

ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS SIMÉTRICOS Y ASIMÉTRICOS  
PARA N-FASES

Adriana Escobar Velandia  
Freddy Alexander Torres Payoma

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
LICENCIATURA EN FÍSICA  
BOGOTÁ D.C.  
2015



ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS SIMÉTRICOS Y ASIMÉTRICOS  
PARA N-FASES

Por:  
Adriana Escobar Velandia  
Freddy Alexander Torres Payoma

Trabajo de grado para optar por el título profesional de Licenciado(a) en Física

Asesor  
Yesid Javier Cruz Bonilla  
MsC. Ciencias - Astronomía

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
LICENCIATURA EN FÍSICA  
BOGOTÁ D.C.  
2015

Nota de aceptación

---

---

---

---

Jurado 1

---

Jurado 2

Bogotá D.C \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

# Declaración

Los autores del trabajo afirmamos que hemos realizado el presente trabajo de grado de manera autónoma, donde el contenido y material que se contiene corresponde a las citas referenciadas y a la producción autónoma. Los resultados y simulaciones, son total responsabilidad de los autores.

Bogotá, D.C., Noviembre de 2015.

En constancia firman,

---

ADRIANA ESCOBAR VELANDIA

---

FREDDY A. TORRES PAYOMA

# Agradecimientos

Agradezco a mi compañero de tesis el cual ha sido mi mayor apoyo en este largo proceso de formación y la iniciativa de investigación en el desarrollo del presente documento y la motivación de seguir adelante en la carrera y en mi profesión como docente. También, agradezco al profesor Yesid Javier Cruz Bonilla el cual me apoyo con sus grandes conocimientos acerca del tema, su gran asesoría y dedicación frente al desarrollo del documento, sus clases y motivación.

*Adriana Escobar Velandia*

# Agradecimientos

En primer lugar, expreso mi agradecimiento a mis padres Luz Estella y Alejandro, a mis hermanos José Luis y Yulie por el apoyo durante todo el proceso de formación académica. Asimismo, agradezco a mi compañera de tesis, el compromiso y la actitud positiva frente al desarrollo del documento y en general de toda el proceso de formación, por el apoyo en la redacción y desarrollo de todo el cuerpo del documento y a todos los que nos colaboraron muchas gracias. Agradezco enormemente la colaboración a nuestro asesor Yesid Javier Cruz Bonilla y entusiasmo frente al desarrollo, el interés en nuestro proceso de formación y excelentes asesorías y, finalmente, al profesor Wilson Diaz Gamba por motivarme y apoyarme en el proceso de inicio y de formación académica como licenciado en Física en la Universidad Pedagógica Nacional.

*Freddy Alexander Torres Payoma*

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Voltajes dentro de un lazo cerrado. . . . .  | 10 |
| 2.2. Corrientes que entran y salen en un mismo nodo. . . . .  | 11 |
| 2.3. Ejemplos de funciones periódicas. . . . .  | 12 |
| 2.4. Ejemplo de funciones no periódicas. . . . .  | 14 |
| 2.5. Conexión de fuentes polifásicas a una carga. . . . .   | 20 |
| 2.6. Simetría de los circuitos eléctricos polifásicos. . . . .  | 20 |
| 2.7. Sistemas no simétricos de los circuitos eléctricos polifásicos . . . . .   | 22 |
| 3.1. Método de las componentes simétricas. . . . .  | 28 |
| 4.1. Rotación de fasores en secuencia homopolar, directa e indirecta. . . . .   | 37 |
| 4.2. Analogía entre las distintas conductividades eléctricas y las contribuciones de impedancia dentro de un circuito cualquiera. . . . . | 56 |
| 4.3. Analogía entre las distintas conductividades eléctricas y las contribuciones de impedancia dentro de un circuito cualquiera. . . . . | 57 |
| 5.1. Sistema de n fuentes de tensión de fase conectadas sobre n impedancias de línea. . . . .   | 61 |
| 5.2. Sistema de 3-fases balanceado para el ejemplo 1. . . . .   | 63 |
| 5.3. Sistema de 3-fases desbalanceado para el ejemplo 2 . . . . .   | 68 |
| 5.4. Diagrama explicativo unifilar de un sistema de potencia. . . . .   | 71 |
| 5.5. Contribuciones de impedancias sobre cada uno de los n nodos. . . . .   | 72 |
| 5.6. Sistema de potencia de 3 nodos. . . . .  | 74 |
| 5.7. Falla eléctrica sobre una línea ocasionada por una descarga atmosférica. . . . .   | 75 |

|   |    |
|---|----|
| 5.8. Falla eléctrica de circuito abierto en la fase 3. . . . .  | 77 |
| A.1. Sistema de tres fuentes de tensión de fase conectadas sobre tres impedancias de línea. . . . .     | 89 |
| A.2. Sistema de cuatro fuentes de tensión de fase conectadas sobre cuatro impedancias de línea. . . . . | 90 |

# Índice de cuadros

|   |    |
|---|----|
| 5.1. Recopilación de la información ejemplo 1 . . . . . | 63 |
| 5.2. Recopilación de la información ejemplo 2 . . . . . | 68 |
| 5.3. Recopilación de la información ejemplo 4 . . . . . | 76 |

# Resumen


En los circuitos eléctricos polifásicos de corriente alterna las señales senoidales de voltaje y corriente son analizadas mediante el uso de diagramas fasoriales que representan el comportamiento de un sistema en el dominio de la frecuencia, y se desarrollan a través de las leyes fundamentales de la teoría de los circuitos eléctricos. Sin embargo, el estudio se limita a circuitos polifásicos de tres fases simétricos, es decir, sus fasores presentan una misma magnitud y ángulo de desfase uno respecto al otro. Para el caso contrario, donde los sistemas eléctricos trifásicos no son simétricos, se emplea el teorema de Fortescue o de componentes simétricas, el cual es utilizado para relacionar sistemas eléctricos asimétricos mediante la combinación lineal de sistemas simétricos. Por otra parte, la teoría generalizada de la potencia instantánea desarrollada por los profesores Ustariz-Farfan & Cano-Plata de la Universidad Nacional de Colombia, establece que el tensor de potencia instantánea en un sistema eléctrico polifásico se obtiene mediante el producto diádico entre el tensor de voltaje y el tensor de corriente. No obstante, el análisis actual de la potencia compleja se limita a sistemas eléctricos monofásicos lineales o trifásicos simétricos y asimétricos. A partir de lo anterior, la presente investigación desarrolla un análisis geométrico de manera tensorial de los sistemas eléctricos polifásicos de corriente alterna, relacionando el teorema de Fortescue con la teoría del tensor de potencia instantánea, permitiendo así, generalizar y ampliar la teoría ya existente de los sistemas eléctricos en torno al análisis complejo de los circuitos de corriente alterna deduciendo los elementos activos, pasivos y la generalización de la potencia aplicadas a ejemplos prácticos.

# Introducción

Este proyecto tiene como objetivo ser un aporte teórico de novedad científica al promover el estudio y análisis de circuitos de corriente alterna en el Departamento de Física y en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. Adicional a ello, existen varios enfoques donde se intenta llegar a una integración de varias disciplinas, uno de ellos, es el transdisciplinar, el cual propone resolver un problema desde diferentes perspectivas disciplinarias; este tipo de actividades en el departamento y en la facultad permitirán dar diversas soluciones a un problema en común, en torno a las nuevas tendencias en la enseñanza de la física y, para el caso particular, la enseñanza de los circuitos eléctricos, promoviendo un desarrollo conceptual más profundo que pueda ser implementado en cursos de teoría de circuitos eléctricos y en la construcción de algoritmos computacionales más sencillos.

Por otra parte, la generalización de modelos geométricos adoptados a conceptos generales de la física, han hecho que cada vez sea más importante su análisis. El teorema de Fortescue o de componentes simétricas, es usado, con frecuencia, para relacionar sistemas eléctricos desbalanceados mediante la superposición de tres balanceados y así se puede reducir el análisis matemático para estos sistemas. La teoría generalizada de la potencia instantánea, establece que el producto tensorial entre el tensor de voltaje y el tensor de corriente determina el tensor de potencia instantánea para un sistema eléctrico de  $n$ -fases.


Sin embargo, el análisis actual de la potencia compleja se ha estudiado sobre todo en sistemas eléctricos monofásicos o trifásicos, por ello, se desarrolla una conceptualización teórica geométrica de los sistemas eléctricos  $n$ -fásicos, generalizando la teoría de los sistemas eléctricos polifásicos junto con el método de coordenadas simétricas generalizadas para dar una simetría a las componentes de los fasores de corriente, voltaje e impedancia.

|   |   |
|---|---|
| <br>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL<br><small>Escuela de Pedagogía</small> | <b>FORMATO</b>                              |
|   | <b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b> |
| <b>Código: FOR020GIB</b>  | <b>Versión: 01</b>                          |
| <b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>  | <b>Página 1 de 4</b>                        |

| <b>1. Información General</b> |  |
|-------------------------------|--|
| <b>Tipo de documento</b>      | Trabajo de grado   |
| <b>Acceso al documento</b>    | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central                                  |
| <b>Título del documento</b>   | Análisis geométrico de los sistemas eléctricos simétricos y asimétricos para n-Fases |
| <b>Autor(es)</b>              | Adriana Escobar Velandia; Freddy Alexander Torres Payoma.                            |
| <b>Director</b>               | Yesid Javier Cruz Bonilla  |
| <b>Publicación</b>            | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 122 p.                                |
| <b>Unidad Patrocinante</b>    | Universidad Pedagógica Nacional  |
| <b>Palabras Claves</b>        | Sistemas eléctricos, análisis geométrico, simétricos, asimétricos                    |

| <b>2. Descripción</b>  |
|--|
| <p>En los circuitos eléctricos polifásicos de corriente alterna las señales senoidales de voltaje y corriente son analizadas mediante el uso de diagramas fasoriales que representan el comportamiento de un sistema en el dominio de la frecuencia, y se desarrollan a través de las leyes fundamentales de la teoría de los circuitos eléctricos, sin embargo, el estudio se limita a circuitos polifásicos de tres fases simétricos, es decir, sus fasores presentan una misma magnitud y ángulo de desfase uno respecto al otro. Para el caso contrario, donde los sistemas eléctricos trifásicos no son simétricos, se emplea el teorema de Fortescue o de componentes simétricas, el cual es utilizado para relacionar sistemas eléctricos asimétricos mediante la superposición de tres sistemas simétricos. Por otra parte, la teoría generalizada de la potencia instantánea desarrollada por los profesores Ustariz-Farfan &amp; Cano-Plata de la Universidad Nacional de Colombia, establece que el tensor de potencia instantánea en un sistema eléctrico polifásico se obtiene mediante el producto diádico entre el tensor de voltaje y el tensor de corriente. Sin embargo, el análisis actual de la potencia compleja se limita a sistemas eléctricos monofásicos lineales o trifásicos simétricos y asimétricos. A partir de lo anterior, la presente investigación desarrolla un análisis geométrico de manera tensorial de los sistemas eléctricos polifásicos de corriente alterna, relacionando el teorema de Fortescue con la teoría del tensor de potencia instantánea, permitiendo así, generalizar y ampliar la teoría ya existente de los sistemas eléctricos en torno al análisis complejo de los circuitos de corriente alterna deduciendo los elementos activos, pasivos y la generalización de la potencia aplicadas a ejemplos prácticos.</p> |

| <b>3. Fuentes</b>  |
|--|
| <p>Cruz, Y. J. <i>Notas de geometría y Física</i>, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2010.</p> <p>Dzafic I., Neisius H., Gilles H., Henselmeyer S. &amp; Landerberger V. <i>Three-Phase Power Flow in Distribution Networks Using Fortescue Transformation</i>, IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS, VOL.28, NO.2, MAY 2013.</p> <p>Dzafic I., Donlagic, T. &amp; Henselmeyer S. <i>Fortescue Transformations for Three-Phase Power Flow Analysis in Distribution Networks I</i>, 978-1-4673-2729-9/12/\$31.00 ©2012 IEEE</p> <p>Fortescue, C. L. <i>Method of Symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks.</i>, 34 th Annual Convention of the American Institute of Electrical Engineers, 1027 – 1140, 1918</p> |

|   |   |
|---|---|
| <br>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL<br><small>Escuela de Pedagogía</small> | <b>FORMATO</b>                              |
|   | <b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b> |
| <b>Código: FOR020GIB</b>  | <b>Versión: 01</b>                          |
| <b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>  | <b>Página 2 de 4</b>                        |

Herrera R. S., Salmerón P., Vázquez J. R., Litrán S. P. & Pérez A. *Generalized instantaneous reactive power theory in polu-phase power systems*, Department of Electrical Engineering, Ctra/ Palos de la Frontera s/n, Palos de la Frontera, Huelva, Spain, article, available <http://www.uhu.es/eps>.

Jabr, R. A & Dzafic. *A Fortescue Approach for Real-Time Short Circuit Computation in Multiphase Distribution Networks*, Scopus journal, paginas 3276-3285, 2015.

Sanchez, M. *Conceptos Errados en Circuitos Eléctricos: "Dificultades relacionadas con la corriente electrica en un circuito de corriente continua"*, Ciencia ahora n°24, 1 -15, 2009.

Téllez, A., Galarza, D.C. & Ortiz Matos, L. *Analysis of power losses in the asymmetric construction of electric distribution systems*, Scopus journal, paginas 2190-2194, 2015

Ustariz-Farfan, A. J., & Cano-Plata, E. A. (2012). *Teoría generalizada de la potencia instantánea aplicada a la compensación de cargas polifásicas*, Revista Chilena de Ingeniería, 148-159.

#### 4. Contenidos

Este proyecto tiene como objetivo ser un aporte teórico de novedad científica al promover el estudio y análisis de circuitos de corriente alterna en el Departamento de Física y en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. Adicional a ello, existen varios enfoques donde se intenta llegar a una integración de varias disciplinas, uno de ellos, es el transdisciplinar, el cual propone resolver un problema desde diferentes perspectivas disciplinarias; este tipo de actividades en el departamento y en la facultad permitirán dar diversas soluciones a un problema en común, en torno a las nuevas tendencias en la enseñanza de la física y, para el caso particular, la enseñanza de los circuitos eléctricos promoviendo un desarrollo conceptual más avanzado que pueda ser implementado en cursos de teoría de circuitos eléctricos avanzados de nivel profesional y en la construcción de algoritmos computacionales.


Por otra parte, la generalización de modelos geométricos adoptados a conceptos generales de la física, han hecho que cada vez sea más importante su análisis. El teorema de Fortescue o de componentes simétricas, es usado, con frecuencia, para relacionar sistemas eléctricos desbalanceados mediante la superposición de tres balanceados y así se puede reducir el análisis matemático para estos sistemas. La teoría generalizada de la potencia instantánea, establece que el producto tensorial entre el tensor de voltaje y el tensor de corriente determina el tensor de potencia instantánea para un sistema eléctrico de n-fases.

Sin embargo, el análisis actual de la potencia compleja se ha estudiado sobre todo a sistemas eléctricos monofásicos lineales o trifásicos, por ello, se desarrolla una conceptualización teórica geométrica de los sistemas eléctricos n-fásicos, generalizando la teoría de los sistemas eléctricos polifásicos junto con el método de coordenadas simétricas generalizadas para dar una simetría a las componentes de los fasores de corriente, voltaje e impedancia.

#### 5. Metodología

La Metodología que se trabajó en este proyecto, fue enfocada directamente desde un contexto problema en donde se formuló una pregunta que guíe la investigación de manera lógica y coherente, a través de un análisis descriptivo y explicativo, con el fin de obtener una mayor riqueza en la información.

La investigación se desarrolló a través de cuatro etapas, descritas a continuación:

|  |   |
|--|---|
| <br>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA<br>NACIONAL<br><small>Escuela de Pedagogía</small> | <b>FORMATO</b>                              |
|  | <b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b> |
| <b>Código: FOR020GIB</b>   | <b>Versión: 01</b>                          |
| <b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>   | <b>Página 3 de 4</b>                        |

#### Etapa 1: Recopilación de la Información

En esta etapa se recopiló la información más relevante acerca de la teoría de circuitos eléctricos de n-fases, el teorema de Fortescue y la teoría generalizada del tensor de potencia instantánea, con el fin de sustentar el marco teórico relevante a la investigación.

#### Etapa 2: Interpretación geométrica del Teorema de Fortescue

Para esta etapa de la investigación, se determinaron las estructuras y elementos físicos y matemáticos que definen e interpretan geoméricamente el teorema de Fortescue, teniendo en cuenta la relación geométrica, y la relación entre la cantidad de fases y las tensiones de los sistemas eléctricos de n-fases.

#### Etapa 3: Comparación entre la teoría del tensor de potencia y el análisis de la potencia compleja

En esta fase, se realizó una comparación entre el tensor de potencia instantánea y las definiciones de la potencia compleja en sistemas eléctricos de corriente alterna, con el fin de relacionar las componentes esenciales que establecen las distintas demostraciones y relaciones físicas de los conceptos.

#### Etapa 4: Desarrollo geométrico y análisis conceptual

Finalmente, se desarrolla un análisis generalizado sobre los principios que definen la teoría de los circuitos eléctricos de n-fases haciendo uso del álgebra tensorial.

## 6. Conclusiones


El desarrollo tensorial de los sistemas eléctricos a partir del análisis de la potencia instantánea y compleja, posibilita una nueva alternativa para evaluar sistemas n-fásicos independientes de su naturaleza, es decir, si son sistemas simétricos o asimétricos, aportando a la investigación en física, enseñanza de la física, ingeniería y telecomunicaciones, en los nuevos planteamientos teóricos de fallas simétricas y asimétricas en sistemas polifásicos y máquinas rotativas, a su vez. El análisis geométrico a partir del tensor de potencia instantánea y el teorema de Fortescue-Stokvis propone un nuevo estudio generalizado de una nueva metodología que puede ser usada como estrategia de enseñanza-aprendizaje en los cursos de circuitos eléctricos y aplicaciones a cursos de cálculo tensorial con aplicaciones.

El objetivo general de la investigación se logró alcanzar luego de solucionar los aspectos recurrentes en torno a los objetivos específicos:

Se demostró física, experimental y matemáticamente el teorema de Fortescue de forma tensorial para un sistema de n-fases luego de desarrollar un análisis geométrico sobre las distintas características de los circuitos eléctricos polifásicos a partir de las concepciones clásicas de los circuitos eléctricos y del análisis geométrico relacionado con las teorías de los números complejos.

Se logró relacionar y generalizar el tensor de potencia instantánea con el teorema de Fortescue en forma tensorial basándose en un tensor de potencia compleja desarrolladas mediante transformaciones fasoriales, donde se desengloban todas las formas complejas de la potencia, tales demostraciones parten desde las relaciones existentes al definir los elementos matriciales del tensor de potencia compleja y del teorema de Fortescue generalizado.

Se Desarrolló un análisis tensorial sobre los conceptos fundamentales de potencia, voltaje, corriente e impedancia eléctrica en los sistemas eléctricos de n-fases, determinando los elementos geométricos en el análisis de sistemas de potencia en circuitos de corriente alterna de n-fases, desarrollando geoméricamente cada uno de los conceptos

|  |   |  |
|--|---|--|
| <br>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA<br>NACIONAL<br><small>Escuela de Pedagogía</small> | <b>FORMATO</b>                              |  |
|  | <b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b> |  |
| <b>Código: FOR020GIB</b>   | <b>Versión: 01</b>                          |  |
| <b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>   | <b>Página 4 de 4</b>                        |  |

definidos por las leyes de Kirchhoff, ley de Ohm y el análisis de nodos y mallas en sistemas eléctricos en el dominio de la frecuencia.

También, se desarrollaron dos trabajos presentados en eventos científicos, en el primero se trabaja sobre *la enseñanza de los circuitos eléctricos de n-fases a partir del teorema de Fortescue-Stokvis y el tensor de potencia instantánea*, donde se participó activamente en categoría de ponente contando con el resumen aprobado en el capítulo de memoria del congreso. También, el trabajo relacionado al *análisis geométrico de los sistemas eléctricos a partir del tensor de potencia instantánea*, presentados en el XXVI Congreso Nacional de Física en Manizales Colombia (Anexo Resúmenes).

Finalmente, este trabajo presenta una perspectiva interdisciplinar para el departamento de Física, la facultad de Ciencia y Tecnología y con instituciones universitarias logrando suplir uno de los propósitos propuestos en el Plan de Desarrollo Institucional de la Universidad Pedagógica Nacional, abriendo las miras de que puede ser trabajado a posterior al retomar los conceptos y seguir reforzando los conceptos propuestos en dicho trabajo.

|                       |  |
|-----------------------|--|
| <b>Elaborado por:</b> | Freddy Alexander Torres Payoma, Adriana Escobar Velandia |
| <b>Revisado por:</b>  | Yesid Javier Cruz Bonilla                                |

|  |    |    |      |
|--|----|----|------|
| <b>Fecha de elaboración del Resumen:</b> | 12 | 11 | 2015 |
|--|----|----|------|

# Índice general

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Declaración</b>  | <b>II</b>   |
| <b>Agradecimientos</b>  | <b>III</b>  |
| <b>Lista de figuras</b>   | <b>IV</b>   |
| <b>Lista de tablas</b>  | <b>VI</b>   |
| <b>Resumen</b>  | <b>VIII</b> |
| <b>Introducción</b>   | <b>IX</b>   |
| <b>1. Problema de investigación</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1. Antecedentes del problema de investigación . . . . .   | 1           |
| 1.1.1. Estudios referentes a la enseñanza de los circuitos eléctricos . . . . .                       | 1           |
| 1.1.2. Estudios referentes a trabajos sobre sistemas eléctricos simétricos y<br>asimétricos . . . . . | 2           |
| 1.2. Formulación del problema . . . . .   | 3           |
| 1.3. Justificación . . . . .  | 3           |
| 1.4. Objetivos . . . . .  | 5           |
| 1.4.1. Objetivo General . . . . .   | 5           |
| 1.4.2. Objetivos específicos . . . . .  | 5           |
| 1.5. Metodología . . . . .  | 5           |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2. Sistema Eléctrico de n-fases</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1. Descripción . . . . .  | 7         |
| 2.2. Elementos activos y pasivos de los circuitos eléctricos . . . . .                        | 7         |
| 2.2.1. Resistor . . . . .   | 8         |
| 2.2.2. Inductor . . . . .   | 8         |
| 2.2.3. Capacitor . . . . .  | 9         |
| 2.3. Leyes de Kirchhoff . . . . .   | 9         |
| 2.3.1. Leyes de Voltaje de Kirchhoff (LVK) . . . . .  | 10        |
| 2.3.2. Leyes de Corriente de Kirchhoff (LCK) . . . . .  | 11        |
| 2.4. Señales y formas de onda . . . . .   | 11        |
| 2.5. Funciones Periódicas . . . . .   | 12        |
| 2.5.1. Señal senoidal . . . . .   | 12        |
| 2.5.2. Señales no sinusoidales . . . . .  | 13        |
| 2.5.3. Funciones no periódicas . . . . .  | 14        |
| 2.6. Análisis de circuitos en estado estacionario . . . . .                                   | 14        |
| 2.6.1. Transformada fasorial directa e inversa y fasores eléctricos . . . . .                 | 14        |
| 2.6.2. Impedancias ( $Z$ ) y Admitancia ( $Y$ ) . . . . .                                     | 17        |
| 2.7. Potencia en circuitos de Corriente Alterna (CA) . . . . .                                | 18        |
| 2.7.1. Potencia instantánea en el dominio temporal . . . . .                                  | 18        |
| 2.7.2. Potencia Activa y Reactiva . . . . .   | 18        |
| 2.7.3. Potencia compleja y aparente . . . . .   | 19        |
| 2.8. Circuitos de n-fases . . . . .   | 19        |
| 2.8.1. Representación fasorial de circuitos eléctricos simétricos (balanceados)               | 19        |
| 2.8.2. Representación fasorial de circuitos eléctricos asimétricos (no balanceados) . . . . . | 21        |
| <br>  |           |
| <b>3. Teorema de Fortescue-Stokvis y teoría del tensor de potencia instantánea</b>            | <b>23</b> |
| 3.1. Descripción . . . . .  | 23        |
| 3.2. Resolución de sistemas asimétricos . . . . .   | 24        |
| 3.2.1. Operador de secuencia $a$ . . . . .  | 24        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 3.2.2.    | Sistema de n-vectores asimétricos aplicando operador de secuencia . . .          | 25        |
| 3.3.      | Componentes simétricas de sistemas trifásicos . . . . .                          | 26        |
| 3.3.1.    | Operador matricial trifásico . . . . .   | 27        |
| 3.3.2.    | Fasores asimétricos trifásicos . . . . .   | 27        |
| 3.3.3.    | Denotación en componentes simétricas . . . . .                                   | 27        |
| 3.3.4.    | Solución mediante las 3-componentes simétricas . . . . .                         | 28        |
| 3.4.      | Representación de las componentes simétricas de Stokvis para una matriz 3x3 .    | 30        |
| 3.5.      | Análisis Tensorial de la Potencia Instantánea . . . . .                          | 31        |
| 3.6.      | Tensor de Potencia Activa y Reactiva . . . . .                                   | 32        |
| <b>4.</b> | <b>Análisis geométrico de los sistemas eléctricos de n-fases</b>                 | <b>34</b> |
| 4.1.      | Descripción . . . . .  | 34        |
| 4.2.      | Operador de secuencia generalizado . . . . .                                     | 35        |
| 4.3.      | Componentes simétricas de rotación del teorema de Fortescue . . . . .            | 36        |
| 4.4.      | Matriz Generalizada para sistemas n-fásicos de manera tensorial . . . . .        | 38        |
| 4.5.      | Análisis geométrico: Postulado de correspondencia Dual (CD) . . . . .            | 39        |
| 4.6.      | Análisis tensorial complejo de los sistemas eléctricos . . . . .                 | 42        |
| 4.7.      | Análisis de la potencia fasorial en sistemas simétricos sobre cargas balanceadas | 45        |
| 4.8.      | Análisis de la potencia fasorial en sistemas asimétricos . . . . .               | 46        |
| 4.9.      | Impedancias y admitancias tensoriales . . . . .                                  | 50        |
| 4.9.1.    | Tensor de Impedancia $\mathbb{Z}_{ij}$ . . . . .                                 | 51        |
| 4.9.2.    | Tensor de Admitancia $\mathbb{Y}_{ij}$ . . . . .                                 | 51        |
| 4.10.     | la ley de Ohm en forma tensorial . . . . .                                       | 52        |
| 4.10.1.   | Ley de Ohm generalizada . . . . .  | 52        |
| 4.10.2.   | Ley de Ohm en el dominio de la frecuencia . . . . .                              | 55        |
| 4.11.     | Leyes de Kirchooff de manera tensorial . . . . .                                 | 58        |
| <b>5.</b> | <b>Aplicaciones</b>  | <b>60</b> |
| 5.1.      | Análisis geométrico de n-fases para sistemas de nodo común . . . . .             | 60        |
| 5.1.1.    | Análisis geométrico para sistemas simétricos con cargas iguales . . . . .        | 61        |

|   |           |
|---|-----------|
| 5.1.2. Análisis geométrico para sistemas simétricos con cargas diferentes . . . | 65        |
| 5.2. Tensor de Admitancia de Barra $Y_{ij}$ . . . . .                           | 71        |
| 5.3. Análisis de falla por corto circuito . . . . .                             | 75        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>81</b> |
| <b>A. Demostraciones</b>  | <b>87</b> |
| A.1. Demostración del postulado de correspondencia dual . . . . .               | 87        |
| A.2. Ley de Ohm en sistemas simétricos con cargas balanceados . . . . .         | 88        |
| A.3. Ley de Ohm en sistemas simétricos con cargas desbalanceadas . . . . .      | 90        |
| <b>B. Códigos en MATLAB®</b>  | <b>93</b> |
| B.1. Cambio de complejos rectangulares a polares . . . . .                      | 93        |
| B.2. Cambio de complejos polares a rectangulares . . . . .                      | 93        |
| B.3. Código de implementación para el ejemplo 1 . . . . .                       | 94        |
| B.4. Código de implementación para el ejemplo 2 . . . . .                       | 96        |
| B.5. Código de implementación para el ejemplo 4 . . . . .                       | 98        |

# Capítulo 1

## Problema de investigación

### 1.1. Antecedentes del problema de investigación

Dado que el objeto de investigación se centra en un análisis geométrico de los sistemas eléctricos polifásicos, en este apartado en particular se presenta una breve revisión literaria referente a los circuitos eléctricos de n-fases, donde se describen los estudios referentes a modelos matemáticos desarrollados sobre sistemas eléctricos simétricos y asimétricos.

