PENSAMIENTO MATEMÁTICO A PARTIR DEL PENSAMIENTO ALEATORIO. PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA SEXTO GRADO

DIANA MARCELA CÁRDENAS FLÓREZ

ERIKA BRIYID GAMBOA MATEUS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

2019

PENSAMIENTO MATEMÁTICO A PARTIR DEL PENSAMIENTO ALEATORIO. PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA SEXTO GRADO

DIANA MARCELA CÁRDENAS FLÓREZ
Código:2015140012

ERIKA BRIYID GAMBOA MATEUS
Código:2014140045

Trabajo de grado de pregrado asociado al estudio de un tema específico, como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Directora
INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2019

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales se ha requerido el trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

(Parágrafo 2, Artículo 42 del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad Pedagógica Nacional).

DEDICATORIA

Dedicado a todas y cada una de las personas que estuvieron presentes a lo largo de este proceso, apoyándome académica y emocionalmente para que este trabajo de grado fuera posible. Especialmente a mis padres quienes con su esfuerzo permitieron que cumpliera uno de mis más grades sueños.

Erika Briyid Gamboa Mateus

Todo este esfuerzo está dedicado a mi familia, amigos y aquellas personas que estuvieron a mí lado ayudándome y aconsejándome. Principalmente a mi madre y a mi hermano que han sido los pilares fundamentales en mi vida, tanto en mi formación profesional como personal.

Diana Marcela Cárdenas Flórez

AGRADECIMIENTOS

Nuestros agradecimientos a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de este trabajo de grado, esencialmente a nuestras familias y amigos, por el apoyo, la paciencia, la motivación y los consejos a lo largo de este proceso.

Agradecemos a todos y cada uno de los docentes que evaluaron la cartilla, por sus comentarios y sugerencias que, sin duda alguna ayudaron en nuestra formación como futuras docentes. A la profesora Ingrith Álvarez Alfonso por sus aportes y asesorías que enriquecieron y orientaron el desarrollo y finalización de este trabajo de grado.

A las directivas y padres de familias de los diferentes colegios que permitieron que los estudiantes valoraran la cartilla. A los estudiantes que fueron parte de este proceso, quienes son los primordiales ejes como futuras docentes, gracias por la disposición, sinceridad y colaboración en la evaluación de esta propuesta de enseñanza.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio. Propuesta de enseñanza para sexto grado
Autor(es)	Cárdenas Flórez, Diana Marcela Gamboa Mateus, Erika Briyid
Director	Álvarez Alfonso, Ingrith
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019, 170 pp.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	PENSAMIENTO MATEMÁTICO, PENSAMIENTO ALEATORIO, EDUCACIÓN ESTADÍSTICA, ARTICULACIÓN.

2. Descripción

Este trabajo expone una propuesta de enseñanza enfocada en el desarrollo del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio. Tiene el objetivo de integrar en el aula de la educación básica, específicamente en 6° grado las asignaturas del área de Matemáticas mediante la Estadística. La propuesta de enseñanza se fundamenta desde la organización curricular que propone Carranza y Guerrero (2016), la cual se basa en la integración de conceptos y procesos del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio. Se utiliza el modelo de enseñanza para la Estadística denominado Escenarios de Aprendizaje (Azcarate, 2015), cuyo objetivo es plantear situaciones que permitan desarrollar las diferentes fases de un estudio estadístico.

3. Fuentes

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. (1991). Materiales para construir la geometría. Madrid, España: Síntesis S.A.

Arias, A., Allan, P., & Romero, R. (2016). Matemáticas 7° grado. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0B-JyZ7WJiu5teDJZR0VxMTlmWW8/view.

Azcarate, P. (2015). Los escenarios de aprendizaje. Una estrategia para tratar los conocimientos estocásticos en las aulas. En Arteaga, E., Batanero, J., Cañadas, P., Contreras, C., Godino, G., López, M., Molina, M. (Eds.) En

Segundas Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Granada, (pp. 69-86).

Batanero, C., & Godino, J. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Cárdenas, D. M. (2017). Unidad didáctica: Geometría para 6° grado (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Cárdenas, D. M. (2018). Unidad didáctica: Geometría para 7° grado (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Cárdenas, D., & Gamboa, E. (2017). Análisis de intervención de la práctica de la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Carranza, S., & Guerrero, M. A. (2016). El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Comisión Nacional de Actividades Espaciales [CONAE] (s.f). Por qué trabajar a través de la elaboración de propuestas de enseñanza. Buenos Aires, Argentina. Programa 2Mp. Recuperado de https://2mp.conae.gov.ar/index.php/lineas-de-trabajo/formacion-docente/propuestas-innovadoras/diseno-de-propuestas-de-ensenanza/785-por-que-trabajar-a-traves-de-la-elaboracion-de-propuestas-de-ensenanza.

