GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE SERIES

JUAN CARLOS AVILA MAHECHA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2006

GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE SERIES

JUAN CARLOS AVILA MAHECHA

Trabajo de grado para optar al título
de Licenciado en Matemáticas.

Asesor
CARLOS JULIO LUQUE ARIAS
Profesor Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2006

A mis queridos padres quienes son la razón principal de mi existencia. A mis hermanos Natalia y Felipe, y a mi tía Ana que ha sido como una segunda madre.

Los amo

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer a lugar a Dios, porque él me proporcionó la vocación docente.

Al profesor Carlos Julio Luque Arias, por haber dirigido mi trabajo de grado y por brindarme durante estos últimos años su amistad y la oportunidad de aprender a su lado.

A las profesoras y amigas Lyda Constanza Mora M y Johana Andrea Torres, quienes han sido personas fundamentales en mi formación.

A Susana, Jeisson, Andrés Aníbal y Sergio, porque me han dado su amistad desinteresada.

A Javier Eduardo Murcia M, porque él es uno de los principales responsables de que este sueño sea una realidad.

A todos los profesores del departamento de matemáticas, que han contribuido en mi formación profesional y personal.

A mi familia, por su constante apoyo.

RESUMEN ANALÍTICO

TIPO DE DOCUMENTO: Tesis de Grado

ACCESO AL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional

TÍTULO: Generación de funciones reales a partir de series

AUTOR: AVILA MAHECHA, Juan Carlos

PUBLICACIÓN: Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2006, 120 páginas.

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.

PALABRAS CLAVES: Series y sucesiones, Sistemas numéricos, función, funciones reales generadas por series.

DESCRIPCIÓN. Este documento muestra diversas formas para generar funciones reales a partir de series. Primero, se parte de los sistemas numéricos, aprovechando el hecho de que por ejemplo los números racionales pueden escribirse como números n-males finitos o infinitos, los cuales al ser representados por medio de series de potencias permiten definir funciones que asocian a un número una función. Luego de esto, al buscar y estudiar distintas series convergentes que no fueran de potencias, tales como las series p, se halló otras formas de asociar a un número real una función, lo cual sugirió estudiar algunos tópicos matemáticos tales como, los trabajos desarrollados por Euler en cuanto al tratamiento que dio a las series, la expansión de funciones por medio de fracciones continuas y viceversa, la serie hipergeométrica, entre otros.

FUENTES

Bibliografía: Se consultaron 25 documentos entre libros y artículos de revistas referentes a los números n–males, los sistemas numéricos, las series convergentes de números reales, historia de la matemática, fracciones continuas, conjunto de Cantor, la función zeta de Riemann, entre otros.

CONTENIDOS

Objetivo General.

Estudiar y hallar métodos para la generación de funciones reales por medio de series, partiendo de los sistemas numéricos hasta ejemplos más elaborados como la solución de la ecuación diferencial hipergeométrica.

Capítulo I. los sistemas numéricos y la generación de funciones reales a partir de series

- Generación de funciones reales a partir de los números naturales
- Generación de funciones reales a partir de los números racionales positivos
- Generación de funciones reales a partir de los números racionales y los números irracionales cuadráticos

Capítulo II. Generación de funciones reales a partir de series en algunos tópicos matemáticos

- Generación de una función real a partir de la construcción del conjunto de cantor
- Euler y el desarrollo de algunas funciones reales como series de potencias

– Las fracciones continuas y la generación de funciones reales a partir de series
– La serie hipergeométrica

CONCLUSIONES.

1. Dado que un número natural cualquiera puede ser escrito en sistema posicional como una suma de productos formados por un coeficiente, que corresponde a cada una de las cifras del número, y una potencia de la base, se consiguió definir una función que asigna a cada número natural escrito en base k, una función polinómica de dominio real. Por otro lado, sabiendo que cualquier número $n \in \mathbb{N}$, puede expresarse como $n = (n-1),\overline{(k-1)}$ en base k, se obtiene una nueva función que asigna a cada número natural una función afín de dominio real.

2. A partir de la expansión de los números racionales como números n–males, es decir como series de potencias, se logró definir la función biyectiva $\mathscr{H}_k$ para cada base fija $k \geq 2$, con dominio en el conjunto de los números racionales expresados como k–males y rango el conjunto $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$ formado por funciones racionales, permitiendo de este modo, copiar la estructura de números racionales en el conjunto $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$.

3. La generación de funciones reales a partir de los números racionales se realizó en principio por medio de la representación n–mal, por tanto, faltaba generar funciones reales sin hacer uso de las expresiones n–males de los números racionales, para ello se recurrió a la división larga, lo cual permitió conectar la historia de la matemática reflejada en las diferencias finitas, con el teorema de Taylor y finalmente con la generación de funciones reales.

4. La forma como fueron construidos los diferentes sistemas numéricos en los espacios académicos del pregrado (Aritmética y sistemas numéricos), permitió seguir un camino lógico para la generación de funciones reales a partir de ellos.

5. Dado que las funciones reales encontradas a partir de los sistemas numéricos, tenían su origen principalmente en las *series de potencias convergentes*, se decidió recurrir a otro tipo de series también convergentes pero no de potencias, tales como, la serie de los recíprocos de los números triangulares que converge a 2, o la serie de los recíprocos de los números cuadrados que converge a $\pi^2/6$, entre otras, por lo cual fue necesario estudiar algunos trabajos desarrollados por Euler en torno a las series y las funciones, consiguiendo definir y redescubrir otras funciones reales a partir de las series estudiadas por Euler.

6. Con este estudio, se permitió apreciar que la mayoría de las funciones reales que habitualmente se estudian, son analíticas, lo cual se ve reflejado por medio del teorema de Taylor y series como la *serie hipergeométrica*.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo nace de la pregunta: ¿Cómo generar funciones reales a partir de series sin recurrir en principio a los métodos conocidos, tales como el teorema de Taylor? Por lo cual se planteó el siguiente objetivo:

Estudiar y hallar métodos para la generación de funciones reales por medio de series, partiendo de los sistemas numéricos hasta ejemplos más elaborados como la solución de la ecuación diferencial hipergeométrica.

De modo que al iniciar el estudio, se comenzó con el conjunto de los números naturales y observando que este conjunto es posicional se logra hallar una primera forma para generar funciones reales; pero no sólo se logra el cometido con esta observación, sino también, al considerarse la expansión de cualquier número natural como un número n-mal, además de encontrar otra forma para generar funciones a partir de $\mathbb{N}$, se empieza a trazar una ruta lógica establecida por las mismas herramientas matemáticas usadas en la construcción de los sistemas numéricos para ser aprovechadas en la generación de funciones; continuando de este modo con los números n–males para llegar a los racionales positivos y finalizar con los irracionales cuadráticos expresados como fracciones continuas. Así en el primer capítulo, se encontrarán precisados algunos métodos para generar funciones reales por series a partir de los sistemas numéricos.

En el capítulo 2, se amplia un poco el estudio de la generación de funciones, principalmente porque en el primer capítulo, resultan en su mayoría series de potencias convergentes, de modo que esto sugiere considerar otro tipo de series diferentes a las de potencias pero con la característica de la convergencia para poder generar nuevas funciones desde las mismas series.

Así mismo, al realizar la búsqueda de algunas de estas series, se hace necesario estudiar ciertos tópicos matemáticos involucrados con ellas, como es el caso de las series de los recíprocos de los números triangulares, o la serie de los recíprocos de los números naturales elevados a la p, entre otras series, que a su vez conducen a funciones ampliamente estudiadas como por ejemplo la función zeta de Riemann o la serie hipergeométrica.

CAPÍTULO 1

LOS SISTEMAS NUMÉRICOS Y LA GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE SERIES

1.1. GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE LOS NÚMEROS NATURALES

1.1.1. Los números naturales y las funciones polinómicas

Un número natural cualquiera puede ser escrito en sistema posicional como una suma de productos formados por un coeficiente, que corresponde a cada una de las cifras del número, y una potencia de la base, por ejemplo, el natural $45687_{(10)}$ se escribe como:

$$45687_{(10)} = 4\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0,$$

De igual manera, el número natural $45687_{(12)}$ es:

$$45687_{(12)} = 4\cdot 12^4 + 5\cdot 12^3 + 6\cdot 12^2 + 8\cdot 12^1 + 7\cdot 12^0,$$

y en general, el número natural $45687_{(k)}$ para $k > 8$ se escribe como:

$$45687_{(k)} = 4k^4 + 5k^3 + 6k^2 + 8k + 7,$$

Esta observación sugiere que a cada número natural escrito en alguna base k, le corresponde una función polinómica, así por ejemplo al número $45687_{(k)}$ le corresponde:

$$f(x) = 4(kx)^4 + 5(kx)^3 + 6(kx)^2 + 8(kx) + 7,$$

Para formalizar lo anterior, se considerará a $\mathbb{N}$ como el conjunto de los números naturales y a un conjunto denotado por $\mathbb{P}$ definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{P} = \{f_k : \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \mid f_k(x) = a_n\,(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_1(kx) + a_0,\ 0 \leq a_i < k,\ a_i \in\mathbb{N},\ i = 0, 1, \ldots, n\}$$

Puede observarse que en una base cualquiera k, el número natural k es representado por 10, por tanto, para efectos prácticos en la escritura de los elementos de $\mathbb{P}$ se reemplazará en algunos casos a k por 10.

Ahora, sea H_k *una función de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{P}$ *tal que a cada número natural* $a_n a_{n-1\ldots} a_2 a_1 a_0$ *escrito en alguna base fija* $k \geq 2$, *le corresponde la función polinómica* f_k *donde*

$$f_k(x) = a_n\,(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_1(kx) + a_0,$$

Esto es:

$$H_k(a_n a_{n-1\ldots} a_2 a_1 a_{0(k)}) = f_k$$

Con,

$$f_k(x) = a_n\,(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_1(kx) + a_0.$$

Como es usual, el grado de la función polinómica f_k *es el mayor valor de n para el cual* a_n *es diferente de* 0 *y se notara por grad* f_k.

***Teorema* 1.** *La función* $H_k : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ *es biyectiva*.

Demostración

Para cada base $k \in \mathbb{N}$ mayor o igual a 2, si $H_k(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0) = H_k(b_n b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_2 b_1 b_0)$ esto implica que $a_n a_{n-1} \ldots a_0 = b_n b_{n-1} \ldots b_0$ ya que en una base cualquiera $k \geq 2$, cada número natural tiene una única forma de representarse como producto de sus coeficientes y potencias de la base, por tanto la función H_k es inyectiva.

Por otro lado, dada cualquier función polinómica f_k de $\mathbb{P}$, existe en $\mathbb{N}$ un número natural n escrito en base k, tal que $H_k(n) = f_k$, esto debido a la misma definición de $\mathbb{P}$. Entonces H_k es sobreyectiva. Por tanto H es biyectiva. □

Dada la biyectividad de la función H_k para k fija; se definen las siguientes operaciones en $\mathbb{P}$. De aquí en adelante se denotará la función H_k simplemente por H.

***Definición* 1**. *Para cada par de elementos* f_k *y* g_k *de* $\mathbb{P}$, *se define la* **adición** *como sigue*:

$$f_k + g_k = H\,(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k)).$$

donde + es la suma de los números naturales y

$$(f_k + g_k)(x) = f_k\,(x) + g_k\,(x).$$

***Definición* 2**. *Para cada par de elementos* f_k *y* g_k *de* $\mathbb{P}$, *se define la* **multiplicación** *como sigue*:

$$f_k \times g_k = H\,(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(g_k)).$$

donde $\times$ *es la multiplicación de los números naturales y* $(f_k \times g_k)(x) = f_k\,(x) \times g_k\,(x)$.

***Teorema* 2**. *Para todo f_k, g_k* y *h_k elementos de $\mathbb{P}$ se tiene que:*

i. $[f_k + g_k] + h_k = f_k + [g_k + h_k]$,

ii. Existe en $\mathbb{P}$ un elemento I_k tal que $f_k + I_k = I_k + f_k = I_k$,

iii. $f_k + g_k = g_k + f_k$,

iv. Si $f_k + g_k = f_k + h_k$ entonces $g_k = h_k$,

v. $[f_k \times g_k] \times h_k = f_k \times [g_k \times h_k]$,

vi. Existe en $\mathbb{P}$ un elemento i_k tal que $f_k \times i_k = i_k \times f_k = f_k$,

vii. $f_k \times g_k = g_k \times f_k$,

viii. Si $f_k \times g_k = f_k \times h_k$ entonces $g_k = h_k$,

ix. $f_k \times [g_k + h_k] = [f_k \times g_k] + [f_k \times h_k]$,

Demostración.

Por la definición de +

$[f_k + g_k] + h_k = H(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k)) + h_k$

$= H(H^{-1}(H(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k))) + H^{-1}(h_k))$ definición de +

$= H((H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k)) + H^{-1}(h_k))$ composición de H y H^{-1}

$= H(H^{-1}(f_k) + (H^{-1}(g_k) + H^{-1}(h_k)))$ Propiedad asociativa de la suma de números naturales

$= H(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(H(H^{-1}(g_k) + H^{-1}(h_k))))$ composición de H y H^{-1}

$= f_k(x) + H(H^{-1}(g_k) + H^{-1}(h_k))$ definición de +

$= f_k + [g_k + h_k]$ definición de +

Ahora, en $\mathbb{N}$ existe el elemento 0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 + n = n + 0 = n$, por tanto, mediante la función H, se tiene que $H(0) = I_k$, donde $I_k(x) = 0$. Entonces, si f_k es un elemento cualquiera de $\mathbb{P}$, resulta:

$f_k + H(0) = H\,(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(H(0))) = H\,(H^{-1}(f_k) + 0) = H\,(H^{-1}(f_k)) = f_k$ y de manera similar $H(0) + f_k = f_k$. Por otro lado,

$f_k + g_k$	$= H\,(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k))$	definición de +
	$= H\,(H^{-1}(g_k) + H^{-1}(f_k))$	Propiedad conmutativa de la suma de números naturales
	$= g_k + f_k$	definición de +

Ahora, si $f_k + g_k = f_k + h_k$ resulta:

$H(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k)) = H(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(h_k))$	Definición de +
$H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k) = H^{-1}(f_k) + H^{-1}(h_k)$	Pues H es biyectiva
$H^{-1}(g_k) = H^{-1}(h_k)$	Porque la suma de números naturales es cancelativa.
$g_k = h_k$	Pues H^{-1} es biyectiva.

Las pruebas de *v*, *vi* y *vii* y *viii* son muy similares a las anteriores. Finalmente se tiene que:

$f_k \times [g_k + h_k] = f_k \times H\,(H^{-1}(g_k) + H^{-1}(h_k))$ Definición de +

$= H\,(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(H\,(H^{-1}(g_k) + H^{-1}(h_k))))$ Definición de $\times$

$= H\,(H^{-1}(f_k) \times (H^{-1}(g_k) + H^{-1}(h_k)))$ Composición de H y H^{-1}

$= H\,(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(g_k) + H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(h_k))$ propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números naturales

$= H\,(H^{-1}(H\,(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(g_k))) + H^{-1}(H(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(h_k))))$

Composición de H y H^{-1}

$= [H\,(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(g_k))] + [H(H^{-1}(f_k) \times H^{-1}(h_k))]$ Definición de +

$= [f_k \times g_k] + [f_k \times h_k]$ Definición de $\times$ □

De este modo, la función biyectiva H: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$, es un isomorfismo entre ($\mathbb{P}$, +, $\times$) y ($\mathbb{N}$, +, $\times$).

Ejemplo 1.

Sea $k = 16$. Efectuar la suma entre f_{16} dada por $f_{16}(x) = 20000x^4 + 3000x^3 + 100x^2 + 30x + 1$ y g_{16} dada por $g_{16}(x) = 5000x^3 + 400x^2 + 70x + 5$, elementos de $\mathbb{P}$.

Se procede a expresar cada función de la siguiente forma[1]:

$$f_{16}(x) = 2(10x)^4 + 3(10x)^3 + 1(10x)^2 + 3(10x) + 1,$$

y

$$g_{16}(x) = 5(10x)^3 + 4(10x)^2 + 7(10x) + 5,$$

Aplicando H^{-1} a cada función se tiene:

$H^{-1}(f_{16}) = 23131_{(16)}$ y $H^{-1}(g_{16}) = 5475_{(16)}$.

Sumado estos números naturales se tiene:

$$H^{-1}(f_{16}) + H^{-1}(g_{16}) = 23131_{(16)} + 5475_{(16)} = 285A6_{(16)}$$

Aplicando H, resulta la suma buscada:

[1] Como la base es 16, entonces 10 corresponde a 16 en esta base, es decir, se reemplaza a $k = 16$ por 10, como se aclaró al definir $\mathbb{P}$.

$$f_{16} + g_{16} = H(285A6)$$

donde,

$$(f_{16} + g_{16})(x) = 2(10x)^4 + 8(10x)^3 + 5(10x)^2 + \mathrm{A}(10x) + 6.$$

Como puede observarse, la suma en este caso se obtiene simplemente sumando componente a componente los coeficientes de las funciones dadas.

Ejemplo 2.

Sea k = 10. Sumar los elementos f_{10} dado por $f_{10}(x)= 500x^2 + 20x + 3$ y g_{10} con $g_{10}(x) = 900x^3 + 80x^2 + 1$. Se expresa cada una de las funciones de la siguiente forma:

$$f_{10}(x) = 5(10x)^2 + 2(10x) + 3 \quad \text{y} \quad g_{10}(x) = 9(10x)^3 + 8(10x)^2 + 0(10x) + 1$$

Aplicando H^{-1} a cada una de las funciones:

$$H^{-1}(f_{10}) = 523 \qquad \text{y} \qquad H^{-1}(g_{10}) = 9801,$$

Efectuando la suma de los números y aplicando H a la suma:

$$H(H^{-1}(f_{10}) + H^{-1}(g_{10})) = H(523 + 9801) = H(10324) = f_{10} + g_{10}$$

donde

$$\begin{aligned}(f_{10} + g_{10})(x) &= 1(10x)^4 + 0(10x)^3 + 3(10x)^2 + 2(10x) + 4 \\ &= 1000x^4 + 30x^2 + 20x + 4\end{aligned}$$

Entonces,

$$(500x^2 + 20x + 3) + (900x^3 + 80x^2 + 1) = 1000x^4 + 30x^2 + 20x + 4.$$

En este ejemplo a diferencia del primero, la suma no resulta tan simple, esto se debe a que por ejemplo $8 + 5 = 13 > k = 10$.

Ejemplo 3.

Dada $k \geq 2$ una base determinada. Sean las funciones f_k y $g_k \in \mathbb{P}$ definidas por $f_k(x) = a_n(kx)^n + \ldots + a_1(kx) + a_0$ y $g_k(x) = b_m(kx)^m + \ldots + b_1(kx) + b_0$ con $n \geq m$. Al aplicar H^{-1} a las funciones anteriores, se tiene:

$$H^{-1}(f_k) = a_n \ldots a_1 a_0 \qquad \text{y} \qquad H^{-1}(g_k) = b_m \ldots b_1 b_0$$

Al efectuar la suma de estos números naturales escritos en base k, se suman las unidades con las unidades, las k-enas con las k-enas, las k^2-enas con las k^2-enas y así sucesivamente, así mismo, es posible que algunas de estas sumas sean mayores que k, por tanto, si se supone que para todo índice $i \leq n$ se tiene que $a_i + b_i < k$, entonces, no se tendrá en cuenta el hecho de llevar. Además, dado que $n \geq m$, las primeras $n - m$ cifras de $H^{-1}(g_k)$ son cero, por tanto:

$$\begin{aligned} H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k) &= (a_n \ldots a_1 a_0) + (b_m \ldots b_1 b_0) \\ &= (a_n + 0)(a_{n-1} + 0)(a_{m+1} + 0)(a_m + b_m)(\, a_{m-1} + b_{m-1}) \ldots (a_0 + b_0) \\ &= a_n\, a_{n-1} \ldots a_{m+1}(a_m + b_m)(\, a_{m-1} + b_{m-1}) \ldots (a_0 + b_0) \\ &= a_n(k)^n + a_{n-1}(k)^{n-1} + \ldots + a_{m+1}(k)^{m+1} + (a_m + b_m)(k)^m + \ldots (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

Al resultado anterior se le puede aplicar H ya que para toda $i = 0, 1, \ldots, n$; se tiene que $0 \leq a_i + b_i < k$, entonces:

$$H(H^{-1}(f_k) + H^{-1}(g_k))_{(x)} = a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} \ldots a_{m+1}(kx)^{m+1} + (a_m + b_m)(kx)^m + \ldots (a_0 + b_0)$$

Que es $(f_k + g_k)(x)$. De este modo, se tiene que:

$$(f_k + g_k)(x) = f_k(x) + g_k(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (kx)^i + \sum_{i=0}^{m} b_i (kx)^i = \sum_{i=0}^{\text{máx}\{n,m\}} (a_i + b_i)(kx)^i .$$

Es decir; si del producto cartesiano $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ se considera al subconjunto:

$$\{(f_k, g_k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \mid \text{para todo } i \leq \text{máx}\{grad\, f_k, grad\, g_k\},\, a_i + b_i < k\}$$

la suma de dos elementos cualesquiera de este subconjunto es simplemente sumar componente a componente los coeficientes.

Ejemplo 4.