#### 1.1.1. Estudios referentes a la enseñanza de los circuitos eléctricos

El propósito del trabajo de grado pretende promover el estudio y análisis de los circuitos de corriente alterna, mediante el cual se propone un aporte teórico a través de un análisis geométrico generalizado de los sistemas eléctricos de n-fases, para ello, se plantean aquellos estudios que dan el aval y revelan la importancia en la enseñanza de la física. Inicialmente, Sánchez (2012) en su trabajo de grado *“El electromagnetismo una experiencia para vivir”* realiza una descripción sobre la necesidad de crear estrategias de anclaje que permitan crear estructuras conceptuales más solidas que contribuyan de manera mas eficaz a la creación de nuevas explicaciones que aporten a la construcción de nuevos conocimientos científicos [39], partiendo del hecho que en la actualidad es importante afrontar distintos temas de investigación a través de herramientas conceptuales que logren abarcar de manera más general problemas que se presenten en la actualidad y que ayuden en la construcción de conceptos. Uno de los

objetivos de la enseñanza está en diseñar nuevas estrategias y teorías modernas de aprendizaje, que lleven a una visión interdisciplinaria e integral del mundo, Neira (1997) plantea la importancia del uso de enfoques interdisciplinarios para el aprendizaje de la matemática [32]. Por otra parte, Sánchez (2009) evidencia el tipo de dificultades conceptuales que se tienen y que persisten a lo largo de todo el estudio de los circuitos eléctricos, apoyando a la investigación, en no cometer errores que dificulten un aprendizaje conceptual [40]. Cruz (2010) en sus notas de geometría y física escritas a lo largo de su experiencia como docente en el curso de Geometría y física en el departamento de física de la Universidad Pedagógica Nacional, indica la importancia de comprender los conceptos generales de la geometría en el desarrollo de nuevas teorías físicas [7] finalmente, López-Rupérez (1995), en su artículo “*una nueva fuente de inspiración para la Educación Científica*”, sugiere estudiar varias problemáticas desde diversas disciplinas permitiendo así una amplia visión del conocimiento científico [29].

### **1.1.2. Estudios referentes a trabajos sobre sistemas eléctricos simétricos y asimétricos**

Por otra parte, en el desarrollo conceptual de la investigación se desarrolla una recopilación de antecedentes referentes al análisis de la teoría en circuitos eléctricos de n-fases simétricos y asimétricos. Jabr y Dzafic (2015) realizan un acercamiento al teorema de Fortescue mediante métodos computacionales analizando sistemas en cortocircuito evaluados en tiempo real sobre redes polifásicas [26]. Téllez, Galarza & Ortiz en (2015) discuten las pérdidas de energía en redes monofásica, bifásica y trifásica desarrollando criterios a tener en cuenta en los diseños de sistemas de distribución de energía eléctrica, proporcionando una herramienta de diseño óptimo [43] y, finalmente, Ustariz-Farfan & Cano-Plata (2012), proponen la nueva Teoría del Tensor de Potencia Instantánea, a través del cálculo tensorial [45]. Dichos estudios garantizan la pertinencia en el desarrollo conceptual generalizado de los sistemas polifásicos al realizar el análisis desde perspectivas algorítmicas computacionales y características de eficiencia y eficacia sobre el análisis de sistemas eléctricos de corriente alterna.

## 1.2. Formulación del problema

La enseñanza de los circuitos eléctricos usualmente está ligada a aspectos algorítmicos, por esta razón, los estudiantes tienden a manipular ecuaciones para resolver problemas de carácter cuantitativo, pero su desarrollo a nivel conceptual no es coherente con la teoría, y esto genera que los estudiantes respondan erróneamente a situaciones problemas, causando dificultades en el aprendizaje de los sistemas eléctricos [40], como por ejemplo, no poder distinguir entre potencia eléctrica y potencial eléctrico. Estas dificultades por lo general, persisten en los estudiantes durante la enseñanza de cursos de circuitos eléctricos y/o electromagnetismo, por lo tanto, deben ser tratadas específicamente por el estudiante como un compromiso significativo que éste tenga consigo mismo [41].

Es por ello que, el presente trabajo de grado pretende combatir aquellas dificultades de aprendizaje que puedan presentarse al expresar los conceptos que se definen a través del álgebra tensorial. Con esto se llegará a una aplicación de los tensores en los sistemas eléctricos de n-fases a partir del teorema de Fortescue en relación con la teoría del tensor de potencia instantánea, de ello resultará un análisis más profundo desde un punto de vista geométrico, ayudando a incrementar el nivel conceptual que se tiene sobre estos sistemas eléctricos. A partir de lo anterior, se formula la siguiente pregunta problema:

*¿Cómo expresar geoméricamente los sistemas eléctricos de n-fases simétricos y asimétricos de manera tensorial?*

## 1.3. Justificación

El presente proyecto, tiene como finalidad desarrollar un aporte teórico de novedad científica a partir de un análisis geométrico que lleve a un aprendizaje autorregulado y significativo, mediante el estudio de un caso particular: ***“los sistemas eléctricos vistos desde una perspectiva geométrica”***. A su vez, en el proceso de formación, se busca fortalecer aquellos fundamentos conceptuales que guían al proceso investigativo del aprendizaje [29][40], partiendo del hecho que, al reestructurar un conocimiento, se deberá tener un mejor dominio de los conceptos generales que se definen en la investigación, asignando un significado conceptual a cada uno de

los componentes físicos que se regulan en el problema de investigación [25].

Por otra parte, al promover el estudio y análisis de circuitos de corriente alterna, es necesario crear estrategias de anclaje en una estructura conceptual, contribuyendo a la construcción del nuevo conocimiento científico [39], ya que actualmente es importante afrontar distintos temas de investigación a través de herramientas conceptuales que logren abarcar de manera más general problemas que se presenten en la construcción de conceptos y, en general, uno de los objetivos de la enseñanza está en una búsqueda constante de estrategias y teorías modernas de aprendizaje, que lleven a una visión interdisciplinar e integral del mundo [39], es por ello que a través de dichas estrategias se pueden comprender ciertos fenómenos eléctricos y magnéticos en el área del electromagnetismo de manera generalizada, con ello se podrá dar un significado físico más relevante a algunos modelos matemáticos usados cotidianamente.

Por todo lo anterior, se puede pensar en la forma de lograr expresar los sistemas eléctricos de n-fases simétricos y asimétricos a partir del teorema de Fortescue y la generalización de la potencia compleja mediante las definiciones dadas en la formulación del tensor de potencia instantánea. Esto permitirá incentivar y ampliar el estudio de los sistemas eléctricos de corriente alterna en los estudiantes de diferentes departamentos de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional [16], y servirá como punto de partida a futuros trabajos sobre temas relacionados en el Departamento de Física, buscando un desarrollo de proyectos de investigación que fomenten relaciones académicas entre estudiantes de diferentes áreas del conocimiento consolidando vínculos investigativos entre distintos proyectos curriculares y universidades, como lo plantea uno de los objetivos del PDI (2014) <sup>1</sup>.

Así mismo, la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, plantea en su misión, formar futuros docentes que logren generar interrogantes acerca de los fundamentos en ciencias experimentales, las matemáticas, la tecnología, sus pedagogías y didácticas [16], es por ello, que este trabajo pretende consolidar y enriquecer las concepciones que se tienen del electromagnetismo y, en particular, el análisis de sistemas eléctricos, vistos desde un enfoque diferente “*perspectiva geométrica*”.

---

<sup>1</sup>Las siglas (PDI) corresponden al Plan de Desarrollo Institucional definido para el periodo de 2014 - 2019 de la Universidad Pedagógica Nacional. Objetivo 4, pág. 29. [20]

## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo General**

Analizar geoméricamente los sistemas eléctricos simétricos y asimétricos de n-fases a través de la teoría generalizada del tensor de potencia instantánea y el teorema de Fortescue.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Expresar el teorema de Fortescue de forma tensorial para un sistema de n-fases.
- Relacionar y generalizar la teoría de la potencia compleja a partir del tensor de potencia instantánea y el teorema de Fortescue de manera tensorial.
- Desarrollar un análisis tensorial sobre los conceptos fundamentales de potencia, voltaje, corriente e impedancia eléctrica en los sistemas eléctricos de n-fases

## **1.5. Metodología**

La Metodología que se trabajó en este proyecto, fue enfocada directamente desde un contexto problema en donde se formuló una pregunta que guíe la investigación de manera lógica y coherente, a través de un análisis descriptivo y explicativo, con el fin de obtener una mayor riqueza en la información [25].

La investigación se desarrolló a través de cuatro etapas, descritas a continuación:

### **Etapas 1: Recopilación de la Información**

En esta etapa se recopiló la información más relevante acerca de la teoría de circuitos eléctricos de n-fases, el teorema de Fortescue y la teoría generalizada del tensor de potencia instantánea, con el fin de sustentar el marco teórico relevante a la investigación.

**Etapa 2: Interpretación geométrica del Teorema de Fortescue**

Para esta etapa de la investigación, se determinaron las estructuras y elementos físicos y matemáticos que definen e interpretan geoméricamente el teorema de Fortescue, teniendo en cuenta la relación geométrica, y la relación entre la cantidad de fases y las tensiones de los sistemas eléctricos de n-fases.

**Etapa 3: Comparación entre la teoría del tensor de potencia y el análisis de la potencia compleja**

En esta fase, se realizó una comparación entre el tensor de potencia instantánea y las definiciones de la potencia compleja en sistemas eléctricos de corriente alterna, con el fin de relacionar las componentes esenciales que establecen las distintas demostraciones y relaciones físicas de los conceptos.

**Etapa 4: Desarrollo geométrico y análisis conceptual**

Finalmente, se desarrolla un análisis generalizado sobre los principios que definen la teoría de los circuitos eléctricos de n-fases haciendo uso del álgebra tensorial.

# Capítulo 2

## Sistema Eléctrico de n-fases

### 2.1. Descripción

Los sistemas eléctricos de n-fases son aquellos que poseen más de una fuente de tensión las cuales distribuyen varias corrientes monofásicas desfasadas entre si [15]. En los circuitos eléctricos polifásicos se recurre al uso de fuentes de corriente alterna (CA)<sup>1</sup>, puesto que, las fuentes de corriente directa (CD)<sup>2</sup> no varían respecto al tiempo y, la conexión de varias fuentes (CD) resultarían en la suma de ellas mismas, sin embargo, las fuentes (CA) varían con respecto al tiempo y a un ángulo de desfase distinto, es por ello que, en este capítulo, se debe hacer un análisis profundo de los sistemas eléctricos en el dominio temporal y de frecuencia.

### 2.2. Elementos activos y pasivos de los circuitos eléctricos

Los elementos de un circuito eléctrico son fundamentales para analizar de manera eficiente las tensiones y corrientes presentes en él. Los elementos se dividen entre *elementos pasivos* y *elementos activos*, en el primero, no se presenta ningún tipo de generación de energía, mientras que en el segundo si.

Los elementos pasivos fundamentales son el *resistor*, el *inductor* y el *capacitor*, los cuales tienen distinto tipo de respuesta evaluadas en el tiempo, en términos de su tensión, potencia y

---

<sup>1</sup>Abreviatura de Corriente Alterna

<sup>2</sup>Abreviatura de Corriente Directa

energía eléctrica.

### 2.2.1. Resistor

Es un elemento que tiene como finalidad limitar el valor de la corriente eléctrica, su modelo ideal es la homogeneidad y la superposición. Se expresa mediante la ley de Ohm [5]<sup>3</sup>

$$V = RI \quad [V] \quad (2.1)$$

donde  $V$  es la tensión o voltaje,  $R$  la resistencia e  $I$  la corriente.

La potencia absorbida  $P$  por el resistor se da a partir de la expresión

$$P = VI = \frac{dW}{dt} [W] \quad (2.2)$$

Y la energía  $W$  que se realiza luego de hacer un trabajo desde un tiempo  $t_1$  hasta  $t_2$  está dada por

$$W = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} V^2 dt \quad [J] \quad (2.3)$$

### 2.2.2. Inductor

Es un elemento que se encarga de almacenar energía por medio de un campo magnético, está compuesto por una bobina de alambre conductor enrollado, se deduce que el inductor es proporcional a la velocidad de cambio de la corriente con respecto al tiempo, es decir:

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad [V] \quad (2.4)$$

La potencia absorbida por el inductor se da a partir de la expresión

$$P = LI \frac{dI}{dt} \quad [W] \quad (2.5)$$

---

<sup>3</sup>Se hace mención a la ley de Ohm, postulada en 1827 por Georg Simon Ohm [ref]

Y la energía que se realiza luego de hacer un trabajo desde un tiempo  $t_1$  hasta  $t_2$  está dada por

$$W = \frac{1}{2}L(I_2^2 - I_1^2) [J] \quad (2.6)$$

donde  $L$  es el valor de la inductancia.

### 2.2.3. Capacitor

El capacitor es el elemento encargado de almacenar energía por medio de un campo eléctrico  $E$ , en general<sup>4</sup> consta de dos conductores de metal donde se establece una diferencia de potencial, en términos de la capacitancia  $C$  se expresa como:

$$V = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} I dt [V] \quad (2.7)$$

La potencia absorbida por el capacitor se da a partir de la expresión

$$P = CV \frac{dV}{dt} [W] \quad (2.8)$$

Y la energía que realiza luego de hacer un trabajo desde un tiempo  $t_1$  hasta  $t_2$  está dada por:

$$W = \frac{1}{2}C(V_2^2 - V_1^2) [J] \quad (2.9)$$

## 2.3. Leyes de Kirchhoff

Las Leyes de Kirchhoff de los circuitos eléctricos data del año 1846 descritas por el físico prusiano [34]<sup>5</sup> Gustav Kirchhoff. En general, las leyes de Kirchhoff se dividen en dos, en las *Leyes de Voltaje de Kirchhoff (LVK)* y las *Leyes de Corriente de Kirchhoff (LCK)*

<sup>4</sup>Existen otras formas de almacenar energía por medio de un campo eléctrico, sin embargo, se hace mención a la forma que generalmente se utiliza para la fabricación de capacitores de uso comercial.

<sup>5</sup>Prusiano hace referencia a las personas actualmente nacidas en Kaliningrado, Rusia

### 2.3.1. Leyes de Voltaje de Kirchhoff (LVK)

La LVK<sup>6</sup> establece que la sumatoria de voltajes en un lazo cerrado fig.(2.1) de elementos eléctricos será igual a cero, es decir [1]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = 0 \quad (2.10)$$

Respetando la convención de signos de la fig.(2.1), la sumatoria estará dada como:

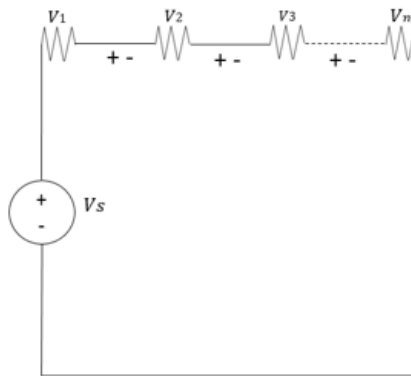


Figura 2.1: Voltajes dentro de un lazo cerrado.

Varias cargas resistivas en serie representan una caída de potencial que va a ser igual al voltaje generado por la fuente de alimentación del circuito. *Realizada por los autores*

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = -V_s + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = 0 \quad (2.11)$$

Donde  $V_s$  es la fuente de tensión que suministra una diferencia de potencial eléctrico sobre cada una de las cargas.

---

<sup>6</sup>En adelante, se abreviará en el documento a través de dicha sigla cuando se haga mención de las Leyes de Voltaje de Kirchhoff

### 2.3.2. Leyes de Corriente de Kirchhoff (LCK)

La LCK <sup>7</sup> establece que la sumatoria de las intensidades que entran en un nodo fig.(2.2) será igual a cero, es decir [1]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = 0 \quad (2.12)$$

Respetando la convención de signos de la fig.(2.2), la sumatoria estará dada como:

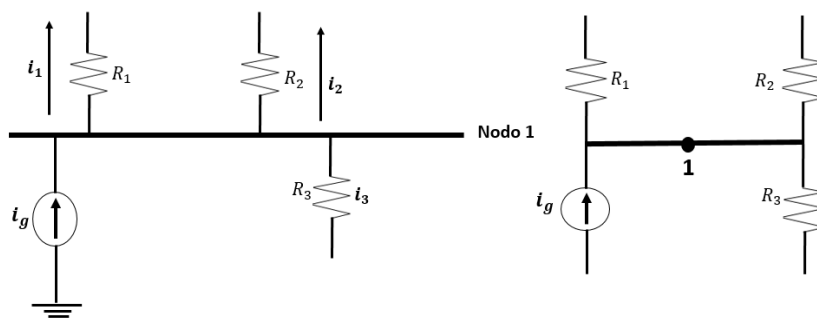


Figura 2.2: Corrientes que entran y salen en un mismo nodo.

Un nodo puede ser representado como un punto o una línea, en el cual se conectan varios elementos activos o pasivos que distribuye corriente eléctrica entre sí. *Realizada por los autores.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = -i_g + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = 0 \quad (2.13)$$

Donde  $i_g$  es la corriente generada por la fuente de tensión que alimentan a las cargas.

## 2.4. Señales y formas de onda

Como se mencionó en la introducción al capítulo, los circuitos de corriente alterna (CA) manejan señales que varían en función del tiempo y se encuentran desfasadas una con respecto a la otra. A continuación se realiza un estudio de las funciones periódicas y no periódicas presentes en estos sistemas [3].

<sup>7</sup>En adelante, se abreviará en el documento a través de dicha sigla cuando se haga mención de las Leyes de corriente de Kirchhoff

## 2.5. Funciones Periódicas

Se dice que una función es periódica si y solo si los valores de los intervalos se repiten en un periodo de tiempo  $T$  determinado.

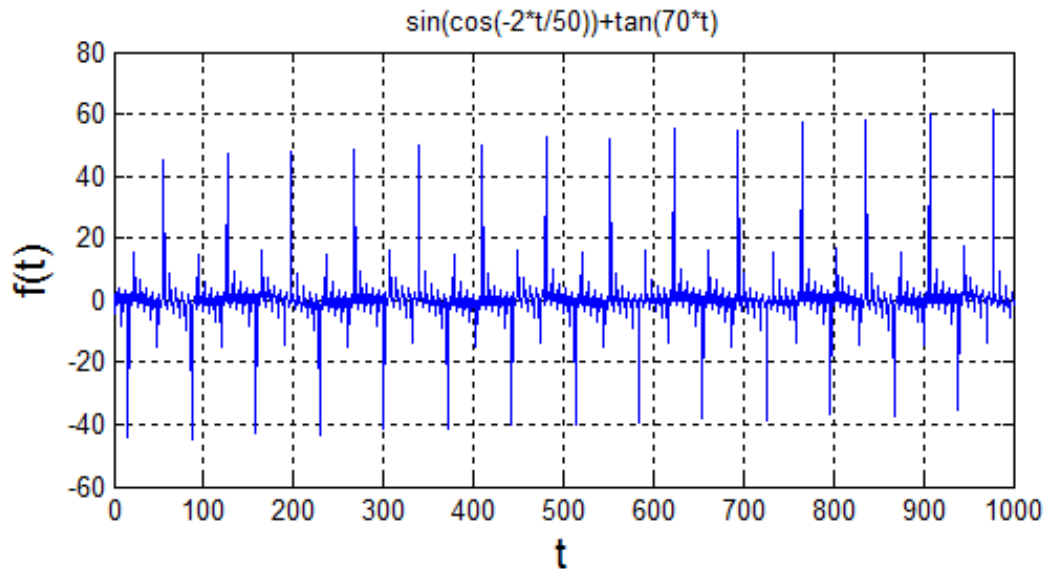


Figura 2.3: Ejemplos de funciones periódicas.

La imagen se repite según el periodo definido de oscilación. *Realizada por los autores*

### 2.5.1. Señal senoidal

Es una señal que representa gráficamente una función senoidal. Tiene como elementos principales: la amplitud de oscilación  $V_o$ , una velocidad angular  $\omega$ , un periodo de oscilación  $T$ , una frecuencia  $f$  y fase de oscilación  $\phi$ . Tiene como característica principal ser continua. este tipo de señales son utilizadas generalmente en el análisis de los circuitos de corriente alterna (CA) [3].

En el dominio temporal, la función que determina una señal sinusoidal se escribe como:

$$v(t) = V_o \text{sen}(\omega t + \phi) = V_o \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + \phi\right) \quad (2.14)$$

### 2.5.2. Señales no sinusoidales

Son señales periódicas en las que su comportamiento no es sinusoidal. para su análisis se recurre a ciertos elementos definidos a por las Series de Fourier, con el fin de escribirlas en términos de senos y cosenos. Cualquier señal periódica  $f(t)$  puede ser representada en función de senos y cosenos a partir de Series de Fourier descrito matemáticamente como [2]:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.15)$$

donde,  $a_o$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier que se determinan a partir de

$$a_o = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2.16)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.17)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.18)$$

#### Fuente no sinusoidal

Al aplicarse una tensión periódica no sinusoidal a una combinación de elementos no lineales se obtendrá una superposición en las fuentes eléctricas cuyas frecuencias no serán las mismas, logrando así, una cantidad de potencia absorbida por una carga, se expresa mediante la ecuación:

$$V(t) = V_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega_o t + \theta_k) \quad [V] \quad (2.19)$$

donde  $V_{DC}$  es la componente DC de la señal de entrada.

### 2.5.3. Funciones no periódicas

Son funciones que no se pueden definir para cualquier instante de tiempo  $t$ , es decir, a lo largo del tiempo su comportamiento es distinto, puesto que puede variar en cuanto a amplitud o frecuencia.

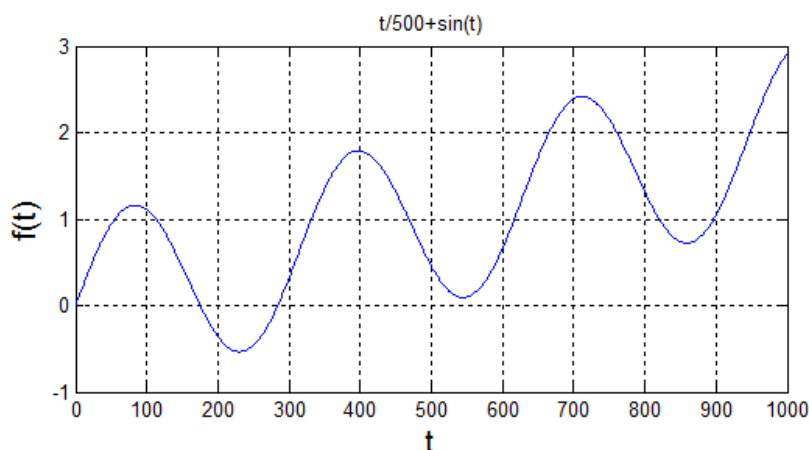


Figura 2.4: Ejemplo de funciones no periódicas.

Aunque la señal posee el mismo periodo de oscilación, sus amplitudes cambian a lo largo del tiempo, es decir, su comportamiento no será igual (no periódico). *Realizada por los autores*

## 2.6. Análisis de circuitos en estado estacionario

Usualmente, en las señales de corriente alterna (CA) se evalúa el comportamiento de la corriente en función del tiempo  $i(t)$  y de voltaje en función del tiempo  $v(t)$ . Sin embargo, el análisis de circuitos CA no se realiza usualmente en el dominio del tiempo, al ser el análisis muy extenuante y complicado, si no que se trabaja en el dominio de la frecuencia transformando las señales sinusoidales en fasores más cómodos de trabajar. [17]

### 2.6.1. Transformada fasorial directa e inversa y fasores eléctricos

Una señal sinusoidal  $v(t)$  puede ser transformada al dominio de la frecuencia determinando su señal exponencial compleja. Para ello se aplica la transformada fasorial, y, en caso contrario que se quiera trasladar del dominio de la frecuencia al temporal se aplica la transformada

fasorial inversa. [49]

### Transformada fasorial directa

Sea  $f(t)$  una función en el dominio temporal, descrita como [19]

$$f(t) = f_o \cos(\omega t + \phi) \quad (2.20)$$

donde,  $f_o$  es su amplitud,  $\omega$  la frecuencia angular y  $\phi$  su ángulo de fase, puede escribirse en el dominio de la frecuencia  $F(\omega)$  a partir de la transformada fasorial  $\mathcal{P}$ . [21]

$$\mathcal{P}\{f(t)\} = \mathcal{P}\{f_o \cos(\omega t + \phi)\} \quad (2.21)$$

Para ello, aplicando la identidad de Euler<sup>8</sup> se puede definir la transformada fasorial como<sup>9</sup>

$$\mathcal{P}\{f(t)\} = \Re\{f_o e^{j(\omega t + \phi)}\} = \Re\{f_o e^{j\omega t} e^{j\phi}\} \quad (2.22)$$

al realizarse una transformación fasorial, se debe tener en cuenta que todos los componentes del sistema deben estar definidos en base a una misma frecuencia angular  $\omega$ , por ende la solución se expresa como<sup>10</sup>:

$$\mathcal{P}\{f(t)\} = f_o e^{j\phi} \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) define la transformada fasorial de una función temporal.