Dado de rol. (sin fecha). Set completo de dados de rol [ilustración]. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Dados_de_rol

Dos Santos, D. (2017). Autonomía, consentimiento y vulnerabilidad del participante de investigación clínica. Revista Bioética, 25 (1), 19-29. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bioet/v25n1/es_1983-8042-bioet-25-01-0019.pdf

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. Avances en medición, 6, 27-36. Recuperado de http: // www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Gamboa, E. B (2016). Análisis de intervención de la práctica de la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Gamboa, E. B. (2018). Unidad didáctica: Álgebra para 8° grado (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. UNICIENCIA, 27(1), 74-94.

García, G., Gaviria, G., Peralta, A., & Romero L. (2017). Resolución de problemas – una estrategia para el desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Francisco José de Caldas del municipio Paz de Ariporo Casanare (Tesis de maestría). Universidad La Salle, Yopal, Casanare.

Garzón, A., & García, M. (2009). Diseño de una secuencia de actividades para la enseñanza de la probabilidad simple en estudiantes de sexto grado: aplicación y validación. Comunicación presentada en 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/706/1/diseno.pdf

Godino, J., & Batanero, C. (2003). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Godino, J., & Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.

Graham, A., Powell, M., Taylor, N., Anderson, D., & Fitzgerald, R. (2013). Investigación ética con niños. Florencia: Centro de Investigaciones de UNICEF - Innocenti.

Guevara, C. (2011) Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación (Tesis de maestríar). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Guillén, S. (1997). Poliedros. Madrid, España: Síntesis S.A.

Guzmán, W. (2012). Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional a través de situaciones problemas, de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa “San José del municipio de Betulia” (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Medellín, Colombia.

Hernández, Y. (2014). Interpretación del cambio de funciones de variable real a partir de las formas de representación con el uso de Moodle (Tesis de pregrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2014). Pruebas Saber 3°, 5°y 9°. Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2014. Bogotá: ICFES. Recuperado de http://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/lineamientos_muestral_censal_saber359_2014.pdf

Jiménez, L., & Jiménez, J. (2005). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? Revista digital Matemática Educación e Internet, 6(1). Recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2138/1944.

Leal, S. (2018). Infancias en el parque educativo: una etnografía focalizada con niños y niñas en el municipio de Santuario-Antioquía. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.

Lombardo, K. (octubre, 2013). El azar en la matemática. Quehacer Educativo, 1(12-17). Recuperado de http://www.fumtep.edu.uy/index.php/didactica/item/download/879_a947bef4b22ee72ae5159fccbaf16701

López, F., Rentería, L., & Vergara, F. (2016). El aprendizaje de las operaciones básicas matemáticas en educación primaria, mediado por ambientes virtuales de aprendizaje: el caso de la I.E Pascual Correa Flórez del municipio de Amagá, I.E San Luis del municipio de San Luis y Centro Educativo Rural El Edén del municipio de Granada (Tesis maestría). Universidad Pontifica Bolivariana, Medellín, Colombia.

López, L. (2013). Diseño de una unidad didáctica que integre los cinco pensamientos matemáticos en el grado 8° de la Institución Educativa la Candelaria de Medellín. Universidad Nacional, Medellín, Colombia.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., & Rupin, P. (2016). Matemática 7° Básico. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://drive.google.com/drive/u/0/folders/0ByeKEkqApVXbQnJ2R002eUh3eEU

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá, D.C

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA. Bogotá D.C. Recuperado de http://www.temoa.info/es/node/49170.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas. MEN. Bogotá D.C: Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. Revista Educación Matemática, 24(1), 133-157. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a6.pdf

Pinzón, D. (2016). Habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de aplicaciones móviles. Un estudio exploratorio en semilleros de investigación escolar de la Educación Media (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Roldán, E. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Secretaría de Educación del Distrito [SED] (2007). Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático. Bogotá, Colombia. Imprenta Nacional de Colombia.

Sierra, A., Gutiérrez, P. & Tapia, G. (2018). Sentidos atribuidos a la educación familiar y escolar en las narrativas de un grupo de niños y niñas entre 5 y 9

Años de tres contextos rurales del valle de aburrá: Un estudio de caso múltiple. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. Revista EMA, 6(1), 3–26. http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

Tamayo, C., & Ramírez, A. (2009). La enseñanza de los racionales y sus propiedades a través de juegos como el dominó y el bingo. 10° Encuentro Colombiano de Educación Matemática. Colombia, Pasto.

Ursini, S., Trigueros, M., & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática, 12(2), 27-48

Valencia, P. (2015). Propuesta para la enseñanza en el aula del concepto de variable algebraica a través de situaciones problema (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

4. Contenidos

El presente documento consta de siete capítulos. En el primero se formula el problema el cual se centra en la falta de integración del pensamiento matemático al momento de su desarrollo en el aula regular de matemáticas, y la poca relevancia que se le asigna, en algunos casos, a la enseñanza de la Estadística en la educación básica. Se dan a conocer los antecedentes; donde se describen propuestas curriculares para la enseñanza del Pensamiento Aleatorio, cuyo objetivo es integrar el Pensamiento Aleatorio con los demás pensamientos matemáticos, proponer actividades didácticas enfocadas en el desarrollo Pensamiento Aleatorio.