Dada $k \geq 2$ una base determinada y f_k, $g_k \in \mathbb{P}$ con $f_k(x) = a_n(kx)^n + \ldots + a_1(kx) + a_0$ y $g_k(x) = b_m(kx)^m + \ldots + b_1(kx) + b_0$. De igual forma que en el ejemplo anterior, se aplica H^{-1} a cada función, obteniéndose los números naturales:

$$H^{-1}(f_k) = a_n \ldots a_1 a_0 \qquad \text{y} \qquad H^{-1}(g_k) = b_m \ldots b_1 b_0$$

Multiplicando estos números naturales en base k, se procede a multiplicar cada una de las cifras de uno de los números por las cifras del otro y luego se suman las cifras correspondientes, pero al igual que en la suma, es posible que algunas de estas multiplicaciones sean mayores que k, por lo cual el proceso de llevar se debe tener en cuenta tanto en la multiplicación como en la suma de las cifras. Sin embargo, si se considera un subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que dada una pareja ordenada de números de este subconjunto el proceso de llevar no se tenga en cuenta cuando se multiplican los números, entonces, para un par de números como los obtenidos anteriormente, resulta un número de $(n + m + 1)$ cifras, que puede ser representado por:

$$(a_n \ldots a_1 a_0) \cdot (b_m \ldots b_1 b_0) = p_{n+m} \ldots p_1 p_0,$$

Pero cada p_i puede determinarse explícitamente como se indica a continuación:

La cifra de las unidades p_0 es resultado del producto de las unidades de ambos números, esto es:

$$p_0 = a_0 b_0,$$

La cifra de las k-enas del número, es decir p_1, resulta al sumar los productos entre las unidades y las k-enas de cada uno de los números, esto es:

$$p_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

La cifra de las k^2-enas del número, esto es p_2, resulta al sumar los productos entre: las unidades y las k^2-enas de cada uno de los números, y entre las k-enas de cada número. Es decir:

$$p_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2,$$

En general, la cifra de las k^i-enas, es decir p_i viene dado por:

$$p_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \dots + a_0 b_q,$$

Siendo $i \leq n + m$. De este modo, se tiene que:

$$p_i = \sum_{t=0}^{i} a_{i-t} b_t \quad \text{O también} \quad p_i = \sum_{r+s=i} a_r b_s$$

Por tanto:

$$p_{n+m} \dots p_1 p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n+m} a_{n+m-i} b_i \right) \left(\sum_{i=0}^{n+m-1} a_{n+m-1-i} b_i \right) \cdots \left(\sum_{i=0}^{2} a_{2-i} b_i \right) \left(\sum_{i=0}^{1} a_{1-i} b_i \right) (a_0 b_0).$$

A este número natural se le puede aplicar la función H, ya que cada $p_i < k$, así:

$$H(p_{n+m}\dots p_1 p_0) = f_k,$$

Donde,

$$f_k(x) = p_{n+m}(kx)^{n+m} + \dots + p_1(kx) + p_0.$$

Este resultado es la multiplicación entre f_k y g_k. Escrito en notación sigma se obtiene:

$$(f_k \times g_k)(x) = f_k(x) \times g_k(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i (kx)^i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{m} b_i (kx)^i\right) = \sum_{i=0}^{n+m}\left(\sum_{t=0}^{i} a_{i-t} b_t\right) \cdot (kx)^i .$$

La suma y la multiplicación halladas en los dos ejemplos anteriores para operar elementos de $\mathbb{P}$ bajo ciertas condiciones sobre el proceso de llevar, corresponden a la suma y la multiplicación de polinomios en una indeterminada x con coeficientes en un anillo A, ya que kx hace el papel de indeterminada y aunque los coeficientes son números naturales, el hecho de que no pertenezcan a una estructura de anillo, en realidad no es una cuestión grave, ya que la multiplicación se puede definir de forma similar.

Ejemplo 5.

Cuando al operar dos funciones de $\mathbb{P}$ para una base k determinada, el proceso de llevar se ve involucrado, es posible caracterizar el resultado mediante la siguiente observación:
Supóngase que $a_i(kx)^i$ y $b_i(kx)^i$ son dos términos de algún par de funciones $f_k(x)$ y $g_k(x)$ imágenes de f_k, g_k de $\mathbb{P}$ para una base fija k, si se procede a sumar o multiplicar estas dos funciones como se vio en el ejemplo anterior y resulta que por ejemplo $a_i + b_i \geq k$, entonces:

$$(a_i + b_i)(kx)^i = cociente\left(\frac{a_i + b_i}{k}\right)(kx)^{i+1} + \left[(a_i + b_i) mód\ k\right](kx)^i .$$

De igual forma, si $a_i \times b_j \geq k$, entonces:

$$a_i(kx)^i \times b_j(kx)^j = cociente\left(\frac{a_i \times b_i}{k}\right)(kx)^{i+j+1} + \left[(a_i \times b_j) mód\ k\right](kx)^{i+j} .$$

1.1.2. Los números naturales y las expresiones *n*–males[2]

Un número natural n se puede escribir en los números n–males, como:

$$n = (n-1),\overline{(k-1)} \text{ en una base } k > n$$

Por ejemplo 1 en base 5 es $0,\overline{4}$ y en general

$$1 = 0,\overline{(k-1)} \text{ en base } k.$$

Para la demostración de este hecho, se usa la *serie geométrica*:

$$r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{r}{1-r} \text{ siempre que } |r| < 1$$

Como:

$$\begin{aligned} 0,\overline{(k-1)} &= \frac{k-1}{k} + \frac{k-1}{k^2} + \frac{k-1}{k^3} + \cdots \frac{k-1}{k^n} + \cdots \\ &= (k-1)\left[\left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^3 + \cdots \left(\frac{1}{k}\right)^n + \cdots\right] \\ &= (k-1) \cdot \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}} = (k-1) \cdot \frac{1}{k-1} = 1 \end{aligned}$$

Esto sucede para todo k entero mayor o igual a 2.

De igual manera, el racional entero 2 se puede representar en una base k determinada mayor que 2, así:

[2] El término n–mal es usado para referirse a representaciones de números decimales en base n distinta de 10, puede consultarse más al respecto en: LUQUE, C.; MORA, L.; TORRES, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: clasificar, medir, invertir*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, nomos, 2005.

$$2 = 1,\overline{(k-1)}\,,$$

y esto expresado como una serie geométrica corresponde a:

$$2 = 1 + (k-1)\left[\left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^3 + \cdots \left(\frac{1}{k}\right)^n + \cdots\right] = 1 + (k-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^n,$$

De manera que un racional entero positivo *n*, se puede representar en una base $k > n$ como la serie geométrica:

$$n = (n-1) + (k-1)\left[\left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^3 + \cdots \left(\frac{1}{k}\right)^p + \cdots\right] = (n-1) + (k-1)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^p,$$

Esta representación *n*–mal de los números racionales enteros positivos por medio de series geométricas sugiere la definición de la siguiente función:

Para todo número natural n distinto de 0 *escrito en una base fija* $k \geq 2$*, se define la función*[3] F_k *de* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ *en* $\mathbb{R}^{(-k,\,k)}$*, tal que:*

$$F_k(n) = f_{n,k}\,,$$

Donde $f_{n,k}$ *es una función de* $\mathbb{R}^{(-k,\,k)}$ *y está definida por la expresión:*

$$f_{n,k}(x) = (n-1) + (k-1)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^p,$$

Esto es:

[3] El conjunto denotado por $\mathbb{R}^{(-k,\,k)}$ esta definido de la siguiente forma:

$$\mathbb{R}^{(-k,\,k)} = \{ f : (-k, k) \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$$

$$F_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^{(-k,\,k)}$$
$$n \quad \mapsto f_{n,k} : x \mapsto (n-1) + (k-1)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^p$$

El rango de la función F_k es $\mathbb{R}^{(-k,\ k)}$ porque al ser de este modo, la serie geométrica que aparece en la definición de $f_{n,k}(x)$ converge, asunto que se resuelve con el teorema que sigue.

***Teorema* 3**. *La función* $f_{n,k}$: $(-k, k) \to \mathbb{R}$ *puede expresarse como:*

$$f_{n,k}(x) = (n-1) + \frac{(k-1)x}{k-x},$$

Demostración.

Como el dominio de la función $f_{n,k}$ es $(-k, k)$, significa que $-k < x < k$, por tato $-1 < \frac{x}{k} < 1$ o lo que es igual $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, de esta forma la serie geométrica $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^p$ converge a:

$$\frac{\frac{x}{k}}{1-\frac{x}{k}} = \frac{x}{k-x}$$

De este modo,

$$f_{n,k}(x) = (n-1) + (k-1)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^p = (n-1) + \frac{(k-1)x}{k-x}$$

□

Con esto, se tiene que la función F_k se puede expresar de la siguiente manera:

$$F_k(n) = f_{n,k} \text{ donde } f_{n,k}(x) = (n-1) + \frac{(k-1)x}{k-x} \text{ con } -k < x < k.$$

Ejemplos.

1. Considérese el número natural 1 escrito en base 2, del cual se obtiene:

$$F_2(1) = f_{1,2} \text{ donde } f_{1,2}(x) = \frac{x}{2-x} \text{ con } -2 < x < 2$$

Del mismo número 1 pero ahora en base 3, se obtiene:

$$F_3(1) = f_{1,3} \text{ donde } f_{1,3}(x) = \frac{2x}{3-x} \text{ con } -3 < x < 3$$

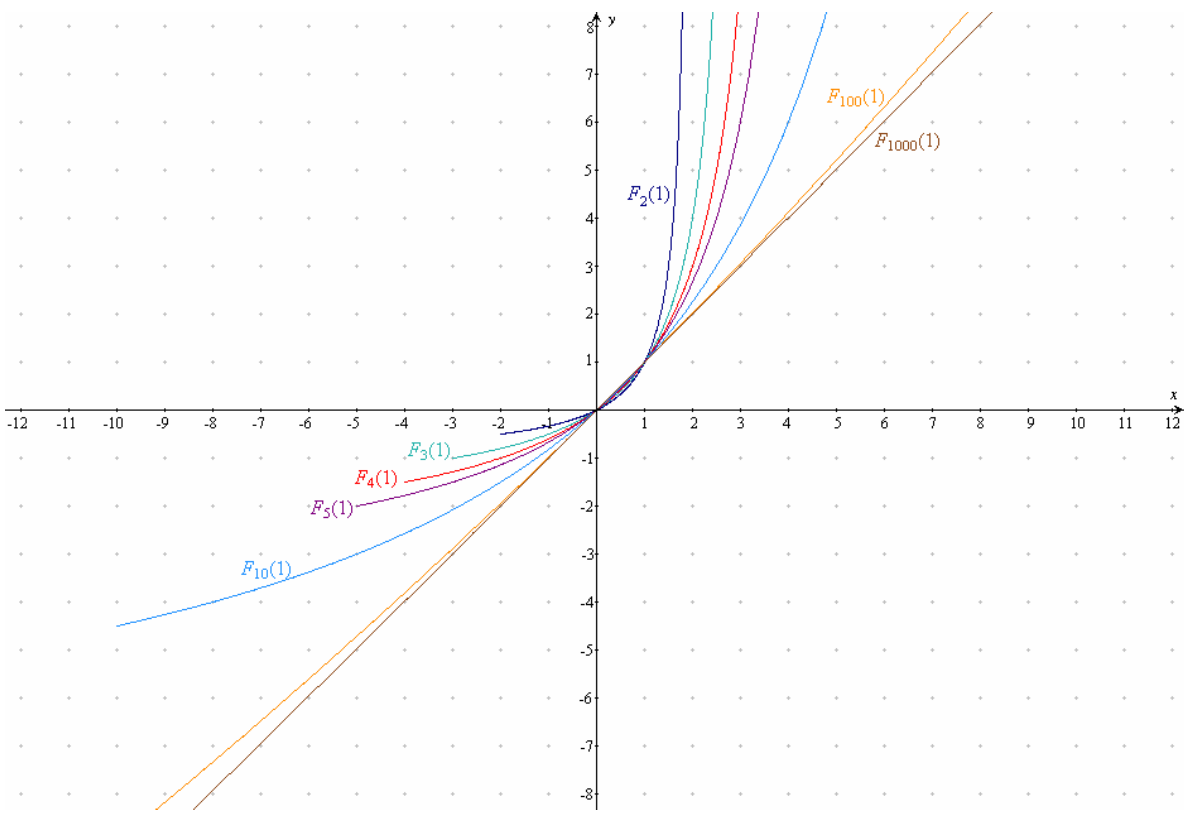
En base 4, se tiene:

$$F_4(1) = f_{1,4} \text{ donde } f_{1,4}(x) = \frac{3x}{4-x} \text{ con } -4 < x < 4$$

Y, en general, para una base k:

$$F_k(1) = f_{1,k} \text{ donde } f_{1,k}(x) = \frac{(k-1)x}{k-x} \text{ con } -k < x < k.$$

En la siguiente gráfica se ilustran algunas $F_i(1)$.



Gráfica 1

2. Considérese el número natural 2 escrito en base 2, del cual se tiene que:

$$F_2(10) = f_{2,2} \text{ donde } f_{2,2}(x) = 1 + \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} \text{ con } -2 < x < 2$$

Para el número natural 2 escrito en base 3 resulta:

$$F_3(2) = f_{2,3} \text{ donde } f_{2,3}(x) = 1 + \frac{2x}{3-x} = \frac{3+x}{3-x} \text{ con } -3 < x < 3$$

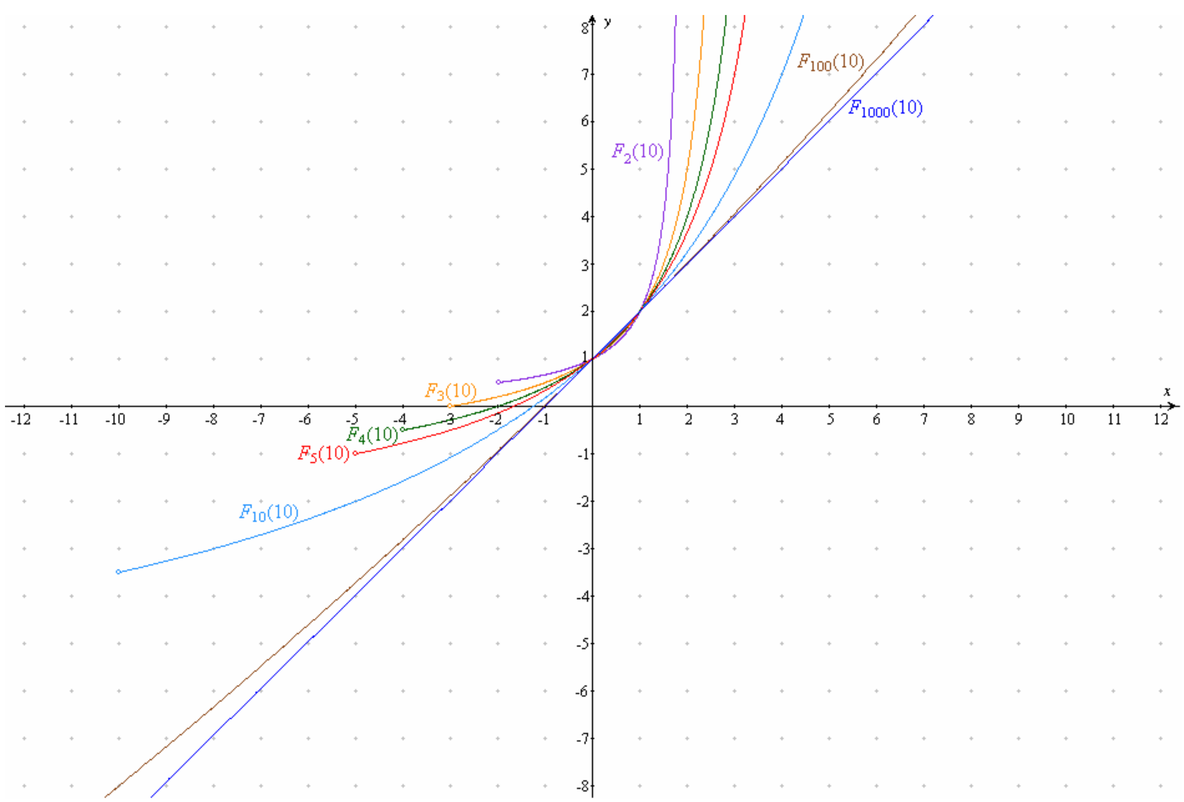
Para el mismo número 2 escrito en base 4:

$$F_4(2) = f_{2,4} \text{ donde } f_{2,4}(x) = 1 + \frac{3x}{4-x} = \frac{4+2x}{4-x} \text{ con } -4 < x < 4$$

Y en general, en base k:

$$F_k(2) = f_{2,k} \text{ donde } f_{2,k}(x) = 1 + \frac{(k-1)x}{k-x} = \frac{k+(k-2)x}{k-x} \text{ con } -k < x < k.$$

Algunas gráficas de estas funciones aparecen a continuación:



Gráfica 2

Estos dos ejemplos muestran que a cada número natural se le puede asociar infinitas funciones F_k, una para cada base k, además, esta función está bien definida, ya que la base siempre esta fija, por tanto ¿Cómo definir una función tal que a cada número natural le corresponda el conjunto infinito de funciones F_k que resultan para cada base k? para resolver esta cuestión, se define lo siguiente:

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, *se define el conjunto*

$$A_n = \left\{ f_{n,k} : (-k, k) \to \mathbb{R} \mid f_{n,k}(x) = (n-1) + \frac{(k-1)x}{k-x}, \wedge, k = 2,3,4,\ldots \right\}$$

y se denotará por $\mathfrak{I}$ *al conjunto formada por todos los* A_n:

$$\mathfrak{I} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots\}$$

De lo anterior se puede deducir que la intersección de dos cualesquiera elementos de $\mathfrak{I}$ es vacía y que la unión de todos los A_n es $\mathfrak{I}$, en efecto:

Sean A_n, A_m dos elementos distintos cualesquiera de $\mathfrak{I}$, y supóngase que $A_n \cap A_m \neq \emptyset$, entonces existe una función $f_{i,p}$ con $-p < x < p$ para algún i, p naturales, que está tanto en A_n como en A_m, de lo cual resultan las siguientes igualdades:

$$f_{i,p} = f_{n,k} \qquad \text{y} \qquad f_{i,p} = f_{m,j}$$

para algún k y j naturales. Analizando la primera de las dos igualdades anteriores se tiene que si $f_{i,p} = f_{n,k}$ entonces $p = k$, ya que el dominio de $f_{i,p}$ es $(-p, p)$ y el dominio de $f_{n,k}$ es $(-k, k)$, por tanto el dominio de ambas funciones deben ser iguales como un primer requerimiento para que la igualdad dada se tenga, entonces $f_{i,p} = f_{n,p}$ para alguna base p, pero de esta igualdad se concluye que $i = n$; de manera similar, para la segunda igualdad también se deduce que $i = m$, entonces $m = n$ y por tanto $A_n = A_m$ lo cual es una contradicción, así que $A_n \cap A_m = \varnothing$; además esto demuestra que todos los elementos de $\Im$ son distintos. Por otro lado, la unión de todos los A_n es $\Im$ por la misma definición de $\Im$.

De este modo, se puede definir una función tal que a cada número natural le asigne un elemento de $\Im$, esto es:

Sea F una función de $\mathbb{N}^*$ *en* $\Im$ *tal que a cada número natural n le corresponda el elemento* A_n *de* $\Im$. *Esto es*:

$$F(n) = A_n.$$

De esta manera se logra asignar a cada natural una colección de funciones. Además, se puede observar que cada A_n converge[4], tal hecho puede observarse de manera informal en las gráficas 1 y 2 que representan algunos elementos de A_1 y A_2 respectivamente en el plano cartesiano, por ejemplo A_1 parece que converge a la recta $y = x$, y A_2 a la recta $y = x + 1$, en efecto; considérese A_1 y obsérvese que:

$$\lim_{k\to\infty} f_{1,k}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)x}{k-x} = \lim_{k\to\infty} \frac{x - \frac{x}{k}}{1 - \frac{x}{k}} = x\,,$$

De igual manera, si se considera A_2, se tiene lo siguiente:

$$\lim_{k\to\infty} f_{2,k}(x) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{(k-1)x}{k-x}\right) = 1 + \lim_{k\to\infty} \frac{x - \frac{x}{k}}{1 - \frac{x}{k}} = x + 1\,,$$

Y en general para A_n, resulta el límite de convergencia:

[4] Cada A_n es una sucesión de funciones reales con dominios que se amplían conforme k se hace más grande.

$$\lim_{k\to\infty} f_{n,k}(x) = \lim_{k\to\infty}\left((n-1) + \frac{(k-1)x}{k-x} \right) = (n-1) + \lim_{k\to\infty}\frac{x - \frac{x}{k}}{1 - \frac{x}{k}} = x + (n-1)\,,$$

Ahora, denotando con $\overline{A_n}$ al límite de convergencia de A_n cuyo resultado es una función afín definida sobre $\mathbb{R}$, es decir $\overline{A_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; y $\aleph$ al conjunto formado por los $\overline{A_n}$, y modificando un poco la definición de la función *F*, se establece lo siguiente:

Sea G una función de $\mathbb{N}^*$ *en* $\aleph = \{\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots \overline{A_n}, \ldots\}$ *tal que a cada número natural n le corresponde el elemento* $\overline{A_n}$ *de* $\aleph$. *Esto es*:

$$G(n) = \overline{A_n} \text{ donde } \overline{A_n}(x) = x + (n-1)\,,$$

Efectivamente *G* es una función, ya que todo $n \in \mathbb{N}^*$ tiene al menos una imagen en $\aleph$, además dicha imagen es única, ya que si se supone que $G(n)$ tiene dos imágenes distintas, por ejemplo: $G(n)_{(x)} = x + (n - 1)$ y $G(n)_{(x)} = x + (n' - 1)$, entonces $G(n)_{(x)} - n + 1 = G(n)_{(x)} - n' + 1$ y de esto se deduce que $n = n'$, por tanto $G(n)$ es única.

Por otro lado, se ha ganado sencillez con esta definición, ya que se partió de un conjunto infinito formado por conjuntos infinitos y ahora se obtiene un conjunto un poco más simple que sólo está constituido por funciones afines. De este modo se procede a definir operaciones sobre el conjunto $\aleph$.

***Definición* 3.** *Para todo* $\overline{A_n}$, $\overline{A_m}$ *elementos de* $\aleph$, *se tiene que*

$$\overline{A_n} \oplus \overline{A_m} = \overline{A_n}\left(\overline{A_m}\right),$$

A la operación $\oplus$ se denomina adición o suma de elementos de $\aleph$, y

$$\left(\overline{A_n} \oplus \overline{A_m}\right)(x) = \overline{A_n}(x) \oplus \overline{A_m}(x) = \overline{A_n}\left(\overline{A_m}(x)\right).$$

Se ha definido la suma de dos elementos cualesquiera de $\aleph$ de esta forma porque, en particular, $\overline{A_1}(x) = x$ bajo la composición de funciones constituye el elemento neutro, por otro lado, al componer dos de estas funciones cualesquiera el resultado también está en $\aleph$.

