UNA APROXIMACIÓN A LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA, VIENDO MÁS ALLÁ DE LO QUE SE VE

KAREN LIZETH PINEDA RODRIGUEZ

VANESSA ROMERO OCHOA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2021

UNA APROXIMACIÓN A LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA, VIENDO MÁS ALLÁ DE LO QUE SE VE

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de licenciadas en matemáticas

Trabajo de grado asociado a un estudio de interés personal y profesional

Karen Lizeth Pineda Rodriguez

C.C. 1032501617

Cód. 2016140071

Vanessa Romero Ochoa

C.C. 1033792318

Cód. 2016140080

Directora

Tania Julieth Plazas Merchán

Magister en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C.

2021

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a Dios por permitirnos culminar nuestro proceso en la formación como licenciadas en Matemáticas, guiándonos con sabiduría y fuerza, sin dejarnos desfallecer.

A la gloriosa Universidad Pedagógica Nacional, nuestro segundo hogar, que ayudó a cumplir el sueño de formarnos en el campo de la educación, brindándonos conocimientos y muy buenas experiencias.

A todas las personas que se hicieron participes en nuestro proceso, quienes nos guiaron y nos vieron crecer día a día. Gracias a todos los profesores que dedicaron tiempo a nuestra formación, mostrando el amor por la gran labor que desempeñan.

En especial, a nuestra asesora Tania, por brindarnos su apoyo, paciencia y experiencia en cada etapa de este camino, por permitirnos soñar y soñar con nosotras. Gracias por enseñarnos que antes de ser buenas profesoras, debemos ser excelentes personas.

A Laura y Danna que brindaron su tiempo y esfuerzo para llevar a cabo este estudio, también a sus familiares por permitirnos conocerlas e interactuar con ellas. Son unas niñas maravillosas.

A nuestras familias, por ser una voz de aliento que nos acompaña en cada momento, apoyándonos con amor, dedicación y esfuerzo. Gracias por contribuir a hacer realidad nuestros sueños.

Finalmente, le agradecemos a todos nuestros amigos por hacer parte del proceso, por acompañarnos entre risas y lágrimas en los momentos buenos y malos. En especial a Angie Pinzón por ser compañera de lucha y aventuras siempre.

Gracias…

A mi abuela, Elena Jimenez, quien es mi segunda madre, ejemplo de lucha, amor y valentía. Gracias por darme todo lo que eres, porque gracias a ti soy todo lo que soy hoy. Gracias por hacerme sentir que nunca debo rendirme y que no hay nada imposible.

A mi mamá, Elizabeth Rodríguez, por ser una mujer alegre, radiante, fuerte y exitosa. Gracias por ser mi ejemplo a seguir y ayudarme a cumplir todos mis sueños, por eso y mucho más toda mi vida estaré agradecida.

A mi familia, por ser tan maravillosa y especial, me siento agradecida de tener el apoyo incondicional que me anima a seguir adelante a pesar de las dificultades. En especial a mis tías: Eyda, Melisa y Leidy por darme su amor, apoyo y la confianza que siempre he necesitado para cumplir mis sueños.

A mi amiga, Vanessa Romero, por confiar en mí y acompañarme en esta etapa de mi vida. Gracias por los consejos, por ser tan maravillosa persona, por toda la paciencia y el amor. Gracias, amiga por ayudarme a crecer y por empujarme cuando tenía miedo de seguir mis sueños.

-Karen Pineda

A mi mamá, Isabel Ochoa, por su amor incondicional y apoyo durante toda mi vida. Por ser la mejor madre y siempre buscar mi bienestar. Gracias por contribuir a que mis sueños se hagan realidad a pesar de los obstáculos.

A mi amor, Julian Guerrero, por acompañarme en cada paso que doy diariamente, entregarme lo mejor cada día y apoyarme en los momentos que más necesito. Gracias por enseñarme a luchar por mis sueños y por ser mi compañero de vida.

A mis hermanos: Mayra, Cristian y Felipe por inspirarme a seguir adelante y ser un gran apoyo en mi camino. Especialmente a mi hermano Carlos, quien desde el cielo guía y acompaña mis pasos. A mi familia por creer en mí, permitir que crezca como persona y llenarme de amor.

A mi mejor amiga, Karen Pineda, por convertirme en su hermana, por toda la comprensión y esfuerzo que dedicó a convertir este sueño en realidad. Gracias por estar siempre conmigo, ser una persona hermosa y elegirme para esta aventura.

-Vanessa Romero

RESUMEN

El presente trabajo de grado surgió a partir del interés de las autoras por profundizar en algunos aspectos de la población con discapacidad visual, su enseñanza y aprendizaje de la geometría. Al mismo tiempo, es deber de los educadores cumplir con las disposiciones establecidas por algunos entes reguladores como el Ministerio de Educación Nacional y crear ambientes inclusivos para la formación de todas las personas sin discriminación alguna. Por otra parte, se considera fundamental el proceso de conjeturación en el desarrollo del pensamiento matemático y el concepto de congruencia puede ser un pretexto para la construcción de conjeturas, en este caso, sobre criterios de congruencia de cuadriláteros, ya que sus antecedentes son pocos, casi nulos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se diseñó una secuencia de tareas acompañada de material didáctico, atendiendo a las recomendaciones propuestas por Guzmán (2014), Niño y Vanegas (2013) y Fernández (1986) para el diseño de material háptico para población con discapacidad visual. Se logró realizar la implementación tanto del material como de la secuencia de tareas con dos estudiantes, una de ellas con discapacidad visual y la otra normovidente. Se inició con la exploración y manipulación del material, luego con el reconocimiento de las propiedades de algunos cuadriláteros, seguido del estudio de la definición de congruencia y finalmente, con la construcción de los criterios de congruencia de cuadriláteros.

Finalmente, se concluyó que este trabajo de grado aporta a la Educación Matemática Inclusiva, ya que mediante la secuencia de tareas y el material didáctico se logró acercar a las estudiantes a conceptos y procesos geométricos, en particular, el desarrollo del proceso de conjeturación, a través de las acciones descritas por Plazas y Samper (2013). Todo esto, llevó a las autoras a un proceso de continua reflexión, que permitió ampliar el panorama acerca de la formación de personas con discapacidad visual.

PALABRAS CLAVE: Discapacidad visual, conjeturación, criterios de congruencia de cuadriláteros, material didáctico.

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"UNA APROXIMACIÓN A LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA, VIENDO MÁS ALLÁ DE LO QUE SE VE"**, elaborado por las estudiantes **KAREN LIZETH PINEDA RODRÍGUEZ,** identificada con el Código **2016140071** y Cédula **1032501617** y **VANESSA ROMERO OCHOA,** identificada con el Código **2016140080** y Cédula **1033792318** el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cuatro** (44) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los quince (15) días del mes de septiembre de 2021.

Tania J Plazas M.

Mg. TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN
Directora del Trabajo de grado

Mg. LUIS EDUARDO ESPITIA
Jurado del Trabajo de grado

Mg. LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO
Jurado del Trabajo de grado

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado corresponde a una monografía y en la modalidad de un estudio de interés personal y profesional de las autoras, con el fin de obtener el título de Licenciadas en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En este se presenta el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de tareas acompañada de un material didáctico háptico, que busca favorecer el proceso de conjeturación, en torno a la congruencia de cuadriláteros. La propuesta se implementó con dos estudiantes, una estudiante con discapacidad visual y otra normovidente.

A continuación, se presenta cómo está organizado el presente documento:

Capítulo 1 Planteamiento del problema. En este capítulo, se exponen las razones que justifican la propuesta, teniendo en cuenta los derechos fundamentales de todos los individuos, así como lo descrito por el Ministerio de Educación Nacional [MEN], acerca de la accesibilidad educativa para personas con discapacidad visual y las características propias de esta población. También, se menciona la importancia de desarrollar el proceso de conjeturación en geometría. Teniendo en cuenta lo anterior, se establecieron los objetivos, general y específicos, bajo los cuales se planteó y desarrolló el trabajo.

Capítulo 2 Marco de referencia. Aquí se presenta el marco de referencia acerca de las Necesidades Educativas Especiales [NEE] de las personas que poseen alguna discapacidad, además de las generalidades de estas condiciones enfatizando en la discapacidad visual. Por otra parte, se presentan algunas definiciones y hechos geométricos en torno a la congruencia y los cuadriláteros; además, se proponen algunos criterios de congruencia de cuadriláteros que contribuyeron en el diseño de las tareas y el material didáctico. También, se exponen algunos referentes teóricos en relación con el proceso de conjeturación, las acciones que lo promueven y, finalmente, las características de materiales didácticos en matemáticas y geometría para población con discapacidad visual.

Capítulo 3 Metodología. Se describen las etapas de desarrollo de este estudio. Adicionalmente, se realiza una descripción de las estudiantes que participaron en la prueba piloto y de la estructura general de las tareas de la secuencia.

Capítulo 4 Material didáctico TRALC. En este capítulo, se expone el proceso de diseño del material didáctico TRALC y la descripción de cada una de las piezas que lo componen. Asimismo, se menciona la secuencia de tareas, teniendo en cuenta el objeto matemático a estudiar, el propósito de estas, la descripción detallada de cada momento, las posibles soluciones, errores o dificultades que se pueden presentar durante su desarrollo.

Capítulo 5 Análisis. Se presenta el análisis de la implementación de las tareas durante el desarrollo de la prueba piloto, realizando una descripción detallada de lo sucedido con cada una de las estudiantes y, posteriormente, contrastando lo planeado en los anteriores capítulos con los resultados obtenidos. Además, se exponen las limitaciones de las tareas y del material didáctico, evidenciadas en el desarrollo de la prueba piloto y se proponen posibles mejoras o cambios para estos.

Capítulo 6 Conclusiones. Se reporta el alcance de los objetivos propuestos para el trabajo de grado, las proyecciones investigativas que se pueden contemplar para dar continuidad con el estudio y el impacto que este proceso generó a nivel académico y profesional en la formación de las autoras del trabajo.

Finalmente, se encuentran las referencias bibliográficas empleadas en el desarrollo del documento, al igual que los anexos: hojas de trabajo de las tareas, solución de estas y la modificación de algunas.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A continuación, se justifica la propuesta, tomando como referencia los planteamientos del MEN con respecto a la accesibilidad educativa para personas con discapacidad visual, además se mencionan los objetivos de este estudio.

1.1 Justificación

Según la Declaración Universal de los Derechos Humanos (DUDH, 1948, Artículo 2) ninguna persona será objeto de discriminación o segregación y todos los individuos tienen derecho a la educación en igualdad de oportunidades. Por esto, el Estado Colombiano reconoce que la educación es un derecho y un servicio social de todas las personas (Constitución Política de Colombia, 1991, Artículo 67) y ha buscado generar políticas que incluyan la integración social de individuos con diversas discapacidades y las hace una parte importante del Sistema Educativo.

En consecuencia, el MEN define la inclusión de la siguiente manera:

> La inclusión es un proceso permanente que reconoce, valora y responde de manera pertinente a la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de los niños, adolescentes, jóvenes y adultos, cuyo objetivo es promover su desarrollo, aprendizaje y participación, con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna, y que garantiza, que se eliminen las barreras existentes en el entorno educativo (Decreto 1421, 2017, p.5).

Por lo tanto, es deber de los educadores cumplir con las disposiciones establecidas y crear ambientes inclusivos para la formación de personas con NEE.

Para lograr desarrollar procesos de aprendizajes con población con NEE, desde la didáctica de las matemáticas, se ha demostrado que “es por medio de la educación vivenciada que el niño genera conciencia, desde su más temprana edad, la posibilidad que se le ofrece de descubrir, a partir de la misma situación, diferentes expresiones abstractas” (Fuentes, s.f., p.38).

Tradicionalmente, la enseñanza de la geometría euclidiana se desarrolla mediante procesos que involucran en su mayoría la captación de información visual. Es por lo que, a los estudiantes con discapacidad visual se les dificulta el aprendizaje de contenidos y procesos netamente geométricos, por ello, es necesario hacer uso de distintos materiales que favorezcan el desarrollo de competencias y conocimientos, con técnicas adecuadas como material háptico que cuente con el uso de relieves y texturas, o material de apoyo auditivo que facilite el desarrollo de actividades y tareas (Niño y Vanegas, 2013).

La adaptabilidad de recursos didácticos ya existentes resulta ser bastante provechoso teniendo en cuenta las necesidades educativas de esta población; en la actualidad, varios investigadores han diseñado materiales que favorecen el desarrollo del pensamiento geométrico. Para el diseño o adaptación de material didáctico se hace indispensable tener en cuenta ciertas características como la transportabilidad, que sea adecuado a las particularidades perceptivas y sensoriales de la población, la sencillez y la economía de este, tal como lo propone Fernández (1986). Estos materiales logran ser una herramienta de gran ayuda para facilitar la percepción de los entes geométricos y permite que los docentes que desean incorporar la inclusión en sus aulas garanticen, de cierta forma, la equidad educativa para cada uno de sus estudiantes.

Para el MEN (1998), razonar en matemáticas está relacionado con formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos. Es por lo que, la conjeturación juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, empezando en los primeros grados, apoyándose en materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; y de esta forma hacer conjeturas; justificarlas o refutarlas (MEN, 2006a).

Adicionalmente, el concepto de congruencia de figuras bidimensionales y tridimensionales puede ser un pretexto para la construcción de conjeturas y generalidades, a partir del establecimiento y percepción de regularidades, con el uso de material didáctico, en la solución de situaciones problema. Para el caso de este trabajo, estableciendo invariantes que permitan descubrir e identificar criterios de congruencia de los cuadriláteros. Es de aclarar que de estos criterios de congruencia son pocos (casi nulos) los antecedentes que se encuentran.

Basándonos en nuestras experiencias en el desarrollo de las prácticas iniciales, en las cuales tuvimos que desarrollar clases y actividades en aulas inclusivas y que, dentro del plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas, no hay espacios académicos en los cuales se brinde formación para afrontar este tipo de aulas, nos surge el interés de estudiar sobre aspectos teóricos que hacen referencia a población con discapacidad visual.

Por lo tanto, se propone el diseño de una secuencia de tareas, acompañadas de un material didáctico háptico, que favorezca el proceso de conjeturación, estableciendo algunos criterios de congruencia de cuadriláteros, diseñada para población con discapacidad visual, teniendo en cuenta las limitaciones, retos y oportunidades que acarrea estudiarlos.

1.2 Objetivos

1.2.1 General

Desarrollar procesos de conjeturación, a partir de una secuencia de tareas acompañada de un material didáctico, en torno a la congruencia de cuadriláteros, con estudiantes con discapacidad visual y normovidentes.

1.2.2 Específicos

- Diseñar un material didáctico háptico que permita desarrollar procesos de conjeturación en relación con los criterios de congruencia de cuadriláteros.
- Diseñar una secuencia de tareas para desarrollar procesos de conjeturación usando el material didáctico háptico en relación con los criterios de congruencia de cuadriláteros.
- Implementar una prueba piloto de la secuencia de tareas, con estudiantes con discapacidad visual y normovidentes.
- Analizar los resultados obtenidos en la prueba piloto para generar mejoras en el material y en las tareas implementadas.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo, se presenta el marco de referencia de las características y NEE de la población que posee alguna discapacidad, profundizando en las generalidades de las personas con discapacidad visual. Adicionalmente, se presenta el marco matemático en el cual se exponen algunas definiciones y hechos geométricos en torno a la congruencia de cuadriláteros. Finalmente, se describe el proceso de conjeturación en geometría y los materiales didácticos existentes para población con discapacidad visual.

2.1 Necesidades Educativas Especiales (NEE)

Las Necesidades Educativas se plantean en la actualidad como una opción para comprender los procesos de aprendizajes de todos los estudiantes y generar servicios educativos y sociales, contribuyendo a la elaboración de una cultura de atención a la diversidad (MEN, 2006b). Duk (2004), afirma que es correcto referirse a una población con necesidades educativas diversas, que pueden ser compartidas, individuales y especiales y, por lo tanto, define las Necesidades Educativas Especiales como aquellas necesidades individuales que no pueden ser resueltas haciendo uso de los medios y los recursos metodológicos que habitualmente se emplean para atender otro tipo de diferencias que existen.

Para el MEN (2006b) las NEE se refieren a las dificultades mayores que presenta un estudiante, con relación al resto de los compañeros, para acceder a los aprendizajes que les corresponden por edad. Para afrontarlas es necesario realizar acciones con el fin de prosperar en su aprendizaje, algunas de estas son:

- Hacer adaptaciones curriculares
- Adecuar la organización del aula o la escuela
- Utilizar servicios de apoyo especial

> Es importante aclarar que las NEE pueden derivarse de factores relacionados con las dimensiones del desarrollo humano, tales como: factores cognitivos, físicos, sensoriales, de la comunicación, emocionales y psicosociales. La necesidad educativa define el tipo de profesional de apoyo que se requiere para su orientación. Por esto, todos los estudiantes pueden presentar necesidades educativas individuales propias y específicas para el acceso

a las experiencias de aprendizaje y la satisfacción de estas necesidades. Cabe también señalar que no todas las necesidades individuales se convierten en especiales, puesto que sólo comprometen algunos aspectos del desempeño y no la totalidad de las posibilidades del estudiante (MEN, 2006b, p.32).

2.1.1 Recorrido Histórico y Normatividad

El desarrollo histórico de la educación a personas con diversas NEE en Colombia se ha visto inmerso en tres grandes momentos descritos por Vélez y Manjarrés (2019): educación especial, integración escolar y educación inclusiva. En cada una de estas etapas se puede evidenciar transformaciones tanto en el sujeto, como en los entes que regulan la educación igualitaria para todos los sujetos, además de la importancia que se da a la formación de este tipo de población.

La normatividad de las entidades mundiales y nacionales debe tener una estructura general y lineamientos para la construcción de un sistema educativo que responda a la diversidad. Por lo tanto, se expiden orientaciones y decretos que permitan llevar a cabo la inclusión. En la Tabla 1 se describen algunas de estas, tomando en cuenta la información en Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia (2019) y MEN (2017b).

Tabla 1. *Normatividad Nacional e Internacional sobre Inclusión*

Normatividad	Objeto
Declaración Universal de los Derechos Humanos (1948)	Ninguna persona será objeto de discriminación o segregación.
Declaración de Salamanca y Marco de Acción para las Necesidades Educativas Especiales (1994)	Educación para todos, considerando cambios de políticas que promuevan la educación para aquellos con NEE.
Normas Uniformes de la Naciones Unidas sobre Igualdad de Oportunidades para las Personas con Discapacidad (ONU, 1994)	Garantizar igualdad de derechos y responsabilidades para las personas con discapacidad.
Constitución Política de Colombia (1991)	Todos los colombianos nacen libres e iguales ante la ley, por ello, gozan de los mismos derechos, libertades y oportunidades, sin discriminación alguna. Por lo tanto, el Estado debe adelantar una política de integración social para personas con discapacidad física, sensorial o psíquica y contribuir a su educación.
Ley 115 de 1994	Ley General de Educación que considera esta como un proceso permanente de formación y que se fundamenta en concebir a la persona como un ser integral. Está dirigida, entre otros, a grupos de personas con discapacidades físicas, sensoriales y psíquicas; con capacidades excepcionales.
Decreto 369 de 1994	Primera modificación en la estructura y las funciones del INCI.
Decreto 730 de 1995	Se crea comité consultivo nacional de discapacidad.
Decreto 2082 de 1996	Parámetros y criterios para la educación de personas con NEE.

Ley 361 de 1997	Establece mecanismos de integración social para personas con limitaciones.
Decreto 1336 de 1997	Segunda modificación de la estructura y funciones del INCI.
Decreto 3020 del 2002	Reglamenta disposiciones para fijar la planta de personal de los establecimientos educativos que cuentan con inclusión.
Resolución 2565 de 2003	Determina criterios básicos para la atención de personas con discapacidad y NEE
Decreto 1006 de 2004	Tercera modificación a la estructura y funciones del INCI.
Ley 982 de 2005	Se establecen normas que están encaminadas a la equiparación de oportunidades para las personas sordas y sordo- ciegas y se dictan otras disposiciones.
Ley 1098 de 2006	Código de Infancia y Adolescencia se ocupa también, de la protección de los menores con discapacidad.
Plan Decenal Nacional 2006-2016	Define políticas y estrategias para educación de calidad incluyendo personas con discapacidad.
Decreto 366 de 2009	Se reglamenta el servicio de apoyo pedagógico para estudiantes con discapacidad o con capacidades excepcionales.
Decreto 4800 de 2011	Las Instituciones de educación superior deben incentivar a la población en condición de discapacidad a acceder a ella.
Ley estatutaria 1618 de 2013	Garantiza los derechos de las personas con discapacidad.
Ley 1752 de 2015	Sancionar penalmente a las personas que discriminen por motivos de discapacidad.
Ley 1753 de 2015	Los referentes pedagógicos deberán contener estándares de inclusión y accesibilidad.
Ley 1804 de 2016	Derechos de los niños y niñas con discapacidad.
Decreto 1421 de 2017	Se reglamenta el marco de la educación inclusiva.

2.1.2 Discapacidades

Según la Organización Mundial de la Salud ([OMS], 2001), la discapacidad es un término que incluye tres factores: el primero, las deficiencias entendidas como problemas que afectan a una estructura o función corporal; el segundo, las limitaciones de la actividad que son dificultades para efectuar acciones o tareas y; el tercero, las restricciones de la participación, que se consideran como inconvenientes para participar en situaciones vitales. Teniendo en cuenta lo anterior, la OMS clasifica las discapacidades de la siguiente manera:

- **Psíquicas:** La discapacidad psíquica se caracteriza por alteraciones relacionadas con la salud mental y trastornos generalizados del desarrollo.
- **Física o Motora:** La discapacidad física o motora es una alteración transitoria o permanente, en el aparato locomotor, derivado a deficiencias funcionales de los sistemas nervioso, muscular u óseo-articular.
- **Sensoriales:** La discapacidad sensorial y de la comunicación se caracteriza por alteraciones relacionadas con alguno de los cinco sentidos, con frecuencia refiriéndose a la discapacidad visual y auditiva: La auditiva se refiere a una alteración de la percepción de los sonidos de toda índole, generando problemas en actividades de la vida cotidiana como la comunicación o el

lenguaje. La visual, que es el foco de este trabajo, es una alteración que afecta la captación de imágenes de forma total o parcial, es decir,

> La captación de imágenes se realiza de un modo parecido a una transmisión de televisión se puede mencionar la analogía de la estación donde se transmite el programa (lugar luminoso) este serían los ojos. La pantalla sería el centro cortical, es decir, el centro receptor de la imagen. Si cualquiera de éstos fallara, nos quedaríamos sin apreciar el programa de televisión. Lo más frecuente es que en el ciego estos centros estén vírgenes de impresiones. Es como un rollo de película; pero como sucede también con la película, después de un tiempo determinado caduca y los centros también lo hacen, tornándose insensibles (Fuentes, s.f., p.41).

Ya que la información que se tiene del entorno es un 80% de tipo visual, las personas con este tipo de discapacidad no tienen acceso a esta; por esto, para superar estas dificultades se valen de los otros sentidos como la audición, el tacto, el olfato, el gusto e incluso la capacidad propioceptiva (regular el equilibrio, coordinar los movimientos y reconocer la posición de cada una de las partes del cuerpo) para comprender y adaptarse al entorno. Por tanto, la discapacidad visual se puede clasificar según el origen de su afectación en congénitas, por el inadecuado desarrollo de órganos visuales o adquiridas a causa de accidentes o lesiones progresivas y según el nivel de afectación en:

- *Ceguera Total:* Incapacidad para recibir todo tipo de estímulos luminosos. Se considera ceguera total cuando el campo visual es inferior a 20 grados (inclusive 0 grados). Las personas ciegas totalmente no poseen ninguna visión, no perciben ningún objeto y en algunas ocasiones, aunque perciben un poco de luz, no pueden realizar tareas visuales. Utilizan para la lectura y escritura el braille y para movilizarse requieren de bastón o de la compañía de una persona vidente.
- *Ceguera Parcial:* Minusvalía para realizar actividades que requieran visión de detalle. Las personas ciegas parcialmente tienen la posibilidad de percibir la luz, bultos, contornos, matices de colores, sombras, etc., por esto se les facilita un poco el desplazamiento, pero no es útil

para realizar labores escolares o profesionales sin ayuda de herramientas como el braille y otros apoyos ópticos.

- *Baja Visión:* Dificultades para realizar tareas visuales con exactitud, ya que presentan problemas en la percepción de detalles y el color de los objetos. Las personas con baja visión son capaces de distinguir objetos a distancias cortas siempre y cuando tengan el tamaño e iluminación adecuados. Para mejorar sus desempeños en diferentes actividades se valen de lupas, lentes, cuadernos y plumones especiales, entre otras herramientas según la tarea de desarrollar.

A continuación, se describen algunas características y NEE de los estudiantes con discapacidad visual.

2.1.3 Estudiantes con Discapacidad Visual

El estudiante con discapacidad visual está disminuido en sus posibilidades de movimiento y por esto es dependiente de los demás en determinadas ocasiones, por ejemplo, en situaciones relacionadas con actividades sociales. Aunque este tipo de estudiante logra integrarse al aula regular y realiza la mayoría de las actividades con el resto de sus compañeros, Andrade (2010) afirma que necesitará de un tipo especial de aprendizaje, en el que la imitación ya no forma parte significativa, lo que exige mayor esfuerzo y autonomía por parte de él; sin dejar atrás la dedicación de los educadores, quienes buscan potenciar las percepciones táctiles, auditivas y propioceptivas.

La percepción del entorno de personas con algún tipo de discapacidad visual se ve afectada por su limitación, tanto en relaciones interpersonales como consigo mismo y en el reconocimiento de los objetos y su localización; por ello, requieren de apoyos externos, según su necesidad, que pueden ser materiales específicos, estrategias metodológicas y la intervención de personas que el entorno educativo le ofrece.

2.1.3.1 Necesidades.

Teniendo en cuenta el grado de limitación visual, no se puede generalizar en cuanto a las necesidades educativas de esta población. No obstante, es posible dar algunas guías sobre la manera como estas se relacionan con el entorno y acceden a la información. Algunas de estas son descritas por Gragera (2016) a continuación:

- Tienen dificultades con su autonomía.

- Desconocimiento del entorno en el que se mueven.
- Dificultades de comprensión de términos que requieren una asociación visual.
- Dificultad en el acceso a la información.
- Presentan inconveniente en la movilidad debido a la carencia de orientación espacial y temporal.
- Pérdida de información auditiva en lugares donde predomine el ruido.

Para Andrade (2010) también se presentan las siguientes necesidades educativas:

- El ritmo de aprendizaje es más lento en comparación con estudiantes normovidentes.
- Requieren más tiempo de exploración con los objetos para así poder manipularlos.
- Suelen ser más dispersos debido a lo dilatado de la información que recibe.

2.1.3.2 Enseñanza.

De acuerdo con las Necesidades Educativas, anteriormente descritas, se evidencian algunas pautas generales para llevar a cabo el proceso educativo en población con discapacidad visual. Para Fuentes (s.f.) lo principal para tener en cuenta es:

- Su educación debe ser parte de una actividad planeada de manera sistemática mediante el descubrimiento progresivo.
- “Es por medio de la educación vivenciada que el niño genera conciencia, desde su más temprana edad, la posibilidad que se le ofrece de descubrir, a partir de la misma situación, diferentes expresiones abstractas” (p.38)

Por esto, Andrade (2010) propone algunas estrategias para incluir en la escuela a esta población:

- Conocer la situación visual del estudiante y sus implicaciones.
- Permitir y facilitar ayudas ópticas y no ópticas necesarias.
- Utilizar material claro, sin acumulación de información.
- Respetar el ritmo de aprendizaje.
- Valorar las experiencias del estudiante y fundamentar en ellas el lenguaje.
- Tener en cuenta la percepción háptica en factores como:
  - ✓ Usar representaciones bidimensionales simples.
  - ✓ Usar figuras estáticas.

- ✓ Tener en cuenta que las figuras no deben superponerse.
- ✓ Trabajar la exploración con varios objetos a la vez.

- Permitirle autonomía.
- Utilizar una estimulación multisensorial, prestando importancia al tacto y al oído.
- Utilizar un lenguaje concreto.
- Controlar el nivel de ruido en el salón de clases.

2.1.3.3 Tiflología.

Inicialmente, aparece en Italia durante los años cuarenta, encargándose de investigar acerca de las condiciones y problemas de personas con discapacidad visual, en relación con su integración en el mundo laboral. Luego, durante los años ochenta se amplía a la investigación de las condiciones y problemas de personas con discapacidad visual en ámbitos laborales, educativos, el ocio y la vida en el hogar.

La tiflología es la ciencia que estudia las particularidades que poseen las personas con discapacidad visual, con el fin de generar opciones que permitan su integración laboral, social y cultural. Por lo tanto, la tiflopedagogía enfatiza su estudio en la educación de esta población.

2.1.3.3.1 Tiflotecnología.

La tiflotecnología tiene el objetivo de proponer nuevas tecnologías o adaptar algunas existentes para la utilización y aprovechamiento por parte de las personas con discapacidad visual. (Aquino, García e Izquierdo, 2014). En la actualidad, las tecnologías usadas con mayor frecuencia por estas personas son:

- Sintetizadores de Voz
- Lectores de pantalla
- Lectores ópticos de caracteres
- Teclado Braille
- Magnificadores de texto e imagen
- Escáner Parlante
- Diferentes elementos parlantes (relojes, calculadores, teléfonos, etc.).

2.1.3.3.2 Lenguaje Braille.

El lenguaje Braille es un código para transcribir a relieve de puntos, cualquier tipo de texto como, por ejemplo, composiciones musicales, obras literarias y expresiones matemáticas. Fue creado por Louis Braille en 1827, pensado para dar accesibilidad a toda la población que posea limitación visual a la cultura y el estudio.

Las posibilidades del invento de Louis Braille "superan las necesidades que venía a solucionar y, sin pérdida de coherencia, permite responder a un sinnúmero de retos no vislumbrados en el momento de la creación" (Fernández, 2004). La potencialidad de este código es aún más evidente en las notaciones matemáticas, partiendo desde los signos aritméticos simples, y a través del tiempo dando lugar a expresiones algebraicas, geométricas y analíticas más complejas.

2.1.3.3.2.1 Estructura.

Se ajusta fisiológicamente a las características del sentido del tacto. También "se adapta perfectamente a las terminaciones nerviosas de las yemas de los dedos, y así los signos son transmitidos al cerebro, como una totalidad" (Sánchez, 2013).