En el segundo capítulo, a través de la justificación, se expone la importancia de integrar el pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, ya que esto permite articular contenidos de varios pensamientos con la vida cotidiana y otras áreas del conocimiento. En el tercer capítulo, se describe el objetivo general y los objetivos específicos centrados en aportar estrategias de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático, entorno al Pensamiento Aleatorio, bajo el trabajo por escenarios de aprendizaje.

En el cuarto capítulo, marco de referencia, se encuentra descrita la concepción sobre el pensamiento matemático según el análisis hecho a los Estándares Básicos de Competencias en Matemática [EBCM] (MEN, 2006) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998). Se describe la integración del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio; el marco pedagógico y didáctico el cual refiere a recomendaciones y estrategias para la enseñanza de contenidos tales como experimentos aleatorios, figuras planas y cuerpos geométricos, semejanza y congruencia, objetos tridimensionales, teoría de números, variable dependiente, variación lineal, y proporcionalidad inversa y directa. Se menciona los elementos y recomendaciones que se han de tener en cuenta al momento de formular escenarios de aprendizaje.

El quinto capítulo, aspectos metodológicos, narra cómo se establece y se desarrolla la propuesta de enseñanza. La primera parte describe (i) directrices pedagógicas y didácticas para la enseñanza de los contenidos matemáticos; (ii) diseño de la propuesta de enseñanza teniendo en cuenta los contenidos matemáticos asociados a experimentos aleatorios; (iii) valoración de la propuesta, y; (iv) análisis y ajustes a la propuesta la cual refiere a las modificaciones necesarias luego de realizar el análisis de la valoración de la propuesta. En la segunda parte se puntualizan las consideraciones éticas que se asumen para la elaboración y gestión de los formatos de valoración de la propuesta de enseñanza la cual se presenta por medio de en una cartilla.

En el sexto capítulo, se presenta el desarrollo de las fases descritas en el capítulo anterior. Se exponen las recomendaciones respecto a la enseñanza de contenidos matemáticos y al uso del material. En la fase dos se presenta cada uno de los módulos, la tercera fase refiere al diseño y gestión de la valoración de la propuesta por medio de una entrevista semiestructura para los estudiantes de sexto grado y un cuestionario para los docentes. La cuarta y última fase concierne a el análisis y ajustes a la propuesta respecto a la valoración dada por cada una de las partes (estudiantes y docentes).

Por último, en el séptimo capítulo, conclusiones y recomendaciones, se presenta una mirada general de los resultados del proceso de indagación desarrollado, centrando la atención en el diseño y validación de las estrategias metodológicas, las cuales giran alrededor de los objetivos planteados. Se concluye que sí es posible la integración del pensamiento matemático desde el Pensamiento Aleatorio mostrando viabilidad de desarrollar escenarios de aprendizaje que integren los diferentes pensamientos que componen el pensamiento matemático.

5. Metodología

El trabajo se desarrolla en cuatro fases. La consolidación de directrices pedagógicas y didácticas para la enseñanza de los contenidos matemáticos (Fase 1) de la cual surgen recomendaciones y sugerencias frente al material didáctico que se debe usar para la enseñanza de estos. La Fase 2 refiere al diseño de la propuesta, y la elaboración de una cartilla. La cartilla es para ser implementado por docentes de la educación básica y media, por tanto, cuenta con sugerencias de preparación conceptual, descripción de cada sección, propuestas de actividades, material didáctico, lecturas, tiempo estimado, notas didácticas, entre otros elementos. La Fase 3 expone la valoración de la propuesta por parte de estudiantes 6° grado y docentes de matemáticas; La Fase 4 presenta los ajustes a la propuesta teniendo en cuenta la valoración hecha por estudiantes y docentes.

6.Conclusiones
Estas se centran en dar respuesta a la pregunta problematizadora desde cada uno de los objetivos planteados. Por tanto, se concluye que en el proceso de integrar diversos conceptos se logró captar contenidos matemáticos emergentes que no estaban descritos inicialmente en los contenidos y procesos matematicos descritos en el marco de referencia. Dicha integración se da a partir de la estrategia metodología escenarios de aprendizaje, se plantea un escenario desde el cual se hace evidente el desarrollo del Pensamiento Aleatorio junto con los demás pensamientos matematicos. En cuanto a la validación de la propuesta, su pertinencia y viabilidad, lo cual es validado mediante una entrevista semiestructurada para estudiantes y un cuestionario valorativo para los expertos quienes son los que evalúan la propuesta de enseñanza, se obtuvo resultados positivos tanto por los expertos como por los estudiantes en cuanto la pertinencia que tiene la propuesta de enseñanza para ser desarrollada en el aula.