### Transformada Fasorial inversa

De manera análoga, se puede transformar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, para ello, la transformada inversa fasorial  $\mathcal{P}^{-1}$  se define como [19]

---

<sup>8</sup> $e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

<sup>9</sup>Se expresa la unidad imaginaria de los números complejos con la letra **j**, con el fin de no confundirse con la letra *i* o *j* que serán utilizadas para expresar índices o *I* que expresa la corriente eléctrica, es decir  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$

<sup>10</sup>Nótese que el término  $e^{j\omega t}$  se omite al ser un valor constante sobre todo el sistema, es decir, todas las expresiones fasoriales tendrán la misma frecuencia angular  $\omega$  en función del tiempo al estar el sistema oscilando en intervalos de tiempos iguales.

$$\mathcal{P}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{P}^{-1}\{f_o e^{j\phi}\} \quad (2.24)$$

Se recupera la variable  $e^{j\omega t}$  resultando finalmente como

$$\mathcal{P}^{-1}\{F(\omega)\} = \Re\{f_o e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \quad (2.25)$$

Resultando nuevamente el fasor escrito en el dominio temporal como

$$\mathcal{P}^{-1}\{F(\omega)\} = f_o \cos(\omega t + \phi) \quad (2.26)$$

### Fasores eléctricos

Sea la función  $V(t) = V_o \cos(\omega t + \phi_v)$  la cual produce una señal sinusoidal de tensión eléctrica cuya señal asociada es tipo exponencial compleja  $\check{V}(t) = V_o e^{j(\omega t + \phi_v)}$ . La señal exponencial compleja puede expresarse como el producto de la exponencial de la frecuencia multiplicada por la exponencial del ángulo de fase, es decir:

$$\check{V}(t) = V_o e^{j\omega t} e^{\mathcal{P}^{-1}\{F(\omega)\}\phi_v} [V] \quad (2.27)$$

Despreciando la componente que depende del tiempo y teniendo en cuenta el valor de la amplitud de la señal, se define como **fasor** al producto de la magnitud de la señal por el exponencial complejo del valor de la fase, denotado como

$$\mathbb{V} = V_o e^{j\phi_v} [V] \quad (2.28)$$

donde  $\mathbb{V}$  es el fasor asociado a la función de voltaje en el dominio de la frecuencia. En forma polar será,

$$\mathbb{V} = V_o \angle \phi_v [V] \quad (2.29)$$

Donde  $\angle$  representa el ángulo de la fase (o argumento) de la función  $V(t)$ ,  $V_o$  su amplitud.

De manera análoga se obtiene el fasor de corriente como

$$\mathbb{I} = I_o \angle \phi_i \text{ [V]} \quad (2.30)$$

### 2.6.2. Impedancias (Z) y Admitancia (Y)

En los circuitos eléctricos de corriente alterna (CA), usualmente se recurre al termino de impedancia  $Z$  con el fin de crear una analogía directa a partir de la ley de Ohm. [4]

Se define la impedancia  $Z$  en los circuitos AC como el elemento que se opone al paso de la corriente es un fasor, donde:

$$Z = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} \text{ [\Omega]} \quad (2.31)$$

es la ley de ohm para circuitos de corriente alterna (CA).

Cualquier elemento pasivo (*Resistor, Capacitor e Inductor*) pueden ser representados como impedancias, aplicando las siguientes ecuaciones <sup>11</sup>

- Para el Resistor en (CA)

$$Z_R = R \text{ [\Omega]} \quad (2.32)$$

- Para el Inductor

$$Z_L = j\omega L \text{ [\Omega]} \quad (2.33)$$

- Para el Capacitor

$$Z_C = -j\omega \frac{1}{L} \text{ [\Omega]} \quad (2.34)$$

donde  $X_L$  e  $X_C$  las reactancias inductivas y capacitivas respectivamente.

Las suma de impedancias  $Z_{eq}$  en serie es igual a la sumatoria de cada impedancia de lazo cerrado, es decir

$$Z_{eq} = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \text{ [\Omega]} \quad (2.35)$$

---

<sup>11</sup>Se omite la demostración de las soluciones para cada uno de los elementos descritos en términos de la impedancia

La suma de impedancias  $Z_{eq}$  en paralelo es igual al inverso de la sumatoria de los inversos de cada impedancia, es decir:

$$(Z_{eq})^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{Z_k} \quad [\Omega] \quad (2.36)$$

La Admitancia  $Y$  se define como el valor inverso de la impedancia  $Z$ , la unidad física es el Siemens  $[S]$  que es igual al inverso del Ohmio, es decir  $1S = 1\frac{1}{\Omega}$

$$Y = \frac{1}{Z} \quad [S] \quad (2.37)$$

## 2.7. Potencia en circuitos de Corriente Alterna (CA)

Uno de los parámetros más evaluados en la teoría de circuitos eléctricos de corriente alterna es la potencia, la cual dependen de los productos entre funciones en términos temporales y fasoriales. [5]

### 2.7.1. Potencia instantánea en el dominio temporal

La potencia activa en el dominio temporal se define como el producto del voltaje con respecto a la corriente

$$P(t) = I(t)V(t) \quad [W] \quad (2.38)$$

### 2.7.2. Potencia Activa y Reactiva

En términos de los valores medios o eficaces, se expresa la potencia activa como la potencia real que consume un elemento pasivo, es decir

$$P_{med} = V_{ef}I_{ef}\cos(\theta_V - \theta_I) \quad [W] \quad (2.39)$$

El factor de potencia para la potencia activa se denota como

$$fp = \cos\theta = \frac{P_{med}}{V_{o,ef}I_{o,ef}} \quad (2.40)$$

la potencia reactiva  $Q$  no es consumible por las cargas, si no en la disipación de campos eléctricos o magnéticos producidos por los elementos capacitivos e inductivos, denotada como

$$Q_{med} = V_{ef}I_{ef}\sin(\theta_v - \theta_i) \text{ [VAR]} \quad (2.41)$$

### 2.7.3. Potencia compleja y aparente

la potencia compleja  $\mathbb{S}$  es aquella que resulta del análisis de los circuitos alternos. En términos matemáticos:

$$\mathbb{S} = P + jQ = \mathbb{VI}^* \text{ [VA]} \quad (2.42)$$

la potencia aparente es la magnitud de la potencia compleja, es decir

$$S = |\mathbb{S}| \quad (2.43)$$

## 2.8. Circuitos de n-fases

Los circuitos de n-fases son aquellos que están conformados por más de una fuente de tensión que le suministran energía a una misma carga fig.(2.5) [45]. Existen dos tipos de representaciones en los circuitos eléctricos n-fásicos, los que presentan simetría entre sus fases y los que no la presentan.

### 2.8.1. Representación fasorial de circuitos eléctricos simétricos (balanceados)

Para el estudio de los circuitos eléctricos polifásicos, se trabaja usualmente con circuitos simétricos, también los cuales están desfasados de igual manera, uno con respecto al otro y su

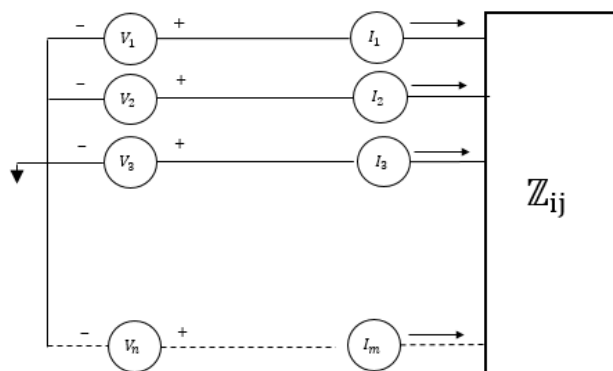


Figura 2.5: Conexión de fuentes polifásicas a una carga.

La imagen representa varias fuentes de voltaje conectadas en un punto común a tierra y a una impedancia. *Realizada por los autores*

magnitud fasorial es la misma [28]. Es decir:

Sea un sistema eléctrico de n-fases

$$\mathbb{V}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}_k = V_1 \cos(\omega t) + V_2 \cos(\omega t + \phi_2) + \dots + V_n \cos(\omega t + \phi_n) \quad (2.44)$$

el ángulo que define la separación entre cada uno de los fasores fig. (2.6) es decir, la diferencia entre cada una de las fases  $\phi_n - \phi_{n-1}$  para cualquier relación estará definida por [50]

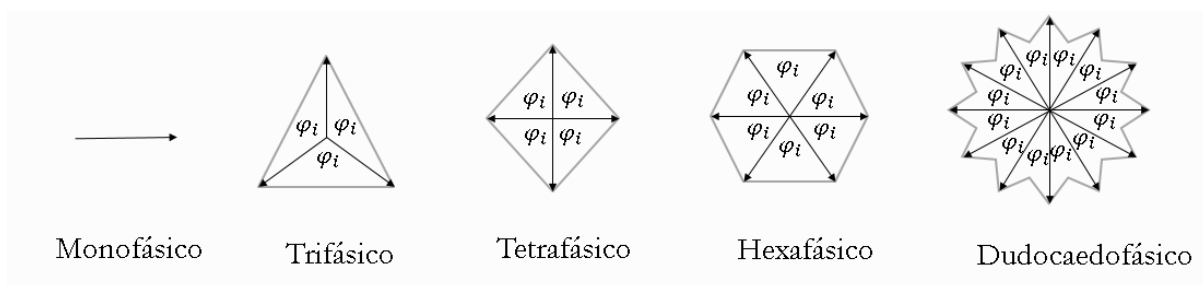


Figura 2.6: Simetría de los circuitos eléctricos polifásicos.

Representan las distintas configuraciones de los fasores para diversos sistemas simétricos, donde se demuestra ángulos de separación de fase y magnitudes iguales uno con respecto al otro. *Realizada por los autores*

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{n} \quad (2.45)$$

o también,

$$\varphi_i = \frac{360^\circ}{n} \quad (2.46)$$

donde  $n$  es el número de fases del sistema

Teniendo en cuenta el desfase entre cada una de las fases del sistema se logra realizar un estudio a partir de las Leyes de Kirchhoff.

### 2.8.2. Representación fasorial de circuitos eléctricos asimétricos (no balanceados)

Es el caso contrario a los circuitos n-fásicos simétricos, no se presenta un desfase igual entre el ángulo y magnitud, ya sea por alguna falla en cierta fase del sistema o fuente de excitación que no se encuentra conectada [28].

Sea un sistema eléctrico de n-fases

$$\mathbb{V}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}_k = V_1 \cos(\omega t) + V_2 \cos(\omega t + \phi_2) + \dots + V_n \cos(\omega t + \phi_n) \quad (2.47)$$

el ángulo que define la separación entre cada uno de los fasores fig. (2.6) es decir, la diferencia entre cada una de las fases  $\phi_n - \phi_{n-1}$  será diferente entre ellos, es decir

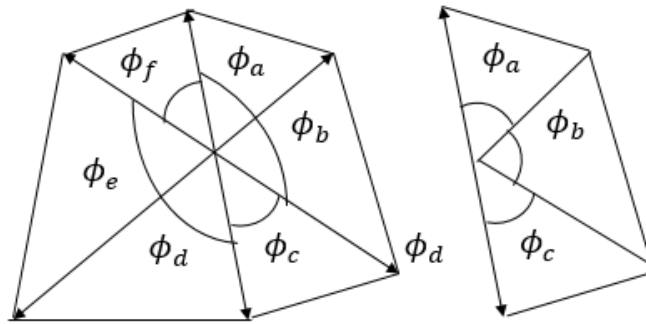


Figura 2.7: Sistemas no simétricos de los circuitos eléctricos polifásicos  
El ángulo y la magnitud de cada fase son diferentes uno respecto al otro. *Realizada por los autores*

$$\varphi_i \neq \frac{2\pi}{n} \quad (2.48)$$

en terminos de los grados

$$\varphi_i \neq \frac{360^\circ}{n} \quad (2.49)$$

## Capítulo 3

# Teorema de Fortescue-Stokvis y teoría del tensor de potencia instantánea

### 3.1. Descripción

Uno de los teoremas más estudiados en redes de circuitos eléctricos y máquinas rotativas es el *teorema de Fortescue*. Fue propuesto por C.L. Fortescue en el año de 1918 [18] y estudiado simultanea mente por Stokvis; tiene como función representar sistemas asimétricos en simétricos de un mismo número de vectores utilizando el operador de secuencia, las fórmulas que se presentan en este teorema se derivan de los circuitos trifásicos, el motor de inducción monofásico, el generador síncrono y algunos convertidores de fase.

Por otra parte, el origen del tensor de potencia instantánea es reciente, en el año 2010, A.J. Ustariz y E.A Cano [45] , en el departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, su estudio se centra en el análisis de los circuitos eléctricos y el problema que existe al poder generalizarlos, lo cual genera ciertas problemáticas en la implementación de algoritmos computacionales que reducen la velocidad de procesamiento de los datos en algunos softwares computacionales y dispositivos de I/O<sup>1</sup> programados. Es por ello que le definen un sentido geométrico a los fasores síncronos generados por fuentes polifásicas,

---

<sup>1</sup>En los dispositivos eléctricos, se suele recurrir a dicha abreviación para describir algún procesamiento de señales de entrada y salida, que es lo mismo en sus siglas en inglés Input/Output

dándole a partir de la definición de potencia instantánea evaluada a lo largo de un punto en el tiempo determinado.

## 3.2. Resolución de sistemas asimétricos

Se tiene una función compleja  $\zeta$  que al ser operada linealmente realiza una misma operación con su conjugado  $\zeta^*$  y al sumar los dos resultados obtenidos de  $\zeta$  y  $\zeta^*$  se tendrá como resultado  $2e$  que se interpreta como la proyección de vectores paralelos al mismo plano dándole una dirección a  $\zeta$  (sentido positivo) y  $\zeta^*$  (sentido negativo) [18]

$$e = \frac{\zeta + \zeta^*}{2} \quad (3.1)$$

### 3.2.1. Operador de secuencia $a$

Antes de representar los sistemas de vectores asimétricos en simétricos, es necesario establecer un operador que defina las componentes simétricas del sistema n-fásico en términos de los valores no simétricos del sistema. [18]

Dado un sistema n-fásico cualquiera, con  $n$  cantidad de fases, la separación entre cada fase del sistema estará dada como:

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{n} \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta que, las fases del sistema eléctrico deben ser distintas una de la otra y aplicando la identidad de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + \mathbf{j} \sin x \quad (3.3)$$

y,  $x = \varphi_i r$ , con  $r \in \mathbb{R}$ , se deduce la siguiente ecuación

$$e^{j\varphi_i r} = \cos(\varphi_i r) + \mathbf{j} \sin(\varphi_i r) \quad (3.4)$$

Reemplazando el valor de  $\varphi$  en (3.4), se deduce la separación de fases en términos de la

identidad de Euler:

$$e^{\frac{j2\pi r}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi r}{n}\right) \quad (3.5)$$

A partir de lo anterior, se define el operador  $a$  como la magnitud unitaria de un vector con argumento igual a su fase independiente, es decir:

$$a = 1\angle\varphi_1 = 1\angle\frac{2\pi}{n} \quad (3.6)$$

A partir de dicho operador, es posible demostrar que un vector asimétrico puede ser representado a través de una combinación lineal de vectores simétricos.

### 3.2.2. Sistema de n-vectores asimétricos aplicando operador de secuencia

A partir del operador de secuencia establecido en la ecuación (3.6), se logra describir de manera general un sistema de n-vectores asimétricos a partir de sus componentes simétricas.

Sea  $E_i$  un sistema de n-vectores asimétricos, [18]

$$E_i = E_1, E_2, \dots, E_n \quad (3.7)$$

El operador  $a$  se aplica sobre el sistema de n-vectores a partir de la combinación lineal de cada componente simétrica sobre la sumatoria de cada una de los n-vectores evaluados sobre un vector específico, es decir:

$$E_i = \frac{1}{n} [a(0) \sum_{i=1}^n E_n] + [a(+)] \sum_{i=1}^n E_n + a(-) \sum_{i=1}^n E_n \quad (3.8)$$

donde  $a(0)$  es la componente homopolar o de secuencia nula cuyo valor que adopta el operador es  $a = 1\angle 0$ ,  $a(+)$  es la componente directa o de secuencia positiva definida como  $a = 1\angle + \frac{2\pi}{n}$  y  $a(-)$  es la componente inversa o de secuencia negativa dada por  $a = 1\angle - \frac{2\pi}{n}$ .

Aplicando el operador de secuencia sobre cada una de las componentes  $E_n$ , se logran representar a partir de su componente fundamental:

$$\begin{aligned}
E_1 = & \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n}{n} + \frac{E_1 + aE_2 + a^2E_3 + \dots + a^{n-1}E_n}{n} \\
& + \frac{E_1 + a^2E_2 + a^4E_3 + \dots + a^{2(n-1)}E_n}{n} \\
& + \dots + \frac{E_1 + a^{(r-1)}E_2 + a^{2(r-1)}E_3 + \dots + a^{(r-1)(n-1)}E_n}{n}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Para la siguiente componente se obtiene,

$$\begin{aligned}
E_2 = & \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n}{n} + a^{-1} \frac{E_1 + aE_2 + a^2E_3 + \dots + a^{n-1}E_n}{n} \\
& + a^{-2} \frac{E_1 + a^2E_2 + a^4E_3 + \dots + a^{2(n-1)}E_n}{n} \\
& + \dots + a^{(r-1)} \frac{E_1 + a^{(r-1)}E_2 + a^{2(r-1)}E_3 + \dots + a^{(r-1)(n-1)}E_n}{n}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

De forma general, para cualquier componente se obtiene la expresión <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
E_n = & \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n}{n} + a^{-(n-1)} \frac{E_1 + aE_2 + a^2E_3 + \dots + a^{n-1}E_n}{n} \\
& + a^{-2(n-1)} \frac{E_1 + a^2E_2 + a^4E_3 + \dots + a^{2(n-1)}E_n}{n} \\
& + \dots + a^{-(r-1)(n-1)} \frac{E_1 + a^{(r-1)}E_2 + a^{2(r-1)}E_3 + \dots + a^{(r-1)(n-1)}E_n}{n}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

### 3.3. Componentes simétricas de sistemas trifásicos

Como se mencionó anteriormente, el estudio del teorema de Fortescue-Stokvis tuvo su mayor implementación para circuitos de tres fases. A continuación se estudian los conceptos presentes en el teorema para los sistemas trifásicos

---

<sup>2</sup>La notación utilizada en las ecuaciones anteriores son tomadas del texto original escrito por Fortescue en 1918 [18]

### 3.3.1. Operador matricial trifásico

En la matriz presente en (4.4), se representa únicamente las tres primeras componentes necesarias para la solución de los sistemas trifásicos, es decir [46].

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.3.2. Fasores asimétricos trifásicos

Sean los fasores  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  asimétricos,

$$\hat{V}_i = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

pueden ser representados a partir de una combinación lineal a través de sus tres componentes definidas por el operador matricial  $\hat{S}$ , es decir, para los valores en donde  $p = 0, 1, 2$ , denominada como secuencias 0, 1, 2 ó secuencia homopolar, positiva y negativa respectivamente, tal como se muestra en la fig(3.1)

### 3.3.3. Denotación en componentes simétricas

Cualquier 3-fasor puede ser representado mediante la combinación lineal de sus 3-componentes simétricas.

Sea  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  fasores asimétricos, cada uno de ellos puede ser representado como la combinación lineal de sus componentes simétricas  $V_i^1$ ,  $V_i^2$  y  $V_i^3$ , es decir [20]:

$$V_a = V_a^1 + V_b^2 + V_c^3 \quad (3.14)$$

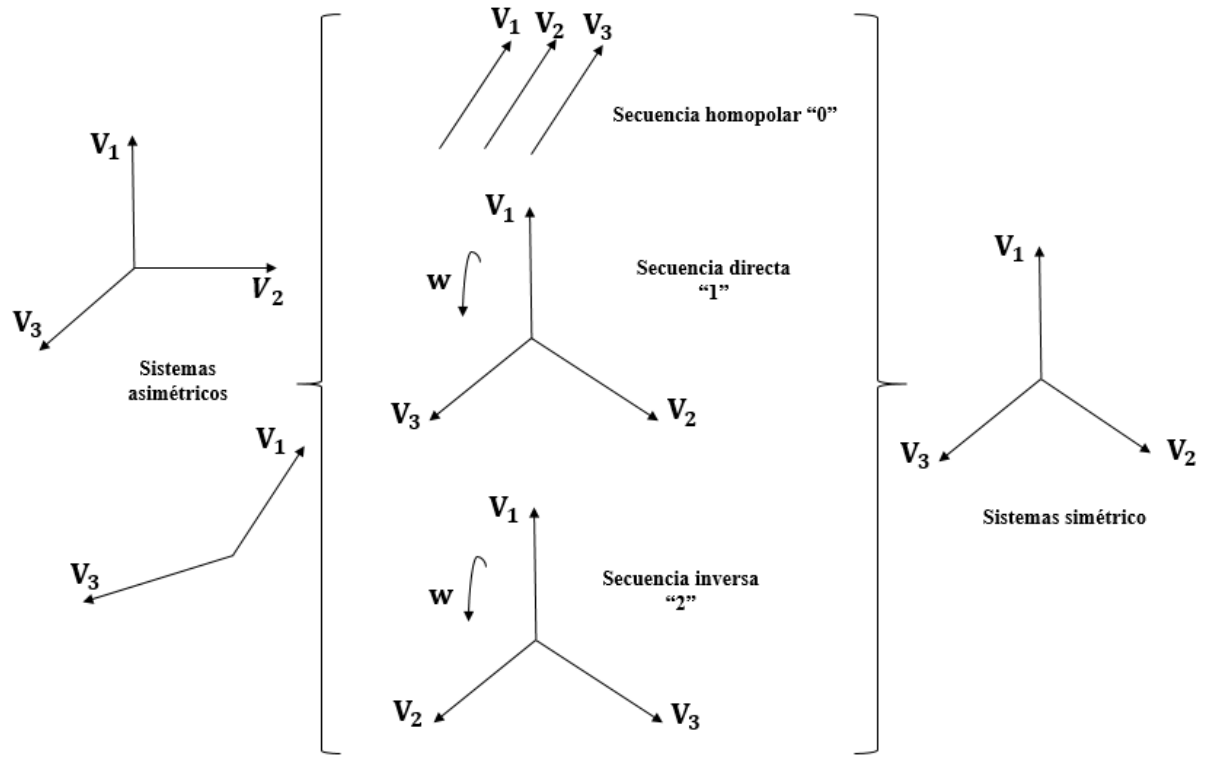


Figura 3.1: Método de las componentes simétricas. La gráfica muestra un sistema asimétrico que se convierte en simétrico a través de la combinación lineal de sus componentes simétricas. *Realizada por los autores*

**3.3.4. Solución mediante las 3-componentes simétricas**

A partir de ello, se logran definir los vectores de secuencia  $V_a^1$ ,  $V_a^2$  y  $V_a^3$ , de la siguiente manera<sup>3</sup>

$$\hat{V}_a^p = \begin{bmatrix} V_a^1 \\ V_a^2 \\ V_a^3 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

La representación simétrica del sistema n-fásico de las componentes fasoriales asimétricas respecto a sus vectores de secuencia se determinan mediante la matriz

<sup>3</sup>Cabe aclarar, que los supra índices 1, 2, 3 indican los términos referentes al tipo de secuencia, no muestran ninguna operación matemática directa (p.e., no son tensores ni potencias)

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a^1 \\ V_a^2 \\ V_a^3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Según la solución matricial presentada en (3.16), define, en principio, la solución general para vectores asimétricos, logrando expresar las ecuaciones del sistema original en función del operador  $a$  y su secuencias, en términos de ecuación, los voltajes de entrada pueden ser representados como:

$$\hat{V}_a = V_a^1 + V_a^2 + V_a^3 \quad (3.17)$$

$$\hat{V}_b = V_a^1 + a^2 V_a^2 + a V_a^3 \quad (3.18)$$

$$\hat{V}_c = V_a^1 + a V_a^2 + a^2 V_a^3 \quad (3.19)$$

El juego de ecuaciones (3.24), (3.23) y (3.22), representan el sistema simétrico o balanceado de los vectores asimétricos, ahora si se desean obtener las componentes simétricas del juego de fasores [28] [46], se determina su inversa de la matriz  $\hat{S}$  presentada en (3.20), dando como resultado

$$\hat{S}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Y las componentes simétricas del sistema estarán dadas por:

$$\begin{bmatrix} V_a^1 \\ V_a^2 \\ V_a^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Y, finalmente, los voltajes simétricos obtenidos de (3.21) estarán dados en términos de los voltajes de fase como:

$$V_a^1 = \frac{1}{3}(V_a + V_b + V_c) \quad (3.22)$$

$$V_a^2 = \frac{1}{3}(V_a + a^2V_b + aV_c) \quad (3.23)$$

$$V_a^3 = \frac{1}{3}(V_a + aV_b + a^2V_c) \quad (3.24)$$

De manera análoga, el análisis se realiza para la corriente  $I$ .

### **3.4. Representación de las componentes simétricas de Stokvis para una matriz 3x3**

Retomando el caso particular de los sistemas eléctricos trifásicos, las representación de los terminos de las componentes unitarias de secuencia homopolar, directa e inversa del teorema de Fortescue son representados a partir de una matriz 3x3 definidas mediante el operador complejo de rotación  $a$  como se muestra a continuación:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

Se determina como la matriz de componentes simétricas de Fortescue-Stokvis o simplemente Stokvis para la solución de sistemas eléctricos asimétricos.

### 3.5. Análisis Tensorial de la Potencia Instantánea

El análisis tensorial de los sistemas eléctricos n-fásicos es propuesto en el año 2010 en el cual se define el tensor de potencia como el producto diádico del tensor de voltaje se y el tensor de corriente [45]. El tensor de voltaje se describe como:

$$V_i = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

El tensor de corriente tiene la misma dimensión del tensor de voltaje, es por ello que se define de manera análoga como

$$I_j = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

El tensor de potencia instantánea se basa en el producto diádico entre los tensores de tensión y corriente, para evaluar la potencia eléctrica en sistemas de n-fases. De manera matricial se obtiene la matriz:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} V_1 I_1 & V_1 I_2 & V_1 I_3 & V_1 I_4 & \cdots & V_1 I_n \\ V_2 I_1 & V_2 I_2 & V_2 I_3 & V_2 I_4 & \cdots & V_2 I_n \\ V_3 I_1 & V_3 I_2 & V_3 I_3 & V_3 I_4 & \cdots & V_3 I_n \\ V_4 I_1 & V_4 I_2 & V_4 I_3 & V_4 I_4 & \cdots & V_4 I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n I_1 & V_n I_2 & V_n I_3 & V_n I_4 & \cdots & V_n I_n \end{bmatrix}$$

En ecuación, se determina como

$$P_{ij} = V_i \otimes I_j \quad (3.26)$$

Se puede observar que entre las propiedades del producto diádico, el resultado matricial también puede ser descrito al aplicar el tensor transpuesto de la corriente, de esta manera,

$$P_{ij} = V_i I_j^t \quad (3.27)$$

donde  $t$  es el operador de transposición.

### 3.6. Tensor de Potencia Activa y Reactiva

Después de definir el tensor de potencia instantánea, se puede obtener el tensor de potencia reactiva, con el fin de llegar a la solución general de tensor de potencia aparente [45].