A la unidad básica se le llama cajetín o celdilla, esta es un espacio rectangular en el que se sitúan seis puntos en relieve distribuidos en dos columnas, cada una de ellas con tres puntos, mediante las cuales es posible representar una letra o símbolo en cada cajetín. En este se identifican los puntos con una numeración del uno al seis como se muestra en la Imagen 1. Cajetín.

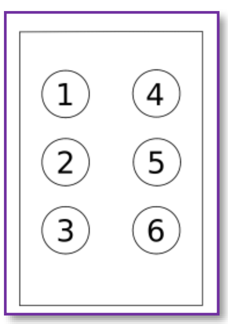


Imagen 1. *Cajetín*
Nota Tomado de *Nela. Un entrenador de Braille para niños* (Sánchez, 2013, p. 41)

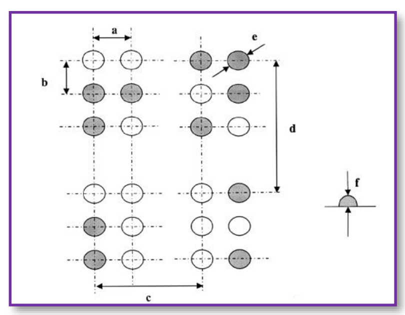


Imagen 2. *Parámetros del Braille*
Nota Tomado de *Nela. Un entrenador de Braille para niños* (Sánchez, 2013, p. 42)

Para que la información quepa en la yema de los dedos, existen unas medidas determinadas para las distancias entre los puntos que forman un carácter, la que hay entre cajetines y la que debe haber entre renglones.

Las medidas del cajetín son las que se mencionan a continuación, estas se encuentran representadas en la Imagen 2:

a) Distancia horizontal entre los puntos cercanos del mismo cajetín 2.5 mm.

b) Distancia vertical entre los puntos cercanos del mismo cajetín: 2.5 mm.

c) Distancia horizontal entre los puntos idénticos de cajetines contiguos: 6.0 mm.

d) Distancia vertical entre los renglones: 10.0 mm

e) Diámetro de la base de los puntos: 1.3 - 1.6 mm.

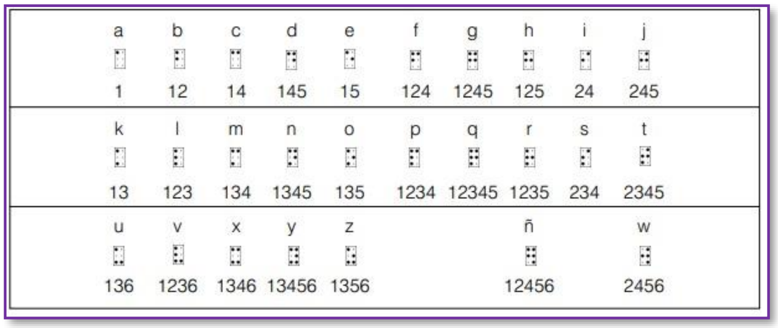
f) Altura del relieve de los puntos: 0.5 mm.

Existen 64 combinaciones diferentes de puntos en un mismo cajetín (incluyendo el cajetín en blanco que sirve para separar palabras). Para Sánchez (2013) como el número de posibilidades es limitado, un mismo signo Braille puede tener múltiples significados, según el contexto donde se utilice o si se le antepone otro signo. Con estas combinaciones se pueden representar las diferentes letras, números, signos de puntuación y demás símbolos que se deseen transcribir.

La lectura Braille se realiza al tacto moviendo la mano de izquierda a derecha, deslizando la yema de los dedos por cada renglón y cada una de las letras, el aprendizaje de esta es lento en comparación con la lectura visual; ya que los dedos no globalizan toda una palabra completa. Por otra parte, se inicia escribiendo de derecha a izquierda utilizando un cajetín para cada letra o signo, realizando el número específico de puntos y posición correspondiente. Para leer con este sistema es necesario voltear la hoja, de tal manera que el relieve de la escritura se perciba al tacto (García, 2012).

Algunas de las configuraciones del sistema Braille son:

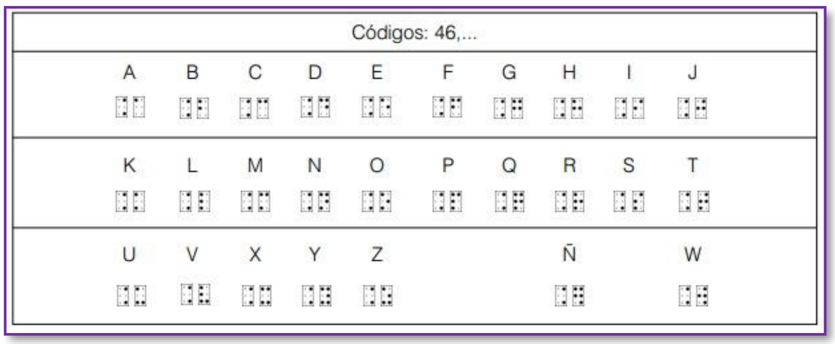
- **Alfabeto:** A través del tiempo el alfabeto ha sufrido una serie de transformaciones, buscando una combinación simple y universal. A continuación, se muestran las convenciones actuales en la Imagen 3.



a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	12	14	145	15	124	1245	125	24	245
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
13	123	134	1345	135	1234	12345	1235	234	2345
u	v	x	y	z		ñ			w
136	1236	1346	13456	1356		12456			2456

Imagen 3. *Alfabeto Braille español*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas (Fernández, 2004, p.62)

Las letras mayúsculas se escriben igual que las minúsculas, pero se les antepone el signo de mayúscula que se compone por los puntos cuatro y seis, como se muestra en la Imagen 4.

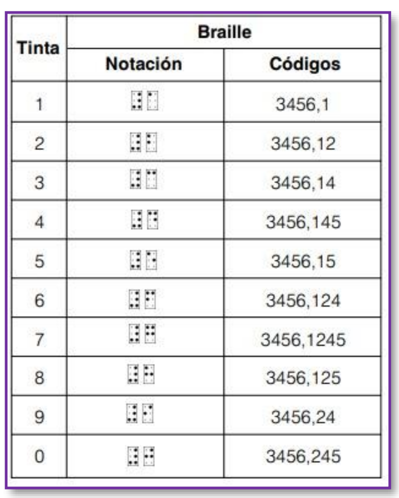


Códigos: 46,...

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
U	V	X	Y	Z			Ñ		W

Imagen 4. *Signo de mayúscula*
Nota Tomado de *Braille y Matemáticas* (Fernández, 2004, p.62)

- **Números:** Para escribir los números se le antepone el símbolo de número, que se compone por los puntos tres, cuatro, cinco y seis como se muestra en la Imagen 5.



Tinta	Braille Notación	Braille Códigos
1		3456,1
2		3456,12
3		3456,14
4		3456,145
5		3456,15
6		3456,124
7		3456,1245
8		3456,125
9		3456,24
0		3456,245

Imagen 5. *Números*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas (Fernández, 2004, p.21)

Para realizar el cambio de letras a números es necesario tener en consideración como se muestra en la Imagen 6:

- Las diez primeras letras del alfabeto para representar los números del cero al nueve.
- El punto de separación en grupos de tres cifras (punto tres).
- La coma decimal (punto dos).
- Algunos convenios locales para otros signos (negativo, puntos tres y seis).

Tinta	Braille	
	Notación	Códigos
11	⠼⠁⠁	3456,1,1
12	⠼⠁⠃	3456,1,12
51	⠼⠑⠁	3456,15,1
2002	⠼⠃⠚⠚⠃	3456,12,245, 245,12
2.345	⠼⠃⠄⠉⠚⠑	3456,12,3, 14,245,15
1.600.000	⠼⠁⠄⠋⠚⠚⠄⠚⠚⠚	...,3,...,3,...
1,25	⠼⠁⠂⠃⠑	...,2,...
1,$\overset{\frown}{25}$	⠼⠁⠂⠂⠃⠑	...,2,2,...

Imagen 6. *Números enteros y decimales*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas (Fernández, 2004, p.22)

- **Símbolos matemáticos:** Entre estos es posible encontrar convenciones para los aritméticos, como se observa en la Imagen 7, normalmente para la multiplicación y división se hace uso de la primera convención que aparece en cada una de ellas, puesto que es más común en textos escolares.

Operación	Notación Tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Suma	+	⠖	235
Resta	−	⠤	36
Alternativa de suma algebraica	±	⠖⠒⠤	235,25,36
Multiplicación	× · 	⠦ ⠦ ⠄	236 236 3
División	÷ : /	⠲ ⠲ ⠠⠂	256 256 6,2

Imagen 7. *Símbolos aritméticos*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas (Fernández, 2004, p.28)

Adicionalmente se pueden encontrar los símbolos de relación que se encuentran en los diferentes conjuntos numéricos, como se observa en la Imagen 8.

Relación	Notación Tinta	Braille	
		Notación	Códigos
igualdad	=	⠶	2356
desigualdad	≠	⠘⠶	45,2356
equivalencia	≡	⠶⠶	2356,2356
menor que	<	⠪	246
menor o igual que	≤	⠪⠶	246,2356
no menor que	≮	⠘⠪	45,246
no menor ni igual que	≰	⠘⠪⠶	45,246,2356
mayor que	>	⠕	135
mayor o igual que	≥	⠕⠶	135,2356
no mayor que	≯	⠘⠕	45,135
no mayor ni igual que	≱	⠘⠕⠶	45,135,2356
mucho menor que	<<	⠪⠪	246,246
mucho mayor que	>>	⠕⠕	135,135
aproximadamente igual a	≅	⠈⠶	4,2356

Imagen 8. *Símbolos de relación*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas (Fernández, 2004, p.29)

En geometría, existen tres notaciones para referirse a un ángulo, en cualquiera de los tres casos en Braille siempre se debe anteponer el símbolo de ángulo, que se compone por la combinación de puntos cuatro, cinco y dos, cinco, como se observa en la Imagen 9.

Tinta		$\widehat{\alpha}$	$\widehat{BAC}$	$\widehat{A}$
Braille	Notación	⠘⠒⠈⠁	⠘⠒⠢⠨⠃⠨⠁⠨⠉⠔	⠘⠒⠨⠁
	Códigos	45,25,..	45,25,26,..,35	45,25,46,1

Imagen 9. *Notaciones para representación de ángulos*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas (Fernández, 2004, p.110)

Existen también algunas notaciones para denotar ángulos considerados especiales como se observa en la Imagen 10.

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Ángulo recto	⦜	⠸⠤	456,36
Ángulo orientado positivamente	∡	⠨⠱	46,156
Ángulo orientado negativamente	∡	⠨⠜	46,345

Imagen 10. *Notaciones para representación de ángulos*
Nota Tomado de *Braille y Matemáticas* (Fernández, 2004, p.112)

Cada figura geométrica tiene una convención en específico que permite identificarla, seguido del número de vértices que deben ser representados con letras mayúsculas y mostrando la orientación del polígono, como se logra observar en la Imagen 11.

Figura o concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Triángulo general	△ ABC	⠠⠾⠨⠁⠨⠃⠨⠉	6,23456,...
Triángulo rectángulo	⊿ EFG	⠸⠦⠨⠑⠨⠋⠨⠛	456,236,...
Cuadrado	□ ABCD	⠸⠽⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠨⠙	456,13456,...
Rectángulo	▯ EFGH	⠯⠽⠨⠑⠨⠋⠨⠛⠨⠓	12346,13456
Polígono (general)	ABCDE ⬠	⠯⠕⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠨⠙⠨⠑	12346,135
Círculo de centro *c* y radio *r*	OC_r ○	⠪⠕⠨⠉⠌⠗	246, 135,...

Imagen 11. *Figuras geométricas*
Nota Tomado de Braille y Matemáticas de (Fernández, 2004, p.120)

En el caso de las rectas, semirrectas y segmentos, siempre se antepone un símbolo para diferenciarlos y se continúa con las letras que los representa, como se muestra en la Imagen 12 e Imagen 13.

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Recta	$\overleftrightarrow{r}$		5,25,2,.
	$\overleftrightarrow{AB}$		5,25,2,26,.,35
Semirrecta de origen A (comprende el punto B)	$\overrightarrow{AB}$		25,2,26,.,35
Relación de paralelismo (estricto)	$\|\|$		456,123
Paralelismo/coincidencia	#		456,123,2356
Perpendicularidades (u ortogonalidad)	$\perp$		3456,3

Imagen 12. *Rectas y semirrectas*
Nota Tomado de *Braille y Matemáticas* de (Fernández, 2004, p.118)

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Segmento rectilíneo	$\overline{\alpha}$		4,14,.
	$\overline{AB}$		4,14,26,.,35

Imagen 13. *Segmentos*
Nota Tomado de *Braille y Matemáticas* de (Fernández, 2004, p.113)

2.1.3.3.3 Material para la escritura manual.

Los estudiantes con discapacidad visual realizan la escritura manual utilizando un punzón, con el que se perfora las hojas de papel Ledger que se encuentran sobre un soporte llamado pauta o con ayuda de una regleta. A continuación, se describirán cada uno de estos instrumentos:

- *Regleta:* Son instrumentos utilizados en la escritura Braille. Estas pueden ser metálicas o plásticas y son fabricadas en gran variedad de colores y tamaños, constan de distintos números de cajetines; según el nivel escolar del estudiante.
- *Pauta:* Es un instrumento que consta de una plancha metálica o plástica de diversos tamaños (cuartilla o folio). Es básicamente como un tablero y sobre él se puede deslizar una rejilla que contiene los cajetines.
- *Punzón:* Es un instrumento similar a una lezna (punzón), que se adapta a la forma o tamaño de la mano. Se compone de un mango que puede ser de madera, metal o plástico, y de forma semicircular, ovalada o redonda; también de una punta metálica redondeada que se acopla

perfectamente en el orificio de la regleta. Para escribir con él se apoya en la primera falange del dedo índice y se sujeta entre los dedos pulgares y corazón.

- *Hojas de papel Ledger:* Están fabricadas en un material más grueso y durable que las hojas de papel normal, permiten que la escritura permanezca uniforme.
- *Máquina de Perkins:* Es una maquina mecánica que permite realizar la escritura y lectura con mayor rapidez ya que se escribe tal como se lee (no al revés como en la regleta). Se compone de las siguientes partes: seis teclas, una por cada uno de los puntos Braille, una tecla espaciadora, una de retroceso, otra para el cambio en línea y una palanca para situarse al inicio del renglón.

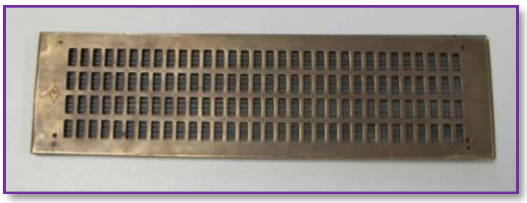


Imagen 14. *Regleta metálica*
Nota Tomado de *Dossier De Piezas De La Exposición Itinerante* (2015, p.18)

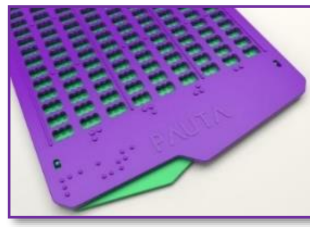


Imagen 15. *Pauta plástica*
Nota Tomado de *Herramienta de escritura Braille,* por Artucio y Corbo, 2016, Rizoma.uy. Plataforma de DISEÑO ABIERTO (*https://rizoma.uy/herramienta-de-escritura-braille/*).

Imagen 16. *Punzón*
Nota Tomado de *Herramienta de escritura Braille,* por Artucio y Corbo, 2016, Rizoma.uy. Plataforma de DISEÑO ABIERTO (*https://rizoma.uy/herramienta-de-escritura-braille/*).

Imagen 17. *Máquina de Perkins*
Nota Tomado de *Nela. Un entrenador de Braille para niños* (Sánchez, 2013, p. 52)

2.2 Marco Matemático

A continuación, se presentan algunas definiciones (D) y hechos geométricos (HG) que se tendrán en cuenta para el diseño de la secuencia de tareas y el material didáctico; estas son tomadas de autores como Samper y Molina (2013); Clemens, O´Daffer y Cooney (1998); Samper, Molina y

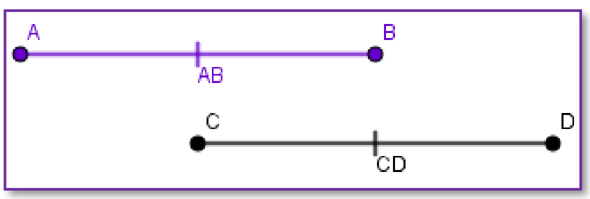
Echeverry (2013); Moise y Downs (1986) y Baldor (1967); además, se tienen en cuenta algunas notas tomadas en el desarrollo de los espacios académicos de la línea de geometría (Geometría Plana (2016-II) y Geometría del Espacio (2017-I)) cursados en la Licenciatura en Matemáticas por las autoras.

2.2.1 Congruencia

Moise y Downs (1986) afirman que, en el lenguaje corriente, dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Otra manera de describir esta relación intuitivamente sería, dos figuras son congruentes, si una de ellas se puede "mover": rotándola sobre un punto, reflejándola sobre un eje y trasladándola, de tal manera que coincida con la otra exactamente (Cárdenas, 2013). Para escribir que dos figuras son congruentes se usará el símbolo (≅).

A continuación, presentamos algunas definiciones y hechos geométricos, con el propósito de tratar el concepto de congruencia matemáticamente.

D. Segmentos Congruentes: Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con AB y CD sus respectivas longitudes entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si y sólo si $AB = CD$.



[1]

Imagen 18. *Segmentos Congruentes*

D. Ángulos Congruentes: Sean $\angle A$ y $\angle B$ con $m\angle A$ y $m\angle B$ sus respectivas medidas entonces $\angle A \cong \angle B$ sí y sólo si $m\angle A = m\angle B$.

[1] De las imágenes
Imagen **18** a la 125 son creación propia de las autoras del trabajo de grado en el software de geometría dinámica Geogebra.

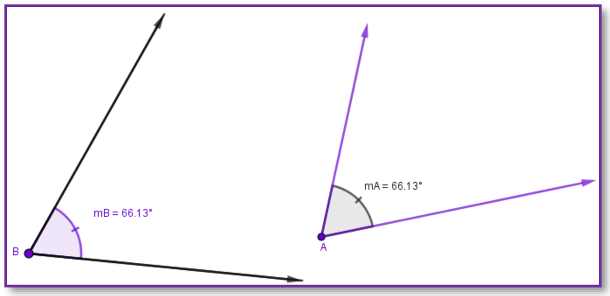


Imagen 19. *Ángulos Congruentes*

D. Polígonos Congruentes: Dos polígonos de n lados son congruentes si y sólo si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son congruentes.

Para indicar la congruencia entre polígonos se nombran los vértices en el orden que indica la correspondencia. Por ejemplo,

$Cuadrilátero\ ABCD \cong Cuadrilátero\ EFGH$ si y sólo si $A \to E$, $B \to F$, $C \to G$, $D \to H$; $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, $\overline{CD} \cong \overline{GH}$, $\overline{DA} \cong \overline{HE}$, y $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$, $\angle D \cong \angle H$.

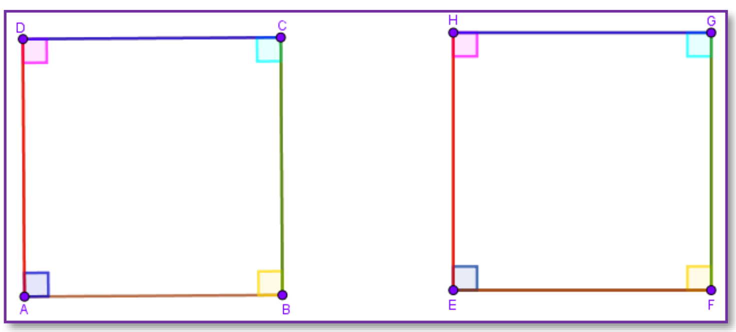


Imagen 20. *Cuadriláteros Congruentes*

Propiedades de la igualdad en la congruencia

Reflexiva: Dado Objeto A entonces Objeto $A \cong$ Objeto A Todo objeto es congruente consigo mismo.

Simétrica: Dados Objeto A y Objeto B si Objeto $A \cong$ Objeto B entonces Objeto $B \cong$ Objeto A.

Transitiva: Dados Objeto A, Objeto B y Objeto C si Objeto $A \cong$ Objeto B y Objeto $B \cong$ Objeto C entonces Objeto $A \cong$ Objeto C.

Por lo tanto, se concluye que la relación de congruencia es una relación de equivalencia.

2.2.2 Cuadriláteros

D. Cuadrilátero: La unión de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ es el Cuadrilátero $ABCD$ ($\boxdot\ ABCD$) si y sólo si A, B, C, y D coplanares, cada tres de ellos no colineales y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se intersecan solamente en sus extremos.

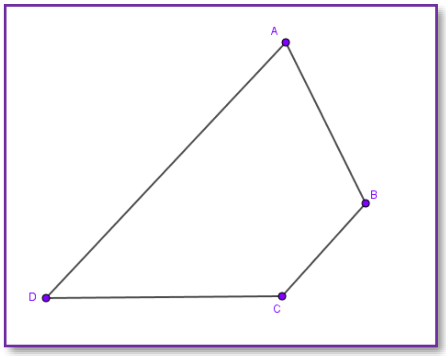
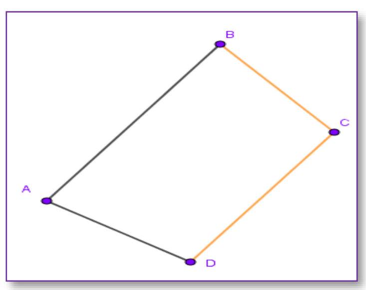


Imagen 21. *Cuadrilátero*

Los $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se denominan lados y A, B, C, y D vértices del cuadrilátero. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$ se llaman ángulos del cuadrilátero, y pueden indicarse brevemente por $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$.

Tabla 2. *Definiciones asociadas a los Cuadriláteros.*

Definiciones relacionadas con cuadriláteros
D. Lados adyacentes o consecutivos
Dos lados de un cuadrilátero son adyacentes si y solo si tienen un vértice en común. Son un par de lados adyacentes $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$, $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{DA}}$ y $\overline{\boldsymbol{DA}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$.  ***Imagen 22.*** *D. Lados adyacentes*
D. Lados opuestos
Dos lados de un cuadrilátero son opuestos si y solo si no tienen un vértice en común. Son un par de lados opuestos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{DC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{DA}}$.

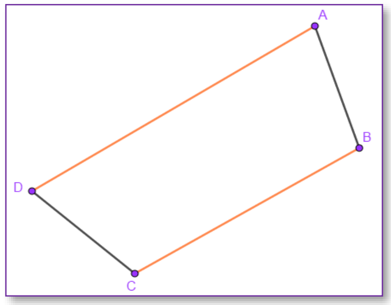


Imagen 23. *D. Lados Opuestos*

D. Ángulos adyacentes o consecutivos

Dos ángulos de un cuadrilátero son consecutivos o adyacentes si y solo su intersección es un lado del cuadrilátero. Son ángulos adyacentes $\angle \boldsymbol{A}$ y $\angle \boldsymbol{B}$ (intersección $\overline{\mathbf{AB}}$), $\angle \boldsymbol{B}$ y $\angle \boldsymbol{C}$ (intersección $\overline{\boldsymbol{BC}}$), $\angle \boldsymbol{C}$ y $\angle \boldsymbol{D}$ (intersección $\overline{\boldsymbol{CD}}$) y $\angle \boldsymbol{D}$ y $\angle \boldsymbol{A}$ (intersección $\overline{\mathbf{DA}}$).

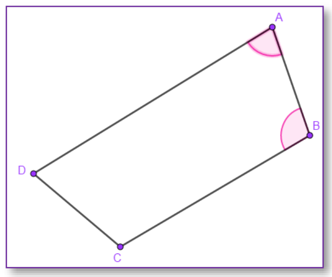


Imagen 24. *D. Ángulos Adyacentes*

D. Ángulos Opuestos

Dos ángulos de un cuadrilátero son opuestos si y solo si su intersección son dos vértices del cuadrilátero. Son ángulos opuestos $\angle \boldsymbol{A}$ y $\angle \boldsymbol{C}$ (intersección $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{D}$) y $\angle \boldsymbol{B}$ y $\angle \boldsymbol{D}$ (intersección $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$).

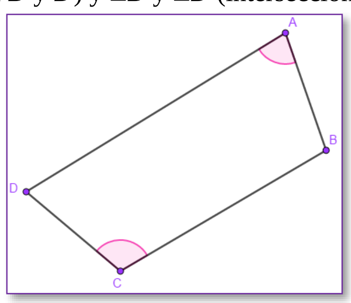


Imagen 25. *D. Ángulos Opuestos*

D. Diagonal

Un segmento es diagonal de un cuadrilátero y en general de un polígono, si y solo si sus extremos son dos vértices no consecutivos del cuadrilátero. $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$ son diagonales del cuadrilátero.

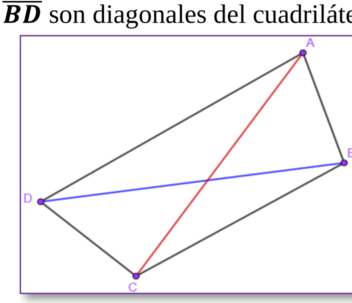


Imagen 26. *D. Diagonal*

D. Cuadrilátero Convexo

Un cuadrilátero es convexo si y solo si ningún segmento, cuyos extremos son dos vértices del cuadrilátero, tiene puntos en el exterior de este.

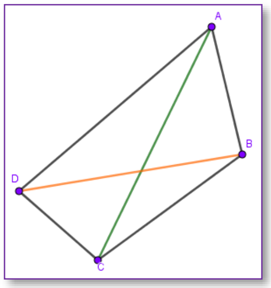


Imagen 27. *D. Cuadrilátero Convexo*

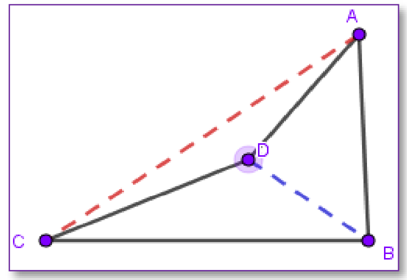


Imagen 28. *D. Cuadrilátero No Convexo*

HG. Suma medida ángulos cuadrilátero: Dado $\boxdot\, ABCD$ convexo entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$.

Paralelogramo

D. Paralelogramo: $\boxdot\, ABCD$ paralelogramo si y solo si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

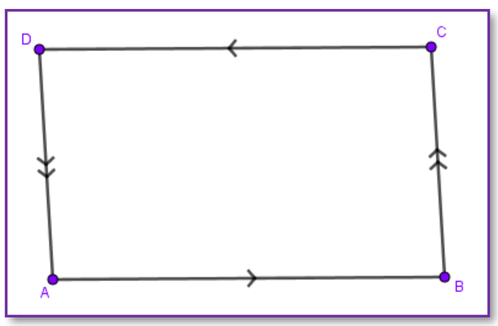


Imagen 29. *Paralelogramo*

HG. Paralelogramo 1: Si $\boxdot\, ABCD$ paralelogramo entonces:

i. $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$ (ángulos opuestos congruentes).
ii. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (lados opuestos congruentes).
iii. $\angle A$ y $\angle B$ suplementarios, $\angle A$ y $\angle D$ suplementarios, $\angle B$ y $\angle C$ suplementarios y $\angle C$ y $\angle D$ suplementarios (ángulos consecutivos o adyacentes suplementarios).
iv. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan (las diagonales se bisecan).

HG. Paralelogramo 2: Dado $\boxdot\, ABCD$ si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces $\boxdot\, ABCD$ paralelogramo.

Rectángulo

D. Rectángulo: $\boxdot$ $ABCD$ rectángulo si y solo si $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ rectos.

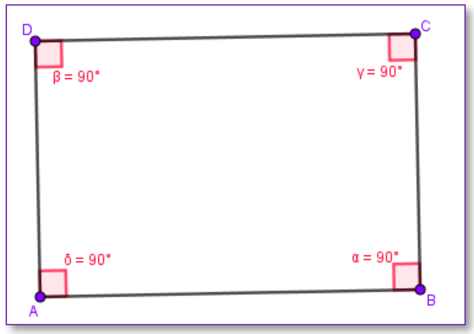


Imagen 30. *Rectángulo*

HG. Rectángulo 1: Si $\boxdot$ $ABCD$ rectángulo entonces $\boxdot$ $ABCD$ paralelogramo.

HG. Rectángulo 2: Dado $\boxdot$ $ABCD$ paralelogramo con $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ sí y solo si $\boxdot$ $ABCD$ rectángulo.

HG. Rectángulo 3: Dado $\boxdot$ $ABCD$ si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\angle A$ y $\angle B$ rectos entonces $\boxdot$ $ABCD$ rectángulo.

HG. Rectángulo 4: Dado $\boxdot$ $ABCD$ si $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ rectos entonces $\angle D$ recto.

HG. Rectángulo 5: Dado $\boxdot$ $ABCD$ si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\angle A$ recto entonces $\boxdot$ $ABCD$ rectángulo.

Rombo

D. Rombo: $\boxdot$ $ABCD$ rombo si y solo si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$.

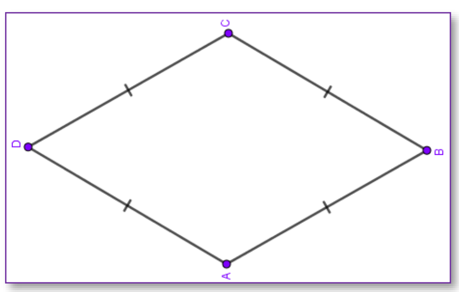


Imagen 31. *Rombo*

HG. Rombo 1: Si $\boxdot$ $ABCD$ rombo entonces $\boxdot$ $ABCD$ paralelogramo.

HG. Rombo 2: Dado $\boxdot\ ABCD$ paralelogramo si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ y $\overline{AC}$ biseca a $\overline{BD}$ entonces $\boxdot\ ABCD$ rombo.

Cuadrado

D. Cuadrado: $\boxdot\ ABCD$ cuadrado si y solo si $\angle A, \angle B, \angle C$ y $\angle D$ rectos y $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$.

