del punto P era la mediatriz del segmento $\overline{AC}$¨, hecho que garantizaba que el punto P equidistaba de los puntos A y C.
Cuadriláteros y sus mediatrices	Construir una circunferencia con centro en uno de los vértices de un cuadrilátero (punto A) y extremo el punto de intersección de las mediatrices (punto E)	Reconocer que los vértices $A, B, C, y\ D$ del cuadrilátero equidistaban al punto E de intersección de las mediatrices.
	Construir las circunferencias restantes con la herramienta compás, tomando como radio la distancia del punto A al punto E.	Formular una conjetura sobre la relación entre el punto E de intersección de las mediatrices y los vértices $A, B, C, y\ D$ del cuadrilátero, a partir de la definición de circunferencia.
		Justificar que el punto E de intersección de las mediatrices equidista de los vértices $A, B, C, y\ D$ del cuadrilátero.

Tabla 15. TIO Artefacto Circunferencia

Los esquemas de utilización inscritos en la génesis del artefacto Circunferencia, que corresponden a las TIO reportados y que son evidencia de la influencia que ejerció el artefacto sobre los estudiantes fueron: *Detectar invariantes, relaciones y* *propiedades., construcción de figuras geométricas*, *formular conjeturas y justificaciones tipo prueba.* A continuación describimos cada uno de ellos.

- *Detectar invariantes, relaciones y propiedades*. La primera aproximación al uso del artefacto Circunferencia, es realizada por los estudiantes durante la solución del problema “conjunto de puntos”. Luego de haber tomado la medida de los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle CAB$ y de arrastrar el punto C del tríangulo construido, los estudiantes encontraron que los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$ conservaban la misma

El segundo momento en que se empleó el artefacto en mención bajo el esquema que estamos describiendo se dio durante la solución del problema “construcción de la mediatriz”. Los estudiantes, luego de haber realizado su construcción con el método sugerido en el enunciado del problema, acuden al artefacto circunferencia como un hecho geométrico para caracterizar la mediatriz. Al activar el rastro de los puntos P y Q de intersección de las dos circunferencias, los estudiantes reconocieron que los puntos generados por el rastro estaban a la misma distancia de los puntos M y N.

El tercer momento se dio en la solución del problema “cuadrilátero y sus mediatrices”: los estudiantes, luego de realizar la construcción de los cuadriláteros y trazar las mediatrices de sus lados, arrastraron sus vértices hasta que las mediatrices de los lados se intersectaron en un único punto. Luego, para enunciar las propiedades que cumplían los vértices bajo la construcción realizada, los estudiantes se apoyaron en el artefacto Circunferencia y trazaron cuatro de ellas, ubicando como centro los vértices de cada cuadrilátero y como radio la distancia desde el punto de intersección de las mediatrices a cada uno de los vértices. Al realizar este procedimiento los estudiantes llegaron a proponer que el punto de intersección de las mediatrices estaba a la misma distancia de los vértices de cada cuadrilátero.

- *Construcción de figuras geométricas.* El uso del artefacto circunferencia alrededor de la emergencia de este esquema se presentó a partir de la solución del problema “construcción de la mediatriz”. En este problema la primera parte del enunciado se indicó un método para realizar la construcción de la mediatriz que requería trazar dos circunferencias y en la segunda se pidió a los estudiantes explorar la construcción así como observar sus relaciones y propiedades. Luego, en la solución de los problemas “construcción de triangulo isósceles” y “triángulo y sus mediatrices” los estudiantes adoptaron el método como una estrategia para construir tanto el triángulo isósceles dadas las relaciones y propiedades observadas en la solución del problema anterior, como para trazar las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ solicitadas en el enunciado del problema y la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ como estrategia para reportar la condición que cumplía el punto P cuando el punto B se movía.

- *Formular conjeturas.* Este esquema surgió en el proceso de solución de cuatro problemas y el artefacto fue empleado como un hecho geométrico, pues los estudiantes en su uso aludieron a las propiedades de la circunferencia para formular sus conjeturas. En la solución del problema “conjunto de puntos” los estudiantes llegaron a formular que si los puntos estaban sobre una misma circunferencia entonces estos se encontraban a la misma distancia del centro, punto B.

Por su parte, en la solución del problema “ángulo constante”, los estudiantes a partir de la exploración se apoyaron en el artefacto circunferencia para describir el movimiento que debía realizar el punto Q de tal forma que la medida del ángulo recto se conservara en 90°. Lo anterior les llevó a formular como conjetura que el ángulo $\measuredangle EQF$ conserva la medida de 90° cuando el punto Q se desplaza sobre una circunferencia.

De otro lado, en la solución del problema “triángulo y sus mediatrices”, los estudiantes luego de construir las circunferencias reportadas en las acciones de la *tabla 15*, usaron el artefacto Circunferencia como un elemento teórico para formular como conjetura que la recta que se formaba del trazo del punto P era la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

Por último, en la solución del problema “cuadriláteros y sus mediatrices” los estudiantes luego de enunciar las propiedades que cumplían los vértices bajo la construcción realizada, llegaron a proponer como conjetura que el punto E de intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ estaba a la misma distancia de los vértices $A, B, C, y\ D$ de cada cuadrilátero.

- *Justificaciones tipo Prueba.* El artefacto Circunferencia bajo este esquema fue empleado por los estudiantes como un elemento teórico, pues los estudiantes en la solución de los problemas reportados en la *tabla 15* y que comprendieron la emergencia de este esquema (Conjunto de puntos, Construcción triángulo isósceles, Triangulo y sus mediatrices, Cuadriláteros y sus mediatrices) se apoyaron en la igualdad de longitudes de los radios de una circunferencia como garante para justificar su conjeturas, señaladas en el esquena anterior (*Formular conjeturas*). Sin embargo, en la solución del problema “ángulo constante” el artefacto es empleado de manera distinta para justificar que el ángulo recto se conservaba cuando este pertenecía a una circunferencia. Ellos al construir la circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{EF}$ y como radio el punto E, arrastraron el punto Q sobre toda la circunferencia y reconocieron que al conservar el ángulo recto de un triángulo rectángulo, el vértice de dicho ángulo debía pertenecer a una circunferencia.