A partir del tensor de potencia instantánea definido en la ecuación (3.26), aplicando sobre él nuevamente el operador de transposición se obtiene que

$$(P_{ij})^t = (V_i I_j^t)^t = I \otimes V = IV^t \quad (3.28)$$

Escribiendo la solución del tensor de corriente a través de la potencia instantánea y la norma en el espacio euclidiano, el término de corriente es generado a través de

$$I = \frac{P_{ij}^2}{\|V\|^2} V \quad (3.29)$$

Utilizando un arreglo en el cual se sugiere restar las componentes transpuestas y no transpuestas del tensor de potencia instantánea:

$$(P_{ij})^t = (P_{ij}) + ((P_{ij})^t - (P_{ij})) \quad (3.30)$$

Resolviendo y despejando las variables asignadas en las ecuaciones (3.29) y (3.30), se extiende la expresión de la corriente  $I$  en términos de su componente activa  $I_p$  y reactiva  $I_q$ <sup>4</sup>

$$I = I_p + I_q \quad (3.31)$$

Aplicando la definición planteada en (3.26) y evaluando independientemente la componente activa y reactiva de la corriente, se determina el tensor de potencia activa

$$P_{ij}^p = (V_i \otimes V_j) \frac{P_{ij}}{V \cdot V} \quad (3.32)$$

Para la potencia reactiva, se llega a la expresión

$$P_{ij}^q = (V_i \otimes V_i) \frac{(P_{ij}^t - (P_{ij})^t)}{V \cdot V} \quad (3.33)$$

La potencia instantánea se obtiene mediante la suma de la potencia activa y reactiva.:

$$P_{ij} = P_{ij}^p + P_{ij}^q \quad (3.34)$$

---

<sup>4</sup>Las corrientes activa y reactiva se escriben a partir de la notación original utilizada en el artículo [45].

# Capítulo 4

## Análisis geométrico de los sistemas eléctricos de n-fases

### 4.1. Descripción

A lo largo del documento, se han venido presentado las definiciones elementales de los circuitos eléctricos, también se retomó el Teorema de Fortescue para el análisis de sistemas asimétricos y se extendió un análisis sobre el Tensor de Potencia Instantánea que generaliza la teoría de sistemas eléctricos de n-fases.

Ahora bien, tomando cada uno de los elementos y referentes teóricos mencionados anteriormente, se realiza a continuación un estudio minucioso de la geometría existente en los sistemas eléctricos n-fásicos, definiendo cada uno de los conceptos abordados en los capítulos anteriores y generalizándolos de manera tensorial en una teoría de sistemas eléctricos mucho mas amplia y minuciosa que supla las necesidades para cualquier sistema polifásico sin la necesidad de analizarlos independientemente por presentar simetría en el plano complejo, o si su desfase es equivalente entre ellos o no <sup>1</sup>.

En este capítulo se elabora todo un análisis conceptual que será validado con ejemplos teóricos que den veracidad de la solución diseñada, cumpliendo con las leyes fundamentales de

---

<sup>1</sup>Desde este capítulo en adelante, la producción realizada es de los autores de la tesis

los circuitos eléctricos <sup>2</sup>.

Cabe aclarar que las distintas soluciones presentadas posteriormente son tratadas con sistemas n-fásicos de señales de corriente alterna (AC), ya sean de tipo periódicas o no. Para los sistemas eléctricos (DC) también funcionaría, sin embargo, cada tensor definido deberá tomarse como un tensor de orden "0" y su análisis sería un poco más tedioso que el convencional partiendo del hecho que el resultado obtenido será de manera equivalente.

## 4.2. Operador de secuencia generalizado

En el capítulo anterior se definió el operador de secuencia  $a$  en forma polar y en notación exponencial, sin embargo, es necesario representarlo como una sucesión de términos la cual permita representarse de manera más general.

Tomando valores para  $r = 1, 2, 3, \dots, m$ , se obtiene la siguiente sucesión de términos sobre la ec. (3.5)

$$\{a_r\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\} \quad (4.1)$$

Por definición en notación exponencial mostrado el operador  $a$  según su posición se obtiene

$$\{a_r\} = \left\{ e^{\frac{j2\pi}{n}}, e^{\frac{j4\pi}{n}}, e^{\frac{j6\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{j2\pi m}{n}} \right\} \quad (4.2)$$

Al buscar simetría, el índice  $n$  es igual al subíndice  $m$ , de ello resulta

$$\{a_r\} = \left\{ e^{\frac{j2\pi}{n}}, e^{\frac{j4\pi}{n}}, e^{\frac{j6\pi}{n}}, \dots, e^{j2\pi} \right\} \quad (4.3)$$

Al solucionar cada uno de los términos de la sucesión se demuestra que el termino final será igual a 1, es decir

$$\{a_r\} = \left\{ e^{\frac{j2\pi}{n}}, e^{\frac{j4\pi}{n}}, e^{\frac{j6\pi}{n}}, \dots, 1 \right\} \quad (4.4)$$

Utilizando la propiedad  $e^{x^n} = e^{xn}$ , la ecuación (4.4) puede ser reescrita en términos del

---

<sup>2</sup>Ley de Ohm, leyes de Kirchhoff y ley de Faraday- Lenz

primer termino  $a_1$

$$\{a_r\} = \{(a_1)^1, (a_1)^2, (a_1)^3, \dots, (a_1)^m\} \quad (4.5)$$

renombrado  $a_1 = a$  y escribiéndolo en términos de su magnitud y argumento:

$$\{a_r\} = \{a^1, a^2, a^3, \dots, a^n\} \quad (4.6)$$

Recordando que, el operador de secuencia  $a$  esta definido como

$$a = 1\angle\varphi_1 = 1\angle\frac{2\pi}{n} \quad (4.7)$$

Desarrollando a partir de la sucesión, se expresa la ecuación (4.6) como

$$\{a_r\} = \{1\angle 2\pi, 1\angle\pi, 1\angle\frac{2\pi}{3}, \dots, 1\angle\frac{2\pi}{n}\} \quad (4.8)$$

A partir de la ecuación (4.8) se generaliza el operador de secuencia en forma polar para  $n$  conjuntos de vectores.

### 4.3. Componentes simétricas de rotación del teorema de Fortescue

Fortescue define las componentes simétricas de rotación dependiendo del desfase el cual presente el sistema, para ello considera una analogía respectivamente al sentido de giro en el sistema, determinando una componente *homopolar* en la cual, los fasores no presentan rotación, seguido de componentes *directas* las cuales hacen analogía a la rotación en sentido de las manecillas del reloj de cada uno los fasores y, finalmente las componentes *inversas*, que giran en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Para el análisis, la única componente homopolar estará dada por:

$$\Gamma^0 = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

### 4.3. COMPONENTES SIMÉTRICAS DE ROTACIÓN DEL TEOREMA DE FORTESCUE37

Las componentes directas son representadas por los índices de rotación positivos desde  $\Gamma^1$  hasta  $\Gamma^{r+1}$

$$\Gamma^1 = \{1, a^{-1}, a^{-2}, \dots, a^{-(n-1)}\}$$

$$\Gamma^2 = \{1, a^{-2}, a^{-4}, \dots, a^{-2(n-1)}\}$$

$\vdots$

$$\Gamma^r = \{1, a^{-r}, a^{-2r}, \dots, a^{-(n-1)r}\}$$

$\vdots$

$$\Gamma^{r+1} = \{1, a^{-(r+1)}, a^{-2(r+1)}, \dots, a^{-(n-1)(r+1)}\}$$

$\vdots$

Finalmente, las componentes inversas irán desde  $\Gamma^{r+1}$  hasta  $\Gamma^{r-1}$

$$\Gamma^{r-1} = \{1, a^{-(n-1)}, a^{-2(n-1)}, \dots, a^{-(n-1)^2}\}$$

En la fig. (4.1) se muestra la rotación de cada uno de los fasores a partir de la componente simétrica asignada.

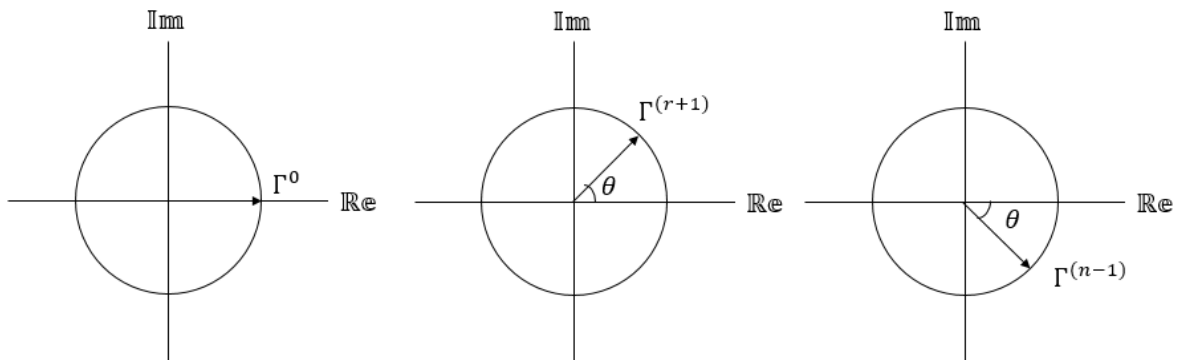


Figura 4.1: Rotación de fasores en secuencia homopolar, directa e indirecta.  
Realizada por los autores

## 4.4. Matriz Generalizada para sistemas n-fásicos de manera tensorial

Un sistema de n-fasores asimétricos cualesquiera determinado estará definido a partir de componentes simétricas equivalentes para cada fasor simétrico como resultado de la operación del operador de secuencia  $a$  definido anteriormente.

Las componentes simétricas describen los diferentes puntos de rotación que el fasor puede tomar dependiendo de su magnitud y fase. Teniendo una secuencia de rotación, cada elemento de giro dependerá del valor que adopte el fasor, es decir, la matriz deberá definir el giro de cada fasor independientemente.

A partir de ello, se define  $\Gamma^{ij}$  como el tensor de secuencia de giro con  $i = j$ . Expandiendo, para el caso donde la cantidad de componentes simétricas esta definida por  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Escrito de manera matricial, se define  $\Gamma^{ij}$  el operador matricial de secuencia de giro como:

$$\Gamma^{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma^{11} & \Gamma^{12} & \Gamma^{13} & \Gamma^{14} & \dots & \Gamma^{1m} \\ \Gamma^{21} & \Gamma^{22} & \Gamma^{23} & \Gamma^{24} & \dots & \Gamma^{2m} \\ \Gamma^{31} & \Gamma^{32} & \Gamma^{33} & \Gamma^{34} & \dots & \Gamma^{3m} \\ \Gamma^{41} & \Gamma^{42} & \Gamma^{43} & \Gamma^{44} & \dots & \Gamma^{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma^{n1} & \Gamma^{n2} & \Gamma^{n3} & \Gamma^{n4} & \dots & \Gamma^{nm} \end{bmatrix}$$

Para obtener los elementos de la matriz generalizada  $\Gamma^{ij}$  se debe recurrir al operador  $a$  que por definición,

$$a = 1 \angle \varphi_1 = 1 \angle \frac{2\pi}{n}. \quad (4.9)$$

Cabe la pena señalar que los fasores a través del operador complejo  $a$  pueden ser representados a partir de cualquier vector simétrico, en términos de la combinación lineal del conjunto de fasores.

La matriz  $\Gamma^{ij}$  existe si se cumple que:

#### 4.5. ANÁLISIS GEOMÉTRICO: POSTULADO DE CORRESPONDENCIA DUAL (CD) 39

1) Si  $n = m$ ;  $\exists \forall \mathbb{R}$

2)  $n$  define la cantidad de fases del sistema.

Los términos de  $\Gamma^{ij}$  se obtienen a partir de la función inversa del operador  $a$  en función de los índices de asignación por casilla, es decir:

$$\Gamma^{ij} = f(a) \quad (4.10)$$

En términos del operador  $a$ , dependiendo del valor de la casilla correspondiente a la ubicación matricial  $nm$ , las componentes pueden ser obtenidas como:

$$\Gamma^{nm} = \frac{1}{a^{(n-1)(m-1)}} \quad (4.11)$$

$$\Gamma^{nm} = a^{-(n-1)(m-1)} \quad (4.12)$$

A partir de lo anterior, escribiendo los términos de la matriz de coeficientes será

$$\Gamma^{ij} = \begin{bmatrix} a^0 & a^0 & a^0 & a^0 & \dots & a^{-0(m-1)} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & \dots & a^{-1(m-1)} \\ a^0 & a^{-2} & a^{-4} & a^{-6} & \dots & a^{-2(m-1)} \\ a^0 & a^{-3} & a^{-6} & a^{-9} & \dots & a^{-3(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{-0(n-1)} & a^{-1(n-1)} & a^{-2(n-1)} & a^{-3(n-1)} & \dots & a^{-(n-1)(m-1)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Donde, la matriz (4.13) muestra el tensor de componentes simétricas para circuitos de  $n$ -fases.

### 4.5. Análisis geométrico: Postulado de correspondencia Dual (CD)

Al ser el operador  $a$  un elemento complejo, la matriz en general será compleja, para justificar que la matriz contravariante tiene correspondencia dual se define para el sistema que [13]

[24]:

Sea  $\Gamma \in \mathbb{C} \exists CD^3$  ssi  $\Gamma \rightarrow \Gamma^*$ , debe cumplir la condición de ortonormalización

$$\Gamma^* \Gamma = \delta_j^i \quad (4.14)$$

con

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.15)$$

Definiendo los elementos de la matriz contravariante  $\Gamma^{ij}$  y su covariante  $\Gamma_{ij}$  y, ambas matrices están definidas por términos complejos, cumple

$$\frac{1}{\|\Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij}\|} \Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij} = \delta_j^i \quad (4.16)$$

con  $\|\Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij}\|$ , la norma del tensor resultante, el cual tiene el mismo valor de la cantidad de fases del sistema que se evalúa, es decir,

$$n = \|\Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij}\| \quad (4.17)$$

Finalmente, la condición de ortonormalización será

$$\frac{1}{n} \Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij} = \delta_j^i \quad (4.18)$$

de lo anterior se concluye

$$\Gamma^{ij} = \Gamma_{ij} \quad (4.19)$$

tienen correspondencia dual compleja. <sup>4</sup>

Con el fin de demostrar que el tensor contravariante  $\Gamma^{ij}$  es dual del tensor covariante  $\Gamma_{ij}$  se utiliza la matriz de Stokvis en un sistema de  $n = 3$  fases, es decir,

<sup>3</sup>En adelante, las siglas CD definen Correspondencia Dual

<sup>4</sup>la demostración del postulado se encuentra en el apéndice (A.1)

#### 4.5. ANÁLISIS GEOMÉTRICO: POSTULADO DE CORRESPONDENCIA DUAL (CD)41

$$\frac{1}{3}\Gamma_{ij}^*\Gamma^{ij} = \delta_j^i \quad (4.20)$$

La matriz contravariante 3X3 será

$$\Gamma^{ij} = \begin{bmatrix} a^0 & a^0 & a^0 \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} \\ a^0 & a^{-2} & a^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Seguidamente, se definen los valores a partir del operador de secuencia trifásico  $a$  a partir de

$$a = 1 \angle \frac{2\pi}{n} \quad (4.22)$$

con  $n = m = 3$  resulta el operador definido como  $a = 1 \angle 120^\circ$  en forma polar, en forma rectangular<sup>5</sup> será  $a = -\frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$

Las componentes contravariantes están definidas como:

$$a^0 = 1; a^{-1} = -\frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}; a^{-2} = -\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}; a^{-3} = 1; a^{-4} = -\frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las componentes covariantes son:

$$a^1 = -\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}; a^2 = -\frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}; a^3 = 1$$

Las componentes contravariantes conjugadas son:

$$a^{0*} = 1; a^{-1*} = -\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}; a^{-2*} = -\frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}; a^{-3*} = 1; a^{-4*} = -\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De lo cual resultan relaciones simétricas como

$$a^{0*} = 1; a^{-1*} = a; a^{-2*} = a^2; a^{-4*} = a$$

De manera matricial se obtiene que,

---

<sup>5</sup>La unidad imaginaria es representada con la letra  $\mathbf{j}$ , es decir,  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ , con el fin de no generar confusiones entre los índices  $i, j$  y las corrientes  $I$

$$(\Gamma^{ij})^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Multiplicando las matrices

$$(\Gamma^{ij})^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Resolviendo (4.25)

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} = \delta_j^i \quad (4.25)$$

Se demuestra que existe correspondencia dual compleja (CD) entre  $\frac{1}{3}\Gamma_{ij}^*\Gamma^{ij}$  al obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_j^i \quad (4.26)$$

## 4.6. Análisis tensorial complejo de los sistemas eléctricos

Los sistemas eléctricos n-fásicos se escriben a partir de las corrientes que pasan a través de cada uno de los conductores  $I$ , la cual será la misma que pasa por cada una de las fases y por los voltajes entre dos líneas  $V_L$ , el voltaje por cada fuente o fase  $V$ . A partir de lo anterior, se establece que

$$I = I_L \quad (4.27)$$

$$V = \sqrt{n}V_L \quad (4.28)$$

El tensor de potencia instantánea, descrito en [45], cumple su propiedad para cualquier sistema eléctrico de n-fases (simétrico y asimétrico) como

$$P_{ij} = V_i \otimes I_j \quad (4.29)$$

El cual es obtenido a partir de los tensores de voltaje  $V_i$  y corriente  $I_j$  en el dominio temporal. En el dominio de la frecuencia, al aplicar una transformada fasorial sobre el tensor de voltaje y el tensor de corriente en el dominio temporal se obtiene  $\mathbb{V}_i$ , descrito como el tensor de voltaje fasorial:

$$\mathbb{V}_i = \begin{bmatrix} V_1 \angle \Phi_1 \\ V_2 \angle \Phi_2 \\ V_3 \angle \Phi_3 \\ \vdots \\ V_n \angle \Phi_n \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Análogamente, el tensor de corriente fasorial  $\mathbb{I}_j$  será:

$$\mathbb{I}_j = \begin{bmatrix} I_1 \angle \phi_1 \\ I_2 \angle \phi_2 \\ I_3 \angle \phi_3 \\ \vdots \\ I_n \angle \phi_n \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

La potencia instantánea no discrimina si el sistema es simétrico o asimétrico, sin embargo, en el análisis de circuitos eléctricos es limitado, puesto que se recurre con mayor frecuencia al cálculo de las potencias activa, reactiva, aparente y compleja. Para determinar cada una de estas potencias se define inicialmente el tensor de potencia compleja como:

$$\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{V}_i \otimes \mathbb{I}_j^* \quad (4.32)$$

donde sus componentes estarán definidas en la matriz

$$\mathbb{P}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \mathbb{I}_1^* & \mathbb{V}_1 \mathbb{I}_2^* & \mathbb{V}_1 \mathbb{I}_3^* & \mathbb{V}_1 \mathbb{I}_4^* & \cdots & \mathbb{V}_1 \mathbb{I}_m^* \\ \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_1^* & \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_2^* & \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_3^* & \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_4^* & \cdots & \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_m^* \\ \mathbb{V}_3 \mathbb{I}_1^* & \mathbb{V}_3 \mathbb{I}_2^* & \mathbb{V}_3 \mathbb{I}_3^* & \mathbb{V}_3 \mathbb{I}_4^* & \cdots & \mathbb{V}_3 \mathbb{I}_m^* \\ \mathbb{V}_4 \mathbb{I}_1^* & \mathbb{V}_4 \mathbb{I}_2^* & \mathbb{V}_4 \mathbb{I}_3^* & \mathbb{V}_4 \mathbb{I}_4^* & \cdots & \mathbb{V}_4 \mathbb{I}_m^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{V}_n \mathbb{I}_1^* & \mathbb{V}_n \mathbb{I}_2^* & \mathbb{V}_n \mathbb{I}_3^* & \mathbb{V}_n \mathbb{I}_4^* & \cdots & \mathbb{V}_n \mathbb{I}_m^* \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

A través del tensor  $\mathbb{P}_{ij}$  se definen la *Potencia Activa*, *Reactiva*, *Aparente* y *Compleja* del sistema n-fásico:

La *Potencia Activa* ( $P$ ) se define como la suma de las componentes diagonales del tensor  $\mathbb{P}_{ij}$  multiplicadas por el factor de potencia<sup>6</sup>, es decir, la traza por el factor de potencia por componente

$$P = tr\{|\mathbb{P}_{ii}| \cos\theta_{ii}\} \quad (4.34)$$

En notación de Einstein

$$P = \sum_{i=1}^n V_i I_i^* \cos\theta_{ii} \quad (4.35)$$

La *Potencia Reactiva* ( $Q$ ) se determina de manera análoga, calculando las componentes a partir del seno del ángulo del factor de potencia  $\theta_{ii}$ , es decir

$$Q = tr\{|\mathbb{P}_{ii}| \sin\theta_{ii}\} \quad (4.36)$$

En notación de Einstein

$$Q = \sum_{i=1}^n V_i I_i^* \sin\theta_{ii} \quad (4.37)$$

La *Potencia Aparente*  $S$  será la traza de la magnitud del tensor  $\mathbb{P}_{ij}$ , es decir

$$S = tr|\mathbb{P}_{ii}| \quad (4.38)$$

---

<sup>6</sup>El factor de potencia  $\cos\theta_{ii}$  se define como la diferencia del coseno entre el ángulo de fase del fasor voltaje  $\Phi_i$  menos el ángulo de fase del fasor de corriente  $\phi$  de cada uno de los elementos de la diagonal, es decir  $\cos\theta_{ij} = \cos(\Phi_i - \phi_j)$

#### 4.7. ANÁLISIS DE LA POTENCIA FASORIAL EN SISTEMAS SIMÉTRICOS SOBRE CARGAS BALAN

En notación de Einstein

$$S = \sum_{i=1}^n V_i I_i^* \quad (4.39)$$

Finalmente, la *Potencia Compleja* será la suma entre la potencia activa  $P$  y la reactiva  $Q$  multiplicada por la unidad compleja  $\mathbf{j}$ , es decir:

$$\mathbb{S} = P + \mathbf{j}Q \quad (4.40)$$

$$\mathbb{S} = \sum_{i=1}^n V_i I_i^* \cos\theta_{ii} + \mathbf{j} \sum_{i=1}^n V_i I_i^* \sin\theta_{ii} \quad (4.41)$$

También, la potencia compleja puede ser calculada como la traza del producto tensorial entre el tensor de voltaje fasorial y el conjugado del tensor de corriente, es decir

$$\mathbb{S} = tr\{\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{I}_i^*\} \quad (4.42)$$

### 4.7. Análisis de la potencia fasorial en sistemas simétricos sobre cargas balanceadas

Por otra parte, se puede simplificar el análisis de los circuitos n-fásico a partir de su simetría. Si el sistema es simétrico cumple que el valor de las potencias aparentes de cada termino es igual y el ángulo del factor de potencia será el mismo, se pueden denotar las ecuaciones (4.6), (4.39) y (4.40) respectivamente como

$$P = nV_i I_i^* \cos\theta_{ii} \quad (4.43)$$

$$Q = nV_i I_i^* \sin\theta_{ii} \quad (4.44)$$

$$S = nV_i I_i^* \quad (4.45)$$

Finalmente, la potencia compleja se logra expresar como

$$\mathbb{S} = nV_i I_i^* \cos\theta_{ii} + \mathbf{j}nV_i I_i^* \sin\theta_{ii} \quad (4.46)$$

De esta manera, se logra simplificar el cálculo teniendo en cuenta únicamente la cantidad de fases en el sistema.

## 4.8. Análisis de la potencia fasorial en sistemas asimétricos

Para el caso de la existencia de un vector columna que defina las fases del sistema simétrico, se define  $\mathbb{V}_i$  como el tensor de voltaje del sistema n-fásico de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}_i = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_3 + \dots + \mathbb{V}_p \quad (4.47)$$

Descrito en forma matricial,

$$\mathbb{V}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_n \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Cada una de las fases asimétricas pueden ser representadas como una combinación lineal de sus componentes simétricas respectivas, es decir:

Sea el vector asimétrico  $\mathbb{V}_i$ ,  $\mu$  corresponda a las secuencias de giro respectivas a la componente lineal del fasor y  $\nu$  es el número de la fase respectiva, con  $\mu = 0, 1, 2, \dots, j - 1$  y  $\nu$  como el índice específico de la fase, es decir:

$$\mathbb{V}_i = \mathbb{V}_\nu^\mu; \mu = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.49)$$

en notación sigma

$$\mathbb{V}_i = \sum_{i=1}^j \mathbb{V}_\nu^{j-1} \quad (4.50)$$

es decir, geoméricamente el fasor  $v$  es una combinación lineal de los vectores base de las componentes simétricas.

