DIFERENCIAS ENTRE NÚMERO RACIONAL, NÚMERO FRACCIONARIO, NÚMERO DECIMAL, EXPRESIÓN DECIMAL Y FRACCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE FUTUROS LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

CAMILO IGNACIO CAMARGO MARÍN

PABLO ANDRÉS BELTRÁN SOSA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

DIFERENCIAS ENTRE NÚMERO RACIONAL, NÚMERO FRACCIONARIO, NÚMERO DECIMAL, EXPRESIÓN DECIMAL Y FRACCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE FUTUROS LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

CAMILO IGNACIO CAMARGO MARÍN

PABLO ANDRÉS BELTRÁN SOSA

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas.

Asesora:

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

Directora del trabajo de grado

Jurado 1

Jurado 2

Dedicatoria

A Dios quien ha sido la fortaleza y la luz en el camino de mi vida,

A mí amada madre quien ha entregado lo humanamente posible por el bienestar de sus hijos, dándonos su amor y apoyo incondicional durante estos años vividos,

A mi padre quien ha sido un apoyo en el transcurso de mi formación profesional,

A mi hermano, quien desde el cielo estará orgulloso por este logro en mi vida,

Y con especial cariño a mis hermanas por todos los momentos compartidos.

Pablo Andrés Beltrán Sosa

A mi mamá por compartir nuevamente una etapa de mi vida personal y profesional,

A los profesores de la licenciatura en Matemáticas con quienes he tenido la oportunidad de interactuar en algún momento,

A quienes fueron compañeros de clase y hoy día ya son Licenciados en Matemáticas.

A mi ciudad natal, Bogotá que me dio la fortuna de conocer y cumplir una de tantas metas en mi vida personal y profesional,

A mis compañeros y compañeras de la Universidad Pedagógica Nacional que comparten conmigo la satisfacción de una meta alcanzada,

Camilo Ignacio Camargo Marín.

Agradecimientos

A mi Madre Hermosa y ejemplar, que me dio su apoyo incondicional en el transcurso de la carrera y en la elaboración de este trabajo,

A mi padre por estar presente en la construcción de este documento.

A mis hermanas Lucy y Edilsa, quienes con sus consejos siempre han constituido un camino hacia esta bella profesión,

A mi compañero Camilo, por ser un apoyo incondicional en este trabajo de grado y en la universidad, mostrando su fiel amistad, sinceridad y carisma,

A la señora Leonor quien con su carisma y cordialidad constituyó momentos agradables en la construcción de este trabajo de grado,

A la profesora Lyda Mora quien además de brindarnos un apoyo incondicional en el presente trabajo de grado, me aportó con su enseñanza y formación íntegra en todas las áreas del conocimiento Matemático y Didáctico, estableciendo un ejemplo a seguir en la formación profesional y académica.

A todos los profesores del Departamento de Matemáticas, que en algún momento de la carrera me instruyeron en clase y formaron académicamente para cuestionar y proponer nuevas estrategias en la educación matemática.

A mis compañeros de universidad, que sin duda alguna contribuyeron en la elaboración de este documento.

Pablo Andrés Beltrán Sosa

A mi mamá y a mi papá quienes han sido mi motivación principal para mejorar en mi vida personal y profesional, a mis hermanos Felipe, Santiago y Oscar quienes con sus experiencias y consejos han construido conmigo una relación de apoyo y amistad ,

A mi compañero Pablo, que ha sido un excelente compañero, amigo y colega en el transcurso de mi formación como docente y en el desarrollo de este trabajo de grado,

A la señora Nelly quien nos abrió las puertas de su casa como lugar de encuentro para la elaboración de este trabajo.

A mis compañeros del programa quienes sin duda contribuyeron a enriquecer mis conocimientos a partir de sus experiencias profesionales,

A la profesora Lyda Mora quien aparte de ser un ejemplo a seguir nos apoyó incondicionalmente en el desarrollo de este trabajo a partir de sus experiencias y motivaciones en pro de mejorar cada día como docentes,

A los profesores de la Licenciatura en Matemáticas quienes fomentaron e incentivaron un sentimiento de admiración y de ejemplo a seguir como docente.

Camilo Ignacio Camargo Marín.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción desde la perspectiva de futuros licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.
Autor(es)	BELTRAN SOSA PABLO ANDRÉS CAMARGO MARÍN CAMILO IGNACIO
Director	LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 98 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	*Número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal, fracción.*

2. Descripción
Se presenta el siguiente trabajo de grado en el marco de la Licenciatura en Matemáticas, cuyo objetivo es identificar las diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción, así como las nociones que tienen los estudiantes de últimos semestres en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, de los conceptos matemáticos antes mencionados. Este trabajo de grado contempla, un estudio de los números racionales y sus representaciones en la historia, un análisis a las definiciones dadas en los sitios web, libros de textos y libros universitarios de matemáticas, así como la metodología llevada a cabo para determinar cuáles son las ideas que circulan en los estudiantes de últimos semestres de la Licenciatura en Matemáticas acerca de los términos antes mencionados.

3. Fuentes
A continuación se listan las principales fuentes usadas en el desarrollo del presente trabajo:

Anacona, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática., 8(1), 30-46.

Ardila, R.,Castiblanco, A., Perez, M&Samper, C. (2004). *Espiral 6*. Bogotá: Editorial Norma.

Boyer, C. (1992).Historia de la matemática. Madrid. Alianza Editorial.

Burton, D. (2010). *The History of Mathematics: An Introduction* (7 ed.). McGraw-Hill.

Camargo, L.,Garcia, G.,Leguizamon, C.,Samper, C&Serrano, C. (2003). *Alfa con Estándares 6*. Bogotá: Editorial Norma.

Centeno, J. (1988). *Números Decimales ¿Por qué? Y ¿Para qué?* Madrid, España: Editorial Sintesis.

Gustafson, D. &Frisk, P. (2006) *Álgebra intermedia*Mexico: Thomson Learning

Machado, N., Forero, N & Mora, A. (1995). *Procesos Matemáticos 6.*Bogotá: Editorial Santillana.

Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas. (2010). *Criterios para la realización y evaluación de trabajos de grado*. Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional.

Triana, J & Manrique, J. (2013). *El Papel de la Historia del Álgebra en un Curso de Didáctica para la Formación Inicial de profesores de Matemáticas.* Trabajo de grado para optar por el título de Magister en docencia de las Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

4. Contenidos
El presente trabajo de grado se ha ordenado en cinco capítulos de la siguiente manera: En el ***capítulo uno,*** denominado preliminares, se plantea la justificación del trabajo de grado enmarcando la importancia y relevancia que tienen la elaboración de este documento, posteriormente se presentan los objetivos generales y específicos. El **capítulo dos** contiene datos históricos que exponen el desarrollo del número racional en relación con algunos términos asociados. El **capítulo tres,** incluye un estudio acerca de las definiciones de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción en los *documentos de circulación (Fuentes de información)* que fueron seleccionados y organizados en sitios web, textos escolares y textos universitarios. Las ideas encontradas dan lugar a algunas interpretaciones entre el objeto y dichos términos, finalizando este capítulo se describen las posibles concepciones referentes a las ideas encontradas en cada documento de circulación, resaltando algunos aspectos. En el **capítulo cuatro** se muestra la metodología utilizada para el cumplimiento del objetivo general, en este sentido se presenta el cuestionario que se aplicó a los estudiantes de último semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional así como el análisis realizado a partir de las respuestas obtenidas. Con estas respuestas se evidencia y analiza la perspectiva de los futuros Licenciados en Matemáticas encuestados, acerca del número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción, a partir de ciertas unidades de análisis determinadas. El **capítulo cinco** muestra las conclusiones cada capítulo. Finalmente se presenta la bibliografía y anexos de los capítulos en los cuales fue conveniente hacer caridad frente a algunos contenidos establecidos.

5. Metodología
La metodología en este trabajo de grado se enmarcó primeramente en la consulta de

documentos de historia en las matemáticas para detallar cómo se habían trabajado los números racionales y sus términos asociados. Luego se consultaron las definiciones de los términos antes mencionados en los documentos de circulación (Sitios web, textos escolares en matemáticas, textos universitarios en matemáticas), para detallar las características y posibles errores en la interpretación de dichos términos, esto se hizo con el fin de elaborar una herramienta (cuestionario) para los estudiantes de últimos semestres (noveno y décimo) de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual se aplicó y se analizó estableciendo ciertas unidades de análisis que hacen referencia a la interpretación del conocimiento matemático, didáctico y curricular, lo cual permitió generar conclusiones y reflexiones que nos permiten inferir sobre el tratamiento de los objetos matemáticos en la escuela y la manera en que se abordan.

6. Conclusiones

La mirada histórica que se realizó en este trabajo, en principio no presenta alguna definición de número racional pero alude a términos que están asociados a este objeto matemático, se encuentran ideas referentes a expresiones sexagesimales, expresiones decimales y fracciones, desarrolladas por diferentes civilizaciones.

Observamos que en nuestro contexto educativo, la educación primaria, secundaria y media en el marco de abordar el concepto de número racional a partir de las propuestas curriculares del Ministerio de Educación Nacional, se ven inmersos en un desarrollo que es análogo al proceso histórico, naturalmente primero y al pasar de los años se habla de términos asociados a este concepto y posteriormente en grado séptimo se aborda la definición de número racional. En la historia aparece un orden cronológico en cuanto a; primero se estudian los términos que consideramos están asociados al número racional que podrían tratarse de ideas intuitivas y finalmente una alusión a la definición, pero explícitamente en el desarrollo de las "civilizaciones" no hay datos que muestren una definición próxima a la que tenemos hoy en día de número racional, sin embargo evidencian un desarrollo ordenado por sus términos asociados y finalmente por la definición de nuestro objeto de estudio.

Al consultar la definición de número racional en los sitios web, se encontraron algunos aspectos que se refieren a su escritura o representación, a las características del número racional y al conjunto de los números racionales, de lo cual se concluye, según la interpretación de los autores, que número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción son sinónimos de número racional, es decir aparentemente se observa, de manera general, que según la información presentada, un número racional es definido similarmente que sus términos asociados.

En relación con los resultados obtenidos en el cuestionario, como maestros en formación concluimos acerca de la enseñanza de objetos matemáticos, en cuanto al ¿Por qué? no enseñamos los conceptos como deben ser y preferimos definiciones o nociones que están "acordes" al nivel de estudio de los estudiantes, desconociendo el supuesto nivel cognitivo del que habla Piaget en el sujeto que aprende. No obstante también surgen dudas como ¿Los estudiantes de secundaria entenderán la definición de número racional como clases de equivalencia?, ¿Cuáles es la noción de número racional que tienen estudiantes de grados superiores a octavo?, ¿Por qué se opta por definiciones de los conceptos matemáticos según el nivel en el que se encuentra el estudiante?

Identificamos que muchos de nosotros como futuros docentes aún no tenemos claridad acerca de la definición de objetos matemáticos, como los tratados en este trabajo de grado y esto puede generar cantidad de errores, dificultades y obstáculos tanto en el estudiante como el docente a cargo de la clase de matemáticas.

Elaborado por:	Pablo Andrés Beltrán Sosa; Camilo Ignacio Camargo Marín.
Revisado por:	Lyda Constanza Mora Mendieta

Fecha de elaboración del Resumen:	27	10	2013

Tabla de Contenido

Tabla de Ilustraciones

Introducción

Este trabajo surge por el interés de los autores en identificar cuál es la perspectiva de los futuros Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional acerca del número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción, teniendo como hipótesis que falta claridad en los significados del objeto matemático y sus términos asociados.

Con base en lo anterior, en el capítulo uno se establece los objetivos y la justificación. En el capítulo dos se ubican algunos datos históricos que exponen el desarrollo del número racional a partir de términos asociados mostrando ideas que se relacionan hoy en día con el objeto matemático, encontrando diferentes tipos de representaciones y características propias del número racional.

A partir de lo anterior cabe señalar que acerca de número racional se puede obtener información variada en los documentos de circulación (Sitios web, textos escolares y textos universitarios), estas fuentes de consulta brindan cualquier tipo de significados, algunos definen al objeto matemático de forma correcta y otros presentan información que da lugar a errores. De acuerdo con esto en el capítulo tres se plasman las ideas encontradas en algunos documentos de circulación seleccionados (por mayor frecuencia de consulta) acerca de número racional y sus términos asociados, estas ideas dan lugar a algunas interpretaciones de los objetos de estudio, permitiendo así realizar un análisis de sus posibles concepciones que se hallan acerca del objeto matemático ya mencionado y la interpretación que un estudiante puede darle a las concepciones allí encontradas, que pueden traer consigo errores que son ejemplificados en cada documento de circulación, resaltando aspectos llamativos de cada idea.

Basado en los dos capítulos anteriores se realiza un cuestionario cuyo fin es aplicarlo a los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para interpretar qué entienden los maestros en formación por los objetos matemáticos que se estudian en este trabajo; es por ello que en el capítulo cuatro se presenta la elaboración de dicho cuestionario justificando el ¿Por qué? de cada pregunta realizada, basándose en algunas definiciones que han sido de estudio en el capítulo tres, seguidamente se muestra la metodología en la que se lleva a cabo la aplicación de la encuesta y finalmente se encuentra un proceso de análisis que se hace a partir de tres criterios (unidades de análisis, justificación de respuestas, concepciones en los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas) que se desarrollan según las respuestas dadas a cada pregunta.

En el capítulo cinco se ubican la conclusiones correspondientes a los capítulos 2, 3 y 4 que determinan la realización de este trabajo, dichas conclusiones se encaminan a recomendar una enseñanza y aprendizaje del número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción reconociendo la diferencia entre cada término.

Finalmente se presenta la bibliografía y anexos de los capítulos en los cuales fue conveniente hacer claridad frente a algunos contenidos establecidos.

1. Preliminares

1.1 Objetivos

General

Identificar la noción que tienen los estudiantes de últimos semestres (noveno y décimo) de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional acerca de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción.

Específicos

- Identificar en la historia términos asociados a la noción de número racional mediante fuentes que se refieran al tema.

- Distinguir los números racionales de sus formas de representación.

- Analizar las diferencias existentes entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción a partir de conceptos referidos en documentos de circulación con el fin de diseñar una encuesta que permita evidenciar las nociones que tienen los futuros Licenciados en Matemáticas acerca de número racional y sus términos asociados.

- Sintetizar la información recolectada en la aplicación de las encuestas para tipificar las diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción que tienen los futuros licenciados en matemáticas.

- Proponer definiciones de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción fundamentadas a partir de textos matemáticos y conocimientos propios.

1.2. Justificación

Este trabajo surge por el interés de los autores en reconocer las diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción en función de fortalecer las ideas que se tenían sobre el objeto matemático y sus términos asociados los cuales fueron abordados en la formación inicial de profesores en matemáticas, asimismo es importante mejorar la conceptualización de este objeto matemático y entender su relación con actividades propias de la vida escolar de las aulas de primaria, secundaria, media y primeros cursos universitarios, en el rol profesional de un maestro de Matemáticas la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático tiene consecuencias, si se tiene una definición adecuada entonces se tendrán resultados favorables en cuanto a la adquisición y comprensión de términos asociados al objeto que se enseña, reconocer entonces las diferencias entre número racional al cual llamamos objeto matemático y sus términos asociados (número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción) es naturalmente una de las actividades propias del profesor de matemáticas que cobran importancia en la práctica docente, en la puesta en escena, mejor dicho en el proceso de enseñanza y aprendizaje que es llevado a la vida escolar.

Como futuros egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional este trabajo resulta útil porque es una propuesta acorde con la gestión de conocimientos matemáticos y didácticos que promueven una actitud reflexiva en cuanto al conocimiento, fortalecimiento y claridad del concepto de número racional. También permite reconocer las diferencias entre ciertos términos asociados a los números racionales como número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción con el fin de mejorar la conceptualización que se tenía sobre estos objetos matemáticos propios de la vida escolar de las aulas de primaria, secundaria, media y primeros cursos universitarios y a la vez, identificar cuáles son las ideas, acerca de estos términos, que circulan en los futuros Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional teniendo como hipótesis que falta claridad en los significados de estos objetos.

Como estudiantes y futuros docentes este trabajo nos permite revisar y fortalecer las ideas que se tienen sobre el número racional y sus términos asociados orientando procesos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propios de nuestro campo de acción y asumiendo un compromiso con las situaciones educativas relacionadas con la formación inicial de profesores en matemáticas y la posterior práctica docente en la educación básica y media, e informales, con lo cual la perspectiva del futuro Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se ve inmersa en su rol profesional.

Como profesionales de la Educación Matemática enseñamos un conocimiento que favorece su aprendizaje en cuanto a la comprensión y el fortalecimiento de ideas que se tienen acerca del número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción, teniendo la claridad de el objeto matemático y de sus términos asociados, por tanto involucramos ambientes de aprendizaje en los que se genera la comunicación de dicho conocimiento como el quehacer propio de las matemáticas, en vista de la formación inicial integral del profesor de Matemáticas de Educación Media se aborda el proceso de enseñanza y aprendizaje relacionado con el número racional y sus términos asociados en aras de proveer un fortalecimiento en las ideas previas acerca del objeto matemático y su adecuada enseñanza en la práctica docente.

2. Términos asociados a los números racionales en la Historia de las Matemáticas y definiciones

La información acerca de los números racionales y algunos de sus términos asociados, entre estos, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción, se consolidan en este capítulo como objeto de estudio. Las ideas, definiciones y ejemplos encontrados son abordados desde una mirada histórica de las Matemáticas como herramienta. Para eso se realiza una consulta en textos de Historia de las Matemáticas como fuentes que se enmarcan en tres tipos; primarias, secundarias y terciarias (aludiendo a lo presentado por Triana y Manrique, 2013), la primera hace referencia a fuentes originales que en este trabajo de grado no se abordaron, en segunda se citan documentos originales y la tercera se refiere a fuentes didácticas que tienen que ver con una perspectiva encaminada hacia la originalidad de la historia en cuestión y su contenido didáctico. Especialmente en este capítulo se propone una mirada histórica la cual es contemplada desde fuentes secundarias y terciarias que están enfocadas al estudio de una noción, en este caso la de número racional y sus términos asociados.