Por otro lado, la suma anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\overline{A_n}(x) \oplus \overline{A_m}(x) &= \overline{A_n}\left(\overline{A_m}(x)\right)\\ &= \overline{A_n}(x+m-1)\\ &= (x+m-1)+(n-1) = x+([n+m-1]-1)\\ &= \overline{A_{n+m-1}}(x)\end{aligned}$$

esto es:

$$\overline{A_n} \oplus \overline{A_m} = \overline{A_n}\left(\overline{A_m}\right) = \overline{A_{n+m-1}}$$

Teorema 4. *Para todo $\overline{A_k}$, $\overline{A_m}$, $\overline{A_p}$ elementos de $\aleph$, se tiene que:*

1. $\left(\overline{A_k} \oplus \overline{A_m}\right) \oplus \overline{A_p} = \overline{A_k} \oplus \left(\overline{A_m} \oplus \overline{A_p}\right)$ es decir, $\oplus$ es asociativa
2. $\overline{A_k} \oplus \overline{A_m} = \overline{A_m} \oplus \overline{A_k}$ es decir, $\oplus$ es conmutativa.

Demostración

1. La suma de elementos de $\aleph$ es asociativa.

$$\left(\overline{A_k} \oplus \overline{A_m}\right) \oplus \overline{A_p} = \overline{A_k}\left(\overline{A_m}\right) \oplus \overline{A_p} \qquad \text{Definición de } \oplus$$

$$= \left(\overline{A_k}\left(\overline{A_m}\right)\right)\left(\overline{A_p}\right) \qquad \text{Definición de } \oplus$$

$$= \overline{A_k}\left(\overline{A_m}\left(\overline{A_p}\right)\right) \qquad \text{Asociativa de la composición de funciones}$$

$$= \overline{A_k}\left(\overline{A_m} \oplus \overline{A_p}\right) \qquad \text{Definición de } \oplus$$

$$= \overline{A_k} \oplus \left(\overline{A_m} \oplus \overline{A_p}\right) \qquad \text{Definición de } \oplus$$

2. La suma de elementos de $\aleph$ es conmutativa.

$$\overline{A_k} \oplus \overline{A_m} = \overline{A_k}\left(\overline{A_m}\right) \qquad \text{Definición de } \oplus$$

$$= \overline{A_{k+m-1}} \qquad \text{Definición de } \oplus$$

$$= \overline{A_{m+k-1}} \qquad \text{Propiedad conmutativa de la suma en } \mathbb{N}$$

$$= \overline{A_m} \oplus \overline{A_k} \qquad \text{Definición de } \oplus$$

□

Además de las propiedades anteriores, en el conjunto $\aleph$ existe un elemento especial del cual ya se ha hablado, se trata de $\overline{A_1}(x) = x$, el cual es el elemento neutro de la adición de elementos de $\aleph$.

De aquí en adelante y para efectos prácticos, se adoptará una nueva notación que permita una mayor familiaridad con los símbolos usuales usados para representar a $\mathbb{N}$:

Se notará a $\overline{A_n}$ como $(n-1)^*$

De esta forma, se tiene que:

$$\aleph = \{(n-1)^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (n-1)^*_{(x)} = x + (n-1),\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

Además la suma antes definida resulta más familiar, ya que si se suman m^* y n^*, se obtiene:

$$\begin{aligned} m^* \oplus n^* &= \overline{A_{m+1}} \oplus \overline{A_{n+1}} \\ &= \overline{A_{m+n+1}} \\ &= (m+n)^*. \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, con esta notación es más sencillo realizar cualquier suma de elementos de $\aleph$, además el conjunto puede escribirse de la siguiente forma:

$$\aleph = \{0^*, 1^*, 2^*, \ldots, n^*, \ldots\}$$

el cual a primera vista es el conjunto de los números naturales, ya que tiene un primer elemento denotado por 0^* y cada elemento tiene un sucesor, entonces, al recordar la representación de $\mathbb{N}$ por medio de:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

surge la siguiente definición:

***Definición* 4.** *Para todo elemento n^* del conjunto $\aleph$, se define el sucesor de n^* notado por $(n^*)^+$ como:*

$$(n^*)^+ = (n^+)^*$$

Donde n^+ es el sucesor de n y tanto n como n^+ son elementos de $\mathbb{N}$.

De esta definición se deduce la definición por recurrencia de la operación $\oplus$, así:

***Teorema* 5.** *Para todo par de elementos m^*, n^* de $\aleph$ la suma ($\oplus$) se define como*:

i. $m^* \oplus 0^* = m^*$

ii. $m^* \oplus (n^*)^+ = [(m+n)^*]^+$

Demostración:

i. $m^* \oplus 0^* = (m + 0)^*$ Según la definición de suma en $\aleph$

$= m^*$ Definición de suma o adición de números naturales

ii. $m^* \oplus (n^*)^+ = m^* \oplus (n^+)^*$ Definición de sucesor en $\aleph$

$= (m + n^+)^*$ Definición de suma en $\aleph$

$= [(m + n)^+]^*$ Definición de suma de números naturales

Esto prueba lo que se quería. □

Para finalizar esta sección, se tiene la siguiente definición:

***Definición* 5.** *Para todo par de elementos* m^*, n^* *de* $\aleph$ *se define la operación multiplicación notada* $\otimes$ *por:*

$$m^* \otimes n^* = (m \cdot n)^*$$

donde $(\cdot)$ *es la multiplicación de números naturales*.

De esta definición se deduce la definición por recurrencia de la operación $\otimes$, así:

***Teorema* 5.** *Para todo par de elementos* m^*, n^* *de* $\aleph$ *la multiplicación* $(\oplus)$ *se define como*:

i. $m^* \otimes 0^* = 0^*$

ii. $m^* \otimes (n^*)^+ = (m \cdot n)^* \oplus m^*$

Demostración:

i. $m^* \otimes 0^* = (m \cdot 0)^*$ Definición de multiplicación en $\aleph$

$= 0^*$ Definición de multiplicación de números naturales

$ii.\ m^* \otimes (n^*)^+ = m^* \otimes (n^+)^*$ Definición de sucesor en $\aleph$

$= (m \cdot n^+)^*$ Definición de multiplicación en $\aleph$

$= (m \cdot n + m)^*$ Definición de multiplicación de números naturales

$= (m \cdot n)^* \oplus m^*$ Definición de suma en $\aleph$

Esto prueba lo que se quería. $\square$

En conclusión, se logró a partir del conjunto de los números naturales definir funciones reales por medio de dos caminos; el primero, recurriendo al hecho de que en el sistema posicional de los números naturales cualquier elemento de este conjunto puede escribirse como una suma de productos formados por un coeficiente, que corresponde a cada una de las cifras del número, y una potencia de la base; permitiendo definir una función biyectiva H_k entre los números naturales y un conjunto formado por funciones polinómicas denotado por $\mathbb{P}$, obteniéndose como resultado un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$.

Por otro lado, se recurrió a las series geométricas y a la representación n–mal de los números naturales en el conjunto de los números racionales para definir en principio una función F_k entre $\mathbb{N}^*$ y $\mathbb{R}^{(-k,\ k)}$ siendo k un número natural fijo mayor o igual a dos que funciona como base; después k dejó de desempeñarse como una constante fija para convertirse en una variable, por tanto, cada número natural definía por medio de F_k un conjunto infinito de funciones, una para cada k, por lo cual se definieron las clases A_n formadas por todas las funciones que n escrito en cualquier base k genera a partir de F_k, con lo cual, se formó el conjunto denotado por $\Im$ constituido por todas las clase A_n, lo que permitió definir otra función, ahora de $\mathbb{N}$ en $\Im$; sin embargo, cada clase A_n que no es otra cosa que una sucesión de funciones, converge a una función afín con dominio en $\mathbb{R}$, lo cual sugirió definir una última función entre $\mathbb{N}$ y un conjunto denotado por $\aleph$, integrado por todos los límites de convergencia de las clases A_n, obteniéndose finalmente un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y $\aleph$.

Ahora, en la sección que sigue, se procurará un trabajo similar pero tomando como base al conjunto de los números racionales y definiendo funciones reales a partir de lo desarrollado en esta sección y por supuesto de nuevas formas que surgirán al trabajar con este sistema numérico.

1.2. GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE LOS NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

1.2.1. Los números *n*–males y algunas funciones

1.2.1.1. Funciones reales a partir de *n*–males finitos

Sea $k\in\mathbb{N}$ una base fija mayor o igual a dos y considérese el conjunto $\mathbb{A}$ de los números k–males finitos escritos en base k:

$$\mathbb{A} = \{a_n a_{n-1}\ldots a_m, a_{m-1}\ldots a_0,\ 0 \le a_i < k,\ a_n \neq 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Al igual que los números naturales, los números k–males también pueden escribirse como una suma de productos formados por un coeficiente, que corresponde a cada una de las cifras del número y una potencia de la base; por ejemplo en base 5:

$$243,4012_{(5)} = 2(5)^2 + 4(5) + 3(5)^0 + 4(5)^{-1} + 0(5)^{-2} + 1(5)^{-3} + 2(5)^{-4}$$

Y este número a su vez, puede expresarse como:

$$243,\ 4012_{(5)} = \frac{2434012}{10^4}{}_{(5)} = \frac{2(5)^6 + 4(5)^5 + 3(5)^4 + 4(5)^3 + 0(5)^2 + 1(5)^1 + 2(5)^0}{5^4},$$

Escritura que sugiere asociar al número anterior la función con dominio $\mathbb{R}^*$:

$$g(x) = \frac{2(5x)^6 + 4(5x)^5 + 3(5x)^4 + 4(5x)^3 + 0(5x)^2 + 5x + 2}{(5x)^4},$$

Ahora, en el caso general, si $a_n a_{n-1} \ldots a_m, a_{m-1} \ldots a_0$ es un k–mal escrito en base k, entonces:

$$\begin{aligned}
a_n a_{n-1} \ldots a_m, a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_0 &= a_n(k)^{n-m} + a_{n-1}(k)^{n-(m+1)} + \ldots + a_m(k)^{n-(m+(n-m))} + a_{m-1}(k)^{-1} + \\
&\quad a_{m-2}(k)^{-2} + \ldots + a_0(k)^{-m}. \\
&= a_n(k)^{n-m} + \ldots + a_m(k)^{n-(m+(n-m))} + \frac{a_{m-1}}{k} + \frac{a_{m-2}}{k^2} + \cdots + \frac{a_0}{k^m} \\
&= \frac{a_n(k)^{n-m}(k)^m + \ldots + a_m(k)^{n-(m+(n-m))}(k)^m + a_{m-1}(k)^{m-1} + \ldots + a_0}{(k)^m} \\
&= \frac{a_n(k)^n + a_{n-1}(k)^{n-1} \ldots + a_m(k)^m + a_{m-1}(k)^{m-1} + a_{m-2}(k)^{m-2} + \ldots + a_0}{(k)^m}
\end{aligned}$$

Lo cual permite escribir al conjunto $\mathbb{A}$ como:

$$\mathbb{A} = \left\{ \frac{a_n(k)^n + a_{n-1}(k)^{n-1} \ldots + a_m(k)^m + a_{m-1}(k)^{m-1} + a_{m-2}(k)^{m-2} + \ldots + a_0}{(k)^m}, 0 \le a_i < k, \right.$$

$$\left. a_n \ne 0, n, m \in \mathbb{N}, n \ge m,\ i = 0,1,2,\ldots,n \right\}$$

Por otro lado, sea

$$\mathbb{P}_A = \left\{ \frac{H(k^m \alpha)}{H(k^m)}, k^m \alpha \in \mathbb{N}, \alpha \text{ es un } k - \text{mal finito con } m \text{ cifras en el periodo y } H(k^m) \ne 0 \right\}$$

siendo H la función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{P}$ definida en la sección 1.1.1. Con base en lo anterior se define:

Para una base fija k, sea $\mathscr{H}_{k,\mathbb{A}}$ una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{P}_A$, tal que a cada k–mal α *de $\mathbb{A}$ le corresponde la función* $\dfrac{H(k^m\alpha)}{H(k^m)}$ *de $\mathbb{P}_A$. Esto es*:

$$\mathscr{H}_{k,\mathbb{A}} : A \to \mathbb{P}_A.$$

$$\frac{a_n k^n + \ldots a_0}{k^m} \mapsto \frac{H(a_n k^n + \ldots a_0)}{H(k^m)} = \frac{f_k}{g_k}$$

donde $f_k(x) = a_n\,(kx)^n + \ldots + a_0$, $g_k(x) = (kx)^m$ y $\left(\dfrac{f_k}{g_k}\right)(x) = \dfrac{a_n (kx)^n + \ldots + a_0}{(kx)^m}$.

De esta manera se logra asignar a cada k–mal finito una función racional con dominio en $\mathbb{R}^*$; además en el caso de que el k–mal sea un número natural, todo se reduce a lo desarrollado en la primera sección.

1.2.1.2. Funciones reales a partir de *n*–males infinitos periódicos

Un número k–mal de una sola cifra en el periodo, por ejemplo $a_n a_{n-1} \ldots a_0, \overline{c}$ puede escribirse:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_0, \overline{c} = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_0 + c\left(\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \cdots \left(\frac{1}{k}\right)^n + \cdots\right)$$

de modo que a partir de los resultados obtenidos en la sección 1.1.2. resulta obvio asociar al número anterior la siguiente expresión:

$$h(x) = a_n (kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0 + c\left(\frac{x}{k} + \left(\frac{x}{k}\right)^2 + \cdots \left(\frac{x}{k}\right)^n + \cdots\right)$$

Ignorando por un momento el dominio de esta función y asumiendo que $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$ entonces la serie converge y la función anterior puede escribirse:

$$h(x) = a_n (kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0 + \frac{cx}{k - x}$$

Ahora, sean los conjuntos para una base fija k:

$$\mathbb{P}_k = \{f_k\colon (-k, k) \to \mathbb{R} \mid f_k(x) = a_n (kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0,\ 0 \le a_i < k,\ a_i \in \mathbb{N},\ i = 0,1,\ldots, n\}$$

$$\mathbb{H}_{1,k} = \left\{ f_k^* : (-k, k) \to \mathbb{R} \mid f_k^*(x) = \frac{cx}{k - x}, 0 \le c < k \right\} \text{ y}$$

$$\mathbb{P}_k + \mathbb{H}_{1,k} = \{f_k + f_k^* \mid f_k \in \mathbb{P}_k, \wedge, f_k^* \in \mathbb{H}_{1,k}\}$$

Luego:

Para una base fija $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, *sea* $\mathbb{Q}_{1,k}$ *el conjunto de los números* k*–males infinitos periódicos de una sola cifra periódica y*

$$\mathscr{H}_{1,k} : \mathbb{Q}_{1,k} \to \mathbb{P}_k + \mathbb{H}_{1,k}.$$

Una función tal que si α *es un* k*–mal infinito con* $n + 1$ *cifras en* $[[\alpha]]$ *y un número* c *en el periodo, diferente de cero y de* $k-1$, *entonces*[5]:

$$\mathscr{H}_{1,k}(\alpha) = H([[\alpha]]) + f_k^* \text{ donde } f_k^*(x) = \frac{cx}{k - x}$$

Así, si $\alpha = a_n a_{n-1\ldots} a_0, \bar{c}$ entonces $\mathscr{H}_{1,k}(\alpha) = h$, donde

[5] $[[\alpha]]$ designa la parte entera del k–mal α.

$$h(x) = a_n (kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0 + \frac{cx}{k-x}$$

como se esperaba.

Considérese ahora el caso de un k–mal infinito con dos cifras en el periodo, por ejemplo, $a_{n\ldots}a_0,\overline{cd}$, dicho número se puede escribir:

$$a_{n\ldots}a_0,\overline{cd} \;=\; a_n k^n + \ldots + a_0 + c\left(\frac{1}{k} + \cdots + \left(\frac{1}{k}\right)^{2n-1} + \cdots\right) + d\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{k}\right)^{2n} + \cdots\right)$$

escritura que sugiere asociar a la expresión anterior la función:

$$u(x) = a_n (kx)^n + \ldots + a_0 + c\left(\frac{x}{k} + \cdots + \left(\frac{x}{k}\right)^{2n-1} + \cdots\right) + d\left(\left(\frac{x}{k}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{k}\right)^{2n} + \cdots\right)$$

si se supone que $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, entonces las series que aparecen convergen, y la función u es equivalente a:

$$u(x) = a_n (kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0 + \frac{ckx + dx^2}{k^2 - x^2}$$

Precisando; sean los conjuntos para una base fija k:

$$\mathbb{H}_{2,k} = \left\{ f_k^* : (-k,k) \to \mathbb{R} \mid f_k^*(x) = \frac{ckx + dx^2}{k^2 - x^2}, 0 \le c, d < k \right\}$$

y

$$\mathbb{P}_k + \mathbb{H}_{2,k} \;=\; \{ f_k + f_k^* \mid f_k \in \mathbb{P}_k, \wedge, f_k^* \in \mathbb{H}_{2,k} \}$$

Luego:

Para una base fija $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, sea $\mathbb{Q}_{2,k}$ el conjunto de los números k–males infinitos periódicos de dos cifras periódicas y

$$\mathscr{H}_{2,k} : \mathbb{Q}_{2,k} \to \mathbb{P}_k + \mathbb{H}_{2,k}.$$

Una función tal que si α *es un k–mal infinito con* $n + 1$ *cifras en* $[[\alpha]]$ *y dos números* c, d *diferentes y menores que k en el periodo, entonces*:

$$\mathscr{H}_{2,k}(\alpha) = H([[\alpha]]) + f_k^* \text{ donde } f_k^*(x) = \frac{ckx + dx^2}{k^2 - x^2}$$

De este modo, si $\alpha = a_{n\ldots}a_0,\overline{cd}$ entonces:

$$\mathscr{H}_{2,k}(\alpha) = u = H([[\alpha]]) + f_k^*, \text{ donde } u(x) = a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0 + \frac{ckx + dx^2}{k^2 - x^2}$$

Para el caso general, sea $\alpha = a_n a_{n-1} \ldots a_0,\overline{c_1 c_2 \ldots c_m}$ un k–mal con m cifras periódicas, expresado como:

$$a_n \ldots a_0,\overline{c_1 c_2 \ldots c_m} = a_n k^n + \ldots + a_0 + \left[\frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \frac{c_3}{k^3} + \cdots \frac{c_m}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m+1}} + \frac{c_2}{k^{m+2}} + \frac{c_3}{k^{m+3}} + \cdots \frac{c_m}{k^{2m}} + \cdots\right]$$

el cual es igual a:

$$a_n k^n + \ldots + a_0 + c_1\left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k^{pm+1}} + \cdots\right) + c_2\left(\frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{1}{k^{pm+2}} + \cdots\right) + \cdots + c_m\left(\frac{1}{k^m} + \cdots + \frac{1}{k^{pm}} + \cdots\right)$$

esto sugiere asociar al número anterior la expresión:

$$v(x) = a_n(kx)^n + \ldots + a_0 + c_1\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{pm+1} + c_2\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{pm+2} + \cdots + c_m\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{pm}$$

Si se asume que $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, y como para todo $r\in\mathbb{R}$, si $|\ r\ | < 1$ e i, $m\in\mathbb{N}$, entonces la serie $r^i + r^{m+i} + \ldots + r^{pm+i} + \ldots$ converge a $\dfrac{r^i}{1-r^m}$; la función anterior queda:

$$v(x) = a_n(kx)^n + \ldots + a_0 + \frac{c_1k^{m-1}x + c_2k^{m-2}x^2 + c_3k^{m-3}x^3 + \ldots + c_mx^m}{k^m - x^m}$$

que puede escribirse también:

$$v(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(kx)^{n-i} + \frac{\sum_{p=1}^{m} c_pk^{m-p}x^p}{k^m - x^m}.$$

Lo anterior puede precisarse al considerar los siguientes conjuntos definidos para una base fija k:

$$\mathbb{P}_k = \{f_k: (-k, k)\to\mathbb{R} \mid f_k = a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0,\ 0 \leq a_i < k,\ a_i\in\mathbb{N},\ i = 0,1,\ldots, n\}$$

$$\mathbb{H} = \left\{f_k^* : (-k,k) \to \mathbb{R} \mid f_k^*(x) = \frac{c_1k^{m-1}x + c_2k^{m-2}x^2 + \ldots + c_mx^m}{k^m - x^m}, 0 \leq c_i < k, i = 0,1,\ldots,m\right\}$$

y

$$\mathbb{P}_k + \mathbb{H} = \{ f_k + f_k^* \mid f_k\in\mathbb{P}_k, \wedge,\ f_k^* \in\mathbb{H}\}$$

De manera que:

Para una base fija $k\in\mathbb{N}$, $k \geq 2$, *sea* $\mathbb{Q}_k$ *el conjunto de los números k–males y*

$$\mathscr{H}_k : \mathbb{Q}_k \to \mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$$

Una función tal que:

i) *Si* α *es un entero o un k–mal finito de n números y m cifras k–males*, *entonces*:

$$\mathscr{H}_k(\alpha) = \frac{H(k^m\alpha)}{H(k^m)}.$$

ii) *Si* α *es un k–mal infinito con n* + 1 *cifras en* $[[\alpha]]$ *y m números* c_i *en el periodo*, *no todos iguales a k*–1 *o cero*, *entonces*:

$$\mathscr{H}_k(\alpha) = H([[\alpha]]) + f_k^* \text{ donde } f_k^*(x) = \frac{\sum_{p=1}^{m} c_p k^{m-p} x^p}{k^m - x^m}.$$

De esta forma, se logra integrar el caso finito de la sección anterior con el caso infinito manejado en esta. A continuación se enuncian y demuestran algunos resultados:

***Teorema* 6**. $\mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H}) = \mathbb{P}_k$.

Demostración.