El subíndice  $i$  tiene su máximo en la cantidad de fases del sistema, describiendo en notación sigma cada uno de los términos de un sistema n-fásico como combinación lineal de sus componentes simétricas será

$$V_1 = \sum_{i=1}^j V_1^{j-1} \tag{4.51}$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^j V_2^{j-1} \tag{4.52}$$

$$V_3 = \sum_{i=1}^j V_3^{j-1} \tag{4.53}$$

$$\dots \tag{4.54}$$

$$V_n = \sum_{i=1}^j V_n^{j-1} \tag{4.55}$$

De forma matricial será como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^j V_1^{j-1} \\ \sum_{i=1}^j V_2^{j-1} \\ \sum_{i=1}^j V_3^{j-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^j V_n^{j-1} \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

Ahora, si se desea escribir un fasor de voltaje  $m + 1$  en términos del fasor  $m$  se desarrolla mediante el teorema de Stokvis. Como ejemplo, un sistema trifásico simple:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^{-1} & a^{-2} \\ 1 & a^{-2} & a^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^0 \\ V_1^1 \\ V_1^2 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

de forma generalizada, la solución de sistemas n-fásicos multiplicados por el vector de voltaje

será

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 & a^0 & a^0 & a^0 & \dots & a^{-0(m-1)} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & \dots & a^{-1(m-1)} \\ a^0 & a^{-2} & a^{-4} & a^{-6} & \dots & a^{-2(m-1)} \\ a^0 & a^{-3} & a^{-6} & a^{-9} & \dots & a^{-3(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{-0(n-1)} & a^{-1(n-1)} & a^{-2(n-1)} & a^{-3(n-1)} & \dots & a^{-(n-1)(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}_1^0 \\ \mathbb{V}_1^1 \\ \mathbb{V}_1^2 \\ \mathbb{V}_1^3 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_1^{p-1} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Para el caso de los sistemas asimétricos, se puede obtener de manera análoga los sistemas simétricos si los tensores de voltaje y de corriente fasorial son expresados a partir de una combinación lineal entre las componentes simétricas definidas a partir de la matriz generalizada  $\Gamma^{ij}$ . Sea  $\mu = j - 1$  y  $\nu$  el supraíndice que define la secuencia de giro del operador  $a$  sobre los tensores de voltaje y corriente, de manera simplificada se obtiene la expresión en notación de Einstein:

$$\mathbb{V}_i = \Gamma^{ij} \mathbb{V}_\nu^{j-1} \quad (4.59)$$

En términos de las componentes simétricas el tensor se establece como

$$\mathbb{V}_\nu^{j-1} = (\Gamma^{ij})^{-1} \mathbb{V}_i \quad (4.60)$$

De manera análoga, el tensor de corriente será

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 & a^0 & a^0 & a^0 & \dots & a^{-0(m-1)} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & \dots & a^{-1(m-1)} \\ a^0 & a^{-2} & a^{-4} & a^{-6} & \dots & a^{-2(m-1)} \\ a^0 & a^{-3} & a^{-6} & a^{-9} & \dots & a^{-3(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{-0(n-1)} & a^{-1(n-1)} & a^{-2(n-1)} & a^{-3(n-1)} & \dots & a^{-(n-1)(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1^0 \\ \mathbb{I}_1^1 \\ \mathbb{I}_1^2 \\ \mathbb{I}_1^3 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_1^{p-1} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Escrito de manera tensorial

$$\mathbb{I}_i = \Gamma^{ij} \mathbb{I}_\nu^{j-1} \quad (4.62)$$

En términos de las componentes simétricas el tensor se establece como

$$\mathbb{I}_\nu^{j-1} = (\Gamma^{ij})^{-1} \mathbb{I}_j \quad (4.63)$$

La potencia compleja determinada en (4.42), a partir de las componentes simétricas del sistema resulta

$$\mathbb{S} = tr\{\Gamma^{ij} \mathbb{V}_\nu^{i-1} \otimes \Gamma^{ij} (\mathbb{I}_\nu^{j-1})^*\} \quad (4.64)$$

O también.

$$\mathbb{S} = tr\{\Gamma^{ij} \mathbb{V}_\nu^{i-1} (\Gamma^{ij} (\mathbb{I}_\nu^{j-1}))^{*t}\} \quad (4.65)$$

Al ser los tensores de voltaje y corriente tensores columna se aplica la propiedad  $tr(AB^t) = A^t B$ , para el sistema será

$$tr\{\Gamma^{ij} \mathbb{V}_\nu^{i-1} (\Gamma^{ij} (\mathbb{I}_\nu^{j-1}))^{*t}\} = (\Gamma^{ij} \mathbb{V}_\nu^{i-1})^t (\Gamma^{ij} (\mathbb{I}_\nu^{j-1}))^* \quad (4.66)$$

Escrita de la nueva manera

$$\mathbb{S} = (\Gamma^{ij} \mathbb{V}_\nu^{i-1})^t (\Gamma^{ij} (\mathbb{I}_\nu^{j-1}))^* \quad (4.67)$$

Resolviendo se llega a

$$\mathbb{S} = (\mathbb{V}_\nu^{i-1})^t (\Gamma^{ij})^t \Gamma^{ij} (\mathbb{I}_\nu^{j-1})^* \quad (4.68)$$

con

$$(\Gamma^{ij})^t \Gamma^{ij} = n \delta_i^j \quad (4.69)$$

Se determina la expresión final de potencia compleja para sistemas asimétricos a partir de

sus componentes simétricas será

$$\mathbb{S} = n(\mathbb{V}_\nu^{i-1})^t \delta_i^j (\mathbb{I}_\nu^{i-1})^* \quad (4.70)$$

La multiplicación del delta de Kronecker por el tensor columna de corriente da como resultado el mismo tensor, por ello se omite y se obtiene finalmente <sup>7</sup>

$$\mathbb{S} = n(\mathbb{V}_\nu^{i-1})^t (\mathbb{I}_\nu^{i-1})^* \quad (4.71)$$

La potencia activa  $P$  y reactiva  $Q$  se determinan a partir de las componentes real e imaginaria de la potencia compleja  $\mathbb{S}$ , es decir;

$$P = \Re[n(\mathbb{V}_\nu^{i-1})^t (\mathbb{I}_\nu^{i-1})^*] \quad (4.72)$$

$$Q = \Im[n(\mathbb{V}_\nu^{i-1})^t (\mathbb{I}_\nu^{i-1})^*] \quad (4.73)$$

## 4.9. Impedancias y admitancias tensoriales

En la teoría de circuitos eléctricos de corriente alterna, los elementos pasivos son representados a partir de impedancias  $\mathbb{Z}$  o de admitancias  $\mathbb{Y}$ , los cuales observados en señales senoidales permiten realizar cálculos en el dominio de la frecuencia a partir de la ley de Ohm, tal y como se discutió en la sección (2.6.2).

Teniendo en cuenta lo ya mencionado, se deben llegar a dos tensores, uno que represente las impedancias y otro que determine las admitancias para que, de alguna manera, se relacionen los tensores de voltaje y corriente, llegando así a la generalización tensorial de la ley de Ohm para los circuitos de corriente alterna.

---

<sup>7</sup>Cabe aclarar que la potencia compleja no depende del tensor  $\Gamma^{ij}$  pero si de la cantidad de fases del sistema  $n$ .

### 4.9.1. Tensor de Impedancia $\mathbb{Z}_{ij}$

En un sistema eléctrico de n-fases cualesquiera, la contribución de las impedancias sobre una o más líneas es determinada a partir de los distintos elementos conectados sobre los nodos del sistema en alguna de las fases y el neutro, es decir, todas las combinaciones posibles entre cada nodo, tal como lo determina la ley de corrientes de Kirchhoff.

En un sistema de n-fases, con  $n$  fuentes de tensión y  $m$  corrientes, las contribuciones de impedancias sobre todos los nodos referentes a la fase estará definida como:

$$\mathbb{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{12} & \mathbb{Z}_{13} & \mathbb{Z}_{14} & \cdots & \mathbb{Z}_{1m} \\ \mathbb{Z}_{21} & \mathbb{Z}_{22} & \mathbb{Z}_{23} & \mathbb{Z}_{24} & \cdots & \mathbb{Z}_{2m} \\ \mathbb{Z}_{31} & \mathbb{Z}_{32} & \mathbb{Z}_{33} & \mathbb{Z}_{34} & \cdots & \mathbb{Z}_{3m} \\ \mathbb{Z}_{41} & \mathbb{Z}_{42} & \mathbb{Z}_{43} & \mathbb{Z}_{44} & \cdots & \mathbb{Z}_{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Z}_{n1} & \mathbb{Z}_{n2} & \mathbb{Z}_{n3} & \mathbb{Z}_{n4} & \cdots & \mathbb{Z}_{nm} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Donde,  $\mathbb{Z}_{ij}$  se define como el tensor de impedancia producido por las contribuciones de impedancias <sup>8</sup> para sistemas n-fásicos.

### 4.9.2. Tensor de Admitancia $\mathbb{Y}_{ij}$

Por definición, la admitancia es inversamente proporcional al valor de la impedancia sin importar su lugar geométrico del sistema eléctrico. Para el tensor de admitancia, los elementos se definen como los inversos propios de la impedancia localizada en la posición  $nm$ , en otras palabras, las componentes de admitancias  $\mathbb{Y}_{ij}$  será igual al inverso de las componentes del tensor de impedancia  $\mathbb{Z}_{ij}$ , es decir;

$$\mathbb{Y}_{ij} = \mathbb{Z}_{ij}^{-1} \quad (4.75)$$

teniendo en cuenta lo anterior, el tensor de admitancia será

---

<sup>8</sup>cabe aclarar que los elementos de la matriz de impedancia no necesariamente se refieren a una única impedancia sobre el nodo, si no a la impedancia equivalente de los elementos existentes sobre dichas fases, es por ello que pueden existir varias impedancias sobre el sistema que representen a un único elemento de la matriz generalizada.

$$\mathbb{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_{11} & \mathbb{Y}_{12} & \mathbb{Y}_{13} & \mathbb{Y}_{14} & \cdots & \mathbb{Y}_{1m} \\ \mathbb{Y}_{21} & \mathbb{Y}_{22} & \mathbb{Y}_{23} & \mathbb{Y}_{24} & \cdots & \mathbb{Y}_{2m} \\ \mathbb{Y}_{31} & \mathbb{Y}_{32} & \mathbb{Y}_{33} & \mathbb{Y}_{34} & \cdots & \mathbb{Y}_{3m} \\ \mathbb{Y}_{41} & \mathbb{Y}_{42} & \mathbb{Y}_{43} & \mathbb{Y}_{44} & \cdots & \mathbb{Y}_{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Y}_{n1} & \mathbb{Y}_{n2} & \mathbb{Y}_{n3} & \mathbb{Y}_{n4} & \cdots & \mathbb{Y}_{nm} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

También, se puede llegar a obtener la matriz anterior análogamente como se realizó para el tensor de impedancia determinando las ecuaciones sobre los nodos pero con la diferencia de obtener las ecuaciones dependientes de los voltajes que entran sobre cada uno de los nodos en términos de sus corrientes.

## 4.10. la ley de Ohm en forma tensorial

### 4.10.1. Ley de Ohm generalizada

Clásicamente, la ley de Ohm en un material se describe a partir de la conductividad eléctrica, su formalización matemática se describe a partir de la densidad de corriente  $\vec{J}$  donde es igual al producto de la conductividad eléctrica que presenta  $\sigma$  entre el campo eléctrico  $\vec{E}$ , es decir

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.77)$$

Sin embargo, la conductividad eléctrica  $\sigma$  es considerada una magnitud escalar. En la mecánica de medios continuos, en sólidos cristalinos, la densidad de corriente  $\vec{J}$  no es homogénea en todos los puntos del material. Este tipo de materiales son conocidos como *anisotrópicos*, puesto que, a partir de lo mencionado anteriormente, en distintas ubicaciones del material su conductividad debe ser diferente. Para describir el comportamiento de la conductividad eléctrica en distintos puntos del material se define un tensor de segundo orden. [10]

Sea  $J_j$  el tensor que describe la densidad de corriente y  $E_i$  el tensor de campo eléctrico, la conductividad eléctrica es generada por un tensor de conductividad  $\sigma_{ij}$ , es decir:

$$J_j = \sigma_{ij} E_i \quad (4.78)$$

De manera matricial, el tensor de conductividad se representa como:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \cdots & \sigma_{3m} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} & \cdots & \sigma_{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \sigma_{n4} & \cdots & \sigma_{nm} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

La densidad de corriente tensorial  $J_i$  en un área superficial  $A$ , la cual es constante a lo largo del material, es decir, no deformable, en términos de la corriente tensorial  $I_i$  se define como

$$J_j = \frac{1}{A} I_j \quad (4.80)$$

Ahora, la variación de potencial eléctrico  $\Delta V_j$  en un conductor se define a partir del producto entre la longitud  $L$  y el campo eléctrico tensorial  $E_j$ ,

$$\Delta V_i = L E_i \quad (4.81)$$

Reemplazando en la ecuación (4.78), las ecuaciones (4.80) y (4.81) se llega a

$$\frac{1}{A} I_j = \sigma_{ij} \frac{\Delta V_i}{L} \quad (4.82)$$

Como  $A$  y  $L$  son constantes, se despeja  $L$

$$\frac{L}{A} I_j = \sigma_{ij} \Delta V_i \quad (4.83)$$

Si se multiplica por la matriz inversa de conductividad en ambos lados, es decir

$$\frac{L}{A} \sigma_{ij}^{-1} I_j = \sigma_{ij}^{-1} \sigma_{ij} \Delta V_i \quad (4.84)$$

Se llega a la relación de la variación de tensión con respecto a la corriente

$$\frac{L}{A}\sigma_{ij}^{-1}I_j = \Delta V_i \quad (4.85)$$

Las componentes inversas de la matriz de conductancia representan la resistividad del material, es decir  $\sigma_{ij}^{-1} = \rho_{ij}$ , donde  $\rho$  es la resistividad del material, el cual, de la misma manera, no será igual en todos los puntos se obtiene

$$\frac{L}{A}\rho_{ij}I_j = \Delta V_i \quad (4.86)$$

La variación de potencial  $\Delta V_i = V_i - V_o$ , asumiendo la condición donde  $V_o \rightarrow 0$  para cualquier punto inicial del material, es decir  $\Delta V_i \approx V_i$ , y que, por definición la resistencia es igual al producto de la resistividad del material multiplicado por su longitud sobre el área superficial, para el caso tensorial será  $R_{ij} = \frac{L}{A}\rho_{ij}$ , la ley de Ohm de manera tensorial será

$$V_i = R_{ij}I_j \quad (4.87)$$

Para el caso de escribir la ley de Ohm de manera tensorial en relación a la corriente y la conductancia  $G_{ij}$ , la ecuación (4.87), se multiplica por el inverso del tensor de resistencia eléctrica, es decir

$$R_{ij}^{-1}R_{ij}I_j = R_{ij}^{-1}V_i \quad (4.88)$$

Resolviendo, se llega a

$$I_j = R_{ij}^{-1}V_i \quad (4.89)$$

Finalmente, la conductancia  $G_{ij}$  será igual al inverso de la resistencia  $R_{ij}^{-1}$ , entonces

$$I_j = G_{ij}V_i \quad (4.90)$$

De esta manera, se determina la ley de Ohm para cualquier sistema n-fásico.

### 4.10.2. Ley de Ohm en el dominio de la frecuencia

En los circuitos de corriente directa DC y corriente alterna AC, existen varias analogías, una de las analogías principales es la ley de Ohm en el dominio de la frecuencia representada por los fasores de voltaje, corriente e impedancia

$$V = RI \longleftrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{Z}\mathbb{I}$$

$$I = GV \longleftrightarrow \mathbb{I} = \mathbb{Y}\mathbb{V}$$

Para que exista la correspondencia entre ambos espacios, se establece que la resistencia  $R$  se relaciona con la impedancia  $\mathbb{Z}$  y la conductancia  $G$  con la admitancia  $\mathbb{Y}$ , el voltaje y la corriente en ambos dominios describen el mismo comportamiento en la ecuación.

Ahora, aplicando la misma analogía para la ley de Ohm de manera tensorial en las ecuaciones (4.87) y (4.90) se llega a

$$V_i = R_{ij}I_j \longleftrightarrow \mathbb{V}_i = \mathbb{Z}_{ij}\mathbb{I}_j \quad (4.91)$$

$$I_j = G_{ij}V_i \longleftrightarrow \mathbb{I}_j = \mathbb{Y}_{ij}\mathbb{V}_i \quad (4.92)$$

A partir de lo anterior, se logran determinar de forma matricial los tensores de voltaje y corriente respectivamente en términos de la impedancia y de la admitancia.

*El tensor de voltaje será:*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{12} & \mathbb{Z}_{13} & \mathbb{Z}_{14} & \cdots & \mathbb{Z}_{1m} \\ \mathbb{Z}_{21} & \mathbb{Z}_{22} & \mathbb{Z}_{23} & \mathbb{Z}_{24} & \cdots & \mathbb{Z}_{2m} \\ \mathbb{Z}_{31} & \mathbb{Z}_{32} & \mathbb{Z}_{33} & \mathbb{Z}_{34} & \cdots & \mathbb{Z}_{3m} \\ \mathbb{Z}_{41} & \mathbb{Z}_{42} & \mathbb{Z}_{43} & \mathbb{Z}_{44} & \cdots & \mathbb{Z}_{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Z}_{n1} & \mathbb{Z}_{n2} & \mathbb{Z}_{n3} & \mathbb{Z}_{n4} & \cdots & \mathbb{Z}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

De la misma manera, tensor de corriente:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_{11} & \mathbb{Y}_{12} & \mathbb{Y}_{13} & \mathbb{Y}_{14} & \cdots & \mathbb{Y}_{1m} \\ \mathbb{Y}_{21} & \mathbb{Y}_{22} & \mathbb{Y}_{23} & \mathbb{Y}_{24} & \cdots & \mathbb{Y}_{2m} \\ \mathbb{Y}_{31} & \mathbb{Y}_{32} & \mathbb{Y}_{33} & \mathbb{Y}_{34} & \cdots & \mathbb{Y}_{3m} \\ \mathbb{Y}_{41} & \mathbb{Y}_{42} & \mathbb{Y}_{43} & \mathbb{Y}_{44} & \cdots & \mathbb{Y}_{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{Y}_{n1} & \mathbb{Y}_{n2} & \mathbb{Y}_{n3} & \mathbb{Y}_{n4} & \cdots & \mathbb{Y}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_n \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Con el fin de demostrar físicamente la existencia de los tensores de voltaje y corriente, se hace una analogía con la ley de ohm demostrada tensorialmente para el caso del tensor de conductividad.

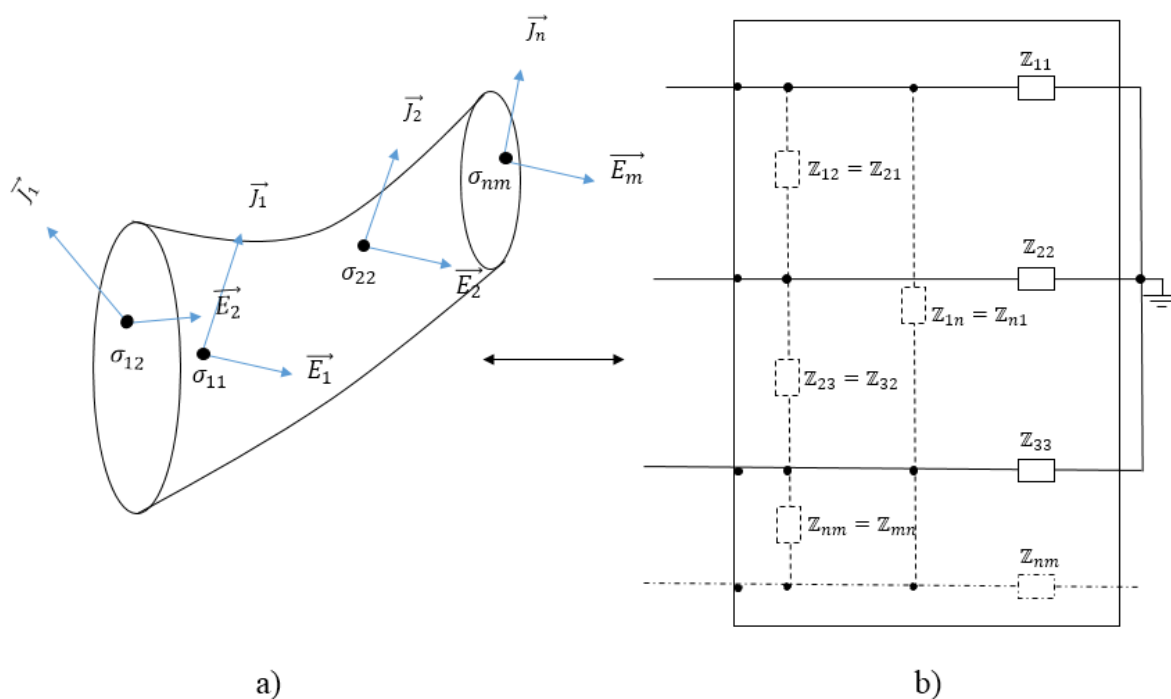


Figura 4.2: Analogía entre las distintas conductividades eléctricas y las contribuciones de impedancia dentro de un circuito cualquiera.

*Realizada por los autores*

Un material de conductividad eléctrica tensorial  $\sigma_{ij}$ , como el representado en la fig. (4.2) en (a), se considera una geometría donde en distintos puntos la densidad de corriente y el campo eléctrico son distintos, es por ello que, en dichos puntos la conductividad será diferente, en esos mismos puntos el valor de la resistencia tensorial  $R_{ij}$  también será diferente, puesto que, la oposición de corriente eléctrica desde un punto a otro generado por la diferencia de potencial a causa del campo eléctrico cambiará su magnitud y dirección.

Para el caso (b) de la misma figura, se representa una carga cualquiera la cual consta de distintos elementos eléctricos en conexiones distintas a  $n$  fuentes de tensión o corriente que alimentan  $n$  cantidades de elementos. Dichos elementos, pueden representar un circuito de una conexión de impedancias generadas por máquinas eléctricas, electrodomésticos, cargas de un sistema interconectado, etc., las cuales no serán exactamente iguales y pueden presentar alguna variación una respecto a la otra y, a su vez, no se conectan de un mismo punto a otro.

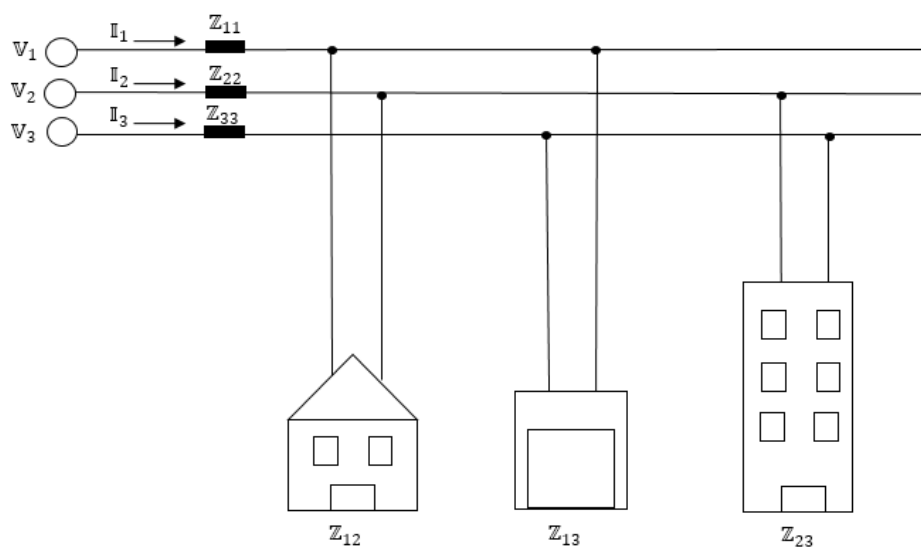


Figura 4.3: Analogía entre las distintas conductividades eléctricas y las contribuciones de impedancia dentro de un circuito cualquiera.

*Realizada por los autores*

Para dejar una mayor claridad del sentido físico de las impedancias, se supone un sistema trifásico como el que se muestra en la fig. 4.3 definido por un tensor de voltaje  $V_i$ , tal como los generados en una red eléctrica, dicho sistema es alimentado por tres fuentes de tensión que generan tres corrientes de línea. Los cables a lo largo del sistema presentan una oposición

al paso de la corriente generando una impedancia de línea, también, se suponen tres cargas de impedancia diferentes conectadas en el sistema trifásico sobre cargas bifásicas, es decir, elementos conectados sobre dos de las líneas de fase (omitiendo el neutro), en ellas se dispone una impedancia  $Z_{12}$  de una casa conectada sobre las líneas (1) y (2), otra impedancia generada por una fábrica conectada sobre las líneas (1) y (3) que generan una impedancia  $Z_{13}$  sobre las líneas y finalmente un edificio de apartamentos conectado sobre (2) y (3) generando sobre el sistema una impedancia equivalente  $Z_{23}$ .

Las impedancias generadas por la casa, la industria y el edificio serán distintas entre si ya sea por el consumo de corriente o por la cantidad de resistencias, inductancias y capacitancias dentro de cada uno de ellos, por otra parte, las impedancias vistas desde las líneas y desde las edificaciones serán las mismas, es decir, existe un principio de simetría donde  $Z_{nm} = Z_{mn}$ , puesto que la carga vista desde alguna de las corrientes existentes en la malla generada por las impedancias cambiara su dirección (es decir el signo de corriente) más no cambiara el valor de la impedancia porque las cargas serán las generadoras por ellas mismas.

## 4.11. Leyes de Kirchooff de manera tensorial

Las leyes de Kirchoff de tensión y corrientes permanecen invariantes en los calculos matemáticos, puesto que dependen de la cantidad de cargas que se suministran a una fuente de tensión o a un nodo general, es decir, se pueden escribir de manera tensorial como:

*Ley de Voltajes de Kirchoff*

$$\sum_{k=1}^p V_{ik} = 0 \quad (4.95)$$

Donde el subíndice  $i$  representa la malla en la cual se realiza la sumatoria, es decir, es constante para dicha configuración, donde el voltaje de la fuente  $i$  será igual a la suma de todas las tensiones generadas por la sumatoria de todos los elementos del sistema y será igual a cero, es decir:

$$\sum_{k=1}^p V_{ik} = V_{i1} + V_{i2} + V_{i3} + \cdots + V_{ip} \quad (4.96)$$

*Ley de Corrientes de Kirchhoff*

$$\sum_{k=1}^p I_{jk} = 0 \quad (4.97)$$

Donde el subíndice  $i$  representa el nodo de la sumatoria, es decir, es constante para dicha configuración, donde la corriente de la fuente  $j$  será igual a la suma de todas las corrientes generadas por la sumatoria de todos los elementos en el nodo y será igual a cero, es decir:

$$\sum_{k=1}^p I_{jk} = I_{j1} + I_{j2} + I_{j3} + \cdots + I_{jp} \quad (4.98)$$

De manera análoga, el cálculo de los análisis de nodos y mallas conservan las mismas formalidades propuestas en las soluciones de circuitos eléctricos convencionales.

# Capítulo 5

## Aplicaciones

Este capítulo pretende ejemplificar casos particulares del análisis de los circuitos eléctricos polifásicos de manera tensorial cada uno enriqueciendo la teoría. Para ello, se establecen redes de sistemas eléctricos comunes como de 3-fases, redes eléctricas de conexiones sobre cargas polifásicas, métodos de análisis en sistemas de potencia y simulaciones.

Cabe aclarar que, son muchos más las aplicaciones de los tensores de tensión, voltaje y corriente sobre los sistemas eléctricos, sin embargo, el presente trabajo consiste en demostrar teórica y computacionalmente la formalización física de las componentes del análisis geométrico desarrollado con anterioridad.

Como se ha venido recopilando a lo largo del análisis del trabajo, los sistemas de n-fases en generaciones de corriente alterna son evaluados principalmente en sistemas trifásicos, para demostrar el uso de los tensores en dichos sistemas se consideran los siguientes casos:

### **5.1. Análisis geométrico de n-fases para sistemas de nodo común**

En la teoría de circuitos eléctricos es usual poseer redes eléctricas que comparten un punto en común, por ejemplo. las conexiones (estrella o Y) todos los puntos negativos de la fuente se conectan entre si y las salidas se conectan a cargas individuales que también se encuentran conectadas a un nodo común. Se plantea una generalización de la unión sobre nodos depen-

dientes de las n-fases del sistema tal y como lo muestra la figura (5.1), para ello, se plantea un sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas para la solución sobre n-fases, definiendo el tensor de impedancia generalizado al plantear la solución por LCK.

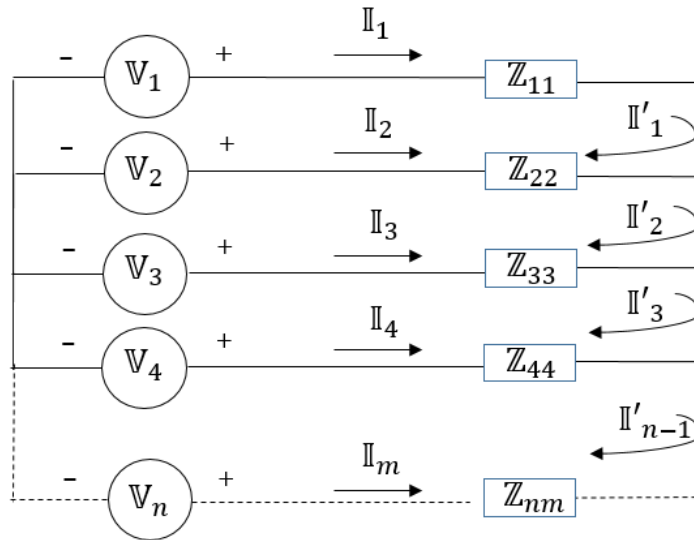


Figura 5.1: Sistema de n fuentes de tensión de fase conectadas sobre n impedancias de línea. Para este caso, las corrientes primadas representan a las definidas por LCK sobre cada malla generada entre dos cables que tienen una correspondencia significativa dependiendo de la corriente de línea definida. *Realizada por los autores*

Existen dos casos de análisis para este tipo de redes, el primero es cuando las cargas se encuentran balanceadas, es decir, todas las cargas son iguales, en el caso general será  $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = Z_{44} = \dots = Z_{nn}$ , y, el siguiente caso será cuando las cargas no estén balanceadas, es decir, sean diferentes <sup>1</sup>.