El estudio histórico acerca de la noción de número racional está intencionado a reconocer aspectos que puedan caracterizar dicho concepto, mostrando su naturaleza y descripción a partir de la apropiación que se da en un tipo de historia fundamentada desde fuentes secundarias y terciarias, tomando como referencia algunas obras históricas que aluden a la noción de número racional enfocadas a reconocer su evolución a partir de la historia.

En este capítulo incluimos la Historia de algunos contenidos matemáticos referidos al tema que nos ocupa y la intervención de procesos culturales en la Historia de las Matemáticas específicamente respecto al número racional, reconocemos la incidencia de las culturas y las civilizaciones sobre la noción de número racional en cuanto a su sistema de numeración y forma de escribir, por otra parte consideramos que los detalles históricos de este trabajo están enfocados a la historia, que según Grattan-Guinness (2004) va encaminada a detalles evidenciados en el desarrollo de la noción, este estudio histórico es planteado desde una mirada de historia cultural como lo indican Triana y Manrique (2013) tomando como referencias los documentos consultados en los cuales evidenciamos la intervención de civilizaciones referidas a los aportes que realizan para enriquecer la noción de número racional.

Se reitera entonces que se utilizará la Historia de la Matemática como una herramienta y no como un fin, esta herramienta permite conocer el desarrollo del concepto de los números racionales y para ello es importante plasmar los registros históricos que den prueba de los términos asociados al número racional, puesto que desde allí se evidencia la relación entre el concepto matemático y sus términos asociados, en vista de esta consulta en este capítulo se reconocen desde la historia definiciones y ejemplos para dichos términos.

Enseguida se mostrará, a partir de la historia, detalles del desarrollo de los números racionales y sus términos asociados basado en el estudio fundamentado de libros de historia de las matemáticas o bien textos en los cuales hacen referencia a datos históricos cuyos autores son *Boyer*, *Smith*, *Cajori*, *e*ntre otros. Los estudios plasmados en este trabajo se basan en las representaciones, términos y nombres que se le atribuyeron a la época correspondiente.

2.1 Como Fracciones

El primer término asociado a los números racionales que aparece en la historia es la palabra *fracción*. El nombre de fracción nace en el libro de aritmética de "*Al-Huwarizmi"* quien usaba la palabra árabe "*al-kasr",* que significa quebrar o romper, y fue Juan de Luna quien lo tradujo al latín como "*Fractio"*.

A través de la historia se encuentran diferentes tipos de fracciones, entendidas hoy en día como representaciones de números racionales, a partir de dos números naturales ubicados de cierta manera, los cuales corresponden a lo que actualmente conocemos como *numerador* y *denominador*. Presentamos algunos de tales tipos de fracciones:

2.1.1 Fracciones Unitarias

El legado que ha dejado la civilización egipcia en los monumentos y papiros, hace ratificar el tratamiento y conocimiento que tenía de las fracciones unitarias. Los egipcios utilizaban principalmente fracciones cuyo numerador era 1, como se muestra en la *(Figura 1)*, pero también tenían una notación especial para fracciones como $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ *(Figura 2)*

Figura 1: Escritura de fracciones unitarias egipcias, tomado de Macías, M, cit. p.33

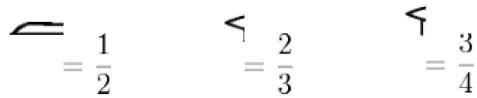


Figura 2: Escritura egipcia de fracciones especiales, tomado de Pulpón, A. cit. p. 52

Además, representaban otras fracciones como sumas de fracciones unitarias, por ejemplo para representar $5+\frac{5}{7}$ utilizaban la notación de fracciones unitarias ya conocidas, en la *(Figura 3)* en la primera casilla se muestra la representación egipcia y en la casilla dos la representación de $5+\frac{5}{7}$ como suma de fracciones ya conocidas.

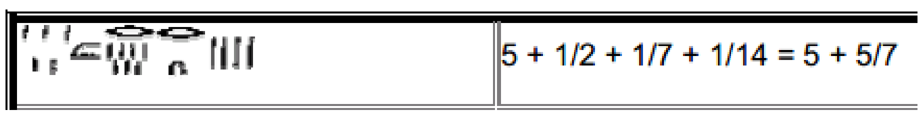


Figura 3: Suma de fracciones unitarias egipcias, tomado de Pulpón, A. cit. p. 58

El uso de fracciones es sin duda el rasgo más peculiar de la Matemática egipcia que se evidencia con los papiros hallados. La base de la representación de una fracción se encontraba en la descomposición como suma de fracciones de numerador 1, todas distintas, como se vio en el ejemplo anterior. Otra notación o abreviatura egipcia para las fracciones era la "*hierática*" que se empleaba con el símbolo en forma de (r) que significaba "parte"[1] *(Figura 4)*. Cuando se quería escribir un valor fraccionario, se representaba el símbolo anterior seguido por el valor numérico del denominador.

Figura 4: Escritura egipcia hierática, tomado Pulpón, A. cit. p.52

[1] *(Pulpón, Z, 2004, p. 52)*

Cuando se quería escribir un fraccionario, se representaba el símbolo anterior seguido por el valor numérico del denominador.

2.1.2 Fracciones de la forma $\frac{n}{m}$ con $n \in N, m \in N, n \neq 1$

En la civilización griega se sabe que las fracciones eran trabajadas de la forma $\frac{n}{m}$ con $n \neq 1$, su representación variaba dependiendo si eran fracciones unitarias por ejemplo para una fracción como $\frac{5}{7}$, se utilizaba la notación que se ve en la *figura 5*:

$$\frac{5}{7} = \varepsilon' \bar{\varsigma}'$$

Figura 5: Notación griega de la fracción 5/7, tomado de Cajori. Cit. p. 32

Sin embargo en los tiempos de Herón de Alejandría y posteriores a él, se utilizaba la suma de fracciones unitarias al estilo de los egipcios.

Según Macías, M. (2009), los griegos comenzaron al igual que los egipcios con fracciones unitarias y posteriormente con fracciones de cualquier tipo, además de esto intuitivamente trabajaron con fracciones equivalentes a partir de las proporciones, esto surgió debido al interés de convertir un rectángulo de lados *a* y *b* en un cuadrado, para lo que se precisaba resolver $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

2.1.3 Fracciones decimales

Centeno (1988) en su libro *"Número decimales"* menciona que el término fracción decimal fue abordado por los árabes, puesto que en el manuscrito *Supérstite* del *"kitab al-fusulfial-Hindi"* obra de *"Al-Uqlidisi"*, quien tradujo el libro, A.S. Saidan, se dio un tratamiento a las fracciones decimales, la notación utilizada por los árabes es similar a la notación actual sin la raya que separa el numerador del denominador, pero después Al-kashison es quien introduce la raya a la notación de fracción.

François Viète también utilizó las fracciones decimales, de tal manera que para representar el número 141421'35624 lo representaba mediante $141421.\frac{35624}{10000}$; también Simón Stevin, en 1585 inventó un método para realizar cálculos con fracciones decimales, sin la necesidad de buscar primero fracciones equivalentes, el método consistía en lo siguiente: Si se querían sumar las fracciones $\frac{1}{10000}+\frac{2}{1000}$, primero daba organización a las fracciones decimales, de tal manera que ubicaba en la primera posición a la fracción que fuese de menor magnitud, seguidamente utilizaba una notación similar a la notación actual de la división (no se realiza el algoritmo de la división), posteriormente en el lugar donde va el divisor en la notación que actualmente se utiliza, ubicaba un número, este número correspondía a la cantidad de ceros que tenía el denominador y debajo de este se colocaba el número que está en el numerador, al momento de hacer la suma de las fracciones decimales ubicaba las notaciones de las fracciones decimales justas, y esto significaba lo siguiente, el primer número que se encuentra en la notación de división corresponde a la cantidad de ceros que habrá en la expresión decimal, el segundo número que se encuentra en la otra notación de división corresponde a la cantidad de cifras que deben ir después de la coma, incluidos los números que se encuentran debajo de estos dos números *(Figura 6).*

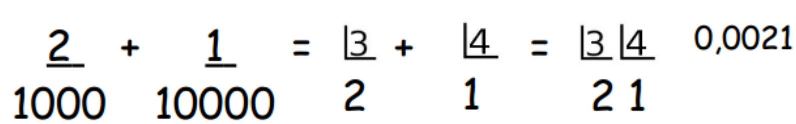


Figura 6: Suma de fracciones decimales, notación de Stevin

De este modo se ve una representación para las fracciones decimales propuestas por Stevin.

2.1.4 Fracciones Continuas

En el año 300 a.C. cuando Euclides en su libro VIII de Elementos, emplea el algoritmo para sacar el máximo común divisor genera fracciones continuas; luego, en 1579 Rafael Bombelli, en su libro *L'Algebra Opera,* asocia las fracciones continuas con su método de extracción de raíces cuadradas; posteriormente, en 1613 Pietro Cadalti utiliza la primera notación de fracciones continuas *(Figura 7).* En esta notación los puntos significan el símbolo de suma y (&) significa que la siguiente fracción es una fracción del denominador.

$$4 \cdot \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.}$$

$$4 \cdot \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \ldots = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}$$

Figura 7: Notación de fracciones continúas dadas por Cadalti, tomado de Parra, E. cit. p. 2

En 1801 Carl Friedrich Gauss utiliza la notación mostrada en la *(Figura 8)*, para representar las fracciones continuas.

$$\begin{aligned} A_0 &= [b_0] = b_0, \\ A_1 &= [b_0; b_1] = b_1 A_0 + 1 \\ A_2 &= [b, b_1, b_2] = b_2 A_1 + A_0 \end{aligned}$$

Figura 8: Notación de fracciones continúas dada por Gauss, tomado de Parra, E. cit. p. 2

La notación para fracciones continuas usada en la actualidad, fue introducida por Alfred Prings-heim en 1898.

2.2 Las expresiones sexagesimales

Otro término asociado a los números racionales es “fracciones sexagesimales”, las cuales hemos llamado acá, expresiones sexagesimales, por cuanto, siendo estrictos, no eran fracciones, al menos desde la idea de fracción que tenemos actualmente. Las expresiones sexagesimales fueron introducidas por los babilonios. Los indicios que aseguran el trabajo de las expresiones sexagesimales son unas tablas que fueron halladas en una excavación. Como los babilonios manejaban un sistema de numeración en base 60, estudiaron fracciones sexagesimales como expresiones sexagesimales, como se ve en la *(Figura 9)* que actualmente representaría al número $\frac{5066}{60}$,

$$44 + 26 \times 60^{-1} + 40$$

Figura 9: Notación fracciones sexagesimales de los babilonios, tomado de Cajori. cit p. 33

2.3 Las expresiones decimales

En China (1550 a.C.), conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto que en este contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones, pero preferían trabajar con notación decimal.

Pero fue Simón Steven quien divulgó las expresiones decimales por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc. La representación de las fracciones decimales era:

Para *456, 765 escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3)*

El suizo JobstBürgi (1552-1632) simplificó esa notación eliminando la mención del orden de las unidades decimales que se observan como números consecutivos y poniendo junto a la cifra de las unidades el signo °. Así para representar *456, 765* escribía:

456°765

En la mirada del segundo principio al cual alude Centeno (1988), que es una extensión del principio de posición, se hace referencia a los números menores a la unidad, este segundo principio da inicio a los números decimales. Según Ifrah (1981) aparece esta idea en las civilizaciones Babilónica, China, Maya y en el sistema de numeración de los Indios, los cuatro sistemas que son el punto de partida de nuestro actual sistema (el sistema de numeración decimal) describen características históricas que muestran el desarrollo de los números decimales, por ejemplo en Babilonia se presentaban las escrituras sexagesimales de la siguiente manera *figura 10*

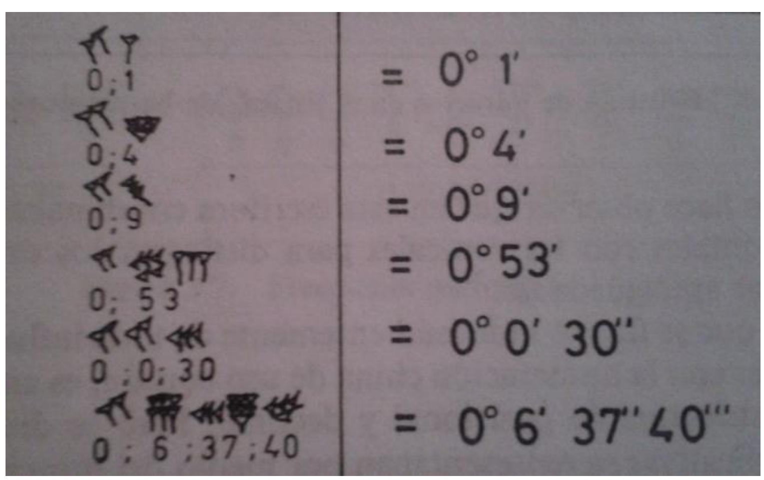


Figura 10: Escritura sexagesimal de los Babilonios

La ausencia de unidades es asociada con el número cero y los babilonios lo representaban con dos espigas, manejaron un principio de numeración igual al que conocemos actualmente.

Los chinos al parecer en los siglos VIII y VII a. C utilizaban barras verticales y horizontales en su sistema de numeración pero después de introducir el signo que hoy día conocemos como el cero que era representado por un círculo pudieron escribir números inferiores a la unidad, afirma Centeno (1988) que G. Ifrah tomando documentos de la época mongola cita ejemplos de fracciones decimales así:

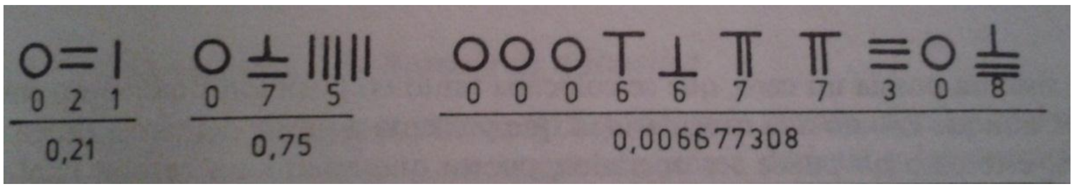


Figura 11: Escritura de Fracciones decimales de la civilización China

Claramente se evidencia la representación del signo que hoy conocemos como el cero, en un sistema posicional similar a nuestro sistema decimal observando números inferiores a la unidad.

Después de la propagación del sistema de numeración indio evidenciada en el sistema de numeración árabe, *Al-uglidisi* un matemático que vivió en Damasco alrededor del año 952 tomando como una de las bases el *Tratado de aritmética* de *Al-huwarizmi* y asimismo los orígenes aritméticos indios, griegos y árabes utiliza una forma de fracciones decimales, con una notación similar a la nuestra representa números con un signo de separación entre una parte entera y la parte decimal, posteriormente según Centeno, *Al-kasi* afirma que introdujo fracciones compuestas por potencias sucesivas de un décimo nombrándolas como: décimas, segundos decimales, terceros decimales, etc. Tomando como punto de referencia a las fracciones sexagesimales.

Por otra parte y siguiendo el curso de la historia hacia la Edad Media se consideraba que los cálculos en matemáticas podían realizarse de mejor manera con fracciones decimales, posteriormente en el siglo XVI con una mirada desde la ciencia moderna de Copérnico y de *Los principios matemáticos de la filosofía natural* de Newton, asimismo por los cambios sociales que demandaba la evolución de la sociedad europea involucrando cálculos astronómicos, el comercio, la repartición de terrenos, entre otros, con aspectos que favorecieron la adaptación de los números decimales, respecto a esta adaptación los protagonistas fueron Francois Viéte (francés 1540-1603) y Simon Stevin (Belga 1548-1620) de una manera que hoy conocemos como formal Viéte por ejemplo escribe la apotema de un polígono regular de 96 lados inscrito en un círculo cuyo radio es 2000 de las siguientes formas: $99946/45875$,o $99946^{45875/10000}$,o 99946^{45875} la tercera escritura es la más similar a la conocida actualmente como $99946{,}45875$.

En 1585 STEVIN consolidó el uso de los números decimales, como la solución de dificultades que existían en el cálculo de fracciones realizadas por comerciantes, de esta manera y dirigiendo su obra *"La Disme"* a quienes estuvieran inmersos en estos números estableciendo que cualquier número que se encuentre al principio se llama comienzo de una progresión decimal, describe que en esta progresión (1) representa a $\frac{1}{10}$ y se llama primera, (2) representa a $\frac{1}{100}$ y se llama segunda y así sucesivamente, los números representados por (1), (2) y etc se llaman números decimales, de esta manera por ejemplo:

5(1)3(2)8(3) se lee cinco primeras, tres segundas y ocho terceras, corresponde al número $0{,}538$

Stevin sugirió el uso de números decimales en los sistemas de medida y finalmente su notación fue sustituida por Jhon Napier en 1620 utilizando la coma como el separador de una parte entera de la parte decimal como se conoce hoy en día evidenciada en su trabajo como coinventor de los logaritmos.

2.4. El Número Racional

Luque, Jiménez y Ángel (2009) en su libro hablan de que Weierstrass caracteriza los números racionales positivos basándose en la idea de partes exactas de la unidad y en la relación de equivalencia, diciendo que $\frac{1}{n}$ es la *n-ésima* parte exacta de la unidad si y sólo si $n\left(\frac{1}{n}\right)=1$ además de esto Weiertrass habla de que un número racional es una combinación lineal de partes de la unidad con coeficientes enteros, también define la igualdad entre números racionales, para así poder hablar de la relación de equivalencia.

Por otro lado Dedekind ya supone que está elaborada la aritmética de los números racionales y dice que forman un cuerpo de números con propiedades relacionadas al orden, con lo anterior Dedekind da por sentadas las cuatro operaciones básicas de la aritmética en los números racionales.

2.5. Definiciones de número racional y sus términos asociados.

A partir de la historia en cuanto al número racional y sus términos asociados, permite identificar los objetos matemáticos y así enfatizar en las definiciones de cada una de ellas.

Es por esto que en esta sección se dan a conocer las definiciones número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción que adoptamos como correctas para el desarrollo de este trabajo de grado, las cuales servirán como herramienta para el análisis que se hará en el capítulo tres y cuatro.

Número Racional

Luque, Mora y Torres (2005) definen número racionales a partir de clases de equivalencia $[(m,n)]$: $(m,n) \approx (a,b)$ si y sólo si $m \times b = n \times a$ tal que $n,b \neq 0$, y $m,n,b,a \in \mathbb{N}$, aquí se definirá de manera similar haciendo uso del conjunto de los número enteros.