Al reconocer y examinar el desarrollo tanto de los procesos de *instrumentalización* como de *instrumentalización* en la interacción de los estudiantes con el artefacto Circunferencia, inferimos que el artefacto llegó a convertirse en un instrumento para los estudiantes. Esto porque los anteriores esquemas de utilización permitieron evidenciar un cambio de significado de parte de los estudiantes con respecto a la forma de emplear el artefacto Circunferencia. En su uso ellos le atribuyeron una doble aplicabilidad, lo emplearon como una herramienta tecnológica pero a su vez como un elemento del sistema teórico local. Así mismo, trasladaron su uso a la solución de diferentes problemas atribuyéndole diferentes funciones y estableciendo una relación dialéctica entre los elementos conceptuales de la circunferencia y la herramienta tecnológica.

5.1.4 Génesis del instrumento Mediatriz

El último artefacto que observamos con las características suficientes para transformarse en instrumento fue la mediatriz. De igual forma que los anteriores durante el proceso de solución de algunos de los problemas fue posible observar tanto las TIO y como los esquemas de utilización asociados al uso de este artefacto en los dos procesos de la actividad demostrativa. Pero además su uso se

Génesis del instrumento Mediatriz		
Problema	**Acción**	**Objetivo/ Técnica de instrumentación observable**
Equidistancia de puntos	Construir el lugar geométrico “mediatriz”	Construcción la mediatriz como lugar geométrico
Construcción de la mediatriz	Activar el rastro de los puntos de intersección de las circunferencias MP y NP	Caracterizar la figura geométrica determinada por el rastro.
Construcción triángulo isósceles	Trazar dos puntos A, B y usó el artefacto *Mediatriz* seleccionando los dos puntos A, B.	Trazar la mediatriz de los puntos A, B
	Ubicar un punto C sobre la mediatriz,	Construir el triángulo ABC
	arrastrar el punto C sobre la mediatriz	Corroborar que el punto C se mantiene sobre la mediatriz y por consiguiente los lados del triángulo ABC es isósceles.
		Justificar que los puntos que pertenecían a la mediatriz equidistaban de los vértices A y B del triángulo
Triangulo y sus mediatrices	Construir la mediatriz del segmento $\overline{AB}$	Trazar el punto P de intersección de las mediatrices para enunciar la condición que cumplía el punto P cuando el punto B se movía,
	Construir la mediatriz del segmento $\overline{BC}$	
	construir la mediatriz del segmento $\overline{AC}$	Justificar que el trazo del punto P determinaba la recta mediatriz del segmento $\overline{AC}$
Cuadriláteros y sus mediatrices	construcción del cuadrilátero $A, B, C, y\ D$ del cuadrilátero y las mediatrices de sus lados	Reconocer las propiedades que cumplían los vértices del cuadrilátero cando las mediatrices se intersectaban en un punto.
		Justificar que el punto E de intersección de las mediatrices equidista de los vértices $A, B, C, y\ D$ del cuadrilátero.

Tabla 16 TIO Artefacto Mediatriz

vio caracterizado como una herramienta tecnológica (herramienta mediatriz) y a la vez como un hecho geométrico (definición de mediatriz, como el lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos fijos).

La génesis instrumental que describimos en la tabla 16 reporta las TIO observadas*.*

Los esquemas de utilización que corresponden a la génesis de este artefacto, que corresponden a las TIO reportados y que son evidencia de la influencia que ejerció el artefacto sobre los estudiantes fueron: realizar *construcción de figuras geométricas*, *Detectar relaciones y propiedades.,* *corroborar conjeturas y justificaciones tipo prueba.* A continuación describimos cada uno de ellos.

- *Construcción de figuras geométricas.* la mediatriz alrededor de la emergencia de este esquema se presentó a partir de la solución de los problemas “Equidistancia de puntos” “Construcción de la mediatriz”. En estos dos problemas los estudiantes construyeron la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento. Luego de realizar su construcción, los estudiantes emplean el artefacto en el problema “construcción de triangulo isósceles” a partir de dos puntos fijos A y B para construir la mediatriz que sería empleada por ellos para construir el triángulo isósceles.

- *Detectar relaciones y propiedades*. El uso de este artefacto fue identificado durante el desarrollo de dos problemas “triángulo y sus mediatrices” y “cuadrilátero y sus mediatrices”. En el primero lo emplearon para dar a conocer que al arrastrar el punto B, el rastro que dejaba el punto P era una recta que pasaba por la mitad de AB. En el segundo, para reconocer que cuando las mediatrices de los lados del cuadrado $ABCD$ se intersectaban en un mismo punto, éste se encontraba a la misma distancia de los vértices del cuadrilátero.

- *Corroborar Conjetura:* luego de arrastrar el punto C sobre la mediatriz, los estudiantes corroboran que éste al mantenerse sobre la mediatriz los lados AB y BC del triángulo ABC son congruentes.

- *Justificaciones tipo Prueba.* El artefacto Mediatriz bajo este esquema fue empleado por los estudiantes como un elemento teórico, pues los estudiantes en la solución de los problemas reportados en la *tabla 16* y que comprendieron la emergencia de este esquema (Construcción triángulo isósceles, Triangulo y sus mediatrices, Cuadriláteros y sus mediatrices) se apoyaron en las relaciones y propiedades de este artefacto para justificar sus conjeturas.

Al reconocer y examinar el desarrollo tanto de los procesos de *instrumentalización* como de *instrumentalización* en la interacción de los estudiantes con el artefacto Mediatriz, observamos que el artefacto llegó a convertirse en un instrumento para los estudiantes. Esto porque en su uso le asignaron una doble aplicabilidad, lo emplearon como una herramienta tecnológica pero a su vez como un elemento del sistema teórico local para justificar. Así mismo, trasladaron su uso a la solución de diferentes problemas.