Elaborado por:	Cárdenas Flórez, Diana Marcela Gamboa Mateus, Erika Briyid
Revisado por:	Álvarez Alfonso, Ingrith

Fecha de elaboración del Resumen:	09	02	2020

CONTENIDO

IMÁGENES

DIAGRAMAS

TABLAS

GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo refiere al diseño de una propuesta de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio. Se enmarca en la metodología de aula Escenarios de Aprendizaje. Esta propuesta surge a partir de la iniciativa de las autoras, al notar que en los colegios públicos y privados (tanto urbanos como municipales) donde realizaron las prácticas iniciales y las prácticas de profundización propias de los espacios académicos del Ambiente de Pedagogía y Didáctica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, no se integraba el Pensamiento Aleatorio con los demás componentes del pensamiento matemático.

Aunque existen diversas formas de integrar los contenidos y procesos del pensamiento matemático, para el diseño de la presente propuesta se considera lo expuesto por Carranza y Guerrero (2016) quienes proponen integrar el pensamiento matemático desde el Pensamiento Aleatorio, identificando relaciones entre conceptos y procesos matemáticos propios de cada uno de los pensamientos que lo componen. De igual manera se tienen en cuenta los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas [EBCM] (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006), los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998), los Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas [DBA-M] (MEN, 2017) y el modelo de enseñanza para la Estadística denominado Escenarios de Aprendizaje, propuesto por Azcarate (2015).

Las relaciones descritas por Carranza y Guerrero (2016) se estipulan para todos los grados de escolaridad. Sin embargo, el presente trabajo se enfoca en algunas de las relaciones expuestas para 6° grado, dado que es el nivel en el cual se divide la vida académica, se deja la primaria para pasar a la secundaria, y desde la experiencia en las prácticas educativas de las autoras se evidencia que cuando los estudiantes llegan a la secundaria, presentan dificultades para comprender términos, conceptos o procesos relacionados con la Estadística, viéndose afectado así su proceso de aprendizaje.

Siguiendo a Jiménez y Jiménez (2005), la idea de la educación en secundaria se enfoca en aprovechar los conceptos y habilidades que traen los estudiantes desde la primaria para luego ir introduciendo temáticas nuevas. Sin embargo, desde la experiencia en las practicas pedagógicas se evidenció que además de que es poco el tiempo destinado a la enseñanza de la Estadística en primaria, el pensamiento matemático se enseña de forma fragmentada, lo cual dificulta avanzar en su enseñanza en la secundaria. Continuando con Jiménez y Jiménez (2005), sexto grado sería el curso óptimo para reforzar, complementar y de ser necesario enseñar dichos conceptos y habilidades que tuvieron que ser abordadas de 1° a 5° grado según lo propuesto por EBCM (MEN, 2006), sin dejar de lado los conceptos y procesos propios de 6° grado, para así poder avanzar en la enseñanza de la Estadística durante toda la secundaria, haciendo de esta una herramienta de integración del pensamiento matemático.

Por consiguiente, el presente trabajo se centra en la integración del pensamiento matemático al momento de su desarrollo en el aula, y en la relevancia que se le ha de asignar a la enseñanza de la Estadística. Por lo que se justifica en la importancia de la enseñanza conjunta de los componentes del pensamiento matemático, ya que con esto se esperaría que los estudiantes aprendan de manera articulada contenidos que pueden ser vinculados con la vida cotidiana y otras áreas del conocimiento.

En los objetivos se evidencia la necesidad de aportar estrategias para el desarrollo del Pensamiento Aleatorio como eje central del pensamiento matemático, asumiendo una estrategia metodológica que aporta al diseño de actividades enfocadas en un escenario, para evaluar la pertinencia de ser llevadas al aula de matemáticas.

El marco de referencia se describe de lo general a lo particular. Se parte de la perspectiva de lo que es el pensamiento matemático, desde los EBCM (MEN, 2006) y los LCM (MEN, 1998), complementándose con otros documentos publicados por el MEN, siendo esta la manera se muestra que el pensamiento matemático está estructurado en cinco pensamientos: el Numérico, el Espacial, el Variacional, el Aleatorio y el Métrico. Luego de forma particular, se caracteriza el Pensamiento Aleatorio y sus tres componentes: el estadístico, el combinatorio y el probabilístico.

Dentro de este marco de referencia también se presenta la posibilidad de desarrollar el pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio teniendo como referencia lo expuesto por el MEN (2006) y la propuesta de Carranza y Guerrero (2016) la cual se enfoca en el proceso matemático de interpretar datos provenientes de diversas fuentes, del cual se derivan conceptos matemáticos como: propiedades básicas de la teoría de números, objetos tridimensionales, semejanza y congruencia de objetos geométricos, experimentos aleatorios, entre otros. Conceptos considerados en el diseño de la presente propuesta de enseñanza bajo las consideraciones pedagógicas y didácticas, mencionando las estrategias de enseñanza para los contenidos matemáticos y la metodología de escenarios de aprendizaje propuestos por Azcarate (2015).