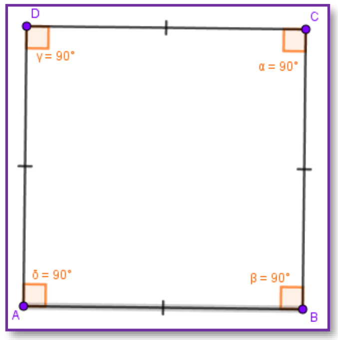


Imagen 32. *Cuadrado*

HG. Cuadrado 1: Si $\boxdot\ ABCD$ cuadrado entonces $\boxdot\ ABCD$ paralelogramo.

HG. Cuadrado 2: Si $\boxdot\ ABCD$ cuadrado entonces $\boxdot\ ABCD$ rombo.

HG. Cuadrado 3: Si $\boxdot\ ABCD$ cuadrado entonces $\boxdot\ ABCD$ rectángulo.

Trapecio

D. Trapecio: $\boxdot\ ABCD$ trapecio si y solo si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$.

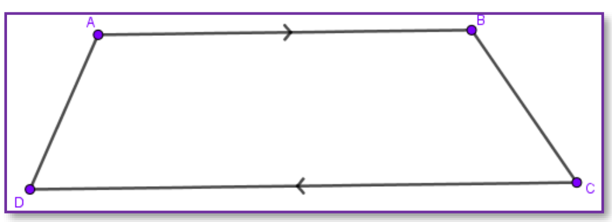


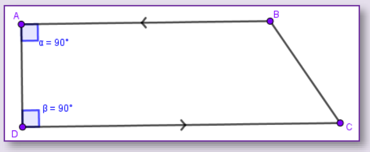
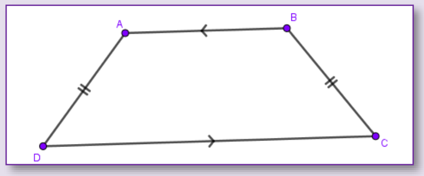
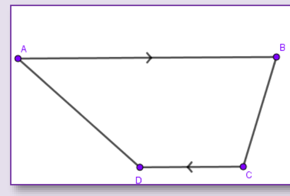
Imagen 33. *Trapecio*

D. Base Trapecio: Dado $\boxdot\ ABCD$ trapecio, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son bases del trapecio si y solo si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

HG. Trapecio 1: Dado $\boxdot\ ABCD$ trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, E es el punto medio de $\overline{AD}$ y F es el punto medio de $\overline{BC}$ entonces $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$ y $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Baldor (1967) clasifica los trapecios en tres tipos:

Tabla 3. *Clasificación Trapecios*

D. Trapecio Rectángulo	**D. Trapecio Isósceles**	**D. Trapecio Escaleno**
⊡ $\boldsymbol{ABCD}$ trapecio rectángulo con $\overline{\boldsymbol{AB}} \parallel \overline{\boldsymbol{CD}}$ sí y solo si $\angle \boldsymbol{A}$ y $\angle \boldsymbol{D}$ son rectos.  ***Imagen 34.*** *Trapecio Rectángulo*	⊡ $ABCD$ trapecio isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ sí y solo si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.  ***Imagen 35.****Trapecio Isósceles*	⊡ $ABCD$ trapecio escaleno con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ sí y solo si $\overline{AD} \ncong \overline{BC} \ncong \overline{AB} \ncong \overline{CD}$  ***Imagen 36.****Trapecio Escaleno*

HG. Trapecio 2: Dado ⊡ $ABCD$ trapecio isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (diagonales congruentes) y $\angle D \cong \angle C$ (ángulos de las bases congruentes).

Cometa

D. Cometa: ⊡ $ABCD$ cometa si y solo si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ (adyacentes congruentes) y $\overline{AB} \ncong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \ncong \overline{CB}$ (opuestos no congruentes).

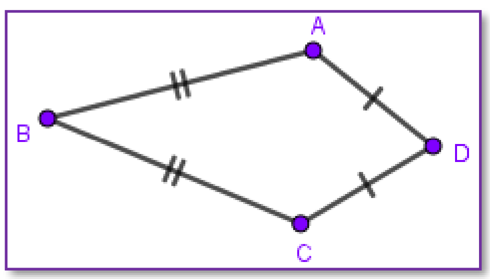


Imagen 37. *Cometa*

HG. Cometa 1: Sí ⊡ $ABCD$ cometa con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{DC}$, entonces B, D pertenecen a la mediatriz de $\overline{AC}$.

HG. Cometa 2: Sí ⊡ $ABCD$ cometa con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ entonces $\angle A \cong \angle C$.

2.2.3 Criterios de congruencia entre cuadriláteros

Estos criterios permiten verificar la congruencia de los ocho pares de elementos (cuatro pares de lados y ángulos), teniendo en cuenta ciertas condiciones, que permiten reducir la cantidad de congruencias que se deben comprobar. A continuación, se presentan algunos criterios de congruencia entre cuadriláteros.

Criterio LALAL: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ si $\overline{AD} \cong \overline{EH}, \angle A \cong \angle E, \overline{AB} \cong \overline{EF}, \angle B \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

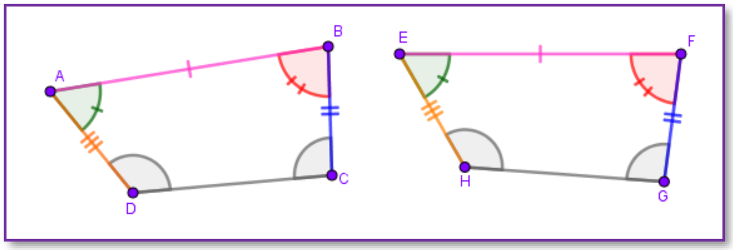


Imagen 38. *Criterio LALAL*

Criterio ALALA: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ si $\angle D \cong \angle H, \overline{AD} \cong \overline{EH}, \angle A \cong \angle E, \overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\angle B \cong \angle F$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

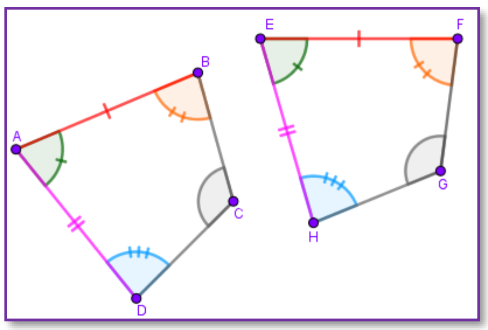


Imagen 39. *Criterio ALALA*

Criterio Lados – Ángulo (LALLL): Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ si $\overline{AB} \cong \overline{EF}, \angle B \cong \angle F, \overline{BC} \cong \overline{FG}, \overline{CD} \cong \overline{GH}$ y $\overline{DA} \cong \overline{HE}$ y entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

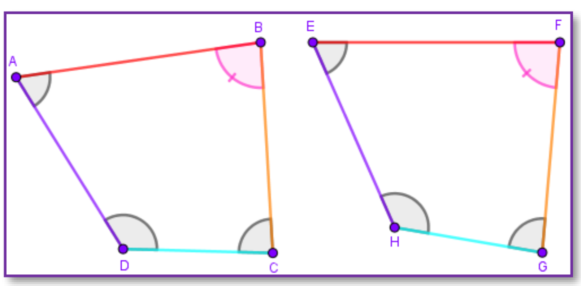


Imagen 40. *Criterio Lados – Ángulo*

Criterio Cuadrados: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ cuadrados si $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

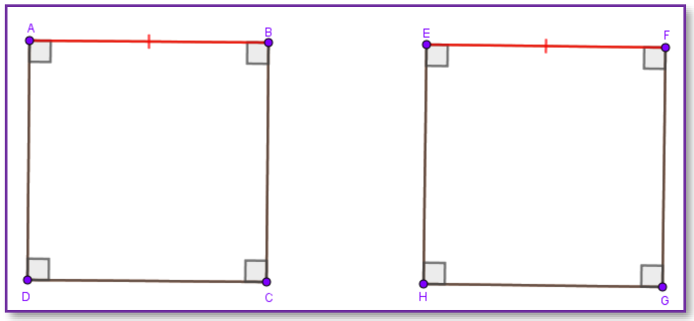


Imagen 41. *Criterio Cuadrado*

Criterio Rectángulos: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ rectángulos si $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

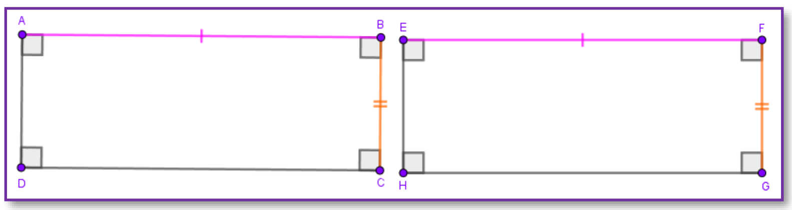


Imagen 42. *Criterio Rectángulo*

Criterio Rectángulo Diagonal: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ rectángulos si $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

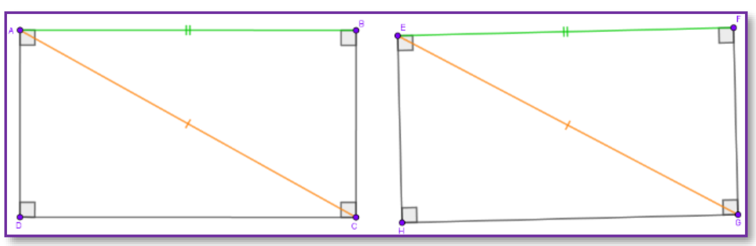


Imagen 43. *Criterio Rectángulo Diagonal*

Criterio Paralelogramo LAL: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ paralelogramos si $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

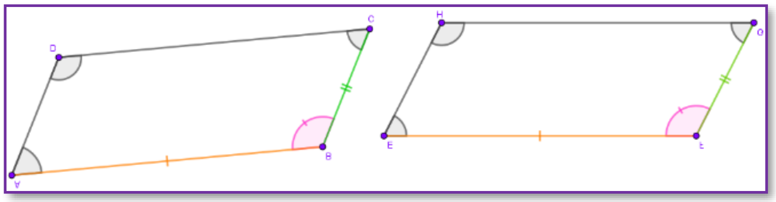


Imagen 44. *Criterio Paralelogramo LAL*

Criterio Paralelogramo Diagonales: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ paralelogramos, si $\overline{AB} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{EG}$ y $\overline{BD} \cong \overline{FH}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

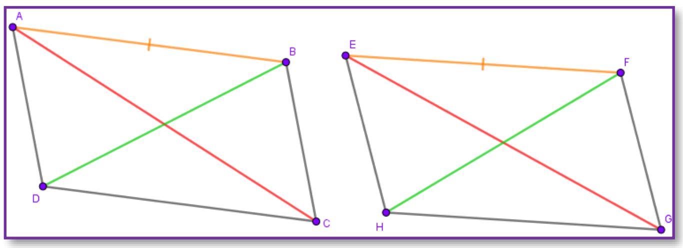


Imagen 45. *Criterio Paralelogramo Diagonales*

Criterio Rombo Lado – Ángulo: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ rombos, si $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, y $\angle B \cong \angle F$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

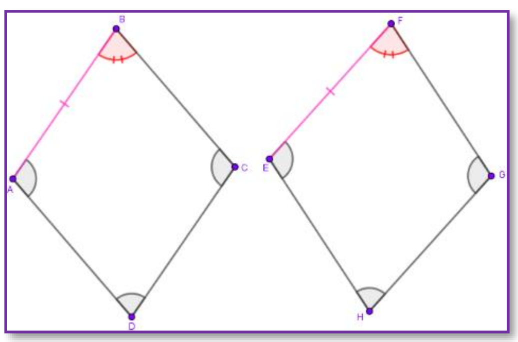


Imagen 46. *Criterio Rombo Lado - Ángulo*

Criterio Rombo Diagonales: Dados $\boxdot\ ABCD$ y $\boxdot\ EFGH$ rombos, si $\angle A \cong \angle E$ $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, y $\overline{BD} \cong \overline{FH}$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

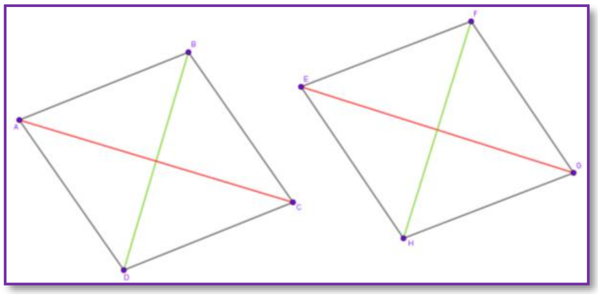


Imagen 47.*Criterio Rombo Diagonales*

Criterio Cometa ALAL: Dados $\boxdot\, ABCD$ cometa con $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ y $\boxdot\, EFGH$ cometa con $\overline{FE} \cong \overline{EH}$ y $\overline{FG} \cong \overline{GH}$, si $\angle A \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ entonces $\boxdot\, ABCD \cong \boxdot\, EFGH$.

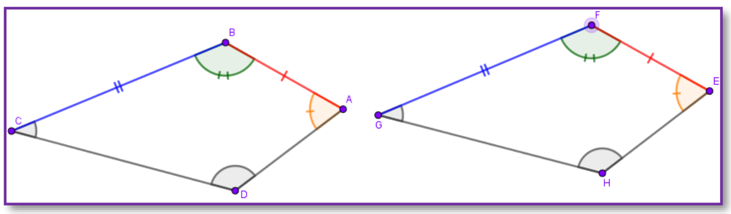


Imagen 48. Criterio Cometa ALAL

Criterio Trapecio LLAL: Dados $\boxdot\, ABCD$ trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\boxdot\, EFGH$ trapecio con $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$, si $\overline{DA} \cong \overline{HE}$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ entonces $\boxdot\, ABCD \cong \boxdot\, EFGH$.

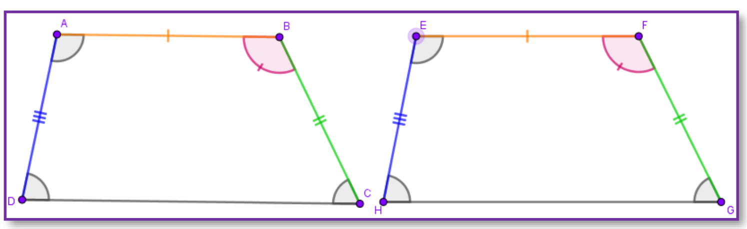


Imagen 49. *Criterio Trapecio LLAL*

Criterio Trapecio Rectángulo: Dados $\boxdot\, ABCD$ trapecio rectángulo con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\angle A$ y $\angle D$ rectos y $\boxdot\, EFGH$ trapecio rectángulo con $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$, $\angle E$ y $\angle H$ rectos; si $\overline{DA} \cong \overline{HE}$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\angle B \cong \angle F$ entonces $\boxdot\, ABCD \cong \boxdot\, EFGH$.

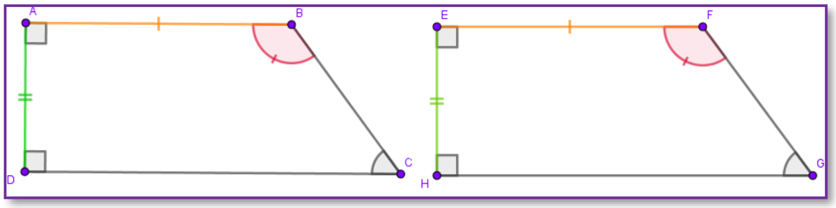


Imagen 50. *Criterio Trapecio Rectángulo*

Criterio Trapecio Isósceles: Dados $\boxdot\ ABCD$ trapecio isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ y $\boxdot\ EFGH$ trapecio isósceles con $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$, $\overline{EH} \cong \overline{FG}$; si $\overline{DA} \cong \overline{HE}$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\angle B \cong \angle F$ entonces $\boxdot\ ABCD \cong \boxdot\ EFGH$.

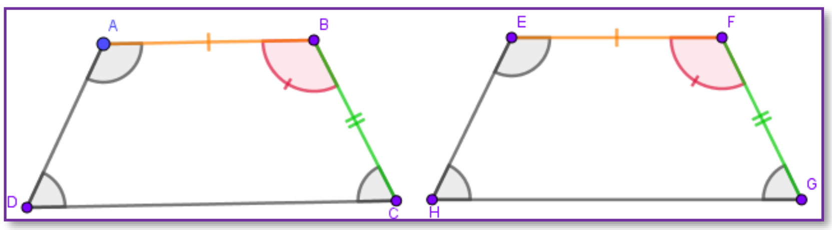


Imagen 51. *Criterio Trapecio Isósceles*

2.3 Marco Didáctico

En cuanto a lo didáctico, se realizó una contextualización del proceso de conjeturación y las acciones que promueven este proceso, ya que el presente trabajo de grado se centra en una secuencia de tareas que busca desarrollar la conjeturación; como lo proponen autores como Samper, Camargo, Molina, Polya, entre otros. Además, se llevó a cabo una revisión documental acerca de algunas generalidades del material didáctico en matemáticas y geometría para población con discapacidad visual, teniendo en cuenta exponentes como Morales, Guzmán, Fuentes, Lara y Fátima.

2.3.1 Conjeturación

Algunos de los procesos que se llevan a cabo en la enseñanza y aprendizaje de la geometría son la visualización, la representación de objetos, la conjeturación de propiedades, la justificación de afirmaciones y la resolución de problemas (Camargo y Samper, 2014). A continuación, se describe el proceso de conjeturación asociado a la actividad geométrica.

> La conjeturación tiene por meta, la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de

> verdad no lo tiene definido el estudiante, pero tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual considera que dichos enunciados son candidatos a entrar en un proceso de justificación. Son acciones propias de este proceso: detectar un invariante, formular la conjetura y corroborarla. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional, un hecho matemático (aquí, geométrico) que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares. Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura, y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles (Samper y Molina, 2013, p.17).

En otras palabras, la conjeturación es el proceso que se encarga de construir enunciados basados en la percepción de algunos invariantes y generalidades a partir de la exploración, que permiten al estudiante iniciar un proceso de verificación de las conjeturas propuestas.

En los Estándares curriculares del National Council of Teachers of Mathematics ([NCTM], 2003) se propone que la enseñanza de la geometría debe desarrollar procesos de razonamiento en los estudiantes, por medio de situaciones en las que la explicación, la justificación y la conjetura son acciones que permiten su desarrollo. Por otra parte, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se afirma que razonar tiene que ver con formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos. Es por lo que la conjeturación juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, empezando en los primeros grados, apoyándose en materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; y de esta forma hacer conjeturas; justificarlas o refutarlas y avanzar hacia el camino de la demostración (MEN, 2006a).

Para Polya (1966) las personas con discapacidad visual logran realizar el proceso de conjeturación de la misma forma que la gente vidente: recogiendo observaciones, comparándolas, hallando regularidades, dudando, desacertando y recopilando los detalles en un conjunto (enunciado) aparentemente significativo.

2.3.1.1 Acciones que Promueven la Construcción de Conjeturas.

Para elaborar conjeturas es necesario motivar la resolución de problemas en los que intervengan situaciones de exploración, visualización, generalización y verificación, desarrollando así el razonamiento matemático. Plazas y Samper (2013) presentan las acciones que contribuyen al proceso de conjeturación:

- **La exploración:** Consiste en construir una representación y a partir de ella encontrar regularidades (propiedades o relaciones geométricas) que se basen en la experiencia con el fin de dar solución a un problema. Para Samper y Molina (2013) la exploración tiene lugar en el mundo de la teoría y de los fenómenos; en el primero, la exploración incurre sobre los enunciados que conoce el estudiante y en el segundo, la exploración incurre en las representaciones (gráficas y/o materiales) y es de carácter empírico.
- **La visualización:** Consiste en percibir propiedades geométricas de un objeto a partir de su representación gráfica, identificando sus elementos constitutivos y las posibles configuraciones que se pueden conformar con estos o interpretando distintivos geométricos (congruencia, perpendicularidad, paralelismo, entre otros) que representan relaciones geométricas. Además de comparar y crear vínculos entre la figura observada y la imagen conceptual que se tiene de esta, con el fin de descubrir propiedades que no es posible percibir a simple vista (Samper y Molina, 2013).
- **La generalización:** Consiste en percibir propiedades invariantes de construcciones geométricas, detectadas durante los procesos de exploración y visualización, que se puedan expresar por medio de un enunciado en términos geométricos.
- **La verificación:** Consiste en justificar el enunciado elaborado para convencerse y convencer a otros de la validez de este, verificando las condiciones expuestas allí, este es un paso hacia el camino de la demostración.

2.3.2 Material Didáctico

Para Morales (2012), el uso del material didáctico ha aumentado su importancia en la educación, ya que desarrolla habilidades en los estudiantes, estimula los sentidos y la imaginación, dando paso al aprendizaje significativo. Estos recursos facilitan el proceso de enseñanza – aprendizaje por medio de materiales físicos o virtuales, que son de fácil adaptación a condiciones particulares del estudiante y de la temática a trabajar.

Para la elaboración del material didáctico de este trabajo, se deben tener en cuenta las características que propone Morales (2012):

- El material debe estar diseñado con respecto a un objetivo de aprendizaje.
- El material didáctico debe considerar las capacidades, características cognitivas, intereses, conocimientos previos, experiencias y habilidades de los estudiantes.
- Es importante tener en cuenta el contexto en que se va a hacer uso del material.
- Se debe considerar la secuenciación de los contenidos, el conjunto de tareas y la metodología.
- Es necesario tener en cuenta la población a la que se dirige para que sea realmente útil, cada tipo de recurso y su forma de emplearlo cumple una función en el proceso de enseñanza – aprendizaje, por ejemplo:
    - Proporcionar información.
    - Cumplir con un objetivo.
    - Guiar el proceso de enseñanza – aprendizaje.
    - Contextualizar a los estudiantes.
    - Factibilizar la comunicación entre el docente y los estudiantes.
    - Acercar las ideas a los sentidos.
    - Motivar a los estudiantes.

2.3.2.1 Material Didáctico en Matemáticas para estudiantes con Discapacidad Visual.

Cuando se pretende involucrar a los niños con discapacidad visual en el aula de matemáticas, es necesario hacer adecuaciones y diseñar recursos que les permita acceder con mayor facilidad a los objetos matemáticos. En estos casos, el lenguaje y los órganos sensoriales son de vital importancia para el desarrollo de actividades y lo más indicado es que estas se valgan de interpretación de sensaciones auditivas, olfativas y táctiles, para realizar representaciones mentales más claras del objeto en cuestión (Guzmán, 2014).

Para Guzmán (2014), los materiales didácticos empleados en niños con discapacidad visual en el aula de matemáticas deben tener las siguientes características:

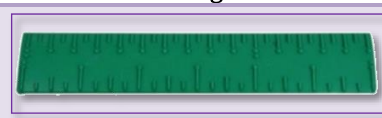
- El tamaño debe ser considerable, para que su exploración sea fácil y dinámica.
- El material debe tener diferentes texturas para que el estudiante pueda establecer relaciones, igualdades y diferencias, sin abusar del uso de estas.

- Dotar de relieve el material, con el fin de distinguir diferentes elementos dentro de una misma composición.
- Es importante buscar el equilibrio en el uso de formas dentro de un material, ya que la abundancia de estas puede llevar a la confusión del estudiante, por ende, es necesario que las figuras sean claras, sencillas y universales.
- El material en el que se diseñen los recursos debe ser resistente y seguro durante la manipulación.
- El color es un factor importante dentro del diseño de materiales, puesto que puede ser de gran utilidad para estudiantes con baja visión o para sus compañeros normovidentes, logrando así un proceso de inclusión efectivo.
- Se pueden incluir adaptaciones que se relacionen con el olfato, puesto que es otra forma de diferenciar y reconocer diversos elementos.

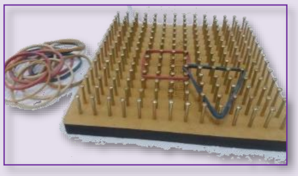
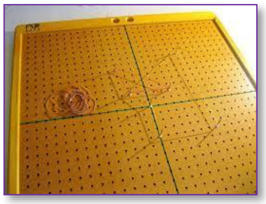
2.3.2.2 Algunos Materiales Didácticos en Geometría para Estudiantes con Discapacidad Visual.

Fuentes (s.f.), Lara y Fátima (s.f.) realizan una lista de materiales didácticos en matemáticas; a continuación, se mencionan algunos de los que se usan para la enseñanza y aprendizaje de la geometría:

Tabla 4. *Materiales didácticos de geometría para estudiantes con discapacidad visual*

Nombre	Descripción	Imagen
Regla	Regla con relieve, marcada en centímetros y en pulgadas.	 ***Imagen 52.*** *Regla Braille*[2]
Goniómetro	Transportador adaptado, con guía auxiliar.	 ***Imagen 53.*** *Goniómetro Braille*

[2] De la imagen 18 a la 21 fueron tomadas de Fuentes, F. (s.f). *Diseño de imágenes para ciegos, material didáctico para niños con discapacidad visual*. Universidad Politécnica de Valencia. España.

Compás	Compás adaptado, con una punta en sus dos extremos.	 ***Imagen 54.*** *Compás*
Escuadras	Escuadras con numeración en sistema Braille.	 ***Imagen 55.*** *Escuadras Braille*
Geoplano	Tablero cuadrado, generalmente de madera, que cuenta en su parte interior con una cuadrícula y en cada uno de los vértices, clavos que sobresalen de la superficie unos 2 cm.	 ***Imagen 56.*** *Geoplano*[3]
Plano cartesiano	Pieza de melamina blanca o de madera. Posee perforaciones a distancias de 1 cm para colocar fijaciones y generar con bandas elásticas, por ejemplo, gráficas de funciones y figuras geométricas.	 ***Imagen 57.*** *Plano cartesiano*

[3] Las imágenes 22 y 23 fueron tomadas de Lara, M. y Fátima, N. (s.f.). *Recursos didácticos para potenciar el desarrollo de habilidades matemáticas en adolescentes con necesidades educativas especiales*. Universidad Nacional del Rosario. http://eventosacademicos.filo.uba.ar/index.php/JIFIICE/VI-IV/paper/view/3872/2471

3. METODOLOGÍA

El presente trabajo de grado es un estudio cualitativo descriptivo, en el que se presenta el diseño de un material didáctico acompañado de algunas tareas, para desarrollar el proceso de conjeturación en geometría. El material se diseñó para que pueda ser utilizado por estudiantes con discapacidad visual y normovidentes. Para ello, fue necesario tener en cuenta lo descrito por los autores sobre la conjeturación en las dos poblaciones

La implementación del diseño se llevó a cabo con dos estudiantes, una de ellas con discapacidad visual. Para revisar la actuación de las estudiantes en el desarrollo de las tareas se hizo uso de fotografías, grabaciones de voz y vídeo, las cuales están autorizadas de manera anticipada por parte de los padres.

Ahora bien, todo lo anterior está fundamentado en lo propuesto por Gómez (2002) como análisis didáctico, el cual se describe como “el registro de cuatro actividades que el profesor debe realizar para el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza” (p.3). Las cuatro etapas a las que hace referencia el autor son:

- **Análisis de contenido:** En esta etapa se determinan los objetos y contenidos matemáticos que se pretenden enseñar, teniendo en cuenta los conocimientos previos del estudiante; es decir, se hace un estudio de las definiciones y hechos geométricos que se requerirán durante el desarrollo de la propuesta.
- **Análisis cognitivo:** En esta etapa se determinan los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar en el estudiante, por lo tanto, se establecen los objetivos de aprendizaje y se indaga sobre las dificultades y errores que pueden presentarse durante la implementación.
- **Análisis instrucción:** En esta etapa se realiza “la descripción de las actividades que se propondrán a los alumnos teniendo en cuenta la variedad de tipos de tareas que surgen del análisis de contenido, las necesidades de los alumnos (con motivo del análisis cognitivo), y los materiales y recursos disponibles” (Gómez, 2002, p.3).
- **Análisis de actuación:** En esta etapa se analiza la implementación de las tareas teniendo en cuenta los procesos desarrollados por los estudiantes y la evaluación de los profesores; reconociendo la pertinencia de las tareas y el material empleado.

A continuación, en la Imagen 58 se presenta cómo se estructuró el trabajo, relacionándolo en algunos aspectos de las cuatro fases del análisis didáctico. En este se evidencian las acciones que se llevaron a cabo en cada uno de los momentos, lo cual se acerca a lo propuesto en cada uno de los análisis.

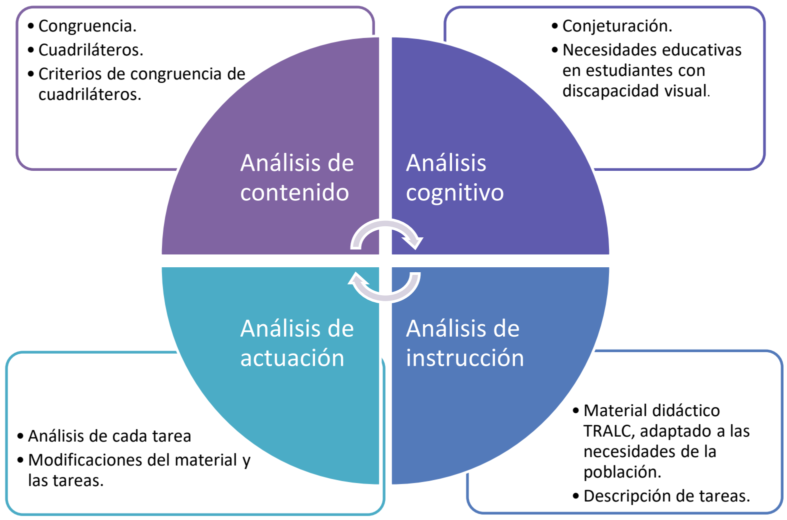


Imagen 58. *Diagrama del análisis didáctico del proyecto*

3.1 Descripción de la Población

Con el fin de verificar si por medio de las tareas y el material diseñado se logra el objetivo de desarrollar el proceso de conjeturación en geometría, se realizó la implementación con una estudiante invidente y otra normovidente, las cuales se describen a continuación:

- Laura Ximena Rojas Ardila, tiene 12 años, vive en Bogotá, en el barrio Ramajal. Actualmente estudia en el Colegio Técnico José Félix Restrepo, en grado séptimo. La estudiante posee ceguera total, por lo tanto, necesita acompañamiento de los padres y del área de tiflología de la Institución. En cuanto a sus conocimientos previos en geometría, comunica algunas características de algunos polígonos, no reconoce ningún instrumento de toma de medidas (regla, transportador) ni la forma adecuada de usarlos.
- Danna Sofia Beltrán Rodríguez, tiene 11 años, vive en el municipio de Soacha; actualmente estudia en la Escuela Normal Superior María Auxiliadora de Soacha, en grado sexto. La estudiante es normovidente y no posee alguna limitación física, sensorial o cognitiva. En cuanto a su conocimiento en geometría, se puede evidenciar que la estudiante reconoce la representación gráfica de algunos polígonos, además ha realizado procesos de toma de medidas con regla y aunque conoce el transportador nunca ha hecho uso de este.