5.2 Mediación del SGD en la actividad demostrativa

De acuerdo con el análisis y los resultados que hemos venido presentando y a lo expuesto en nuestro marco teórico sobre la forma en que media el SGD en procesos como la conjeturación y justificación, a continuación puntualizamos sobre su mediación en cada proceso que se enmarca en la secuencia de problemas que fueron abordados por los estudiantes. Si bien hemos destacado aquellos artefactos que se transformaron en instrumentos, existieron otros que combinados con los instrumentos y las acciones de la actividad demostrativa (explicadas en el marco teórico), hicieron posible a los estudiantes formular conjeturas y sus respectivas justificaciones. En la <u>*tabla 17*</u> registramos los artefactos que mediaron en cada una de las acciones que apoyaron los procesos mencionados.

Artefactos / Act. Demost.		Artefactos empleados en la solución de cada problema						
		P. 1	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**
Acciones que apoyaron el proceso de Conjeturación	**Exploración Empírica**	Ag, Ae, Ae, Ag, **DL**	P, Sc, Cu, Ag, Cu, DL	Ae, Atr, Ag	Re, Se, **Ci,** Co, P	Ae,An, Ag, Ae, Atr,Cu, Re,Ae, Atr, **Ci,** Smc	**Me**, Mc, **Ci**, Re	**Me**
	Exploración Dinámica			Ae			Ag, Ag	Ate, Ag
	Detectar Invariante	Ae		Ate	An, Ate			
	Visualización	Ag, Ate, Ap, Ag	Cu, Ae	Ag				**Me**
	Formular de Conjetura	Ag. Ci	Cu, **DL**, Cu	Atr		Atr, **Ci**	**Ci**	Po
	Corroborar Conjetura		Cu, Re, **DL**	**DL**	**DL**, Ate, **DL,** Ate	**Ci,** Ate		**DL**
Acciones que apoyaron el proceso de Justificación	**Exploración Empírica**	Cu, Ag						
	Exploración Teórica				M		Mc, **Ci**	Po, **Me**, **Ci**
	Visualización						Atr	
	Selección de Elementos Empíricos		Rg		**DL**			**DL**
	Selección de Elementos Teóricos	**Ci**, Ag			**CI, Me**	**Ci**	**Ci**	**Ci**
	Formular la justificación	**Ci**	**DL**	**DL**	**Ci, DL, Me**	**Ci**	Mc, **Ci**	**Ci**
	Explicación de Validación	**Ci,** Ag	**DL**	**DL**	**DL**			
	Prueba				**Ci**, **Me**	**Ci**	Mc, **Ci**	**Ci**

Tabla 17.Mediación del SGD en la Actividad Demostrativa

De la información presentada en la taba realizamos las siguientes inferencias en cuanto a cada proceso.

5.2.1 Mediación del SGD en el proceso de conjeturación

Como lo podemos observar en la *tabla 17,* fue en el proceso de conjeturación donde hubo mayor presencia de la mediación de artefactos asociados a las acciones de este proceso.

De acuerdo al análisis presentado, las diferentes modalidades de arrastre fueron protagonistas en la interacción entre estudiantes y el conocimiento matemático, estas hicieron posible la detección de variantes e invariantes, así como de relaciones y propiedades que posteriormente se convertirían en conjeturas a justificar. Puntualmente, el Arrastre Errático (Ae) fue empleado cuando los estudiantes pretendían observar y caracterizar el rastro que determinaba el movimiento de los puntos pero no tenían claridad sobre cómo dirigir el artefacto; el Arrastre Guiado (Ag) se empleó cuando ellos tenían una intención previa de detectar relaciones y propiedades que dependían del movimiento realizado sobre determinado punto; el Arrastre de Test (Ate) se involucró al momento de arrastrar los vértices de una figura para detectar variantes e invariantes, lo que permitió a los estudiantes, en la solución de algunos problemas, corroborar sus conjeturas; finalmente, el Arrastre Traza (Atr) se usó en algunos casos en atención al enunciado del problema y en otros a una estrategia para hacer visible un lugar geométrico, dando a entender que reconocieron el uso, significado y pertinencia de este artefacto en estos contextos.

Otro artefacto con menos protagonismo, pero no con menos relevancia en la mediación de producción de conjeturas de carácter empírico, fue el artefacto Cuadrícula (Cu), aunque no es característico de los postulados de la geometría euclidiana, sirvió a los estudiantes como andamio para proponer que, por ejemplo, determinados puntos equidistaban de otros, pero también para corroborar su veracidad.

A su vez, el artefacto Distancia o Longitud (DL), que como ya se mencionó alcanzó el nivel de instrumento, en el proceso de conjeturación medió en la detección de invariantes en la solución de los dos primeros problemas. En otros problemas presentó una fuerte incidencia en la formulación y corroboración de conjeturas, cuando los estudiantes pretendían establecer relaciones de equidistancia entre puntos o entre longitudes.

Por su parte, Los artefactos Punto (P), Recta (Re), Circunferencia (Ci), Compás (Co), Semicircunferencia (Smc), Medio o Centro (Mc) y Mediatriz (Me), mediaron en el proceso de construcción de las figuras geométricas que soportaban el arrastre y por ende permitían también hallar relaciones, propiedades y proponer conjeturas.

También es de reconocer que el proceso de conjeturación se consolidó paulatinamente a lo largo de la solución de los problemas propuestos. Como lo podemos evidenciar en la solución de los problemas, este proceso tuvo una transición, desde la formulación de conjeturas apoyadas en evidencias empíricas, hasta su formulación con garantes del sistema teórico local construido. Dicho proceso conjugó tanto acciones de la actividad demostrativa como artefactos proporcionados por el SGD.

5.2.2 Mediación del SGD en el proceso de justificación.

Fruto del análisis realizado y de la síntesis de artefactos que mediaron en el proceso de justificación, que son presentados en la *tabla 17,* se evidenció que artefactos como, Distancia o Longitud, Circunferencia (Ci) y Mediatriz (Me) formaron parte representativa de la producción de justificaciones.