### 5.1.1. Análisis geométrico para sistemas simétricos con cargas iguales

En un sistema eléctrico con cargas balanceadas, las impedancias de línea tienen una relación directa con las corrientes de línea y voltajes de fase. Al no existir impedancias conectadas, desarrollando un análisis a través de las LCK entre las líneas se puede concluir que las impedancias existentes son únicamente los elementos diagonales dentro de la matriz de impedancia plan-

<sup>1</sup>Cabe aclarar, que el método para cargas desbalanceadas también puede ser aplicado para cargas balanceadas, es decir, la concepción mediante las LCK permite la inclusión de las variables independientes definidas para los circuitos balanceados definiendo los elementos y considerándolos en estado desbalanceado.

teada en (4.93), es decir:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{Z}_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z}_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{Z}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_4 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para construir la matriz anterior a partir de la ley de Ohm de manera tensorial expresada en (4.93), aplicando el delta de Kronecker sobre la matriz de impedancia obteniendo la solución general de la ley de Ohm para este tipo de sistemas así:

$$\mathbb{V}_i = \delta_i^j \mathbb{Z}_{ij} \mathbb{I}_j \quad (5.2)$$

En el caso de no conocer el tensor de corriente y conocer las demás variables, despejando se obtiene

$$(\delta_i^j \mathbb{Z}_{ij})^{-1} \mathbb{V}_i = (\delta_i^j \mathbb{Z}_{ij})^{-1} \delta_i^j \mathbb{Z}_{ij} \mathbb{I}_j \quad (5.3)$$

Por propiedades,  $\delta_i^j = (\delta_i^j)^{-1}$ . Finalmente el tensor de corriente estará definido por

$$\mathbb{I}_j = \delta_i^j (\mathbb{Z}_{ij})^{-1} \mathbb{V}_i \quad (5.4)$$

Conforme al análisis de la potencia compleja tensorial se aplican las mismas ecuaciones planteadas en el capítulo anterior para sistemas equilibrados.

**Ejemplo 1:** Se tiene un sistema de 3-fases con cargas balanceadas como el que se muestra en la figura (5.2). La fuente de tensión inicial es de 120 V en AC y las demás se encuentran

desfasadas  $120^\circ$  respectivamente y las tres cargas inductivas <sup>2</sup> con un valor de impedancia de  $5\angle 90^\circ \Omega$ . a) Determine las corrientes de línea de cada una de las fuentes y b) calcule la potencia activa, reactiva, aparente y compleja<sup>3</sup>.

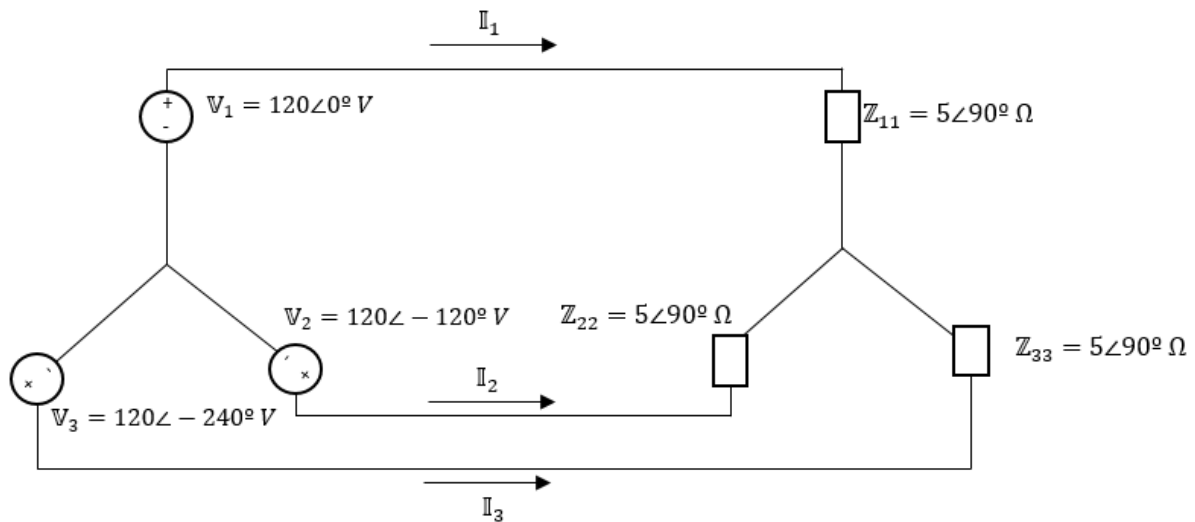


Figura 5.2: Sistema de 3-fases balanceado para el ejemplo 1. Las fuentes de tensión son simétricas y las impedancias de línea también lo son. *Realizada por los autores*

Para solucionar el anterior ejercicio, inicialmente se recopila la información en la tabla (5.1).

| Datos                                   |
|---|
| $V_1 = 120\angle 0^\circ V$             |
| $V_2 = 120\angle -120^\circ V$          |
| $V_3 = 120\angle -240^\circ V$          |
| $Z_{11} = j5 = 5\angle 90^\circ \Omega$ |
| $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33}$              |

Cuadro 5.1: Recopilación de la información ejemplo 1

<sup>2</sup>Se refiere a cargas que son unicamente conformadas por inductancias, por ejemplo un motor, un relé o una bobina de tesla

<sup>3</sup>para el desarrollo de todos los cálculos matemáticos se utiliza un programa diseñado por los autores en MATLAB<sup>®</sup>, el cual se encuentra descrito en el apéndice (B)

**a) Cálculo de corrientes de línea:** Definiendo la ley de Ohm con los datos recopilados en forma matricial para  $n = 3$  a partir de la ecuación (5.2) se obtienen

$$\begin{bmatrix} 120\angle 0^\circ V \\ 120\angle -120^\circ V \\ 120\angle -240^\circ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\angle 90^\circ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 5\angle 90^\circ \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 5\angle 90^\circ \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (5.4) y escribiendo el sistema de manera matricial para  $n = 3$ , obteniendo la inversa de la matriz de impedancia calculada a través del software diseñado en MATLAB<sup>®</sup>, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2\angle 90^\circ \Omega^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,2\angle 90^\circ \Omega^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0,2\angle 90^\circ \Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120\angle 0^\circ V \\ 120\angle -120^\circ V \\ 120\angle -240^\circ V \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema matricial se llegan a las expresiones de corrientes de línea respectivamente como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24\angle -90^\circ A \\ 24\angle -30^\circ A \\ 24\angle 30^\circ A \end{bmatrix}$$

### **b) Cálculo de la potencia activa, reactiva, aparente y compleja**

Para este cálculo se utilizan los tensores de potencia definidos en las ecuaciones (4.43), (4.44), (4.45) y (4.46), al ser el sistema simétrico y balanceado.

La potencia activa, reactiva, aparente y compleja serán respectivamente definidas, para ello se toma  $i = j = 1$ , es decir, la componente (1, 1) de la matriz resultante de potencia compleja.

$$P = 3V_1 I_1 \cos(\theta_{11}) = 3(120V)(24A)\cos(90^\circ)W = 0 \text{ [W]}$$

$$Q = 3V_1 I_1 \sin(\theta_{11}) = 3(120V)(24A)\sin(90^\circ)W = 8640 \text{ [VAR]}^4$$

<sup>4</sup>La unidad general de la potencia es el vatio  $W$ , sin embargo, se suele utilizar las siglas  $VAR$  para referirse a la cantidad de vatios reactivos generados por el sistema, es decir,  $VAR = \text{Volts-Amperio Reactivo} = W$  (reactivo)

$$S = 3V_1I_1 = 3(120V)(24A) = 8640 \text{ [VA]}^5$$

$$\mathbb{S} = P + \mathbf{j}Q = \mathbf{j}8640 = 8640\angle 90^\circ \text{ [VA]}$$

En el apéndice (B) sección (B.3) se encuentra el código de implementación en MATLAB® para la solución sobre sistemas de n-fases simétricos y balanceados.

### 5.1.2. Análisis geométrico para sistemas simétricos con cargas diferentes

Por otra parte, existen casos particulares donde las cargas son de diferente valor entre si, es decir, están desbalanceadas. Para la solución de este tipo de sistemas es necesario aplicar la LCK sobre cada lazo.

Al aplicar el analisis mediante LCK, el análisis de mallas reduce un sistema de ecuaciones de  $n$  elementos a sistemas de  $n - 1$ , es decir, las componentes tensoriales tienen un orden inferior<sup>6</sup>.

Las ecuaciones de cada lazo estarán dadas como (ver fig. (5.1))

#### Para la Malla # 1

$$\mathbb{I}'_1(\mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22}) - \mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_2 = \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2$$

#### Para la Malla # 2

$$-\mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_1 + \mathbb{I}'_2(\mathbb{Z}_{33} + \mathbb{Z}_{22}) - \mathbb{Z}_{33}\mathbb{I}'_3 = \mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_3$$

#### Para la Malla # 3

$$-\mathbb{Z}_{33}\mathbb{I}'_2 + \mathbb{I}'_3(\mathbb{Z}_{33} + \mathbb{Z}_{44}) - \mathbb{Z}_{44}\mathbb{I}'_4 = \mathbb{V}_3 - \mathbb{V}_4$$

#### Para la Malla # 4

---

<sup>5</sup>Dicha sigla de potencia se define como la cantidad de vatios generados por el sistema, es decir, VA=Volts-Amperio=W(totales)

<sup>6</sup>Mediante este análisis puede también desarrollarse los sistemas balanceados donde sea necesario reducir la cantidad de ecuaciones presentes en el sistema, sin embargo, es un análisis un poco más largo en cuanto a cálculos y procedimientos matemáticos

$$-Z_{44}I'_3 + I'_4(Z_{44} + Z_{55}) - Z_{55}I'_5 = V_4 - V_5$$

$$\vdots$$

**Para la Malla #  $n - 1$**

$$-Z_{(n-1)(n-1)}I'_{n-2} + I'_{n-1}(Z_{(n-1)(n-1)} + Z_{nn}) = V_{n-1} - V_n$$

Sea  $x = 1, 2, 3, \dots, n - 1$  e  $y = 1, 2, 3, \dots, n - 1$  los subíndices que definen los tensores de voltaje, corriente e impedancia para el análisis de malla. En forma matricial, el tensor de impedancias de LCK  $Z'_{xy}$  se expresa como

$$Z'_{xy} = \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_{22} & -Z_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -Z_{22} & Z_{22} + Z_{33} & -Z_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -Z_{33} & Z_{33} + Z_{44} & -Z_{44} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -Z_{44} & Z_{44} + Z_{55} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -Z_{(n-1)(n-1)} & \cdots & Z_{(n-1)(n-1)} + Z_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

El tensor de corriente estará definido a partir de las corrientes de malla  $I'_y$  como

$$I_j = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 - I'_1 \\ I'_3 - I'_2 \\ I'_4 - I'_3 \\ \vdots \\ -I'_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

El tensor de voltajes de malla  $V'_x$  estará determinado por

$$\mathbb{V}'_x = \begin{bmatrix} \mathbb{V}'_1 \\ \mathbb{V}'_2 \\ \mathbb{V}'_3 \\ \mathbb{V}'_4 \\ \vdots \\ \mathbb{V}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_3 - \mathbb{V}_4 \\ \mathbb{V}_4 - \mathbb{V}_5 \\ \vdots \\ \mathbb{V}_{n-1} - \mathbb{V}_n \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

El tensor descrito de manera general, definido a partir de las corrientes y voltajes de malla es determinado por cada uno de los lazos cerrados del circuito n-fásico, que, en total, serán n-1 lazos cerrados de corriente sobre los cuales la diferencia de potencia estará determinada mediante los voltajes n-fásicos del propio sistema. Es decir, para obtener los voltajes de malla  $\mathbb{V}'_x$  se multiplica el tensor de impedancias  $\mathbb{Z}'_{xy}$  por el tensor de corrientes de malla  $\mathbb{I}'_y$  definidos en las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7)

$$\mathbb{V}'_x = \mathbb{Z}'_{xy} \mathbb{I}'_y \quad (5.8)$$

Cuyo análisis demuestra que se sigue aplicando las LCK:

$$\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_3 + \cdots + \mathbb{I}_m = 0 \quad (5.9)$$

En el caso de no conocer el tensor de corriente y las demás variables se conocen, despejando se obtiene

$$(\mathbb{Z}'_{xy})^{-1} \mathbb{V}'_x = (\mathbb{Z}'_{xy})^{-1} \mathbb{Z}'_{xy} \mathbb{I}'_y \quad (5.10)$$

Finalmente el tensor de corriente estará definido por

$$\mathbb{I}'_y = (\mathbb{Z}'_{xy})^{-1} \mathbb{V}'_x \quad (5.11)$$

Conforme al análisis de la potencia compleja tensorial se aplican las mismas ecuaciones planteadas en el capítulo anterior para sistemas equilibrados.

**Ejemplo 2:** Se tiene un sistema de 3-fases con cargas desbalanceadas como el que se muestra en la figura (5.3). La fuente de tensión inicial es de 120 V en AC y las demás se encuentran desfasadas  $120^\circ$  respectivamente y las tres cargas inductivas con valores de impedancia de  $5\angle 90^\circ\Omega$ ,  $10\angle 70^\circ\Omega$  y  $20\angle 30^\circ\Omega$ . a) Determine las corrientes de línea de cada una de las fuentes y b) calcule la potencia activa, reactiva, aparente y compleja.

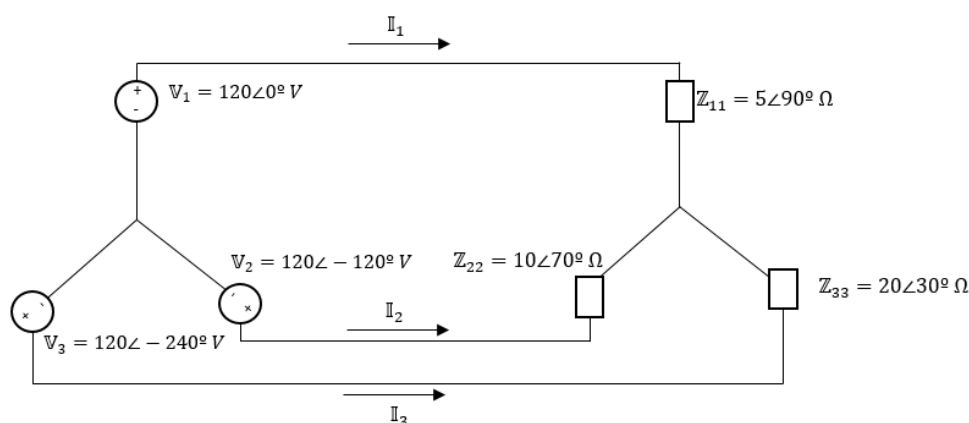


Figura 5.3: Sistema de 3-fases desbalanceado para el ejemplo 2

Las fuentes de tensión son simétricas y las impedancias de línea no lo son. *Realizada por los autores*

Para solucionar el anterior ejercicio, inicialmente se recopila la información en la tabla (5.1).

| Datos                              |
|------------------------------------|
| $V_1 = 120\angle 0^\circ V$        |
| $V_2 = 120\angle -120^\circ V$     |
| $V_3 = 120\angle -240^\circ V$     |
| $Z_{11} = 5\angle 90^\circ\Omega$  |
| $Z_{22} = 10\angle 70^\circ\Omega$ |
| $Z_{33} = 20\angle 30^\circ\Omega$ |

Cuadro 5.2: Recopilación de la información ejemplo 2

a) **Calculo de corrientes de línea:** inicialmente, se deben determinar los elementos de la matriz de impedancia  $Z'_{xy}$ , y los voltajes  $V'_x$ , de la siguiente manera:

$$Z'_{11} = Z_{11} + Z_{22} = 14,79\angle 76,36^\circ \Omega$$

$$Z'_{12} = -Z_{22} = -(10\angle 110^\circ \Omega) = Z'_{21}$$

$$Z'_{22} = Z_{22} + Z_{33} = 28,39\angle 43,1^\circ \Omega$$

$$V'_1 = V_1 - V_2 = 207,84\angle 30^\circ V$$

$$V'_2 = V_2 - V_3 = 207,84\angle -90^\circ V$$

Con los datos anteriores, a partir de las matrices (5.5), (5.6) y (5.7) se aplica la ley de Ohm de manera tensorial quedando definido como

$$\begin{bmatrix} 207,84\angle 30^\circ V \\ 207,84\angle -90^\circ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,79\angle 76,65^\circ \Omega & -(10\angle -110^\circ) \Omega \\ -(10\angle -110^\circ) \Omega & 28,39\angle 43,1^\circ \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (5.11) y escribiendo el sistema de manera matricial para  $n = 2$ , obteniendo la inversa de la matriz de impedancia calculada a través del software diseñado en MATLAB<sup>®</sup>, se llega a

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0865\angle -70,622^\circ \Omega^{-1} & 0,03\angle 136,32^\circ \Omega^{-1} \\ 0,03\angle 136,32^\circ \Omega^{-1} & 0,045\angle -36,97^\circ \Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 207,84\angle 30^\circ V \\ 207,84\angle -90^\circ V \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema matricial se llegan a las expresiones de corrientes de malla respectivamente como

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,44\angle -55,99^\circ A \\ 12\angle -172,83^\circ A \end{bmatrix}$$

Para expresar las corrientes de línea en términos de las corrientes de malla se aplica la matriz (5.6)

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}'_1 \\ \mathbb{I}'_2 - \mathbb{I}'_1 \\ -\mathbb{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,44 \angle -55,99^\circ A \\ 29,85 \angle 145,03^\circ A \\ 12 \angle 7,17^\circ A \end{bmatrix}$$

**b) Calculo de la potencia activa, reactiva, aparente y compleja**

Para este calculo se utilizan los tensores de potencia definidos en las ecuaciones (4.6), (4.37), (4.39) y (4.40), al ser el sistema simétrico pero con cargas distintas.

Inicialmente se encuentra el tensor de potencia compleja definido en (4.32), del cual resulta al aplicar el producto diádico entre los tensores de voltaje y corriente en el ejemplo;

$$\mathbb{P}_{ij} = \begin{bmatrix} 2692,92 \angle 55,99^\circ & 3582 \angle -145,03^\circ & 1440 \angle 7,17^\circ \\ 2692,92 \angle -69,01^\circ & 3582 \angle 94,97^\circ & 1440 \angle -127,17^\circ \\ 2692,92 \angle 175,99^\circ & 3582 \angle -25,03^\circ & 1440 \angle 112,83^\circ \end{bmatrix} VA$$

La potencia activa, reactiva, compleja y aparente serán respectivamente definidas como:

$$P = tr\{|\mathbb{P}_{ii}| \cos \theta_{ii}\}$$

$$P = 2692,92 \cos(55,99)W + 3582 \cos(94,97)W + 1440 \cos(112,83)W$$

$$P = 637,21W$$

$$Q = tr\{|\mathbb{P}_{ii}| \sin \theta_{ii}\}$$

$$Q = 2692,92 \sin(55,99)VAR + 3582 \sin(94,97)VAR + 1440 \sin(112,83)VAR$$

$$Q = 7127,99VAR$$

$$\mathbb{S} = tr\{\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{I}_i^*\} = 637,21 + \mathbf{j}7127,99VA$$

O también,

$$\mathbb{S} = P + \mathbf{j}Q = 637,21 + \mathbf{j}7127,99VA$$

$$S = |\mathbb{S}| = 7156,42VA$$

En el apéndice (B) sección (B.4) se encuentra el código de implementación en MATLAB® para la solución de sistemas de n-fases simétricos y balanceados.

## 5.2. Tensor de Admitancia de Barra $\mathbb{Y}_{ij}$

En los sistemas de potencia, se modela cada uno de los elementos del sistema como impedancias sobre la línea, en otras palabras, los componentes sobre la red, sin necesitar de una información entre la conexión de los distintos elementos en el sistema polifásico.

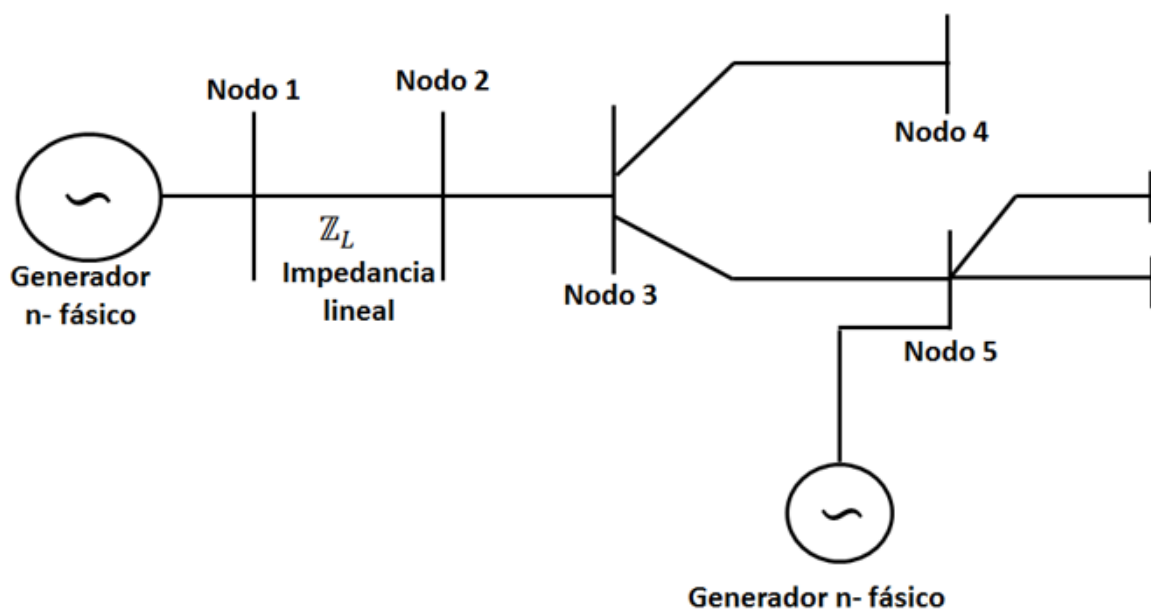


Figura 5.4: Diagrama explicativo unifilar de un sistema de potencia. Cada generador representa una impedancia sobre el sistema, al igual que las líneas. Entre cada nodo existen impedancias de línea y contribuciones de corriente generadas por las cargas conectadas en los demás nodos, se suele utilizar esta representación unifilar al ser más sencillo de analizar el sistema. *Realizada por los autores*

Generalmente, el análisis de los sistemas eléctricos de potencia se basan desde el calculo de la matriz de admitancia de barra o más conocida como  $Y_{bus}$ , la cual consiste en definir las impedancias generadas por cada carga conectada sobre cada nodo y evaluar las posibles conexiones entre ellas, esta matriz es utilizada en el estudio de flujos de potencia y de análisis de fallas.

Con el fin de generalizar dicha matriz, se define a partir del tensor de admitancia  $Y_{ij}$  definido en (4.75), se define como:

Sea  $Y_{ij}$  el tensor de admitancia de barra, donde los subíndices son determinados a través de la cantidad de nodos que existen en el sistema, tal como muestra la fig. (5.2).

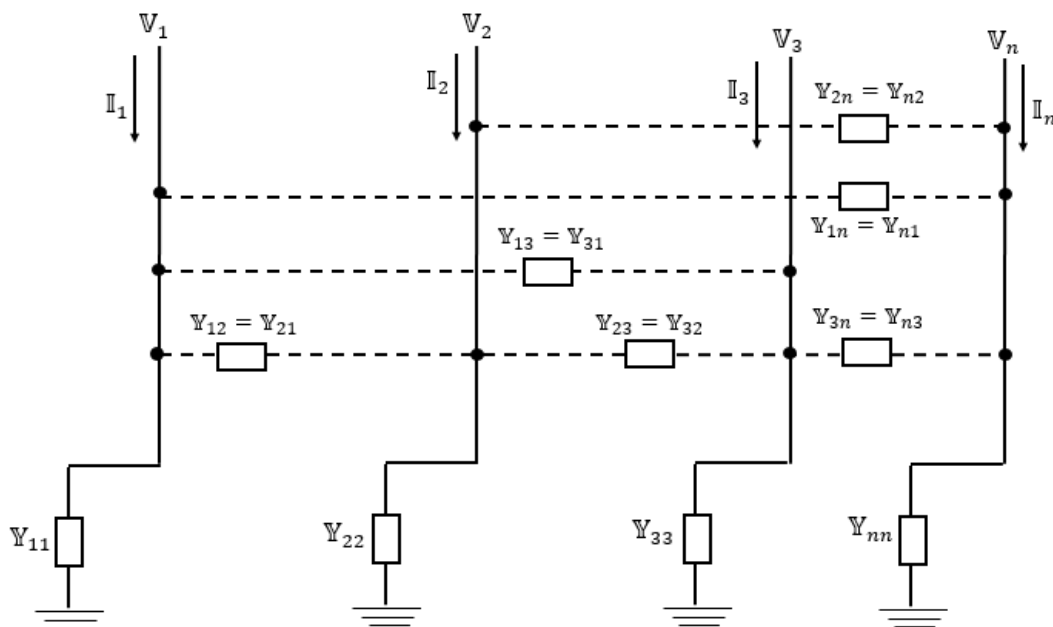


Figura 5.5: Contribuciones de impedancias sobre ca uno de los n nodos.