Un número racional que notaremos $[(m,n)]$ se define mediante las parejas de números enteros que sean equivalentes a una pareja dada (m,n) con $n \neq 0$ esto es:

$$(m,n) \approx (a,b) \text{ si y sólo si } m \times b = n \times a \text{ tal que } n,b \neq 0, \text{ y } m,n,b,a \in \mathbb{Z}$$

A partir de lo anterior por ser $\approx$ una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se puede formar el conjunto cociente ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$)/ $\approx$ qué se denomina el conjunto de los números racionales.

Número Fraccionario[2]

Un número fraccionario son los números racionales positivos excepto los naturales, es decir que son números como:

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{8}{15}$$

Número Decimal[3]

Un número decimal se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mediante la relación de equivalencia

$$(a,b) \approx (n,m) \leftrightarrow a \cdot 10^m = n \cdot 10^b$$

[2] Tomado de Análisis del Rey Pastor y estándares del MEN

[3] Tomado de Centeno, J (1988) *"Números Decimales ¿Por qué? y ¿Por qué?"*

La clase del par (a,b)se escribe $\left[\frac{a}{10^b}\right]$, y es el conjunto de fracciones equivalentes a la fracción $\frac{a}{10^b}$, esto es, el conjunto de fracciones decimales equivalentes entre así, y esto es lo que se llama número decimal.

Fracción[4]

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde *a* y *b* representan números.

Ejemplos

- $\frac{2}{3}$ Esta es un fracción con $2 \in \mathbb{N}$ y $3 \in \mathbb{N}$
- $\frac{5+3i}{4+8i}$ Esta es una fracción en los números complejos
- $\frac{1}{0}$ Aquí hay la fracción se puede interpretar como una razón en un partido de futbol, asumiendo que en un partido Colombia lleva un gol y Chile 0.

Expresión decimal[5]

Una expresión decimal de un número real es la representación con parte entera y parte decimal, entendiendo la parte decimal como las cifras que están a la derecha de la coma.

Pueden encontrase expresiones decimales finitas como *3,25; 0,5*, expresiones decimales infinitas periódicas como $1,\overline{32}$; $3,\overline{28}$ para números racionales y también expresiones decimales infinitas no periódicas como $3{,}141516...$ para números irracionales.

[4] Esta definición es dada, basada en conocimientos propios

3. Definiciones de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción en *documentos de circulación*.

En este capítulo se hará un estudio de diferentes definiciones de fracción, número fraccionario, expresión decimal, número decimal y número racional que circulan por internet, libros de textos escolares y universitarios, para con base en ello, elaborar el instrumento que se aplicará a los estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas y así alcanzar lo fines de este trabajo.

Estas fuentes (páginas de internet, libros de texto escolares y universitarios) es lo que denominamos *documentos de circulación*.

3.1 Sitios web.

En una consulta informal[5] realizada a 87 estudiantes de Bogotá, específicamente a los estudiantes de segundo semestre (20) que cursaban Cálculo diferencial en el programa de Ingeniería Civil de la Universidad Militar Nueva Granada, estudiantes de primer semestre del espacio académico Elementos de Geometría (17) de Licenciatura en Matemáticas de la UPN y a estudiantes de grado décimo y undécimo del colegio Álvaro Camargo de la Torre (50), durante 2013-I, acerca de los sitios web frecuentados en el momento de realizar consultas sobre algún tema matemático, se obtuvo la siguiente lista, organizada de mayor a menor frecuencia:

1. Vitutor.
2. Wikipedia.
3. Yahoo respuestas.
4. Monografías.com.
5. Rincón del vago.
6. Julioprofe.com.
7. Matematicasparatodos.com.
8. Youtube.
9. Didáctica matemática.
10. Gaussianos.
11. Consultasmatematicas.org.
12. Profeenlinea.com
13. Diccionario matemático.
14. Di tutor

[5] Esta consulta se realizó preguntando directamente a los estudiantes ¿Qué sitios web frecuenta para la conocer acerca de al algún tema Matemático?

15. Matemáticas dinámicas.
16. Matematicas.es.
17. Google.
18. Matematicas.net.

Al organizar estos sitios web, siguiendo la clasificación por objetivos[6], se obtuvo que la mayor cantidad de sitios web que consultan los estudiantes correspondan a portales educativos, seguidos de comunidades virtuales, wikis y buscadores, como se muestra en la siguiente tabla:

Buscadores	**Portal educativo**	**Wiki**	**Comunidad Virtual**
Google	Vitutor, Monografias.com, Julioprofe.com, matemáticasparatodos,	Wikipedia	Yahoo Respuestas, Rincón del vago

Tabla 1: Clasificación por objetivos de los sitios web

Con base en esto, se realizan las consultas acerca de número racional y sus términos asociados que se hallan en los primeros cinco sitios web más utilizados por los estudiantes encuestados y se presentan en la (*tabla 2)* que se encuentra en la sección 3.4 de este capítulo.

3.2. Textos escolares

En una consulta de textos escolares en matemáticas para educación secundaria y media se realizó la observación de las definiciones propuestas para número racional y sus términos asociados al haber revisado los siguientes textos:

- Alfa con estándares 6. (Editorial Norma)
- Espiral 6. (Editorial Norma)
- Delta 6. (Editorial Norma)

[6]Los sitios web sirven como fuente de búsqueda para consultas. Una clasificación para sitios web es presentada por Hugo Escobar (2011), quien los organiza así: Por audiencia (Públicos, Extranet e Intranet); Por dinamismo (Interactivos y Estáticos); Por apertura (Estructura abierta, Estructura cerrada y Estructura semicerrada); Por profundidad (Hace referencia a la cantidad de vínculos que abre el usuario para llegar a la información que desee obtener); Por objetivos (Comerciales, Buscadores, Comunidad virtual, Comercio electrónico, Wiki, Educativo y Portal web).

- Nuevas matemáticas 6. (aritmética, geometría y estadística). (Editorial Santillana)
- Procesos matemáticos 6. (Editorial Santillana)
- Matemática activa 7. (Editorial Voluntad)
- Espiral 7, serie de matemáticas para básica secundaria y media. (Editorial Norma)
- Delta 7. (Editorial Norma)
- Alfa 7. (Editorial Norma)
- Espiral 7. (Editorial Norma)
- Matemática en construcción 7. (Editorial Oxford University Press - Harla de Colombia)
- Zona Activa Matemáticas 7. (Editorial Voluntad)
- Matemática constructiva 8. (Editorial Libros & Libres)
- Álgebra y geometría ll. (Editorial Santillana)
- Aritmética y geometría II. (Editorial Santillana)
- Texto guía Colegio Santa María de Jesús.

De los cuales se encontraron aspectos que describen a cada término y se muestran organizados en la *(Tabla 2)* que se encuentra en la sección 3.4 de este capítulo.

3.3 Textos Universitarios.

En una consulta de textos universitarios en matemáticas, se realizó la observación de las definiciones propuestas para número racional y sus términos asociados. Se escogieron los siguientes textos:

- Precálculo con avances de cálculo (Editorial Mc Graw Hill inter americana)
- Álgebra intermedia (Editorial Thomson learning)
- Álgebra y trigonometría con geometría analítica (Editorial Pearson)
- Matemáticas Fundamentales (Editorial Limusa México)
- Precálculo de Stewart (Editoria International Thomson editores)
- Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Clasificar, medir e invertir.
- Álgebra y Trigonometría.

De acuerdo con la clasificación que se da en los textos universitarios por el Dr. John Stinson (2010), se clasifican por:

- Generales
- Filosofía
- Religión, Teología
- Ciencias Sociales
- Ciencias Naturales
- Ciencia y Tecnología
- Artes
- Lenguas
- Historia

Con lo anterior los textos universitarios antes mencionados se clasifican en Ciencia y Tecnología, los aspectos que aluden a los términos son relacionados en la (*Tabla 2)* que se encuentra en la sección 3.4 de este capítulo.

3.4 Definiciones encontradas en los documentos de circulación para número racional y sus términos asociados.

En la siguiente tabla se presentan las ideas encontradas para cada término y el tipo de documento de circulación al cual pertenece.

En la tabla **S.W** es Sitios Web, **W** es Wiki, **C.V** es Comunidad Virtual, **P** es Portal Educativo, **T. E** es Textos escolares y **T. U** es Textos Universitarios.

FRACCIÓN	**S. W**			**T. E**	**T. U**
	W	**C. V**	**P**		
1. Como expresión de una o varias partes de una unidad o de un todo.				X	
2. Como parte de un todo.				X	
3. Como razón entre cantidades de la misma magnitud.				X	
4. Como expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números naturales.				X	
5. Como el cociente indicado entre dos cantidades donde el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor. Así, si $a,b \in \mathbb{N}$ entonces $a \div b = \frac{a}{b}$				X	
6. Como la relación entre las partes en que se ha dividido la unidad y el número de partes que se toman, se expresa como $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, el				X	

número a es el numerador e indica el número de partes que se toman y el número b es el denominador e indica las partes iguales en que se divide el todo o la unidad.					
7. Como transformador denominado operador, el cual reduce o amplia cantidades.				X	
	S. W				
NÚMERO FRACCIONARIO	**W**	**C. V**	**P**	**T. E**	**T. U**
1. Una fracción, número fraccionario, o quebrado es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad; es decir que representa un cociente no efectuado de números	X				
2. De manera más general, se puede extender el concepto de fracción a un cociente cualquiera de expresiones matemáticas (no necesariamente números).	X				
3. Una fracción es el cociente de dos números enteros *a* y *b*, que representamos de la siguiente forma: $\frac{a}{b}, b \neq 0$ $b \rightarrow$ Denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad $a \rightarrow$ Numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.			X	X	
4. Los números fraccionarios son los que tienen la forma $\frac{a}{b}$, con b distinto de cero. Entre ellos está la línea fraccionaria que equivale a la división. Se crearon justamente para poder indicar el resultado de una división en los casos en que no dan un resultado exacto.		X			
5. Comúnmente conocido como fracción, el quebrado o número fraccionario es el que expresa uno o más partes iguales que la unidad central. Según la cantidad en la que se divide la unidad, ésta va cambiando de nombre.	X				
6. Como números que son resultados de aplicar un operador fraccionario a un número natural.				X	
	S. W				
EXPRESIÓN DECIMAL	**W**	**C. V**	**P**	**T. E**	**T. U**
1. Como la división del numerador entre el denominador de una fracción.		X		X	
2. La división de dos números expresados como una fracción.		X			

3. Es la manera de pasar de una fracción al número decimal.	X				
4. Como un número que tiene parte entera y parte decimal.				X	
	S. W				
NÚMERO DECIMAL	**W**	**C. V**	**P**	**T. E**	**T. U**
1. Son números que están después de la coma y los enteros antes de la coma.		X			
2. Son aquellos números que poseen una parte decimal en oposición a los números enteros que carecen de ella.	X				
3. Un número $x \in \mathbb{R}$ usando la representación decimal tiene la siguiente expresión: $x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ donde a es un número entero cualquiera, llamado parte entera separado por una coma o punto de la parte fraccionaria, cada a_i con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $0 \leq a_i \leq 9$.	X				
4. Es la igualdad obtenida al tomar la fracción como cociente obteniendo un número decimal exacto o bien un número decimal periódico.	X				
5. Como el número que se puede expresar mediante una fracción decimal y consta de dos partes; parte entera y parte decimal.			X		
6. Es aquel que está formado por una parte entera y una parte decimal separados por una coma.				X	
7. Como otra forma de escribir una fracción decimal.				X	
8. Como un número que tiene una parte entera y una parte decimal.				X	
	S. W				
NÚMERO RACIONAL	**W**	**C. V**	**P**	**T. E**	**T. U**
1. El cociente de dos números enteros.	X	X	X		
2. Una fracción común $\frac{a}{b}$ con numerador a y denominador b distinto de cero.	X		X		
3. Como fracción o parte de un todo.	X				
4. Un subconjunto de los números reales.	X				
5. El conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada.	X			X	
6. El número cuya escritura decimal es un número decimal o bien periódico.	X	X			
7. El conjunto de los números racionales puede construirse a partir del conjunto de fracciones cuyo numerador y cuyo denominador son números enteros	X				
8. El conjunto de los números racionales no es directamente identificable con el conjunto de fracciones, porque a veces un número racional puede representarse por más de una fracción	X				
9. Número que puede representarse como la clase de equivalencia de un	X	X			

par ordenado de enteros.					
10. Conjunto formado por todos los enteros y todos los fraccionarios.	X	X	X		
11. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}\right\}$			X	X	
12. El conjunto formado por todos los posibles cocientes $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros.				X	
13. El conjunto formado por las fracciones $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y b distinto de cero.				X	
14. El conjunto formado por una fracción y todas sus equivalentes, es una clase. Y cada clase recibe el nombre de número racional.				X	
15. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0} \ \boldsymbol{y} \ \boldsymbol{mcd}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}\right\}$**.**				X	
16. El conjunto formado por todos los posibles cocientes $\frac{a}{b}$ donde$a$ y b son números enteros, con b distinto de cero.				X	
17. Son números representados por algunas expresiones decimales como $0{,}75$ y $0{,}\hat{3}$.				X	
18. Como el conjunto de números que son el resultado de aplicar a 1 un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ donde a y b son números naturales distintos de cero, con a y b primos relativos.				X	
19. Es un par ordenado de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z} \ y \ b \neq 0$; a se llama numerador y b denominador.				X	
20. Si $\frac{a}{b}$ es una fracción dada, se puede considerar la colección de todas las fracciones iguales a $\frac{a}{b}$, a la propiedad común (de ser iguales a $\frac{a}{b}$) que comparten todas las fracciones de esta colección, se le llama número racional.					X
21. Un número racional es un número real que puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$, en dónde a y b son enteros y $b \neq 0$.					X

22. Los números racionales tienen la forma $\frac{a}{b}$ dónde a y $b \neq 0$ son enteros.					X
23. Familia de fracciones equivalentes, que se representarán con paréntesis cuadrados así $[(m,n)]$ y es equivalente a una fracción $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$ $(m,n) \approx (a,b)$ si y sólo si $m \times b = n \times a$					X

Tabla 2: Clasificación de nociones por documentos de circulación

3.5 Análisis de las definiciones encontradas en los documentos de circulación para número racional y sus términos asociados.

A continuación se presenta el análisis correspondiente a cada definición encontrada en los documentos de circulación para fracción, número fraccionario, expresión decimal, número decimal y número racional, dicho análisis se realiza acorde con las definiciones apropiadas en la sección **2.5** de este trabajo de grado.

3.5.1 Fracción.

Los aspectos hacen referencia a la fracción como una expresión representativa de una o varias partes de una cantidad, como una operación no efectuada, como razón entre cantidades de la misma magnitud y como un operador.

De lo anterior se realizó el siguiente análisis.

1. **Como expresión de una o varias partes de una unidad o de un todo.**

   Este aspecto permite abarcar solo fracciones que pueden ser ejemplificadas con elementos tangibles, de esta manera solo se estarían relacionando fracciones con números naturales.

2. **Como parte de un todo.**

   Análoga al primer ítem y no abarca la característica de ejemplificar con una unidad.

3. **Como razón entre cantidades de la misma magnitud.**

   Presenta una característica geométrica en términos de proporciones, además excluye fracciones como $-\frac{4}{3}$, ya que las magnitudes tienen que ser positivas.

4. **Como expresión de la forma $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números naturales.**

   Limita el panorama de fracciones con números enteros y a grandes rasgos no abarca en su totalidad al conjunto de números racionales. Además si se toman los naturales unidos con el cero, se puede dar la expresión $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}$ con la cual se afirma que no se puede tomar una parte del todo o unidad, que en este caso sería el 0.

5. **Como el cociente indicado entre dos cantidades donde el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor. Así, si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$ entonces $\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$**

   De igual manera que en el ítem anterior solo se abarcan fracciones positivas, además se limita a la interpretación como cociente y puede dejar de lado por ejemplo, la interpretación como razón.

6. **Como la relación entre las partes en que se ha dividido la unidad y el número de partes que se toman, se expresa como $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, con $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, el número $\boldsymbol{a}$ es el numerador e indica el número de partes que se toman y el número $\boldsymbol{b}$ es el denominador e indica las partes iguales en que se divide el todo o la unidad.**

   Al observar las características se tiene una situación en la cual al tomar la parte de un todo o unidad se refiere a algún número natural, limitando solo la interpretación de parte-todo

7. **Como transformador denominado operador, el cual reduce o amplia cantidades.**

Este operador al efectuarse como reductor o amplificador de cantidades hace referencia a encontrar un resultado mayor o menor que un número natural dado.

Los aspectos anteriores evidencian un método de enseñanza conforme los presenta el inicio de la historia en los cuales solo se realizan trabajos con fracciones positivas, esto no permite comprender la fracción como término asociado al conjunto de los números racionales.

3.5.2 Número Fraccionario.

A continuación se hará un análisis de los aspectos mencionados en la (*Tabla 2)* para número fraccionario:

1. **Una fracción, número fraccionario, o quebrado es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad; es decir que representa un cociente no efectuado de números.**

   Con base en esta noción:

   $$\frac{3}{2} \text{ o } \frac{\pi}{3} \text{ o } \frac{3{,}8}{2{,}4}$$

   Son fraccionarios, pues no es claro qué se está entendiendo por cantidad ya que el texto no presenta una definición de este término, ni a cuáles conjuntos números se hace referencia. Así, esta noción puede generar errores.

2. **De manera más general, se puede extender el concepto de fracción a un cociente cualquiera de expresiones matemáticas (no necesariamente números).**

   En relación con el segundo aspecto, podemos interpretar los números fraccionarios como un cociente, es decir como el resultado de una operación lo cual no es correcto ya que en la definición que adoptamos de número fraccionario no coincidimos que este número sea el resultado de alguna operación.