Sea $f \in \mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$ entonces $f \in \mathbb{P}_A$ y $f \in \mathbb{P}_k + \mathbb{H}$, esto significa que:

$$f = \frac{H(k^m\alpha)}{H(k^m)} = f_k + f_k^*$$

para algún α finito elemento de $\mathbb{Q}_k$, ya que $\mathbb{P}_A$ es un conjunto definido sobre k–males finitos. Por tanto, f_k^* está dada por $f_k^*(x) = 0$ pues α es finito, así:

$$f = \frac{H(k^m\alpha)}{H(k^m)} = f_k$$

donde $f_k = H(\beta)$ para algún $\beta \in \mathbb{N}$. De este modo, si $\alpha = a_n a_{n-1} \ldots a_m,\ a_{m-1} \ldots a_0$ y $\beta = b_q \ldots b_0$ entonces:

$$\frac{H(k^m \alpha)}{H(k^m)} = \frac{H(k^m(a_n a_{n-1} \ldots a_m, a_{m-1} \ldots a_0))}{H(k^m)} = \frac{H(a_n a_{n-1} \ldots a_0)}{H(k^m)} = \frac{f_k}{g_k} \text{ donde}$$

$$\left(\frac{f_k}{g_k}\right)(x) = \frac{a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} \ldots + a_0}{(kx)^m}$$

y

$$H(\beta) = f_k \text{ con } f_k(x) = b_q(kx)^q + b_{q-1}(kx)^{q-1} + \ldots + b_0.$$

Luego:

$$\frac{a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} \ldots + a_0}{(kx)^m} = b_q(kx)^q + b_{q-1}(kx)^{q-1} + \ldots + b_0.$$

Para que esto ocurra $(kx)^m$ debe ser 1, por tanto $m = 0$; así:

$$a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0 = b_q(kx)^q + b_{q-1}(kx)^{q-1} + \ldots + b_0$$

Como son dos funciones polinómicas iguales, se concluye que $n = q$ y $a_i = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$; esto significa que

$$\mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H}) \subseteq \mathbb{P}_k.$$

pues $f = f_k$ dada por $f_k(x) = a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0$ pertenece a $\mathbb{P}_k$ por la misma definición de $\mathbb{P}_k$.

Por otro lado, si f_k dada por $f_k(x) = a_n(kx)^n + a_{n-1}(kx)^{n-1} + \ldots + a_0$ pertenece a $\mathbb{P}_k$, entonces $f_k \in \mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$ pues $f_k \in \mathbb{P}_A$ ya que todo entero es k–mal y si $\alpha = a_n \ldots a_0$, entonces:

$$\frac{H(k^0\alpha)}{H(k^0)} = \frac{H(\alpha)}{i} = f_k \text{ donde } i(x) = 1$$

Además $f_k \in \mathbb{P}_k + \mathbb{H}$ ya que si $f_k^*(x) = 0$ entonces

$$a_n(kx)^n + \ldots + a_0 + 0 = (a_n(kx)^n + \ldots + a_0) + f_k^*(x) = f_k(x) + f_k^*(x)$$

para algún $f_k(x) = a_n(kx)^n + \ldots + a_0$. Esto prueba $f_k \in \mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$; de modo que:

$$\mathbb{P}_k \subseteq \mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H}).$$

Y por tanto, $\mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H}) = \mathbb{P}_k$. □

***Teorema* 7**. La función $\mathscr{H}_k$ es biyectiva.

Demostración.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; sean α y β dos elementos de $\mathbb{Q}_k$ tales que $\mathscr{H}_k(\alpha) = \mathscr{H}_k(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$ pues la representación k–mal de cualquier $\alpha \in \mathbb{Q}_k$ es única, salvo representaciones equivalentes tales como por ejemplo $0,\overline{9} = 1 = 1,\overline{0}$ en la base 10, pero este tipo de casos no se consideran por la segunda parte de la definición de la función $\mathscr{H}_k$. Entones $\mathscr{H}_k$ es inyectiva.

Por otro lado, dada cualquier función de $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$, se tiene las siguientes opciones:

i. Dicha función está sólo en $\mathbb{P}_A$, y como H es biyectiva, entonces existe un $\alpha\in\mathbb{Q}_k$ tal que $\mathscr{H}_k(\alpha)$ es la función dada.

ii. La función está sólo en $\mathbb{P}_k + \mathbb{H}$, por tanto es de la forma $f_k + f_k^*$ y de este modo, existe algún $n\in\mathbb{N}$ tal que $H(n) = f_k$ el cual representa la parte entera del k–mal buscado, y por la misma definición de $\mathbb{H}$ cuyas funciones quedan determinadas por los c_i, se halla el periodo infinito, con lo cual se demuestra la existencia de un $\alpha\in\mathbb{Q}_k$.

iii. La función está en $\mathbb{P}_A \cap (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$ y por el teorema anterior, la función está en $\mathbb{P}_k$, y como H es biyectiva, entonces existe en $\mathbb{Q}_k$ un k–mal entero n tal que $\mathscr{H}_k(n)$ es la función dada.

Así, $\mathscr{H}_k$ es sobreyectiva; y se concluye que $\mathscr{H}_k$ es biyectiva. □

Como la función $\mathscr{H}_k$ es biyectiva, entonces existe la función inversa $\mathscr{H}_k^{-1}$, lo cual permite definir las operaciones de suma y multiplicación en $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$ así:

***Definición* 6**. *Para todo x, y elementos de $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$, se define la adición ($\boxplus$) como sigue*:

$$x \boxplus y = \mathscr{H}_k(\mathscr{H}_k^{-1}(x) + \mathscr{H}_k^{-1}(y))$$

donde + es la adición de elementos de $\mathbb{Q}_k$.

***Definición* 7**. *Para todo x, y elementos de $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$, se define la multiplicación ($\boxtimes$) como sigue*:

$$x \boxtimes y = \mathscr{H}_k(\mathscr{H}_k^{-1}(x) \times \mathscr{H}_k^{-1}(y))$$

donde $\times$ es la multiplicación de elementos de $\mathbb{Q}_k$.

De esta forma, a partir del conjunto de los números racionales escritos como *k*–males se logró definir el conjunto de funciones $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$ isomorfo a $\mathbb{Q}_k$, haciendo una construcción muy similar a la de las secciones precedentes.

En la siguiente sección, se abordará también la generación de funciones reales a partir de los números racionales pero desde otro punto de vista.

1.2.2. Los números racionales positivos y las divisiones largas

Considérese el racional $\frac{1}{11}{}_{(10)} = 0,\overline{09}_{(10)}$ y aplicando $\mathscr{H}_{10}$ a $0,\overline{09}$ se tiene:

$$\mathscr{H}_{10}\left(0,\overline{09}\right) = H\left(\left[\!\left[0,\overline{09}\right]\!\right]\right) + f_{10}^{*} \text{ donde } f_{10}^{*}(x) = \frac{\sum_{p=1}^{2} c_p 10^{2-p} x^p}{10^2 - x^2}$$

y de este modo:

$$\mathscr{H}_{10}\left(0,\overline{09}\right)(x) = \frac{9x^2}{100 - x^2}$$

una función racional asociada al racional $\frac{1}{11}$ escrito como un decimal.

Obsérvese que por ejemplo $\frac{1}{11}{}_{(10)}$ es un racional cuyo numerador y denominador son número naturales y puede escribirse como:

$$\frac{1}{11}{}_{(10)} = \frac{1}{10+1}{}_{(10)}$$

y si se aplica al numerador y al denominador del racional anterior la función *H* definida en la sección 1.1.1. se obtiene la siguiente función:

$$h = \frac{H(1)}{H(11)} \text{ donde } h(x) = \left(\frac{H(1)}{H(11)}\right)(x) = \frac{1}{10x+1}$$

función que es diferente a $\mathscr{H}_{10}\left(0,\overline{09}\right)$. De modo que:

Para una base fija k mayor o igual a 2, *con* $[(a, b)]$ *la clase de equivalencia*[6] *de* $\frac{a}{b}$ *donde* $a, b \in \mathbb{N}$ *y son primos relativos*, sea $\mathscr{F}_k : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *una función tal que para todo* $[(a, b)] \in \mathbb{Q}^+$

$$\mathscr{F}_k([(a, b)]) = \frac{H(a)}{H(b)}.$$

donde $H(a), H(b) \in \mathbb{P}$ *y* $H(b)_{(x)} \neq 0$.

Con esta nueva función estaría solucionada la cuestión planteada, sin embargo, así como en $\mathbb{Q}$ se toma un elemento y se desarrolla la división, es natural pensar en tomar una imagen de $\mathscr{F}_k$ y desarrollar la división mediante el método de la *división larga* usado en el siglo XVII por J. Gregory y N. Mercator[7], obteniéndose una aproximación de la función considerada en algún rango de convergencia. El procedimiento de división larga consiste en hacer la división de un polinomio por otro de grado superior, ordenando los términos de los polinomios en orden creciente de izquierda a derecha según los grados de los polinomios y efectuar la división; por ejemplo para la función $h(x) = \frac{1}{10x+1}$ se procede de la siguiente manera:

[6]Puede verse sobre la construcción de los números racionales en: MUÑOZ, J., *Introducción a la teoría de conjuntos*, 4a. ed. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[7] KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Vol. II. Madrid, Alianza Editorial, 1992.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+10x \\ \cline{2-2}
\underline{-1-10x} & 1-10x+(10x)^2-(10x)^3+\cdots \\
\quad -10x & \\
\quad \underline{10x+(10x)^2} & \\
\qquad (10x)^2 & \\
\qquad \underline{-(10x)^2-(10x)^3} & \\
\qquad\qquad -(10x)^3 \ldots &
\end{array}
$$

así $h(x)=\dfrac{1}{1+10x}=1-10x+(10x)^2-(10x)^3+\cdots(-10x)^n+\cdots$ siempre que $|10x|<1$, pues la serie hallada es una serie geométrica.

Con base en la idea de la *división larga*, considérese los siguientes dos casos:

1. Sea k una base fija, $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $a = cb$, es decir, $[(a, b)] = [(c)]$ y $c \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\mathscr{F}_k\big([(a, b)]\big) = \mathscr{F}_k\big([(c)]\big) = H(c)$$

este caso se reduce al estudio desarrollado en la sección 1.1.1.

2. Sea k una base fija, $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $b = ca$ de manera que $[(a, b)] = [(1, c)]$, c no es cero y $c \neq 1$. Aplicando $\mathscr{F}_k$ se tiene:

$$\mathscr{F}_k\big([(1, c)]\big) = \frac{H(1)}{H(c)} = \frac{1}{H(c)}$$

y con base en esto se pueden considerar los siguientes subcasos:

i. c es un número natural de una sola cifra, entonces $H(c) = f$ con $f(x) = c$ y de este modo:

$$\mathscr{F}_k([(1,c)]) = \frac{1}{f}$$

ii. c es un número natural de dos cifras. Supóngase $c = c_1c_0$ y $c_0 \neq 0$; así:

$$\mathscr{F}_k([(1,c)]) = \frac{1}{H(c_1c_0)} = \frac{1}{f_k} \text{ donde } f_k(x) = c_0 + c_1kx$$

de modo que,

$$\mathscr{F}_k([(1,c)])(x) = \frac{1}{c_0 + c_1kx},$$

efectuando la división larga:

$$\begin{array}{l|l}
1 & c_0 + c_1kx \\ \hline
\underline{-1 - \frac{c_1k}{c_0}x} & \frac{1}{c_0} - \frac{c_1k}{c_0^{\;2}}x + \frac{(c_1k)^2}{c_0^{\;3}}x^2 - \frac{(c_1k)^3}{c_0^{\;4}}x^3 + \cdots \\
\quad -\frac{c_1k}{c_0}x & \\
\quad \underline{\frac{c_1k}{c_0}x + \left(\frac{c_1k}{c_0}\right)^2 x^2} & \\
\qquad \left(\frac{c_1k}{c_0}\right)^2 x^2 & \\
\qquad \underline{-\left(\frac{c_1k}{c_0}\right)^2 x^2 - \left(\frac{c_1k}{c_0}\right)^3 x^3} & \\
\qquad\qquad -\left(\frac{c_1k}{c_0}\right)^3 x^3 \ldots &
\end{array}$$

como puede apreciarse, resulta en el cociente una serie de potencias que aproxima a la función $\mathscr{F}_k([(1,c)])$; sin embargo, para que tanto la serie como la función sean iguales se requiere hallar el intervalo de convergencia; obsérvese que la serie:

$$\frac{1}{c_0} - \frac{c_1k}{c_0^{\;2}}x + \frac{(c_1k)^2}{c_0^{\;3}}x^2 - \frac{(c_1k)^3}{c_0^{\;4}}x^3 + \cdots = \frac{1}{c_0}\left(1 + \left(-\frac{c_1k}{c_0}x\right) + \left(-\frac{c_1k}{c_0}x\right)^2 + \left(-\frac{c_1k}{c_0}x\right)^3 + \cdots\right)$$

es una serie geométrica, por tanto para que $\mathscr{F}_k([(1,\, c)])$ sea igual a la anterior serie, se debe cumplir que $\left| -\frac{c_1 k}{c_0} x \right| < 1$; es decir $|x| < \frac{c_0}{c_1 k}$ y de esta forma:

$$\mathscr{F}_k([(1,\, c)])_{(x)} = \frac{1}{c_0 + c_1 kx} = \frac{1}{c_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{c_1 k}{c_0} x \right)^i \text{ siempre que } |x| < \tfrac{c_0}{c_1 k}$$

iii. c es un número natural de tres cifras. Supóngase $c = c_2 c_1 c_0$ y $c_0 \neq 0$. Así:

$$\mathscr{F}_k([(1,\, c)])_{(x)} = \frac{1}{c_0 + c_1 kx + c_2 (kx)^2}$$

efectuando la división,

$$\begin{array}{l|l}
1 & c_0 + c_1 kx + c_2 (kx)^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-1 - \frac{c_1 k}{c_0} x - \frac{c_2 k^2}{c_0} x^2} & \frac{1}{c_0} - \frac{c_1 k}{c_0^2} x + \frac{c_1^2 k^2 - c_0 c_2 k^2}{c_0^3} x^2 + \cdots \\
\quad - \frac{c_1 k}{c_0} x - \frac{c_2 k^2}{c_0} x^2 & \\
\quad \underline{\frac{c_1 k}{c_0} x + \frac{(c_1 k)^2}{c_0^2} x^2 + \frac{c_1 c_2 k^3}{c_0^3} x^3} & \\
\qquad \frac{(c_1 k)^2 - c_0 c_2 k^2}{c_0^2} x^2 + \frac{c_1 c_2 k^3}{c_0^3} x^3 & \\
\quad \underline{-\frac{(c_1 k)^2 - c_0 c_2 k^2}{c_0^2} x^2 - \frac{c_1^3 k^3 - c_0 c_1 c_2 k^3}{c_0^3} x^3 - \frac{c_1^2 c_2 k^3 - c_0 c_2^2 k^3}{c_0^3} x^4} & \\
\qquad\qquad\qquad \frac{2 c_0 c_1 c_2 k^3 - c_1^3 k^3}{c_0^3} x^3 - \frac{c_1^2 c_2 k^3 - c_0 c_2^2 k^3}{c_0^3} x^4 \ldots &
\end{array}$$

La serie que resulta pareciera que no tuviera una expresión general que la representara, pero al completar cuadrados en el denominador y efectuando la división resulta una expresión más general:

$$c_0 + c_1 kx + c_2 (kx)^2 = AX^2 + C$$

donde, $A = c_2 k^2$; $X = \left(x + \frac{c_1}{2 c_2 k} \right)$ y $C = \frac{4 c_0 c_1 - c_1^2}{4 c_2}$; luego

$$\mathscr{F}_k([(1,\, c)])_{(x)} = \frac{1}{c_0 + c_1 kx + c_2 (kx)^2} = \frac{1}{C + AX^2}$$

Efectuando la división como se ha hecho, resulta que:

$$\mathscr{F}_k([(1,\, c)])_{(x)} = \frac{1}{C + AX^2} = \frac{1}{C}\left(1 - \left(\frac{A}{C}X^2\right) + \left(\frac{A}{C}X^2\right)^2 - \left(\frac{A}{C}X^2\right)^3 + \cdots\right) = \frac{1}{C}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{A}{C}X^2\right)^n$$

siempre y cuando $\left|-\frac{A}{C}X^2\right| < 1$. Sustituyendo los valores de A, C y X, se tiene:

$$\mathscr{F}_k([(1,\, c)])_{(x)} = \frac{4c_2}{4c_0c_1 - c_1^{\,2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(2c_2kx + c_1)^2}{4c_0c_1 - c_1^{\,2}}\right)^n$$

Siempre que:

$$\left(x + \frac{c_1}{2c_2k}\right)^2 < \left|\frac{4c_0c_1 - c_1^{\,2}}{4c_2^{\,2}k^2}\right|$$

iv. c es un número natural de cuatro cifras. Supóngase $c = c_3c_2c_1c_0$ y $c_0 \neq 0$. Así:

$$\mathscr{F}_k([(1,\, c)])_{(x)} = \frac{1}{c_0 + c_1 kx + c_2 (kx)^2 + c_3 (kx)^3}$$

Haciendo la división larga, resulta la siguiente serie en el cociente:

$$\frac{1}{c_0} - \frac{c_1k}{c_0^{\,2}}x + \frac{k^2(c_1^{\,2} - c_0c_2)}{c_0^{\,3}}x^2 - \frac{k^3(c_0^{\,2}c_3 - 2c_0c_1c_2 + c_1^{\,3})}{c_0^{\,4}}x^3 +$$

$$\frac{k^4(c_0^{\,2}(2c_1c_3 + c_2^{\,2}) - 3c_0c_1^{\,2}c_2 + c_1^{\,4})}{c_0^{\,5}}x^4 + \frac{k^5(2c_0^{\,3}c_2c_3 - 3c_0^{\,2}c_1(c_1c_3 + c_2^{\,2}) + 4c_0c_1^{\,3}c_2 - c_1^{\,5})}{c_0^{\,6}}x^5 + \cdots$$

Pero de esta serie, no se ve inicialmente una expresión general ni cómo determinar el intervalo de convergencia; por tanto, se retomará esta cuestión después de hacer una corta revisión histórica del desarrollo de funciones reales por series que aparece a continuación.

1.2.2.1. Las diferencias finitas y el teorema de Taylor[8]

A finales del siglo XVII y durante el siglo XVIII, los matemáticos se enfrentaban a diversos problemas que surgían debido a los progresos en navegación, astronomía y geografía, tales como el cálculo de tablas trigonométricas, logarítmicas entre otras, por lo cual se vieron obligados a que dichas tablas fueran lo más precisas posibles, para ello los matemáticos recurrieron a la interpolación de funciones, siendo la interpolación lineal la más usada, sin embargo, las funciones consideradas no eran lineales por lo cual tenían que hallar otras formas de interpolación más precisas y mejores.

Es Brigss en su *Arithmetica Logaritmica* (1624) quien inicia un método de interpolación de funciones que lo complementan James Gregory y Collings e independientemente lo obtiene Newton. El método es el siguiente:

Supóngase que f es una función cuyos valores se conocen en a, $a + c$, $a + 2c$, $a + 3c,\ldots,$ $a + nc$; y sean:

$$\begin{gathered}
\Delta f(a) = f(a+c) - f(a),\\
\Delta f(a+c) = f(a+2c) - f(a+c),\\
\Delta f(a+2c) = f(a+3c) - f(a+2c),\\
\vdots\\
\Delta f(a+(n-1)c) = f(a+nc) - f(a+(n-1)c)
\end{gathered}$$

[8] Las ideas principales de esta sección se han tomado de: KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Vol. II. Madrid, Alianza Editorial, 1992. pp., 584-587.

a estas diferencias se denominan *primeras diferencias finitas*. Por otro lado, sean:

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+c) - \Delta f(a)$$
$$\Delta^2 f(a+c) = \Delta f(a+2c) - \Delta f(a+c)$$
$$\Delta^2 f(a+2c) = \Delta f(a+3c) - \Delta f(a+2c)$$
$$\vdots$$
$$\Delta^2 f(a+(n-1)c) = \Delta f(a+(n-2)c) - \Delta f(a+(n-1)c)$$

denominadas *segundas diferencias finitas*.