En la figura se representan las posibles contribuciones nodales de las impedancias distintas entre nodos, su existencia y necesidad de denotarlas para la definición del tensor de admitancia. *Realizada por los autores*

Notese que, en cada uno de los nodos existe una contribución de cargas acopladas sobre cada uno de los nodos. Aplicando un analisis de nodos sobre cada uno de ellos, se logra apreciar una impedancia asociada respecto a la ubicación específica de los elementos del tensor. Solucionando mediante Kirchoff aplicando la ley de Ohm de manera tensorial, se obtienen los sistemas de ecuaciones

**Nodo 1:**

$$\mathbb{I}_1 = (\mathbb{Y}_{11} + \mathbb{Y}_{12} + \cdots + \mathbb{Y}_{1n})\mathbb{V}_1 - \mathbb{Y}_{12}\mathbb{V}_2 - \cdots - \mathbb{Y}_{1n}\mathbb{V}_n \quad (5.12)$$

**Nodo 2:**

$$\mathbb{I}_2 = -\mathbb{Y}_{21}\mathbb{V}_1 + (\mathbb{Y}_{21} + \mathbb{Y}_{22} + \cdots + \mathbb{Y}_{2n})\mathbb{V}_2 - \cdots - \mathbb{Y}_{2n}\mathbb{V}_n \quad (5.13)$$

$$\vdots$$

$$(5.14)$$

**Nodo n:**

$$\mathbb{I}_n = -\mathbb{Y}_{n1}\mathbb{V}_1 - \mathbb{Y}_{n2}\mathbb{V}_n + \cdots + (\mathbb{Y}_{n1} + \mathbb{Y}_{n2} + \cdots + \mathbb{Y}_{nn})\mathbb{V}_n \quad (5.15)$$

En forma matricial, la matriz se obtiene al organizar los términos de la ley de Ohm se deduce de  $\mathbb{I}_j = \mathbb{Y}_{ij}\mathbb{V}_i$  como:

$$\mathbb{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_{11} + \mathbb{Y}_{12} + \cdots + \mathbb{Y}_{1n} & -\mathbb{Y}_{12} & \cdots & -\mathbb{Y}_{1n} \\ -\mathbb{Y}_{21} & \mathbb{Y}_{21} + \mathbb{Y}_{22} + \cdots + \mathbb{Y}_{2n} & \cdots & -\mathbb{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbb{Y}_{n1} & -\mathbb{Y}_{n2} & \cdots & \mathbb{Y}_{n1} + \mathbb{Y}_{n2} + \cdots + \mathbb{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

De esta manera se generaliza la matriz de admitancia de barra a partir del tensor de  $\mathbb{Y}_{barra}$

**ejemplo 3:** Determinar el tensor  $\mathbb{Y}_{ij}$  del sistema de tres nodos de la fig. (5.6)

Para determinar los elementos de la matriz, se expande hasta  $n = 3$ , cuyo valor es el total de los nodos, es decir

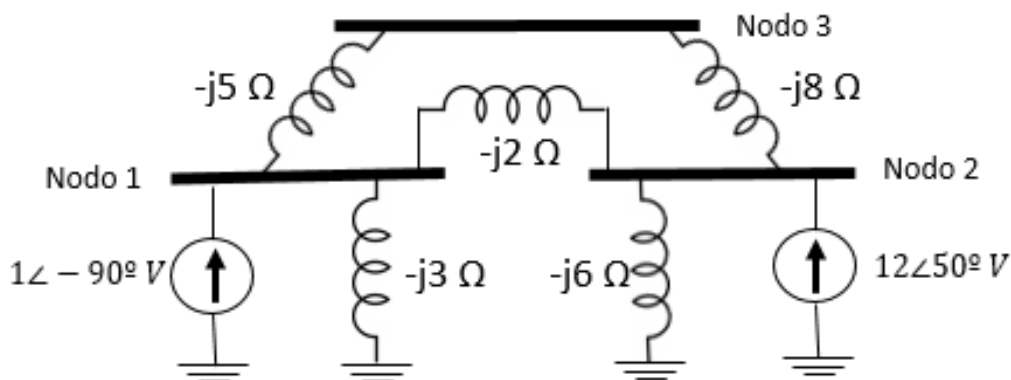


Figura 5.6: Sistema de potencia de 3 nodos.

En este sistema se establecen de manera gráfica las impedancias generadoras por las líneas y fuentes de corriente eléctrica, para la simplicidad y entendimiento del documento, se denotan cargas altamente inductivas, es decir, sin valores resistivos, que generalmente son de dicha naturaleza. *Realizada por los autores*

$$\mathbf{Y}_{33} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Y}_{13} & -\mathbf{Y}_{12} & -\mathbf{Y}_{13} \\ -\mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{21} + \mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}_{23} & -\mathbf{Y}_{2n} \\ -\mathbf{Y}_{31} & -\mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{31} + \mathbf{Y}_{32} + \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Los elementos se calculan a través de la figura (5.6) analizando las relaciones entre los nodos así:

$$\mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Y}_{13} = -\mathbf{j}3 + (-\mathbf{j}2) + (-\mathbf{j}5) = -\mathbf{j}10$$

$$\mathbf{Y}_{21} + \mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}_{23} = -\mathbf{j}2 + (-\mathbf{j}6) + (-\mathbf{j}8) = -\mathbf{j}16$$

$$\mathbf{Y}_{31} + \mathbf{Y}_{32} + \mathbf{Y}_{33} = -\mathbf{j}5 + (-\mathbf{j}8) + 0 = -\mathbf{j}13$$

$$-\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{j}2 = -\mathbf{Y}_{21}$$

$$-\mathbf{Y}_{13} = \mathbf{j}5 = -\mathbf{Y}_{31}$$

$$-\mathbf{Y}_{23} = \mathbf{j}8 = -\mathbf{Y}_{32}$$

Finalmente, el tensor de admitancia será

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} -j10 & j2 & j5 \\ j2 & -j16 & j8 \\ j5 & j8 & -j13 \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

### 5.3. Análisis de falla por corto circuito

En un circuito eléctrico polifásico pueden existir diversas fallas ocasionando que el sistema simétrico esté en un nuevo estado asimétrico, por ejemplo, cuando en una red trifásica cae un rayo sobre una de las líneas de tensión de red, se desconecta a causa de la sobre tensión<sup>7</sup> y el sistema pierde su simetría.

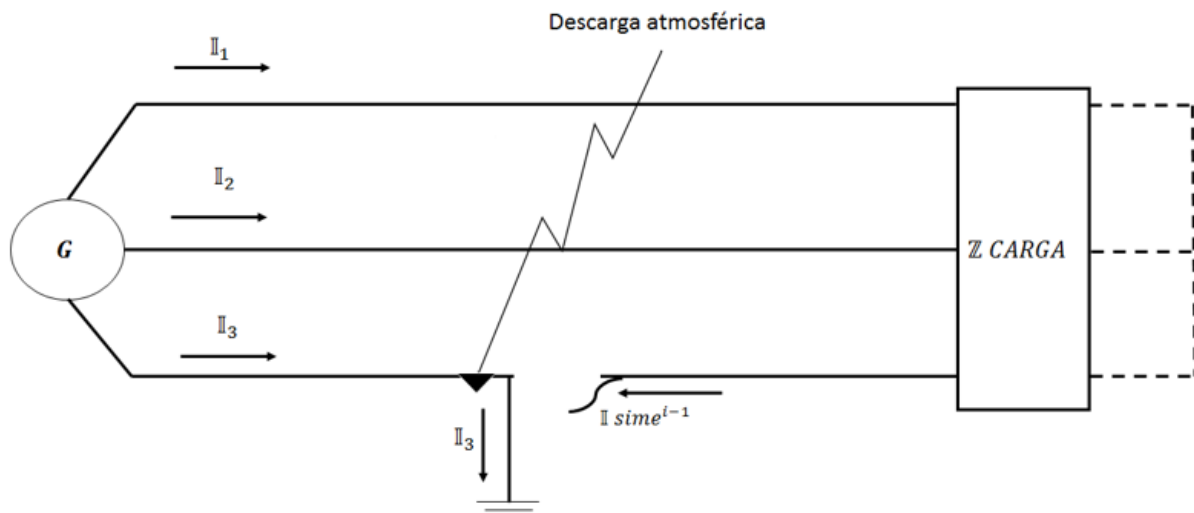


Figura 5.7: Falla eléctrica sobre una línea ocasionada por una descarga atmosférica. Las líneas (1) y (2) desarrollan una contribución a la línea (3) existiendo corrientes parásitas dentro de los elementos de medida. *Realizada por los autores*

Como ya se mencionó, antes de la falla, el sistema será simétrico, sin importar si la carga estaba balanceada, desbalanceada, conectada o desconectada, luego, después de la falla, una o varias de las fases que alimenta dicha carga cambia su magnitud y dirección. En los sistemas polifásicos, todas las corrientes desarrollan una contribución sobre cada nodo del sistema, es decir, cada corriente contribuye en un determinado valor de magnitud y ángulo fasorial sobre

<sup>7</sup>Tensión superior a la soportada por el conductor eléctrico ocasionando un corto circuito a tierra y posterior falla

cada línea de tensión, en tal caso que exista una falla sobre el sistema, en ese punto (aunque no exista una contribución simétrica de la fase que se desconecta) existirán contribuciones por las componentes simétricas del sistema, es decir, existirán corrientes que aún estén llegando al nodo interrumpido del sistema. Para determinar dichas corrientes o voltajes se utiliza el teorema de Fortescue-Stokvis que en el capítulo anterior se mencionó y generalizo para sistemas de  $n$ -fases.

Para sustentar lo anteriormente mencionado se desarrolla un ejemplo sencillo de 3-fases.

**Ejemplo 4:** En un sistema de 3-fases pasa una corriente de 10 A sobre la primera línea, la tercera fase se desconecta a causa de una descarga atmosférica ocasionando que la corriente a través de la tercera línea no fluya. La corriente suministrada por la segunda fuente es de -10A. a) Determine las contribuciones de las componentes simétricas de corriente a través de la tercera línea b) Calcule las componentes simétricas de las fuentes si el voltaje de las líneas es de 120 V y cada una esta desfasada  $120^\circ$  una línea respecto a la otra. c) Determine la potencia compleja del sistema a partir de las componentes simétricas de la corriente y el voltaje.

| Datos   |
|---|
| $\mathbb{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$    |
| $\mathbb{I}_2 = 10 \angle -180^\circ \text{ V}$ |
| $\mathbb{I}_3 = 0 \angle 0^\circ \text{ V}$     |
| $\mathbb{V}_1 = 120 \angle 0^\circ \Omega$      |
| $\mathbb{V}_2 = 120 \angle -120^\circ \Omega$   |
| $\mathbb{V}_3 = 120 \angle -240^\circ \Omega$   |

Cuadro 5.3: Recopilación de la información ejemplo 4

**a) Calculo de las componentes simétricas de la corriente:** Expandiendo el tensor hasta  $i = j = 1, 2, 3$  y  $\nu = 1$  genera una matriz  $3 \times 3$  en la ecuación (4.61) se llega a

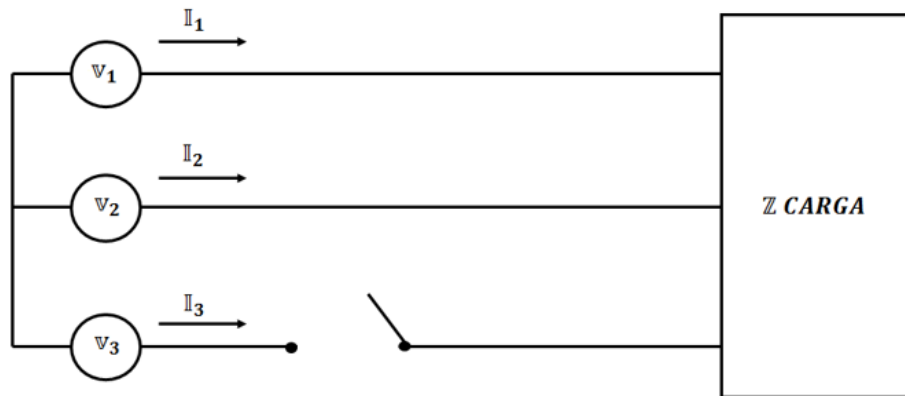


Figura 5.8: Falla eléctrica de circuito abierto en la fase 3.  
Realizada por los autores

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^{-1} & a^{-2} \\ 1 & a^{-2} & a^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1^0 \\ \mathbb{I}_1^1 \\ \mathbb{I}_1^2 \end{bmatrix}$$

Al conocer los términos del tensor de corriente, se aplica la ecuación (4.63) sobre el sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1^0 \\ \mathbb{I}_1^1 \\ \mathbb{I}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^{-1} & a^{-2} \\ 1 & a^{-2} & a^{-4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

Como  $a = 1 \angle \frac{360^\circ}{n}$  y, con  $n = 3$  se determina que  $a = 1 \angle 120^\circ$ . En términos numéricos establecidos por el código de programación en MATLAB<sup>®</sup> dispuesto para el ejemplo, se obtiene que

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1^0 \\ \mathbb{I}_1^1 \\ \mathbb{I}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3333 & 0,3333 & 0,3333 \\ 0,3333 & -0,1667 + \mathbf{j}0,2887 & -0,1667 - \mathbf{j}0,2887 \\ 0,3333 & -0,1667 - \mathbf{j}0,2887 & -0,1667 + \mathbf{j}0,2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \angle 0^\circ \\ 10 \angle -180^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \end{bmatrix} A$$

Finalmente, las componentes simétricas de la corriente son

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1^0 \\ \mathbb{I}_1^1 \\ \mathbb{I}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,77 \angle -29,94 \\ 5,77 \angle 29,94 \end{bmatrix} A$$

**b) Cálculo de las componentes simétricas del voltaje:** Se realiza el mismo procedimiento anteriormente descrito con el cambio de los parámetros en el voltaje. Resolviendo todo el sistema se obtienen las componentes simétricas como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1^0 \\ \mathbb{V}_1^1 \\ \mathbb{V}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} V$$

**c) Cálculo de la potencia compleja simétrica:** Para el cálculo de la potencia compleja, se sabe que  $n = 3$  y, mediante la ecuación (4.71) se determina la potencia como

$$S_{ii} = 3(\mathbb{V}_1^0 \mathbb{I}_1^0 + \mathbb{V}_1^2 \mathbb{I}_1^2 + \mathbb{V}_1^1 \mathbb{I}_1^1) \quad (5.18)$$

Despejando cada uno de los términos se llega a

$$S = 3[0 + (120)(5,77 \angle -29,94) + 0] = 2077,2 \angle -30 VA \quad (5.19)$$

En rectangular será

$$S = 1800 - \mathbf{j}1037 \text{ VA}$$

Por definición, la potencia activa y reactiva serán

$$P = 1800W$$

$$Q = -\mathbf{j}1037 \text{ VAR}$$

En el apéndice (B) sección (B.5) se encuentra el código de implementación MATLAB<sup>®</sup> para la solución del análisis de falla por corto circuito

# Conclusiones y Perspectivas

El desarrollo tensorial de los sistemas eléctricos a partir del análisis de la potencia instantánea y compleja, posibilita una nueva alternativa para evaluar sistemas n-fásicos independientes de su naturaleza, es decir, si son sistemas simétricos o asimétricos, aportando a la investigación en física y su enseñanza en los nuevos planteamientos teóricos de fallas simétricas y asimétricas en sistemas polifásicos y máquinas rotativas. A su vez, el análisis geométrico a partir del tensor de potencia instantánea y el teorema de Fortescue-Stokvis propone un nuevo estudio generalizado de una nueva metodología que puede ser usada como estrategia de enseñanza-aprendizaje en los cursos de circuitos eléctricos y aplicaciones a cursos de cálculo tensorial con aplicaciones.

En el proceso de desarrollo de la investigación se llegó a un análisis más profundo de los elementos, teoremas y leyes que fundamentan el estudio de los sistemas eléctricos, permitiendo así, una nueva interpretación vista desde la geometría diferencial.

El objetivo general de la investigación se logró alcanzar luego de solucionar los aspectos recurrentes en torno a los objetivos específicos:

Se demostró física y matemáticamente el teorema de Fortescue de forma tensorial para un sistema de n-fases luego de desarrollar un análisis geométrico sobre las distintas características de los circuitos eléctricos polifásicos a partir de las concepciones clásicas de los circuitos eléctricos y del análisis geométrico complejo.

Se logró relacionar y generalizar el tensor de potencia instantánea con el teorema de Fortescue en forma tensorial basándose en un tensor de potencia compleja desarrolladas mediante transformaciones fasoriales, donde se desengloban todas las formas complejas de la potencia, tales demostraciones parten desde las relaciones existentes al definir los elementos matriciales

del tensor de potencia compleja y del teorema de Fortescue generalizado.

Se Desarrolló un análisis tensorial sobre los conceptos fundamentales de potencia, voltaje, corriente e impedancia eléctrica en los sistemas eléctricos de n-fases, determinando los elementos geométricos en el análisis de sistemas de potencia en circuitos de corriente alterna de n-fases, desarrollando geoméricamente cada uno de los conceptos definidos por las leyes de Kirchhoff, ley de Ohm y el análisis de nodos y mallas en sistemas eléctricos en el dominio de la frecuencia.

Como producto de la investigación se realizaron dos trabajos presentados en un evento científico: en el primero se trabaja sobre la enseñanza de los circuitos eléctricos de n-fases a partir del teorema de Fortescue-Stokvis y el tensor de potencia instantánea, donde se participó activamente en categoría de ponente contando con el resumen aprobado en el capítulo de memoria del congreso. También, el trabajo relacionado al analisis geométrico de los sistemas eléctricos a partir del tensor de potencia instantánea, presentados en el XXVI Congreso Nacional de Física en Manizales Colombia (Anexo Resúmenes).

Finalmente, este trabajo pretende dar un aporte teorico desde la integración de varias disciplinas logrando alcanzar uno de los propósitos propuestos en el Plan de Desarrollo Institucional de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual menciona la importancia de consolidar vínculos e integraciones investigativas y académicas con otras universidades, ampliando el escenario para futuros trabajos.

# Bibliografía

- [1] BESCÓS, J. & TIBURZI F. *Introducción al Análisis de Circuitos Eléctricos*, Universidad Autónoma de Madrid, Escuela Politécnica Superior, Madrid, 2007.
- [2] BRUZUAL, R. & DOMÍNGUEZ M. *Series de Fourier*, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática, Caracas, 2003
- [3] CASARES DE LA TORRE, FR. *Ondas de señal: onda alterna senoidal*, documento online, disponible en [http://www.trifasica.net/pdf/TEMA\\_4.\\_ONDAS\\_DE\\_SENAL.pdf](http://www.trifasica.net/pdf/TEMA_4._ONDAS_DE_SENAL.pdf), Marzo 2010.
- [4] CASTELLVI, P. & PEÑARANDA A. *Corriente alterna: Teoría y problemas*, Escola Universitària Politècnica de Barcelona, Departament de Física Aplicada, UPC, Catalunya, sf.
- [5] CHARLES, A. & SADIKÚ, M. *Fundamentos de circuitos eléctricos*, 3ra Edición, Editorial McGrawHill, Ciudad de México, 2004
- [6] COMON P. *Tensors versus matrices usefulness and unexpected properties*, I3S Laboratory UMR6070, CNRS and University of Nice-Sophia Antipolis (UNS), France , IEEE, 2009.
- [7] CRUZ, Y. J. *Notas de geometría y Física*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2010.
- [8] DELLA TORRE, F., DOLARA A, LEVA S. & MORANDO A.P. *Faults Analysis Theory and Schemes of Four-Phase Power Systems*, IEEE Bucharest Power Tech Conference, June 28th - July 2nd, Bucharest, Romania, 2009.

- [9] DZAFIC I., NEISIUS H., GILLES H., HENSELMEYER S. & LANDERBERGER V. *Three-Phase Power Flow in Distribution Networks Using Fortescue Transformation*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS, VOL.28, NO.2, MAY 2013.
- [10] DZAFIC I., DONLAGIC, T. & HENSELMEYER S. *Fortescue Transformations for Three-Phase Power Flow Analysis in Distribution Networks I*, 978-1-4673-2729-9/12/\$31.00 ©2012 IEEE
- [11] DZAFIC I., NEISIUS, H.-T. & HENSELMEYER S. *Three Phase Current Iteration Power Flow Method Using Fortescue Transformations* , 2012 3rd IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe), Berlin
- [12] DZAFIC I., PAL, B., GUILLES M. & HENSELMEYER S. *Generalized Fortescue Equivalent Admittance Matrix Approach to Power Flow Solution* , IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS, VOL.29, NO.1, JANUARY 2014.
- [13] DEL BARCO, V *Geometría II*, fceia, Licenciatura en Matemática, 2015, disponible en <http://www.fceia.unr.edu.ar/delbarc/docencia/GeoII2015/Dualidad.pdf>
- [14] DUO, A. (1992). *Orígenes de la geometría no euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinis.* , Recuperado el 2 de 10 de 2014, de [http://dmle.cindoc.csic.es/http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA\\_1992\\_00\\_00\\_02.pdf](http://dmle.cindoc.csic.es/http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1992_00_00_02.pdf)
- [15] E-DUCATIVA *Sistemas trifásicos: Circuitos Polifásicos*, online, disponible en [http://educativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/3000/3020/html/12\\_circuitos\\_polifsicos.html](http://educativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/3000/3020/html/12_circuitos_polifsicos.html)
- [16] FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA. *Objetivos, Misión y Visión.*, Recuperado el 15 de 9 de 2014, de <http://cienciaytecnologia.pedagogica.edu.co/vercontenido.php?idp=141&idh=355>.
- [17] FERREIRA, J. *Unidad I: Circuitos AC en el Estado Senoidal Estable.* , Auxiliar Teórico Asignatura IEM-212, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, WebSite, disponible <http://webapp.pucmm.edu.do/WebSISE/Estudiante/materias/201120122/SD-IEM-212-T-001/Unidad>

- [18] FORTESCUE, C. L. (1918) *Method of Symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks.*, 34 th Annual Convention of the American Institute of Electrical Enginners, 1027 - 1140.
- [19] GEORGIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY *Notes on phasors*, chapter 1, Durgin ECE 3065 Notes, The propagation Group, Giorgia, 2003, disponible en [http://www.propagation.gatech.edu/ECE3025/opencourse/THT/EmagNotes\\_Phasors.pdf](http://www.propagation.gatech.edu/ECE3025/opencourse/THT/EmagNotes_Phasors.pdf)
- [20] GONZÁLES, F. M *Componentes simétricas*, capítulo 3, disponible en [http://fglongatt.org/OLD/Archivos/Archivos/SP\\_I/Capitulo6,SP1-2007.pdf](http://fglongatt.org/OLD/Archivos/Archivos/SP_I/Capitulo6,SP1-2007.pdf)
- [21] HARDIE, R. C. *The Phasor Transform and Impedance*, Department of Electrical and Computer Engineering University of Dayton, disponible <http://homepages.udayton.edu/hardierc/ece203/phasors.pdf>
- [22] HARTMAN M. *The application of Fortescue's transformation to describe power states in multi-phase circuits with non-sinusoidal voltage and currents*, Science Financial Resources, project. no. 3 TI0A005 29, 2005
- [23] HERRERA R. S., SALMERÓN P., VÁZQUEZ J. R., LITRÁN S. P. & PÉREZ A. *Generalized instantaneous reactive power theory in polu-phase power systems*, Department of Electrical Engineering, Ctra/ Palos de la Frontera s/n, Palos de la Frontera, Huelva, Spain, article, available <http://www.uhu.es/eps>.
- [24] HERNANDEZ, P. *Sobre el espacio dual*, recurso web, disponible en <http://delta.cs.cinvestav.mx/mcintosh/comun/pb/node9.html>
- [25] HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNÁNDEZ COLLADO, C., & BAPTISTA LUCIO, P. *Metodología de la investigación.*, Naucalpan de Juárez: MCGRAW HILL, 1991.
- [26] JABR, R. A & DZAFIC A *Fortescue Approach for Real-Time Short Circuit Computation in Multiphase Distribution Networks*, Scopus journal , paginas 3276-3285, 2015.
- [27] KORACHAGAON, I. *Five-phase unbalanced system and its symmetrical components with MATLAB*, Scopus journal, paginas 174-177 ,2015

- [28] LALOUX, D. & VENTOSA M. *Fundamentos de tecnología eléctrica: Sistemas trifásicos*, Universidad Pontificas Comillas, Departamento de electrotécnia y sistemas, 2003. Disponible en [http://www.uib.cat/depart/dfs/GTE/education/industrial/con\\_maq\\_electriques/teoria/Transparencias%20\(Univ.%20Pontificia%20Comillas\)/trifasica.pdf](http://www.uib.cat/depart/dfs/GTE/education/industrial/con_maq_electriques/teoria/Transparencias%20(Univ.%20Pontificia%20Comillas)/trifasica.pdf)
- [29] LÓPEZ RUPÉREZ, F. *Una nueva fuente de inspiracion para la Educación Científica. Enseñanza de las Ciencias.*, 249-256. (1995).
- [30] MARCETIC, D.P, TOMIC J,J. & KUSLIEVIC, M. *Dunbalanced three-phase distribution system frequency estimation using least mean squares method and positive voltage sequence*, Scopus journal, paginas 30-38,2015
- [31] MARTIN, A.D., HERRERA, R.S., VAZQUEZ, J.R., CROLLA, P., & BURT, G.M. *Direct power control of a three-phase inverter for grid input current shaping of a single-phase diode rectifier with a small DC-link capacitor*, Scopus journal , pp 3794-3803, 2015
- [32] NEIRA, V. A. *Interdisciplinarietà en la enseñanza de la matemática*, Biobio: Universidad de Concepción. Nacional, 1997.
- [33] PEI, X., ZHOU, W. & KANG, Y. *Analysis and Calculation of DC-Link Current and Voltage Ripples for Three-Phase Inverter With Unbalanced Load*, Scopus journal, paginas 5401-5412, 2015
- [34] PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI *Gustav Robert Kirchhoff*, online, disponible en [http://pioneros.puj.edu.co/biografias/edad\\_contemporanea/1820\\_1830/gustav\\_robert\\_kirchhoff.html](http://pioneros.puj.edu.co/biografias/edad_contemporanea/1820_1830/gustav_robert_kirchhoff.html).
- [35] POZO, J. I. *Sobre las relaciones entre el conocimiento cotidiano de los alumnos y el conocimiento: Del cambio conceptual a la integración jerárquica. Enseñanza de las Ciencias.*,1999
- [36] RODRÍGUEZ, M. L. *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. Barcelona: Editorial Octaedro, 2008.

- [37] ROGÁN J. & MUÑOZ V. *Apuntes de un curso de FÍSICA MATEMÁTICA*, Tercera edición, revisión 080624-12, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.
- [38] SALMERÓN, P. & MONTAÑO J.C. *Instantaneous power components in polyphase systems under nonsinusoidal conditions*, IEE Proc.-Sci. Meas. Technol., Vol. 143, No. 2, March 1996.
- [39] SÁNCHEZ, Á. M. (2012). *El electromagnetismo una experiencia para vivir.*, Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- [40] SANCHEZ, M. *Conceptos Errados en Circuitos Eléctricos: "Dificultades relacionadas con la corriente eléctrica en un circuito de corriente continua"*, Ciencia ahora n°24, 1-15, 2009.
- [41] SHAFFER, P. S., & MCDERMOTT, L. C. (1992) *Research as a guide for curriculum.*, American Journal of Physics, 60.
- [42] TANCREDO C. L. *Análise de Sistemas de Potência*, EE - UFRJ Departamento de Eletrotécnica, Março 2005.
- [43] TÉLLEZ, A., GALARZA, D.C. & ORTIZ MATOS, L. *Analysis of power losses in the asymmetric construction of electric distribution systems*, Scopus journal, paginas 2190-2194, 2015
- [44] UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. *Plan de Desarrollo Institucional 2014-2019.*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- [45] USTARIZ-FARFAN, A. J., & CANO-PLATA, E. A. (2012). *Teoría generalizada de la potencia instantánea aplicada a la compensación de cargas polifásicas.*, Revista Chilena de Ingeniería, 148-159.
- [46] WAGNER C. F. & EVANS R. D. *Symmetrical Components*, McGraw-Hill, 1933

- [47] WANG, F. Z. *A Triangular Periodic Table of Elementary Circuit Elements.*, IEEE, 616-623, 2013.
- [48] WEN, B., BOROYEVICH, D., BURGOS, R., MATTAVELLI, P., SHEN, Z. *Small-Signal Stability Analysis of Three-Phase AC Systems in the Presence of Constant Power Loads Based on Measured d-q Frame Impedances*, Scopus Journal , pp 5952-5963, 2015
- [49] YAGLE, E. *Complex numbers and phasors*, Dept. of EECS, The University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109-2122, 2005
- [50] YAN X.Q., XU Z.Y., WEN A. & YANG Q.X. *Fault Analysis Principle for Twelve-Phase Transmission System*, 978-1-4673-2729-9/12/\$31.00 ©2012, IEEE.