3. **Una fracción es el cociente de dos números enteros *a* y *b*, que representamos de la siguiente forma:**

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

***b*→ Denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad**

***a*→ Numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.**

Acerca del tercer aspecto, como ejemplos encontramos los siguientes:

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ o } \frac{12}{3} = 4 \text{ o } \frac{15}{4} = 3{,}75$$

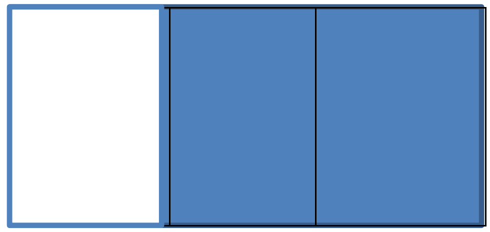
Observando los ejemplos anteriores se entiende como fraccionario al resultado de la división indicada, es decir 0.6, 4 y 3.75 los números naturales hacen parte de los números fraccionarios pues corresponden al cociente de dos números *a* y *b*, *b* no es cero. Esto contradice la definición de número fraccionario que se adopta en este trabajo de grado.

4. **Los números fraccionarios son los que tienen la forma $\frac{a}{b}$, con *b* distinto de cero. Entre ellos está la línea fraccionaria que equivale a la división. Se crearon justamente para poder indicar el resultado de una división en los casos en que no dan un resultado exacto.**

Al parecer, por ejemplo ½ =0,5 indica un cociente no exacto, lo cual puede generar también errores en los estudiantes, pues ½ es exactamente 0,5, lo que sucede es que al hacer la división entre números naturales, la división no es exacta estas son ideas diferentes.

5. **Comúnmente conocido como fracción, el quebrado o número fraccionario es el que expresa uno o más partes iguales que la unidad central. Según la cantidad en la que se divide la unidad, está va cambiando de nombre.**

Del aspecto cinco (5), se entiende fraccionario como un sinónimo de fracción y a esta como una expresión en la cual se determina a partir del numerador una unidad fundamental y al denominador las partes en que se divide la misma, un ejemplo de este puede ser:



En la anterior representación, se puede tomar como unidad fundamental el rectángulo de mayor área y las partes en que se divide son los tres rectángulos que lo conforman.

De esta definición se puede inferir que un fraccionario no necesariamente es una expresión numérica, también en el caso de presentar una gráfica, no hay énfasis en cómo deben ser las partes y de esta manera estas partes podrían ser diferentes en su área.

6. **Como números que son resultados de aplicar un operador fraccionario a un número natural.**

   En el ítem 2 se encuentra una noción diferente a las usualmente conocidas, aquí se tiene el siguiente ejemplo:
   Al aplicar el operador $\times\frac{3}{7}$ al número 1 se obtiene $1\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$. El producto de esta multiplicación se conoce como **número fraccionario**, también se tiene el caso en el cual se aplica un operador fraccionario a un número natural y su resultado no necesariamente es un **número fraccionario**, ej; al aplicar el operador $\times\frac{5}{2}$ al número 6 se obtiene $6\times\frac{5}{2}=15$ y este es un **número natural no fraccionario.**

Al observar este análisis que se ha realizado a cada definición encontrada, se puede inferir que algunas de ellas presentan errores en el término matemático que se está tratando, de entrada, todas asumen, al menos desde la representación verbal, que fracción, fraccionario y quebrado son lo mismo y, como se observó hay bastantes imprecisiones en las ideas presentadas.

3.5.3 Expresión Decimal.

A continuación se presenta el análisis de los aspectos encontrados para expresión decimal.

1. **Como la división del numerador entre el denominador de una fracción.**

Al hablar de la división entre el numerador y denominador de una fracción se hace referencia a una operación entre dos números, bajo la idea que apropiamos de expresión decimal en este trabajo (Una expresión decimal de un número es la representación con parte entera y parte decimal) no la reconocemos como una operación.

2. **La división de dos números expresados como una fracción.**

   Se presenta como el resultado de una operación al hablar de la división entre dos números.

3. **Es la manera de pasar de una fracción al número decimal.**

   Hace referencia al algoritmo correspondiente al paso de la fracción a número decimal, no se refiere al cociente encontrado sino al método. Aquí vale resaltar la mención a otra expresión, número decimal.

4. **Como un número que tiene parte entera y parte decimal.**

   Describe un número decimal pero no presenta claramente una definición de **expresión decimal.**

Como se observa, estas ideas no aluden claramente a expresión decimal, estos aspectos tienen algunas ideas que hacen referencia a una operación entre dos números y a la forma de representar un número decimal.

3.5.4 Número Decimal.

A continuación se presenta el análisis de los aspectos encontrados para número decimal.

1. **Son números que están después de la coma y los enteros antes de la coma.**

   Con esta ida se considera como número decimal a los números que están después de la coma en una representación o notación decimal de un número cualquiera, bien pude ser racional o irracional, además de esto la se da una característica propia de la expresión decimal, a continuación se ilustra un número decimal basado en la esta noción.

Ejemplo: $\sqrt{2} = 1,\underbrace{414213562373...}_{\text{Número decimal}}$

2. **Son aquellos números que poseen una parte decimal en oposición a los números enteros que carecen de ella.**

Bajo esta idea de número decimal, es importante resaltar que se consideran como números decimales aquellos números que tienen cifras decimales no cero, explícitamente se excluyen a los números enteros, así, muy posiblemente no se considera que 3 = 2, 99999 = 3,0 = 3, 000 = 3, 0000.

3. **Un número $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ usando la representación decimal tiene la siguiente expresión: $\boldsymbol{x = a, a_1 a_2 a_3 \; \ldots \; a_n \ldots}$ donde $\boldsymbol{a}$ es un número entero cualquiera, llamado parte entera separado por una coma o punto de la parte fraccionaria, cada $\boldsymbol{a_i}$ con $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots, n}$ y $\boldsymbol{0 \leq a_i \leq 9}$.**

Explícitamente se asocia el número decimal con la representación decimal. Además dice que se debe escribir con coma, que hay una parte entera y otra parte que no indica qué es o cómo se llama los $\boldsymbol{a_i}$ se refieren a cifras.

4. **Es la igualdad obtenida al tomar la fracción como cociente, obteniendo un número decimal exacto o bien un número decimal periódico.**

En este ítem se pueden encontrar situaciones tales como:

$$\frac{n}{0}$$

En la cual no se puede obtener un cociente, se toma este ejemplo debido a que hay aspectos para **fracción** en los cuales no se aclara que el denominador debe ser diferente de cero.

5. **Como el número que se puede expresar mediante una fracción decimal y consta de dos partes; parte entera y parte decimal.**

En este aspecto se reconoce a los números decimales como números tales que tienen una representación como fracciones decimales, es decir fracciones con denominador igual a una potencia de 10, pero también hacen referencia a la expresión decimal y menciona las dos partes, la entera y la decimal, lo cual puede ser contradictorio ya que se puede interpretar que un número decimal es lo mismo que una expresión decimal, y esta afirmación es errónea porque un número decimal tiene una expresión decimal, pero no toda expresión decimal representa un número decimal.

6. **Es aquel que está formado por una parte entera y una parte decimal separados por una coma.**

   En este aspecto se encuentra una característica general y no es claro en referirse precisamente al concepto de **número.**

7. **Como otra forma de escribir una fracción decimal.**

   En esta definición se entiende el número como representación.

8. **Como un número que tiene una parte entera y una parte decimal.**

   El análisis de esta definición es el mismo que el de la definición **5**.

Al analizar las ideas que se identifican en cada aspecto se evidencia la falta de claridad en una noción que involucre todas las condiciones de número decimal, si bien tienen características propias de número decimal falta la relación de equivalencia entre las fracciones decimales.

En general, estos aspectos incluyen ideas que hacen referencia a una comparación entre conjuntos numéricos, a la representación de algún número real y a una operación entre dos números.

3.5.5 Número Racional.

Algunas de estas ideas se refieren a la escritura o representación de los números racionales, otras a las características del número racional y otras al conjunto de los números racionales en sí mismo.

A continuación se presenta el análisis de los aspectos encontrados para número racional.

1. **El cociente de dos números enteros.**

Bajo esta noción, el número racional es el resultado (cociente) de una operación entre dos números enteros, en este sentido se privilegia, en términos de la Didáctica de las Matemáticas, la interpretación de los números racionales como cociente.

Se asocia a la representación del número racional como expresión decimal y de fondo está la idea de que, por ejemplo, las divisiones indicadas: 4/2, 2/1, 6/3, etc. no son el número racional sino su cociente, esto es, 2, que es el mismo en todas estas divisiones.
Si bien es cierto que desde esta noción se impide que exista un número racional proveniente de expresiones como 1/0, por cuanto no es posible hacer divisiones entre cero en los números enteros; sí es posible pensar en que el cociente entre, por ejemplo, -6 y -3 debe corresponder a un número racional, pero el algoritmo de la división cuando el divisor es un número entero negativo no está claramente definido en estos documentos de circulación.
De otro lado, hay que notar que si el cociente entre números enteros puede resultar un número que no es de este tipo (como por ejemplo: 5/2 = 2,5, donde 2,5 es el número racional) se está considerando la división como una operación externa (de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, precisamente), que es otra manera de introducir los números racionales, claramente.

2. Una fracción común $\frac{a}{b}$ con numerador a y denominador b distinto de cero.

Desde esta noción, expresiones como las siguientes corresponderían a números racionales:
$\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt[3]{40}}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
Pues tanto numerador como denominador son números distintos de cero. Pero sabemos que ninguna representa número racional alguno.

De esta manera, es pertinente tener en cuenta que en el momento de dar una definición, las condiciones que se presentan son sumamente importantes para la interpretación adecuada de dicha definición.

3. Como fracción o parte de un todo.

Hace referencia a una interpretación, contexto o isla del número racional, el último, en términos de Vasco, en este caso se presenta una manera de entender una fracción y no una noción de número racional en sí misma.

4. **Como subconjunto de los números reales.**

   Se puede caracterizar a $\mathbb{R}$ como el conjunto que incluye los números racionales y los números irracionales dependiendo de su construcción, entonces al entender el número racional como un subconjunto de los números reales pueden darse las siguientes situaciones:

   - Es correcto afirmar que el conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números reales, pero se puede dar la interpretación de que los números irracionales son los mismos números racionales.
   - Esta definición no evidencia condiciones características y específicas del número racional sino una idea general.

5. **Como el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada.**

   Es decir que un número racional puede ser el siguiente conjunto:

$$Q = \left\{ \frac{\sqrt{m}}{n}, \frac{3\sqrt{m}}{3n}, \frac{10\sqrt{m}}{10n}, ..., \frac{p\sqrt{m}}{pn} / n \in Z, m \in Z, p \in Z / n \neq 0, p \neq 0 \right\}$$

Y evidentemente un número en ese conjunto podría ser $\sqrt{2}$ el cual no es un número racional. En este sentido sería importante precisar qué se está entendiendo por fracción y cuál es la relación de equivalencia que se está considerando.

6. **Como el número cuya escritura decimal es un número decimal o bien periódico.**

   En esta definición se entiende que el número racional es una representación.

7. **El conjunto de los números racionales puede construirse a partir del conjunto de fracciones cuyo numerador y cuyo denominador son números enteros.**

   Al no especificar qué tipo de construcción se utilizará para el conjunto de los números racionales a partir del conjunto de fracciones, se puede llegar a interpretaciones como la siguiente:

$$Q = \left\{ \frac{m}{0}, m \in Z \right\}$$

Lo cual claramente es un error. Esto indica que es necesario precisar cuál es la construcción a utilizar.

8. **El conjunto de los números racionales no es directamente identificable con el conjunto de fracciones, porque a veces un número racional puede representarse por más de una fracción.**

   En esta noción de fondo está la idea de fracciones equivalentes, es decir 1/3, 2/6, 3/9, representan el mismo número racional. Pero no hace referencia al ¿Por qué? no es directamente identificable con el conjunto de fracciones.

9. **Número que puede representarse como la clase de equivalencia de un par ordenado de enteros.**

   Esta noción trae consigo la idea de relación de equivalencia la cual no hace explicita dejando al lector optar por cualquier clase que él quiera establecer.

10. **Conjunto formado por todos los enteros y todos los fraccionarios.**

    Esta definición se puede analizar desde varias perspectivas, dependiendo de lo que se entienda por *fraccionario,* una primera idea da a entender, que un número racional puede ser el siguiente conjunto:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}, n, m \in Z \right\}$$

    En esta definición habría números cuyo denominador sea cero, en las definiciones encontradas para fraccionario y analizadas en este mismo capítulo no siempre se aclara que el denominador debe ser diferente de cero. Otra idea es que se entiende por número racional al conjunto que corresponde a la unión de los números enteros y de los números fraccionarios y muy posiblemente, se consideran estos conjuntos como disyuntos, esto es: 1/3 es un número fraccionario, mientras que 9/3 no es un número fraccionario, pero sí es un número entero. Por lo cual los dos son números racionales. Aquí hay una idea particular de fraccionario que no es equivalente con número racional.

11. $Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

Si ya se tiene definido el conjunto de los números reales esta definición es correcta porque el conjunto permite evidenciar implícitamente la relación de equivalencia, aunque no se privilegien otras representaciones de número racional. Pero si se desconoce el universo de discurso es incorrecta ya que en el momento de la práctica en el aula los estudiantes pueden descartar un número racional como el siguiente $\frac{0.5}{2}$, de igual manera no presenta esa condición de relación de equivalencia que consideramos importante según la definición que apropiamos, para la adecuada interpretación de la definición de número racional.

12. El conjunto formado por todos los posibles cocientes $\frac{a}{b}$ donde *a* y *b* son números enteros.

Para este aspecto hay números racionales que tienen la siguiente expresión numérica:

$$M = \{-\frac{n}{0}, \dots, -\frac{1}{0}, \frac{0}{0}, \frac{2}{0}, \dots, \frac{n}{0}\}$$

Lo cual no sería correcto, puesto que una fracción que tenga denominador 0, no está determinado.

13. El conjunto formado por una fracción y todas sus equivalentes, es una clase. Y cada clase recibe el nombre de número racional.

Este aspecto hace referencia al número racional como cada clase de equivalencia correspondiente a una fracción dada lo cual incluye expresiones tales como:

$$-\frac{n}{0}, \dots, -\frac{1}{0}, \frac{0}{0}, \frac{2}{0}, \dots, \frac{n}{0}$$

14. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \ y \ mcd(a, b) = 1 \right\}$.

El análisis de esta definición es análogo al realizado en la definición 11.

15. **El conjunto formado por todos los posibles cocientes $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros, con b distinto de cero.**

Al hablar de cociente se debe tener en cuenta el algoritmo de la división usualmente conocido para el conjunto de números naturales, por lo cual esta definición presenta dificultad en el momento de entender un posible cociente cuando dicho algoritmo no funciona para el caso en el que el denominador es un entero negativo.

16. **Son números representados por algunas expresiones decimales como $0,75$ y $0,\widehat{3}$.**

Se presenta una única forma de escritura o representación de los números racionales lo cual limita otras representaciones correspondientes a dichos números.

17. **Como el conjunto de números que son el resultado de aplicar a 1 un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ donde a y b son números naturales distintos de cero, con a y b primos relativos.**

Para este aspecto solo se hace referencia a números racionales positivos dejando incompleto al conjunto de números racionales.

18. **Es un par ordenado de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$; a se llama numerador y b denominador.**

Esta definición no es del todo mal, le falta establecer la relación de equivalencia dada en la sección 2.5 de este trabajo de grado para número raciona y se presentaría una definición adecuada de este objeto. Por otro lado esta definición no privilegia la representación decimal.

19. **Si $\frac{a}{b}$ es una fracción dada, se puede considerar la colección de todas las fracciones iguales a $\frac{a}{b}$, a la propiedad común (de ser iguales a $\frac{a}{b}$) que comparten todas las fracciones de esta colección, se le llama número racional.**

El análisis de esta definición es análogo al realizado en la definición 13.

20. Un número racional es un número real que puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$, en dónde $b \neq 0$.

Esta idea puede generar errores como entender que un número racional es un número irracional, ya que el número irracional son subconjuntos de los números reales y también se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$.

Ejemplo: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

21. Un número racional es un número real que puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$, en dónde a y b son enteros y $b \neq 0$.

El análisis de esta definición es análogo al realizado en la definición 18.

22. Los números racionales tienen la forma $\frac{a}{b}$ dónde a y $b \neq 0$ son enteros.

El análisis de esta definición es análogo al realizado en la definición 18.

23. Familia de fracciones equivalentes, que se representarán con paréntesis cuadrados así $[(m,n)]$ y es equivalente a una fracción $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$

$$(m,n) \approx (a,b) \text{ si y sólo si } m \times b = n \times a$$

Esta definición carece de condiciones estipuladas en la sección 2.5 de este trabajo de grado para definir al número racional, dichas condiciones son; $b \neq 0$ y $m, n, a, b \in \mathbb{Z}$, además en esta definición no se privilegia la representación decimal de un número racional.

Detallando un poco las nociones antes mencionadas se evidencia que algunas de ellas no son definiciones apropiadas para números racionales, porque algunas pueden generar errores de aprendizaje a los estudiantes y son incompletas. Es de destacar que cuando se visita un sitio web, es importante leer por completo las ideas allí presentadas, puesto que a medida que se continua con la lectura se van ampliando las ideas, como en el caso de número racional en el sitio de Wikipedia pero en otras, esto no se da, solo aparecen unas ideas cortas e imprecisas como es el caso de Vitutor cuando definen fracción.

4. Metodología y análisis de resultados

Teniendo en cuenta que este trabajo de grado se realiza con el fin de obtener información acerca de las definiciones que tienen los futuros licenciados en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional acerca de número racional y términos asociados, se decide realizar una encuesta a través de un cuestionario, que permita reconocer lo que los maestros en formación inicial entienden por número racional, expresión decimal, número decimal, fracción y número fraccionario, los términos que hemos venido tratando en los anteriores capítulos.

Para ello, inicialmente se considera importante precisar qué se entiende por encuesta; así:

> *"Una encuesta es la aplicación o puesta en práctica de un procedimiento estandarizado para recabar información (oral o escrita) de una muestra amplia de sujetos. La muestra ha de ser representativa de la población de interés y la información recogida se limita a la delineada por las preguntas que componen el cuestionario pre codificado, diseñado al efecto" (Cea, 1999, p. 240)*

Para la encuesta, se diseñó un conjunto de preguntas, que componen el cuestionario[7], y su justificación para luego proceder a la aplicación.