Las personas que dirigieron el desarrollo de las tareas con las estudiantes fueron las autoras del trabajo de grado. Durante la implementación de las tareas, las dos investigadoras se encontraban presentes de manera participante, sin embargo, la persona encargada de realizar la orientación de la aplicación de las tareas con Laura fue Karen Pineda, mientras que Vanessa Romero orientó la ejecución de las tareas llevadas a cabo por Danna.

3.2 Estructura General de las Tareas

A continuación, se presentan los nombres y propósitos de cada una de las tareas

Tabla 5. *Propósitos de las Tareas*

Tareas	Propósito
Tarea 1: Explorando TRALC	Reconocer el material didáctico TRALC, su funcionalidad y cómo usarlo.
Tarea 2: Reconociendo algunos tipos de cuadriláteros	Identificar y clasificar algunos tipos de cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo).
Tarea 3: Congruencia	Reconocer la definición de ángulos, segmentos y polígonos congruentes.
Tarea 4: Criterios de congruencia de cuadriláteros	Establecer algunos criterios de congruencia de cuadriláteros.
Tarea 5: Criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales	Establecer algunos criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales (rectángulo, rombo y cuadrado).

4. MATERIAL DIDÁCTICO TRALC

4.1 Proceso de diseño

El material didáctico surgió de la necesidad de copiar ángulos y segmentos con exactitud de medida, ya que el tema central de la propuesta es la congruencia. Adicionalmente, se requirieron unos cuadriláteros base, los cuales sirvieron de guía para trabajar, tanto las características de los cuadriláteros, como sus respectivos criterios de congruencia. También se necesitó de algún elemento con el que se pudiera medir ángulos y longitudes, por ello se vio la necesidad de incluir regla y transportador, con las adaptaciones necesarias para el tipo de población.

A lo largo del proceso de diseño, se contó con varios prototipos que, aunque cumplían con el objetivo, presentaron dificultades en algunas ocasiones con la exactitud en las medidas, en el proceso de copiar y otras propias de las adaptaciones que se requerían para el tipo de población. En principio, se pensó en usar una regla plegable multifuncional (Imagen 59), ya que esta permite copiar con exactitud ángulos y longitudes, pero no permitía realizar una exploración de los criterios de congruencia ni la verificación de estos. Por ello, se tomó la decisión de cambiar el material de tal manera que solucionara los problemas anteriormente mencionados. Luego, se pensó en un juego de fichas Lego (Imagen 60), que permitiera copiar las longitudes encajando sus piezas para formar el cuadrilátero, siguiendo los criterios, pero esta idea no dio resultado, puesto que se presentaron dificultades en el proceso de copiar los ángulos y longitudes de segmentos debido a la falta de versatilidad de las piezas.

Imagen 59. *Regleta de ángulos ajustables*

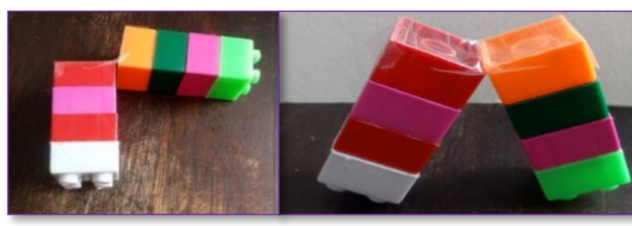


Imagen 60. *Piezas de Lego formando ángulos*

Posteriormente, se revisó el diseño de ángulos fijos, elaborados en palos de paleta, para realizar las construcciones necesarias, sin embargo, se mantuvo la idea de copiar los segmentos mediante un mecanismo compuesto por un palo de pincho dentro de un pitillo, que se extendía o recogía, según la necesidad de la longitud (Imagen 61). El inconveniente de este material fue que al extender o recoger el segmento este se desencajaba, puesto que no tenía ninguna pieza que los asegurara. Por otra parte, se perdía exactitud al copiar las piezas del cuadrilátero, ya que el palo de paleta es considerablemente más ancho que el pitillo.

Imagen 61. *Primer prototipo con pitillos, palos de pincho y de paleta*

Finalmente, teniendo como base el último material descrito, se hicieron las adaptaciones necesarias para su funcionamiento, este nuevo prototipo fue realizado en madera MDF (médium density fibreboard).

4.2 Descripción del material

El nombre del material didáctico TRALC proviene de las iniciales de las siguientes palabras: transportador, regla, ángulos, lados y congruencia. El objetivo de este es permitir la exploración de los criterios de congruencia de cuadriláteros, por medio de los procesos de medición, copiado de medidas y construcción de ángulos y segmentos. A continuación, se describen cada uno de los elementos que conforman TRALC.

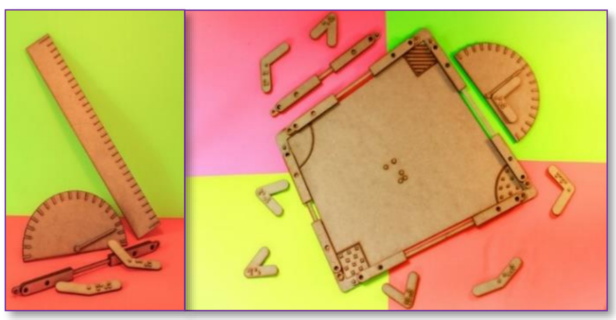


Imagen 62. *Material didáctico TRALC*

4.2.1 Transportador

El transportador posee una forma semicircular graduada en 180° con marcas en alto relieve cada 10° (Imagen 63). Adicionalmente, cuenta con una manecilla removible para facilitar el proceso de medir piezas grandes. La forma de emplearlo es ubicar la pieza que se desea medir sobre este, alineando el borde de la figura con la primera marca del transportador que equivale a 0°, luego con ayuda de la manecilla se determina la apertura del ángulo a medir y se retira la pieza para contar las marcas en relieve que determinarán la medida del ángulo (

Imagen **64**).

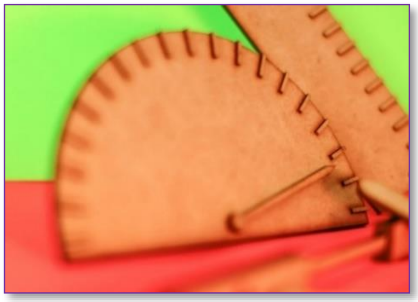


Imagen 63. *Transportador*

Imagen 64. *Proceso de medir ángulos*

4.2.2 Regla

La regla es de forma rectangular, cuya longitud es 30 centímetros de largo y posee texturas en alto relieve cada centímetro (Imagen 65); las marcas inicial y final son más largas en comparación a las otras, para facilitar el proceso de medición. La manera de usarla es ubicar la figura a medir sobre la regla, de tal forma que un extremo de la figura coincida con la marca inicial, para saber la longitud de la figura se deben contar las líneas de la regla que abarca la figura, sin tener en cuenta la inicial (Imagen 66).

Imagen 65. *Regla*

Imagen 66. *Proceso de medir segmento*

4.2.3 Ángulos

El material cuenta con un paquete de 27 ángulos, para los cuales varía su medida. Se tienen ángulos de 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 100°, 110°, 120°, 130°, 135°, 140°, 150°, 160°, 170° y 180°. Cada ángulo cuenta con dos soportes en sus extremos (Imagen 68), que les permite encajar con los segmentos, también, en la parte posterior cuentan con una marca en relieve que indica su medida, este número está en braille (sin el símbolo de número).

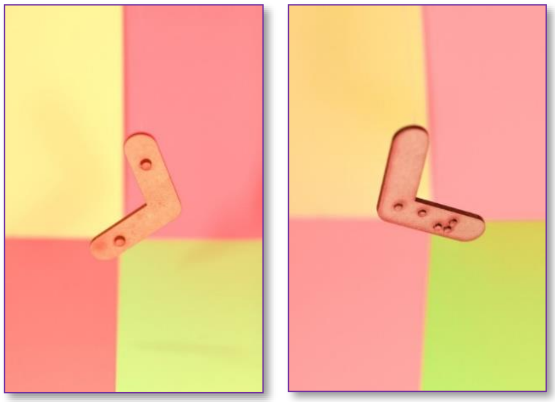


Imagen 67. *Ángulo de* 110°, *vista frontal y posterior*

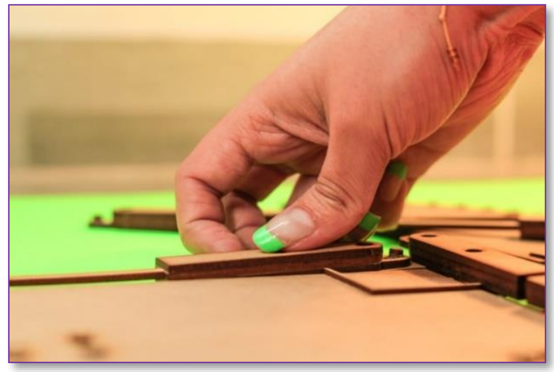


Imagen 68. *Encaje del ángulo con el segmento*

4.2.4 Lados o segmentos

El material cuenta con cinco segmentos, cada uno está conformado por tres capas de madera, que cuentan con un mecanismo que permite extenderlos cuando se tira de sus extremos. Cada segmento cuenta con orificios que le permite encajar con los ángulos y con soportes, en los extremos, que da la posibilidad de encajar dos segmentos (Imagen 69). Su longitud mínima es de 15 centímetros y es posible extenderlos el doble de esta.

Imagen 69. *Encaje de los segmentos*

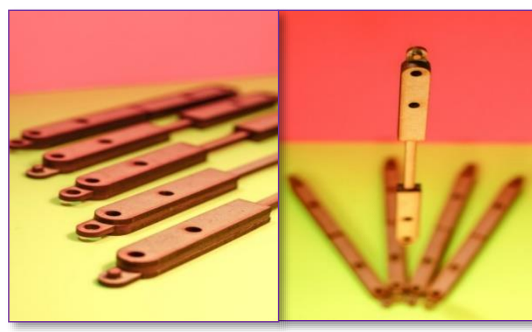


Imagen 70. *Segmentos*

4.2.4 Cuadriláteros

Cuatro cuadriláteros distintos, tres de ellos especiales (rombo, cuadrado y rectángulo). Cuentan con alto relieve en cada uno de sus ángulos en diferentes texturas (Imagen 72) para identificarlos[4], también con una marca en braille en letras mayúsculas que permite nombrarlos, esta se encuentra en el centro la figura (Imagen 73).

---

[4] Cuando sea necesario hacer referencia a un lado del cuadrilátero, este se nombrará haciendo uso de las texturas que se encuentran en los ángulos (p. ej. Lado cuadros – liso). Mientras que, los ángulos se mencionarán haciendo uso de la textura que se encuentra ubicada en el vértice de este (p. ej. Ángulo puntos).

Imagen 71. Cuadriláteros

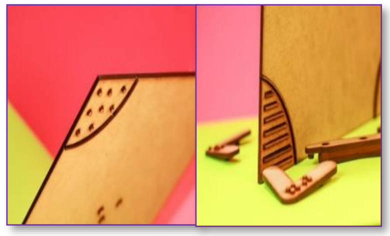


Imagen 72. *Texturas de los ángulos*

Imagen 73. *Nombre de los cuadriláteros en braille (cuadrilátero A)*

4.3 Tareas

A continuación, se presenta la secuencia de tareas, describiendo en cada una de ellas: el objeto matemático, el propósito, los prerrequisitos, el material necesario, la descripción de los momentos, las posibles soluciones y errores.

4.3.1 Explorando TRALC

Objeto matemático en juego: Segmentos y ángulos.

Propósito de la tarea: Reconocer el material didáctico, su funcionalidad y cómo usarlo.

Prerrequisitos: Definición o noción de segmento, ángulo y cuadrilátero.

Descripción del material: A cada estudiante se le hará entrega de una parte del material, el cual incluye: 1 ángulo de cada tipo, 4 segmentos, 10 cuadriláteros, el transportador y la regla.

Descripción de la tarea:

Primer momento (15 minutos aproximadamente): En este momento, se hará referencia a los segmentos, explicándoles la manera de aumentar y disminuir la longitud de estos. También, con el uso de la regla se les indicará que tomen la medida mínima, la medida máxima y así explicarles cómo usar la regla.

Segundo momento (30 minutos aproximadamente): En este momento, se hará referencia a los ángulos, haciendo uso del transportador, se les explicará la manera de medir con él, para establecer la relación entre el número de marcas recorridas en el transportador y el número que se encuentra en el ángulo (escrito en braille, sin el símbolo de número). Posteriormente, se les pedirá que identifiquen el ángulo más pequeño que es de 10º y el más grande que es de 180°, teniendo en cuenta que los ángulos van de 10º en 10º, además se incluye el de 45° y el de 135°. En el momento que los estudiantes midan el ángulo de 90°, se les preguntará a los estudiantes si reconocen qué tipo de ángulo es, en caso de que la respuesta sea negativa se definirá que este es un ángulo recto.

Tercer momento (20 minutos aproximadamente): En este momento, se hará referencia a los cuadriláteros. Junto con la manipulación del material, se les mostrarán las características principales (figuras cerradas, que poseen cuatro lados y cuatro ángulos), luego se les indicará que cada vértice del cuadrilátero se diferencia mediante distintas texturas, para que logren identificarlos en las tareas posteriores, además de reconocer los ángulos opuestos y adyacentes; asimismo los lados opuestos y adyacentes.

Posibles soluciones: Ante las siguientes preguntas se espera que los estudiantes afirmen lo siguiente:

Tabla 6. *Posibles respuestas tarea: Explorando TRALC*

Preguntas	Respuestas o soluciones esperadas a las preguntas
¿Qué se puede hacer con el segmento?	• Extenderlo y recogerlo. • Hacerlo más largo y más corto. Más grande y pequeño.
¿Cuántas marcas tiene la regla?	• Tiene 31 marcas.
¿Cuál es la longitud mínima del segmento?	• 17 cm incluyendo los soportes de los extremos. • 15 cm sin los soportes de los extremos.
¿Cuál es la longitud máxima del segmento?	• 29 cm incluyendo los soportes de los extremos. • 27 cm sin los soportes de los extremos
¿Cuánto mide el ángulo?	• Hará referencia a la medida del ángulo que escogió.
¿Cuál es la medida mínima de los ángulos?	• 10 grados.
¿Cuál es la medida máxima de los ángulos?	• 180 grados.

Posibles errores y dificultades:

- No conocer la noción de segmento, ángulo o cuadrilátero.
- Dificultades relacionadas con el proceso de medir longitudes.
- Dificultades para medir ángulos, usando el transportador.
- No reconocer los números en braille.
- No diferenciar las texturas de los cuadriláteros.
- No entender cómo usar el material.
- No saber contar.
- No medir adecuadamente los ángulos o segmentos.

- No reconocer los números.

4.3.2 Reconociendo Algunos Tipos de Cuadriláteros

Objeto matemático en juego: Cuadriláteros.

Propósitos de la tarea:

- Identificar algunos tipos de cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo).
- Clasificar los cuadriláteros según las características de cada tipo.

Prerrequisitos: Definición y noción de segmento, ángulo y cuadrilátero, definición de ángulo recto, lados y ángulos adyacentes y opuestos de un cuadrilátero. Uso adecuado del material.

Descripción del material: A cada estudiante se le entregará un cuadrilátero de cada tipo (incluyendo el que no es un cuadrilátero especial), el transportador y la regla.

Descripción de la tarea:

Primer momento (10 minutos aproximadamente): Se les explicará cada una de las definiciones de los cuadriláteros que se trabajarán durante la tarea: cuadrado, rectángulo y rombo.

Segundo momento (60 minutos aproximadamente): Se les entregará a los estudiantes el cuadrilátero A (que corresponde a un rombo), se solicitará que verifiquen que tipo de cuadrilátero es, apoyándose en el material que tienen a su disposición (regla y transportador) y teniendo en cuenta las definiciones anteriores. A continuación, se solicitará que sean medidos sus ángulos, con el fin de determinar que los ángulos opuestos son congruentes, puesto que en tareas posteriores se requerirá dicha información.

De la misma manera se realizará el proceso con el cuadrilátero B (que corresponde a un rectángulo), verificando su definición y determinando la relación de congruencia que existe entre los lados opuestos de este. Finalmente, con el cuadrilátero C (que corresponde a un cuadrado) solo se someterá al proceso de verificación de la definición.

Imagen 74. *Verificación de la propiedad del rectángulo*

Posibles soluciones: Ante las siguientes preguntas se espera que los estudiantes afirmen lo siguiente:

Tabla 7. *Posibles soluciones de la tarea: Reconociendo algunos tipos de cuadriláteros*

Preguntas	**Respuestas o soluciones esperadas a las preguntas**
El cuadrilátero A ¿Qué tipo de cuadrilátero es?	Un rombo.
El cuadrilátero B ¿Qué tipo de cuadrilátero es?	Un rectángulo.
El cuadrilátero C ¿Qué tipo de cuadrilátero es?	Un cuadrado.

Posibles errores y dificultades:

- No reconocer la definición de ángulo recto.
- No comprender las definiciones dadas y consideren que todos los cuadriláteros proporcionados son del mismo tipo.
- Dificultes en tomar las medidas de los lados y los ángulos.
- Que se confundan al nombrar, medir y determinar los ángulos del cuadrilátero.
- Que no identifiquen lados adyacentes y opuestos en un cuadrilátero.
- No diferenciar las distintas texturas que se encuentran en el material.
- Confundir la definición cuadrado con la de rectángulo y/o rombo.

4.3.3 Congruencia

Objeto matemático en juego: Congruencia de polígonos.

Propósitos de la tarea: Reconocer la definición de ángulos, segmentos y polígonos congruentes.

Prerrequisitos: Definición y noción de segmento, ángulo y cuadrilátero. Uso adecuado del material.

Descripción del material: A cada estudiante se les entregarán, tres ángulos, tres segmentos, dos triángulos, dos cuadriláteros, dos pentágonos, la regla y el compás.

Descripción de la tarea:

Primer momento (30 minutos): En este momento, se les proporcionará a los estudiantes un ejemplo de segmentos congruentes y un no ejemplo de estos. Posteriormente, se les preguntará de manera verbal sobre las características que tienen en común los segmentos congruentes, con el fin de construir la definición de congruencia de segmentos. Se realizará también el mismo proceso con ángulos, para construir la definición de ángulos congruentes.

Segundo momento (30 minutos): En este momento, se les explicará a los estudiantes la definición de polígonos congruentes, apoyándose en ejemplos y contraejemplos de la siguiente manera: primero, se les entregarán tres triángulos, dos de ellos congruentes y uno no, con el fin de que al realizar la exploración identifiquen el par de triángulos congruentes y las características. De la misma manera se realizará el proceso con los cuadriláteros y pentágonos, para que finalmente se establezca una generalidad de congruencia para cualquier polígono.

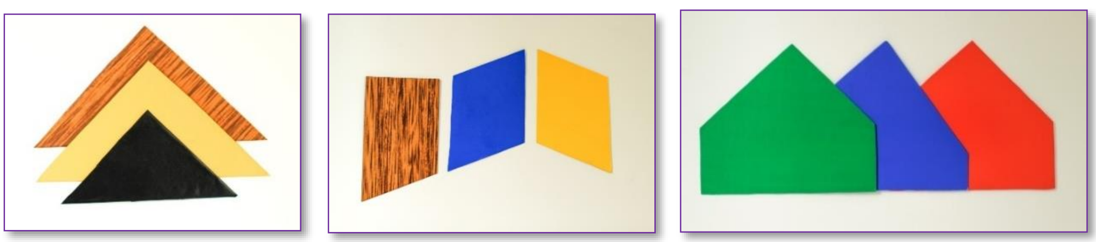


Imagen 75. *Polígonos congruentes y no congruentes*

Posibles soluciones: Ante las siguientes preguntas se espera que los estudiantes afirmen lo siguiente:

Tabla 8. *Posibles soluciones tarea: Congruencia de polígonos*

Preguntas	Respuestas o soluciones esperadas a las preguntas
¿Cuáles son las características de los segmentos congruentes?	Tienen la misma longitud
¿Cuáles son las características de los ángulos congruentes?	Tienen la misma medida
¿Cuáles son las características de los polígonos congruentes?	Tienen la misma cantidad de lados. Tienen los lados y ángulos congruentes.

Posibles errores y dificultades:

- Dificultades para determinar cuáles segmentos ya han sido medidos, es decir cómo hacer referencia a estos.

- En el momento de determinar los polígonos y ángulos congruentes, en vez de medir solaparlos.
- No comprender la noción de ángulos y segmentos correspondientes.
- Error al medir los segmentos y ángulos.

4.3.4 Criterios de congruencia de cuadriláteros

Objeto matemático en juego: Congruencia de cuadriláteros.

Propósitos de la tarea: Establecer algunos criterios de congruencia de cuadriláteros.

Prerrequisitos: Definición de congruencia de segmentos, ángulos y polígonos. Uso adecuado del material.

Descripción del material: A cada estudiante se les entregará un cuadrilátero (no especial), un cuadrado, un rectángulo, un rombo, el juego de ángulos, cuatro segmentos, la regla y el transportador.

Descripción de la tarea:

Primer momento (20 minutos): Se les proporcionará el cuadrilátero base, la regla y el transportador, con el fin de explicar la manera de copiar los lados y ángulos del cuadrilátero, realizando así un cuadrilátero congruente al proporcionado inicialmente.

Segundo momento (60 minutos): Se les proporcionará el cuadrilátero base y la tabla con las piezas que deben usar, a partir de esto, los estudiantes medirán y copiarán las piezas, es decir ángulos y lados en el orden que se encuentra en la primera columna de la Tabla 9, para construir un nuevo cuadrilátero. Una vez construyan el cuadrilátero con las piezas establecidas, verificarán la congruencia entre el cuadrilátero nuevo y el base, esto lo harán solapándolos, como se muestra en la Imagen 76. Con el fin de identificar los criterios que permiten obtener cuadriláteros congruentes.

Tabla 9. *Copiado de piezas tarea: Criterios de Congruencia*

Piezas	**¿Son congruentes?**
Lado, ángulo, lado	
Lado, ángulo, lado, ángulo, lado	
Lado, lado, ángulo, lado, ángulo	
Ángulo, lado, ángulo, lado, ángulo	
Lado, ángulo, lado, lado, lado	

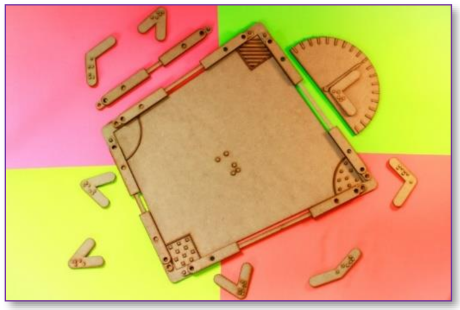


Imagen 76. *Proceso de verificación del cuadrilátero no especial*

Tercer momento (20 minutos): Se realizará una socialización de los criterios trabajados para realizar una retroalimentación de aquellos que permiten obtener cuadriláteros congruentes y aquellos que no.

Posibles errores y dificultades:

- Dificultades para construir los cuadriláteros con el material.
- Confundir los lados y ángulos que deben copiar.
- Al solapar los cuadriláteros la congruencia no sea evidente.

Posibles soluciones: Ante las siguientes preguntas se espera que los estudiantes afirmen lo siguiente:

Tabla 10. *Posibles soluciones de la tarea: Criterios de congruencia de cuadriláteros*

Piezas	**¿Son congruentes?**
Lado, ángulo, lado	No son congruentes
Lado, ángulo, lado, ángulo, lado	Sí son congruentes
Lado, lado, ángulo, lado, ángulo	No son congruentes
Ángulo, lado, ángulo, lado, ángulo	Sí son congruentes
Lado, ángulo, lado, lado, lado	Sí son congruentes

4.3.5 Criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales

Objeto matemático en juego: Congruencia de cuadriláteros.

Propósitos de la tarea: Establecer criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales (rectángulo, rombo y cuadrado).

Prerrequisitos: Definición de congruencia de segmentos, ángulos y polígonos; rectángulo, cuadrado y rombo, además de algunos de sus hechos geométricos. Uso adecuado del material.

Descripción del material: A cada estudiante se les entregará un cuadrado, un rectángulo, un rombo, el juego de ángulos, cuatro segmentos, la regla y el transportador.

Descripción de la tarea:

Primer momento (30 minutos): Se les recordará la definición y algunas propiedades del rombo. Posteriormente, se les solicitará que construyan un cuadrilátero que cumpla con la definición y las propiedades mencionadas y que identifiquen si el rombo construido es congruente o no con el proporcionado inicialmente, a continuación, se espera que los estudiantes copien los segmentos y ángulos que consideren necesarios, como se observa en la Imagen 77, se indagará sobre las condiciones mínimas para construir un rombo congruente.

Imagen 77. *Proceso de conjeturación y verificación del rombo*

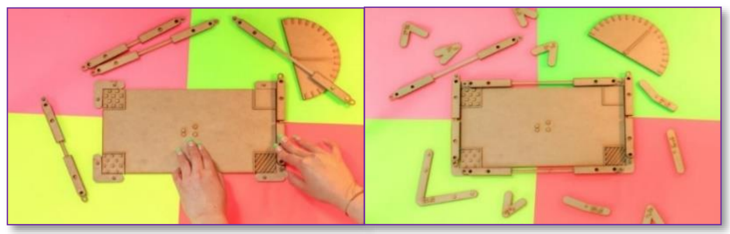


Imagen 78. *Proceso de conjeturación y verificación del rectángulo*

Segundo momento (30 minutos): Se explicará la definición (cuadrilátero con cuatro ángulos rectos) y propiedades del rectángulo, luego se les solicitará que construyan un cuadrilátero que cumpla con la definición y las propiedades mencionadas y que identifiquen si el rectángulo construido es congruente o no con el proporcionado inicialmente, a continuación, se espera que los estudiantes copien los segmentos y ángulos que consideren necesarios, como se observa en la Imagen 78, se indagará sobre las condiciones mínimas para construir un rectángulo congruente.

Tercer momento (30 minutos): Se mencionará la definición del cuadrado, solicitando que construyan uno que cumpla con esta y que identifiquen si el cuadrado construido es congruente o no con el proporcionado inicialmente, a continuación, se espera que los estudiantes copien los segmentos y ángulos que consideren necesarios, como se observa en la Imagen 79, se indagará sobre las condiciones mínimas para construir un cuadrado congruente.

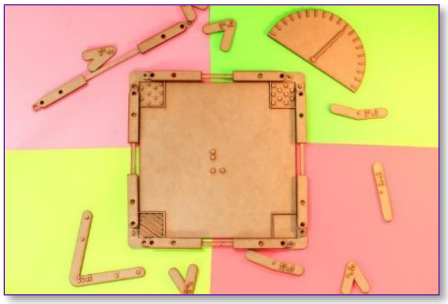


Imagen 79. *Proceso de conjeturación y verificación del cuadrado*

Posibles soluciones:

Tabla 11. *Posibles soluciones tarea: Criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales*

Preguntas	Respuestas o soluciones esperadas a las preguntas
¿Qué condiciones hacen falta para que los rectángulos sean congruentes?	Que tengan dos lados congruentes
¿Qué condiciones hacen cuadrados sean congruentes?	Que tengan un lado congruente
¿Qué condiciones hacen falta para que los rombos sean congruentes?	Que tengan un lado y un ángulo congruentes.

Posibles errores y dificultades:

- No comprender las definiciones de cuadriláteros.
- Comprender las propiedades, pero no saber aplicarlas para encontrar los criterios.
- Dificultades para construir los cuadriláteros con el material.
- Confundir los lados y ángulos que deben copiar.
- Al solapar los cuadriláteros la congruencia no sea evidente.

5. PRUEBA PILOTO

A continuación, se presenta la descripción del desarrollo de la prueba piloto, el análisis de lo sucedido y las posibles mejoras a la secuencia de tareas y el material. Para ello, se realizó una descripción detallada de lo sucedido y se contrastó lo planeado con lo desarrollado, apoyándose en grabaciones de audio, fotografías y las evidencias recolectadas en las hojas de trabajo (diligenciadas únicamente por Danna (3 2)), y se verificó si las estudiantes llevaron a cabo procesos de conjeturación durante el desarrollo de las tareas.

Cabe resaltar que, se realizó el proceso de descripción por cada tarea aplicada a cada una de las estudiantes de manera individual, puesto que la implementación de estas se desarrolló en diferentes momentos, luego, se analizó de manera general lo evidenciado en cada tarea. También, antes de realizar cada descripción, se enfatiza en los tiempos empleados por las estudiantes para la solución de las tareas, el alcance de los objetivos y las modificaciones realizadas a lo propuesto, cuando se consideraron necesarias; dichas modificaciones se encuentran descritas de manera más profunda en el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** 3.

5.1 Descripción del desarrollo de la tarea 1: Explorando TRALC

En cuanto a los objetivos que se tenían previstos para la tarea se cumplieron de manera satisfactoria con las dos estudiantes. Cada una de las niñas desarrolló la tarea en aproximadamente una hora. La primera intervención se realizó con Laura, en esta se evidenció que era necesario incluir en la tarea, un momento que permitiera comprender la forma en la que se debían medir los lados y ángulos de los cuadriláteros, por ello, esta modificación de la tarea se realizó para el desarrollo de esta, con las dos estudiantes.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Laura:

La intervención inició con el reconocimiento de la regla, para ello, se le proporcionó este instrumento a la estudiante y se le solicitó que identificara su forma, ella afirmó que es rectangular; además de los elementos que la componen (marcas en relieve). Enseguida, la profesora Karen le solicitó a la estudiante que contara las marcas que tiene la regla, ella aseguró que esta tiene 31 marcas. Adicionalmente, reconoció que la primera y última marca eran más largas que las demás. Como la estudiante no se apropió del instrumento para medir, la profesora Karen realizó una breve explicación de los pasos para lograr este proceso, aclarando que la primera marca determina el punto inicial y que cada una de estas se encuentran a una distancia de un centímetro.