El artefacto Distancia o Longitud, que también se convirtió en instrumento, se vio involucrado en el proceso de solución de dos problemas cuyas justificaciones provinieron de fuentes no teóricas, lo que las enmarcó dentro de la justificación como E*xplicación de Validación.* El artefacto Circunferencia (Ci) que igualmente fue un instrumento, en sus dimensiones teórica e instrumental, se constituyó como un elemento del sistema teórico local, que apoyó las justificaciones de los estudiantes y que se denominaron en el análisis de acuerdo al constructo “actividad demostrativa”, como *Prueba.*

El artefacto Mediatriz (Me) también hizo parte fundamental en el proceso de solución de algunos problemas. Las relaciones y propiedades de este objeto geométrico fueron construidas durante la solución de dos problemas y empleadas en otros dos, para realizar las construcciones que apoyarían por un lado las construcciones y por el otro la producción de justificaciones a nivel teórico. Sin embargo, en la segunda parte del problema cuatro, se empleó directamente el artefacto para justificar, con base en la definición que habían propuesto durante la solución del problema dos.

En concordancia con el análisis fue posible establecer que la mediación del software de geometría dinámica promovió justificaciones por parte de los estudiantes, las cuales variaron, no sólo por los datos o las conclusiones a las que llegaban, sino que estas dependían del tipo de artefacto o instrumento, conjetura y garantes que se involucraban. Algunos artefactos alcanzaron el nivel de instrumentos al llegar hasta este proceso, mientras que algunos garantes eran de carácter formal y pertenecían a un sistema teórico, otros fueron proporcionados por fuentes no teóricas, a los que denominamos como evidencias empíricas.

5.2.3 Caracterización de la mediación del SGD en los procesos de conjeturación y justificación

De acuerdo a las categorías de análisis que habíamos propuesto en la metodología en relación a la Mediación Instrumental y a la presencia que tuvieron estos artefactos en el proceso de conjeturación para los estudiantes, proponemos la siguiente clasificación:

- Nivel de Ejecutabilidad: en esta categoría se ubican todos los artefactos puestos en juego durante los proceso de conjeturación y justificación (a excepción de la cuadrícula), ya que para estos estudiantes fue necesario aprender la sintaxis de GG para poder interactuar con él y realizar las construcciones geométricas.

- Nivel de Amplificación: En esta categoría se enmarcó la mediación de artefactos como Arrastre Errático, Arrastre de Test, Arrastre Traza, Simetría central, Cuadrícula, Semicircunferencia, Compás y Medio o Centro. Ellos fueron empleados por los estudiantes como apoyo en las diferentes construcciones para visualizar, reconocer relaciones, detectar invariantes, entre otros y no fueron observables como esquemas de utilización que produjeran alguna modificación en la estructura de pensamiento.

- Nivel de Re-organización cognitiva: En esta categoría se ubican los artefacto que observados a la luz del proceso de génesis instrumental lograron transformarse en instrumentos, para los estudiantes. Esto quiere decir que para ellos cobraron significado y les fue posible trasladarlos a la solución de otros problemas. estos son: Arrastre Guiado, Distancia o Longitud, Circunferencia y Mediatriz.

6. CONCLUSIONES

Para finalizar el estudio que hemos presentado a lo largo del documento damos a conocer las conclusiones que se derivan del mismo. Estas conclusiones son fruto del análisis y de los resultados expuestos en los dos capítulos anteriores y ofrecen una respuesta tanto a los objetivos como a la pregunta de investigación, propuestos para este estudio.

6.1 En relación con los objetivos y la pregunta de investigación

A lo largo de este estudio, en el que pretendíamos analizar cómo media un SGD en los procesos de conjeturación y justificación en geometría, logramos evidenciar que el uso del software en la solución de una secuencia de problemas, no solo permite al estudiante desarrollar diferentes acciones en el marco de la actividad demostrativa, sino que además, su mediación les permite ir más allá del procesos de conjeturación, permitiéndole formar justificaciones basados tanto en un sistema teórico local construido en comunidad, como en fuentes no teóricas.

Lo anterior fue posible observarlo gracias a que las propuestas teóricas “constructo actividad demostrativa”, desarrollada por el grupo Æ•G (Samper et al. 2013), y el Enfoque Instrumental que se enmarca dentro de la teoría de la Ergonomía Cognitiva propuesta por Rabardel (2002). Ambas lograron conjugarse tanto en el análisis como en los resultados para caracterizar el papel mediador del software. A lo largo de la implementación de la propuesta de aprendizaje se reconoció que no sólo los estudiantes lograron evolucionar en las justificaciones (pasar de un nivel no teórico a uno que sí lo era), sino que también lograron apropiarse de artefactos proporcionados por el software a tal grado que se convirtieron en instrumentos para ellos en el desarrollo de cada proceso de la actividad demostrativa. Dichos artefactos fueron Arrastre guiado, Distancia o Longitud y Circunferencia, su construcción y desarrollo se reconoció a la luz del proceso de génesis instrumental. Este involucró tanto las funciones que le dieron los estudiantes a los artefactos dentro de la solución de los problemas propuestos (*proceso de instrumentalización*), como las habilidades o esquemas de utilización que desarrollaron mientras hicieron uso de los artefactos (*proceso de instrumentación*). De la emergencia de los esquemas se destaca, que estos recayeron sobre las acciones de los procesos de la actividad demostrativa.