Y así sucesivamente:

$$\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a+c) - \Delta^2 f(a)$$
$$\vdots$$
$$\Delta^n f(a) = \Delta^{n-1} f(a+c) - \Delta^{n-1} f(a)$$

llamadas en general *diferencias finitas*. En la siguiente figura se muestra un esquema que resume cómo se forman estas diferencias:

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(a) & f(a+c) & f(a+2c) & f(a+3c) & f(a+4c) & \cdots & f(a+(n-1)c) & f(a+nc) \\
\searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & & & \searrow\swarrow & \\
\Delta f(a) & \Delta f(a+c) & \Delta f(a+2c) & \Delta f(a+3c) & & \cdots & \Delta f(a+(n-1)c) & \\
\searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & & & & & \\
\Delta^2 f(a) & \Delta^2 f(a+c) & \Delta^2 f(a+2c) & & \cdots & & \Delta^2 f(a+(n-2)c) & \\
\searrow\swarrow & \searrow\swarrow & & & & & & \\
\Delta^3 f(a) & \Delta^3 f(a+c) & & & \cdots & \Delta^3 f(a+(n-3)c) & & \\
\searrow\swarrow & & & & & & & \\
\Delta^4 f(a) & & & \cdots & & & & \\
& \ddots & & & \iddots & & & \\
& & & \Delta^n f(a) & & & &
\end{array}$$

Figura 1

Ya que $\Delta f(a) = f(a+c) - f(a)$ se sigue que:

$$f(a+c) = \Delta f(a) + f(a) \tag{1}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(a) &= \Delta f(a+c) - \Delta f(a)\\ &= f(a+2c) - 2f(a+c) + f(a)\\ &= f(a+2c) - 2\,\Delta f(a) - f(a) \text{ Sustituyendo por (1)}\end{aligned}$$

de modo que:

$$f(a+2c) = f(a) + 2\Delta f(a) + \Delta^2 f(a) \tag{2}$$

Con el fin de recordar la secuencia se abusará de la notación, escribiendo las ecuaciones (1) y (2) de la siguiente forma:

$$f(a+c) = (1+\Delta) f(a) \tag{1'}$$

$$f(a+2c) = (1+2\Delta+\Delta^2) f(a) = (1+\Delta)^2 f(a) \tag{2'}$$

Se tiene también:

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(a) &= \Delta^2 f(a+c) - \Delta^2 f(a)\\ &= (\Delta f(a+2c) - \Delta f(a+c)) - (\Delta f(a+c) - \Delta f(a))\\ &= \Delta f(a+2c) - 2\Delta f(a+c) + \Delta f(a)\\ &= [f(a+3c) - f(a+2c)] - 2[f(a+2c) - f(a+c)] + [f(a+c) - f(a)]\\ &= f(a+3c) - 3f(a+2c) + 3f(a+c) - f(a) \text{ al sustituir por (1) y (2) se tiene}\\ &= f(a+3c) - 3\Delta^2 f(a) - 3\Delta f(a) - f(a)\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}f(a+3c) &= \Delta^3 f(a) + 3\Delta^2 f(a) + 3\Delta f(a) + f(a)\\ &= (1+3\Delta+3\Delta^2+\Delta^3) f(a)\\ &= (1+\Delta)^3 f(a) \qquad (3)\end{aligned}$$

la inducción matemática permite generalizar que:

$$f(a+nc) = f(a) + n\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \cdots + \Delta^n f(a)$$
$$= (1+\Delta)^n f(a) \tag{4}$$

haciendo $n = \frac{b}{c}$ la ecuación (4) se convierte en:

$$f(a+b) = f(a) + \frac{b}{c}\Delta f(a) + \frac{\frac{b}{c}\left(\frac{b}{c}-1\right)}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{\frac{b}{c}\left(\frac{b}{c}-1\right)\left(\frac{b}{c}-2\right)}{3!}\Delta^3 f(a) + \cdots \tag{5}$$

ésta es la fórmula de Gregory-Newton y se usa de la siguiente manera:

> "*Para calcular f en un valor de x comprendido entre dos valores en los que se conoce f basta hacer simplemente b = x – a; el valor calculado no es necesariamente el verdadero valor de la función; lo que da la fórmula es el valor de un polinomio en b que coincide con la verdadera función en los valores especiales a*, $a + c$, $a + 2c$, $a + 3c$,…" (Tomado textualmente de la referencia que aparece en el pie de página 8)

Gregory aplica la fórmula (5) a la función $(1 + d)^x$, ya que conocía los valores de la función en $x = 0, 1, 2, 3,\ldots$ obteniendo: $f(0) = 1$, $\Delta f(0) = d$, $\Delta^2 f(0) = d^2$ y así sucesivamente, entonces al hacer $a = 0$, $b = x – 0$ y $c = 1$ en la fórmula de Gregory-Newton, resulta:

$$(1+d)^x = 1 + dx + \frac{x(x-1)}{2!}d^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}d^3 + \cdots \tag{6}$$

De este modo, Gregory obtuvo el desarrollo binomial para un x general, tal como Newton había hecho al generalizar el teorema del binomio para exponentes fraccionarios y negativos, hecho del cual se tiene registro en dos cartas dirigidas por el mismo Newton a

Henry Oldenburg en 1976, secretario de la Royal Society, en las cuales enuncia el resultado general de la expansión de $(P + PQ)^{m/n}$ que dice haber investigado antes de 1669[9].

Pero aquí no termina la historia, el resultado tal vez más importante lo obtiene Brook Taylor y es publicado por primera vez en su *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1715), en el que Taylor expone el teorema[10] que aún lleva su nombre y que había enunciado en 1712.

Taylor sustituye a c por Δx en la fórmula de Gregory-Newton; así por ejemplo el segundo término de la fórmula (5) se convierte en:

$$\frac{b}{c}\Delta f(a) = \frac{b}{\Delta x}(f(a+\Delta x) - f(a)) = \left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right)b$$

de este modo, Taylor concluyó que cuando $\Delta x = 0$, el término anterior se convierte en $b\,f'(a)$.

De igual forma, para el tercer término de la ecuación (5) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{b}{c}\left(\frac{b}{c}-1\right)}{2!}\Delta^2 f(a) &= \frac{\frac{b}{\Delta x}\left(\frac{b}{\Delta x}-1\right)}{2!}\left[\Delta f(a+\Delta x) - \Delta f(a)\right] \\ &= \frac{b(b-\Delta x)}{2!}\left[\frac{\Delta f(a+\Delta x) - \Delta f(a)}{\Delta x^2}\right]\end{aligned}$$

cuando $\Delta x = 0$, Taylor concluyó que el término anterior se convertía en $\frac{b^2 f''(a)}{2!}$ de manera que la fórmula de Newton-Gregory queda:

---

9 NEWTON, I. “Sobre el teorema del binomio para exponentes fraccionarios y negativos”, en NEWMAN, J., *Sigma: el mundo de las matemáticas*, Tomo IV, 10a. Ed. Barcelona, Grijalbo, 1985.

10 El teorema de Taylor ya era conocido por James Gregory en 1670 y fue descubierto independientemente por Leibniz, pero ninguno de ellos lo publicó. Jean Bernoulli publicó el mismo resultado en las *Acta Eruditorum* de 1694, y aunque Taylor conocía este resultado no se refirió al él.

$$f(a+b) = f(a) + f'(a)b + f''(a)\frac{b^2}{2!} + f'''(a)\frac{b^3}{3!} + \cdots$$

y si $b = x - a$ entonces la expresión anterior es:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

Resultado conocido como *Teorema de Taylor*. Taylor no fue lo suficientemente riguroso como se exige actualmente, ni tampoco se planteó la cuestión de la convergencia; sin embargo es un método potente para desarrollar funciones por series.

1.2.2.2. De regreso a las divisiones largas

En la última parte de la sección 1.2.2. se obtuvo que:

$$\mathscr{F}_k([(1,c)]) = f$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{c_0 + c_1 kx + c_2 (kx)^2 + c_3 (kx)^3} \\ &= \frac{1}{c_0} - \frac{c_1 k}{c_0^{\ 2}} x + \frac{k^2 (c_1^{\ 2} - c_0 c_2)}{c_0^{\ 3}} x^2 - \frac{k^3 (c_0^{\ 2} c_3 - 2c_0 c_1 c_2 + c_1^{\ 3})}{c_0^{\ 4}} x^3 + \\ &\qquad \frac{k^4 (c_0^{\ 2}(2c_1 c_3 + c_2^{\ 2}) - 3c_0 c_1^{\ 2} c_2 + c_1^{\ 4})}{c_0^{\ 5}} x^4 + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

y de esta expresión no se conoce por ahora un término general que la genere ni tampoco los valores de x para los cuales la igualdad es cierta; sin embargo, en la sección anterior se vio que la fórmula de Gregory-Newton engendra el desarrollo del polinomio de Taylor para una función dada; por tanto es posible que la serie obtenida al hacer la división de la función anterior se relacione con el teorema de Taylor, de hecho, se tiene el siguiente teorema que no se demostrará debido a que la demostración no es relevante pues no se hará un estudio a profundidad del teorema de Taylor, pero que permite escribir de forma general la expresión anterior:

Teorema[11] **8**. *Sea f una función derivable n veces en a, y supóngase que P es un polinomio en* ($x – a$) *de grado menor o igual n, igual a f hasta el orden n en a. Entonces* $P = P_{n,a}$.
[$P_{n,a}$ es el polinomio de Taylor de grado n para f en a]

Suponiendo la convergencia de la serie que aparece en (7) en algún intervalo de números reales, la igualdad (7) es cierta y por tanto el polinomio obtenido al hacer la división n veces coincide con el polinomio de Taylor de grado n para f en cero; de este modo:

$$\mathscr{F}_k([(1,c)])_{(x)} = f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + R_n(x)$$

donde $R_n(x)$ es el resto y está dado por:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt\,.$$

siendo $f^{(n+1)}$ integrable sobre $[0, x]$.

De este modo, si $R_n(x) = 0$, entonces el intervalo donde esto ocurre, la función $\mathscr{F}_k([(1,c)])_{(x)}$ y el desarrollo de Taylor son iguales.

Así, *para una base fija k, si* $[(a, b)] \in \mathbb{Q}^+$, *a y b primos relativos y* $a = a_n a_{n-1} \ldots a_0$, $b = b_n \ldots b_0$, *entonces*:

[11] La demostración de este teorema puede consultarse en: SPIVAK, M., *Calculus cálculo infinitesimal*, vol. 2, ed. Reverté, Barcelona, 1978., p. 508. Aparece como un corolario.

$$\mathscr{F}_k([(a,\,b)]) = f = \frac{H(a_n a_{n-1}\ldots a_0)}{H(b_n b_{n-1}\ldots b_0)}$$

donde,

$$f(x) = \frac{a_n(kx)^n + \ldots + a_0}{b_n(kx)^n + \ldots + b_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

siempre que x sea un número real tal que:

$$\int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt = 0 \,.$$

o más general, *para un m*$\in\mathbb{R}$ *en el que siempre existe la n–ésima derivada de f*:

$$\mathscr{F}_k([(a,\,b)])_{(x)} = f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(m)}{i!}(x-m)^i \,.$$

siempre que x sea un número real tal que:

$$\int_m^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt = 0 \,.$$

En conclusión, se logró construir funciones reales a partir del conjunto de los números racionales desde dos puntos de vista; el primero considerando los números *k*–males y siguiendo una línea parecida a lo desarrollado en la sección 1.1. y el segundo, basado fundamentalmente en las divisiones largas y el teorema de Taylor.

En la sección que sigue, se abordará la construcción de funciones reales a partir del conjunto de los números irracionales cuadráticos, bajo la idea de las fracciones continuas.

1.3. GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE LOS NÚMEROS RACIONALES Y LOS NÚMEROS IRRACIONALES CUADRÁTICOS

Una forma para probar que $\sqrt{p}$ para algún $p \in \mathbb{Q}^+$ es irracional cuando p no es un cuadrado perfecto, es recurriendo a las fracciones continuas simples y ver que la fracción continua es infinita y periódica. Por otro lado, para cualquier $p \in \mathbb{Q}$ es posible hallar una fracción continua simple finita equivalente a p.

De esta manera, por ejemplo $\frac{3}{4}$ escrito como una fracción continua simple es:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = [0;1,3],$$

y el número áureo como fracción continua simple es:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = [1;\bar{1}],$$

también se tiene que $\sqrt{2}$ es:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = [1;\bar{2}],$$

Lo anterior sugiere que por ejemplo la fracción continua simple de $\sqrt{2}$ defina la expresión:

$$f(x) = 1 + \cfrac{1}{2x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

y que φ defina la expresión:

$$\varphi(x) = 1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

y de manera similar, que $\frac{3}{4}$ defina:

$$g(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{3x}},$$

De este modo, si $\mathbb{I} = \{p \mid p \in \mathbb{Q}^+, \vee, p \text{ es un irracional cuadrático}\}$ Se define:

$$\Re : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}+}$$

Una función tal que:

i. *si* $p \in \mathbb{Q}^+$, *entonces* $p = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{+ a_n}$ *con* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ *y*

$$\Re(p) = \Re_p \text{ donde } \Re_p(x) = a_0 + \frac{1}{a_1 x +} \frac{1}{a_2 x +} \cdots \frac{1}{+ a_n x}$$

Se escribirá también a $\Re_p(x)$ *como*: $\Re_p(x) = [a_0; a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x]$

ii. si p es un irracional cuadrático, entonces

$$p = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \cdots \frac{1}{a_{i-1} +} \frac{1}{a_i +} \frac{1}{a_{i-1} +} \cdots + \frac{1}{a_n +} \frac{1}{a_i +} \cdots + = \left[a_0; a_1, \ldots, a_{i-n}, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n}\right].$$

y

$$\Re(p) = \Re_p \text{ donde } \Re_p(x) = a_0 + \frac{1}{a_1 x +} \cdots \frac{1}{a_{i-1}x +} \frac{1}{a_i x +} \frac{1}{a_{i-1}x +} \cdots + \frac{1}{a_n x +} \frac{1}{a_i x +} \cdots + .$$

Se escribirá también a $\Re_p(x)$ *como*: $\Re_p(x) = \left[a_0; a_1 x, \ldots, a_{i-n}x, \overline{a_i x, a_{i+1}x, \ldots, a_n x}\right]$.

Ejemplos.

1. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;\bar{1}]$ es un irracional cuadrático, por tanto al aplicar $\Re$ se tiene:

$$\Re(\varphi) = \Re_\varphi \text{ que se notará } \Re_\varphi = \Phi$$

y

$$\Phi(x) = 1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1; \bar{x}],$$

A partir de esta igualdad, resulta:

$$\Phi(x) - 1 = \frac{1}{x + \left(\Phi(x) - 1\right)},$$

y por tanto:

$$(\Phi(x))^2 + (x - 2)\Phi(x) - x = 0$$

una ecuación cuadrática en Φ cuya solución[12] es:

[12] Sólo se considerará la solución que suma la raíz cuadrada del discriminante, debido a que de esta manera se logra obtener el número áureo.

$$\Phi(x)=\frac{2-x+\sqrt{x^2+4}}{2}.$$

La función anterior indica que las reductas de la fracción continua $\Phi(x)$ convergen a esta función en algún intervalo, estas son algunas reductas:

Primera reducta: $\dfrac{x+1}{x}$,

Segunda reducta: $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$,

Tercera Reducta: $\dfrac{x^3+x^2+2x+1}{x^3+2x}$,

Cuarta reducta: $\dfrac{x^4+x^3+3x^2+2x+1}{x^4+3x^2+1}$,

Quinta reducta:

$$\frac{x^5+x^4+4x^3+3x^2+3x+1}{x^5+4x^3+3x},$$

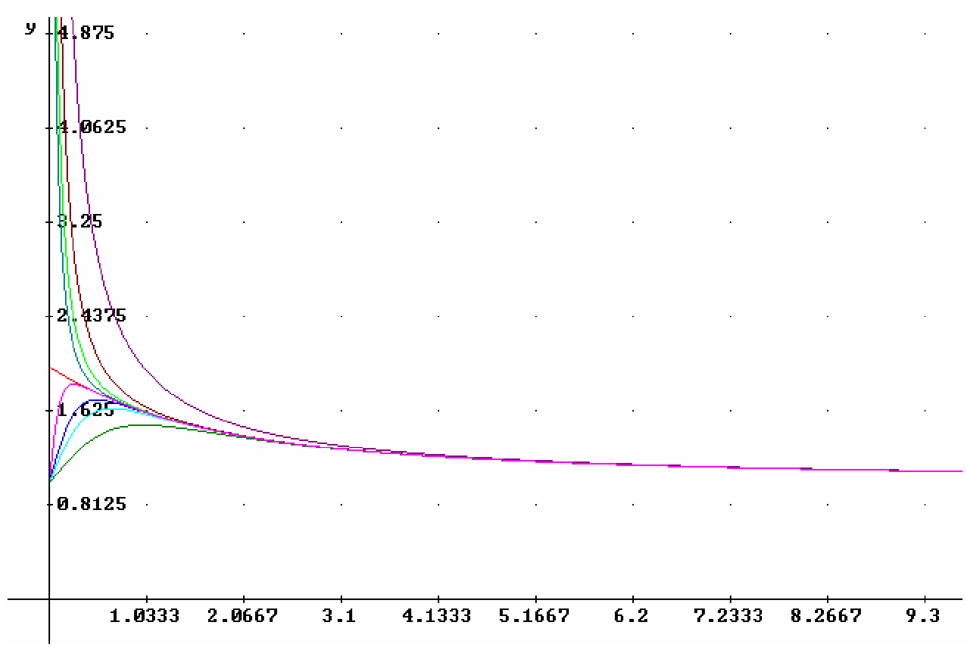
Sexta reducta:

$$\frac{x^6+x^5+5x^4+4x^3+6x^2+3x+1}{x^6+5x^4+6x^2+1},$$

Séptima reducta:

$$\frac{x^7+x^6+6x^5+5x^4+10x^3+6x^2+4x+1}{x^7+6x^5+10x^3+4x},$$

Y las gráficas para valores positivos de x aparecen en la gráfica siguiente:



Gráfica 3

La gráfica de color magenta es la correspondiente a la reducta 16 y la roja es $\Phi(x)$.

Por otro lado, si se remplaza a x por 1 en las reductas anteriores resulta el siguiente conjunto de racionales:

$$\left\{\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21}\right\}$$

que corresponden a las primeras siete reductas del irracional φ; por otro lado:

$$\Phi(1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi,$$

también se tiene por ejemplo:

$$\Phi(2)=\sqrt{2},$$

2. Considérese el irracional $p=\left[a;\overline{n}\right]=\dfrac{(2a-n)+\sqrt{n^2+4}}{2}$ con a y b números reales. Al aplicar $\Re$ resulta:

$$\Re_p(x)=a+\cfrac{1}{nx+\cfrac{1}{nx+\cfrac{1}{\ddots}}}=\left[a,\overline{nx}\right],$$

de esta igualdad se obtiene:

$$\Re_p(x)-a=\frac{1}{nx-(\Re_p(x)-a)},$$

así mismo, resulta la siguiente ecuación cuadrática en $\Re_p(x)$:

$$[\Re_p(x)]^2+[nx-2a]\,\Re_p(x)+(a^2-anx-1)=0,$$

cuya solución es:

$$\Re_p(x)=\frac{(2a-nx)+\sqrt{n^2x^2+4}}{2}.$$

Llamando $f_{n,a}(x)$ a $\Re_p(x)$, puede verse que $f_{n,a}(1)=p$; por otro lado $f_{n,1}\left(\frac{1}{n}\right)=\varphi$.

Ahora, si $a=1$ y $n=2$, entonces $p=\sqrt{2}$ y

$$f_{2,1}(x) = (1-x) + \sqrt{x^2+1}\ ,$$

En la expresión anterior, si $x = 4/3$ se tiene:

$$f_{2,1}\left(\tfrac{4}{3}\right) = \left(1-\tfrac{4}{3}\right) + \sqrt{\tfrac{16}{9}+1} = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{4}{3}\ ,$$

un resultado que puede parecer inesperado pero que ilustra el porque para demostrar que un irracional cuadrático es irracional por medio de fracciones continuas, es necesario que la fracción continua sea simple, pues con este ejemplo se tiene que:

$$\frac{4}{3} = 1 + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{\ddots}}}}\ ,$$

de donde puede surgir una supuesta contradicción de que $\frac{4}{3}$ es irracional porque puede expresarse como una fracción continua infinita.

En el capítulo que sigue, se volverá sobre las fracciones continuas pero en otros tópicos de la matemática.

CAPÍTULO 2

GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE SERIES EN ALGUNOS TÓPICOS MATEMÁTICOS

En el capítulo anterior, se trabajaron series de potencias convergentes, las cuales permitieron definir funciones reales, sin embargo, puede ampliarse el estudio de la generación de funciones al considerarse otras series también convergentes pero no de potencias, como es el caso de las series de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales, la serie de los recíprocos de los números triangulares, las series que aparecen por ejemplo en la construcción del conjunto de Cantor, entre otras. De modo que el objetivo de este capítulo es mostrar otras formas de generar funciones desde algunos tópicos de la matemática donde las series convergentes aparecen.

2.1. GENERACIÓN DE UNA FUNCIÓN REAL A PARTIR DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE CANTOR[13]

Sea E_0 *el intervalo* $[0, 1]$. *Sepárese el segmento* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *y sea* E_1 *la reunión de los intervalos*

$$\left[0, \tfrac{1}{3}\right], \left[\tfrac{2}{3}, 1\right],$$

[13] Ver respecto al conjunto de cantor en: RUDIN, W., *Principios de análisis matemático*, 2a ed. México, McGraw-Hill, 1977.

Sepárese los tercios centrales de los intervalos anteriores, y sea E_2 la reunión de los intervalos

$$[0, 1/9], [2/9, 3/9], [6/9, 7/3], [8/9, 1],$$

continuando de este modo; se obtiene una sucesión de conjuntos E_n, tales que

a. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$;
b. E_n *es la reunión de* 2^n *intervalos, cada uno de longitud* 3^{-n}.

El conjunto

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \ .$$

se llama ***conjunto de Cantor***.

Por otro lado, considérese los segmentos que se han extraído del intervalo [0, 1] para la construcción del conjunto de Cantor, esto es:

Cuando se forma E_1, se elimina el intervalo $(1/3, 2/3)$ de longitud $1/3$.
Cuando se forma E_2, se eliminan los intervalos: $(1/9, 2/9), (7/9, 8/9)$ de longitudes $(1/3)^2$ cada uno
Cuando se forma E_3, se eliminan los intervalos: $(1/27, 2/27), (7/27, 8/27), (19/27, 20/27), (25/27, 26/27)$ de longitudes $(1/3)^3$ cada uno.