4.1 Diseño del cuestionario

Para el diseño del cuestionario se pensó inicialmente en hacer preguntas abiertas y directas asociadas al objetivo (por ejemplo, qué entiende por número racional, por número fraccionario, etc.), pero atendiendo a la posible dificultad en el análisis de respuestas a preguntas abiertas y buscando tener presente los resultados parciales hallados en los capítulos anteriores, referidos a las definiciones e ideas que circulan en fuentes de consulta, se decidió formular preguntas semiabiertas enmarcadas en un contexto propio de la actividad profesional del profesor de matemáticas.

[7] Según RAE: Lista de preguntas que se proponen con cualquier fin

En el cuestionario se presenta una situación de un supuesto docente de grado séptimo. Esta situación se dirige hacia el desarrollo de una clase en la cual el docente quiere definir qué es un número racional, pero a la hora de definir este concepto matemático lo conllevará a otras definiciones que se estudiarán en clase. Para la metodología de dicha situación se plantearon cinco (5) preguntas las cuales van encaminadas a saber qué ideas tiene el futuro Licenciado en Matemáticas acerca de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción. Cada pregunta tiene opciones de respuesta que corresponden a diferentes definiciones del concepto sobre el que se desea indagar a través de tal pregunta, en las cuales el docente en formación puede estar o no de acuerdo con una, dos, todas o ninguna de ellas. Estas opciones (diferentes definiciones o ideas de los términos matemáticos) han sido seleccionadas de los documentos de circulación (sitios web, libros de texto y Universitarios) que fueron analizados en el capítulo anterior. Cada justificación de las definiciones presentadas en la encuesta se da a continuación:

4.1.1 Pregunta 1

"Camila, la profesora de Matemáticas; en grado séptimo, dejó a sus estudiantes la siguiente tarea: "Consultar la definición de número racional". En la siguiente clase Juan, Luis, Duvan y Viviana mostraron su tarea a la profesora. Las definiciones presentadas fueron:"

Opciones

1) *Tarea de Juan: Número Racional es el cociente entre dos números enteros.*
2) *Tarea de Luis: El número cuya escritura decimal es un número decimal o bien periódico.*
3) *Tarea de Duvan: Los números racionales se definen como:*

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

4) *Tarea de Viviana: Los números racionales se definen como:*

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0 \text{ y } mcd(a,b) = 1 \right\}$$

En esta pregunta, se pretende que el docente en formación indique qué idea tiene acerca de número racional a partir de las definiciones dadas, con las cuales el podrá estar de acuerdo, en desacuerdo o hacer una nueva propuesta. Estas definiciones se escogieron para hacer un análisis de acuerdo con la interpretación que el docente en formación le da a la definición de número racional. La definición uno (1), dada por Juan, fue seleccionada de un sitio web, puesto que en esta se halló la definición de número racional de tal manera que no incluye la condición en la cual el denominador debe ser diferente de cero, además se espera que el docente en formación percate que se hace mención al cociente. La definición dos (2) dada por Luis también fue seleccionada de un sitio web, y ésta tiene como fin que el maestro en formación evidencie que esta noción hace referencia a una representación de un número racional pero que con ella no se está definiendo el número racional. La definición tres (3) tomada de un libro de texto universitario pretende que el docente en formación no la escoja puesto que se limitaría a definir un número racional como un conjunto de números que cumplen la característica de ser enteros y el denominador diferente de cero y no definirla como el conjunto que cumple una relación de equivalencia. La definición cuatro (4) dada por Viviana fue seleccionada de un libro de texto escolar, a pesar de que es acertada pretende que el maestro en formación a la hora de seleccionarla aclare que intuitivamente se hable de la relación de equivalencia que allí está implícita, es decir por qué es importante que el máximo común divisor sea 1 y aclare el universo de discurso que se debe tener en cuenta.

4.1.2 Pregunta 2

“Después de la socialización de la tarea previa, la profesora Camila lleva a la clase diferentes libros de texto con el fin de consultar acerca de lo que es una expresión decimal, los estudiantes Manuel, Julián, Sandra y Joel encontraron las siguientes definiciones respectivamente:

Opciones

1) *Una expresión decimal es la representación del resultado obtenido al dividir en una fracción común, el numerador entre el denominador.*

2) *Una expresión decimal es un número que tiene parte entera y parte decimal.*

3) *Es la representación de un número decimal.*

4) *Una expresión decimal de un número es la representación con parte entera y parte decimal.”*

Esta pregunta pretende que el docente en formación exponga qué entiende por el término expresión decimal. La definición uno (1) fue tomada de un libro de texto escolar y fue seleccionada ya que trae consigo errores como representar $\frac{4}{2} = 2$ y decir que 2 es una expresión decimal, con esto pretendemos que el docente en formación identifique este error. La definición dos (2) también fue seleccionada de un libro de texto escolar y tiene como finalidad evidenciar que una expresión decimal no es un número, por el contrario es la representación de un número. La definición tres (3) fue seleccionada de un sitio web y tiene como objetivo reconocer que una expresión decimal no solo es la representación de un número decimal, que tiene una parte entera y una parte decimal. La definición cuatro(4) es la que se considera correcta en este trabajo de grado.

4.1.3 Pregunta 3.

"La profesora Camila, al ver que su estudiante Sandra define ***expresión decimal*** *como la representación de un* ***número decimal****, le dice a sus educandos que consulten en los libros ¿Qué es un número decimal? Ya que es un término que aparece en nuestro trabajo de clase, seguidamente Paola y Maria leen de su libro de texto y dicen:*

Opciones

1) *Los números decimales son números que están después de la coma y los enteros antes de la coma. (Paola).*

2) *Un número decimal es la notación particular de una fracción decimal. (Maria)."*

Esta pregunta identifica qué concepción tienen los futuros profesores acerca de número decimal, para ello se dieron dos opciones la primera fue seleccionada de un sitio web y la segunda de un texto escolar. Con las dos definiciones se pretende que el docente en formación justifique que se concibe el número decimal como la representación y no como clase de equivalencia de fracciones decimales, además de esto se da la opción de proponer otra definición, en el caso que estén en desacuerdo con las opciones dadas.

4.1.4 Pregunta 4.

“Finalizó la clase y la profesora Camila planea su siguiente sesión así que consulta acerca de la fracción, al respecto encuentra que:

Opciones

- ***Definición 1:*** *Una fracción es una expresión de la forma* $\frac{a}{b}$ *donde a y b representan números.*
- ***Definición 2****: Una fracción es una expresión de la forma* $\frac{a}{b}$ *donde a y b son números naturales.*
- ***Definición 3****: La fracción es el cociente de dos números enteros a y b, que representamos de la siguiente forma:*

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

b→Denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad

a→Numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.”

En esta pregunta se dan tres opciones, la definición 1 es la que en este trabajo de grado se acepta como la más acertada, la definición 2 es tomada de un libro de texto escolar y la definición 3 de un sitio web. La definición 2 pretende que el docente en formación identifique que ésta trae consigo una restricción de representación, puesto que, por ejemplo, $-\frac{2}{3}$ no sería una fracción, la definición 3 tiene el objetivo de que el maestro en formación identifique que la fracción es una representación y no un cociente entre dos números enteros, pues si es el cociente, su representación puede no ser una fracción sino una expresión decimal.

4.1.5 Pregunta 5

“La profesora Camila tiene la siguiente inquietud ¿Una fracción es un número fraccionario?¿Usted qué le respondería?,

Esta es la única pregunta que es abierta y pretende que el docente en formación exprese si reconoce, la diferencia entre fracción y número fraccionario, además que dé una definición de número fraccionario.

En el cuestionario, las situaciones 1 y 3, permiten que el estudiante pueda construir una definición de número racional y número decimal, puesto que en las opciones presentadas no se encuentran las definiciones que en este trabajo se toman como las más acertadas. En general, la elaboración de este cuestionario y la solución que den los estudiantes a la misma permitirá realizar un análisis de las diferentes nociones que manejan los estudiantes de últimos semestres de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, quienes en un año o menos estarán, muy posiblemente, enseñando estos conceptos matemáticos y encontrarán posibles falencias que hayan en dichas nociones.

4.2 Encuesta

Luego de la elaboración del cuestionario, se determinó que las personas a quienes se les deseaba aplicar este instrumento eran los estudiantes de los dos últimos semestres de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; para ello, se recurrió a una base de datos de los maestros en formación que cursaban noveno y décimo semestre en 2013-II (esto es, personas con códigos 20091 y 20092), a través de la Coordinación de la Licenciatura, obteniendo un total de cuarenta y cinco (45) estudiantes. A la mayoría de ellos (40) se les aplicó el cuestionario, gracias a la sesión de un espacio de clase de algunos profesores de la Licenciatura que orientan cursos en tales semestres. Los demás estudiantes resolvieron la encuesta en la biblioteca de la Universidad o en otro lugar, de manera personal.

4.3 Proceso de Análisis de resultados

Para el análisis del cuestionario aplicado se tuvo en cuenta que de los 40 cuestionario aplicados, cinco (5) no serán tomados en el análisis, puesto que no aportaban información para la elaboración de este trabajo (por ejemplo, tenían todos los espacios de justificación en blanco).

Este análisis atiende a tres criterios-fases[8], los cuales son:

[8] Se da el nombre de Criterios-Fase ya que tal análisis realizado comprende tres criterios y cada uno de ellos algunas fases.

1. **Unidades de Análisis**: En este criterio-fase 1 se clasificaron las razones dadas por los docentes en formación en dos unidades de análisis generales que desprenden sub-unidades de análisis, que se presentaran más adelante.
2. **Errores identificados en las justificaciones**: Criterio-fase 2, aquí se analizaron las justificaciones expuestas por los docentes en formación evidenciando errores que se encuentran en las razones que se dan a favor y se dan en contra.
3. **Concepciones de términos en cuestión**: En este criterio-fase 3 se analizaron las concepciones que tienen los docentes en formación acerca de los términos matemáticos propios de este trabajo y se hizo un paralelo con las definiciones que se proponen en este escrito

Enseguida se expondrá en detalle cada uno de los criterios-fases anteriores

4.3.1 Criterio – Fase 1. Unidades de análisis

Al analizar las respuestas dadas a cada pregunta, se identificaron algunos aspectos en común que permitieron tipificar las respuestas según ciertas unidades de análisis.

Contenido de enseñanza (C.E.)

Bajo esta nominación se ubicaron todas las justificaciones que dieron los maestros en formación que aluden a la manera como se aborda el contenido matemático en grado séptimo, según el contexto en el que se había planteado el cuestionario. Al interior de esta unidad, se consideraron otras subunidades, así:

- **Contenido de enseñanza según representaciones (C.E.R):** Aquí se incluyeron aquellas justificaciones que van direccionadas a la forma en que se da la representación[9] de los conceptos matemáticos que están consignados en las preguntas, un ejemplo para esta subunidad de análisis es la respuesta dada a la pregunta 2 por un docente en formación *"toda expresión decimal tiene parte entera y decimal pero aparte de esto el número decimal es una representación de hecho todos los símbolos de los números son representaciones de una cantidad"*. (Justificación para la elección de expresión decimal como respuesta certera a la pregunta dos).

[9]Cuando hablamos de representación, nos basamos bajo la idea de Bressan, A. (2008, p.1), quien dice que "*Las representaciones sirven a las personas tanto como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, como para la comunicación a otros, y la objetivación o validación hacia sí mismo de comprensiones (imágenes mentales y concepciones).*"

- **Contenido de enseñanza curricular (C.E.C):** En esta subunidad se ubicaron todas las repuestas que se refieren al plan de estudios para grado séptimo y la forma en que se debe presentar el concepto matemático para niños de este nivel según las respuestas dadas por los futuros educadores en matemáticas, para ello se tomaron dos de los cinco elementos claves que Rico (2000) establece, referidos al currículo, puesto que fueron los que más se evidenciaron, estos elementos son:
  - **Personas a formar.** Un ejemplo para este elemento es una respuesta dada a la pregunta 2, cuando se quiere dar la noción de expresión decimal *"Cumple con la definición de expresión decimal, es básica y fácil de entender para estudiante de grado 7°"*
  - **Finalidades que se quieren alcanzar.** Un ejemplo para este elemento es la que dio respuesta de un docente en formación a la pregunta 3, al tratar dar la noción de número decimal "*Depende del contexto, porque si solo el docente cita ejemplos como* $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}$*, serían otras las condiciones"*

Contenido Matemático (C.M.)

En esta unidad se ubicaron las repuestas referidas a las definiciones matemáticas de los conceptos matemáticos a los cuales se alude en este cuestionario. Aquí también se presentan dos subunidades:

- **Contenido Matemático Propio (C.M.P):** En esta subunidad se ubicaron las justificaciones basadas en argumentos referidos al conocimiento o saber reconocido por los maestros en formación sobre ellos mismos. Un ejemplo para esta subunidad es la respuesta dada por un docente en formación a la pregunta uno, resaltando que comparte la idea dada por Duván: *"Es la definición que conozco".* Obsérvese cómo el maestro en formación argumenta sobre la veracidad de una respuesta diciendo que es el saber que tiene.
- **Conocimiento Matemático Interpretado (C.M.I):** Esta subunidad contiene las justificaciones (a favor o en contra) basadas en cierta interpretación que los estudiantes hacen sobre el contenido matemático puesto en juego y no aluden a algún aspecto didáctico. Un ejemplo para esta subunidad es *"Es el número compuesto por una parte entera y otra decimal"*(Justificación para la elección de número decimal como respuesta certera a la pregunta tres)

De acuerdo con la anterior tipificación, se diseñó una tabla *Anexo 2* en la cual se encuentran las opciones que se establecieron en la encuesta, el número de selecciones asignadas a cada opción de respuesta, las razones[10] por las cuales la escogieron y la organización que se le da según las unidades presentadas anteriormente. Para el análisis se debe tener en cuenta que un maestro en formación podía escoger varias opciones, con esto en las justificaciones aparecerán cuantos estudiantes están en cada subunidad de análisis según sus respuesta y se notará que estos números excede la muestra planteada en la aplicación del cuestionario, esto se ve por lo que se acabó de mencionar.

De acuerdo a la tabla *(Anexo 1)* en la cual se asignaron la subunidades se llegó a las siguientes conclusiones:

- Aunque el cuestionario tenía como objetivo percibir qué nociones tienen los futuros licenciados en matemáticas acerca de número racional, número decimal, número fraccionario, expresión decimal y fracción, se evidencia que 27 estudiantes hablan de las definiciones propuestas de acuerdo con currículo de séptimo (**Contenido de enseñanza curricular "C.E.C.")**, es decir que optan por definiciones no tan estructuradas, o erradas argumentando que por el grado en el que se encuentran los estudiantes y por los preconceptos que manejan son las más acertadas. Al parecer los estudiantes que optaron por argumentos ubicados en esta unidad, son conscientes de la falta de condiciones en algunas definiciones, pero esto no se considera tan importante porque el peso de la decisión recae en el supuesto nivel cognitivo de los estudiantes de séptimo.

- Es claro que para 40 estudiantes el tratamiento de enseñanza en cuanto a las representaciones (**Contenido de enseñanza según representaciones "C.E.R"**) es importante, siempre y cuando el objeto matemático que se esté enseñando sea definido con todas las condiciones que se necesitan, para que posteriormente los estudiantes puedan traducir de una representación a otra, por ejemplo "*Con la de Duvan se puede ver que Q representa un conjunto, pero podría entenderse que Q son solo fracciones y faltaría la representación como decimal que la da la de Luis" (Justificación dada para la definición de número racional en la pregunta 1)*.

- Se observa que 15 estudiantes basan su elección en las definiciones que conocen limitando ciertas características que hacen falta en algunas nociones que se establecieron en el cuestionario o no tienen en claro cuál es la definición número racional y sus términos asociados que se han preguntado. Es importante como futuros maestros en matemáticas, estructurar de manera detallada los objetos matemáticos que se enseñan en clase, por ello 86 estudiantes dan justificaciones

[10] Algunas opciones no tienen la justificación del porqué escogieron la opción dada, debido a que simplemente marcaron con la X, que estaban de acuerdo con la definición y no justificaron su repuesta

proponiendo que las definiciones dadas tengan más características o proponen una nueva definición de las presentadas en la encuesta.

4.3.2 Criterio – Fase 2. Errores identificados en las justificaciones.

El criterio- fase 1 ayudó a sintetizar las razones propuestas por los docentes en formación, y esta a su vez nos sirvió para el análisis de este criterio-fase 2, puesto que se elaboró una tabla *(Anexo 2)* en la cual se distinguen tres columnas una de las razones que se consideran a favor, otra en contra y la última de errores obtenidos en las **justificaciones** asignadas a cada pregunta por los estudiantes quienes resolvieron la encuesta, en cuanto a la pregunta 5 no se hará el análisis de este criterio-fase ya que es una pregunta abierta y por ende no se establecieron opciones de respuesta.

De esta manera podemos detallar lo siguiente:

Para la pregunta 1, acerca de número racional se evidencian los siguientes errores en las justificaciones dadas a favor de las opciones de Juan, Luis, Duvan y Viviana. En la de Juan[11] se acepta la división por cero, $\frac{3}{0}$. En la de Luis[12], se concibe al número racional como una representación. En las razones que dan para escoger la opción de Duvan[13] se evidencian errores como, el número racional es una representación pero de un algo no definido, ya que se habla de un conjunto al que se le omite la característica de clases de equivalencia, para la definición formal de número racional. Un error que se encuentra en las justificaciones que dan en la opción de Viviana[14] es que al tener en cuenta la característica de $mcd(a,b)=1$ piensan que solo se privilegian fracciones con primos relativos, y no evidencian que este se toma como representante de una clase de equivalencia.

En la pregunta dos cuando se trata de definir expresión decimal se encuentran los siguientes errores cuando los docentes en formación escogen la definición propuesta por Manuel[15],

[11] *Número Racional es el cociente entre dos números enteros.*

[12] *El número cuya escritura decimal es un número decimal o bien periódico.*

[13] $Q=\left\{\frac{m}{n}, m\in Z, n\in Z, n\neq 0\right\}$

[14] $Q=\left\{\frac{a}{b}, a,b\in Z, b\neq 0 \text{ y } mcd(a,b)=1\right\}$

[15] *Una expresión decimal es la representación del resultado obtenido al dividir en una fracción común, el numerador entre el denominador*

dicen que la expresión decimal es el cociente de un fracción decimal y que a la hora de expresar un número como $\frac{4}{2} = 2$ si se toma la expresión decimal como la representación de un número con parte entera y parte decimal este no entraría puesto que en este ejemplo especifico 2 no tiene parte decimal. En las razones dadas a Julián[16] se encuentra como error considerar la expresión decimal como un número. En las justificaciones dadas a la hora de escoger la opción de Sandra[17], se encuentran errores como, aceptar que toda expresión decimal es la representación de un número decimal, limitando la definición que se concibe en la sección 2.5 de expresión decimal, de esta manera el número 2,33333333 no sería una expresión decimal, pues este no es la representación de un número decimal. En las justificaciones dadas a la respuesta de Joel[18], algunos estudiantes manifiestan estar en contra dando la siguiente afirmación, es el paso posterior al realizar la división del numerador entre el denominador y tienen en cuenta que una expresión decimal, número decimal y número racional son lo mismo.