Luego, la profesora Karen le entregó a la estudiante el segmento y le preguntó sobre las características de este; ella dijo que es un poco largo, liso y que cuenta con cuatro huecos. Al preguntarle sobre la definición de segmento, afirmó que no sabe lo que es, por ello se le explicó la noción de segmento, relacionándolo con el que forma parte del material. Asimismo, se expuso la manera de extenderlo y encogerlo, guiándola a que lo ampliara hasta la máxima longitud y lo redujera hasta la mínima extensión, como se muestra en la Imagen 80. Teniendo en cuenta esto, la profesora Karen realizó una de las preguntas de la guía ¿Qué se puede hacer con el segmento?, a lo que la niña respondió alargarlo y encogerlo.

Imagen 80. *Exploración del segmento*

Imagen 81. *Medida mínima del segmento*

Al preguntar si el segmento del material se puede medir, la estudiante manifestó no saberlo, por ello las profesoras hicieron la aclaración de que es posible determinar su longitud, empleando la regla, así, se explicó la manera cómo se debe medir el segmento con la regla. Inmediatamente, se le solicitó a la estudiante encontrar la medida mínima de este (Imagen 81), ella concluyó que el segmento mide 17 centímetros. De la misma manera se realizó el proceso, para el segmento en su máxima longitud, determinando que su medida al extenderlo completamente era de 29 centímetros.

Después, se realizó la entrega del transportador y se preguntó sobre su forma, la estudiante manifiesto que este es ovalado y ante esta respuesta las profesoras corrigieron la expresión de la estudiante afirmando que el transportador tiene una forma semicircular. La niña afirmó que el transportador tiene marcas en relieve y que, a diferencia de la regla, todas son iguales, además que en la parte que no es curva no se cuenta con marcas y se resalta que el transportador sirve para medir ángulos.

A continuación, se proporcionó un ángulo, que forma parte del material. Inicialmente, se reconoció la parte frontal de esta figura, donde la niña identificó que se cuenta con dos puntos; inmediatamente, se realizó el reconocimiento de la parte posterior del ángulo, en la cual se evidenció dificultad en la lectura de las marcas en braille, ya que esta carecía del símbolo numérico, además el espacio del cajetín era insuficiente para reconocer la composición del número que se encontraba allí. Debido a esto, con ayuda de los padres la estudiante logró determinar que el número que se encontraba en el ángulo era 90. Se realizó la aclaración de que el ángulo más pequeño es de 10° y el más grande es de 180°.

Para realizar la explicación de la manera como se debe medir un ángulo, la profesora Karen solicitó a la estudiante que alineara un lado del ángulo con la parte recta del transportador (Imagen 82). Adicionalmente, se intentó conseguir que el vértice del ángulo quedará exactamente sobre la marca que indicaba el centro del transportador, sin embargo, esta acción representó bastante dificultad para la estudiante, ya que al buscar el centro se perdía la alineación o viceversa; por lo tanto, se tomó la decisión de que la estudiante solamente alineara el ángulo y el transportador, para que luego la profesora Karen moviera la pieza haciendo coincidir el vértice con el centro y así acomodar la pieza removible del transportador, para indicar la abertura del ángulo contando las marcas de 10 en 10. Una vez concluido este proceso, se le solicitó a la estudiante que identificara el número en braille que se encuentra en el ángulo, con el fin de establecer la relación de igualdad entre este número y la medida obtenida en el transportador.

Imagen 82. *Ubicación del ángulo sobre el transportador*

A continuación, se presenta una corta conversación entre la estudiante y las profesoras, en la que se resumen los resultados más relevantes de la tarea hasta el momento, en el Fragmento 1 se evidencia la comprensión del uso del material que se le ha entregado a la estudiante, además de los conceptos y procesos que giran en torno a este.

Fragmento 1. Desarrollo de la tarea 1 Laura

Profesora Karen	¿Qué fue lo primero que vimos?
Laura	La regla
Profesora Karen	Y la regla tiene unas marquitas. ¿Cada marquita es cuánto?
Laura	Un centímetro
Profesora Vanessa	¿Qué podemos hacer con la regla?
Laura	Medir
Profesora Vanessa	Medir ¿qué específicamente?
Laura	El segmento
Profesora Karen	¿Qué podemos hacer con el segmento?
Laura	Alargarlo y encogerlo
Profesora Karen	Y en el transportador. El transportador tiene ¿qué?
Laura	Unas marcas
Profesora Karen	Y cada marquita ¿cuánto es?
Laura	Diez
Profesora Karen	Habíamos medido un ángulo que tenía el número ¿qué?
Laura	Noventa
Profesora Karen	Si yo te paso el ángulo que tiene el número treinta ¿cuánto debe medir en el transportador?
Laura	Treinta
Profesora Karen	Si tú mides un ángulo en el transportador y te mide cincuenta ¿qué número debe tener el ángulo?
Laura	Cincuenta
Profesora Vanessa	Entonces, ¿cuál es el ángulo más pequeño que encontramos?
Laura	El de diez
Profesora Vanessa	¿Y el más grande?
Laura	El de 180

Ahora, para hacer referencia a los cuadriláteros, se le preguntó a la estudiante la definición de cuadrilátero, ella afirmó que es una figura con cuatro lados y cuatro ángulos, además no todos son iguales. Luego, se hizo entrega de un cuadrilátero que forma parte del material y se le solicitó que leyera la marca en braille, ubicada en el centro y con la cual se nombra la figura (Imagen 83). Es de resaltar, que esta marca se identificó de manera rápida y sencilla por la niña. Por otra parte, para comprobar la definición proporcionada por la estudiante, se inició el reconocimiento de los lados y de los ángulos mediante la identificación de las texturas una por una.

Imagen 83. *Reconocimiento de marca en braille*

Para complementar la tarea, se describió la forma en que se deben medir los lados y ángulos de un cuadrilátero, para realizar este proceso se tomó como ejemplo uno de los cuadriláteros al azar y se le solicitó a la niña que midiera dos lados y dos ángulos. Una vez comprendido el proceso, se tomó otro cuadrilátero y se le pidió que midiera todos sus lados y ángulos, la estudiante realizó esta acción demostrando comprensión del proceso de medir tanto segmentos como ángulos. Finalmente, la profesora Karen le indicó a la estudiante que leyera las marcas en braille de cada cuadrilátero y expresara su nombre. También, se realizó un resumen corto de toda la tarea y así concluyó esta.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Danna:

Para dar inicio con el reconocimiento del material, se hizo entrega de la regla a la estudiante y se le preguntó sobre la forma que tiene esta y el número de marcas, obteniendo como respuesta que el instrumento es rectangular y cuenta con 31 marcas. Adicionalmente, se le pidió diferenciar la primer y última marca de las demás, a lo que la estudiante respondió que estas marcas son iguales, pero con respecto a las otras son más grandes. La profesora Vanessa hizo la aclaración de que cada una de las marcas están ubicadas a un centímetro de distancia.

Después, la profesora Vanessa pidió a la estudiante que describiera la manera de usar la regla para medir una longitud cualquiera, la niña usó esta de la forma que se usa regularmente, es decir, ubicando la distancia a medir junto a las marcas del instrumento; la profesora Vanessa validó este modo de usarla, sin embargo, le propuso a la estudiante otro mecanismo para emplearla, en el cual la distancia a medir se sitúa sobre la regla, alineando el objeto tanto con la marca inicial, como con las demás líneas en relieve y contando el número de marcas que abarca sin tener en cuenta la inicial.

Dando paso al segmento, en primer lugar, se le preguntó a la estudiante sobre la definición que conocía de segmento, ella respondió que es una línea que tiene un inicio y un fin; la profesora Vanessa relacionó la noción que tiene la estudiante con el segmento que forma parte del material. Luego, le sugirió a la estudiante realizar una manipulación de la figura y se consultó sobre la acción que se puede hacer con este objeto, la niña afirmó que se puede abrir y cerrar, es decir, se extiende y contrae, cambiando de longitud.

Enseguida, se le pidió a la estudiante que describiera la manera de medir el segmento con la regla, ella ubicó las piezas de manera correcta y con esto la profesora Vanessa preguntó sobre la longitud mínima del segmento, la niña respondió que es 17 centímetros; al preguntarle sobre la longitud máxima, ella afirmó que es de 29 centímetros (Imagen 84).

Imagen 84. *Medida máxima del segmento*

Luego, se realizó el reconocimiento del transportador que forma parte del material, la estudiante afirmó que este instrumento tiene forma de "medio círculo", marcas con relieve y estas son todas iguales. A continuación, la profesora Vanessa le mostró a la niña la pieza removible del transportador y le explicó la funcionalidad de esta. También se le aclaró que cada marca representa 10°, que la primera representa el 0 y al realizar el conteo la estudiante indicó que la última representa los 180°. Para complementar la explicación la profesora Vanessa solicitó a la estudiante medir un ángulo cualquiera, realizando el acompañamiento en simultáneo.

Por otra parte, la profesora Vanessa entregó a la estudiante el paquete de ángulos y realizó aclaraciones sobre la definición y características del ángulo, ejemplificó estas, con la pieza que lo representa en el material. Dentro de la caracterización que hizo la estudiante de la pieza, detalla las marcas en braille, sin embargo, la profesora Vanessa le explicó el uso de dichas marcas, como la niña no reconoce los números en braille es necesario llegar al acuerdo de siempre medir los ángulos.

A continuación, se le pidió a la estudiante medir uno de los ángulos, durante el proceso se evidenció la dificultad que presentaba la niña al ubicar el ángulo de la manera incorrecta (Imagen 85), por ello, la profesora Vanessa intervino, en el momento, para realizar la corrección de este proceso. Teniendo en cuenta las indicaciones, la estudiante midió correctamente algunos ángulos sola (Imagen 85).

Imagen 85. *Ubicación correcta e incorrecta del ángulo sobre el transportador*

Posteriormente, se mostró a la estudiante los cuatro cuadriláteros que forman parte del material, se le preguntó sobre las características en común de los cuatro, ella respondió que todos tienen cuatro lados y cuatro ángulos. Inmediatamente, se le pidió que describa las marcas que tienen los cuadriláteros en los ángulos, obteniendo por respuesta que tres de ellos tienen diferentes marcas (rayas, cuadrados y puntos) y el cuarto no tiene. La profesora Vanessa aclaró que cada uno de los cuadriláteros será nombrado con una letra (A, B, C y D), la cual corresponde a la marca en braille que se encuentra en el centro de cada figura.

Complementando la exploración de los cuadriláteros, se le solicitó a la estudiante que midiera los lados y ángulos de dos de estos. Durante este proceso, se logró evidenciar que la niña confundía la unidad con la que se debe hacer referencia a la medida de los ángulos, ya que al medir uno manifestó que este medía 80 centímetros, por ello la profesora Vanessa realizó la aclaración de la manera adecuada de hacer referencia a la medida de un ángulo. Finalmente, se realizó un repaso de todo lo visto en la tarea, retomando el proceso de medir un ángulo y un segmento con una longitud determinada.

5.2 Descripción del desarrollo de la tarea 2: Reconociendo Algunos Tipos de Cuadriláteros

La tarea tuvo una duración de aproximadamente una hora con cada estudiante, los objetivos de esta se cumplieron a cabalidad, ya que se realizó la identificación de los cuadriláteros especiales tal como se planeó con anterioridad, se adicionó la exploración e identificación del cuadrilátero D (cuadrilátero no especial) al desarrollo de la tarea tanto con Laura como con Danna, puesto que se consideró necesario mostrar algún contraejemplo de las características de los cuadriláteros especiales.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Laura:

La tarea inició recordando lo que se había trabajado en la sesión anterior. Inmediatamente, se le preguntó a la estudiante sobre la clasificación de los ángulos, ella manifestó que no sabe esto, por ello la profesora Karen le expuso la clasificación de los ángulos refiriéndose a sus medidas y respectivos nombres. A continuación, se realizó una explicación sobre los ángulos y lados opuestos y consecutivos de un cuadrilátero, mediante la localización de determinado lado o ángulo y encontrando su opuesto o adyacente (Imagen 86), sin embargo, se logró percibir que esto representó dificultad para la estudiante.

Imagen 86. *Localización de lados y ángulos opuestos y adyacentes*

Imagen 87. *Proceso de medir el ángulo cuadros en el cuadrilátero A*

La profesora le preguntó a la estudiante, acerca de la definición de rectángulo, ella manifestó que el rectángulo tiene dos lados iguales, aunque no recordaba cuales lados tienen la misma medida, tampoco recordaba la característica de los ángulos. Enseguida, la profesora Karen le expuso la definición de rectángulo (cuadrilátero con todos sus ángulos rectos) y la relación de igualdad que tienen sus lados opuestos. Para el cuadrado, la niña afirmó que es el que tiene todos sus lados iguales, sin embargo, no tenía certeza de las características de los ángulos. Por ello, la profesora Karen complementó la noción que tiene la niña de cuadrado, afirmando que los ángulos de este son iguales a los del rectángulo, es decir, son rectos. Luego, se indagó sobre la definición que la estudiante conocía de rombo, pero ella no tenía certeza de esta. Por lo tanto, la profesora Karen definió el rombo como un cuadrilátero que tiene sus lados iguales y sus ángulos no necesariamente son rectos.

Para iniciar la identificación de algunos tipos de cuadriláteros, primero se le proporcionó a la estudiante el cuadrilátero A, que corresponde al rombo, la profesora Karen le solicitó a la niña que, con el uso de la regla, determinara la longitud de los lados de dicho cuadrilátero y estableciera la relación de igualdad entre los lados de este. Laura realizó el proceso de manera detallada en cada uno de los lados del cuadrilátero, teniendo en cuenta las texturas que se encuentran en los ángulos con el fin de resaltar los lados que ya se habían medido, mientras que la profesora Karen realizó las respectivas anotaciones de lo que la estudiante manifestó de cada medida. Una vez concluido este proceso la estudiante determinó que todos los lados miden 20 centímetros, por ello la profesora Vanessa le preguntó a la estudiante si es posible concluir que todos sus lados son iguales, a lo que la estudiante respondió de manera afirmativa.

Para continuar con la identificación del cuadrilátero A, se le solicitó a la estudiante que, haciendo uso del transportador, midiera cada uno de los ángulos. La niña decidió primero medir el ángulo con textura de puntos y determinó que su medida es $100°$, posteriormente el ángulo con textura de rayas determinó que su medida es $80°$ y finalmente, realizó el mismo proceso con los ángulos restantes (Imagen 87). Una vez concluido el proceso de medir lados y ángulos del cuadrilátero A, la estudiante afirmó en primer lugar que este correspondía a un cuadrado, ya que tenía todos sus lados iguales, la profesora Karen le solicitó a la estudiante que recordara la definición completa de cuadrado y que la contrastara con la figura que acababa de medir, la niña estableció que el cuadrilátero no tiene ángulos rectos, por lo cual no corresponde a un cuadrado sino a un rombo, como se evidencia en el Fragmento 2.

Fragmento 2. Desarrollo de la tarea 2 Laura

Profesora Karen	Entonces teniendo en cuenta todo eso que vimos que mediste y acordándote de las definiciones que te dije ahorita de los cuadriláteros, ese cuadrilátero que tienes en la mano ¿qué es? ¿Un cuadrado, un rectángulo o un rombo?
Laura	Cuadrado
Profesora Karen	Un cuadrado ¿por qué Laura? ¿Cómo es la definición de cuadrado? ¿Qué tiene el cuadrado?
Profesora Vanessa	¿Cuáles eran las condiciones? Tiene dos
Laura	Los lados son iguales
Profesora Karen	¿Y qué pasa con los ángulos? ¿Cómo debían ser los ángulos de un cuadrado?
Laura	Rectos
Profesora Karen	Y que sean rectos ¿qué quiere decir? ¿Cuánto miden?
Laura	Noventa
Profesora Karen	Entonces ya recordamos la definición de cuadrado ¿cierto?
Profesora Vanessa	Este cuadrilátero que tienes acá (señalando el cuadrilátero A) ¿es un cuadrado? O ¿qué tipo es?
Profesora Karen	Revisemos lo que vimos en este cuadrilátero que tienes en la mano
Profesora Vanessa	¿Cómo era la medida de todos los lados?
Laura	Veinte
Profesora Karen	O sea, son ¿cómo?
Laura	Iguales

Profesora Karen	Listo y ¿qué pasaba con los ángulos? ¿Cómo son los ángulos de ese cuadrilátero que tienes en la mano?
Profesora Vanessa	¿Cuánto miden?
Profesora Karen	¿Unos cuánto miden?
Laura	Cien
Profesora Karen	¿Y los otros?
Laura	Ochenta
Profesora Karen	Entonces ¿los ángulos que tiene ese cuadrilátero son rectos?
Laura	No
Profesora Karen	Entonces ¿Puede ser un cuadrado?
Laura	No
Profesora Karen	Listo, entonces cuadrado ya descartado, ahora ¿qué será? ¿Un rectángulo o un rombo?
Laura	Un rombo
Profesora Karen	¿Por qué Laura? ¿Cómo son los rombos?
Laura	Los lados son iguales, pero los ángulos no son rectos

Aunque Laura logró determinar el tipo de cuadrilátero al que correspondía, no se evidenció que identificara la propiedad que posee el rombo de tener ángulos opuestos congruentes, además ya que se definió el rombo del material como un cuadrilátero que tiene sus lados congruentes, pero no tiene los ángulos rectos, se logró percibir que la niña no considera que el cuadrado puede ser un rombo también. Por consiguiente, las profesoras le explicaron a la estudiante, tomando como punto de partida las medidas de los ángulos ya tomadas, que en un rombo sus ángulos opuestos son congruentes.

Luego, se realizó el reconocimiento del cuadrilátero C. Inicialmente, se le entregó a la estudiante la regla para que midiera los lados del cuadrilátero, la niña empezó nombrando el lado que deseaba medir, haciendo uso de las texturas de los ángulos, así manifestó que el lado puntos - rayas medía 22 centímetros, después midió el lado opuesto a este (liso - cuadros) determinando que tenían la misma longitud, finalmente, midió los otros dos lados opuestos, los cuales eran congruentes a los dos primeros, es decir, que en el cuadrilátero C todos sus lados medían 22 centímetros, por lo tanto, la estudiante concluyó que sus lados son iguales. Posteriormente, se le entregó el transportador para que realizara el proceso de medir cada uno de los ángulos, concluyendo que todos medían 90°, es decir todos son iguales. Las profesoras realizaron un recuento de las características que se encontraron en el cuadrilátero, con estas la estudiante determinó que este es un cuadrado, sustentando lo percibido con la definición.

A continuación, se entregó el cuadrilátero B, para que se realizara el mismo proceso que con los anteriores (Imagen 88), analizando las características que poseían los lados, luego de medirlos, se pudo notar que la estudiante comprendió que poseía dos pares de lados iguales, aunque no fue evidente para ella que dichos lados eran los opuestos, por ello las profesoras realizaron una explicación más detallada valiéndose de la manipulación de la pieza, con el fin de aclarar cuáles eran los lados opuestos del cuadrilátero. Luego de medir cada uno de los ángulos, la estudiante logró concluir que todos medían 90°, por lo tanto, eran rectos. De esta manera determinó que el cuadrilátero B era un rectángulo, apoyándose en la definición que ya se había estudiado.

Imagen 88. *Proceso de medir lado del rectángulo*

Imagen 89. *Reconocimiento de los tres tipos de cuadriláteros*

Con el fin de diferenciar los tres cuadriláteros analizados anteriormente, se organizaron uno al lado del otro en el orden en el que fueron estudiados, ella reconoció cada uno de estos y mencionó nuevamente el tipo de cuadrilátero que era y sus características, afirmó que todos eran diferentes. Para finalizar, se le hizo entrega del cuadrilátero D, indicándole a la estudiante que debía medir los lados y ángulos de este para determinar qué tipo de cuadrilátero es, la niña al obtener las medidas concluyó que este cuadrilátero no correspondía a ninguna definición de las anteriormente mencionadas, con esto la profesora Karen le confirmó que el cuadrilátero D no cumple con las características para ser rombo, rectángulo o cuadrado, sin embargo, sí es un cuadrilátero. Realizando un recuento de los cuatro cuadriláteros estudiados, se concluyó la tarea.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Danna:

Para iniciar la tarea, primero se le solicitó a la estudiante que, diera una definición de cuadrilátero, ella afirmó que es una figura con cuatro lados y cuatro ángulos. Posteriormente, la profesora Vanessa le explicó cuáles son los lados opuestos de uno de los cuadriláteros, la estudiante manifestó que reconocía los lados y ángulos opuestos y consecutivos de un cuadrilátero, entonces las profesoras le solicitaron que hiciera referencia a estos, la niña de manera asertiva los señaló. Después, se le preguntó acerca de la clasificación de los ángulos y Danna solamente reconoció el ángulo recto, definiendo este como aquel que mide 90° y forma una "L" demostrando que posee alguna noción de perpendicularidad. Para complementar esto, la profesora Vanessa le explicó la clasificación de estos (agudo, obtuso y llano).

Comenzando con la caracterización de los tres tipos de cuadriláteros, se le preguntó a la estudiante qué es un cuadrado, ya que dijo que era el tipo de cuadrilátero que más reconocía, afirmó que, sin importar la posición de este, siempre va a tener la misma forma, se infiere que lo relaciona con la característica de que al ser un polígono regular visualmente es la misma figura. Posteriormente, la profesora Vanessa le preguntó a Danna sobre la definición de rectángulo, ella hizo referencia a la congruencia de los lados opuestos, la profesora Vanessa complementó esta noción explicando que este cuadrilátero tiene los cuatro ángulos rectos.

Enseguida, se hizo referencia al rombo, en este momento se evidenció que la estudiante relacionaba el rombo y el cuadrado, ya que hizo referencia a que compartían algunas características, pero los diferenciaba su posición; la profesora Vanessa realizó la explicación de la definición de rombo, enfatizando que, sin importar la posición, las características que convierten a este cuadrilátero en rombo no se alteran. Para culminar las definiciones de los cuadriláteros, se realizó la explicación de las características del cuadrado. La profesora Karen le preguntó a la estudiante sobre la diferencia entre rombo y cuadrado, la niña demostró no reconocer esta diferencia, entonces, las profesoras le explicaron que en el rombo los ángulos no necesariamente son rectos; ante esto, la estudiante hizo la distinción que en el rombo los lados miden lo mismo y los ángulos no importa su medida, mientras que en el cuadrado los lados también miden lo mismo pero sus ángulos deben ser rectos.

Previamente, al reconocimiento de los cuadriláteros, se realizó un recuento corto de las características de cada tipo de cuadrilátero, como se muestra en el Fragmento 3, allí se logra evidenciar que la estudiante se apropió de las definiciones y comunicó estas apoyándose de la visualización de objetos que tengan la forma de cada cuadrilátero.

Fragmento 3. Desarrollo de la tarea 2 Danna

Profesora Vanessa	Rectángulo ¿cómo es?
Danna	Que tiene ángulos rectos y los lados opuestos de arriba y abajo van a medir lo mismo y lo mismo pasa con los lados opuestos de los lados.
Profesora Vanessa	¿Cómo es el rombo?
Danna	Los lados siempre deben medir lo mismo y no importa la manera o la posición sin que los…, o sea, no importa si cambia la posición, pero lo que es más importante es que los lados midan lo mismo.

Profesora Vanessa	Lo importante es que los lados midan lo mismo. Y, ¿qué sabemos de los ángulos?
Danna	Que no importan
Profesora Vanessa	¿Cómo es un cuadrado?
Danna	Que tiene ángulos rectos y los lados deben medir lo mismo.

Luego, se hizo entrega del cuadrilátero A, dando la indicación de medir sus lados y ángulos para determinar, qué tipo de cuadrilátero es. La niña midió primero los lados, el primero le dio una medida de 20 centímetro; el segundo, midió 20 centímetros también y los demás midieron lo mismo. Teniendo en cuenta estas medidas, la profesora Vanessa le preguntó, "solamente conociendo la medida de los lados, ¿qué cuadrilátero podría ser?", la niña respondió que un rombo o un cuadrado.

Enseguida, Danna midió los ángulos (Imagen 90) y estableció que dos medían $80°$ y los otros dos $100°$. Al preguntarle ¿qué tipo de cuadrilátero es? La niña afirmó que es un rombo, porque los ángulos no miden lo mismo, pero los lados sí. Para explicar la propiedad del rombo (ángulos opuestos congruentes), las profesoras realizaron énfasis en las medidas que obtuvo la estudiante de los ángulos, haciéndole notar que los pares de ángulos que son opuestos miden lo mismo.

Imagen 90. *Proceso de medir ángulo del cuadrilátero A*

Imagen 91. *Proceso de medir lado del cuadrilátero B*

Después se realizó la identificación del cuadrilátero B, para ello se le entregó la figura, la regla y el transportador a la estudiante, para que realizara el proceso de medir. Inicialmente, la niña midió los lados (Imagen 91) y determinó que uno de estos medía 26 centímetros, el siguiente medía 15 centímetros y el próximo 28 centímetros. Al determinar esta tercera medida, se retomó el proceso en los lados anteriores, ya que las profesoras determinaron que había ocurrido un error. La niña midió de nuevo y obtuvo las medidas correctas.

Posteriormente, la estudiante se dispuso a medir los ángulos del cuadrilátero B, determinó que todos medían 90°, concluyendo así que esta pieza correspondía a un rectángulo; ya que todos sus ángulos son rectos y los lados opuestos son congruentes. Continuando con el cuadrilátero C, la niña determinó que todos los lados medían 22 centímetros y todos los ángulos son rectos, infiriendo que este cuadrilátero correspondía a un cuadrado.

A continuación, se solicitó a la estudiante determinar qué tipo de cuadrilátero era el cuadrilátero D. Danna conjeturó que por la forma que posee es un rombo, para verificar esto, la profesora Vanessa le pidió medir sus lados y ángulos. Al realizar la toma de medida de los lados ella notó que todos tienen diferente medida, por lo tanto, decidió medir los ángulos para confirmar, que este no es un rombo. Al mirar la medida de los ángulos (Imagen 92), notó que no cumple con las características de los cuadriláteros estudiados y mostró confusión. Entonces la profesora Karen le sugirió recordar una a una las definiciones y así identificarlo. La niña primero descartó el cuadrado, porque las medidas de sus lados no son iguales y todos sus ángulos no son rectos; en segundo lugar, descartó el rombo ya que todos los lados miden diferente y finalmente, descartó el rectángulo porque los lados opuestos no tienen la misma medida.

Imagen 92. *Proceso de medir ángulo en el cuadrilátero D*

Imagen 93. *Reconociendo algunos tipos de cuadriláteros*

Para finalizar, la profesora Vanessa ordenó los cuatro cuadriláteros, como se muestra en la Imagen 93 para realizar un recuento de los cuadriláteros estudiados. La niña reconoció cada figura y realizó un resumen de las definiciones y las propiedades.

5.3 Descripción del desarrollo de la tarea 3: Congruencia

Para esta tarea, Laura (estudiante con discapacidad visual) tardó aproximadamente una hora en desarrollarla en su totalidad, mientras que Danna (estudiante normovidente) tardó veinte minutos en ejecutarla. Aún con la diferencia de tiempo, se pudo concluir que las dos estudiantes alcanzaron los objetivos propuestos para la tarea, ya que se apropiaron de la definición de congruencia de segmentos, ángulos y polígonos. Adicionalmente, se realizó una modificación a la tarea planeada, incluyendo durante la implementación un momento, en el cual se les proporcionaron a las estudiantes tres figuras, las cuales incumplían con alguna o varias características de la definición de polígonos congruentes.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Laura:

El desarrollo de la tarea inició con el repaso de las piezas que forman parte del material (regla, transportador, segmentos y ángulos), de manera rápida se recordó la funcionalidad de estas. Luego, la profesora Karen, realizó preguntas para indagar sobre la noción de congruencia que tenía Laura, sin embargo, ella afirmó no reconocer cuando dos objetos son congruentes. Ante esta respuesta, se explicó la relación que existe entre la igualdad y la congruencia con ejemplos. Con esto, la estudiante empezó a identificar que dos segmentos y ángulos son congruentes si son iguales, es decir, si miden lo mismo.

Luego, se le proporcionó a la estudiante tres segmentos (Imagen 94), dos de ellos congruentes. En primer lugar, se le solicitó que reconociera los dos primeros, la niña al manipularlos notó que estos miden lo mismo y que, por lo tanto, eran congruentes. En segundo lugar, se le solicitó que explorara el primer y tercer segmento, ella evidenció que medían diferente, entonces no eran congruentes. En tercer lugar, se le pidió que comparara el segundo y tercer segmento, ella nuevamente determinó que no eran congruentes. Finalmente, se le entregó los tres segmentos y ella afirmó con seguridad que dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida, apoyándose en los ejemplos dados.

Imagen 94. *Segmentos congruentes y no congruentes*

Imagen 95. *Verificación de ángulos congruentes*

Posteriormente, se le entregaron a la estudiante tres ángulos, dos de ellos congruentes. La profesora Karen le preguntó a la estudiante las características que deben tener los ángulos congruentes, la niña respondió que deben ser iguales, para verificar esto, la profesora Karen le pidió que midiera los ángulos haciendo uso del transportador. La niña midió cada ángulo (Imagen 95) y determinó que uno medía 80° y los otros dos 90°. Entonces, se organizaron los tres ángulos, en el orden que fueron medidos, con esto, la profesora Karen le preguntó sobre cuáles de estos eran congruentes, obteniendo por respuesta que el primer y tercer ángulo, ya que estos medían 90°.

En seguida, se le preguntó a la estudiante si era posible tener cualquier tipo de figura congruente (triángulos, cuadriláteros, polígonos, etc.), la niña respondió de manera afirmativa, al preguntarle sobre las características que deben tener los polígonos para ser congruentes, ella respondió que deben ser iguales, pero no hizo distinción de lo que deben tener igual. Posteriormente, se le entregó a la estudiante los tres triángulos (dos de ellos congruentes), se le solicitó que describiera las características que tenían en común los tres, por lo tanto, Laura respondió que todos tenían tres lados y tres ángulos.

Luego, la profesora Karen le preguntó si era suficiente que todos tuvieran tres lados y tres ángulos para que fueran congruentes, la niña manifestó que no sabía. Para que la estudiante comprendiera las condiciones para ser congruentes, se le solicitó que solapara dos de los triángulos (los cuales no eran congruentes); al realizar esta acción, la niña notó que en ninguna posición estas figuras encajaban perfectamente, además que uno de los dos era más grande. Con esto, la profesora Karen le preguntó si estos dos triángulos eran congruentes, Laura respondió que no.