Con respecto a la pregunta de investigación, consideramos que estudiar la mediación del software a través del Enfoque Mediación Instrumental posibilitó el reconocimiento de algunas características del papel mediador del software en los procesos de la actividad demostrativa, tales como:

- Artefactos como el arrastre en sus diferentes modalidades, hacen posible la detección de variantes e invariantes, el reconocimiento de relaciones y propiedades y se inscriben en el nivel de amplificación, excepto el arrastre guiado que logra instrumentalizarse.
- Artefactos que proporcionan evidencia empírica tales como Distancia o Longitud, ángulo, entre otros, sirven de andamio para pasar a un nivel teórico y se ubica se inscriben en el nivel de re-organización cognitiva.
- Las construcciones y la posibilidad de su manipulación privilegia el reconocimiento de relaciones y propiedades que tienden a transformarse en conjeturas que luego son justificadas de manera deductiva como abductiva.
- Así como los estudiantes determinan qué funciones atribuirle a determinado artefacto, en su manipulación el artefacto también actúa sobre ellos permitiéndoles modificar la forma de usarlos y trasladarlos a la solución de diferentes problemas con naturaleza similar. Los artefactos que lograron ser transformados por los estudiantes en instrumentos se enmarcan en el nivel de re-organización cognitiva.
- Entre los estudiantes, el software y los elementos teóricos se establece una relación dialéctica, en la que la ejecutabilidad juega un papel predominante, pues a partir de la manipulación del SGD el estudiante aprende una sintaxis que le permite interactuar con los actores presentes.

De otro lado, La dificultad para expresar las ideas en lenguaje matemático fue una variable que se presentó y acotó el proceso de justificación, dado que las justificaciones logradas hubiesen podido ser expresadas por los estudiantes de una mejor manera. Sin embargo, resaltamos que pese a esta dificultad, se logró que los estudiantes pusiesen su atención en el desarrollo de procesos y no de contenidos, que en concordancia con las políticas educativas actuales y la necesidad de transformar las prácticas pedagógicas actuales, es un gran avance.

6.2 Preguntas que promueven futuras discusiones

El resultado de este estudio deja asuntos abiertos y que pueden ser tratados en posteriores investigaciones. Estos estudios se presentan a continuación a modo de preguntas:

- ¿Cómo se caracteriza la mediación del docente en el desarrollo de procesos de conjeturación y justificación, cuando media un software de geometría dinámica?
- ¿Cuáles son los alcances y limitaciones de la mediación del software de geometría dinámica en procesos de conjeturación y justificación?

- En la relación dialéctica entre estudiantes, software y los elementos teóricos de la geometría, ¿cómo se caracteriza el papel del estudiante en el marco de la actividad demostrativa?

Estos asuntos no fueron abordados en este trabajo puesto que sobrepasan los límites de los objetivos propuestos en el estudio. Sin embargo, consideramos que pueden ser útiles para estudios posteriores, ya que cuentan con una propuesta teórica y resultados que pueden ser ampliados o discutidos.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. *Cuadernos de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 1–15.

Artigue, M., Iranzo, N., Fortuny, J. M., Leung, A., Chan, Y., Lopez-Real, F., & Rabardel, P. (2011). Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra. *Cuadernos de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 91–103.

Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring: physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments. *CabriWorld 2001*, 1–26.

Arzarello, F., Bartolini, M., Leung, A., Mariotti, M., & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. In *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 97–143). Retrieved from http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Baccaglini-frank, M., & Mariotti, A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry : The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225–253. http://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Bartolini, M., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (1962), 746–783.

Bartolini, M., & Schoen, R. (2011). Lingguo bu and robert schoen geogebra for model-centered learning. In *Model-Centered Learning* (Lingguo Bu, pp. 1–6). Florida, USA: Sense Publishers.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703–724. http://doi.org/10.1080/0020739042000232556

Del Castillo, A., & Montiel, G. (2009). ¿ Artefacto O Instrumento? Esa Es La Pregunta. *Acta Latinoameticana de Matemática Educativa*, *22*, 459–468. Retrieved from http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(ADelCastillo-GMontiel2009a)-ALME22-.pdf

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., … Meagher, M. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89–132). Paris.

Flores, C., Gómez, A., & González, S. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. *V Foro de Investigación Educativa*, *5*, 473–477. Retrieved from http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/3331

Flores, J. (2015). Génesis Instrumental : El caso de la función cuadrática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *41*, 57–67.

Gal, H., & Linchevsk, L. (2010). Ver o no ver : análisis de las dificultades en geometría desde la perspectiva de la percepción visual. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 163–183.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 5–23. Retrieved from https://link.springer.com/article/10.1023/A:1012737223465

Hershkowits, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*, 61–76.

Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. *Computer Technology and the Teaching of Geometry*, 121–128.

Iranzo, Nuria y Fortuny, J. M. (2011). 6 . Influence of Geogebra on Problem. *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, 91–103.

Iranzo, N., & Fortuny, J. (2009). La Influencia Conjunta del Uso de Geogebra y Lápiz y Papel en la Adquisición de Competencias del Alumnado. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(3), 433–446.

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas*. *Repositorio académico de la Universidad de Chile*. Universidad de Chile.

Leung, A., Chan, Y., & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental Genesis in Dynamic Geometry Environments. *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: Technology Revisited*, *17*, 346–353. Retrieved from http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c65.pdf

Lingefjard, L. (2011). Rebirth of euclidean geometry? In *Model-centered mathematics learning using Geogebra* (pp. 205–215). Sense Publishers.

Mariotti, M. (2006). Prof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173–204). Rotterdam: Sense Publishers. Retrieved from http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=OTCsKu0BZ0kC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Handbook+of+Research+on+the+Psychology+of+Mathematics+Education+Past,+Present+and+Future&ots=4sJnBHNKGC&sig=imNVmKY4SWycDIp0AcBmeLjpRmM

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1–2), 25–53. http://doi.org/10.1023/A:1012733122556

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems : how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*, 441–452. http://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5

Martínez, P. C. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento Y Gestión: Revista de La División de Ciencias Administrativas de La Universidad Del Norte*, (20), 165–193. http://doi.org/10.1055/s-0029-1217568

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá. Retrieved from http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias Y Cuidadanas*, 46–95. Retrieved from http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moreno, L. (2001). Cognición, Mediación y tecnología. *Avance Y Perspectiva*, *20*, 65–68.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. *Memorias Del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Las Tecnologías Digitales En El Aula de Matemáticas*, *1*, MEN. Colombia, 81-86. Retrieved from http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo1.pdf

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional*, *53(2)*(1), 129–150.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Rabardel, P. (2002). *People and technology a cognitive: approach to contemporary instruments.* (<hal-01020705>, Ed.). Springer US. Retrieved from http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Samper, C., Molina, O., Perry, P., & Camargo, L. (2013). Geometría plana: un espacio de aprendizaje. In C. Samper & O. Molina (Eds.), (1st ed., pp. 14–32). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Retrieved from http://editorial.pedagogica.edu.co/docs/files/Geometria Plana-2.pdf

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5–27.

Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21–29.

SED. (2007). Componentes del pensamiento espacial. In H. Figueredo (Ed.), *Colegios Públicos de excelencia para Bogotá. Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático* (pp. 67–70). Bogotá.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students’ command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281–307. http://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (Vol. 12, pp. 307–313).

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, *9*(1), 77–101.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65–81.

ANEXOS

Anexo 1

Sistema de Gestión de la Calidad

FUNDACIÓN EDUCACIONAL ANA RESTREPO DEL CORRAL

GUÍA DE APRENDIZAJE No 1		CICLO	V
		PERIODO No	3
ASIGNATURA	GEOMETRÍA		
DOCENTES	TATIANA MARCELA ROJAS Y ELIZABETH MUÑOZ RAMIREZ		
ESTUDIANTES			

Código: GA-SED- LC-0
Realizó: Carmen.Samper. PROYECTO DMA-399-15
Revisó: E.M.R. y T.M.R.
Fecha: septiembre 8 de 2015
Versión: 1

Taller Introducción a GeoGebra

Reunidos en parejas, van a leer y seguir las instrucciones para que puedan comenzar a usar el programa GeoGebra que se va a usar de ahora en adelante en la clase de geometría. Encontrarán varias preguntas, que deben responder en una hoja que no será recogida por la profesora, pero deberán poder responderlas cuando se haga la puesta en común. También encontrarán varias tareas que deben realizar en el computador. En caso de no entender alguna instrucción, decirlo a la profesora.

Tarea 1. Iniciación

Para iniciar abran el programa GeoGebra. En la parte superior de la pantalla, aparecen escritas los siguientes títulos: **Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana, Ayuda**. Elijan **Opciones** y escojan, en el menú que se despliega, **Etiquetar o Rotulación**, y en este, la opción **Solo Puntos Nuevos**. De nuevo, elijan **Opciones**, y ahora en **Tamaño de Letra**, marcar **20 pt**.
Estos serán siempre los primeros pasos que realizarán cuando vayan a usar GeoGebra.

Tarea 2: Relaciones entre los elementos básicos de la geometría euclidiana plana

Los elementos básicos de la geometría euclidiana son punto, recta y plano. No se definen pero sí se representan. Vamos a descubrir las relaciones entre puntos y rectas. La pantalla de su computador representa un plano. Este va a contener todas las figuras geométricas que queramos representar.

En la segunda fila de la ventana, aparecen unos íconos con figuras geométricas. En estos íconos están almacenadas y organizadas las diferentes herramientas y funciones de GeoGebra. Elijan el segundo ícono, de izquierda a derecha, y desplieguen el menú, haciendo clic en la flechita que se encuentra en la esquina inferior derecha. Escojan **Punto**. Notarán que el ícono que le corresponde contiene un punto y la letra **A**. También notarán que al moverte hacia la pantalla, el cursor en forma de flecha adquiere la forma de una cruz.

1. Ubiquen el cursor en cualquier parte del plano, hagan clic. ¿Qué aparece? ¿Qué les dice esto sobre la relación entre los puntos y el plano?

Regresen a la fila de íconos y elige el primero (tiene representado una flecha que llamaremos cursor). Acérquense al punto que representaste en la pantalla. Al tocarlo, la cruz se convierte en flecha. En ese momento, hagan clic. Aparece una mano. Manteniendo oprimido, con el cursor 2 pueden mover (arrastrar) el punto sobre la pantalla. El punto que representaste es libre porque se puede mover sin depender del movimiento de otro objeto.

2. Representen varios puntos (5) en la pantalla. Arrástrenlos para que queden alineados.

a) ¿Realmente estarán todos en una recta?
b) ¿Podrían colocarlos para que sí lo estén?
c) ¿Cómo comprobar que sí está sucediendo?

3. Exploren los demás íconos para determinar si hay alguna herramienta que les sea útil para comprobar si están o no alineados. Si encuentran alguna, expliquen por qué les sirve.

4. Usen la herramienta con los puntos que representaron.

a) ¿Los puntos que alinearon están todos en una recta?
b) ¿Cuántos puntos sí quedaron en la recta?
c) ¿Cuáles de los puntos pueden arrastrar para colocarlos en la recta?
d) Fíjense en el movimiento de los puntos. ¿Todos se comportan igual con respecto a la recta?
e) ¿Hay puntos que al arrastrarlos mantienen alguna condición especial? ¿Qué condición?
f) ¿Por qué creen que tienen esa condición al arrastrarlos?

5. Si hay puntos que al arrastrarlos mantienen una condición especial, ¿qué relación existe entre ellos y la recta? ¿Qué idea les da esto sobre la recta? ¿Cuántos puntos puede tener una recta?

6. Abran un archivo nuevo, escogiendo, de la parte superior donde dice Archivo, la opción Nuevo. Seleccionen en el tercer ícono, de izquierda a derecha, la herramienta Recta. Tracen dos rectas. ¿Qué relaciones pueden existir entre ellas?

7. En el segundo ícono (de izquierda a derecha), escojan la opción **Punto en Objeto** y acérquense a una de las rectas.
   a) ¿Qué sucede al acercarse a la recta?
   b) Hagan clic cuando el cursor esté sobre la recta. ¿Qué sucede?
   c) ¿Es posible hacer que el punto que aparece pertenezca a las dos rectas? describan lo que hacen para que esto suceda.