En la pregunta 3, cuando se quiere definir un número decimal algunos docentes en formación justifican que la definición de Paola es cierta ya que distinguen un número decimal como una representación (vale indicar que cuando se escoge la de María no justifican el por qué esta afirmación es la correcta).

En cuanto a la pregunta 4, la definición uno es la adoptada en la sección 2.5 de este trabajo de grado para fracción, las razones por las cuales algunos estudiantes no optan por esta opción son, la necesidad de aclarar a que conjunto numérico pertenecen a y b, b tiene que ser diferente de cero, se ve la fracción como una operación y deja lugar a expresiones irracionales. Para la definición 2 se encuentran errores como, se considera que es necesario aclarar a que conjunto pertenecen a y b y también la fracción como una operación. Y para la definición 3 establecen que el denominador debe ser diferente de cero y se ve la fracción como un cociente. Las conclusiones de este de este trabajo de grado se mostraran en el capítulo 5.

4.3.3 Criterio – Fase 3. Concepciones de los términos en cuestión.

Para este criterio-fase el análisis se realizó teniendo en cuenta las definiciones adoptadas como verdaderas en este trabajo de grado y las seleccionadas por los docentes en formación.

[16] *Una expresión decimal es un número que tiene parte entera y parte decimal*
[17] *Es la representación de un número decimal*
[18] *Una expresión decimal de un número es la representación con parte entera y parte decimal*

Para la pregunta uno de la encuesta y teniendo en cuenta la definición adoptada en este trabajo para número racional *"Un número racional que notaremos* $[(m,n)]$ *se define mediante las parejas de números enteros que sean equivalentes a una pareja dada* (m,n) *con* $n \neq 0$ *esto es:*

$$(m,n) \approx (a,b) \text{ si y sólo si } m \times b = n \times a \text{ tal que } n,b \neq 0, \text{ y } m,n,b,a \in \mathbb{Z}\text{"}$$

Analizamos las respuestas seleccionadas por los estudiantes encuestados de la siguiente manera:

Siete estudiantes escogieron la definición propuesta por Juan *"Número Racional es el cociente entre dos números enteros*". Al escoger esta respuesta evidenciamos que hay siete de los futuros licenciados en Matemáticas que ven el número racional como un cociente, con esto admiten dos errores que se pueden generar al momento de impartir la definición estos son: se acepta un algoritmo de división para números negativos (Este algoritmo aún no existe) Y Se aceptan expresiones como estas $\frac{1}{0}, \frac{2}{0}, ..$ que aún no están definidas.

Nueve estudiantes escogieron la definición propuesta por Luis *"El número cuya escritura decimal es un número decimal o bien periódico".* Esta definición determina qué un número racional es una representación. Con esto nueve maestros en formación pueden generar errores a la hora de tomar esta definición como la verdadera.

Veinticinco estudiantes escogieron la definición propuesta por Duvan "*los números racionales se definen como:* $Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$". En esta respuesta evidenciamos que los veinticinco estudiantes limitan su perspectiva acerca de la definición de número racional, a la hora de definirlo como un conjunto con esas características, puesto que aquí no cabría $\frac{0,5}{2}$ como número racional tal vez si en una aclaración habrían puesto que *0,5* se puede escribir como lo dice el conjunto y establecer la relación de equivalencia para números racionales.

Trece estudiantes escogieron la definición de Viviana *"los números racionales se definen como:* $Q = \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \text{ y } mcd(a,b) = 1 \right\}$". A pesar de que esta respuesta no fue la más seleccionada, identificamos que un gran porcentaje de quienes eligieron esta opción, tienen la noción implícitamente de clases de equivalencia puesto que se está hablando de un representante que tiene como $mcd(a,b)=1$, pero para otros estudiantes el hecho de que se encuentre la característica de $mcd(a,b)=1$ excluye números como $\frac{4}{2}$, esto hace constar que no comprenden a cabalidad la función de esta condición, pero también limitan sus perspectiva puesto que aquí no cabría $\frac{0,5}{2}$ como número racional, según las condiciones dadas en el conjunto.

Dos estudiantes escogieron la opción **Ninguna**, en esta opción la única justificación que dan, es la siguiente: "*Me parece que* $\frac{a}{b}$ *ó* $\frac{m}{n}$ *es una representación de los números racionales, se define como (a,b) donde a, b, cumplen algunas condiciones".* La razón que da el maestro en formación va direccionada a que las definiciones dadas, solo tratan la representación del número racional, pero a la hora de dar la definición también da un tratamiento de representación y no define, cuáles son las condiciones que debe tener la definición de número racional que él quiere proponer.

Tres estudiantes propusieron otras definiciones

- *Un número racional es un número decimal con finitos dígitos o periódico.* Esta noción es la misma que la de Luis.*:*

- $Q=\{(m,n)/\, m,n\in Z, n\neq 0\}$. En esta se incluyen todas las parejas pero no se hace referencia a las clases de equivalencia, es decir, los números racionales se entienden como todas las posibles fracciones.

- *Un número Racional es el conjunto de familia de parejas de números enteros de tal forma que se pueden expresar en forma* $\frac{a}{b}$ *y* $b\neq 0$. *Y puede expresarse de diferentes formas.* A esta noción solo le falta un asunto, cuál es la relación de equivalencia, pero aquí sí está implícita la idea de la relación.

Estas tres definiciones que describen al número racional no dan las condiciones necesarias que se privilegian en la definición propuesta en la sección 2.5

Para la pregunta dos y teniendo en cuenta la definición que este trabajo de grado adopta como verdadera ***"****Una expresión decimal de un número real es la representación con parte entera y parte decimal". S*e encontró lo siguiente:

Trece estudiantes escogieron la definición propuesta por Manuel *"Una expresión decimal es la representación del resultado obtenido al dividir en una fracción común el numerador entre el denominador*". Al escoger esta respuesta evidenciamos que trece de los futuros licenciados en Matemáticas ven la expresión decimal como una representación del resultado de una operación lo cual contradice la definición planteada en el marco de este trabajo.

Siete estudiantes escogieron la definición propuesta por Julián *"Una expresión decimal es un número que tiene parte entera y parte decimal".* Empezaremos afirmando que una expresión decimal no es un número, por tanto al escoger esta respuesta evidenciamos que siete de los futuros licenciados en Matemáticas yerran al ver la expresión decimal como un número.

Doce estudiantes escogieron la definición propuesta por Sandra "*Es la representación de un número decimal*". En esta respuesta evidenciamos que dos estudiantes limitan su perspectiva acerca de la definición de expresión decimal afirmando que únicamente aplica para número decimal.

Quince estudiantes escogieron la definición de Joel, *"Una expresión decimal de un número es la representación con parte entera y parte decimal*". Evidenciamos en esta respuesta de selección que la mayor parte de estudiantes encuestados distinguen la definición que consideramos correcta salvo las justificaciones que consignan.

Cuatro estudiantes escogieron la opción **Ninguna**: En esta opción la justificación describe la rigurosidad de algunas definiciones y define a la expresión decimal como una división.

En la pregunta tres del cuestionario y teniendo en cuenta la definición adoptada en este trabajo para número decimal, ***"Un* número decimal** *es una clase de equivalencia definida a partir de parejas en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ que cumplen:*

$$(a,b) \approx (n,m) \leftrightarrow (a \cdot 10^m = n \cdot 10^b)$$

Así la clase del par (a,b) se escribe $\left[\frac{a}{10^b}\right]$, y es el conjunto de fracciones equivalentes a la fracción $\frac{a}{10^b}$."

Analizamos las respuestas seleccionadas por los estudiantes encuestados de la siguiente manera:

Trece estudiantes escogieron la definición leída por Paola, *"Los números decimales son números que están después de la coma y los enteros antes de la coma".* Evidenciamos en quienes escogieron esta respuesta que interpretan al número decimal como expresión decimal.

Dieciocho estudiantes escogieron la definición leída por María, *"Un número decimal es la notación particular de una fracción decimal".* Evidenciamos que en esta opción de respuesta, dieciocho estudiantes interpretan al número decimal como una representación.

Diez estudiantes propusieron otras definiciones para el término número decimal, las cuales se reúnen de la siguiente manera:

Definición 1: *"Una expresión decimal, es la expresión de un número racional o mejor la representación de este número donde se muestra la parte entera y la parte decimal".*

Definición 2: *"Considero que una expresión decimal es la división de un número entero por una potencia de 10".*

Definición 3: *"Depende del contexto, porque si solo el docente cita ejemplos como* $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}$*, serian otras las condiciones".*

Definición 4: "*Una expresión decimal es una representación de los números reales*".

Definición 5: "*Un número decimal es la representación decimal de una fracción*".

Definición 6: "*El número Compuesto por una parte entera y otra decimal*".

Definición 7: "*Los números decimales son aquellos conformados por una parte entera y una parte decimal*".

Definición 8: "*Hay que tener en cuenta que los números que están después de la coma no deben ser periódicos*".

Definición 9: "*Un número decimal es aquel que tiene antes de la coma un entero y después de la coma cualesquiera enteros positivos o nulos*".

Según estas definiciones dadas por los estudiantes encuestados hace referencia a que no diferencian entre número decimal y expresión decimal pues, como se ve en las definiciones 1, 2, 3, 5, 6, 7, y 9 todas estas hacen referencia a que el número decimal es una expresión decimal, salvo la definición 8 ya que implícitamente da una característica de un número decimal, sin embargo hace referencia a la expresión decimal del número decimal.

Esto nos permite afirmar entonces que la mayoría de los encuestados no diferencia entre número decimal y expresión decimal.

En la pregunta cuatro del cuestionario y teniendo la definición propuesta:

Fracción: "*Una fracción es una expresión de la forma* $\frac{a}{b}$ *donde* a *y* b *representan números o no".*

Analizamos las respuestas seleccionadas por los estudiantes encuestados de la siguiente manera:

Dos estudiantes escogieron la definición 1, ***"****Una fracción es una expresión de la forma* $\frac{a}{b}$ *donde* a *y* b *representan números".* Dos estudiantes coinciden con la definición planteada en este trabajo, pero sus justificaciones evidencian confusión en la insistencia de clasificar a a y b en un conjunto numérico puesto que también se puede hablar de una razón.

Tres estudiantes escogieron la definición 2, *"Una fracción es una expresión de la forma* $\frac{a}{b}$ *donde* a *y* b *son números naturales".* Evidenciamos que tres estudiantes limitan su comprensión acerca de fracción a un conjunto numérico, ya que no aceptan entonces que expresiones como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sean una fracción.

Veintitrés estudiantes escogieron la definición 3, **Definición 3**: *"La fracción es el cociente de dos números enteros* a y b, *que representamos de la siguiente forma:*

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

> b → *Denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad*
>
> a → *Numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas".*

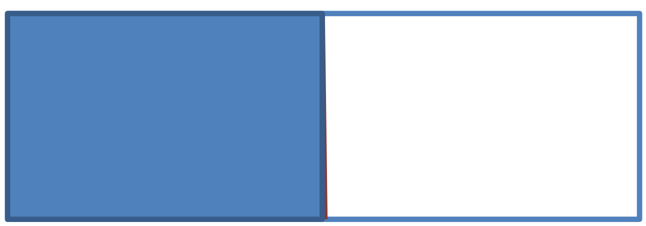
Se observa que veintitrés estudiantes ven la fracción como el resultado de una operación, aquí cabria que la siguiente expresión decimal, es una fracción *0,2*.

Siete estudiantes afirman que ninguna definición es apropiada puesto que las tres definiciones dan lugar a confusión y contradicen la definición correcta al limitar la definición de fracción únicamente asociada al número racional.

Para la pregunta cinco se tendrá en cuenta tanto la definición de fracción que se hizo explicita en el análisis de la pregunta anterior y la definición de Número fraccionario la cual en este trabajo de grado es: *“Un número fraccionario son los números racionales positivos excepto los naturales”.*

Esta pregunta fue abierta a los estudiantes, de las 35 encuestas que se consideraron en esta encuesta, 30 docentes en formación dieron justificaciones a esta pregunta. La justificaciones fueron organizadas en ocho grupos de los cuales se hará el proceso de análisis, como sigue:

1. **El número fraccionario es la representación de la fracción:** 12 estudiantes manifestaron en sus razones que el número fraccionario es la representación de la fracción, algunas de las razones fueron *“Fracción es como se llama el concepto y fraccionario la representación numérica”*, *“Una fracción es una parte de un todo y en cambio un número fraccionario es la representación de la fracción”.* Según estas respuestas los docentes en formación entienden que una fracción es el concepto matemático y el número fraccionario la representación numérica de dicho concepto, en un ejemplo se puede entender que la fracción es el objeto matemático y puede tener otras representaciones, por ejemplo una representación gráfica como esta:



   Se puede entender que la fracción es el rectángulo dividido en dos partes iguales, y la representación como número fraccionario seria la expresión numérica, es decir $\frac{1}{2}$ respecto a esto se puede entender que la fracción solo es un parte de todo y no se puede expresar como una razón de cambio.

   Se evidencia una idea contraria de lo que es, los número fraccionarios no son representaciones mientras que algunas fracciones sí son representaciones de números fraccionarios

2. **La fracción es una representación Gráfica y el Número fraccionario es una representación simbólica:** 4 estudiantes manifestaron que las fracciones y números fraccionarios son diferentes formas de representar a un número real, en este caso la fracción va ser su representación gráfica y el número fraccionario su representación simbólica, con esto los estudiantes expresan que toda fracción es una representación de un número real.

3. **Hacer varias consultas en Libros de Textos:** 4 maestros en formación, optaron por esta respuesta al concluir que sería mejor consultar diferentes libros de textos y adecuar la definición para grado séptimo, este tipo de respuesta se dio, ya que la pregunta se refería a *"usted que le diría a la profesora Camila"*.

4. **Número fraccionario y fracción es lo mismo:** 3 estudiantes dicen que los dos términos son el mismo concepto matemático.

5. **No hay claridad entre la diferencia de los dos conceptos:** 3 estudiantes manifiestan no tener claro la diferencia que hay en estos términos, mostrando futuras dificultades que se pueden generar a la hora de la praxis en la escuela o sitios de trabajo.

6. **Fracción como representación de número fraccionario:** 2 estudiantes en sus justificaciones manifiestan que la fracción es una representación del número fraccionario, estas justificaciones se concederán verdaderas, ya que algunas fracciones son representaciones de los números fraccionarios.

7. **Errores:** Un estudiante aconseja no enseñar los conceptos matemáticos si no se tiene claridad acerca de la diferencia que tienen estos conceptos, ya que podría llegar a una confusión en el aula con sus estudiantes. Esta respuesta va ligada a un aspecto didáctico mostrando así su interés por el cómo enseñar para no generar futuros errores del concepto que se está tratando en el aula.

Las conclusiones de este capítulo se verán reflejadas en la próxima sección.

5. Conclusiones

A partir de los objetivos propuestos en este trabajo se dan a conocer algunas conclusiones presentadas en forma general teniendo en cuenta las evidencias fundamentadas a lo largo del documento.

5.1. El uso de la Historia en la identificación de la noción de número racional y sus términos asociados.

Las fuentes secundarias y terciarias consultadas para la información de número racional revelan que la Historia de las Matemáticas muestra indicios de lo que hoy conocemos como número racional, evidenciando términos que consideramos son asociados a este objeto matemático, es decir explícitamente no existe alguna definición de número racional antes del siglo XIX pero se evidencian términos que durante siglos hacen alusión a dicho objeto, como prueba se tienen las expresiones sexagesimales estudiadas por los babilonios, fracciones unitarias por los egipcios, fracciones decimales por los árabes, fracciones continuas por Leonardo de Pisa en Europa, expresiones decimales por los chinos y por Stevin. Podemos afirmar que desde la existencia de diferentes civilizaciones el mundo occidental del cual hoy día hemos apropiado su cultura, ha tenido la idea de número racional a partir de términos que se asocian a este objeto matemático como los ya mencionados.

Observamos que en nuestro contexto educativo, desde nuestra experiencia como estudiantes del sistema educativo colombiano y desde nuestra práctica o relaciones con familiares, la educación primaria, secundaria y media con la intensión de abordar el concepto de número racional se ve inmersa en un desarrollo que es análogo al proceso histórico, naturalmente primero y al pasar de los años se habla de términos asociados a este concepto, estudiando algunas representaciones como fracciones, fracciones decimales y expresiones decimales y posteriormente en grado séptimo, se aborda la definición de número racional. En la historia aparece un orden cronológico en cuanto a; primero se estudian los términos que consideramos están asociados al número racional que podrían tratarse de ideas intuitivas y finalmente una alusión a la definición.

En la historia se ve que el objeto matemático de número decimal no fue desarrollado al menos en las civilizaciones, lo que imposibilito hacer un estudio en este trabajo de grado.

5.2. El papel de los documentos de circulación en las definiciones de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción.

En las principales tareas que se proponen en la educación básica y media, específicamente en consultar una definición se consideran fuentes como sitios web, textos escolares y textos universitarios; relacionamos e identificamos a continuación en estas tres fuentes aspectos que se resaltan acerca de la definición de número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción.

- Como docentes en formación, observamos una característica en cuanto a los documentos de circulación, en los cuales se evidencia que las definiciones mejor estructuradas aparecen en los textos universitarios, mientas que algunas definiciones que no cumplen todas las características de número racional y sus términos asociados se encuentran en los textos escolares y finalmente las definiciones que carecen de sentido aparecen en los sitios web. A partir de esto relacionamos este hecho, ya que los textos universitarios, van dirigidos a académicos y son diseñados por sus pares, los cuales establecen una comprensión más formal de los objetos en estudio, mientras que en los textos escolares privilegian la facilidad en la comprensión de estas definiciones y esto ha hecho que las definiciones no se presenten de manera "formal" como en los textos universitarios y finalmente como los sitios web son fuente de consulta para todo tipo de población privilegian la comprensión del concepto matemático pero esto trae consigo muchos errores como los estudiados en el capítulo 3.