En general, cuando se forma E_n se eliminan 2^{n-1} intervalos de longitud $(1/3)^n$ cada uno, y así sucesivamente; de modo que, sumando las longitudes de los segmentos que se han extraído del intervalo [0, 1] después de construido el conjunto de Cantor, se obtiene la serie:

$$\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2^3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots,$$

que puede expresarse como:

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n . \tag{1}$$

Ahora, sean los conjuntos:

$\mathscr{J}=\{\Sigma_{k,a}\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R} \mid \Sigma_{k,a}$ es el producto de $k\in\mathbb{R}$ por la serie geométrica convergente de razón $a\}$,

y

$$\mathscr{L}=\left\{f_{a,k} : (-|a^{-1}|, |a^{-1}|) \to \mathbb{R} \mid f_{a,k}(x)=k\sum_{i=0}^{\infty}(ax)^i ,\ k\in\mathbb{R}\right\},$$

Para los cuales se define la función:

$$\mathfrak{C} : \mathscr{J} \to \mathscr{L}$$

tal que:

$$\mathfrak{C}\left(\Sigma_{k,a}\right)=f_{k,a}$$

con,

$$\Sigma_{k,a}=k\sum_{i=0}^{\infty}(a)^i \qquad y \qquad f_{k,a}(x)=k\sum_{i=0}^{\infty}(ax)^i .$$

Esto es,

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} : \mathscr{J} &\to \mathscr{L}\\ k\sum_{i=0}^{\infty}a^i &\mapsto f_{k,a} : \left(-\left|a^{-1}\right|,\left|a^{-1}\right|\right)\to\mathbb{R}\\ &\qquad\qquad x \mapsto k\sum_{i=0}^{\infty}(ax)^i\end{aligned}$$

De modo que, la serie (1) está en $\mathscr{J}$, y si $\Sigma_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ entonces:

$$\mathfrak{C}\left(\Sigma_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}\right)=f_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}$$

donde,

$$f_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}(x)=\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{2x}{3}\right)^n \tag{2}$$

Como $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ según la definición de $\mathscr{L}$, entonces la serie (2) converge y puede expresarse como:

$$f_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}x\right)^n = \frac{1}{3-2x}. \tag{3}$$

De este modo, se consigue encontrar una función real con dominio $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a partir de la construcción del conjunto de cantor. Obsérvese que la función encontrada es sólo un caso particular de la función $\mathfrak{C}$. Por otro lado, la función obtenida de esta forma no es nueva, ya que antes, a partir de los números naturales y racionales se obtuvieron funciones racionales.

2.2. EULER Y EL DESARROLLO DE ALGUNAS FUNCIONES REALES COMO SERIES DE POTENCIAS[14]

Dado que con el conjunto de Cantor no se logra un resultado sorprendente, se decide recurrir a la historia de las matemáticas y estudiar algunos trabajos desarrollados por el matemático suizo Leonar Euler (1707-1783) como una excusa para conocer la forma como generó algunas funciones por series y a su vez intentar definir funciones a partir de las series por él trabajadas.

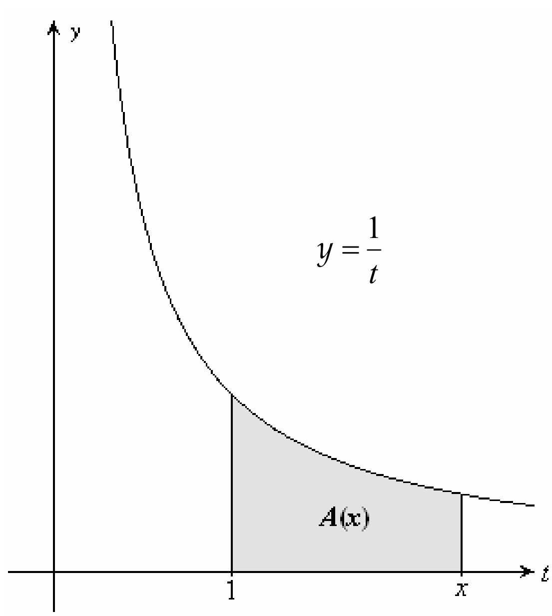
2.2.1. Las funciones exponencial y logaritmo natural

2.2.1.1. Generalidades

Napier (1550-1617) fue el matemático que introdujo el término *logaritmo* a principios del siglo XVII, además fue el primero en comprenderlos; sin embargo Henry Briggs (1561-

[14] Los métodos descritos de esta sección se encuentran en: DUNHAM, W., *Euler el maestro de todos los matemáticos*. España, Nivola, 2000.

1631) construyó durante varios años la *tabla de logaritmos comunes*[15] (de base 10) por medio de un método[16] que aunque ingenioso muy poco útil, debido a la extensión del mismo en comparación de otros métodos mucho más sencillos y eficientes de la misma época, tales como los descubiertos por Mercator (1620-1687), Gregory (1638-1675) y Newton (1642-1727), expuestos algunos en la sección 1.2.2. del primer capítulo; los cuales, utilizan series de potencias; reduciéndose, por ejemplo, la aproximación de raíces complicadas, a simples sumas y multiplicaciones de números racionales; sin embargo, a pesar de que algunos de estos métodos permitían aproximar el valor de ciertos logaritmos, no se tenía como tal una expresión general desarrollada en serie de potencias que permitiera hallar logaritmos por simple sustitución, tal como se hacía para aproximar raíces. Los primeros trabajos enfocados en esta dirección fueron dados por Gregory of St. Vincent (1584-1667) y Alfonso de Sarasa (1618-1667), quienes encontraron una relación entre los logaritmos y el área bajo un segmento de hipérbola; tal descubrimiento se resume a continuación, haciendo uso del cálculo actual:



Gráfica 4

[15] Obra citada en el pie anterior, p. 69.

[16] Obra citada, pp. 70-71.

Sea $A(x)$ el área bajo la hipérbola $y=\frac{1}{t}$ entre t = 1 y t = x, como se muestra en la gráfica 4. entonces:

$$A(ab)=\int_1^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_1^{b}\frac{1}{au}(a\,du)\,, \tag{1}$$

donde la segunda integral se ha transformado utilizando la sustitución $t = au$. Por tanto,

$$A(ab)=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_1^{b}\frac{1}{u}du=A(a)+A(b)\,, \tag{1'}$$

Por otro lado, haciendo la sustitución $t = u^r$ en (1) se obtiene:

$$A(a^r)=\int_1^{a^r}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{u^r}(ru^{r-1}du)=r\int_1^{a}\frac{1}{u}du=r\cdot A(a)\,, \tag{1''}$$

Se observa que las propiedades (1') y (1'') del área hiperbólica, son las mismas que las de los logaritmos.

Actualmente se sabe que el área en cuestión es el logaritmo natural, pero a mediados del siglo XVII las relaciones anteriores no eran bien comprendidas; sin embargo Newton encontró una aproximación a las áreas hiperbólicas mediante series infinitas. Usando la notación actual, la idea de Newton fue la siguiente:

Se hace una pequeña modificación, corriendo la hipérbola de la figura 4 hasta que uno coincida con cero, y se define:

$$\ell n(1+x)=\int_0^{x}\frac{1}{1+t}dt\,, \tag{2}$$

Entonces desarrollando $\frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1}$ utilizando el teorema del binomio generalizado de Newton[17] e integrando término a término se obtiene:

$$\ell n(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots)dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Pero para llegar a esta serie, como se vio fue necesario hacer uso del cálculo; herramienta de la cual Euler no disponía debido a la naturaleza elemental de su obra; sin embargo esto no fue un impedimento para que lograra desarrollar mediante series infinitas las funciones exponencial y logarítmica, como se verá en las secciones que siguen.

2.2.1.2. Euler y la función Exponencial

Euler había definido previamente las funciones exponenciales, considerándolas bastante sencillas; por tanto pasa a considerar el caso inverso:

> "…*Daremos un valor a z tal que* $a^z = y$. *Este valor de z, considerado como una función de y, es llamado el logaritmo de y*"[18].

De este modo, Euler veía el asunto de los logaritmos en su auténtica naturaleza, ya que para él la función logarítmica era la función inversa de la exponencial.

En seguida se mostrará como obtuvo una serie de potencias para la función exponencial $y = a^x$, donde $a > 1$;

---

[17] También puede realizarse la división larga, tal como se hizo en la sección 1.2.2. obteniéndose el mismo resultado.

[18] DUNHAM, W., *Euler el maestro de todos los matemáticos*. España, Nivola, 2000. p. 75.

Euler supone que ω sea un "número infinitamente pequeño", que aunque no sea igual a cero, se verifique:

$$a^{\omega} = 1 + \psi,$$

donde ψ es también un número infinitamente pequeño. Luego, para relacionar las cantidades ω y ψ, hace que $\psi = k\omega$, entonces,

$$a^{\omega} = 1 + k\omega.$$

La igualdad anterior permite hallar el desarrollo de a^x para un número finito x, introduciendo una nueva variable $j = \frac{x}{\omega}$, por tanto:

$$a^x = \left(a^{\omega}\right)^{\frac{x}{\omega}} = \left(1 + k\omega\right)^{\frac{x}{\omega}} = \left(1 + \frac{kx}{j}\right)^{j},$$

y usando el teorema del binomio generalizado de Newton en la expresión anterior se obtiene:

$$a^x = 1 + kx + \frac{j-1}{j}\left(\frac{k^2x^2}{2\cdot 1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j\cdot j}\left(\frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{j\cdot j\cdot j}\left(\frac{k^4x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right) + \cdots,$$

Dado que x es finita y ω una cantidad infinitamente pequeña, entonces $j = \frac{x}{\omega}$ debe ser *infinitamente grande*. De ello, según Euler, se deduce que $\frac{j-1}{j} = 1$, $\frac{j-2}{j} = 1$ y así sucesivamente; en términos modernos, Euler enunció que:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{j-n}{j} = 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Por tanto, la ecuación anterior es:

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^4x^4}{4!} + \cdots. \qquad (3)$$

Haciendo $x = 1$ en la anterior ecuación, resulta una serie para la base a en función de k:

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \frac{k^4}{4!} + \cdots,$$

si en la ecuación anterior se elige a como la base para la cual $k = 1$, es decir, se selecciona la base a de tal forma que $a^\omega = 1 + \omega$, donde ω es infinitamente pequeña, entonces:

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

Euler calculó que el número anterior era *aproximadamente* 2.71828182845904523536028, una constante que designó con la famosa letra *e*. A los logaritmos asociados con esta base los llamó *naturales* o *hiperbólicos*.

Por otro lado, haciendo $k = 1$ y $a = e$ en (3), se tiene:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2.2.1.3. Euler y la función logaritmo natural

Euler observó que siendo ω una cantidad infinitamente pequeña, entonces:

$$e^\omega = 1 + \omega,$$

de lo cual deduce que $\omega = \ell n(1 + \omega)$ (escrito en términos modernos) y

$$j\omega = j\,\ell n(1 + \omega) = \ell n(1 + \omega)^{j}.$$

Pero aunque ω es infinitamente pequeña, es, sin embargo, positiva, por lo que “es evidente que cuanto mayor sea el número escogido para j, más excederá $(1 + \omega)^{j}$ a 1”. De esto, Euler dedujo que para cualquier número positivo x se puede encontrar j tal que:

$$x = (1 + \omega)^{j} - 1,$$

concluyendo lo siguiente:

i. $\omega = (1 + x)^{1/j} - 1.$

ii. $1 + x = (1 + \omega)^{j} = e^{j\omega}$, lo cual sugiere que $\ell n(1 + x) = j\omega$.

iii. Como $\ell n(1 + x)$ es finito mientras que ω una cantidad infinitamente pequeña, entonces j debe ser una cantidad infinitamente grande.

Ahora, usando los tres resultados anteriores y el teorema del binomio generalizado de Newton, se obtiene:

$$\begin{aligned} \ell n(1+x) = j\omega = j\,[(1+x)^{1/j} - 1] &= j\left[1 + \tfrac{1}{j}x + \frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)\left(\frac{1}{j}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots\right] - j \\ &= x - \frac{(j-1)}{2j}x^2 + \frac{(j-1)(2j-1)}{2j\cdot 3j}x^3 + \frac{(j-1)(2j-1)(3j-1)}{2j\cdot 3j\cdot 4j}x^4 + \cdots. \qquad (4) \end{aligned}$$

Como j es infinitamente grande, entonces Euler garantiza que $\dfrac{(j-1)}{2j} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(2j-1)}{3j} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{(3j-1)}{4j} = \dfrac{3}{4}$ y así sucesivamente, esto en términos modernos es:

$$\lim_{j\to\infty}\frac{nj-1}{(n+1)j}=\frac{n}{n+1}$$

Entonces, sustituyendo los valores anteriores en (4) resulta la siguiente serie:

$$\ell n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots. \qquad (5)$$

Como conclusión[19]:

> "*La evolución moderna de la serie logarítmica utiliza el cálculo Para obtener el desarrollo descrito en* (5); *por el contrario, se ha visto que Euler llega a esta serie sin un uso explícito del calculo diferencial e integral en su deducción*. *De esta forma*, *sin el riesgo de caer en un círculo vicioso*, *Euler tenía la libertad de aplicar la serie a los problemas de cálculo*".

2.2.2. Euler y las funciones trigonométricas, seno y coseno

Para el desarrollo por series de las funciones trigonométricas seno y coseno, Euler usa variable compleja y el teorema de De Moivre (1667-1754), esto es:

Para todo $n \geq 1$,

$$(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}\ (n\theta)$$

$$(\cos\theta - i\ \mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) - i\ \mathrm{sen}\ (n\theta)$$

Por tanto, al sumar las expresiones anteriores y dividendo por dos, Euler obtuvo:

$$\cos n\theta = \frac{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n}{2}+\frac{(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n}{2},$$

[19] Obra citada, p. 81.

luego, aplicando el teorema del binomio para desarrollar las potencias de la expresión anterior, resultó:

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left[\cos^n\theta + \frac{n\,i\cos^{n-1}\theta\operatorname{sen}\theta}{1} - \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\theta\operatorname{sen}^2\theta}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)\,i\cos^{n-3}\theta\operatorname{sen}^3\theta}{3!} + \cdots\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos^n\theta - \frac{n\,i\cos^{n-1}\theta\operatorname{sen}\theta}{1} - \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\theta\operatorname{sen}^2\theta}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)\,i\cos^{n-3}\theta\operatorname{sen}^3\theta}{3!} + \cdots\right],$$

y de esto:

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\theta\operatorname{sen}^2\theta}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cos^{n-4}\theta\operatorname{sen}^4\theta}{4!} - \cdots,$$

en este punto, Euler hizo que n fuera una cantidad infinitamente grande, por tanto si $x = n\theta$, entonces $\theta = x/n$ es infinitamente pequeña, de lo cual concluyó que $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = \theta$.

Dado que n es una cantidad infinitamente grande, entonces las cantidades $n - 1$, $n - 2$,… no se diferencian entre ellas y n; por tanto Euler sustituyó cada una de estas expresiones por n en la ecuación anterior, obteniendo la serie:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1^n - \frac{n\cdot n\cdot(1)^{n-2}\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2!} + \frac{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot(1)^{n-4}\left(\frac{x}{n}\right)^4}{4!} - \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.\end{aligned}$$

De manera similar, se obtiene la serie para la función sen x, restando y dividiendo por dos las identidades del teorema de Moivre, con ello se llega a que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$$

2.2.3. Las series *p*

Es natural pensar en series que sumen por ejemplo los recíprocos de los números naturales, o los recíprocos de los números triangulares, así como los recíprocos de los cuadrados de los números naturales, entre otras, y de igual manera determinar si dichas series convergen o no, y en el caso de que sea así, establecer cuál es el límite. Algunos de estos problemas fueron enfrentados por el matemático Jacob Bernoulli (1654-1705) de hecho, a él se debe la demostración clásica[20] de la divergencia de la *serie armónica*, aunque fue su hermano Johann Bernoulli (1667-1748) quien al parecer demostró primero este resultado[21] basado en la suma de la serie de los inversos de los números triangulares demostrada por Leibniz (1646-1716) a saber:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots &= 2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\right]\\ &= 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]\\ &= 2\left[1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right] = 2.\end{aligned}$$

que es el caso de una *serie telescópica*.

Con esto, Johann Bernoulli considera las series:

$$A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots,$$

$$B = \frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\cdots+\frac{n}{n(n+1)}+\cdots = A-1,$$

[20] Ver la demostración en: KLINE, M., *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días*, Vol. II. Madrid, Alianza Editorial, 1992, p. 580.

[21] SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C., *De los Bernoulli a los Bourbaki*, 1ª ed. España, Nivola, 2004. p. 227.

y denotando por C la serie de Leibniz de los recíprocos de los números triangulares con cada término dividido por 2, obtiene las series:

$$C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=1,$$

$$D=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=C-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$E=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=D-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3},$$

$$F=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}\cdots=E-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

y así sucesivamente. Luego, Bernoulli sumó las dos primeras columnas del conjunto infinito de ecuaciones anterior y obtuvo:

$$C+D+E+\cdots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)+\cdots,$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\cdots=B=A-1.$$

Finalmente, al sumar la última de las columnas, resultó:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+=A,$$

por tanto, concluyó que $A - 1 = A$, lo cual es absurdo, entonces A es una cantidad infinitamente grande, de este modo Johann Bernoulli demostró la divergencia de la serie armónica.

Por otro lado, Jacob Bernoulli también demostró que la serie:

$$\frac{a}{b}+\frac{a+c}{bd}+\frac{a+2c}{bd^2}+\frac{a+3c}{bd^3}+\cdots,$$

cuyos numeradores forman una serie aritmética a, $a+c$, $a+2c$, $a+3c$,… y cuyos denominadores forman una serie geométrica, b, bd, bd^2, bd^3, ...; converge[22] a

$$\frac{ad^2-ad+cd}{bd^2-2bd+b},$$

También obtuvo por ejemplo que, $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}=6$ y $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{k^3}{2^k}=26$.

Sin embargo, cuando Jacob Bernoulli se enfrentó a las series de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{k^p}+\cdots,$$

denominadas *series p*, se dio cuenta que para p = 1 se tiene la serie armónica que como demostró es divergente; pero en el caso de p = 2 no logró encontrar una suma exacta para la serie, lo cual no significó una derrota total pues utilizando la desigualdad $2k^2 \geq k(k+1)$ (siendo k un número natural mayor o igual a 2, se tiene que $k^2 > k$, esto permite demostrar que la desigualdad es cierta, sumando k^2 a ambos lados de la desigualdad) encontró que:

$$\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}},$$

de modo que,

[22] Obra citada pp. 97-98.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots\leq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}},$$

donde esta última serie converge hacia 2 como se vio antes; así al tener la mayor de las dos series una suma finita, Bernoulli estableció que la más pequeña también la debía tener[23], además, como $\frac{1}{k^p}\leq\frac{1}{k^2}$ para todo $p \geq 2$, entonces por el mismo argumento concluyó que las series p con $p \geq 2$ convergen. Sin embargo, a pesar de esta magistral demostración de la convergencia de las series p, aún quedaba la duda de saber el valor al que converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Admitiendo su derrota, desde Basilea, Bernoulli escribió su petición de ayuda:

> "*Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos*"[24].

Este problema conocido como el *problema de Basiela* perduró hasta más allá de Jacob Bernoulli.

2.2.3.1. Euler resuelve el problema de Basilea

Cuando Euler se enfrentó al problema de Basilea, trató de aproximar el valor al cual converge la serie, haciendo algunas sumas parciales, pero encontró que esta serie converge muy lentamente, actualmente se sabe por ejemplo, que la aproximación para mil términos de la serie,

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{1000^2}\approx 1{,}64393$$

[23] Bernoulli aplicó lo que actualmente se denomina el *criterio de comparación* para convergencia de series; por supuesto, ignoraba la existencia de este teorema.

[24] SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C., *De los Bernoulli a los Bourbaki*, 1ª ed. España, Nivola, 2004.

sólo es correcta en sus dos primeras cifras decimales; sin embargo, halló la igualdad:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^{k-1}}+[\ell n\, 2]^2,$$

obteniéndose como resultado una nueva serie que converge rápidamente gracias al término 2^{k-1}; pero a pesar de los esfuerzos, aún el problema no tenía solución. Es en el año de 1735 cuando finalmente Euler la encuentra; el razonamiento requiere de un par de observaciones y *un acto de fe*.

En primera instancia considérese una ecuación polinómica $P(x) = 0$ de grado n, con raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$, distintas de cero y $P(0) = 1$, entonces $P(x)$ puede factorizarse como:

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{r_1}\right)\left(1-\frac{x}{r_2}\right)\left(1-\frac{x}{r_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{r_n}\right), \tag{6}$$

en efecto, si $x = 0$ entonces $P(0) = 1$ y si $x = r_k$, $1\leq k \leq n$, entonces $P(r_k) = 0$.

En segundo lugar, Euler necesitó el desarrollo en serie de la función sen x, como se vio en la sección anterior esta es:

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots, \tag{7}$$

"*El acto de fe consistía en creer que aquello que se cumple para un polinomio ordinario se cumple también para un polinomio de infinitos términos. En este caso, asume que una expresión polinómica con infinitas raíces puede descomponerse en factores de la misma forma que P*(x) *lo fue antes*"[25].

[25] ACEVEDO M.; FALK M., *Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Colciencias, 1997.

De este modo,

***Teorema* 1**. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Demostración.

Euler escribió

$$P(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots,$$

el cual consideró como un polinomio infinito. Se observa que $P(0) = 1$. Para hallar las raíces de $P(x) = 0$, se tiene que si x es diferente de cero, entonces:

$$P(x)=\frac{x\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots\right]}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots}{x}=\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

de este modo, si $P(x) = 0$, entonces la igualdad anterior implica que $\operatorname{sen} x = 0$, lo cual es cierto siendo $x = \pm k\pi$, para $k = 1, 2,\ldots$

Luego, Euler factorizó $P(x)$ así:

$$\begin{aligned}P(x)&=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-3\pi}\right)\cdots\\&=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots. \qquad (8)\end{aligned}$$

de manera que:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots=P(x)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots, \tag{8'}$$

Desarrollando el segundo miembro de (8’) se obtiene:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots, \tag{9}$$

donde los coeficientes de x^4 y otras potencias pares superiores son innecesarias por el momento. Entonces igualando los coeficientes de x^2 en (9), se tiene:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3!}&=-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right)\\&=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)\end{aligned}$$

y por tanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$\square$

De esta forma, Euler logra resolver el problema de Basilea. Como puede observarse, en el transcurso de la demostración, se hacen suposiciones fuertes sin demostración, lo cual ha hecho que actualmente la prueba de Euler no se considere válida, sin embargo son precisamente estos supuestos los que permitieron hallar un resultado válido[26].

[26] KALMAN, D., “Six ways to sum a series”. *The college mathematics journal*, Volume 24, Nº 5, November, 1993, pp. 402-421.

2.2.3.2. ¿Y las otras series *p* a qué valores convergen?