En el quinto capítulo se exhiben los aspectos metodológicos que orientan el desarrollo del trabajo mediante la descripción de las acciones a realizar, organizadas estas en fases que describen el diseño de actividades, la propuesta de enseñanza y la validación de esta. Se tiene presente las consideraciones éticas propias de un trabajo de este tipo y los ajustes de la propuesta a partir de la valoración realizada.

Posteriormente se despliega el desarrollo de cada fase, presentando el material didáctico proyectado para la enseñanza, las recomendaciones de enseñanza sugeridas para cada contenido matemático, y las sugerencias para tener en cuenta para llevar a cabo la metodología de escenarios de aprendizaje. También se presenta el diseño de la propuesta de enseñanza a través una cartilla la cual se estructura mediante cuatro módulos los cuales están dirigidos a los docentes para que sean ellos quienes los gestionen en el aula, con el fin de que los estudiantes desarrollen las actividades. Finalmente se presenta la valoración de la propuesta desde dos puntos de vista: docentes y estudiantes, por medio de un cuestionario dirigido y una entrevista semiestructurada, con el fin de validar la propuesta. Los resultados giran en torno a la claridad y pertinencia de la propuesta, notando así que desde una mirada de expertos esta es viable para ser gestionada en el aula regular de matemáticas.

Finalmente, se presentan las conclusiones. Estas se centran en dar respuesta a la pregunta problematizadora desde cada uno de los objetivos planteados. Se expone la articulación de los diversos contenidos del pensamiento matemático, a partir de la estrategia metodológica escenarios de aprendizajes. También se evidencia las conclusiones sobre la pertinencia y viabilidad de la propuesta de enseñanza luego de que esta fuera valorada por estudiantes y expertos, para finalmente hacer unas recomendaciones al momento de querer articular diversos contenidos matemáticos desde un solo pensamiento matemático.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En un análisis reflexivo por parte de las maestras en formación autoras de este trabajo, luego de desarrollar las prácticas iniciales y las prácticas de profundización de los espacios académicos del Ambiente de Pedagogía y Didáctica que son parte de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, se logra concluir que en algunas instituciones educativas públicas y privadas (urbanas y municipales) el Pensamiento Aleatorio no se relaciona de forma directa y concreta con los demás componentes del pensamiento matemático (Numérico, Espacial, Métrico y Variacional) o simplemente este no es desarrollado.

A continuación, se describe con detalle el contexto de la problemática tanto desde el ámbito normativo como desde la experiencia de la práctica pedagógica y se complementa la sección con algunos trabajos que han aportan a la enseñanza de la Estadística, asumiendo estos como antecedentes para emprender la presente indagación.

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Desde los espacios académicos del Ambiente de Pedagogía y Didáctica propio de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, las autoras de este trabajo gestionaron diferentes prácticas pedagógicas en colegios privados y públicos tanto de área urbana como municipal. Mediante dichas prácticas fue evidente que en algunos colegios para los estudiantes de 1° a 9° grado no se tiene una franja específica en el horario escolar en la que se enseñe Estadística, a pesar de que en las mallas curriculares o en los mismos EBCM (MEN, 2006) se describen las competencias, conceptos y procesos propios del Pensamiento Aleatorio que se deben abordar en la educación básica y media. Por ejemplo, en la observación de clase realizada en un colegio público, en área urbana, por Cárdenas (2018) se visualiza la malla curricular (Imagen 1) y la franja horaria de 7° grado (Imagen 2). Se evidencia que sí se tiene en cuenta el Pensamiento Aleatorio al momento de concebir la organización curricular, pero en el horario escolar (Imagen 2) se observa que no se tiene destinado un tiempo específico para la enseñanza de la Estadística, entrando esto en contradicción con la malla curricular.

Malla curricular 7° grado

ESPACIOS ACADÉMICOS QUE CONFORMAN EL ÁREA GRADO SEPTIMO			CONTENIDOS POR TEMÁTICA
ASIGNATURA	CONTENIDOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	
MATEMÁTICAS	**PENSAMIENTO ALEATORIO:** Comprender los conceptos básicos de la estadística y sus representaciones. Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas)	Identificar los conceptos básicos de la estadística en contextos determinados. Identificar y clasificar información estadística. Elaborar las encuestas, representa datos utilizando tablas y gráficas Identificar la media y la moda en un conjunto de datos no agrupados, representa datos utilizando diagramas circulares. (Porcentajes Analizar, interpretar y comparar la información proveniente de diversas fuentes	Encuestas (Clases de encuestas y de preguntas) Población, Eventos, Muestra, Variable, Frecuencia, Aleatoriedad, Representación gráfica de dato. Diagrama circula, Media, Mediana, Moda.