Posteriormente, se repitió el mismo proceso con otros dos triángulos, los cuales no eran congruentes, la estudiante en la exploración al solaparlos (Imagen 96) evidenció que estos tampoco encajaban, entonces, no eran iguales. En seguida, la profesora Karen le explicó que estos dos no son congruentes porque la medida de sus lados y ángulos es diferente. Con esto, se entregó la tercera pareja de triángulos, la niña percibió que estos dos sí correspondían y, por lo tanto, concluyó que eran iguales. La profesora Karen le preguntó sobre la razón de esta igualdad y la estudiante hizo referencia a que quedó uno sobre el otro ubicados perfectamente. Luego, se realizó la pregunta sobre la relación de congruencia, Laura reconoció que para que dos triángulos sean congruentes, estos deben tener la misma cantidad de lados y ángulos, además de que la medida de los lados y los ángulos debería ser igual.

Imagen 96. *Solapando triángulos no congruentes*

A continuación, se le preguntó a la estudiante, si era posible que dos cuadriláteros fueran congruentes, ella respondió que sí es posible que existan los cuadriláteros congruentes, aunque no reconoció las características de estos. Ante esta respuesta, la profesora Karen se valió de la definición de triángulos congruentes para que la niña construyera la definición de cuadriláteros congruentes. Entonces, Laura afirmó que dos cuadriláteros eran congruentes, si tienen la misma cantidad de lados y si la medida de estos es igual, además de tener la misma cantidad de ángulos y que sus medidas coincidan. Por otra parte, para ejemplificar la definición de cuadriláteros congruentes, se le dio a la estudiante tres cuadriláteros (dos de ellos congruentes), por medio de la manipulación de cada uno, la niña notó que eran cuadriláteros reconociendo su número de lados y ángulos.

A partir de algunas preguntas, Laura mencionó que la primera condición (misma cantidad de lados y ángulos) para que fueran congruentes ya la tenían; al preguntarle si esta condición era suficiente, la niña respondió que no, ya que faltaba la igualdad de medidas de los lados y ángulos. Por lo tanto, se le solicitó que tomara dos y ubicara uno sobre el otro. La niña, intentó solaparlos y se evidenció dificultad para ello, ya que ella quiso que coincidiera de varias formas, sin tener éxito; al notar que no coincidían determinó que no eran iguales, entonces la profesora Karen le pidió que comparara cada uno de los lados, fue así como la niña se dio cuenta que ningún lado tenía la misma medida, por lo tanto, la estudiante afirmó que los cuadriláteros no eran congruentes.

Se realizó el mismo proceso para la siguiente pareja de cuadriláteros, determinando que tampoco eran congruentes, ya que carecían de la igualdad de medidas en sus lados y ángulos. En la última pareja de cuadriláteros, la niña logró hacerlos coincidir, entonces determinó que estos sí eran congruentes y explicó que cumplían con las tres condiciones para serlo. Enseguida, la profesora

Karen le preguntó a la estudiante si consideraba que polígonos de más lados podrían ser congruentes, obteniendo como respuesta que sí, mientras se cumplan las condiciones.

Después, se entregaron a la estudiante los pentágonos, como se muestra en la Imagen 97, en este momento se evidenció que ella reconocía este tipo de polígono. Al preguntarle acerca de las condiciones para obtener pentágonos congruentes, la niña respondió: "cinco lados, cinco ángulos y deben ser iguales los lados y los ángulos". En el momento de comparar cada pareja de polígonos, se determinó que los primeros no eran congruentes, al igual que los segundos, pero la tercera pareja sí. Por ende, se realizó la explicación de la definición de polígonos congruentes.

Imagen 97. *Solapando pentágonos*

Luego, se entregó a la estudiante tres figuras un triángulo, un cuadrilátero y un pentágono; la profesora Karen le preguntó si estos polígonos eran congruentes, Laura respondió que no, porque no cumplían con la primera característica, ya que uno tenía tres lados, el otro cuatro y el último cinco; demostrando comprensión de que los polígonos sólo pueden ser congruentes si son del mismo tipo.

Finalmente, se le entregaron dos cuadriláteros y un triángulo, la niña al identificarlos determinó que podían ser congruentes los dos cuadriláteros, es decir, descartó el triángulo por el número de lados. Las profesoras le preguntaron sobre las condiciones que faltaban verificar, la niña determinó que se debía revisar la medida de los lados y los ángulos, entonces los solapó y notó que si eran congruentes. Posteriormente, se realizó un repaso de las características de los segmentos, ángulos y polígonos congruentes; la estudiante en este momento manifestó cada una mencionando las condiciones necesarias.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Danna:

El desarrollo de la tarea inició preguntándole a la estudiante sobre la definición de congruencia que reconocía, la niña aseguró que esta palabra era nueva para ella, entonces se realizó una descripción de esta, apoyándose de ejemplos. Posteriormente, se hizo entrega de tres segmentos a la niña (dos de ellos congruentes), con esto, se le preguntó a Danna ¿cuáles de los tres eran congruentes?, ella señaló dos segmentos, asegurando que estos tenían el mismo largo y la misma cantidad de puntos, por ende, tenían la misma medida.

Después, la profesora Vanessa le solicitó que comparara las otras parejas de segmentos y hablara sobre la congruencia de ellas, la estudiante afirmó que no eran congruentes porque no tenían la misma medida. La profesora Vanessa le preguntó a la estudiante "¿cuándo dos segmentos son congruentes?", Danna respondió: "cuando tienen las mismas características de medida". Por lo tanto, se le solicitó a la niña que verificara la igualdad de medida de los dos segmentos congruentes; ella midió estos y los dos tenían una longitud de 29 centímetros (Imagen 98).

Imagen 98. *Verificando medida de segmentos congruentes*

Imagen 99. *Verificando medida de ángulos congruentes*

A continuación, se realizó el reconocimiento de los ángulos congruentes y no congruentes, para ello se le entregaron los tres ángulos a la estudiante y se preguntó cuáles de los tres eran congruentes. Por consiguiente, la niña hizo uso del transportador, midió dos ángulos y notó que uno era de 90° y el otro de 100°, por lo tanto, no eran congruentes; al medir el tercer ángulo notó que este era de 90° y entonces, era congruente con el primer ángulo (Imagen 99). En seguida, la profesora Vanessa le preguntó acerca de la congruencia de los ángulos de manera general, Danna afirmó que dos ángulos son congruentes si miden lo mismo, o sea, tienen los mismos grados.

Posteriormente, se le indicó a la estudiante que otras figuras también pueden ser congruentes como los polígonos. Para ejemplificar esto, se realizó la entrega de tres triángulos y se le preguntó acerca de las características en común, Danna inmediatamente notó que dos de estos eran iguales y el tercero era más pequeño; también que todos tenían tres ángulos y tres lados. Por consiguiente, la profesora Vanessa le preguntó si los dos triángulos que ella había dicho ser iguales, eran congruentes; a lo que la estudiante contestó que sí, porque eran iguales, al preguntarle a qué se refería como iguales, ella respondió que a la medida de los lados y los ángulos.

Luego, se realizó entrega de los tres cuadriláteros (dos de ellos congruentes), al hacer referencia a las características en común de las tres figuras, la niña mencionó los cuatro lados y los cuatro ángulos, que cada uno poseía. Tan pronto Danna mencionó esto, se le preguntó cuáles de los cuadriláteros eran congruentes, ella señaló dos de estos y resaltó que tenían las mismas medidas sus lados y sus ángulos. Dado que la estudiante comprendió el concepto de congruencia al solapar las figuras, se vio necesario realizar algunas aclaraciones para que la niña tuviera alguna noción de que la congruencia está dada si se cuenta con la correspondencia de lados y ángulos.

En seguida, se repitió el mismo proceso con los pentágonos, es decir, contar la cantidad de lados y solapar las figuras (Imagen 100) para verificar la congruencia, la estudiante desarrolló el proceso de manera satisfactoria. A modo de cierre, la profesora Vanessa entregó a Danna tres polígonos (dos cuadriláteros no congruentes y un pentágono), al preguntarle si algún par de estos eran congruentes, la niña respondió de manera negativa y mencionó las características que se incumplían, es decir, aunque dos compartían el mismo número de lados, ya que eran cuadriláteros, los lados y ángulos de estos no median lo mismo. Con esto se cerró el desarrollo de la tarea.

Imagen 100. *Verificación de pentágonos congruentes*

5.4 Descripción del desarrollo de la tarea 4: Criterios de congruencia de cuadriláteros

Para el desarrollo de esta tarea se logró evidenciar una diferencia considerable entre los tiempos que tardó cada una de las estudiantes, Laura (estudiante con discapacidad visual) empleó en total dos horas y cincuenta minutos, mientras que Danna (estudiante normovidente) una hora y cuarenta minutos. Cabe destacar que Laura invirtió cincuenta minutos en desarrollar solamente el primer momento de la tarea, por ello fue necesario realizar dos sesiones para culminarla completamente.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Laura:

La clase inició recordando la definición de congruencia de segmentos, ángulos y polígonos, las cuales se habían trabajado en la clase anterior. Para comenzar con la tarea de los criterios de congruencia, se hizo énfasis en la definición de congruencia de cuadriláteros y se explicó que los criterios de congruencia para cuadriláteros permiten construir o establecer esta relación de igualdad teniendo en cuenta menos características. Luego, se le proporcionaron los elementos del material, necesarios para realizar la construcción (cuadrilátero base, segmentos, ángulos, regla y transportador) de un cuadrilátero congruente al cuadrilátero D (cuadrilátero no especial).

Para iniciar con el proceso, se le solicitó a la estudiante que copiara un lado del cuadrilátero haciendo uso de la regla y un segmento, la niña realizó esta acción sin dificultad, en seguida se le explicó a la estudiante que para continuar de manera correcta la construcción, era necesario copiar la medida de uno de los ángulos correspondiente con alguno de los extremos del segmento ya copiado. Laura midió el ángulo y encontró el congruente a este dentro del paquete de los ángulos de TRALC, haciendo la lectura de la marca en Braille (Imagen 101), la estudiante manifestó que algunos números no eran claros para ella, por lo cual se rectificó la medida con el transportador.

Imagen 101. *Lectura de las marcas en Braille de los ángulos*

Imagen 102. *Verificación de la congruencia del cuadrilátero*

Después de unos minutos de exploración de las dos piezas, la estudiante logró encajarlos y se dispuso a copiar otro ángulo con orientación de la profesora Karen. De la misma manera, realizó el procedimiento con los lados y ángulos restantes para construir el cuadrilátero en su totalidad y realizar la revisión de la congruencia con el cuadrilátero base (Imagen 102). Se resalta que Laura usó el transportador en sentido horario (sentido contrario al que se le había enseñado) para tomar la medida de algunos de los ángulos, sin embargo, realizó el proceso de manera adecuada. Así, haciendo algunas aclaraciones sobre los cuadriláteros congruentes, se dio paso a realizar las tareas correspondientes a los criterios de congruencia.

En una sesión posterior, se inició con el repaso de la definición de criterio de congruencia de cuadriláteros. Para comenzar con la identificación de los criterios, se solicitó verificar la combinación lado – ángulo – lado (LAL) la estudiante copió uno de los lados (cuadros - liso) del cuadrilátero base, para continuar, las profesoras le preguntaron a Laura cuál ángulo era pertinente copiar, sin embargo, manifestó no saber, debido a esto, la profesora Karen aclaró que los ángulos que era posible copiar eran aquellos que se encontraban en los extremos del lado copiado, así, la estudiante decidió copiar uno de estos (ángulo cuadros) con ayuda del transportador y encontrar su equivalente en el paquete de ángulos del material, luego la estudiante quiso copiar el lado de liso - rayas, pero las profesoras le explicaron que esto no era posible, ya que este no era consecutivo al ángulo que ya se había copiado; por ello, la niña copió el lado de cuadros - puntos.

Una vez copiado LAL y haciendo uso del cartón con cinta, la estudiante reconoció cada una de las piezas copiadas y en simultáneo las que le correspondían en el cuadrilátero base. Luego, se le preguntó si la construcción era un cuadrilátero, a lo que afirmó que no, ya que hacían falta dos lados y tres ángulos, así, la profesora Karen le proporcionó los dos segmentos faltantes para completar la construcción del cuadrilátero. Inmediatamente, se le solicitó recordar las condiciones necesarias para que dos cuadriláteros sean congruentes, la estudiante las mencionó y determinó que se cumplía tener la misma cantidad de lados, pero también manifestó que faltaba realizar la verificación de la igualdad de la medida de los lados y ángulos de este. Al verificar la congruencia entre la construcción y el cuadrilátero base, Laura determinó que no eran congruentes ya que no se reflejaba la igualdad entre los lados y ángulos en su totalidad, puesto que la pieza no coincidía perfectamente en el interior (Imagen 103).

Imagen 103. *Verificación de LAL (Laura)*

Después, la profesora Vanessa le preguntó a Laura si consideraba que se debían copiar más piezas o menos piezas para que el criterio funcionara, ella respondió que era necesario copiar más piezas. Posterior a esto, se le solicitó examinar la combinación lado – ángulo – lado – ángulo – lado (LALAL), para ello midió y copió el primer lado (cuadros - puntos), a continuación, midió y buscó dentro del paquete de ángulos el que correspondía al ángulo puntos, luego determinó la medida del lado consecutivo a las piezas ya copiadas (puntos - rayas), en seguida copió el ángulo rayas, finalmente, la estudiante realizó el procedimiento de medir y copiar el último lado (rayas - liso).

Inmediatamente, la profesora Karen le preguntó cuáles eran las piezas que se habían copiado, enfatizando en la cantidad de lados y ángulos que hacían parte de la construcción. Por tanto, se le preguntó a la estudiante si lo construido hasta el momento era un cuadrilátero, a lo que respondió que no, ya que le hacía falta un lado, por ello, se le proporcionó el segmento faltante para que la estudiante encajara este en lo construido, para concluir que la figura correspondía a un cuadrilátero. Cuando la estudiante determinó que la figura correspondía a un cuadrilátero, se hizo un recuento de las piezas que habían sido copiadas, manteniendo el orden que se le indicó.

Una vez realizado este proceso, se le preguntó a Laura si los dos cuadriláteros ya eran congruentes (el construido y el cuadrilátero base) a lo que respondió que no sabía, ya que hacía falta verificar la igualdad de sus lados y ángulos, por lo tanto, se le pidió que intentara encajar el cuadrilátero base en el interior del construido (Imagen 104) y así, la estudiante logró concluir la congruencia, puesto que encajaban exactamente. De esta manera, se le preguntó a la estudiante si el criterio funcionaba para obtener o construir cuadriláteros congruentes, a lo que respondió que sí y por lo tanto la conjetura formulada por la estudiante de copiar más piezas también funcionaba.

Imagen 104. *Verificación de LALAL (Laura)*

Para continuar con la combinación lado – lado – ángulo – lado – ángulo (LLALA), se realizó una comparación, entre este y el criterio LALAL, con el fin de preguntar a la estudiante si consideraba que LLALA era también un criterio de congruencia, la discusión se centró en notar que, aunque las dos construcciones hacían uso de la misma cantidad de lados y ángulos, las diferenciaba el orden en el que debían ser copiados sus elementos, Laura ante esta pregunta respondió LLALA le permitiría construir un cuadrilátero congruente al cuadrilátero base, ya que no consideró que el orden fuera relevante.

Para comprobar la conjetura que había hecho la estudiante, se inició el procedimiento de medir y copiar cada uno de los lados y ángulos, para encajarlos siguiendo el orden que se había determinado y se le preguntó si la construcción correspondía a un cuadrilátero, ella respondió que no, ya que hacía falta encajar un lado más, entonces se dispuso a agregar este y la profesora Karen, le solicitó realizar la verificación de las medidas encajando el cuadrilátero base con la construcción (Imagen 105). Al intentar encajarlos, la estudiante notó que no era posible, por lo tanto, determinó que, aunque se utilizaba la misma cantidad de lados que en el anterior criterio, las medidas de las piezas faltantes no eran iguales a las del cuadrilátero base, llegando a la conclusión de que la conjetura que había hecho Laura, sobre que también iba a ser un criterio de congruencia, era falsa ya que el orden de los elementos que se utilizan para construir el cuadrilátero sí importa.

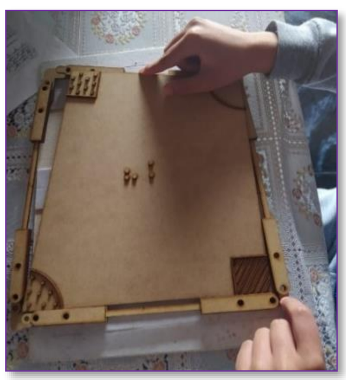


Imagen 105. *Verificación de LLALA (Laura)*

Para iniciar con la combinación ángulo – lado – ángulo – lado – ángulo (ALALA), se compara esta con el criterio que ya se había identificado anteriormente, con el fin de que la estudiante conjeturara sobre la veracidad, teniendo en cuenta las similitudes y diferencias entre estas dos (Fragmento 4).

Fragmento 4. Desarrollo de la tarea 4 Laura

Profesora Karen	Quiero que copiemos: ángulo, lado, ángulo, lado, ángulo. ¿Cuántas piezas estaríamos copiando ahí?
Laura	Cinco.
Profesora Karen	¿Cuántos lados?
Laura	Dos.
Profesora Karen	¿Cuántos ángulos?
Laura	Tres
Profesora Vanessa	¿Se parece al que sí nos sirve o no se parece?
Profesora Karen	El que sí nos sirvió fue: lado, ángulo, lado, ángulo, lado. ¿Cuántos lados copiamos?
Laura	Tres.
Profesora Karen	¿Cuántos ángulos?
Laura	Dos.
Profesora Karen	Y en este nuevo que te dije, ¿cuántos ángulos copiamos?
Laura	Tres
Profesora Karen	¿Cuántos lados?
Laura	Dos.
Profesora Karen	¿Se parecen?
Laura	Sí, en que se copian cinco fichas, tres lados y dos ángulos en el primer criterio y tres ángulos y dos lados en este.
Profesora Karen	¿En qué se diferencian?
Laura	En que en el anterior copiamos fue tres lados y en este sólo dos y en el anterior dos ángulos y en este tres.
Profesora Vanessa	Y ¿qué pasa con el orden?
Laura	No se parece el orden, no se parece porque en el anterior empezábamos con un lado y en este empezamos con un ángulo, entonces no se parece. Pero, se parecen en que va intercalado un lado y un ángulo.
Profesora Karen	Ahí vemos que hay cosas en que se parecen y otras en que no. Entonces ¿tú consideras que este criterio funciona o no funciona?
Profesora Vanessa	Teniendo en cuenta todas las cosas parecidas que vimos ¿funcionaría este criterio?
Laura	Sí, por lo parecido puede funcionar

Luego de esto, la estudiante inició el proceso de medir y copiar cada una de las piezas que se le solicitaba para realizar la construcción. Después, la niña reconoció que hacía falta encajar dos segmentos más para completar el cuadrilátero y se dispuso a agregarlos. Teniendo en cuenta que ya se cumplía la condición de igualdad de lados para la congruencia, se inició el reconocimiento de la igualdad de medida de los lados y ángulos de la construcción mediante el encaje con el cuadrilátero base, determinando la igualdad entre estos (Imagen 106). Así, se evidenció que ALALA es un criterio de congruencia y que la propuesta por Laura era verdadera.

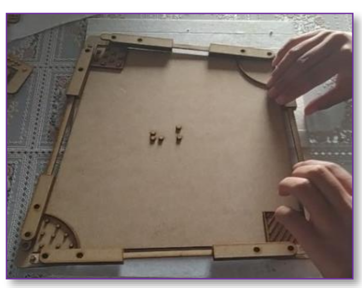


Imagen 106. *Verificación ALALA (Laura)*

Posteriormente, se presentó a la estudiante la combinación lado – ángulo – lado – lado – lado (LALLL) y se le preguntó si consideraba que este era un criterio de congruencia, Laura respondió: “este criterio no va a funcionar porque no sabemos qué va a pasar con la medida de los ángulos y es difícil que coincidan exactamente”, para verificar la conjetura, se empezó a copiando las piezas que eran necesarias, una vez terminada esta construcción, la profesora Karen le preguntó si ya cumplía la primera condición para determinar la congruencia (misma cantidad de lados), la estudiante identificó que como se habían copiado los cuatro lados, ya la cumplía. Entonces, se decidió encajar el cuadrilátero base en la construcción para identificar qué pasaba con la medida de los ángulos que no se habían copiado, al realizar esta acción, se logró apreciar que las condiciones para ser congruentes se cumplían, obteniendo así que LALLL sí es un criterio de congruencia y, por lo tanto, la propuesta de Laura era falsa.

Para finalizar la intervención, se hizo un recuento de los tres criterios de congruencia que se identificaron a lo largo del desarrollo de la tarea, evidenciando que en los tres criterios se copiaban cinco piezas y, concluyendo que es probable que determinado caso funcioné si se tienen que copiar al menos cinco piezas y que el orden en el que se copian estas sí importa. Así mismo, se evidenció la utilidad de los criterios de congruencia, ya que minimiza los elementos necesarios para obtener el cuadrilátero congruente.

Imagen 107. *Verificación LALLL (Laura)*

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Danna:

Para empezar, se realizaron algunas preguntas a la estudiante para que recordara el concepto de congruencia de polígonos, ante esto, Danna mencionó la igualdad de medida de los lados y ángulos; adicionalmente, las profesoras le aclararon la otra condición: igual cantidad de lados. Posteriormente, se precisó la definición de cuadriláteros congruentes, ella dijo que dos cuadriláteros eran congruentes si tenían cuatro lados que midieran lo mismo y cuatro ángulos que fueran iguales. También, las profesoras realizaron la explicación de lo que es un criterio de congruencia, tomando como punto de partida las congruencias trabajadas en el desarrollo de la tarea anterior.

En seguida, la profesora Vanessa le indicó a la estudiante que midiera un lado del cuadrilátero D (cuadrilátero no especial) y copiara esta medida en un segmento, en este momento, se observó que la niña realizó esta acción haciendo uso de la regla y del cuadrilátero en simultáneo, como se muestra en la Imagen 108. Inmediatamente, se le pidió a la estudiante que seleccionara alguno de los ángulos, que se forman en los extremos del segmento que midió anteriormente; ella señaló uno de estos, lo midió e identificó el ángulo que tenía la misma medida del paquete de ángulos.

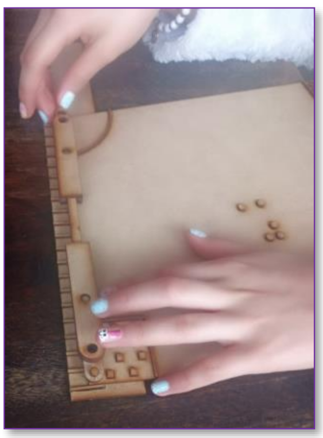


Imagen 108. *Copiado de medida de lado*

Imagen 109. *Encaje del ángulo sobre el segmento*

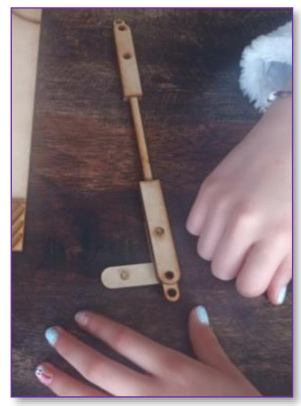


Imagen 110. *Encaje del segmento sobre el ángulo*

Al solicitarle a la estudiante unir las dos piezas, para lograr construir el cuadrilátero, la niña encajó el ángulo ubicándolo sobre el segmento (Imagen 109), por lo tanto, las profesoras, aunque validaron esta acción, hicieron la sugerencia de ubicar el segmento sobre el ángulo, como se puede observar en la Imagen 110, para facilitar el encaje del segmento consecutivo.

Luego, la estudiante copió y encajó el lado consecutivo al ya antes copiado, en el ángulo que se tenía. A continuación, decidió copiar el ángulo que se encontraba en el otro extremo del primer segmento copiado (ángulo sin textura); al medir el ángulo del cuadrilátero Danna lo ubicó, realizando la abertura en sentido horario en el transportador, al contar las marcas, se evidenció que la niña tomó la primera marca como 10° y no como 0°, por ello, la profesora Vanessa le recordó que, al realizar este proceso, se debía contar la marca inicial como 0°; así, la estudiante midió nuevamente de manera correcta el ángulo, encontrando este dentro del paquete de ángulos del material.

En el momento de encajar el ángulo, Danna no reconoció el sentido en el que debía ir ubicado en la figura construida. Para aclarar esto, se le solicitó a la niña que comparara el cuadrilátero base con lo que se estaba construyendo y así ubicar de manera correcta el ángulo; por ello se corrigió la posición de este. Posteriormente, se continuó con el proceso de copiar otro lado, luego de esto, se encajó el lado restante y así se construyó el cuadrilátero en su totalidad (Imagen 111). De este modo, la profesora Vanessa le preguntó a la estudiante si el cuadrilátero construido era congruente al base, ella respondió que sí (guiándose por su forma), ya que tenían la misma cantidad de lados y la medida de los lados y los ángulos, que no fueron copiados, aparentemente eran iguales. Para verificar si era correcto, se pidió a la estudiante que encajara el cuadrilátero base en el interior del construido, teniendo en cuenta la correspondencia entre los lados y ángulos copiados; ella realizó esta acción y comprobó que efectivamente eran congruentes.

Imagen 111. *Cuadrilátero construido y cuadrilátero base*

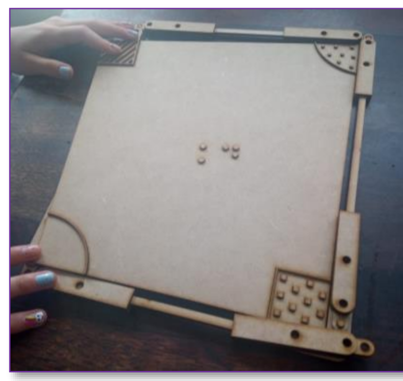


Imagen 112. *Verificación de LAL (Danna)*

Para dar paso al otro momento de la tarea, las profesoras mencionaron la necesidad de contar con criterios que permitieran construir cuadriláteros congruentes, sin tener que copiar los cuatro ángulos y los cuatro lados. En seguida, la profesora Karen, le pidió a la estudiante que copiara un lado, un ángulo y un lado del cuadrilátero base, haciendo la aclaración de que estas piezas deben ser consecutivas. Danna decidió copiar el lado de puntos - cuadros, luego, el ángulo cuadros, donde se evidenció que ella solamente medía el ángulo del cuadrilátero, pues reconocía a simple vista el que le correspondía del paquete de ángulos, y por último el lado adyacente a este. Una vez se encajaron las piezas, la profesora Vanessa preguntó si lo construido era congruente al cuadrilátero, inmediatamente, la estudiante respondió que no, porque no tenían la misma cantidad de lados, pues a la construcción le faltaban dos lados y tres ángulos.

Para terminar de construir el cuadrilátero, se le solicitó que con ayuda de dos segmentos cerrara la figura, valiéndose del encaje entre estos. Una vez construido el cuadrilátero, Danna realizó el proceso de verificación (ubicar el cuadrilátero base en el interior del construido) como se puede observar en la Imagen 112. Dado que el cuadrilátero base no encajó en el construido, la estudiante concluyó que estos no eran congruentes, argumentó que, aunque poseían la misma cantidad de lados, no tenían la misma cantidad de ángulos; ya que sólo tomó en cuenta el que fue copiado, ante esto, la profesora Vanessa le explicó que, en las uniones de los segmentos también se forman ángulos.

A continuación, las profesoras le preguntaron cuáles eran las piezas de las que se tenía certeza de la igualdad en la medida, la niña respondió que, los dos lados y el ángulo que habían sido copiados anteriormente; por otra parte, la estudiante afirmó que, los lados y ángulos restantes no tenían la misma medida, puesto que el cuadrilátero no encajaba. Por lo tanto, lado – ángulo – lado no sirve para construir cuadriláteros congruentes. En seguida, la profesora Karen le preguntó si para obtener cuadriláteros congruentes era necesario copiar más o menos piezas, Danna supuso que se necesitaba copiar más piezas.

Después, la profesora Vanessa le informó a la estudiante que se iba a realizar la construcción de la combinación lado – ángulo – lado – ángulo – lado (LALAL), por lo tanto, la niña se dispuso a copiar un lado y un ángulo; para lograr mantener fija la construcción se hizo uso de una base con cinta, en la que se podían pegar las piezas. Así, Danna copió y encajó las demás piezas indicadas, asegurándolas en la base. Enseguida, se le preguntó a la estudiante, si la construcción era congruente al cuadrilátero base, ella respondió que sí, ante esto se le recordó la primera condición para que dos polígonos sean congruentes (cantidad de lados), así, contó la cantidad de lados de las piezas y como le faltaba un lado a la construcción, descartó la congruencia.

Para completar el cuadrilátero construido, la estudiante encajó el último segmento de la figura. Como ya cumplía con la primera condición, se centró la atención en verificar la igualdad de medida de los lados y los ángulos (Imagen 113). Ya que el cuadrilátero base coincidió exactamente en el interior del construido, la niña evidenció la congruencia de los lados y ángulos, aun cuando no se habían copiado la totalidad de piezas, concluyendo que LALAL sí es un criterio de congruencia. También, se aclaró que era correcta la conjetura que Danna había mencionado: para obtener cuadriláteros congruentes es necesario copiar más de tres piezas.

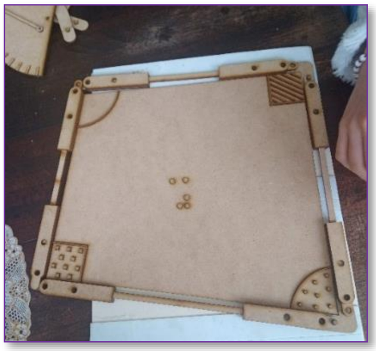


Imagen 113. *Verificación de LALAL (Danna)*

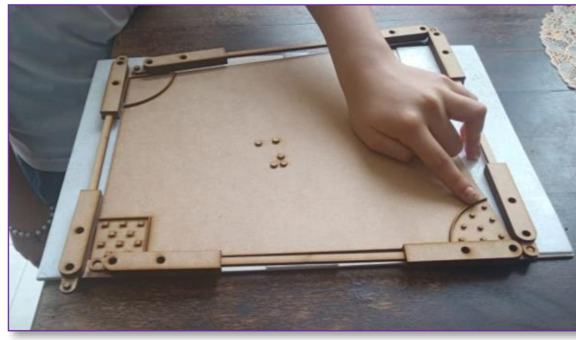


Imagen 114. *Verificación de LLALA (Danna)*

Posteriormente, se inició la exploración de la combinación lado – lado – ángulo – lado – ángulo (LLALA), la niña copió las piezas en el orden indicado de manera satisfactoria. Entonces, las profesoras le preguntaron si esta construcción era congruente al cuadrilátero, la estudiante manifestó que faltaba un lado y se dispuso a ubicarlo. Cuando el cuadrilátero estaba completo, la profesora Vanessa preguntó si eran congruentes, Danna dijo que sí, sin argumentarlo. Por lo tanto, se le solicitó que encajara el cuadrilátero base en el interior del construido. En este momento, se evidenció que el cuadrilátero base no coincidió con el otro, por lo tanto, ella percibió las partes que no eran congruentes (Imagen 114) y afirmó que LLALA no es un criterio de congruencia. Además, comparando LALAL y LLALA, se preguntó si la cantidad de piezas y el tipo de estas influía en la veracidad del criterio, a lo que la estudiante respondió que, la cantidad de piezas no importaba, pero el tipo sí (sugiriendo copiar más ángulos).