8. Ahora, usando de nuevo el segundo ícono, elijan la herramienta **Intersección**. Acérquense a una de las rectas y den clic; luego acérquense a la otra recta y den clic. ¿Qué sucede? ¿El punto que aparece coincide con el anterior? ¿Se puede arrastrar?

9. Teniendo en cuenta lo que han hecho, ¿qué propiedad geométrica se evidencia entre dos rectas que se intersecan?

Tarea 3: Recta/Rayo/Segmento

Vamos a concentrarnos ahora en la recta.

10. Abran un archivo nuevo. Representen puntos A, B, C, D, E y F en la pantalla. Usen las herramientas contenidas en el tercer ícono, de izquierda a derecha, para representar con A y B una recta, con C y D un segmento, y con E y F una semirrecta. Completa el cuadro:

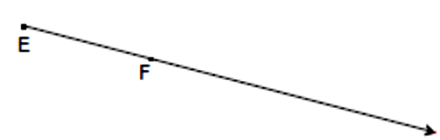
Diferencias entre las figuras	Semejanzas entre las figuras

11. Ahora, construyan un punto en cada una de las figuras geométricas construidas y con el cursor arrástrenlo. ¿Se cumple lo que describieron?

Usamos los siguientes símbolos para representar, cuando escribimos, cada una de estas figuras geométricas: la recta AB como $\overleftrightarrow{AB}$, el segmento CD, como $\overline{CD}$ y el rayo EF como $\overrightarrow{EF}$ si el punto inicial es E o como $\overrightarrow{FE}$ si el punto inicial es F. La representación que vamos a usar en el papel es:

$\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{CD}$



$\overrightarrow{EF}$

12. construyan ahora la $\overleftrightarrow{GH}$, el $\overline{GH}$ y el $\overline{HG}$. Con el cursor, acérquense a un punto entre G Y H, y den clic con el botón derecho del mouse. ¿Qué mensaje les da sobre el punto que tocaste? Muevan el cursor hacia la frase **Elegir otro más**. ¿Qué les indica sobre el punto que escogieron?

13. Escriban en forma general las relaciones que se pueden establecer para un punto entre G y H.

14. Ahora, con el cursor, acérquense a un punto que esté a un lado de G pero no entre G y H. De nuevo, haciendo clic derecho y repitiendo lo que hicieron anteriormente, indiquen qué mensaje les da GeoGebra sobre ese punto.

15. A partir de las respuestas anteriores, ¿qué se puede decir sobre los segmentos y los rayos respecto a la recta?

16. ¿Cómo definirías segmento y cómo rayo?

Anexo 2

Artefactos	PROBLEMA 1 - CONJUNTO DE PUNTOS													
Circunferencia (centro, punto)													x1	x
Objeto fijo											x1			
Aproximar						x								
Arr. Erratico		x												
Arr. Test				x2	x.									
Arr. Vinculado														
Arr. Traza														
Arr. Guiado	x.			x1			x	x	x	x	x2	X1	x2	
Cuadricula									x					
Construir														
Representación gráfica														
Distancia o Longitud												X2		
Acciones de la actividad demostrativa	Exp. (C).	Exp. (C).	Det. Inv.	Ver. Inv.	Ver. Inv.	Vis. (C).	For. Con.	Exp. Emp. (C	Exp. (J).	Vis. (J).	Vis. (J).	Exp. Emp. (J).	Selec. Elem. Emp.	Prueba

Artefactos	PROBLEMA 2 - EQUIDISTANCIA DE PUNTOS																
Arr. Erratico				X	X												
Poligono																	X
Recta																X1	
Segmento															X		
Arr. Guiado												X					
Aproximar									X				X				
Distancia o Longitud							X				X					X3	
Objeto fijo					X												
Cuadricula			X					X						X			
Punto	X									X				X		X2	
Simetria central		X															
Acciones de la actividad demostrativa	Exp. Emp. (C)	Exp. Emp. (C)	Vis. (C).	Vis. (C).	For. Con.	Explic. Valid.	Explic. Valid.	Exp. Emp. (C)	Vis. (C).	Exp. Emp. (C)	Exp. Emp. (C)	Exp. Emp. (C)	Vis. (C).	For. Conj.	Corr. Conj.	Corr. Conj.	Explic. Valid.
Convenciones Word		1		2	3					4							

ARTEFACTO	PROBLEMA 3 - CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIATRIZ								
Aproximar									
Arr. Erratico	x1						x1		
Arr.Test				x					
Arr.Traza	x2	x							
Arr.Guiado	x2		x					x2	
Representación gráfica					x	x			
Distancia o Longitud									x
ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA	Exp. (C).	Det. Inv.	Ver. Inv.	For. Conj.	Vis. (J).	Selec. Elem. Emp.	Exp. (C).	For. Conj.	Ver. Inv.

Artefactos	PROBLEMA 4 PARTE 1 - CONSTRUCCIÓN TRIÁNGULO ISÓSCELES													
Aproximar														X
Distancia o Longitud												X		
Arr.Test											X		X	
Polígono										X				
Intersección							X							
Compás						X								
Circunferencia (centro, punto)					X									
Segmento				X				X	X					
Recta			X											
Punto	X	X												
Acciones de la actividad demostrativa	Exp. Emp. (C	Exp. Emp. (C	Exp. Emp. (C	Exp. Emp. (C	Exp. Emp. (C	Exp. Emp. (C	Exp. Emp. (C	Exp. Teó. (C	Exp. Teó. (C)	Exp. Teó. (C)	Ver. Inv.	Corr. Conj.	Corr. Conj.	Vis. (C).

Artefactos	PROBLEMA 4 PARTE 2 - CONSTRUCCIÓN TRIÁNGULO ISÓSCELES									
Arr.Guiado				X					X	
Ángulo								X		
Distancia o Longitud					X					
Arr.Test						X	X			X
Polígono			X							
Punto	X	X								
Acciones de la actividad demostrativa	Exp. Teó. (C)	Exp. Teó. (C)	Exp. (J).	Corr. Conj.	Corr. Conj.	Corr. Conj.	Corr. Conj.	Det. Inv.	Det. Inv.	Ver. Inv.