Euler, no obstante, ofrece otra serie de resultados, la mayoría bajo los supuestos de extender los casos finitos a los infinitos, con lo cual logró hallar la suma exacta para otras series p con $p \neq 2$. Para ver esto, Euler establece el siguiente teorema que describe la relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica:

Teorema[27] **2**. *Si el polinomio de grado n*

$$P(y) = y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \ldots \pm N, \tag{10}$$

Se descompone en factores de la forma

$$P(y) = (y - r_1)(y - r_2)(y - r_3) \ldots (y - r_n), \tag{11}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} r_k &= A \\
\sum_{k=1}^{n} r_k^2 &= A\sum_{k=1}^{n} r_k - 2B \\
\sum_{k=1}^{n} r_k^3 &= A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B\sum_{k=1}^{n} r_k + 3C \\
\sum_{k=1}^{n} r_k^4 &= A\sum_{k=1}^{n} r_k^3 - B\sum_{k=1}^{n} r_k^2 + C\sum_{k=1}^{n} r_k - 4D
\end{aligned} \tag{11'}$$

y así sucesivamente.

[27] Actualmente, las fórmulas que aparecen en el teorema se conocen como *fórmulas de Newton*, éstas aparecen publicadas en la *Arithmetica Universalis*.

Demostración.

Aplicando logaritmos a (11), se tiene la igualdad:

$$\ell n\, P(y) = \ell n\, (y - r_1) + \ell n\, (y - r_2) + \ell n\, (y - r_3) + \ldots + \ell n\, (y - r_n)$$

diferenciando ambos lados de la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{1}{y-r_1} + \frac{1}{y-r_2} + \frac{1}{y-r_3} + \cdots \frac{1}{y-r_n}, \tag{12}$$

ahora, obsérvese que $\frac{1}{y-r_k}$, con $1 \leq k \leq n$, es el límite de una serie geométrica, esto es:

$$\frac{1}{y-r_k} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{1-\frac{r_k}{y}}\right) = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{r_k}{y} + \frac{r_k^2}{y^2} + \cdots\right) = \frac{1}{y} + \frac{r_k}{y^2} + \frac{r_k^2}{y^3} + \frac{r_k^3}{y^4}\cdots,$$

Por tanto, según (12), se obtiene:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{n}{y} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)\cdot\frac{1}{y^3} + \cdots\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^n\right)\cdot\frac{1}{y^n}, \tag{13}$$

Obsérvese que (13) expresa $\frac{P'(y)}{P(y)}$ en función de las *raíces* del polinomio original.

Por otro lado, derivando (10) y dividiendo también por (10),

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{ny^{n-1} - A(n-1)y^{n-2} + B(n-2)y^{n-3} - C(n-3)y^{n-4} + \cdots}{y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \cdots \pm N}, \tag{14}$$

ecuación que expresa $\dfrac{P'(y)}{P(y)}$ en función de los *coeficientes* del polinomio original.

De esta forma, Euler encuentra fórmulas diferentes para la misma cantidad. Luego, igualando (13) y (14), y operando se llega a:

$$ny^{n-1} - A(n-1)y^{n-2} + B(n-2)y^{n-3} - C(n-3)y^{n-4} + \cdots =$$

$$\left(y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \cdots \pm N\right)\cdot\left(\frac{n}{y} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)\cdot\frac{1}{y^3} + \cdots\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^n\right)\cdot\frac{1}{y^n}\right)$$

$$= ny^{n-1} + \left(-nA + \sum_{k=1}^{n} r_k\right)y^{n-2} + \left(nB - A\sum_{k=1}^{n} r_k + \sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)y^{n-3} - \cdots.$$

Los dos miembros de esta ecuación empiezan con ny^{n-1}. Por tanto, comparando los coeficientes de los términos del mismo grado en y se obtienen las relaciones buscadas. □

La anterior demostración al mejor estilo de Euler, tiene algunos puntos sobre los cuales discutir; por ejemplo, cuando se considera $\ell n\ (y - r_k)$, se asume implícitamente que $y > r_k$ y cuando se desarrollan los cocientes de la ecuación (12) como series de potencias se supone la convergencia.

Pero este teorema no se queda allí, Euler lo usa para encontrar otros resultados referentes a las series *p*. En efecto, considérese un polinomio que contenga sólo potencias pares de *x* y factorícese de la siguiente forma:

$$1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + \ldots \pm Nx^{2n} = (1 - r_1x^2)\,(1 - r_2x^2)\,(1 - r_3x^2)\ldots(1 - r_nx^2), \quad (15)$$

ahora, sustituyendo x^2 por $\dfrac{1}{y}$ en la ecuación anterior:

$$1-A\left(\frac{1}{y}\right)+B\left(\frac{1}{y}\right)^2-C\left(\frac{1}{y}\right)^3+\cdots\pm N\left(\frac{1}{y}\right)^n=\left(1-r_1\frac{1}{y}\right)\left(1-r_2\frac{1}{y}\right)\cdots\left(1-r_n\frac{1}{y}\right).$$

Multiplicando por y^n a ambos lados de la expresión anterior, se obtiene:

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \ldots \pm N = (y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)\ldots(y-r_n)$$

y este es el caso que Euler consideró en el teorema anterior; por lo tanto, de (15) se tiene también las fórmulas (11').

Euler asumió que las relaciones que establece el teorema 2 son válidas cuando (10) y (11) son infinitos, por tanto, retomando (8'):

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots=P(x)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

que es la versión infinita de (15) con $A=\frac{1}{3!}$, $B=\frac{1}{5!}$, $C=\frac{1}{7!}$ y $r_k=\frac{1}{k^2\pi^2}$, para $k \geq 1$; entonces, según la primera igualdad de (11'):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}=A=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\text{, por tanto, }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

resultado ya demostrado. Por otro lado, la segunda y tercera igualdades de (11') proporcionan nuevas igualdades:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}-2B=\left(\frac{1}{3!}\right)^2-\frac{2}{5!}=\frac{1}{90}\text{ y entonces }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^2}{90}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^3 = A\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2 - B\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} + 3C = \frac{1}{945} \text{ y entonces } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^2}{945}$$

De este modo, Euler no sólo encontró respuesta al problema de Basilea, sino que también ideó una forma para hallar el límite de convergencia de las series p con p par; sin embargo y hasta la actualidad los valores exactos de las series p con p impar, es aún un problema sin resolver.

2.2.4. Generación de funciones reales a partir de las series *p*

2.2.4.1. Algunas funciones polinómicas y las series *p*

De manera similar al tratamiento realizado en el capítulo uno para la obtención de funciones que resultaban de la expansión de los números por series, se pretende en este apartado, a partir de las series p convergentes, definir otras funciones; por ejemplo, dada la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ podría asociarse la expresión:

$$f(x) = \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \cdots = x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}x^2 .$$

Una función de dominio real, no muy sorprendente, ya que es simplemente una función cuadrática, sin embargo, lo curioso de la función es su coeficiente que corresponde al límite de convergencia de la serie p con $p = 2$. De este modo, considérese el conjunto:

$$\boldsymbol{SP} = \{f_p : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f_p \text{ es una serie } p,\ p\in\mathbb{N},\ p \geq 2\}$$

Ahora, *sea* $\wp : \boldsymbol{SP} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *una función tal que para toda* $f_p \in \boldsymbol{SP}$**,**

$$\wp(f_p) = f \text{ donde } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^p = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\cdot x^p.$$

Entonces la función $\wp$ tiene por imagen a una función polinómica generada a partir de las series *p*.

2.2.4.2. Otras funciones generadas a partir de las series *p*

Considérese una vez más la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

a la cual puede por ejemplo asociársele la expresión:

$$f(x) = x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\cdots+\frac{x^k}{k^2}+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k^2}\right).$$

Por medio del criterio del cociente, puede encontrarse el intervalo de convergencia de la serie, en efecto:

$$\frac{\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)^2}}{\dfrac{x^k}{k^2}} = \left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot x\right] \to x \text{ cuando } k\to\infty$$

de modo que los valores de x deben ser menores que 1 para que la serie converja, por tanto, la función anterior está definida para los $x\in(-1,\ 1)$. Sin embargo, puede observarse además que si $x = 1$, entonces $f(1) = \pi^2/6$, por lo tanto la serie también converge para $x = 1$, ahora si $x = -1$, entonces $f(-1) = -\pi^2/12$, porque:

$$\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{(2k)^2}+\cdots\right) = \frac{\pi^2}{6},$$

y de esto se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6},$$

por tanto:

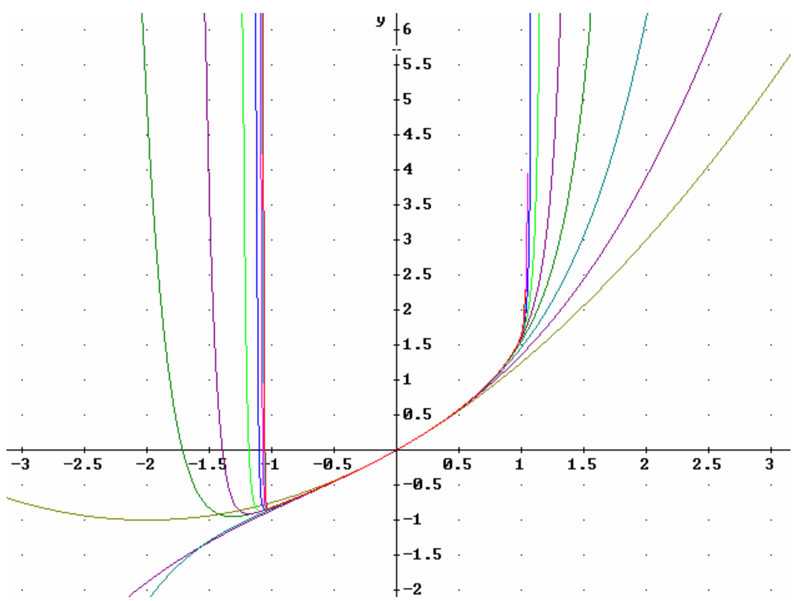
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.$$

finalmente:

$$f(-1)=-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\cdots=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{8}=-\frac{\pi^2}{12}$$

de modo que el dominio de esta función es [–1, 1]. La gráfica siguiente muestra algunas aproximaciones de esta función:



Gráfica 5

La gráfica de color rojo es la aproximación de la función desde $k = 1$ hasta $k = 200$.

Lo anterior sugiere considerar el siguiente caso general:

Sea la serie p,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{k^p} + \cdots, \text{ con } p \geq 2 \text{ y } p \in \mathbb{N}.$$

Luego, a esta serie puede asociársele la expresión:

$$F_p(x) = x + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \frac{x^4}{4^p} + \cdots + \frac{x^k}{k^p} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k^p} \right)$$

Usando el criterio del cociente para la serie anterior, se determina el dominio de esta función:

$$\frac{\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)^p}}{\dfrac{x^k}{k^p}} = \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^p \cdot x \right] \to x \text{ cuando } k \to \infty$$

por tanto, para que el criterio pueda aplicarse x debe ser un número del intervalo $(-1, 1)$; sin embargo, para $x = 1$ y $x = -1$, la serie también converge pues en estos valores se tienen las series p, por tanto $x \in [-1, 1]$.

Precisando se tiene:

Sea $\mathscr{E} : \boldsymbol{SP} \to \mathbb{R}^{[-1,\, 1]}$ *una función tal que para toda serie p* $f_p \in \boldsymbol{SP}$:

$$\mathscr{E}(f_p) = F_p \text{ donde } F_p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k^p} \right)$$

De este modo, se logró definir una función que asigna a cada serie p una función $F_p : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ expresada como una serie; además cabe preguntarse si las imágenes de la función $\mathscr{E}$ pueden calcularse mediante una expresión explícita como lo plantearon los Bernoulli, Euler, entre otros cuando se enfrentaron al problema de Basilea. Por ahora, la pregunta queda sin una respuesta.

2.2.4.3. La función zeta[28]

Se vio que las series p con $p > 1$ y $p \in \mathbb{N}$ convergen todas, por tanto la pregunta que surge es, ¿Para valores reales de p mayores que uno, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge? La respuesta es sí, de hecho, el resultado es inmediato por la misma convergencia de las series p; de modo que, podría definirse una función cuya variable sea p; esta función fue definida por Euler para todo real $p > 1$ y posteriormente por Riemann (1826-1866), considerando a p un número complejo cuya parte real es mayor que uno.

Definición. *Sea* $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, *una función tal que para todo* $s \in (1, \infty)$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^s} \right).$$

A la función ζ *se denomina función zeta de Euler*[29].

[28] EDWARDS H., *Riemann's zeta function*, Mineola, New York, Dover publications, 2001.

[29] Actualmente esta función es un caso particular de la función zeta de Riemann. Como se comentó antes, estas funciones difieren en que la función zeta de Euler está definida para números reales mayores que uno, mientras que la función zeta de Riemann está definida para todo número complejo con parte real mayor que la unidad.

Euler así mismos, descubrió algunos resultados interesantes relacionados con esta función; a continuación se mostrará uno de ellos:

Supóngase que se quiere sumar todos los recíprocos de los enteros positivos cuyos únicos factores primos son 2 y 3, es decir, se desea obtener la suma de:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \cdots,$$

Como se aprecia, todos los denominadores de los términos de la serie son números naturales de la forma $2^m 3^q$, por lo cual lo anterior puede escribirse como:

$$S = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^q} + \cdots\right],$$

Se puede observar que en cada corchete aparece una serie geométrica de razón menor que uno, por tanto, escribiendo el término al cual converge cada serie se tiene:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}.$$

Por otro lado, el teorema fundamental de la aritmética permite que todo número natural pueda descomponer como producto de números primos, de modo que:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots,$$

puede escribirse como:

$$\zeta(s)=\left[1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{\left(2^2\right)^s}+\frac{1}{\left(2^3\right)^s}+\frac{1}{\left(2^4\right)^s}+\cdots+\frac{1}{\left(2^m\right)^s}+\cdots\right]\cdot\left[1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{\left(3^2\right)^s}+\frac{1}{\left(3^3\right)^s}+\frac{1}{\left(3^4\right)^s}+\cdots+\frac{1}{\left(4^m\right)^s}+\cdots\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{\left(5^2\right)^s}+\frac{1}{\left(5^3\right)^s}+\frac{1}{\left(5^4\right)^s}+\cdots+\frac{1}{\left(5^r\right)^s}+\cdots\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{\left(p^2\right)^s}+\frac{1}{\left(p^3\right)^s}+\frac{1}{\left(p^4\right)^s}+\cdots+\frac{1}{\left(p^q\right)^s}+\cdots\right]\cdots$$

donde todos los números p son primos; de manera similar que en el ejemplo, cada corchete contiene una serie geométrica convergente, entonces sustituyendo cada una de ellas por el límite de convergencia correspondiente se obtiene:

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\cdots=\prod_p\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}\text{ Con } p \text{ primo.}$$

Es así como Euler logra relacionar la función zeta con los números primos.

En conclusión, las series p resultaron un buen recurso para la obtención de funciones reales, encontrando tres caminos diferentes de los cuales dos resultaron nuevos.

2.3. LAS FRACCIONES CONTINUAS Y LA GENERACIÓN DE FUNCIONES REALES A PARTIR DE SERIES

En la última sección del capítulo primero, se trabajaron algunas funciones dadas como fracciones continuas a partir de los números irracionales cuadráticos, sin embargo, no se determinaron funciones a partir de las fracciones continuas halladas para representar algunos números trascendentes como e o π; por ejemplo, Euler en 1737 obtuvo[30]:

[30] LUQUE, A.; MORA L.; TORRES, J., *Una construcción de los números reales positivos*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2004. p. 79.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ddots}}}}},$$

de manera similar a la forma como se asociaron funciones a las fracciones continuas de los irracionales cuadráticos, se puede por ejemplo obtener la siguiente expresión a partir de la fracción continua anterior:

$$e(x) = 2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{3x + \cfrac{3}{4x + \cfrac{4}{5x + \ddots}}}}}.$$

Hallando algunas reductas y sus gráficas se obtiene:

Primera reducta: 2

Segunda reducta: $\dfrac{2x + x}{x}$

Tercera reducta: $\dfrac{4x^2 + 2x + 2}{2x^2 + 1}$

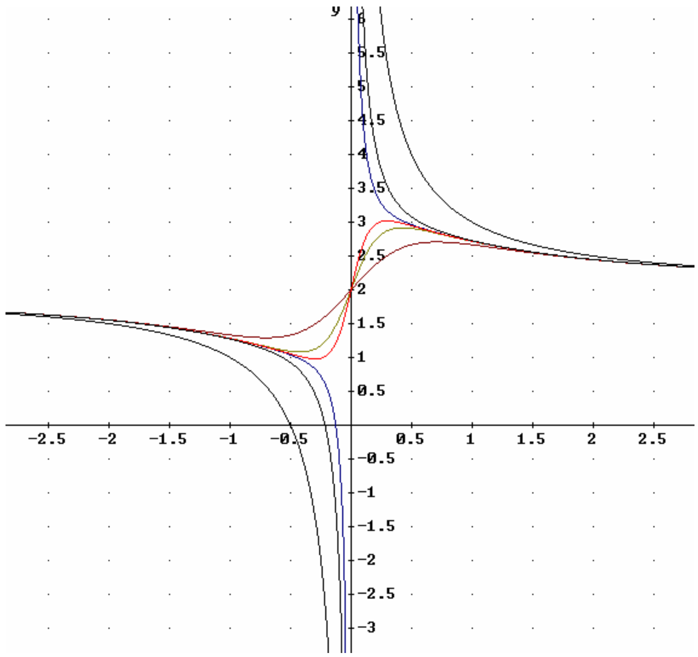
Cuarta reducta: $\dfrac{12x^3 + 6x^2 + 10x + 2}{6x^3 + 5x}$

Quinta reducta:

$$\frac{48x^4 + 24x^3 + 52x^2 + 14x + 6}{24x^4 + 26x^2 + 3}$$

Sexta reducta:

$$\frac{240x^5 + 120x^4 + 308x^3 + 94x^2 + 70x + 8}{120x^5 + 154x^3 + 35x}$$



Gráfica 6

De lo anterior se pueden hacer algunas observaciones, por ejemplo que cuando los valores de x crecen, las funciones se acercan a dos y que cuando $x = 1$, las reductas se aproximan al número e. Sin embargo, se tiene pocos recursos para saber si estas reductas se aproximan a alguna función.

2.3.1. La función log(1 + x) y las fracciones continuas

Dada una serie, cabe preguntarse si dicha serie puede expresarse como una fracción continua; por ejemplo, la serie de potencias para la función $\log(1 + x)$ es:

$$\log(1+x) = l_0(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\right), \tag{1}$$

definiendo $l_1(x) = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\right)^{-1} - 1$, entonces $l_0(x)$ puede expresarse como:

$$l_0(x)=\frac{x}{1+l_1(x)}, \tag{2}$$

Por otro lado, obsérvese que:

$$l_1(x)=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^{-1}-1=\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{-1}-1=\frac{x}{\log(1+x)}-1,$$

de modo que al hallar el polinomio de Taylor en $a = 0$, de $l_1(x)$, lo anterior resulta:

$$l_1(x)=\frac{x}{\log(1+x)}-1=\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{12}-\frac{19x^3}{360}+\frac{3x^4}{80}-\cdots\right). \tag{3}$$

Definiendo, $l_2(x)=\left(1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{12}-\frac{19x^3}{360}+\frac{3x^4}{80}-\cdots\right)^{-1}-1$, se observa que:

$$l_1(x)=\frac{x/2}{1+l_2(x)}. \tag{4}$$

Por otro lado:

$$l_2(x)=\frac{1}{\left(1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{12}-\frac{19x^3}{360}+\frac{3x^4}{80}-\cdots\right)}-1=\frac{\left(\frac{x}{6}-\frac{x^2}{12}+\frac{19x^3}{360}-\frac{3x^4}{80}+\cdots\right)}{\left(1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{12}-\frac{19x^3}{360}+\frac{3x^4}{80}-\cdots\right)}$$

$$=\frac{-\frac{2}{x}\left(\frac{x}{\log(1+x)}-1\right)+1}{\frac{2}{x}\left(\frac{x}{\log(1+x)}-1\right)} \qquad \text{Por (3)}$$

$$=-1+\frac{\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{\log(1+x)}-1\right)}=\frac{(x+2)\log(1+x)-2x}{2(x-\log(1+x))}, \tag{5}$$

Hallando el polinomio de Taylor en $a = 0$ de $l_2(x)$, (5) resulta:

$$l_2(x) = \frac{(x+2)\log(1+x) - 2x}{2(x - \log(1+x))} = \frac{x}{6}\left(1 - \frac{x}{3} + \cdots\right). \tag{6}$$

Definiendo $l_3(x) = \left(1 - \frac{x}{3} + \cdots\right)^{-1} - 1$, entonces (6), puede escribirse:

$$l_2(x) = \frac{x/6}{1 + l_3(x)}. \tag{7}$$

de manera similar:

$$l_3(x) = \frac{x/3}{1 + l_4(x)}, \tag{8}$$

Donde $l_4(x)$ es una serie de potencias que se determina de forma similar como se halló $l_0(x)$, $l_1(x)$, y $l_3(x)$.

De esta forma, (2), (4), (7) y (8) sugieren la identidad:

$$\log(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x/2}{1 + \cfrac{x/6}{1 + \cfrac{x/3}{1 + l_4(x)}}}}, \tag{9}$$

De hecho, aunque el método anterior resulta ser extenso, aproxima a una de las fracciones continuas de $\log(1 + x)$, a saber[31]:

[31] LORENTZEN, L, WAADELAND, H., *Continued fractions with applications*, Elsevier science publishers, Netherlands, 1992. p. 17.

$$\log(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{x/2}{1+\cfrac{x/6}{1+\cfrac{x/3}{1+\cfrac{x/5}{1+\cfrac{3x/10}{1+\ddots}}}}}}.$$

2.3.2. De las fracciones continuas a las series de potencias. Un ejemplo

Considérese la identidad:

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{2+\left(\sqrt{1+x}-1\right)},$$

De esta igualdad se deduce que:

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\cdots+\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+\left(\sqrt{1+x}-1\right)}, \tag{10}$$

de esta forma, la expresión anterior sugiere considerar la fracción continua:

$$\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+}\cdots+\frac{x}{2+}\,\frac{x}{2+\cdots}. \tag{11}$$

Calculando el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \sqrt{1+x}-1$ en $a = 0$, resulta:

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256}-\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k, \tag{12}$$

siempre que $|x| < 1$.