Imagen 1. Malla curricular 2018
Fuente. Cárdenas (2018)

Horario escolar 7° grado

D. DE CURSO: CUBILLOS QUINTERO LUIS RICARDO
ACOMPAÑANTE: REDONDO PIÑEROS RAQUEL

CURSO: 701
AÑO: 2018

HORAS	LUNES	MARTES	HORA MIERCOLES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
7:00 - 7:45	FISICA/QUIMICA	GEOGRAFIA	7:00-7:35	AMBIENTAL	EDU. FISICA	MUSICA
7:45 - 8:30	HISTORIA	GEOGRAFIA	7:35 - 8:10	AMBIENTAL	EDU. FISICA	MUSICA
8:30 - 9:00	**DESCANSO**	**DESCANSO**	8:10-8:45	L. CASTELLANA	**DESCANSO**	**DESCANSO**
9:00- 9:45	EDU. FISICA	L. EXTRANJERA	8:45-9:15	L. CASTELLANA	ARITMETICA	PPI
9:45 - 10:30	ARITMETICA	L. EXTRANJERA	**9:15-9:50**	**DESCANSO**	ARITMETICA	PPI
10:30 -11:00	**DESCANSO**	**DESCANSO**	9:50- 10:25	DIRECCION DE GRUPO	**DESCANSO**	**DESCANSO**
11:00 - 11:45	TALLERES	BIOLOGIA	10:25-11:00	HISTORIA	L. EXTRANJERA	TECNOLOGIA
11:45 - 12:30		BIOLOGIA	11:00-11:35	HISTORIA	L. EXTRANJERA	TECNOLOGIA
12:30 - 1:30	**ALMUERZO**	**ALMUERZO**	11:35-12:05	DANZAS	**ALMUERZO**	**ALMUERZO**
1:30 - 2:15	PLASTICA	GEOMETRIA	**12:05-1:00**	**ALMUERZO**	L. CASTELLANA	ETICA
2:15 - 3:00	PLASTICA	GEOMETRIA		R. COMUNIDADES	L. CASTELLANA	RELIGION

Imagen 2. Franja horaria de 7° grado 2018
Fuente. Cárdenas (2018)

Del mismo modo, en la observación de clase reportada por Gamboa (2018) que se concibió para el mismo colegio público, pero en 8° grado, se visualiza la malla curricular (Imagen 3) y la franja horaria de dicho grado (Imagen 4). En esta malla curricular se incluye el Pensamiento Aleatorio puesto que se observa contenido temático y objetivos de aprendizaje, pero al revisar el horario escolar se evidencia que no se tiene destinado tiempo específico para la enseñanza de la Estadística.

Malla curricular 8° grado

ESPACIOS ACADÉMICOS QUE CONFORMAN EL ÁREA GRADO OCTAVO			CONTENIDOS POR TEMÁTICA
ASIGNATURA	CONTENIDOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	
MATEMÁTICAS	**PENSAMIENTO ALEATORIO**Comprender los conceptos básicos de la estadística y sus representaciones.Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagrama circular).Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).Uso e interpreto la media (o promedio), Mediana y la moda y comparo lo que indican.Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).Represento datos usando tablas y gráficas (Diagrama circular).	Identifica los conceptos básicos de la estadística en contextos determinados. Identifica y clasifica información estadística.Identifica las medidas de tendencia central en un conjunto de datos no agrupado, representa datos utilizando diagramas circulares. (Porcentajes)	Conceptos básicos• Encuestas (Clases de encuestas y de preguntas)• Población• eventos• Muestra• Variable• Frecuencia• Aleatoriedad• Representación gráfica de datosRepresentaciones graficasDiagrama de barras, de lineas y circularMedidas de tendencia central• Media, Mediana y Moda

Imagen 3. Malla curricular 2018
Fuente. Gamboa (2018)