Artefactos	PROBLEMA 5 - ÁNGULO CONSTANTE						
Ángulo	x2						
Objeto fijo							
Aproximar							
Arr. Erratico	x1						
Arr.Test							
Arr.Vinculado							
Arr.Traza		x		x	x	x	x2
Arr.Guiado	x3						
Cuadrícula			x1				
Recta			x2				
Circunferencia (centro, punto)							x1
Distancia o Longitud							
ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA	Exp. (C).	Exp. Din. (C)	Exp. (C).	Exp. Emp. (C)	For. Conj.	Corr. Conj.	Corr. Conj.

Artefactos	PROBLEMA 6 - TRIÁNGULO Y SU MEDIATRICES																			
Polígono																X				
Recta										X			X							X
Circunferencia (centro, punto)									X			X							X	
Medio o Centro								X			X							X		
Objeto fijo							X													
Segmento						X										X				
Arr.Traza															X					
Arr.Guiado					X									X						
Aproximar			X																	
Mediatriz		X																		
Punto	X			X																
Acciones de la actividad demostrativa	Exp. Emp. (	Exp. Emp. (	Vis. (C	Exp. Emp. (	Exp. Din. (	Exp. Emp. (	Vis. (C	Exp. Emp. (	Exp. Emp. (	Exp. Emp. (	Exp. Emp. (	Exp. Emp. (	Exp. Emp. (	Vis. (C).	Det. Inv.	Corr. Conj.	Corr. Conj.	Prueba	Prueba	Prueba

ARTEFACTO	PROBLEMA 7 - CUADRILÁTERO Y SUS MEDIATRICES						
Compás						x2	
Circunferencia (centro, punto)						x1	
Aproximar							
Arr. Erratico							
Arr.Test				x2			
Arr.Traza							
Arr.Guiado	x	x2					
Representación gráfica		x1	x	x1			x
Distancia o Longitud					x		
Acciones de la actividad demostrativa	Exp. (C).	Exp. Teó. (C)	Selec. Elem. Emp.	For. Conj.	Corr. Conj.	Selec. Elem. Teó.	Form. Just.

Problemas	ACCIONES Y ARTEFACTOS QUE APOYAN EL PROCESO DE CONJETURACIÓN							
	Exploración Empírica (Ee)	Exploración Dinámica (Ed)	Exploración Teórica (Et)	Verificar Invariante (Vin)	Detectar Invariante (Di)	Visualización (Vi)	Formular de Conjetura (Fc)	Corroborar Conjetura (Cc)
Problema 1	[Ee, Ag], [Ee, Ae], [Ee, Ae], [Ee, Ag], [Ee, DL],				[Di, Ae]	[Vi, Ag], [Vi, Ate], [Vi,Ap], [Vi, Ag],	[Fc, Ag], [Fc, Ci]	
Problema 2	[Ee, P], [Ee, Sc], [Ee, Cu], [Ee, Ag],[Ee, Cu].			[Vin,Rg]	[Di, DL]	[Vi, Cu], [Vi, Ae],	[Fc, Cu], [Fc, DL], [Fc, Cu]	[Cc, Cu], [Cc, Re], [Cc, DL]
Problema 3	[Ee, Ae], [Ee, Atr], [Ee,Ag]	[Ed,Ae]				[Vi, Ag]	[Fc,Atr]	[Cc,DL]
Problema 4	[Ee, Re], [Ee, Se], [Ee, Cir], [Ee, Co] y [Ee, P]				[Di, An], [Di, Ag]			[Cc, DL], [Cc, Ate], [Cc, DL], [Cc, Ate]
Problema 5	[Ee,Ae], [Ee,An], [Ee,Ag], [Ee,Ae], [Ee,Atr], [Ee,Cu], [Ee,Re], [Ee, Ae],[Ee,Atr], [Ee, Ci], [Ee, Smc]						[Fc,Atr], [Fc, Ci]	[Cc,Ate] [Fc,Ci]
Problema 6	[Ee, Me], [Ee, Mc], [Ee, Ci], [Ee, Re].	[Ed, Ag], [Ed, Ag]					[Fc, Ci]	
Problema 7	[Ee, Se], [Ee, Me], [Ee, Se]	[Ed,Ate], [Ed, Ag]				[Vi, Me]	[Fc, Po]	[Cc, DL]

	ACCIONES Y ARTEFACTOS QUE APOYAN EL PROCESO DE JUSTIFICACIÓN								
	Exploración Empírica (Ee)	Exploración Dinámica (Ed)	Exploración Teórica (Et)	Visualización (Vi)	Selección de Elementos Empíricos (See)	Selección de Elementos Teóricos (Set)	Formular la justificación (Fj)	Explicación de Validación (Ev)	Prueba (Pr)
Problema 1	[Ee, Cu], [Ee, Ag],				,	[Set,Ci], [Set,Ag]	[Fj,Ci]	[Ev,Ci], [Ev, Ag]	
Problema 2					[See,Rg]		[Fj,DL]	[Ev, DL]	
Problema 3							[Fj,DL]	[Ev,DL]	
Problema 4	[Ee, Po]		[Et, M].		[See,DL]	[Set,CI], [Set,Me]	[Fj, Ci], [Fj,DL], [Fj, Me]	[Ev, DL]	[Pr, Ci], [Pr, Me]
Problema 5						[Set,Ci]	[Fj, Ci]		[Pr, Ci],
Problema 6			[Et, Mc], [Et, Ci]	[Vi, Atr]		[Set, Ci]	[Fj,Ci]		[Pr, Mc], [Pr, Ci]
Problema 7			[Et,Po], [Et, Me], [Et, Ci]		[See, DL]	[Set, Ci]	[Fj,Ci]		[Pr, Ci]