- Otra característica hallada es que algunos conceptos matemáticos como fracción y número fraccionario en los documentos de circulación se entienden por lo mismo al igual que número decimal y expresión decimal.

- En los libros de texto universitarios se da por entendido las definiciones de número decimal, número fraccionario, expresión decimal y fracción, pero esto nos lleva a concluir que son necesarias, ya que en las encuestas aplicadas a los maestros en formación, se evidencia que no se tienen claras la diferencia de estas nociones.

5.3. Acerca de las diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción desde la perspectiva de futuros licenciados en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

El análisis de las respuestas al cuestionario descrito en la encuesta aplicada a estudiantes que cursan actualmente noveno y décimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional muestran las diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción desde la perspectiva de los futuros licenciados en Matemáticas de la UPN, dichas evidencias se muestran a continuación.

- El cuestionario fue diseñado para identificar las nociones que tienen los maestros en formación de la UPN, en cuanto a número racional y sus términos asociados, no obstante al momento de que los estudiantes dieron solución a las preguntas que se encontraban en el cuestionario, algunas de sus respuestas fueron direccionadas al cómo enseñar dichos conceptos en el aula, esto se debió a la situación hipotética en la que se elaboró el cuestionario.
- Evidenciamos que como docentes en formación no tenemos claridad en la diferencia de los términos asociados a número racional, ya que muchos entienden número decimal como expresión decimal y fracción como número fraccionario.
- Como maestros en formación concluimos acerca de la enseñanza de objetos matemáticos, en cuanto al porque algunas veces optamos por definiciones erróneas, enseñando así los conceptos matemáticos de manera errada argumentando que tales definiciones están “acordes” al nivel de estudio de los estudiantes. No obstante también surgen dudas cómo ¿Será posible que estudiantes de grado séptimo interioricen la definición de número racional al establecer clases de equivalencia de fracciones en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$? ¿Cómo haríamos como profesores para que los estudiantes de la educación secundaria accedan a este concepto?
- Como futuros educadores en matemáticas debemos tener claridad que en algunas de las definiciones o nociones que tenemos acerca de un concepto matemático en este caso de número racional y sus términos asociados, no abarcan en su totalidad todas las características de dicho objeto y por ende no deberíamos estar completamente seguros de nuestros conocimientos propios e impartirlos en el aula de clase como lo que creemos que son, pues estos podrían estar erróneos y generarán errores, dificultades y obstáculos en los estudiantes.
- Identificamos que muchos de nosotros como futuros docentes aún no tenemos claridad acerca de la definición de objetos matemáticos, como el tratado en este

trabajo de grado y esto puede generar cantidad de errores, dificultades y obstáculos tanto en el estudiante como en el docente a cargo de la clase de matemáticas.

- Se propone como un trabajo de grado para un futuro licenciado en matemáticas, el diseño de un seminario en la Universidad en cuanto al tratamiento de objetos matemáticos desde lo didáctico, para que los futuros maestros, tengan claridad de los objetos matemáticos que serán de uso diario en nuestra labor docente.
- Valdría la pena hacer un análisis relacionado con los términos que en este trabajo tratamos o consideramos, teniendo en cuenta qué algunos de ellos están referidos a otros en los mismos documentos de circulación, lo cual implicaría hacer un análisis más exhaustivo de acuerdo a este trabajo.
- Queda abierta la discusión acerca de cuál es el propósito en la búsqueda de solución a ciertas ecuaciones para la construcción de definiciones de los distintos sistemas numéricos, en particular $ax = b$ con $a \neq 0$ ya qué no tiene solución en los números enteros, esto da una discusión, para la construcción de los números racionales.
- Como un posible trabajo de grado planteamos la siguiente pregunta ¿Qué se ha entendido acerca del término cantidad en la Historia de las Matemáticas?

Anacona, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática., 8(1), 30-46.

Ardila, R., Castiblanco, A., Perez, M & Samper, C. (2004). *Espiral 6.* Bogotá*:* Editorial Norma

Boyer, C. *(1992).Historia de la matemática. Madrid. Alianza Editorial.*

Burton, D. (2010). *The History of Mathematics: An Introduction* (7 ed.). McGraw-Hill.

Camargo, L., García, G., Leguizamon, C., Samper, C & Serrano, C. (2003). *Alfa con Estándares 6.* Bogotá*:* Editorial Norma

Centeno, J. (1988). *Números Decimales ¿Por qué? Y ¿Para qué?* Madrid, España: Editorial Síntesis

Centeno, G., Centeno, H., Jiménez, H., González, F & Robayo, M. (1991).*Matemática constructiva 8*. Bogotá: Editorial Libros & Libres S. A.

Estrada, W.,Castiblanco, G., Samper, C., Toquica, M & Moreno, V. (2008). *Delta 6*. Bogotá: Editorial Norma.

Gustafson, D. & Frisk, P. (2006) *Álgebra intermedia* México: Thomson Learning

Herrera, A., Salgado, D., Nivia, L., Acosta, M & Orjuela, J. (2003). *Álgebra y Geometría II.* Bogotá: Editorial Santillana.

Machado, N., Forero, N & Mora, A. (1995). *Procesos Matemáticos 6.*Bogotá: Editorial Santillana.

Neira, C., Ochoa, C., Bautista, M & Herrera, O. (1996). *Matemática en Construcción 7*. Bogotá: Editorial Oxford University Press-Harla de Colombia S. A.

Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas. (2010). *Criterios para la realización y evaluación de trabajos de grado*. Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional.

Rueda, F., Cely, V., Joya, A., Salgado, D., Romero, J & Torres, W. (2007). *Nuevas Matemáticas 6*. Bogotá: Editorial Santillana.

Stewart, J. (1998) *Cálculo trascendentes tempranas.* México: Editorial International Thomson editores.

Swokowski, E & Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (10ª ed.) México: Thomson Learning

Thomas, G. (1971) *Cálculo Infinitesimal y geometría analítica* (5ª. Ed) Madrid, España; Editorial: Pearson

Thomas, W & y Howard, T. (1977) *Matemáticas Fundamentales* (4ª ed.) México: Limusa México

Triana, J & Manrique, J. (2013). *El Papel de la Historia del Álgebra en un Curso de Didáctica para la Formación Inicial de profesores de Matemáticas.* Trabajo de grado para optar por el título de Magister en docencia de las Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Zill, D & Dewar, J. (2008) *Precálculo con avances de cálculo* (4ª ed.) México: Mc Graw Hill interamericana

Anexo 1	Pregunta uno

1. Camila, la profesora de Matemáticas de séptimo grado, dejó a sus estudiantes la siguiente tarea: “Consultar la definición de número racional”. En la siguiente clase Juan, Luis, Duván y Viviana mostraron su tarea a la profesora. Las definiciones presentadas fueron:

Juan: Número Racional es el cociente entre dos números enteros (7).

Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• De acuerdo con el nivel de estudiantes las demás definiciones serían muy rigurosas.		X		
• Los números racionales son los mismos números fraccionarios, entonces se acomoda a las definiciones propuestas.			X	
• Cada definición corresponde a un contexto diferente y que genera procesos diferentes, para abordar las temáticas posteriores.		X		
• Suele ser la más acercada a la que yo uso cuando me preguntan por la definición del conjunto de los racionales.			X	
• Algunas son más formales que otras, sin embargo para grado séptimo, nos ofrece los elementos necesarios para que los estudiantes empiecen a elaborar la construcción de este concepto.		X		
• El lenguaje de la de Juan es asequible para niños de grado séptimo, pero es necesaria complementarla con una más formal.		X		
• La gran cantidad de definiciones hace que el tema se pueda abordar desde diferentes enfoques.		X		

Luis: El número cuya escritura decimal es un número decimal o bien periódico (9).

Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Luis descarta los números decimales no periódicos.			X	
• Me parece que es la mejor acertada de todas.			X	
• Un número racional no se puede ver como la división, ni como el conjunto de Duvan, pues este serian fraccionarios.				X
• Cada definición corresponde a un contexto diferente y que genera procesos diferentes, para abordar las temáticas posteriores.		X		
• Porque número racional aparte de la definición dada por				X

Duvan, se complementa como un número de escritura decimal periódico, ejemplo es equivalente a 0,1.				
• La gran cantidad de definiciones hace que el tema se pueda abordar desde diferentes enfoques.		X		
• Aunque las tres son correctas, están incompletas. Sería necesario unirlas y explicarlas, primero para que cumplan con todas las características y los estudiantes de ese curso comprendan mejor lo complejo de la de Duvan y Viviana.				X
Duván: Los números racionales se definen como: (25)				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• “1. Los describe como conjunto. 2. Usa números Enteros, 3. No necesariamente a y b son primos relativos. Sugerencia: Camila debería tomar dicha tarea y mostrar como las otras están inmersas en ella. Si bien l definición formal habla de familias el contexto no es el adecuado para introducir el concepto así. En ese caso sería adecuada la de Viviana”.		X	X	
• Es la definición que conozco.			X	
• Los números racionales son los mismos números fraccionarios, entonces se acomoda a las definiciones propuestas.			X	
• Cada definición corresponde a un contexto diferente y que genera procesos diferentes, para abordar las temáticas posteriores.		X		
• Juan: No dice que el denominador sea diferente de cero. Luis: Un número decimal puede ser irracional. Viviana: No necesariamente $mcd(a,b)=1$.				X
• Con la de Duvan se puede ver que Q representa un conjunto, pero podría entenderse que **Q** con solo fracciones y faltaría la representación como decimal que la da la de Luis.				X
• Algunas son más formales que otras, sin embargo para grado séptimo, nos ofrece los elementos necesarios para que los estudiantes empiecen a elaborar la construcción de este concepto.		X		
• De forma estricta está bien definido pero es muy complejo para estudiantes de grado séptimo, toca conocer los conocimientos previos.		X		
• El lenguaje de la de Juan es asequible para niños de grado séptimo, pero es necesaria complementarla con una más formal.		X		
• Es la definición más estructurada puesto que comprende a los números racionales en su totalidad. Es decir la definición de Juan está bien pero le faltan condiciones.			X	
• Porque me da las condiciones bien explicitas de las propiedades que tienen que cumplir un número racional.			X	
• En la tarea de Juan puede Incluir al 0, en la de Luis solo				X

considera la representación decimal.				
• La gran cantidad de definiciones hace que el tema se pueda abordar desde diferentes enfoques.		X		
• Porque lo define teniendo en cuenta restricciones ( ) lo que genera en el estudiante una mayor comprensión y porque considero que está bajo condiciones que caracterizan el nivel de escolaridad.		X		
• Las definiciones de Juan y Luis toman el número racional, como decimal o como cociente solamente y la de Viviana tiene la condición “mcd(a,b)=1” lo cual es falso, la de Duvan si porque es racional .				X
• Las otras definiciones no cumplen con todos los requerimientos para ser un número racional y la última no cumple con la definición.				X
• Un número es racional por definición si al considerar los otros casos no cumplen con las condiciones necesarias .				X
• Incluye la restricción que el denominador sea 0 para que exista el número.				X
• La tarea de Juan no tiene en cuenta la restricción de que el número por el que está dividiendo sea diferente de 0. Con la tarea de Luis si bien, considero, que los números racionales incluyen los decimales, no todos los decimales están incluidos en los racionales con respecto a la tarea de Viviana considero que no todos los racionales tienen mcd(a,b)=1 por ejemplo (C.M.I).				X
• Porque número racional aparte de la definición dada por Duvan, se complementa como un número de escritura decimal periódico, ejemplo es equivalente a 0,1 (C.M.I).				X
• Aunque las tres son correctas, están incompletas. Sería necesario unirlas y explicarlas, primero para que cumplan con todas las características y los estudiantes de ese curso comprendan mejor lo complejo de la de Duvan y Viviana (C.M.I).				X
• La definición de Juan no sería buena ya que el denominador debe ser diferente de cero. La tarea de Duvan es la que más se acerca ya que se tiene en cuenta que el denominador, sea diferente de cero. La definición de Viviana genera clases de equivalencia de los racionales pero no se consideraría como racional (C.M.I).				X
Viviana: Los números racionales se definen como: (13)				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Porque no basta con decir que m y n sean enteros ya que el cociente puede ser un entero también, por lo tanto es necesario que sean primos relativos (C.M.I).				X
• Viviana contempla que y (C.E.C).		X		

• Porque es la definición más adecuada para el nivel escolar en el que se encuentran los estudiantes (C.E.C).		X		
• Cada definición corresponde a un contexto diferente y que genera procesos diferentes, para abordar las temáticas posteriores (C.E.C).		X		
• Algunas son más formales que otras, sin embargo para grado séptimo, nos ofrece los elementos necesarios para que los estudiantes empiecen a elaborar la construcción de este concepto (C.M.I).				X
• Debido a que Q en el de Viviana toman únicamente al número que representa la familia de fracciones (C.M.I).				X
• Se cumple la condición suficientemente porque por ejemplo pertenece a la clase ; tiene como mcd(1,2)=1, mientras que el otro no cumple esa condición por ser de la clase mencionada, por ser primos relativos(C.M.I).				X
• Permite tener una definición clara de número racional. Dando las características esenciales y restringiendo algunos números (C.M.I).				X
• En la tarea de Juan puede Incluir al 0, en la de Luis solo considera la representación decimal (C.M.I).				X
• La gran cantidad de definiciones hace que el tema se pueda abordar desde diferentes enfoques (C.E.C).		X		
• Aunque las tres son correctas, están incompletas. Sería necesario unirlas y explicarlas, primero para que cumplan con todas las características y los estudiantes de ese curso comprendan mejor lo complejo de la de Duvan y Viviana (C.M.I).				X
• Son definiciones que al unirlas dan paso a la construcción de la representación de los números racionales y dan una visión más amplia de lo que son estos números (C.M.I).				X
Ninguna (2)				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Me parece que ó es una representación de los números racionales, se define como (a,b) donde a, b, cumplen algunas condiciones (C.E.R).	X			
Otra (3)				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Un número racional es un número decimal con finitos dígitos o periódicos (CMI).				X
• (C.M.I).				X
• Un número Racional es el conjunto de familia de parejas de				X

números enteros de tal forma que se pueden expresar en forma y. Y puede expresarse de diferentes formas (C.M.I).				
Pregunta dos				
2. Después de la socialización de la tarea anteriormente propuesta, la profesora Camila entrega diferentes libros de texto con el fin de consultar acerca de lo que es una expresión decimal, los estudiantes Manuel, Julián, Sandra y Joel encontraron las siguientes definiciones respectivamente:				
Manuel: Una expresión decimal es la representación del resultado obtenido al dividir en una fracción común el numerador entre el denominador (13).				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Al dividir el numerador entre el denominador (de una fracción) se obtiene un resultado no necesariamente entero, este resultado es representado por una expresión decimal, aunque falta analizar las fracciones con denominador múltiplo de 10 (C.M.I) Y (C.E.R).	X			X
• Las otras tres no cumplen con la definición (C.M.I).				X
• En las otras tres definiciones no se consideran todas condiciones. Por ejemplo en la segunda no siempre se cumple, la primera es la más completa (C.M.I).				X
• Toda expresión decimal puede ser obtenida de esta forma (C.M.I).				X
• Porque independientemente de cuál sea el numerador se puede dividir en un número diferente de cero (C.M.I).				X
• Esta permite formar expresiones donde se evidencia una parte decimal en un número (C.M.I).				X
• En la escuela se presenta los decimales como la división entre el numerador y el denominador. Luego se analiza que tiene parte entera y otro decimal (C.E.C).		X		
• Concuerdan con la idea que tengo de expresión decimal (C.M.P).			X	
• Estoy de acuerdo con estas dos opciones porque las otras dos excluyen números decimales como 0,5 que no tienen parte entera (C.M.I).				X
• Es una definición más completa, además la terminología se acerca más al lenguaje de los estudiantes de grado 7° (C.E.C).		X		
• Las demás definiciones nombran la palabra decimal (C.M.I).				X
• Las expresiones decimales surgen desde ambos caminos, el primero al hallar la expresión decimal de una fracción y la otra que aborda de manera amplia la expresión decimal de cada número real (C.M.I).				X

Julián: Una expresión decimal es un número que tiene parte entera y parte decimal (7).				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Una expresión decimal es la expresión de un número racional o mejor la representación de este número donde se muestran la parte entera y la parte decimal de este (C.M.I) Y (C.E.R).	X			X
• Considero desde mi punto de vista bueno pero es trabajo del docente ampliar la definición y colocar contraejemplos para su mejor comprensión (C.E.C).		X		
• Porque es una forma de partir para mejorar la concepción de expresión decimal (C.M.I).				X
• Concuerdan con la idea que tengo de expresión decimal (C.M.P).			X	
• Porque un número decimal tiene otras representaciones como la fracción, pero este solo sería una diferente representación, porque en si un decimal son los números que tienen parte decimal (C.E.R).	X			
• Cumple con la definición de expresión decimal es básica y fácil de entender para estudiante de grado 7° (C.E.C.).		X		
Sandra: Es la representación de un número decimal (2).				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Estoy de acuerdo con estas dos opciones porque las otras dos excluyen números decimales como 0,5 que no tienen parte entera (C.M.I).				X
Joel:Una expresión decimal de un número es la representación con parte entera y parte decimal (15).				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Es la única que define expresión decimal como una representación (C.M.R).	X			
• Todo racional se puede descomponer en dos partes la primera es la entera y el resto sería la parte decimal (C.M.I).				X
• En la de Manuel no se sabe a qué se refiere con “fracción común”, en la de Julián se considera la expresión decimal como un número, en la de Sandra se está viendo como un conjunto de números y no como una representación de los racionales (C.M.I).				X
• Porque el número decimal como bien lo consulta Joel es la	X			X

representa de un número con parte entera y parte decimal. Además es la forma de representar determinado número (C.M.I) Y (C.E.R).				
• Es la más completa (C.M.P).			X	
• Porque toda expresión decimal tiene parte entera y decimal pero aparte de esto el número decimal es una representación de hecho todos los símbolos de los números son representaciones de una cantidad (C.E.R).	X			
• Porque una expresión decimal es una representación de un número racional, la cual se encuentra constituida por parte entera y decimal (C.E.R).	X			
• Es la más completa al hablar de una expresión decimal de un número es la representación con parte entera y parte decimal (C.E.R).	X			
• En la escuela se presenta los decimales como la división entre el numerador y el denominador. Luego se analiza que tiene parte entera y otra decimal (C.M.I).				X
• Es la más completa (C.M.P).			X	
• Las expresiones decimales surgen desde ambos caminos, el primero al hallar la expresión decimal de una fracción y la otra que aborda de manera amplia la expresión decimal de cada número real (C.M.I).				X
• Representa un número fraccionario, equivalente a él, sino que en decimal (C.E.R).	X			
Ninguna (4)				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Considero que una expresión decimal es la división de un número entero por una potencia de 10 (C.M.I).				X
• Es necesario aclarar y proporcionar las ideas para lograr una mejor comprensión (C.E.C).		X		
• No considero que las definiciones dadas resulten agradables a los niños, por tanto si se les da alguna de estas ellos no entenderían (C.E.C).		X		
Pregunta tres				
3. La profesora Camila, al ver que su estudiante Sandra define expresión decimal como la representación de un número decimal, invita a sus estudiantes a que consulten en los libros ¿qué es un número decimal?, así que Paola y María leen de su libro de texto y dicen:				
Paola: Los números decimales son números que están después de la coma y los enteros antes de la coma (13).				
Razones	Unidades de análisis			