Ahora, expandiendo algunas aproximaciones de la fracción continua (11) se tiene:

Primera aproximación.

$$\frac{x}{2}=\underline{\frac{x}{2}}+0x^2+0x^3+\cdots,$$

Segunda aproximación.

$$\frac{x}{2+}\frac{x}{2}=\frac{2x}{x+4}=\underline{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}+\frac{x^3}{32}-\frac{x^4}{128}+\frac{x^5}{512}+\cdots,$$

Tercera aproximación.

$$\frac{x}{2+}\frac{x}{2+}\frac{x}{2}=\frac{x^2+4x}{4x+8}=\underline{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}}-\frac{x^4}{32}+\frac{x^5}{64}-\cdots,$$

Cuarta aproximación.

$$\frac{x}{2+}\frac{x}{2+}\frac{x}{2+}\frac{x}{2}=\frac{4x^2+8x}{x^2+12x+16}=\underline{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}}+\frac{13x^5}{512}-\cdots,$$

Los términos subrayados, son los términos que coinciden con la serie de la función.

De este modo, se puede pasar de la fracción continua a la serie; el proceso contrario como se vio parece un poco más difícil; sin embargo, el tratamiento efectuado en este ejemplo no es riguroso, pero intuitivamente muestra que la fracción (11) converge a la serie (12).

En conclusión, las fracciones continuas son una herramienta potente para generar funciones reales; además permite ir en una doble vía, de las fracciones continuas a las series y de las series a las fracciones continuas; por otro lado, la expansión por fracciones continuas de algunas funciones reales convergen en intervalos más grandes que cuando la función se expresa como una serie, es el caso de la función $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ que expandida como (11) converge[32] para todo $x\in[-1, \infty)$ mientras que expandida como (12) sólo converge en el intervalo (–1, 1).

Con el fin de precisar un poco más lo desarrollado hasta ahora en cuanto a las fracciones continuas, se ofrece en la sección que sigue la definición de este concepto y algunas propiedades, que aparecen en la bibliografía citada abajo.

2.3.3. Definición de fracción continua[33]

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots, \tag{13}$$

es la sucesión $\{X_n\}$ de las sumas parciales:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \ ,$$

las cuales pueden definirse por recurrencia así:

$$X_{n+1} = X_n + x_{n+1},$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{X_n\}$ converge a un número real T, entonces la serie (13) es convergente y tiene suma T en cuyo caso se escribe:

[32] LORENTZEN, L, WAADELAND, H., *Continued fractions with applications*, Elsevier science publishers, Netherlands, 1992. p.16.

[33] Ver bibliografía citada en el pie de página anterior.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = T \; .$$

De manera similar, para el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots , \tag{14}$$

con todos los p_n distintos de cero, es la sucesión $\{P_n\}$ de productos parciales:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k \; ,$$

los cuales pueden definirse por recurrencia así:

$$P_{n+1} = P_n \cdot p_{n+1},$$

Si la sucesión $\{P_n\}$ converge a un número real P, entonces (14) es convergente y tiene producto P en cuyo caso se escribe:

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \; .$$

Ahora, sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales, donde todos los $a_n \neq 0$, y $\{f_n\}$ una sucesión de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ dada por:

$$f_1 = a_1 , \qquad f_2 = \frac{a_1}{b_1 + a_2} , \qquad f_3 = \frac{a_1}{b_1 + \dfrac{a_2}{b_2 + a_3}} ,$$

y en general:

$$f_n = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}. \tag{15}$$

De manera similar a las series y los productos infinitos, lo anterior conduce al concepto de *fracción continua*. Luego:

$$\mathop{\mathbf{K}}_{n=1}^{\infty}\left({}^{a_n}\!/\!_{b_n}\right) = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}. \tag{16}$$

es la sucesión $\{f_n\}$ de aproximaciones dadas por (15). Si $\{f_n\}$ converge a un número real F, entonces (16) converge y se escribe:

$$\mathop{\mathbf{K}}_{n=1}^{\infty}\left({}^{a_n}\!/\!_{b_n}\right) = F\ .$$

Puede observarse que en los tres casos expuestos, la construcción de cada uno de ellos puede hacerse de la siguiente manera:

Dada una sucesión $\{\varphi_k\}$ de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, por composición puede construirse una nueva sucesión $\{\Phi_n\}$ dada por:

$$\Phi_1 = \varphi_1, \qquad \Phi_n = \Phi_{n-1}(\varphi_n) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(\ldots(\varphi_n)))). \tag{17}$$

Así mismo, en los tres casos existe un número real fijo c, por medio del cual puede definirse la convergencia de $\{\Phi_n\}$, así por ejemplo, para el caso de las series:

$$\varphi_k(w) = w + x_k,$$

y las sumas parciales son:

$$\Phi_n(0) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(\ldots(\varphi_n(0))))) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

donde $c = 0$.

Para los productos se tiene:

$$\varphi_k(w) = w \cdot p_k,$$

y los productos parciales son:

$$\Phi_n(1) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(\ldots(\varphi_n(1))))) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n,$$

donde $c = 1$.

Para el caso de las fracciones continuas, se tiene que:

$$\varphi_k(w) = \frac{a_k}{b_k + w},$$

y las *aproximaciones* son:

$$\Phi_n(0) = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}},$$

donde $c = 0$.

Precisando aún más, se tiene:

Definición. *Una fracción continua es una pareja ordenada*

$$((\{a_n\},\ \{b_n\}),\ \{f_n\}), \tag{18}$$

donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *son dos sucesiones de números reales*, *con todos los* $a_n \neq 0$, *y* $\{f_n\}$ *una sucesión de números en el sistema ampliado de los números reales*, *dada por*:

$$f_n = S_n(0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

donde

$$S_0(w) = s_0(w), \qquad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

$$s_0(w) = b_0 + w, \qquad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{21}$$

Por otro lado, al tomar algunas aproximaciones f_n y realizar los cálculos respectivos, puede observarse lo siguiente:

$$f_0 = b_0\,,$$

$$f_1 = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1}\,,$$

$$f_2 = \frac{b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2(b_0)}{b_2 b_1 + a_2}\,,$$

$$f_3 = \frac{b_3[b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2(b_0)] + a_3[b_1 b_0 + a_1]}{b_3(b_2 b_1 + a_2) + a_3(b_1)}\,,$$

$$f_4 = \frac{b_4\{b_3[b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2(b_0)] + a_3[b_1 b_0 + a_1]\} + a_4\{b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2(b_0)\}}{b_4(b_3(b_2 b_1 + a_2) + a_3(b_1)) + a_4(b_2 b_1 + a_2)}\,,$$

Analizando los numeradores y los denominadores de las aproximaciones anteriores resulta:

1. Para los numeradores:

Si se denota a b_0 como A_0, y se define $A_{-1} = 1$, entonces, $b_1b_0 + a_1= b_1A_0 + a_1A_{-1}$, y llamando a esta expresión A_1, se tiene para el numerador de f_1:

$$A_1 = b_1A_0 + a_1A_{-1},$$

De igual manera, para el numerador de f_2, $b_2(b_1b_0 + a_1) + a_2(b_0) = b_2A_1 + a_2A_0$, y llamando a esta expresión A_2, se tiene:

$$A_2 = b_2A_1 + a_2A_0,$$

Similarmente, denotando al numerador de f_3, A_3; resulta:

$$\begin{aligned} A_3 &= b_3[b_2(b_1b_0 + a_1) + a_2(b_0)] + a_3[b_1b_0 + a_1] \\ &= b_3A_2 + a_3A_1, \end{aligned}$$

y para el numerador de f_4, denotado A_4, se tiene:

$$A_4 = b_4A_3 + a_4A_2,$$

La inducción matemática permite demostrar que el numerador de la n-ésima aproximación f_n, denotado A_n, puede escribirse como:

$$A_n = b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2}. \qquad (22)$$

2. Para los denominadores:

El denominador de f_0 es 1, y se define $B_0 = 1$. Por otro lado, llamando B_1 al denominador de f_1 y definiendo $B_{-1} = 0$, entonces:

$$B_1 = b_1B_0 + a_1B_{-1} = b_1,$$

Así mismo, denotando B_2 al denominador de f_2, se tiene:

$$B_2 = b_2B_1 + a_2B_0,$$

De igual manera el denominador de f_3 es:

$$B_3 = b_3B_2 + a_3B_1,$$

En general, la inducción matemática permite demostrar que el denominador B_n de la n-ésima aproximación f_n, puede escribirse como:

$$B_n = b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}. \tag{23}$$

De este modo,

***Teorema* 1**. *Sean*

$$\begin{pmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

y

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = b_n \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} + a_n \begin{pmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

entonces;

$$S_n(0) = f_n = \frac{A_n}{B_n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Se denomina a A_n el n-ésimo numerador canónico de f_n y a B_n el n-esimo denominador canónico de f_n.

El teorema que sigue muestra una relación entre los números A_n y B_n.

***Teorema* 2**. *Sea A_n el n-ésimo numerador canónico de f_n y B_n el n-esimo denominador canónico de f_n, entonces*

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k \ . \tag{27}$$

Demostración.

Si $n = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} A_1B_0 - A_0B_1 &= A_1 - b_0B_1 && \text{por (12),} \\ &= (b_1A_0 + a_1A_{-1}) - b_0(b_1B_0 + a_1B_{-1}) && \text{por (13),} \\ &= b_1b_0 + a_1 - b_1b_0 && \text{por (12),} \\ &= a_1 \\ &= (-1)^{1-1} \cdot a_1. \end{aligned}$$

Supóngase que para $n - 1$ se tiene que:

$$A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1} = (-1)^{n-2} \prod_{k=1}^{n-1} a_k \ , \tag{28}$$

Luego:

$$\begin{aligned} A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n &= (b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2})B_{n-1} - A_{n-1}(b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}) && \text{por (25),} \\ &= a_n(A_{n-2}B_{n-1} - A_{n-1}B_{n-2}) \\ &= - a_n(A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1}) \\ &= - a_n \ (-1)^{n-2} \prod_{k=1}^{n-1} a_k && \text{por (28),} \\ &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k \ . \end{aligned}$$

Esto demuestra lo que se quería. □

En la sección que sigue se mostrará otra forma de generar funciones a partir de fracciones continuas, haciendo uso de la denominada serie hipergeométrica.

2.4. LA SERIE HIPERGEOMÉTRICA

2.4.1. Generalidades

Hasta el momento, se ha obtenido un buen número de funciones generadas por medio de series, sin embargo, existe una serie que engendra a muchas de las funciones antes estudiadas, esta es la *serie hipergeométrica*[34], la cual se expresa por medio de:

$$F(a,b;c;x)=1+\frac{ab}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{a(a+1)\cdots(a+n)b(b+1)\cdots(b+n)}{c(c+1)\cdots(c+n)}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots \qquad (1)$$

donde $|x|<1$, $c\neq 0$ y $c\notin\mathbb{Z}^-$.

Gauss (1777-1855) notó que para valores especiales de los parámetros *a*, *b* y *c* la serie (1) induce casi todas las funciones trascendentes entre otras. En efecto, la observación de Gauss es vital, además encontró relaciones con otras funciones conocidas tales como la *función gamma* de Euler, relación que se expresa por medio de la igualdad:

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

Por otro lado, y atendiendo a la observación de Gauss, se tienen los siguientes ejemplos:

---

[34] La serie hipergeométrica es una solución particular de la ecuación diferencial

$$x(1-x)y''+(c-(a+b+1)x)y'-aby=0.$$

Gauss le dio el nombre de *ecuación diferencial hipergeométrica*, la cual depende de los parámetros *a*, *b* y *c*. Puede encontrarse de manera detallada la solución a esta ecuación diferencial en: VILLAMARÍN, G., "Solución de una ecuación diferencial hipergeométrica", *Boletín de matemáticas*, volumen XVII, Nº 1, 2, 3. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia. 1983, pp. 42–57.

1. Haciendo $a = 1$ y $c = b$ en (1), se obtiene:

$$F(1,b;b;x) = 1 + 1x + 1(2)\frac{x^2}{2!} + \cdots (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\frac{x^{n+1}}{n!} + \cdots,$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

2. Si $a = b = 1$ y $c = 2$, entonces (1) es:

$$F(1,1;2;x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{(2!)}{3!}\frac{x^2}{2!} + \frac{(3!)}{4!}\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{((n+1)!)^2}{(n+2)!}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{1-x}\right). \qquad \text{Con } x \in (-1,\,1) - \{0\}$$

3. Si $a = b = 1$, $c = 2$ y se reemplaza a x por $-x$ en (1), se obtiene:

$$F(1,1;2;-x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+2} + \cdots \right)$$

$$= \frac{\log(1+x)}{x}. \qquad \text{Con } x \in (-1,\,1) - \{0\}$$

4. Haciendo que a y b crezcan, y sustituyendo a c por $\frac{3}{2}$ y x por $-\frac{x^2}{4ab}$ en (1) resulta:

$$\lim_{a,b\to\infty}\left[x\cdot F\left(a,b;\tfrac{3}{2};-\tfrac{x^2}{4ab}\right)\right] = \lim_{a,b\to\infty}\left[x\cdot\left(1-\frac{ab}{3!ab}x^2+\frac{a(a+1)b(b+1)}{5!a^2b^2}x^4\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{7!a^3b^3}x^6+\cdots\right)\right]$$

$$= x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = \operatorname{sen} x$$

5. Obsérvese que la serie $F(a,\ b;\ c;\ x)$ se vuelve finita si a ó b son iguales al entero negativo $-n$; como caso particular se tiene:

$$F(-n,b;b;-x) = 1+\frac{(-n)b}{1\cdot b}(-x)+\frac{(-n)(-n+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot b(b+1)}(-x)^2$$

$$+\frac{(-n)(-n+1)(-n+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot b(b+1)(b+2)}(-x)^3+\cdots+$$

$$\frac{(-n)(-n+1)\cdots(-n+(n-1))b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!b(b+1)\cdots(b+n-1)}(-x)^n$$

$$= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n = (1+x)^n\,.$$

2.4.2. Las fracciones continuas y la serie hipergeométrica

A continuación se muestra cómo generar fracciones continuas a partir de la serie hipergeométrica, para ello, las siguientes identidades[35] se obtienen a partir de (1), comparando las series de potencias en ambos lados de la igualdad, término a término:

[35] LORENTZEN, L, WAADELAND, H., *Continued fractions with applications*, Elsevier science publishers, Netherlands, 1992. pp. 18-20.

$$F(a,b;c;x) = F(a,b+1;c+1;x) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} x \cdot F(a+1,b+1;c+2;x),$$

y

$$F(a,b+1;c+1;x) = F(a+1,b+1;c+2;x) - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} x \cdot F(a+1,b+2;c+3;x),$$

Suponiendo que no se divide por cero, las igualdades anteriores pueden escribirse así:

$$\frac{F(a,b;c;x)}{F(a,b+1;c+1;x)} = 1 + \frac{\frac{-a(c-b)}{c(c+1)} x}{\frac{F(a,b+1;c+1;x)}{F(a+1,b+1;c+2;x)}}, \tag{2}$$

$$\frac{F(a,b+1;c+1;x)}{F(a+1,b+1;c+2;x)} = 1 + \frac{\frac{-(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} x}{\frac{F(a+1,b+1;c+2;x)}{F(a+1,b+2;c+3;x)}}, \tag{3}$$

Obsérvese que el denominador del lado derecho de la ecuación (2) es igual al término del lado izquierdo de la ecuación (3). Además, el denominador del lado derecho de la ecuación (3) coincide con el término del lado izquierdo de la misma ecuación si se reemplaza a a por $a + 1$, b por $b + 1$ y c por $c + 2$ en todos los lugares. Por tanto, incrementando repetidamente los dos primeros parámetros por 1 y el tercero por 2 de la ecuación (3), se obtiene una fracción continua.

Como conclusión, puede verse que casi todas las funciones que habitualmente se trabajan en matemáticas, se consiguen expresar por medio de series, es decir, son funciones analíticas; constituyendo por ejemplo, el teorema de Taylor una de las herramientas más potentes y generales para el desarrollo de funciones por series, o así como lo visto en esta última sección con la serie hipergeométrica que también permite generar un considerable número de funciones con sólo elegir de manera adecuada los parámetros a, b y c.

CONCLUSIONES

1. Dado que un número natural cualquiera puede ser escrito en sistema posicional como una suma de productos formados por un coeficiente, que corresponde a cada una de las cifras del número, y una potencia de la base, se consiguió definir una función que asigna a cada número natural escrito en base k, una función polinómica de dominio real. Por otro lado, sabiendo que cualquier número $n \in \mathbb{N}$, puede expresarse como $n = (n-1),\overline{(k-1)}$ en base k, se obtiene una nueva función que asigna a cada número natural una función afín de dominio real.

2. A partir de la expansión de los números racionales como números n–males, es decir como series de potencias, se logró definir la función biyectiva $\mathscr{H}_k$ para cada base fija $k \geq 2$, con dominio en el conjunto de los números racionales expresados como k–males y rango el conjunto $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$, formado por funciones racionales, permitiendo de este modo, copiar la estructura de números racionales en el conjunto $\mathbb{P}_A \cup (\mathbb{P}_k + \mathbb{H})$.

3. La generación de funciones reales a partir de los números racionales se realizó en principio por medio de la representación n–mal, por tanto, faltaba generar funciones reales sin hacer uso de las expresiones n–males de los números racionales, para ello se recurrió a la división larga, lo cual permitió conectar la historia de la matemática reflejada en las diferencias finitas, con el teorema de Taylor y finalmente con la generación de funciones reales.

4. La forma como fueron construidos los diferentes sistemas numéricos en los espacios académicos del pregrado (Aritmética y sistemas numéricos), permitió seguir un camino lógico para la generación de funciones reales a partir de ellos.

5. Dado que las funciones reales encontradas a partir de los sistemas numéricos, tenían su origen principalmente en las *series de potencias convergentes*, se decidió recurrir a otro tipo de series también convergentes pero no de potencias, tales como, la serie de los recíprocos de los números triangulares que converge a 2, o la serie de los recíprocos de los números cuadrados que converge a $\pi^2/6$, entre otras, por lo cual fue necesario estudiar algunos trabajos desarrollados por Euler en torno a las series y las funciones, consiguiendo definir y redescubrir otras funciones reales a partir de las series estudiadas por Euler.

6. Con este estudio, se permitió apreciar que la mayoría de las funciones reales que habitualmente se estudian, son analíticas, lo cual se ve reflejado por medio del teorema de Taylor y series como la *serie hipergeométrica*.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACEVEDO M.; FALK M., *Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Colciencias, 1997.

[2] APOSTOL, T., *Calculus*. Vol. 1. Barcelona, Reverté, 1988.

[3] AYOUB, R., "Euler and the zeta function", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 81, Nº 10. 1974. pp. 1067-1086.

[4] BOYER, C., *Historia de la matemática*. Madrid, Alianza Universal, 1986.

[5] CARTAN, H., *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. Madrid, Selecciones científicas, 1968.

[6] CASTRO, I., *El más prolífico en la historia de la matemática Leonar Euler*. México, Grupo Editorial Iberoamericana, 1996.

[7] DUNHAM, W., *Euler el maestro de todos los matemáticos*. España, Nivola, 2000.

[8] DUBREIL, P.; DUBREIL, M, L., *Lecciones de álgebra moderna*. 2a. ed. Barcelona, Editorial Reverté, 1975.

[9] EDWARDS H., *Riemann's zeta function*, Mineola, New York, Dover publications, 2001.

[10] GEMIGNANI, M., *Elementary topology*. Canadá, Adisson-Wesley, 1967.

[11] KALMAN, D., “Six ways to sum a series”. *The College Mathematics Journal*, Vol. 24, Nº 5, November, 1993, pp. 402-421.

[12] KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Vol. II. Madrid, Alianza Editorial, 1992.

[13] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H., *Continued fractions with applications*, Elsevier science publishers, Netherlands, 1992.

[14] LUQUE, A.; MORA L.; TORRES, J., *Una construcción de los números reales positivos*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2004.

[15] LUQUE, C.; MORA, L.; TORRES, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: clasificar, medir, invertir*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, nomos, 2005.

[16] MUÑOZ, J., *Introducción a la teoría de conjuntos*, 4a. ed. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[17] NEWTON, I. “Sobre el teorema del binomio para exponentes fraccionarios y negativos”, en NEWMAN, J., *Sigma: el mundo de las matemáticas*, Tomo IV, 10a. Ed. Barcelona, Grijalbo, 1985.

[18] PERALTA, J., “Una caracterización de π obtenida al resolver un problema en clase”, en: *Revista Suma*, Nº 45, febrero, 2004. pp. 59-67.

[19] RENDÓN, A.; HARO, M., “Una propuesta para la aproximación intuitiva de funciones por polinomios en la ESO y el bachillerato”, en: *Revista Suma*, Nº 45, febrero, 2004. pp. 29-34.

[20] RUBIANO, G., “Fractales: la huella del caos”, *Lecturas Matemáticas*, Vol. 18, Nº 1. Bogotá, Sociedad colombiana de matemáticas, Universidad Distrital Francisco de José de Caldas.1997. pp. 53-69.

[21] RUDIN, W., *Principios de análisis matemático*, 2a ed. México, McGraw-Hill, 1977.

[22] SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C., *De los Bernoulli a los Bourbaki*, 1a ed. España, Nivola, 2004.

[23] SPIVAK, M., *Calculus cálculo infinitesimal*, vol. 1, ed. Reverté, Barcelona, 1978.

[24] SPIVAK, M., *Calculus cálculo infinitesimal*, vol. 2, ed. Reverté, Barcelona, 1978.

[25] VILLAMARÍN, G., “Solución de una ecuación diferencial hipergeométrica”, *Boletín de matemáticas*, volumen XVII, Nº 1, 2, 3. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia. 1983, pp. 42–57.

Algunos Sitios Consultados en Internet

http://www.eulerarchive.com/

http://mathworld.wolfram.com/

www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/zetafn.htm