Horario escolar 8° grado

D. DE CURSO: UMAÑA TELLEZ CATALINA CURSO: 803
ACOMPAÑANTE: RODRIGUEZ LEMUS ELIZABETH AÑO: 2018

HORAS	LUNES	MARTES	HORA MIERCOLES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
7:00 - 7:45	FISICA-QUIMICA DAYANNA BEJARANO	ETICA LADY MARTINEZ	7:00-7:35	GEOGRAFIA JUAN DAVID ORTIZ	HISTORIA ELIZABETH RODRIGUEZ	L. EXTRANJERA MAURO RODRIGUEZ
7:45 - 8:30	AMBIENTAL DAYANNA BEJARANO	DANZAS CAMILO GOMEZ	7:35 - 8:10	GEOGRAFIA JUAN DAVID ORTIZ	HISTORIA ELIZABETH RODRIGUEZ	L. EXTRANJERA MAURO RODRIGUEZ
8:30 - 9:00	DESCANSO	DESCANSO	8:10-8:45	GEOMETRIA DIEGO GUERRA	DESCANSO	DESCANSO
9:00- 9:45	L. CASTELLANA CRISTINA CASTILLO	L. EXTRANJERA MAURO RODRIGUEZ	8:45-9:15	GEOMETRIA DIEGO GUERRA	BIOLOGIA DAYANNA BEJARANO	PPI
9:45 - 10:30	L. CASTELLANA CRISTINA CASTILLO	L. EXTRANJERA MAURO RODRIGUEZ	9:15-9:50	DESCANSO	BIOLOGIA DAYANNA BEJARANO	PPI
10:30 -11:00	DESCANSO	DESCANSO	9:50- 10:25	DIRECCION DE GRUPO	DESCANSO	DESCANSO
11:00 - 11:45	EDU. FISICA LUIS EDUARDO PRECIADO	ALGEBRA DIEGO GUERRA	10:25-11:00	RELIGION LADY MARTINEZ	L. CASTELLANA CRISTINA CASTILLO	PLASTICA ROBERT SANABRIA
11:45 - 12:30	EDU. FISICA LUIS EDUARDO PRECIADO	ALGEBRA DIEGO GUERRA	11:00-11:35	ALGEBRA DIEGO GUERRA	L. CASTELLANA CRISTINA CASTILLO	PLASTICA ROBERT SANABRIA
12:30 - 1:30	ALMUERZO	ALMUERZO	11:35-12:05	ALGEBRA DIEGO GUERRA	ALMUERZO	ALMUERZO
1:30 - 2:15	MUSICA OSWALDO BARON	TALLERES	12:05-1:00	ALMUERZO	TECNOLOGIA CATALINA UMAÑA	L. CASTELLANA CRISTINA CASTILLO
2:15 - 3:00	MUSICA OSWALDO BARON			R. COMUNIDADES	TECNOLOGIA CATALINA UMAÑA	EDU. FISICA LUIS EDUARDO PRECIADO

Imagen 4. Franja horaria de 8° grado 2018
Fuente. Gamboa (2018)

A partir de las Imágenes 3 y 4 se reconoce que en el colegio donde las maestras en formación realizaron prácticas, la enseñanza de la Matemáticas no se hace de forma integrada, sino que cada asignatura (Aritmética, Algebra, Cálculo, Estadística y Geometría) trata conceptos propios de cada uno de los pensamientos, y en pocas ocasiones se establecen relaciones concretas entre conceptos que involucran más de un pensamiento. Se reconoció al revisar los criterios de evaluación, mallas curriculares, planes de áreas o desde observaciones de clase en los diferentes colegios. Se logra identificar en la observación de clase reportada por Cárdenas (2017) que, en un colegio público de Bogotá, en los criterios de evaluación para el área de matemáticas (Imagen 5) de 1° a 9° grado no se contempla la Estadística como una asignatura y por ende no se evalúa el Pensamiento Aleatorio de forma concreta. Para 10° y 11° grado Estadística se tiene como una asignatura del área y es evaluada de manera independiente (o por lo menos se le asigna un porcentaje dentro de la evaluación final del área, lo que se asume como no integración), lo que devela que el proceso de enseñanza de la Estadística y el desarrollo del Pensamiento Aleatorio no es continuo a lo largo de la formación escolar, sino que se deja para los últimos años de colegio (educación media).

GRADO	CURSOS	ASIGNATURAS	INTESIDAD	PESO	TOTAL
1º a 5º	TODOS	MATEMÁTICAS	5 HORAS	100%	100%
6ª	TODOS	ARITMÉTICA	4 HORAS	60%	100%
		GEOMETRÍA	2 HORAS	40%	
7º	TODOS	ARITMÉTICA	4 HORAS	60%	100%
		GEOMETRÍA	2 HORAS	40%	
8º	TODOS	ÁLGEBRA	4 HORAS	60%	100%
		GEOMETRÍA	2 HORAS	40%	
9º	TODOS	ÁLGEBRA	4 HORAS	60%	100%
		GEOMETRÍA	2 HORAS	40%	
10º	1001 - 1003 - 1004	PRECÁLCULO	4 HORAS	60%	100%
		ESTADÍSTICA	2 HORAS	40%	
	1002	PRECÁLCULO	4 HORAS	60%	100%
		ESTADÍSTICA	2 HORAS	40%	
11º	1101 - 1103 - 1104	CÁLCULO	4 HORAS	60%	100%
		PROBABILIDAD	2 HORAS	40%	
	1102	CÁLCULO	4 HORAS	60%	100%
		PROBABILIDAD	2 HORAS	40%	

Imagen 5. Porcentajes de evaluación por asignatura para Matemática 2017
Fuente. Cárdenas (2017)

Para fundamentar la problemática identificada se decide entrevistar a varios docentes de la institución en mención, respecto a sus experiencias de aula frente a la educación en estadística de los estudiantes, formulándoles preguntas como: ¿Qué asignaturas de Matemáticas tiene a cargo? ¿Qué cursos tiene a cargo?