	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Considero que en las anteriores definiciones, no se tiene en cuenta que un número natural también puede ser un número decimal (C.M.I).				X
• Pues bien es una notación y representación al número decimal, es la forma como se reconoce parte entera y parte decimal (C.E.R).	X			
Maria: Un número decimal es la notación particular de una fracción decimal (18).				
Sin justificaciones.				
¿Otra? (10)				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Una expresión decimal, es la expresión de un número racional o mejor la representación de este número donde se muestra la parte entera y la parte decimal (C.E.R).	X			
• Considero que una expresión decimal es la división de un número entero por una potencia de 10 (C.M.I).				X
• Depende del contexto, porque si solo el docente cita ejemplos como , serian otras las condiciones (C.E.C).		X		
• Una representación de los números reales (C.E.R).	X			
• El número Compuesto por una parte entera y otra decimal (C.M.I).				X
• Una expresión decimal es una representación de los números reales (C.E.R).	X			
• María no define número decimal, la definición de Paola es muy vaga. Diría que los números decimales son aquellos conformados por una parte entera y una parte decimal (C.M.I).				X
• Hay que tener en cuenta que los números que están después de la coma no deben ser periódicos (C.M.I).				X
• Un número decimal es la representación decimal de una fracción (C.E.R).	X			
• Un número decimal es aquel que tiene antes de la coma un entero y después de la coma cualesquiera enteros positivos o nulos (C.M.I).				X
Pregunta cuatro				
4. Finaliza la clase y la profesora Camila va a la sala de profesores a planear su siguiente sesión de clase. Consulta acerca de la fracción, al respecto encuentra:				
Definición 1: Una fracción es una expresión de la forma a/b donde y representan números (2).				
Razones	Unidades de análisis			

	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Porque no es un cociente y son números a/b con (C.M.I).				X
Definición 2: Una fracción es una expresión de la forma b/a donde y son números naturales (3).				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Secuencia de contenidos (C.E.C).		X		
• Por la representación que tiene (C.E.R).	X			
Definición 3: Una fracción es el cociente de dos números enteros *a* y *b*, que representamos de la siguiente forma: $\frac{a}{b}, b \neq 0$ ***b*→ Denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad** ***a*→ Numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.(23)**				
Razones	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Tiene en cuenta el conjunto completo de los (C.M.I).				X
• Porque las demás definiciones tienen inconsistencias, como exclusión de números negativos (C.M.I).				X
• Son muy ambiguas a algunas definiciones le hace falta algunas condiciones para que sea más precisa (C.M.I).				X
• Es la definición que mas encaja con los conceptos previos que pueden tener los estudiantes (C.M.I).				X
• Las demás definiciones son casos particulares del concepto fracción (C.M.I).				X
• Es una definición más completa, además explica cada “termino” que compone la fracción (C.M.I).				X
• Me parece que es la más adecuada a la realidad y es la única que hace énfasis en b≠0, además de describir sus elementos (C.M.I).				X
• Reúne los elementos esenciales de la definición de número racional, a la cual se encuentra asociados los números fraccionarios (C.M.I).				X
• La definición 1 y 2 no aclara que b≠0 y para comprender fracción no se deja en el vacío que no se puede dividir por cero				X

(C.M.I).				
• Porque las otras definiciones restringen algunas características y condiciones como que el denominador sea diferente de 0 (C.M.I).				X
• Porque incluye todas las características esenciales para comenzar a hablar de la fracción (C.M.I).				X
• Abarca condiciones necesarias para no tener ambigüedad (C.M.I).				X
• Expresa que la fracción es la parte de un todo (C.M.I).				X
• Es la que más se acerca a la definición de fracción (C.M.I).				X
• Primero se considera cuando b≠0 e indica el papel del numerador y denominador, las otras son insuficientes en su argumento (C.M.I).				X
• Incluye la restricción de b≠0(C.M.I).				X
• Una fracción puede ser una representación de un número racional, pero esto no significa que todas las fracciones son racionales, por ejemplo √3/3 es una fracción pero no es un número racional (C.E.R).	X			
• Hace alusión a la relación parte-todo (C.M.I).				X
• Aclara y da una definición completa con relación a la fracción, por tanto involucra todas las características de fracción, en lo contrario de las definiciones 1 y 2 pues no aclaran aspectos como b≠0, conjunto al que pertenecen, etc (C.M.I).				X
• Porque esta definición tiene en cuenta que b≠0 y además permite realizar una interpretación como parte todo, aunque hay que tener en cuenta que si la fracción es negativa el concepto para el numerador debería reformularse (C.M.I).				X
• Esta evidencia la representación en su formalismo y evidencia que en un caso no hay existencia del número (C.E.R).	X			
Ninguna (7).				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Porque al referirnos al termino fracción estamos hablando de una parte de algo no de un número (C.M.I).				X
• La idea de fracción es otra (C.M.I).				X
• Definición 1 y 2 no especifican que b debe ser diferente de 0, a su vez la fracción se ve como una operación, pero realmente ¿Lo es? (C.M.I).				X
• Me parece que las tres definiciones son ambiguas y dan lugar a confusión en los estudiantes (C.M.I).				X
• La fracción se debería ver como una parte de algo mas no como una operación (C.M.I).				X
• La definición 1 deja la posibilidad a expresiones irracionales,				X

que sinceramente no sabría definir, como 4i/3π. Es demasiado vago y deja lugar a malas interpretaciones, la definición 2 tampoco porque no necesariamente son naturales, la definición 3 tiene una palabra con la que no estoy de acuerdo: la fracción es el cociente” pues este “el” se refiere al resultado. Lo que aparece a mi modo de ver es la concepción operacional de un número racional, por las aclaraciones de a y b. Desde el conocimiento matemático de Camila, necesita más consulta y no conformarse con esta. Pero sinceramente, tampoco yo definiría fracción (C.M.I).				
• Porque la uno está considerando cualquier número. La segunda solo considera números naturales y la tercera sitúa la fracción en una concepción operacional (C.M.I).				X
Otra (4)				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Una fracción es una parte de un todo (C.M.I).				X
• Una fracción es una expresión de la forma a/b donde b≠0 y a es el numerador que indica el número de unidades fraccionarias elegidas y b el denominador que indica el número de partes que se ha dividido las unidades fraccionarias (C.M.I).				X
• La fracción es la parte o partes de un todo (C.M.I).				X
• Tendría que consultar en algún texto (N.A).	NA	NA	NA	NA
Pregunta cinco				
5. Suponga que usted es compañero de área de Camila y ella le dice: “Mira, revisando los libros me doy cuenta que no tengo claro si es lo mismo una fracción que un número fraccionario, tú qué dices” ¿Qué le respondería a Camila?,				
	Unidades de análisis			
	C.E		C.M	
Razones	C.E.R	C.E.C	C.M.P	C.M.I
• Qué tampoco se sobre esta diferencia que habría que ir a investigar y aprender juntos (C.MP)			X	
• No, la fracción representa un número fraccionario(C.E.R)	X			
• Una fracción es una parte de un todo y en cambio un número fraccionario es la representación de la fracción(C.E.R)	X			
• Si es lo mismo una fracción que un número fraccionario, lo que pasa es que son representaciones de otras clases de números(C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Que consulte un libro más riguroso y que adapte la definición al grupo de séptimo. (C.E.C)		X		
• Una fracción es una representación gráfica y el fraccionario es	X			

una representación simbólica. (C.E.R)				
• Fracción indica la parte de algo, mientras que un número fraccionario representa la fracción (C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Un número fraccionario es una representación de una fracción, mientras que una fracción es una de las interpretaciones que podemos darle a los números racionales. (C.E.R)	X			
• La fracción es una representación de lo que se conoce como parte de todo. (C.E.R)	X			
• Una fracción representa la parte de la unidad pero un número fraccionario es lo que representa la fracción. (C.E.R)	X			
• Yo diría que es lo mismo porque la fracción es la representación del número fraccionario(C.E.R)	X			
• Son dos cosas diferentes, aunque la fracción ayuda a definir el número fraccionario, es decir, el número fraccionario es un número que representa un cociente entre números enteros y cuya representación es la fracción (C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Tenga cuidado, puedes confundir a los estudiantes (C.E)	NA	NA	NA	NA
• Yo tampoco estoy seguro, yo creo que una fracción es la representación y un número fraccionario es cualquiera que se puede escribir de esa forma, por ejemplo son números fraccionarios(C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Sinceramente no lo sé			X	
• Una fracción es de la forma y el número fraccionario es el mismo número representado de la forma son formas de llamar y representar el mismo número(C.E.R)	X			
• Que La fracción es el nombre que recibe y número fraccionario representación numérica(C.E.R)	X			
• Debes enseñar lo que no te cree confusión. Si no sabes debes estudiar la historia de cómo surgen los dos conceptos.(C.E)	NA	NA	NA	NA
• Necesita investigar más(C.M)	NA	NA	NA	NA
• No, ya que una fracción es la parte de algo y el fraccionario es la representación de este algo(C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Qué es diferente puesto que un número fraccionario es lo mismo que número racional y fracción una representación(C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Qué debe consultar un libro que más allá de tratar las definiciones sin un contexto, deben permitir identificar en la historia la evolución de los conceptos, las representaciones, los obstáculos presentados y así consolidar la mejor manera de articular los conceptos en su labor docente(C.E)	NA	NA	NA	NA
• Fracción es como se llama el concepto y fraccionario la representación numérica(C.E.R)	X			
• Fracción es representación, fraccionario algoritmo utilizado para describir una fracción(C.E.R)	X			
• No, porque el resultado de la fracción es un número				X

fraccionario (C.M.I)				
• Si son diferentes la fracción representa una parte de un todo y el número fraccionario es la expresión de dicha parte(C.E.R)	X			
• Un número fraccionario es una representación de una fracción (C.E.R)	X			
• La fracción implica el cociente que conlleva a obtener número decimal, el fraccionario es la representación teniendo en cuenta las características, por lo tanto la fracción y número fraccionario resultan diferentes.	X			X
• Fracción es una representación donde se tiene la estructura , y Número Fraccionario es el conjunto de familias equivalentes, donde son números y (C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Considero que la Fracción es el concepto matemático, mientras que al mencionar un número fraccionario nos referimos a una representación de los números reales.(C.M.I) Y (C.E.R)	X			X
• Qué yo Tampoco lo sé y es necesario consultar fuentes confiables para aclarar el tema.	NA	NA	NA	NA

Anexo 2 Pregunta 1 Opciones	**Razones a Favor**	**Razones en contra**	**Errores**
Juan	• La definición está acorde con el nivel de grado que se encuentran los estudiantes. • De acuerdo al contexto puede ayudar en futuras definiciones más rigurosas.	• Considera divisiones por cero. • Se contempla al número racional como cociente entre dos enteros.	• Dentro del análisis de estas razones, se pueden considerar los siguientes errores: División por cero $\frac{3}{0}$ División por un número negativo. $4 \div -5$
Luis	• La definición está acorde con el nivel de grado que se encuentran los estudiantes. • Descarta los números decimales no periódicos	• Un número decimal puede ser irracional. • Solo contempla la representación decimal. • No todos los decimales están incluidos en los racionales.	• Se considera que $4{,}1415$ no es un número racional. • Consideran que el número racional es lo mismo que el número decimal • π es un número racional
Duvan	• La definición está acorde con el nivel de grado que se encuentran los estudiantes. • La definición la representa como un conjunto. • Cumple con todas las características de un número racional, por ejemplo en el que el denominador sea distinto de cero $n \neq 0$	• Esta definición, incluye solo a las fracciones.	Los posibles errores que encontramos en estas razones a favor y en contra son: • El número racional es una representación de un algo que no fue definido. • A la definición dada por Duvan, le falta la característica de clases de equivalencia, que al parecer no es una característica de los números

			racionales. • Hay números racionales diferentes a la representación de fracciones.
Viviana	• La definición está acorde con el nivel de grado que se encuentran los estudiantes. • Comprende la existencia del mcd(a,b) =1 • Contempla clases como $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$	• No necesariamente a y b son primos relativos • Tiene la condición "mcd(a,b)=1" lo cual es falsoporque $\frac{3}{9}$ es racional $3,9 \in Z \text{ y } 9 \neq 0$ • Genera clases de equivalencia de los racionales pero $\frac{4}{2}$ no se consideraría como racional	• En estas respuestas se evidencia la comprensión de un número racional como clases de equivalencia implícitamente, pero algunos maestros en formación afirman que esta no es la definición de número decimal. • La definición de Viviana trae consigo implícitamente la definición por clase de equivalencias cuando tiene la condición de mcd(a,b) =1, pero algunos maestros en formación dicen que esta definición con esa característica no contempla los números como $\frac{4}{2}$ porque no tiene mcd(a,b) =1

Pregunta 2 Opciones	Razones a favor	Razones en contra	Errores
Manuel	• Es una representación. • Es la más completa. • Corresponde a las nociones propias del concepto. • No es redundante en su definición. • Porque no excluye números decimales como 0,5 que no tiene parte entera. • Porque es un cociente que se puede obtener. • Cumple con la definición.	• No se sabe a qué se refiere con fracción común. • No define expresión decimal como una representación.	• Se observa la expresión decimal como un cociente. • 0,5 es una representación de un número donde su parte entera es 0 y su parte decimal es ,5.
Julián	• Es una definición fácil de entender y adecuada para grado séptimo. • Es un buen punto de partida para entender la definición de expresión decimal. • Corresponde a las nociones previas del futuro o futura docente de matemáticas. • Es una representación. • Porque un decimal es un número que tiene parte decimal.	• No cumple con la definición. • Excluye números decimales como 0,5 que no tienen parte entera. • Se considera expresión decimal como un número. • No define expresión decimal como una representación.	• Define expresión decimal como un número. • No reconoce la parte entera de esta representación.
Sandra	• Porque no excluye números decimales como 0,5 que no	• No cumple con la definición. • Se ve como un conjunto de	• 0,5 es una representación de un número donde su parte entera es

	tiene parte entera.	números y no como una representación de los racionales. • No define expresión decimal como una representación.	0 y su parte decimal es ,5. • La expresión decimal no es un conjunto de números.
Joel	• Define expresión decimal como una representación. • Un número racional se puede descomponer en dos partes, una parte entera y una parte decimal. • Porque el numero decimal es la representación de un número con parte entera y parte decimal. • Porque en la escuela primero se enseña que es la división del numerador entre el denominador y después se analiza que tiene parte entera y parte decimal. • Representa un número fraccionario que es equivalente a él sino que en decimal.	• No cumple con la definición. • Excluye números decimales como 0,5 que no tienen parte entera.	• En la justificación, es el paso posterior al realizar la división del numerador entre el denominador. • Tienen en cuenta que una expresión decimal es lo mismo que un número decimal y que un número racional.
Ninguna	No aplica	No aplica	• Se considera la expresión decimal como una operación.

Pregunta tres **Opciones**	**Razones a favor**	**Razones en contra**	**Errores**
Paola	• Es una notación y representación de número decimal donde se distingue una parte entera y una parte decimal. • Tiene en cuenta que un número natural también puede ser un número decimal.	• Su definición es muy vaga.	• Distingue un número decimal como una representación.
María	Sin justificación	• No define número decimal.	• no corresponde a una definición.
¿Otra?	No aplica	No aplica	• Define número decimal como una expresión o una representación. • Como una división. • Como la representación de una fracción, lo cual se entendería como la representación de una representación.

Pregunta Cuatro Opción	**Razones a favor**	**Razones en contra**	**Errores**
Definición 1	• No es un cociente y son números naturales $\frac{a}{b}$.	• Tiene inconsistencias y excluye números negativos. • Solo es un caso particular. • No aclara que $b \neq 0$. • Son insuficientes en su argumento. • No aclara a que conjunto pertenece. • La fracción se ve como una operación. • Deja lugar a expresiones irracionales.	• Los números que representan a y b son números naturales o bien enteros. • b tiene que ser diferente de cero. • La fracción como una operación. • Deja lugar a expresiones irracionales.
Definición 2	• Por su representación. • Por su secuencia de contenidos.	• Tiene inconsistencias y excluye números negativos. • Solo es un caso particular. • No aclara que $b \neq 0$. • Son insuficientes en su argumento.	• Se considera que es necesario aclarar a que conjunto pertenecen a y b. • La fracción como una operación.

		• No aclara a que conjunto pertenece. • La fracción se ve como una operación. • No necesariamente deben ser naturales.	
Definición 3	• Comprende todas las características de fracción, entre estas aclarar que el denominador es diferente de cero. • Comprende todo el conjunto de los$\mathbb{Z}$. • Alude a la parte de un todo. • Representación de un número racional.	• Debe reformularse cuando la fracción es negativa. • No todas las fracciones son racionales. • Se refiere al cociente.	• Establece que el denominador debe ser diferente de cero. • La fracción como un cociente.
Ninguna	**No aplica**	**No aplica**	• La fracción como la parte de un algo.
Otra	**No aplica**	**No aplica**	• la fracción como parte de un todo. • Se deben relacionar unidades fraccionarias y el denominador debe

			ser diferente de cero.

.