En seguida, se inició la combinación ángulo – lado – ángulo – lado – ángulo (ALALA), para ello, Danna copió las piezas correspondientes encajándolas de manera correcta. Al preguntarle si lo construido era congruente al cuadrilátero base, ella mencionó que no, ya que, faltaban dos lados; entonces se completó la figura. Nuevamente, se preguntó sobre la congruencia de los dos cuadriláteros, la estudiante afirmó que estos eran congruentes, porque tienen la misma cantidad de lados y ángulos, además la medida de estos es igual y se podía comprobar por medio de ALALA; entonces se le solicitó que verificara, ella notó que coincidían perfectamente (Imagen 115) y evidenció que ALALA es un criterio de congruencia.

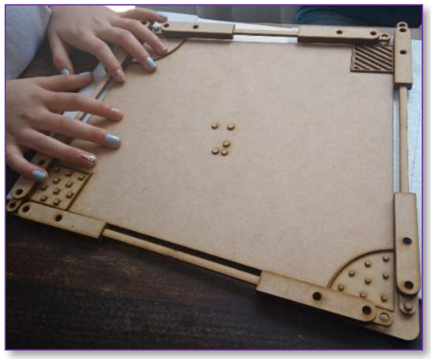


Imagen 115. *Verificación de ALALA (Danna)*

Por último, se realizó el mismo proceso para la combinación lado – ángulo – lado – lado – lado (LALLL), antes de iniciar el proceso de construcción, se realizó un sondeo de los criterios trabajados anteriormente y la estudiante conjeturó que LALLL no era un criterio de congruencia debido a que se solicitaba copiar lados consecutivos sin tener en cuenta los ángulos entre estos, como se evidencia en el Fragmento 5.

Fragmento 5. Desarrollo de la tarea 4 Danna

Profesora Karen	Entonces los que no están funcionando, no son criterios y los que sí, esos sí son criterios.
Profesora Vanessa	Hasta el momento ¿cuáles criterios llevamos?
Danna	Lado – ángulo – lado – ángulo – lado y ángulo – lado – ángulo – lado – ángulo.
Profesora Vanessa	Y ¿cuáles rechazados?
Danna	Lado – ángulo – lado y lado – lado – ángulo – lado – ángulo.
Profesora Vanessa	Vamos a hacer el siguiente, que es: lado – ángulo – lado – lado – lado.
Profesora Karen	¿Crees que va a funcionar?
Danna	Pues es que, como ahí en lo último queda lado y lado consecutivo, no creo que funcione.
Profesora Karen	¿Tú crees que para que funcione debe quedar un ángulo en medio? O sea, debería terminar como lado – ángulo – lado.
Danna	Sí.
Profesora Vanessa	Entonces, Danna dice que sí hay lados consecutivos el criterio no funciona.

Intentando comprobar la conjetura de Danna, se inició el proceso de copiar las piezas correspondientes, en la Imagen 116 se puede observar el encaje óptimo de los segmentos sin necesidad de usar los ángulos del material. Una vez construido el cuadrilátero, se le preguntó a la niña si los dos eran congruentes, ella continuó afirmando que no, entonces la profesora Karen le recordó las condiciones para ser congruentes y se le solicitó que verificara, ubicando el cuadrilátero base en el interior del construido; al percibir que coincidían exactamente, la estudiante manifestó que eran congruentes. Para que ella notara que su conjetura fallaba, las profesoras realizaron un repaso de las piezas copiadas, con esto afirmó que su conjetura fallaba porque:

“los ángulos como ustedes habían dicho (refiriéndose a las profesoras), que cuando dos lados se entrelazan uno encima de otro, es como si formaran un ángulo, entonces al formar el ángulo, ya no sería necesario tener los ángulos aquí puestos (señalando los vértices)”.

Imagen 116. *Encaje de segmentos*

Para complementar ello, la profesora Vanessa, realizó la aclaración de que, como los lados eran congruentes, al hacer el encaje los ángulos también serían congruentes, para ejemplificar esto se recordó el caso LLALA, en el que podía variar la medida de un lado y dos ángulos, ante esto, la estudiante mostró comprensión, ya que señaló los ángulos que resultaban congruentes.

Finalmente, se realizó un recuento de los criterios trabajados y de la definición de criterio de congruencia, como se ve en el Fragmento 6. En este se evidencia que la estudiante, comprendió la utilidad de los criterios de congruencia, para determinar cuadriláteros congruentes, además la profesora Karen, propuso una situación que permitiera evidenciar que estos criterios se cumplen sin importar el tipo de cuadrilátero, lo que conllevó a que la estudiante generalizara los criterios trabajados en cualquier tipo de cuadrilátero (no especial, rectángulo, rombo y cuadrado). Con esto se finaliza la tarea.

Fragmento 6. Desarrollo de la tarea 4 Danna

Profesora Vanessa	Entonces me recuerdas ¿cuáles de estos criterios si funcionaban?
Danna	Lado – ángulo – lado – ángulo – lado, ángulo – lado – ángulo – lado – ángulo y lado – ángulo – lado – lado – lado.
Profesora Vanessa	Listo, perfecto. Y me puedes repetir ¿qué es un criterio de congruencia?
Danna	Es cuando a uno le dan un cuadrilátero y sin necesidad de uno medirlo, puede por unas características en común que tenga con otro, uno ya puede mirar si es congruente o no.
Profesora Karen	Hoy aprendimos tres criterios de congruencia con cuadriláteros. Si yo te doy un rectángulo, ¿tú consideras que se puede utilizar uno de los que sí son criterios?
Danna	No sé.
Profesora Karen	¿El rectángulo, qué es?
Danna	Un cuadrilátero.
Profesora Karen	Entonces, ¿se podrá?
Danna	Sí.

Profesora Karen	Entonces, estos criterios que vimos acá con este cuadrilátero (señalando el cuadrilátero no especial), se pueden utilizar con cualquier cuadrilátero.

5.5 Descripción del desarrollo de la tarea 5: Criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales

Para el desarrollo de esta tarea, Laura (estudiante con discapacidad visual) tardó aproximadamente dos horas y Danna (estudiante normovidente) una hora y media. Las estudiantes alcanzaron el objetivo propuesto para la tarea, demostrando comprensión de la definición y propiedades de algunos cuadriláteros, usando estas para la conjeturación de algunos criterios de congruencia. Cabe destacar que, por ser la última tarea de la secuencia, esta recopila todos los procesos trabajados anteriormente; esto se evidenció en la actuación de las dos niñas.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Laura:

La clase inició recordando lo que es un criterio de congruencia y la facilidad que estos proporcionan para la construcción y comprobación de cuadriláteros congruentes, adicionalmente se realizó un recuento de los criterios que se habían identificado en la sesión pasada. Por otra parte, Laura mencionó los cuadriláteros especiales estudiados con anterioridad (cuadrado, rombo y rectángulo) y algunas de sus propiedades, en simultáneo la profesora Karen realizó algunas precisiones con respecto a las definiciones, mencionadas por la estudiante, como se observa en el Fragmento 7.

Fragmento 7. Desarrollo de la tarea 5 Laura

Profesora Karen	¿Te acuerdas de la definición del cuadrado?
Laura	Sus cuatro lados y sus cuatro ángulos son iguales.
Profesora Karen	¿Cómo son sus cuatro ángulos?
Laura	Rectos.
Profesora Karen	¿Del rectángulo?
Laura	Sus lados opuestos son iguales y sus ángulos son rectos.
Profesora Karen	Hay que hacer una aclaración, la definición del rectángulo solo nos dice que sus ángulos son rectos, lo de los lados opuestos congruentes es una propiedad. Y del rombo ¿cuál es la definición?
Laura	Tiene los cuatro lados iguales y los ángulos no son rectos.
Profesora Karen	Entonces, vamos a aclarar otra cosa, en el rombo la definición es que sus cuatro lados son iguales y lo de los ángulos rectos es en nuestro material, es decir, en la figurita el rombo no tiene los ángulos rectos. Si algún día te presentan un rombo, puede pasar que tenga los ángulos rectos o como puede pasar que no. ¿Y qué pasaba con los ángulos del rombo?
Laura	No recuerdo.
Profesora Karen	Recuerda que los ángulos opuestos de un rombo son iguales.

Inmediatamente, se le proporcionó a la estudiante cuatro segmentos, el paquete de ángulos, la regla y el transportador. Nuevamente se le preguntó la definición de cuadrado y se le solicitó que construyera un cuadrado con las piezas del material. Al principio, se centró la atención en los lados del cuadrado, para ello la profesora Vanessa le pidió a la estudiante establecer una medida en uno de los segmentos, de tal manera que pudiera copiarla en los tres restantes para obtener la igualdad de los lados. Después, Laura inició el reconocimiento de los ángulos que le eran de utilidad para la construcción del cuadrado, mediante la lectura de las marcas en braille, identificando así los cuatro ángulos de 90°. Una vez determinadas las piezas necesarias para la construcción del cuadrado, la estudiante se dispuso a encajarlas (Imagen 117).

Imagen 117. *Construcción cuadrado*

Cuando ya se tenía construida la figura, se le preguntó a la estudiante si dicha construcción correspondía a un cuadrilátero, a lo que ella respondió que, sí refiriéndose a sus cuatro lados y cuatro ángulos, inmediatamente se le cuestionó si era un cuadrado, respondiendo afirmativamente, ya que cumplía las condiciones. Posteriormente, se discutió si el cuadrilátero construido era congruente a la pieza del material que correspondía al cuadrado, Laura analizó cada una de las condiciones para ser congruentes, concluyendo que cumplía tener la misma cantidad de lados, pero que haría falta determinar la igualdad de la medida de estos, al realizar el encaje del cuadrado en la construcción, concluyó que estos no eran congruentes.

Al observar esto, se intentó reconocer qué condiciones son necesarias para llegar a la congruencia. Así, Laura mencionó que era necesario copiar los lados y ángulos del cuadrado base, sin embargo, las profesoras le explicaron que no era preciso copiar los ángulos puesto que los de la construcción y del cuadrado, por su definición ya eran rectos y, en consecuencia, ya eran congruentes entre sí. Por otra parte, se mencionaron la cantidad de lados que era necesario copiar, donde la estudiante determinó que nuevamente por la definición de cuadrado y haciendo referencia a la construcción realizada, solo era necesario medir un lado, para así copiar los cuatro lados en la construcción y obtener cuadrados congruentes. Luego de realizar la construcción, se verificó nuevamente la congruencia de estos, concluyendo que, copiar un lado únicamente, sí funcionaba. A continuación, en el Fragmento 8 se presentan las condiciones que Laura identificó.

Fragmento 8. Desarrollo de la tarea 5 Laura

Laura	Son iguales.
Profesora Karen	Y ¿Por qué son iguales?
Laura	Porque el cuadrilátero encajó en el dibujo.
Profesora Karen	Entonces ¿qué pasó con el criterio?
Laura	Que sí funciona.
Profesora Karen	¿Qué copiaste entonces para que fueran congruentes?
Laura	Un lado.
Profesora Vanessa	Y ¿qué pasó con los ángulos?
Laura	Los ángulos no los copiamos, porque ya son rectos, porque los dos son cuadrados.
Profesora Karen	¿Copiaste algo más?
Laura	No.
Profesora Karen	¿Qué dice nuestro criterio?
Laura	Que si yo tengo dos cuadrados y yo copio o mido un lado, entonces lo que pasa con los cuadrados es que son iguales y si son iguales son congruentes.

Después, la estudiante recordó la definición y propiedades del rectángulo con ayuda de la profesora Karen. Inmediatamente, se realizó una comparación entre los ángulos usados en la anterior construcción y los ángulos que se requerían para construir un rectángulo, ante esto la estudiante afirmó, que le servían los mismos ángulos, ya que en ambos casos eran necesarias las piezas que correspondían a los ángulos rectos. Así, se le proporcionaron los cuatro ángulos rectos, cuatro segmentos, la regla y el transportador, solicitando que construyera un rectángulo, teniendo en cuenta la propiedad (lados opuestos congruentes).

Para construir lo que se había solicitado, la estudiante pegó sobre el cartón un ángulo y midió con ayuda de la regla, los lados que determinan el ángulo, uno de 28 cm y el otro de 18 cm, para encajarlos y asegurarlos en el cartón junto con el ángulo, nuevamente se le preguntó por la propiedad, para que de esta manera determinara la medida del lado opuesto al que medía 18 cm, así la estudiante encajó los ángulos restantes junto con el lado que se acababa de medir y para finalizar la construcción, encajó el último lado en la figura, sin necesidad de medirlo.

Una vez terminada la construcción, se le preguntó a la estudiante acerca de lo que había dibujado, a lo que respondió que era un rectángulo, mencionando que sus ángulos eran rectos y sus lados opuestos congruentes. Por ello, la profesora Karen indagó acerca de la congruencia entre el rectángulo construido y el base, la niña mencionó que estos eran congruentes, por lo tanto, verificó la congruencia de este con la pieza del material que correspondía a un rectángulo, donde la estudiante logró percibir que las dos piezas no eran congruentes ya que la medida de sus lados no era la misma (Imagen 118).

Imagen 118. *Verificación de congruencia de rectángulos*

De esta manera, se le preguntó a la estudiante acerca de las condiciones mínimas que se requerían para que los cuadriláteros fueran congruentes, ella respondió que no era necesario copiar los ángulos, puesto que ya eran iguales, sin embargo, mencionó los lados que debía copiar, como se observa en el Fragmento 9. En este diálogo se logró evidenciar que Laura reconoció las piezas indispensables para obtener el criterio de congruencia del rectángulo, haciendo referencia a la necesidad de copiar únicamente dos lados consecutivos, mencionando sus texturas.

Fragmento 9. Desarrollo de la tarea 5 Laura

Profesora Karen	¿Tú crees que ese rectángulo que dibujaste es igual al de la figura que nosotros te pasamos siempre? O ¿no son congruentes? ¿Qué piensas?
Laura	Sí.
Profesora Karen	Entonces te voy a pasar la figura y tú como siempre la vas a intentar encajar y vamos a mirar qué pasa.
Laura	(En este momento la niña se dispuso a encajar la pieza en la construcción)
Profesora Karen	¿Qué pasó Laura? ¿Encajó? Bueno, digamos en este caso sí encajó, sí quedó adentro, pero ¿quedaron exactamente igual?
Laura	No.
Profesora Karen	Entonces ¿qué pasa cuando esto pasa?
Laura	No son iguales.
Profesora Karen	Entonces no son congruentes ¿cierto?
Laura	No.
Profesora Karen	¿Qué crees que deberíamos copiar para que sean congruentes?, ¿tú qué opinas?, ¿será que los ángulos?
Laura	No.
Profesora Karen	¿Por qué no?
Laura	Porque los ángulos de los dos cuadriláteros son iguales, porque los dos son rectángulos.
(…)	

Profesora Karen	¿Cuántos lados crees que deberíamos copiar?
Laura	Dos.
Profesora Karen	¿Cuáles? Si quieres muéstramelos ahí en el rectángulo.
Laura	Ese (señalando uno de los lados de 28 cm) y este (señalando uno de los lados de 15 cm)
Profesora Karen	Menciónalos si quieres con las texturas ¿cuáles vas a copiar?
Laura	Rayas y puntos y rayas y liso.
Profesora Karen	Muy bien Laura, pero ¿cómo vas a saber la medida de los otros dos lados?
Laura	Por la propiedad.

A partir de esta identificación, la estudiante se dispuso a medir y copiar los lados que eran necesarios, puesto que la medida del lado de rayas – puntos coincidió con la del rectángulo construido, solo fue necesario medir y copiar el lado rayas – liso y su opuesto. Luego de realizar las modificaciones de las medidas que la estudiante sugirió, se le pide que intente encajar el rectángulo en la construcción, lo que le permitió a Laura concluir que sí eran congruentes y que, por lo tanto, el criterio funcionaba (Imagen 119).

Imagen 119. *Verificación criterio rectángulo*

Posteriormente, se enfatizó en la definición de rombo. Con ello, se le proporcionaron los cuatro segmentos y la regla, para que iniciara la construcción de un rombo con las medidas de su preferencia. Laura determinó la medida de los lados de 25 cm y los encajó en los extremos, es decir, no fue necesario hacer uso de las piezas de ángulos (Imagen 120), con el fin de seguir la definición del rombo.

Imagen 120. *Construcción de rombo*

Luego, se le preguntó si lo construido podría ser congruente al rombo, la estudiante respondió que sí, pero al encajar la pieza en lo construido pudo identificar que no son congruentes, por ello, la profesora Vanessa le preguntó qué era necesario copiar para obtener rombos congruentes, enfatizando en las condiciones que no se cumplieron entre el cuadrilátero construido y el base, teniendo en cuenta esto, se observa en el Fragmento 10 la construcción del criterio realizado por Laura.

Fragmento 10. Desarrollo de la tarea 5 Laura

Profesora Karen	Entonces Laura ¿qué debemos copiar?
Laura	Los lados y los ángulos.
Profesora Karen	¿Cuál es la definición de rombo?
Laura	Todos los lados iguales.
Profesora Karen	Entonces ¿tú crees que deberíamos copiar todos los lados? o ¿cuántos lados?
Laura	Uno, porque por la definición de rombo todos son iguales.
Profesora Karen	Y ¿qué pasa con los ángulos del rombo?
Laura	Los ángulos opuestos son iguales.
Profesora Vanessa	Entonces ¿cuántos ángulos tenemos que copiar?
Laura	Dos.
Profesora Vanessa	¿Cuáles?
Profesora Karen	Si quieres señálalos.
Laura	Este (señalando el ángulo rayas).
Profesora Karen	Tú dijiste que dos ¿cuál otro? ¿El opuesto o el consecutivo?
Laura	El opuesto.
Profesora Karen	Pero si los opuestos yo ya sé que miden lo mismo ¿será necesario copiar el opuesto?
Laura	No, el consecutivo.
Profesora Vanessa	(Le indica los ángulos que era posible copiar).

Así, la profesora Karen le solicitó que midiera uno de los lados del rombo, para copiar está medida en los cuatro segmentos, que hacen parte de la construcción, luego midió el ángulo rayas y buscó su correspondiente en el paquete de ángulos de TRALC, cuando iba a realizar este proceso con el ángulo liso, la profesora Vanessa, nuevamente, le preguntó a Laura por qué era necesario copiar este, ella respondió "porque está al lado del de rayas" demostrando comprensión de que era necesario que los ángulos fueran consecutivos, después midió el ángulo liso y encontró la pieza que le correspondía dentro del paquete de ángulos.

Cuando se contó con todas las piezas necesarias, la estudiante se dispuso a encajarlas y asegurarlas en el cartón. Es de resaltar que, como solo se usaron las dos piezas de los ángulos que se copiaron, el resto de las uniones entre segmentos se realizó haciendo el encaje entre estos. Para verificar la veracidad del criterio propuesto, se le solicitó a la estudiante encajar el cuadrilátero en la construcción (Imagen 121), con ello la estudiante concluyó que eran congruentes teniendo en cuenta que se debían copiar solo un lado y dos ángulos.

Imagen 121. *Verificación criterio rombo*

Para finalizar, se realizó un recuento de lo trabajado durante la sesión, resaltando las piezas que se deben copiar para obtener los cuadriláteros especiales congruentes, es decir, los criterios de congruencia, como se muestra en el Fragmento 11; en este se evidencia que Laura comprendió los criterios basándose en las definiciones y propiedades del cuadrado, rectángulo y rombo; además, se realizó un cierre de las actividades, señalando por parte de la profesora Karen lo que es un criterio de congruencia y los criterios para los cuadriláteros en general y los de algunos cuadriláteros especiales.

Fragmento 11. Desarrollo de la tarea 5 Laura

Profesora Karen	¿Cómo era el criterio del cuadrado?
Laura	Un lado.
Profesora Karen	¿Por qué sólo un lado? Los otros ¿cómo los sabemos?
Laura	Porque todos son iguales, por la definición del cuadrado.
Profesora Karen	Y ¿los ángulos?
Laura	Son rectos y como en el dibujo que hicimos era un cuadrado entonces también eran rectos.
Profesora Karen	¿Qué pasaba con el rectángulo? ¿Qué copiamos?
Laura	Dos lados.
Profesora Karen	Y esos lados ¿eran cómo?
Laura	Consecutivos.
Profesora Karen	¿Por qué no copiamos los ángulos?
Laura	Porque eran rectos y como dibujamos un rectángulo entonces ya sabíamos que eran rectos y iguales.
Profesora Karen	De los lados ¿por qué no copiamos los cuatro lados? ¿Por qué sólo dos consecutivos?
Laura	Porque los opuestos son iguales.
Profesora Karen	Listo Laura, muy bien, ahora ¿qué pasó con el rombo? ¿Cómo era tu criterio en el rombo?
Laura	Un lado y dos ángulos.
Profesora Vanessa	¿Cómo debían ser los ángulos?
Laura	Consecutivos.
Profesora Vanessa	Porque ¿qué sabemos de los opuestos?
Laura	Porque los opuestos son iguales.

Profesora Vanessa	Y ¿por qué sólo un lado?
Laura	Porque todos los lados son iguales.
Profesora Karen	Listo Laura, entonces nosotras ya aprendimos tres criterios para cualquier cuadrilátero, que fueron los que trabajamos la clase pasada y aquí aprendimos un criterio para cuadrado, para rectángulo y uno para rombo. Y entonces en los criterios sólo copiamos poquitos lados y en algunos casos ni siquiera ángulos, por eso se llaman criterios porque copiamos solo unas poquitas piezas y no todo el cuadrilátero.

Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Danna: Para empezar con la solución de la tarea, se realizó un análisis de las definiciones de rombo, cuadrado y rectángulo. En cuanto a la definición de rombo, la estudiante mencionó que es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados congruentes y manifestó recordar algo de la característica de los ángulos opuestos, sin embargo, fue necesario que la profesora Vanessa le explicara esta (ángulos opuestos congruentes). Para la definición del cuadrado, Danna dijo que es un cuadrilátero que tiene los lados iguales y los ángulos rectos. En la definición de rectángulo, la niña hizo referencia en primer lugar, a los lados opuestos congruentes y luego a los ángulos rectos, por ello, la profesora Vanessa aclaró que la definición solo contempla los ángulos rectos y que la característica de los lados es una propiedad.

En seguida, se le preguntó a la estudiante la definición de congruencia de cuadriláteros, ella respondió, que deben tener la misma cantidad de lados y ángulos, además de que, los lados y los ángulos deben medir lo mismo. Con esto, se realizó un repaso de los criterios trabajados en el desarrollo de la anterior tarea (LALAL, ALALA y LALLL). A partir de esto, se inició la identificación de los criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales (rombo, rectángulo y cuadrado), resaltando la necesidad de tener en cuenta las propiedades y la definición de cada uno de estos.

Luego, se le proporcionó a la estudiante: cuatro segmentos, el paquete de ángulos, la regla y el transportador; con ello se le solicitó construir un rombo. Danna inmediatamente, manifestó que esta construcción debía tener los cuatro lados de igual medida y los ángulos opuestos congruentes. Para realizar la construcción del rombo, únicamente, se tomó en cuenta la definición, es decir la niña lo construyó sin usar piezas de ángulos, encajando sólo los segmentos, ya que ella no considero necesario usar ángulos.

Una vez construido el rombo, se cuestionó a la estudiante si este era congruente al rombo que hacía parte del material, ella respondió que sí. Entonces, se le solicito verificar la congruencia entre estos dos cuadriláteros, al encajar el base en el construido (Imagen 122), se pudo evidenciar que no eran congruentes. Por lo tanto, se le preguntó a Danna, qué piezas eran necesarias copiar para obtener un rombo congruente al entregado, ella contestó que se debían copiar los cuatros lados. Sin embargo, al copiar el primer lado y con ayuda de la definición de rombo, la estudiante concluyó que solo era necesario copiar uno de los lados del rombo. Así, que midió un lado y copió esta medida en los cuatro segmentos entregados.

Imagen 122. *Verificación congruencia de rombos*

Al encajar los cuatro segmentos, con la medida respectiva, se pudo evidenciar que ya la construcción era un rombo congruente al entregado, sin tener en cuenta los ángulos, fue por lo que las profesoras realizaron una exploración en el software de geometría dinámica GeoGebra, con el fin de que la estudiante notara que para obtener el criterio era necesario también copiar dos ángulos consecutivos. Así, en GeoGebra se construyó un rombo (con las mismas dimensiones del rombo que hace parte de TRALC), se copió un lado de este y se construyó otro rombo haciendo uso de la medida del lado copiado. Cuando se tenían los dos rombos dibujados, se indaga sobre las condiciones para que fueran congruentes, centrando la atención en los ángulos de las figuras. Como estos rombos no eran congruentes, la medida de los ángulos tampoco lo era (se evidenció midiendo en el software), por lo tanto, la niña afirmó que era necesario copiar un lado y dos ángulos consecutivos, como se observa en el Fragmento 12, estableciendo el criterio de congruencia para los rombos.

Fragmento 12. Desarrollo de la tarea 5 Danna

Profesora Vanessa	¿Qué crees que falta? La medida de un lado y ¿qué más?
Danna	De un ángulo
Profesora Vanessa	¿Cuál? o ¿de cuáles?
Danna	El de ochenta (ángulo rayas).
Profesora Vanessa	O sea, debo copiar el de ochenta y ¿cuál otro debo saber?
Danna	El de cien (ángulo puntos)
Profesora Vanessa	Y ahí, ¿ya nos da congruente?

Danna	Sí. Porque sabemos que cada lado mide lo mismo y que los ángulos que son opuestos miden lo mismo.
Profesora Vanessa	¿Por qué este ángulo no se debe copiar (señalando el ángulo liso)?
Danna	Porque ya el otro que copiamos es de cien, o sea, el opuesto.
Profesora Vanessa	Exacto, el opuesto mide cien. Y este (señalando el ángulo cuadros) ¿por qué no?
Danna	Porque ya sabemos cuánto mide el opuesto.
Profesora Vanessa	Entonces, ¿cuáles son las condiciones mínimas para poder conseguir un rombo congruente?
Danna	Que sólo debemos medir un lado, porque los otros deben medir lo mismo, entonces sólo copiamos uno. Y sólo copiamos dos ángulos, que, en el caso de este rombo, sería el de ochenta y el de cien, porque ya los otros opuestos miden lo mismo, el opuesto de cien mide cien y el opuesto de ochenta mide ochenta.

Después, la profesora Vanessa preguntó acerca de la definición y propiedad del rectángulo, ante esto, Danna respondió que era un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y que tiene los lados opuestos congruentes. Para realizar el dibujo, la niña decidió usar la definición, por lo tanto, escogió los cuatro ángulos rectos del paquete de ángulos, luego encajó cuatro segmentos en estos ángulos y así obtuvo un rectángulo. Una vez realizado este proceso, se le pregunto si la construcción era congruente al rectángulo de TRALC, Danna respondió que no, porque al parecer sus medidas eran diferentes y, por lo tanto, no encajaría. Entonces, se le solicitó que verificara la congruencia (Imagen 123), confirmando que estos no eran congruentes.

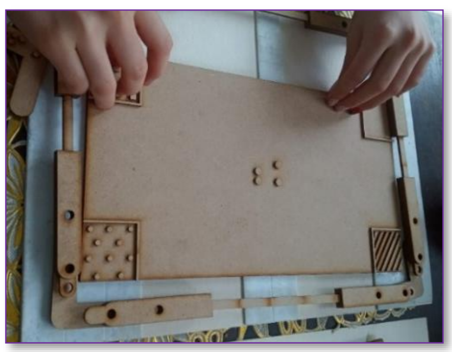


Imagen 123. *Verificación de rectángulos congruentes*

Inmediatamente, la niña percibió que no eran congruentes los rectángulos y sin necesidad de preguntarle, mencionó las partes que se debían copiar para obtener rectángulos congruentes (dos lados consecutivos), demostrando comprensión del proceso realizado en el anterior tipo de cuadrilátero (Fragmento 13). Ante esto, se le pidió a la estudiante que, midiera, copiara los lados mencionados, construyera el rectángulo congruente y realizara nuevamente la verificación como se observa en la Imagen 124.

Fragmento 13. Desarrollo de la tarea 5 Danna

Danna	Yo creo que tenemos que, hacer lo mismo que con el rombo, o sea, copiar un lado opuesto, pues el de nada a rayas (lado liso - rayas) y otro el de rayas a puntos.
Profesora Karen	Entonces, sólo esos dos lados.
Danna	Y después sabemos cuánto mide cada uno.
Profesora Vanessa	¿Por qué podemos poner los otros?
Danna	Porque ya sabiendo cuánto mide el otro, ya podemos copiar el que hace falta.
Profesora Vanessa	¿El qué?
Danna	El opuesto.
Profesora Vanessa	¿Y los ángulos?
Danna	Yo creo que no, que no toca copiarlos.
Profesora Vanessa	¿Por qué?
Danna	Porque ya son congruentes al de la figura, porque son rectos.

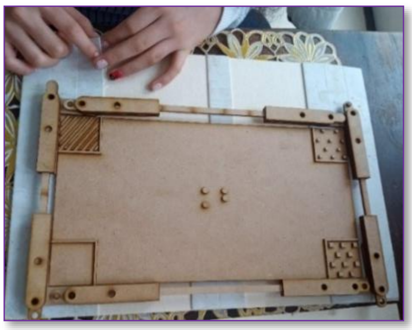


Imagen 124. *Verificación criterio de congruencia de rectángulos*

Imagen 125. *Verificación criterio de congruencia del cuadrado*

En el siguiente momento, se realizó el repaso de la definición de cuadrado, la estudiante reconoció esta como: cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales. Posteriormente, Danna se dispuso a construir un cuadrado con el material, por lo tanto, escogió los ángulos rectos del paquete de ángulos de TRALC, al preguntarle sobre los lados, ella indicó que era necesario copiar un lado del cuadrado base, argumentando que al conocer la medida de un lado ya iba a reconocer la de los demás, por la definición de cuadrado, en este argumento se evidenció que la niña sin preguntarle por el criterio de congruencia del cuadrado, solamente realizando la construcción pudo encontrarlo.