# Apéndice A

## Demostraciones

### A.1. Demostración del postulado de correspondencia dual

Realizando una comprobación del método inductivo, la matriz de Stokvis es una repetición de tripletas de términos, es decir, será equivalente a los términos obtenidos en la matriz generalizada como se demostró anteriormente, por ello se establecen las condiciones de orthonormalización para  $1; n$  y  $n + 1$

**Para  $n=1$**

$$i = j = 1 \text{ y } n = 1$$

$$\frac{1}{1} \Gamma_{11}^* \Gamma^{11} = \delta_1^1 \quad (\text{A.1})$$

El elemento en la casilla 1x1 es igual a 1, por ello se demuestra que

$$1 = 1 \quad (\text{A.2})$$

**Para  $n$**

Se fundamenta de manera general a través de

$$\frac{1}{n} \Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij} = \delta_j^i \quad (\text{A.3})$$

### Para n+1

Los índices estarán definidos como  $i = j = 1, 2, \dots, n, n + 1$ , a su vez, los términos matriciales corresponderán a la sucesión dada de la tripleta de la matriz de Stokvis y del tensor generalizado. resultando

$$\frac{1}{n + 1} \Gamma_{ij}^* \Gamma^{ij} = \delta_j^i \quad (\text{A.4})$$

Resulta la matriz

$$\frac{1}{n + 1} \begin{bmatrix} n + 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n + 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n + 1 \end{bmatrix} = \delta_j^i \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando el valor de la norma por la matriz, se obtiene el delta de Kronecker

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \delta_j^i \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Ley de Ohm en sistemas simétricos con cargas balanceados

Se comprueba por inducción matemática con casos particulares, con el fin de demostrar el comportamiento físico a partir de las leyes de Kirchhoff para  $n = 1$ ,  $n = 3$  y  $n + 1 = 3 + 1 = 4$ .

### Para n=1

Para  $i = j = 1$  se obtiene la solución trivial de un sistema monofásicos (una sola malla) resultando:

$$\mathbb{V}_1 = Z_{11}\mathbb{I}_1 \quad (\text{A.7})$$

### Para n=3

El sistema trifásico corresponde a la conexión de tres fuentes de tensión fasoriales  $\mathbb{V}_1$ ,  $\mathbb{V}_2$  y  $\mathbb{V}_3$  en fase conectadas sobre un nodo común y tres impedancias  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  y  $Z_{33}$ , que están dispuestas de la misma manera, donde fluye por cada una de ellas las corrientes de línea  $\mathbb{I}_1$ , tal como muestra la fig. (A.1).

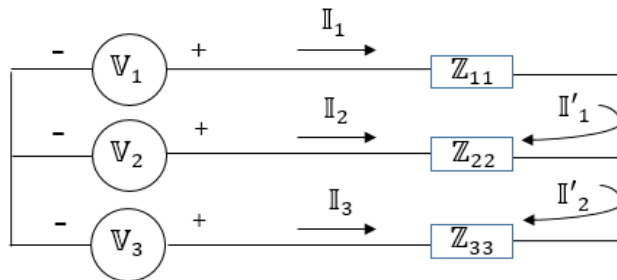


Figura A.1: Sistema de tres fuentes de tensión de fase conectadas sobre tres impedancias de línea.

*Realizada por los autores*

Aplicando la ley de Ohm

$$\mathbb{V}_x = Z_{xy}\mathbb{I}_y \quad (\text{A.8})$$

expresado de manera matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Ahora, un sistema equivalente al de 3-fases pero con una fuente adicional, es decir, de 4-fases es representado en la fig. (A.2).

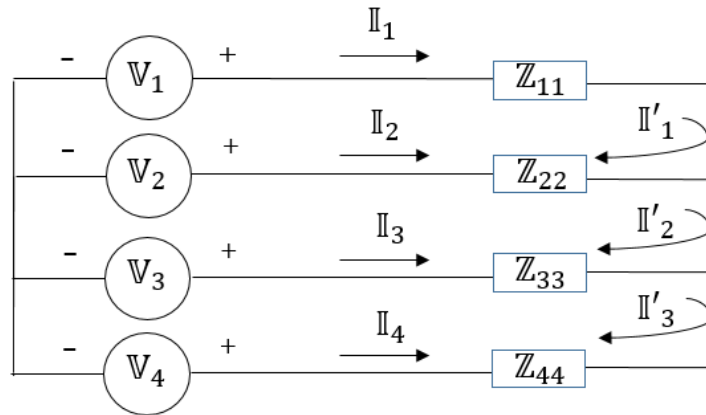


Figura A.2: Sistema de cuatro fuentes de tensión de fase conectadas sobre cuatro impedancias de línea.

*Realizada por los autores*

#### Para $n=4$

Dicho sistema posee un comportamiento análogo al sistema anterior, con la diferencia de que el tensor que lo define tendrá un corrimiento de índices hasta cuatro términos; para el caso general donde se conocen el tensor de corriente y el valor de las impedancias se tiene que la representación matricial del tensor será

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Ley de Ohm en sistemas simétricos con cargas desbalanceadas

De manera similar se demuestra para  $n = 1$ ,  $n = 3$  y  $n + 1 = 3 + 1 = 4$ .

### Para n=1

Se determina el elemento de la matriz resultando

$$\mathbb{V}'_1 = (\mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22})\mathbb{I}'_1 \quad (\text{A.11})$$

### Para n=3

Sea  $\mathbb{I}'_1$  e  $\mathbb{I}'_2$  las corrientes de las mallas respectivas, se desarrolla el sistema de ecuaciones lineales resultando:

Para la Malla # 1

$$\mathbb{I}'_1(\mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22}) - \mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_2 = \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2 \quad (\text{A.12})$$

Para la Malla # 2

$$-\mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_1 + \mathbb{I}'_2(\mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22}) = \mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_3 \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, de manera matricial resulta como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}'_1 \\ \mathbb{V}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22} & -\mathbb{Z}_{22} \\ -\mathbb{Z}_{22} & \mathbb{Z}_{22} + \mathbb{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}'_1 \\ \mathbb{I}'_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Con  $\mathbb{I}'_1 = \mathbb{I}_1$ ,  $\mathbb{I}'_2 = -\mathbb{I}_3$  e  $\mathbb{I}'_2 - \mathbb{I}'_1 = \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3 - \mathbb{I}_1$ , relacionando las corrientes se demuestra la LCK como:

$$\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 = 0 \quad (\text{A.15})$$

### Para n=4

Mediante el método de análisis de mallas se reduce el sistema tal como se obtuvo en el caso trifásico definiendo las ecuaciones de las tres mallas correspondientes como

Para la Malla # 1

$$\mathbb{I}'_1(\mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22}) - \mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_2 = \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2 \quad (\text{A.16})$$

Para la Malla # 2

$$-\mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_1 + \mathbb{I}'_2(\mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22}) - \mathbb{Z}_{22}\mathbb{I}'_3 = \mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_3 \quad (\text{A.17})$$

Para la Malla # 3

$$-\mathbb{Z}_{33}\mathbb{I}'_2 + \mathbb{I}'_3(\mathbb{Z}_{33} + \mathbb{Z}_{44}) = \mathbb{V}_3 - \mathbb{V}_4 \quad (\text{A.18})$$

De manera matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}'_1 \\ \mathbb{V}'_2 \\ \mathbb{V}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{11} + \mathbb{Z}_{22} & -\mathbb{Z}_{22} & 0 \\ -\mathbb{Z}_{22} & \mathbb{Z}_{22} + \mathbb{Z}_{33} & \mathbb{Z}_{33} \\ 0 & -\mathbb{Z}_{33} & \mathbb{Z}_{33} + \mathbb{Z}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}'_1 \\ \mathbb{I}'_2 \\ \mathbb{I}'_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Con  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}'_1$ ,  $\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}'_2 - \mathbb{I}'_3$ ,  $\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}'_3 - \mathbb{I}'_2$  e  $\mathbb{I}_4 = -\mathbb{I}'_3$  relacionando las corrientes se demuestra la LCK como:

$$\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_4 = 0 \quad (\text{A.20})$$

# Apéndice B

## Códigos en MATLAB®

### B.1. Cambio de complejos rectangulares a polares

Se diseña un programa que convierte complejos de rectangulares a polares

```
1      % Universidad Pedagógica Nacional
2      % Código de simulación Conversor de Rectangulares a Polares
3      % simétricos con cargas balanceadas
4      % Elaborado por:
5      % Adriana Escobar Velandia
6      % Freddy Alexander Torres Payoma
7
8      Z=input(' Introduzca el número complejo de forma rectangular:\n ');
9      rho=sqrt(real(Z)*real(Z)+imag(Z)*imag(Z));
10     angle1=atan(imag(Z)/real(Z));
11     angle=(angle1*180)/pi
```

### B.2. Cambio de complejos polares a rectangulares

Se diseña un programa que convierte complejos de polares a rectangulares

```
1      % Universidad Pedagógica Nacional
2      % Código de simulación Conversor de Polares a Rectangulares
3      % simétricos con cargas balanceadas
```

```

4      % Elaborado por:
5      % Adriana Escobar Velandia
6      % Freddy Alexander Torres Payoma
7
8      Z1=input('ingrese la magnitud del número complejo: \n');
9
10     angle1=input('ingrese el ángulo del número complejo: \n');
11
12     angle=(angle1*pi)/180;
13
14     Z=Z1*cos(angle)+Z1*sin(angle)*i

```

### B.3. Código de implementación para el ejemplo 1

Se desarrolló el siguiente código para sistemas trifásicos:

```

1      % Universidad Pedagógica Nacional
2      % Código de simulación ejemplo # 1:
3      % Análisis geométrico para sistemas
4      % simétricos con cargas balanceadas
5      % Elaborado por:
6      % Adriana Escobar Velandia
7      % Freddy Alexander Torres Payoma
8      % Adquisición de datos
9      % TODOS LOS DATOS DEBEN SER INGRESADOS EN POLARES
10     V1=input('ingrese la magnitud de V1: \n');
11     angle1=input('ingrese el ángulo de V1: \n');
12     V2=input('ingrese la magnitud de V2: \n');
13     angle2=input('ingrese el ángulo de V2: \n');
14     V3=input('ingrese la magnitud de V3: \n');
15     angle3=input('ingrese el ángulo de V3: \n');
16     Z1=input('ingrese la magnitud de Z: \n');
17     anglez1=input('ingrese el ángulo de Z: \n');
18     % PolaRect
19     angle1=(angle1*pi)/180;

```

```

20 V1=V11*cos ( angle1 )+V11*sin ( angle1 )*i
21 angle2=( angle22*pi )/180;
22 V2=V22*cos ( angle2 )+V22*sin ( angle2 )*i ;
23 angle3=( angle33*pi )/180;
24 V3=V33*cos ( angle3 )+V33*sin ( angle3 )*i ;
25 anglez=( anglez1*pi )/180;
26 Za=Z1*cos ( anglez )+Z1*sin ( anglez )*i
27 % Tensor de Impedancia
28 Z=[Za 0 0; 0 Za 0; 0 0 Za];
29 % Tensor de Voltaje
30 V=[V1; V2; V3];
31 % Tensor inverso de impedancia
32 ZZ=inv ( Z )
33 % Tensor de Corriente en Rect
34 I=ZZ*V
35 % Tensor de Corriente en Polares
36 I1=sqrt ( real ( I ( 1 , 1 ) ) * real ( I ( 1 , 1 ) ) + imag ( I ( 1 , 1 ) ) * imag ( I ( 1 , 1 ) ) )
37 angleI1=atan ( imag ( I ( 1 , 1 ) ) / real ( I ( 1 , 1 ) ) ) ;
38 angleI1 =( angleI1 * 180 ) / pi
39 I2=sqrt ( real ( I ( 2 , 1 ) ) * real ( I ( 2 , 1 ) ) + imag ( I ( 2 , 1 ) ) * imag ( I ( 2 , 1 ) ) )
40 angleI2=atan ( imag ( I ( 2 , 1 ) ) / real ( I ( 2 , 1 ) ) ) ;
41 angleI2 =( angleI2 * 180 ) / pi
42 I3=sqrt ( real ( I ( 3 , 1 ) ) * real ( I ( 3 , 1 ) ) + imag ( I ( 3 , 1 ) ) * imag ( I ( 3 , 1 ) ) )
43 angleI3=atan ( imag ( I ( 3 , 1 ) ) / real ( I ( 3 , 1 ) ) ) ;
44 angleI3 =( angleI3 * 180 ) / pi
45 % Potencia Activa
46 P=3*V11*I1*cos ( angleI1 - angleI1 )
47 % Potencia Reactiva
48 Q=3*V11*I1*sin ( angleI1 - angleI1 )
49 % Potencia Compleja
50 S=P+Q*i

```

## B.4. Código de implementación para el ejemplo 2

Se desarrolló el siguiente código para sistemas trifásicos desbalanceados:

```
1      % Universidad Pedagógica Nacional
2      % Código de simulación ejemplo # 2:
3      % Análisis geométrico para sistemas
4      % simétricos con cargas desbalanceadas
5      % Elaborado por:
6      % Adriana Escobar Velandia
7      % Freddy Alexander Torres Payoma
8      % Adquisición de datos
9      % TODOS LOS DATOS DEBEN SER INGRESADOS EN POLARES
10     V11=input('ingrese la magnitud de V1: \n');
11     angle11=input('ingrese el ángulo de V1: \n');
12     V22=input('ingrese la magnitud de V2: \n');
13     angle22=input('ingrese el ángulo de V2: \n');
14     V33=input('ingrese la magnitud de V3: \n');
15     angle33=input('ingrese el ángulo de V3: \n');
16     Z1=input('ingrese la magnitud de Z1: \n');
17     anglez11=input('ingrese el ángulo de Z1: \n');
18     Z2=input('ingrese la magnitud de Z2: \n');
19     anglez22=input('ingrese el ángulo de Z2: \n');
20     Z3=input('ingrese la magnitud de Z3: \n');
21     anglez33=input('ingrese el ángulo de Z3: \n');
22     % PolaRect
23     angle1=(angle11*pi)/180;
24     V1=V11*cos(angle1)+V11*sin(angle1)*i
25     angle2=(angle22*pi)/180;
26     V2=V22*cos(angle2)+V22*sin(angle2)*i;
27     angle3=(angle33*pi)/180;
28     V3=V33*cos(angle3)+V33*sin(angle3)*i;
29     anglez1=(anglez11*pi)/180;
30     Z11=Z1*cos(anglez1)+Z1*sin(anglez1)*i;
31     anglez2=(anglez22*pi)/180;
32     Z22=Z2*cos(anglez2)+Z2*sin(anglez2)*i;
```

```

33     anglez3=(anglez33*pi)/180;
34     Z33=Z3*cos(anglez3)+Z3*sin(anglez3)*i;
35     Za11=Z11+Z22;
36     Za12=-Z22;
37     Za21=Za12;
38     Za22=Z22+Z33;
39     Va1=V1-V2;
40     Va2=V2-V3;
41     %Tensor de voltaje
42     V=[V1; V2; V3];
43     % Matriz de impedancia
44     Z=[Za11 Za12; Za21 Za22];
45     % Matriz Inversa de impedancia
46     ZZ=inv(Z)
47     % Tensor de Voltaje de malla
48     Va=[Va1; Va2];
49     % Corrientes de Malla
50     Ia=ZZ*Va
51     % Corrientes de Linea
52     I11=Ia(1,1);
53     I22=Ia(2,1)-Ia(1,1);
54     Ik=Ia(2,1)
55     I33=-Ik
56     I1=sqrt(real(I11)*real(I11)+imag(I11)*imag(I11))
57     angleI1=atan(imag(I11)/real(I11));
58     angleI1=(angleI1*180)/pi
59     I2=sqrt(real(I22)*real(I22)+imag(I(2,1))*imag(I22))
60     angleI2=atan(imag(I22)/real(I22));
61     angleI2=(angleI2*180)/pi
62     I3=sqrt(real(I33)*real(I33)+imag(I33)*imag(I33))
63     angleI3=atan(imag(I33)/real(I33));
64     angleI3=(angleI3*180)/pi
65     %Tensor de Corriente
66     I=[I11; I22; I33]
67     %Tensor de potencia

```

```

68     P=V*conj(I')
69     %Potencia Compleja
70     S=P(1,1)+P(2,2)+P(3,3)
71     %Potencia Activa
72     Pa=real(S)
73     %Potencia Reactiva
74     Q=imag(S)

```

## B.5. Código de implementación para el ejemplo 4

Se desarrolló el siguiente código para sistemas trifásicos desbalanceados:

```

1     % Universidad Pedagógica Nacional
2     % Código de simulación ejemplo # 2:
3     % Análisis geométrico para sistemas
4     % simétricos con cargas desbalanceadas
5     % Elaborado por:
6     % Adriana Escobar Velandia
7     % Freddy Alexander Torres Payoma
8     % Adquisición de datos
9     % TODOS LOS DATOS DEBEN SER INGRESADOS EN POLARES
10    V1=input('ingrese la magnitud de V1: \n');
11    angle1=input('ingrese el ángulo de V1: \n');
12    V2=input('ingrese la magnitud de V2: \n');
13    angle2=input('ingrese el ángulo de V2: \n');
14    V3=input('ingrese la magnitud de V3: \n');
15    angle3=input('ingrese el ángulo de V3: \n');
16    I1=input('ingrese la magnitud de I1: \n');
17    anglei1=input('ingrese el ángulo de I1: \n');
18    I2=input('ingrese la magnitud de I2: \n');
19    anglei2=input('ingrese el ángulo de I2: \n');
20    I3=input('ingrese la magnitud de I3: \n');
21    anglei3=input('ingrese el ángulo de I3: \n');
22    %PolaRect
23    angle1=(angle1*pi)/180;

```

```

24 V1=V11*cos(angle1)+V11*sin(angle1)*i
25 angle2=(angle22*pi)/180;
26 V2=V22*cos(angle2)+V22*sin(angle2)*i;
27 angle3=(angle33*pi)/180;
28 V3=V33*cos(angle3)+V33*sin(angle3)*i;
29 anglei1=(anglei11*pi)/180;
30 I11=I1*cos(anglei1)+I1*sin(anglei1)*i;
31 anglei2=(anglei2*pi)/180;
32 I22=Z2*cos(anglei2)+Z2*sin(anglei2)*i;
33 anglei3=(anglei33*pi)/180;
34 I33=I3*cos(anglei3)+I3*sin(anglei3)*i;
35 % Matriz generalizada
36 a=-0.5+0.866025*i;
37 A=[1 1 1; 1 a^(-1) a^(-2); 1 a^(-2) a^(-4)]
38 % Tensor de voltaje
39 V=[V1;V2;V3]
40 % Tensor de Corriente
41 I=[I11;I22;I33]
42 % Inversa
43 AA=inv(A)
44 % Componentes simétricas de I
45 Isim=AA*I
46 % Componentes simétricas de V
47 Vsim=AA*V
48 % Potencia compleja
49 S=3*(Vsim(1,1)*Isim(1,1)+Vsim(2,1)*Isim(2,1)+Vsim(3,1)*Isim(3,1))
50 % Potencia activa y reactiva
51 Pa=real(S)
52 Q=imag(S)

```

# Divulgación científica

A continuación se encuentra los resúmenes aceptados de los trabajos referentes a la investigación:

- *ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS A PARTIR DEL TENSOR DE POTENCIA INSTANTÁNEA*
- *LA ENSEÑANZA DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS POLIFÁSICOS A PARTIR DE LA TEORÍA GENERALIZADA DE LA POTENCIA INSTANTÁNEA Y EL TEOREMA DE FORTESCUE-STOKVIS*

en el XXVI Congreso Nacional de Física Colombiano, presente en el **libro de resúmenes** publicado en la página oficial del congreso <sup>1</sup> con No. H349-O, pág. 164 y No. G324-O. pág. 142 respectivamente.

También se anexan las cartas de aceptación en calidad de Ponentes al evento.

---

<sup>1</sup>Disponible en <http://www.xxvi-cnf.co/wp-content/uploads/2015/09/LibroResúmenes.Final.18.11.2015.pdf>

## **ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS A PARTIR DEL TENSOR DE POTENCIA INSTANTÁNEA**

*Yesid Javier Cruz Bonilla <sup>1</sup>, Adriana Escobar Velandia <sup>2</sup>, Freddy Alexander Torres Payoma<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>Departamento de Física: Grupo de Investigación de Física y Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional*

*<sup>2</sup>Departamento de Física: Grupo de Investigación de Física y Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional*

*<sup>3</sup>Departamento de Física: Grupo de Investigación de Física y Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional*

*\*dfi\_ftorres175@pedagogica.edu.co*

En los circuitos eléctricos polifásicos de corriente alterna las señales sinusoidales de voltaje y corriente son analizadas mediante el uso de diagramas fasoriales que representan el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia, los cuales son desarrollados a través de las leyes fundamentales de la teoría de los circuitos eléctricos, sin embargo, el estudio a partir de las leyes fundamentales se limita a circuitos polifásicos de tres fases simétricos, es decir, sus fasores presentan el mismo ángulo de desfase y magnitud uno respecto al otro. Para el caso contrario, donde los sistemas eléctricos trifásicos no son simétricos, se emplea el teorema de Fortescue o de componentes simétricas, el cual es utilizado para relacionar sistemas eléctricos asimétricos mediante la superposición de tres sistemas simétricos. Por otra parte, la teoría generalizada de la potencia instantánea desarrollada por los profesores Ustariz-Farfan & Cano-Plata de la Universidad Nacional de Colombia, establece que el tensor de potencia instantánea en un sistema eléctrico polifásico se obtiene a través del producto diádico entre el tensor de voltaje y el tensor de corriente. Sin embargo, el análisis actual de la potencia instantánea se limita a sistemas eléctricos monofásicos lineales o sistemas trifásicos simétricos o asimétricos. A partir de lo anterior, en la presente investigación se desarrolla un análisis geométrico de manera tensorial de los sistemas eléctricos polifásicos de corriente alterna, relacionando el teorema de Fortescue con la teoría del tensor de potencia instantánea, permitiendo así, generalizar la teoría de los sistemas eléctricos.

**LA ENSEÑANZA DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS POLIFÁSICOS A PARTIR DE LA  
TEORÍA GENERALIZADA DE LA POTENCIA INSTANTÁNEA Y EL TEOREMA DE  
FORTESCUE – STOKVIS**

*Yesid Javier Cruz Bonilla , Freddy Alexander Torres Payoma , Adriana Escobar Velandia*

*<sup>1</sup>Departamento de Física: Grupo de Investigación de Física y Matemáticas, Universidad Pedagógica  
Nacional*

*ycruz@pedagogica.edu.co, dfi\_ftorres175@pedagogica.edu.co, dfi\_aescobar648@pedagogica.edu.co*

En la enseñanza de los circuitos eléctricos de corriente alterna (AC), donde se realizan estudios de los sistemas eléctricos de una y más de una fase, es decir, sistemas eléctricos con más de una fuente de alimentación, se suele recurrir a un análisis fasorial de las leyes de G. Kirchhoff mediante los métodos de nodos y lazos para señales de tipo sinusoidal. Sin embargo, el cálculo se limita para el estudio de sistemas simétricos con una variación de fases iguales haciendo uso del álgebra lineal para solucionar cada uno de los sistemas, definiendo soluciones de ecuaciones lineales de una o más variables. El presente trabajo tiene como fin, introducir una generalización del estudio de circuitos de corriente alterna (AC) en cursos de circuitos eléctricos enfocados para profesionales de áreas a fines del estudio de los sistemas eléctricos a partir de un análisis geométrico que tenga correspondencia directa a la utilización de tensores que faciliten el cálculo para sistemas polifásicos, basados en la teoría generalizada de la potencia instantánea aplicada a la compensación de cargas polifásicas planteada por Ustariz-Farfan, Cano-Plata y Tacca, donde se define el tensor de potencia instantánea como el producto diádico entre los tensores de voltaje y corriente, y del teorema de Fortescue - Stokvis generalizado para la solución de sistemas eléctricos no simétricos, definiendo con ello cada una de las componentes tensoriales de los elementos básicos de la teoría de circuitos eléctricos.



Manizales, 24 de Agosto de 2015

SR. **Freddy Alexander Torres Payoma.**

**Asunto:** Aceptación Resumen “**XXVI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA –MANIZALES 2015**”

Me complace informarle que entre el 29 de Septiembre y el 2 de Octubre del presente año se dará lugar en la ciudad de Manizales al “**XXVI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA**”, evento en el cual se presentarán expositores y conferencistas nacionales e internacionales, desarrollando temas afines con las ciencias físicas.

Motivo por el cual para nosotros es un honor extenderle la cordial invitación al evento que ofrecerá una programación científica variada en el ámbito de las ciencias físicas que serán de gran utilidad para todos y cada uno de los participantes.

Con el deseo de contar con su participación en el evento, reciba nuestro cordial saludo y le informamos que su trabajo titulado “**ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS A PARTIR DEL TENSOR DE POTENCIA INSTANTÁNEA**” **ha sido aceptado**. A partir del 4 de septiembre se informará sobre la modalidad bajo la cual ha sido aceptado (oral o poster). Se le sugiere tener en cuenta las recomendaciones asociadas a la presentación de la respectiva modalidad, las cuales encontrará en la página [www. xxvi-cnf.co](http://www.xxvi-cnf.co).

Atentamente,

**Dr. Carlos Vargas Hernández**

Director “**XXVI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA – MANIZALES 2015**”  
Universidad Nacional De Colombia  
Sede Manizales

Para mayor información sobre el congreso favor remitirse a la página web del evento.

<http://www.xxvi-cnf.co>



Manizales, 31 de Agosto de 2015

SR. **Adriana Escobar Velandia**

**Asunto:** Aceptación Resumen “XXVI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA –MANIZALES 2015”

Me complace informarle que entre el 29 de Septiembre y el 2 de Octubre del presente año se dará lugar en la ciudad de Manizales al “XXVI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA”, evento en el cual se presentarán expositores y conferencistas nacionales e internacionales, desarrollando temas afines con las ciencias físicas.

Motivo por el cual para nosotros es un honor extenderle la cordial invitación al evento que ofrecerá una programación científica variada en el ámbito de las ciencias físicas que serán de gran utilidad para todos y cada uno de los participantes.

Con el deseo de contar con su participación en el evento, reciba nuestro cordial saludo y le informamos que el trabajo titulado “*La enseñanza de los circuitos electrónicos polifásicos a partir de la teoría generalizada de la potencia instantánea y el teorema Fortescue-Stokvis*” cuyos autores son Yesid Javier Cruz Gaviria, Freddy Alexander Torres Payoma, Adriana Escobar Velandia **ha sido aceptado**. A partir del 4 de septiembre se informará sobre la modalidad bajo la cual ha sido aceptado (oral o poster). Se le sugiere tener en cuenta las recomendaciones asociadas a la presentación de la respectiva modalidad, las cuales encontrará en la página [www. xxvi-cnf.co](http://www.xxvi-cnf.co)

Atentamente,

**Dr. Carlos Vargas Hernández**

Director “XXVI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA – MANIZALES 2015 “

Universidad Nacional De Colombia

Sede Manizales

Para mayor información sobre el congreso favor remitirse a la página web del evento.

<http://www.xxvi-cnf.co>