Luego, la estudiante construyó el cuadrado copiando el lado medido, ella afirmaba que este cuadrado era congruente al base, por ello, se le solicitó verificar esto (Imagen 125). Al realizar este procedimiento, determinó que los dos cuadrados eran congruentes y, por lo tanto, la conjetura propuesta por ella, si funcionaba, a continuación, en el Fragmento 14 se pueden observar los argumentos presentados por la estudiante. En esta justificación se evidencia que la niña se apropió de la definición de cuadrado y con esta construyó el criterio comprendiéndolo de manera total.

Fragmento 14. Desarrollo de la tarea 5 Danna

Profesora Vanessa	¿Por qué son congruentes?
Danna	Porque tiene cuatro ángulos rectos y porque la medida de los lados es igual y eso lo dice la definición.
Profesora Vanessa	Y ¿qué nos dice la definición?
Danna	Que tiene cuatro ángulos rectos y que los lados deben medir lo mismo.
Profesora Vanessa	Entonces, ¿qué fue necesario copiar para obtener un cuadrado congruente?
Danna	Sólo un lado.
Profesora Vanessa	Y ¿qué pasaba con los otros tres?
Danna	Pues ya los copiábamos, ya teniendo la medida del primero que se había copiado. O sea, como miden lo mismo, entonces, ya sabemos que, el primero va a medir igual que los otros tres.
Profesora Vanessa	Y ¿qué pasaba con los ángulos?
Danna	Pues, los ángulos son rectos. Porque así lo dice la definición.

Finalmente, se realizó un recuento de los criterios trabajados anteriormente, la estudiante mencionó de manera correcta cada uno de ellos, justificándolos con argumentos que se remitían a las definiciones y propiedades de los cuadriláteros. Adicionalmente, la profesora Vanessa preguntó ¿cuál de los criterios, era más fácil de aplicar?, Danna mencionó el criterio del cuadrado, porque solamente se mide un lado y los ángulos ya son rectos. Con esto termina el desarrollo de la tarea.

5.6 Análisis general de las tareas desarrolladas por las estudiantes

En esta sección, se analizarán los resultados obtenidos en cada una de las tareas, con el fin de identificar el alcance de los objetivos propuestos para cada una de estas, también se describirá el desarrollo del proceso de conjeturación en las estudiantes. Es necesario mencionar que las conjeturas propuestas por las niñas fueron realizadas luego de analizar los casos particulares y expresadas en términos matemáticos, sin embargo, no cumplen con la estructura condicional que proponen Samper y Molina (2013). Además de la formulación de conjeturas, se realizó el proceso de corrobación de estas mediante el uso del material.

La primera tarea, fue diseñada con el fin de contextualizar a las estudiantes, sobre el uso que se iba a dar a cada pieza del material en las siguientes tareas, como lo sugiere Morales (2012), esto se logró conseguir, ya que reconocieron el material y la funcionalidad de este. También, se realizó la identificación de algunos objetos geométricos (segmentos, ángulos, cuadriláteros) que eran desconocidos para ellas, volviéndolos concretos; puesto que, el material didáctico permitió acceder con mayor facilidad a los elementos matemáticos (Guzmán, 2014). Finalmente, se evidenció que las estudiantes, lograron distinguir los elementos que componían cada figura de TRALC, un beneficio que se esperaba conseguir, teniendo en cuenta lo expuesto por Guzmán (2014) sobre las características que debe tener cualquier material didáctico.

En la segunda tarea, se evidenció que las estudiantes lograron pasar por tres de las acciones descritas por Plazas y Samper (2013), en el proceso de generar conjeturas. Puesto que, realizaron procesos propios de la *exploración*, en el mundo de la teoría, mediante los enunciados que se les presentaron como definición de los cuadriláteros especiales y en el mundo de los fenómenos, mediante la manipulación y el proceso de medir los ángulos (ver Descripción del desarrollo de la tarea realizada por Danna) y segmentos que realizaron con los cuadriláteros de TRALC. También, percibieron las propiedades de los cuadriláteros, es decir, *visualizaron* las características y las relaciones de estos objetos geométricos, mediante la manipulación de las figuras correspondientes a los cuadriláteros del material didáctico.

Además, realizaron una *generalización* de manera empírica, ya que definieron algunos de los cuadriláteros, teniendo en cuenta, únicamente lo que percibieron en las acciones anteriores. En el momento del desarrollo de la tarea, no se profundizó en esta acción, ya que algunas de las definiciones construidas por las niñas no contemplaban todos los casos que las enmarcaban. Por otra parte, se resalta que el material didáctico jugó un papel fundamental, en la percepción de relaciones, igualdades y diferencias (Guzmán, 2014), lo que permitió identificar y clasificar algunos tipos de cuadriláteros por parte de las estudiantes.

Adicionalmente, en el desarrollo de la tercera tarea se lograron llevar a cabo todas las acciones que promueven la construcción de conjeturas, mencionadas por Plazas y Samper (2013), ya que las estudiantes encontraron regularidades, hallaron distintivitos geométricos (congruencia), percibieron propiedades invariantes y verificaron los enunciados propuestos, por medio de los procesos de medir y solapar algunas piezas del material. Gracias a esto, se logró que las niñas reconocieran la definición de segmentos, ángulos y polígonos congruentes.

En el desarrollo de la tarea cuatro, se pudo evidenciar que las estudiantes también pasaron por las acciones para la construcción de conjeturas y llegaron a expresar enunciados (falsos o verdaderos) acerca de los criterios de congruencia o de los procedimientos para llegar a estos. En los primeros momentos de la tarea, se realizaron las acciones de *exploración* y *visualización*, puesto que, las niñas mediante el procedimiento de construcción pudieron realizar una representación de la primera combinación (LAL) y percibir que era necesario copiar más piezas para lograr la congruencia, siguiendo lo mencionado por Plazas y Samper (2013), en la descripción de dichas acciones. Esta conjetura (es necesario copiar más piezas, para obtener cuadriláteros congruentes) fue *corroborada* en el momento de realizar la verificación de la combinación LALAL.

Posteriormente, se orientó a las estudiantes que conjeturaran con respecto al orden de las piezas copiadas, la cantidad y el tipo. Fue así, como Laura manifestó que el orden de las piezas copiadas no importaba en la construcción de cuadriláteros congruentes, sin embargo, al realizar la *exploración* y *verificación* de LALAL y LLALA, logró *generalizar* que el orden de las piezas sí importa, teniendo en cuenta la comparación entre estas combinaciones. Por otra parte, Danna a partir de la *exploración*, *visualización* y *generalización*, conjeturó que la cantidad de piezas no influía, pero el tipo de estas sí, sin embargo, al realizar la *verificación*, evidenció que esto no era correcto; tal como lo mencionan Samper y Molina (2013) reformuló la conjetura estableciendo las condiciones necesarias para que fuera válida.

En la construcción de la combinación ALALA, Laura creó un enunciado basándose en la observación o el análisis de indicios (Samper y Molina, 2013) como se evidencia en el Fragmento 4, ya que la estudiante se fundamentó en la exploración de LALAL para conjeturar que esta nueva combinación era un criterio de congruencia, pasando por las acciones de *exploración* y *visualización*. Adicionalmente, cuando se le solicitó a Laura proponer una conjetura sobre la combinación LALLL, ella afirmó que si se copian todos los lados del cuadrilátero esto no va a garantizar que la medida de los ángulos coincida; teniendo en cuenta, nuevamente los indicios y regularidades visualizadas en las anteriores combinaciones.

Por otra parte, Danna en la combinación LALLL, conjeturó que esta no era un criterio, puesto que realizó un proceso de *generalización*, teniendo en cuenta las combinaciones anteriormente estudiadas, tomando como ejemplo las que funcionaron (LALAL y ALALA) y como no ejemplo las que fallaron (ALA y LLALA), percibiendo la regularidad que en los criterios siempre se intercalaba el tipo de piezas que se copiaban y estableciendo el enunciado que se muestra en el Fragmento 5, en el cual se observa como la estudiante conjetura según lo propuesto por Samper y Molina (2013). Finalmente, en el Fragmento 6 se puede evidenciar la manera en que se intentó que la estudiante generalizara acerca de la veracidad de los criterios generales para cualquier tipo de cuadrilátero, sin embargo, en este momento ella solamente comprendió la generalidad presentada, sin conjeturar sobre ello.

En la última tarea, se logró evidenciar en diferentes momentos, que las estudiantes transitaron por las cuatro acciones propuestas por Plazas y Samper (2013), promoviendo la construcción de conjeturas. Esto se puede corroborar en el proceso que desarrollaron para llegar a los enunciados, verificarlos y así establecer los criterios de congruencia. Cabe resaltar que, la justificación de los enunciados se llevó a cabo teniendo en cuenta argumentos teóricos (definiciones y propiedades de los cuadriláteros) y la verificación por medio del uso del material TRALC, avanzando un paso hacia la demostración (Plazas y Samper, 2013).

En cuanto a los resultados de Laura, para determinar los criterios del cuadrado, rectángulo y rombo, estableció las conjeturas que le permitieron determinar las condiciones mínimas para obtener estos cuadriláteros congruentes (Fragmento 8 y Fragmento 9), la estudiante justificó los enunciados propuestos, teniendo en cuenta lo conocido en el mundo de los fenómenos y de la teoría como lo proponen Samper y Molina (2013) y se evidencia en el Fragmento 11.

Por otra parte, Danna por medio de la *exploración* y la *visualización*, que se realizó en GeoGebra, logró conjeturar el criterio de congruencia del rombo, reafirmando un enunciado propuesto (Samper y Molina, 2013) erróneamente a causa de la manipulación del material, como se observa en el Fragmento 12. Además, la niña al hacer la construcción del rectángulo estableció, sin necesidad de solicitarle, la conjetura del criterio del rectángulo (Fragmento 13), basándose en la definición y propiedades de este cuadrilátero. Finalmente, cuando ejecutó la exploración en el cuadrado, empíricamente conjeturó el criterio de congruencia de este, justificándolo en su conocimiento teórico y en las anteriores experiencias, esto se logra evidenciar en el Fragmento 14.

5.7 Mejoras en el material y en las tareas implementadas

A continuación, se presentan algunas limitaciones del material y las tareas implementadas, que se pudieron evidenciar en la prueba piloto, además de las posibles modificaciones que se podrían realizar en estas para mejorarlas.

Mejoras en el material

- Durante la lectura de las marcas en los ángulos, se percibió la dificultad y confusión por parte de la estudiante para identificar algunos números que se encontraban en braille. Por lo tanto, se propone modificar las marcas en braille de los ángulos, incluyendo la marca de todos los puntos del cajetín y resaltando los puntos que indican el número.
- Al momento de realizar las construcciones de los cuadriláteros y el proceso de verificación, se evidenció que era necesario mantener fijas las piezas que componían el dibujo, por ello, en la prueba piloto se agregó un cartón con cinta para pegarlas, sin embargo, esto no proporcionó el soporte suficiente para mantener las piezas totalmente fijas. Así, se sugiere adicionar algo que permita que las construcciones no se muevan, para poder tener la congruencia de manera óptima y facilitar el proceso de verificación.
- Para medir con el transportador se decidió que la pieza, que indica la abertura de los ángulos, debía ser removible, ya que se consideraba que facilitaba la medición, pero en la implementación con Laura se evidenció dificultad, para ubicarla en el centro del transportador, por lo cual se considera pertinente, dejar esta pieza fija.
- Se evidenció que, para lograr la congruencia, era necesario tener en cuenta el lugar donde se realiza el encaje (primer o segundo orificio), además desde donde se tome en cuenta el inicio del segmento para la medición (con soporte o sin este), estas instrucciones fueron complejas de trabajar en el desarrollo de las tareas y esto ocasionó que se empleara más tiempo del que se tenía proyectado. Por consiguiente, se recomienda que el encaje quede ubicado en el vértice de los ángulos y los soportes de los segmentos.

Mejoras en las tareas

- Inicialmente, se tenía contemplado que las hojas de trabajo fueran usadas por Laura y Danna, sin embargo, no fue posible realizar el proceso de impresión en braille. Además, al observar que el proceso de lectura y escritura desarrollado por Laura requiere de más tiempo, se decidió hacer uso de estas únicamente con Danna. Por tanto, se sugiere desarrollar las tareas sin el uso de hojas de trabajo, ya que no son indispensables en el desarrollo de estas.
- Se logró evidenciar que el encaje de las piezas fue más complejo de ejecutar por parte de Laura, sin embargo, fue posible realizar las construcciones de manera óptima. Para conseguir

mejores resultados en las tareas, de mayor complejidad se aconseja llevar a cabo más momentos de manipulación y exploración del material TRALC.

- Para obtener mejores resultados en la acción de generalizar, se recomienda implementar en primer lugar la tarea 5 (Criterios de congruencia de algunos cuadriláteros especiales) y posteriormente la tarea 4 (Criterios de congruencia de cuadriláteros) ya que esto permitiría a los estudiantes pasar de lo especifico a lo general.

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones más relevantes de este estudio, para ello, inicialmente se analizará el alcance de los objetivos propuestos, teniendo en cuenta los resultados de la prueba piloto. Posteriormente, se expondrán las proyecciones de que se pueden tener a partir de este trabajo de grado, considerando los impactos de la implementación de las tareas. Finalmente, se mencionarán las reflexiones que surgieron en las autoras sobre su saber, hacer y ser como maestras.

En relación con los objetivos planteados para este trabajo de grado, se evidencia que fueron alcanzados, ya que durante toda la secuencia de tareas se logró desarrollar, mediante diferentes acciones, el proceso de conjeturación, puesto que, los enunciados propuestos por las estudiantes surgieron implícitamente en los procesos de exploración, visualización, generalización y verificación (Plazas y Samper, 2013) que se realizaron con el material didáctico TRALC, determinando los criterios de congruencia de los cuadriláteros.

En el resultado final del material didáctico TRALC, se pudo evidenciar que el diseño tiene en cuenta las características que propone Guzmán (2014), dado que, en la implementación se observó que para Laura fue adecuado contar con diferentes texturas, el tamaño y la forma de este, además de que Danna también logró aprovechar estas adaptaciones. Adicionalmente, la secuencia de tareas diseñada permitió promover el proceso de conjeturación en las dos estudiantes, ampliando sus conocimientos con respecto a algunos tipos de cuadriláteros y la congruencia.

En cada etapa implementada, se realizó un proceso de reflexión continua, como lo propone Gómez (2002), con el fin de dar respuesta al último objetivo propuesto, de plantear algunas modificaciones que permitieran mejorar lo diseñado, este propósito se alcanzó de manera satisfactoria como se evidencia en el análisis.

Adicionalmente, la reflexión del proceso fue el punto de partida que permitió evidenciar que el trabajo tiene algunas proyecciones, que se pueden desarrollar respondiendo algunos interrogantes o posibles focos de atención, entre estos están:

- Por las características propias del material didáctico TRALC, la funcionalidad de este y la versatilidad que posee, es posible proponer tareas en las que se estudien los criterios de congruencia de triángulos (o de cualquier otro polígono), realizando la modificación de las piezas base, es decir, en lugar de utilizar cuadriláteros, emplear los polígonos que sean requeridos.

- Teniendo en cuenta, que el material didáctico permite crear o mejorar imágenes mentales de los objetos matemáticos (Morales, 2012); es posible utilizar TRALC en pro del estudio de las características de los cuadriláteros y otros polígonos.
- Agregando algunas piezas al material y proponiendo una nueva secuencia de tareas, es posible realizar el estudio de los demás criterios de congruencia de cuadriláteros y promover el desarrollo en los estudiantes de otros procesos como: conceptualización, visualización, representación y justificación.
- Entre las diferencias percibidas en los procesos desarrollados por las estudiantes y teniendo en cuenta las capacidades de cada una, fue posible evidenciar que el proceso de conjeturación se facilitó para Danna, mientras que Laura presentó un poco de dificultad para ello. Esto conlleva a reflexionar sobre los factores (discapacidad, aspectos psicológicos, sociales, educativos, personales, etc.) que influyen en desarrollar el proceso de conjeturación en geometría.

También, se puede concluir que este trabajo de grado le contribuye a la Educación Matemática Inclusiva, diseñando una secuencia de tareas acompañadas de un material didáctico, el cual permite que los estudiantes, sin importar su condición, tengan un acercamiento a los conceptos y procesos que se desarrollan en el aula de matemáticas, específicamente en geometría. También, aporta a la inclusión, ya que se logró desarrollar un proceso, el cual fue accesible para las participantes, poniéndolas en igualdad de condiciones y teniendo en cuenta sus diversidades, como resalta el MEN (2017b).

Este estudio surge a partir de la inquietud de las autoras por intervenir en el aula con un material didáctico que aportara a la formación de estudiantes con discapacidad visual, fue evidente el impacto que tuvo TRALC, ya que Laura conoció la regla y el transportador, por primera vez, también le permitió realizar representaciones que la llevaron a hacerse algunas imágenes mentales de los objetos. Además, Danna afirmó que este material era accesible para realizar el proceso de medir y construir. Esta experiencia, demostró que, aunque es difícil pensar en las diversas condiciones que puede tener un grupo de estudiantes, sí es posible hacer un cambio y afianzar las capacidades de cada uno con el uso de estrategias didácticas y pedagógicas inclusivas.

Es necesario mencionar, que la interacción con la estudiante con discapacidad visual y la estudiante normovidente, permitió visualizar que, la manera en que se desarrollan los procesos matemáticos en los estudiantes invidentes es igual a las de cualquier alumno, sin embargo, debido a la escasez de recursos y la exclusión social en la que se ven involucrados, se limitan sus capacidades, aun cuando demuestran interés por educarse y poseer conocimientos matemáticos. Por ello, es necesario generar espacios de inclusión en el aula, ya que juega un papel fundamental en la formación integral de todos los alumnos, porque se construye un aprendizaje colectivo, enmarcado en los valores y habilidades de cualquier índole.

A modo de cierre, se puede concluir que, este trabajo de grado permitió ampliar el panorama de las autoras sobre la formación de personas con discapacidad visual, brindando experiencia y algunas herramientas para planear, desarrollar y valorar una clase en un aula inclusiva. Además, surgió el interés de poseer más conocimientos con respecto a esta y otras discapacidades, es decir, ser maestras que promuevan la inclusión en la enseñanza de las matemáticas, proporcionando a la sociedad herramientas para atender a cualquier tipo de población.

Finalmente, es importante mencionar que este estudio, generó un impacto positivo en el desarrollo personal y profesional de las autoras, puesto que, al superar los obstáculos que se presentaron en el camino, permitió determinar y reafirmar que esta profesión juega un papel fundamental en el desarrollo integral de todas las personas. Además, realizar este tipo de estudios, permite en el educador matemático un desarrollo más humano de su profesión.

REFERENCIAS

Andrade, P. (2010). *Alumnos con deficiencia visual. Necesidades y respuestas educativas*. Escuelas católicas. http://www2.escuelascatolicas.es/pedagogico/Documents/Discapacidad%20Visual%205.pdf

Aquino, S., García, V. e Izquierdo, M. (2014). Tiflotecnología y educación a distancia: propuesta para apoyar la inclusión de estudiantes universitarios con discapacidad visual en asignaturas en línea. *Apertura, 6* (1), 32-45.

Artucio, I. y Corbo, S. (04-08-2016). *Herramienta de escritura Braille*. Rizoma.uy. Plataforma de DISEÑO ABIERTO. https://rizoma.uy/herramienta-de-escritura-braille/

Baldor, A. (1967). *Geometría Plana y del Espacio con una introducción a la Trigonometría*. Publicaciones culturales.

Camargo, L. y Samper, C. (febrero de 2014). *Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica* [Memorias]. VIII Simposio Nororiental de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Cárdenas, D. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica* [Trabajo Final de Maestría]. http://bdigital.unal.edu.co/39409/1/1186559.2014.pdf

Clemens, S. O'Daffer, P. y Cooney, T (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison Wesley Longman.

Comisión Braille Española. (2018). *Documento técnico b 2 de la comisión braille española: signo grafía básica*. Once.

Constitución Política de Colombia [Const]. Art. 67. 7 de Julio de 1991 (Colombia).

Declaración Universal de Derechos Humanos [DUDH]. Articulo. 2.10 Diciembre 1948. ONU: Asamblea General.https://www.refworld.org.es/docid/47a080e32.html[Accesado el 18 Junio 2020].

Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional de Colombia]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. 29 de agosto de 2017.

Dossier de Piezas de la Exposición Itinerante. (2015). http://www.ayto-sanfernando.com/wp-content/uploads/2015/04/DossierPiezasMuseoTiflologico.pdf

Duk, C. (2004). *¿Integración escolar o Inclusión educativa?* En: red de Inclusión. Directora ejecutiva de la Fundación INEN.

Fernández, J. (1986). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. ONCE.

Fernández, J. (2004). *Braille y Matemáticas*. ONCE.

Fuentes, F. (s.f). *Diseño de imágenes para ciegos, material didáctico para niños con discapacidad visual*. Universidad Politécnica de Valencia. España.

García, C. (2012). *Guía de atención educativa para estudiantes con discapacidad visual*. *Instituto de Educación de Aguascalientes*. Aguascalientes, México.

Gómez, P. (2002). Análisis del Diseño de Actividades para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls, *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (págs. 341-356). Alicante, España: Universidad de Alicante.

Gragera, R. (2016). *Necesidades Educativas Especiales Asociadas a la Discapacidad o Dificultad en el Aprendizaje*. Guía de orientación al Profesorado. Universidad de Alcalá. Madrid España.

Guzmán, L. (2014). *Acompañamiento y adaptación de recursos didácticos para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el aula inclusiva: una experiencia con niños ciegos.* (Informe de Pasantía). Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Lara, M. y Fátima, N. (s.f.). *Recursos didácticos para potenciar el desarrollo de habilidades matemáticas en adolescentes con necesidades educativas especiales*. http://eventosacademicos.filo.uba.ar/index.php/JIFIICE/VI-IV/paper/viewFile/3872/2471

Manjarrés, D. y Vélez, L. (2019). La educación de los sujetos con discapacidad en Colombia: abordajes históricos, teóricos e investigativos en el contexto mundial y latinoamericano. *Revista Colombiana de Educación*, 78, 253-298. http://doi.org/10.17227/rce.num78-9902

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares - Matemáticas*. Bogotá Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006a). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006b). *Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo a estudiantes con necesidades educativas especiales -NEE-*. Guía 12. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación de Chile. (2007). *Guía de apoyo Técnico-Pedagógico: Necesidades Educativas Especiales en el nivel de Educación Parvularia.* Santiago de Chile, Chile.

Ministerio de Educación Nacional. (2017a). *Derechos Básicos de Aprendizaje – Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2017b). *Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad en el marco de la educación inclusiva*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-360293_foto_portada.pdf

Ministerio de Educación Nacional y Universidad Pedagógica Nacional. (2017). Orientaciones educativas y administrativas para la atención educativa a jóvenes y adultos con discapacidad. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/1_Orientaciones%20Educativas%20y%20administrativas.pdf

Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia. (2019). *Normograma de Discapacidad para la República de Colombia*. Bogotá, Colombia.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Addison – Wesley Iberoamericana.

Morales, P. (2012). *Elaboración de material didáctico*. México. Red Tercer Milenio.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niño, M. y Vanegas, L. (2013). Enseñanza de la geometría en población invidente y de baja visión. *Revista Científica. Educación científica y tecnológica*, (edición especial), 336 - 339.

Organización Mundial de la Salud. (2001). *Clasificación Internacional del Funcionamiento, de la Discapacidad y de la Salud*. Madrid, España.

Plazas, T. y Samper, C. (2013). Acciones del profesor que promueven actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado. *REVISTA CIENTÍFICA, Edición especial*, 479-484.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos.

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2013). *Elementos de Geometría*. Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez, E. (2013). *Nela. Un entrenador de Braille para niños* [Trabajo de fin de carrera, Universidad de Zaragoza]. https://zaguan.unizar.es/record/13350/files/TAZ-PFC-2014-012.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Hojas de trabajo de las 1, 2 y 4

Universidad Pedagógica Nacional
Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve
Explorando TRALC -Tarea 1

1. Manipula el segmento y la regla, luego responde verbalmente:

a) ¿Qué se puede hacer con el segmento?

b) ¿Cuántas marcas tiene la regla?

Mide el segmento con la regla y determina:

c) ¿Cuál es la longitud mínima del segmento?

d) ¿Cuál es la longitud máxima del segmento?

2. Escoge un ángulo y mídelo con el transportador, luego responde verbalmente:

a) ¿Cuánto mide el ángulo?

b) ¿Cuál es la medida mínima de los ángulos?

c) ¿Cuál es la medida máxima de los ángulos?

Universidad Pedagógica Nacional
Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve
Reconociendo algunos cuadriláteros - Tarea 2

A continuación, se presentan las definiciones de algunos tipos de cuadriláteros, lee con atención:

- **Rectángulo:** Es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos.
- **Cuadrado:** Es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos y todos sus lados tienen la misma medida.
- **Rombo:** Es un cuadrilátero que todos sus lados tienen la misma medida.

a) El cuadrilátero A ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ____________________________________

b) El cuadrilátero B ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ____________________________________

c) El cuadrilátero C ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ____________________________________

Universidad Pedagógica Nacional
Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve
Criterios de congruencia de cuadriláteros - Tarea 4

Con el cuadrilátero proporcionado, y el uso del material proporcionado, copie las piezas que se encuentran en la tabla, de tal manera que se obtenga un cuadrilátero. Compare el cuadrilátero construido con el proporcionado y complete la siguiente tabla.

Piezas	¿Son congruentes?
Lado, ángulo, lado	
Lado, ángulo, lado, ángulo, lado	
Lado, lado, ángulo, lado, ángulo	
Ángulo, lado, ángulo, lado, ángulo	
Lado, ángulo, lado, lado, lado	

Anexo 2. Desarrollo de las tareas 1, 2 y 4 (Danna)

Universidad Pedagógica Nacional

Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve

Explorando TRALC -Actividad 1

1. Manipula el segmento y la regla, luego responde verbalmente:
a) ¿Qué se puede hacer con el segmento? Para aumentar y disminuir su tamaño
b) ¿Cuántas marcas tiene la regla? La regla tiene 31 marcas

Mide el segmento con la regla y determina:
c) ¿Cuál es la longitud mínima del segmento? minimo 17 cm
d) ¿Cuál es la longitud máxima del segmento? maximo 29 cm

2. Escoge un ángulo y mídelo con el transportador, luego responde verbalmente:
a) ¿Cuánto mide el ángulo? 140°, 90°, 70°
b) ¿Cuál es la medida mínima de los ángulos? 10°
c) ¿Cuál es la medida máxima de los ángulos? 180°

El cuadrilatero tiene:

- un lado de 20 cm
- un lado de 20 cm
- un angulo de 100°
- un angulo de 80°

El otro cuadrilatero tiene:

- un lado de 20 cm
- un angulo de 80°
- un lado de 24 cm
- un lado de 25 cm
- un lado de 28 cm
- un angulo de 90°
- un angulo de 100°
- un angulo de 90°

Universidad Pedagógica Nacional
Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve
Reconociendo algunos cuadriláteros -Actividad 2

A continuación, se presentan las definiciones de algunos tipos de cuadriláteros, lee con atención:

- **Rectángulo:** Es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos.
- **Cuadrado:** Es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos y todos sus lados tienen la misma medida.
- **Rombo:** Es un cuadrilátero que todos sus lados tienen la misma medida.

a) El cuadrilátero A ¿Qué tipo de cuadrilátero es? Rombo
b) El cuadrilátero B ¿Qué tipo de cuadrilátero es? Rectangulo
c) El cuadrilátero C ¿Qué tipo de cuadrilátero es? Cua drado

Cuadrilatero D : No cumple las caracteristicas Para ser cuadrado, Rombo o Rectangulo

Universidad Pedagógica Nacional
Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve
Criterios de congruencia de cuadriláteros -Actividad 4

Con el cuadrilátero proporcionado, y el uso del material proporcionado, copie las piezas que se encuentran en la tabla, de tal manera que se obtenga un cuadrilátero. Compare el cuadrilátero construido con el proporcionado y complete la siguiente tabla.

Piezas	¿Son congruentes?
Lado, ángulo, lado	NO sirve
Lado, ángulo, lado, ángulo, lado	Si sirve
Lado, lado, ángulo, lado, ángulo	NO sirve
Ángulo, lado, ángulo, lado, ángulo	Si sirve
Lado, ángulo, lado, lado, lado	Si sirve

Anexo 3. Hoja de trabajo de las tareas 1 y 2 modificadas

Universidad Pedagógica Nacional
Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve
Explorando TRALC -Tarea 1

1. Manipula el segmento y la regla, luego responde verbalmente:

a) ¿Qué se puede hacer con el segmento?

b) ¿Cuántas marcas tiene la regla?

Mide el segmento con la regla y determina:

a) ¿Cuál es la longitud mínima del segmento?

b) ¿Cuál es la longitud máxima del segmento?

2. Escoge un ángulo y mídelo con el transportador, luego responde verbalmente:

a) ¿Cuánto mide el ángulo?

b) ¿Cuál es la medida mínima de los ángulos?

c) ¿Cuál es la medida máxima de los ángulos?

3. Escoge un cuadrilátero y mide sus lados y ángulos

a) El primer lado mide: ____

b) El segundo lado mide: ____

c) El tercer lado mide: ____

d) El cuarto lado mide: ____

e) El primer ángulo mide: ____

f) El segundo ángulo mide: ______________________________________

g) El tercer ángulo mide: ____

h) El cuarto ángulo mide: ____

Universidad Pedagógica Nacional

Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve

Reconociendo algunos cuadriláteros - Tarea 2

A continuación, se presentan las definiciones de algunos tipos de cuadriláteros, lee con atención:

- **Rectángulo:** Es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos.
- **Cuadrado:** Es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos y todos sus lados tienen la misma medida.
- **Rombo:** Es un cuadrilátero que todos sus lados tienen la misma medida.

a) El cuadrilátero A ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Por qué? ___________________________

b) El cuadrilátero B ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Por qué? ___________________________

c) El cuadrilátero C ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Por qué? ___________________________

d) El cuadrilátero D ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Por qué? ___________________________