¿Desde su asignatura integra los diferentes pensamientos matemáticos? Si logra integrar los diferentes pensamientos ¿Cómo lo hace? ¿Considera que hay algún pensamiento matemático más importante que otro? ¿Desde su experiencia como docente, considera que cuando los estudiantes pasan a 6° grado tienen buenas bases teóricas para el aprendizaje de la Estadística? Algunas de las respuestas dadas por los docentes son:

DOCENTE	COMENTARIOS SOBRE LA ENTREVISTA
Docente 1	*"Estoy encargada de la asignatura de Aritmética y Geometría en grado 7°, las cuales las dicto por separado, lo ideal sería integrar los pensamientos, pero realmente no lo hago, si, en algunas clases de aritmética se tocan temas de otros pensamientos, pero no se profundiza en ello, solo profundizamos en lo numérico. Desde la geometría es más complejo integrar los cinco pensamientos. Sin embargo, cuando se enseñan algunas propiedades hay que recurrir a lo numérico, pero de resto no, además que el tiempo en realidad es muy corto para todo lo que hay que abordar. No considero que haya un pensamiento más importante que otro pues todos tienen la misma importancia, aunque en el aula a veces no se evidencie. Respecto a los estudiantes de grado 6°, considero que no tienen buenas bases conceptuales pues en realidad en primaria ellos ven poca estadística, por decir que nula, no saben […] para qué les sirve eso en la vida real, llegan a 6° grado perdidos, no saben qué es una encuesta o qué sentido tiene realizar una. Pero en general ellos no tienen bases conceptuales".*
Docente 2	"*Estoy encargado de la asignatura de Geometría en grado 8°, respecto a la pregunta de si integro los diferentes pensamientos matemáticos en mis clases con los chicos de 8°, pues no, ya que creo que es bastante complejo hacerlo y más con una asignatura como Geometría, si es cierto que en ocasiones se necesita de los números cuando se habla de medida de ángulos o de distancias, pero no le doy mayor trascendencia ya que el tiempo es muy corto y aún más con la Geometría, aunque en mis clases si le doy mucha importancia a los procesos que hablan en los estándares como formular y resolver problemas; comunicar y razonar. Respecto a la pregunta de si hay un pensamiento más importante que otro, no lo considero, yo pienso que cada pensamiento es esencial en la formación del pensamiento matemático de los chicos. En cuanto a los estudiantes de grado 6°, ellos no tienen buenas bases conceptuales, puede que en años anteriores les enseñen cosas de estadística, pero lo hacen muy por encima porque, al momento de llegar a 6° grado, no saben qué función tienen las cosas aprendidas, o dicen, eso lo vimos, pero no se para que sirve".*
Docente 3	"*Estoy encargada de los décimos y onces en estadística y probabilidad, en estas materias se recoge todo lo de los demás pensamientos, y más en estos cursos pues ya han pasado por el proceso de trabajar con los demás pensamientos, por lo que hago uso de los demás pensamientos en mis clases para enseñar los conceptos propios de la estadística y de la probabilidad. Es evidente que ningún pensamiento es más importante que otro, sin embargo, si se ve que se enseña es en el orden que están en los Estándares".*

Tabla 1. Respuesta de los docentes a entrevista realizada
Fuente. Propia

Teniendo en cuenta lo anterior, se evidencia que en el aula los docentes se encargan únicamente de abordar los conceptos propios de las asignaturas asignadas, es decir no se realiza una articulación entre los cinco componentes del pensamiento matemático al momento de gestionar las clases, a pesar de que en los EBCM (MEN, 2006) se afirma que los cinco tipos de pensamiento matemático tienen elementos conceptuales comunes que se pueden integrar (p. 69).

De otra parte, en las observaciones de clase realizadas en dos colegios públicos de índole municipal, se pudo apreciar que la intensidad horaria destinada para el área de Matemáticas se distribuye como se muestra en la Tabla 2 y la Tabla 3. En la Tabla 2 se tiene el horario de clases observado y reportado en el informe de práctica (Gamboa, 2016), en el cual se evidencia que el Pensamiento Aleatorio solo se aborda una hora a la semana en 10° y 11° grado, sin embargo, a partir del desarrollo de la práctica se conoció que, de ser necesario, los docentes toman la hora de clase destinada a Estadística para complementar la enseñanza del Cálculo, dando así menor importancia al Pensamiento Aleatorio y al parecer, mayor importancia al Pensamiento Variacional. En la Tabla 3 (Cárdenas, 2017) se aprecia que el Pensamiento Aleatorio solo es trabajado en 10° y 11° grado, en 10° grado dos horas para Estadística y en 11° grado dos horas para Probabilidad.

GRADO	ASIGNATURA	INTENSIDAD
6° y 7° grado	Aritmética	4 horas
	Geometría	1 hora
8° y 9° grado	Álgebra	4 horas
	Geometría	1 hora
10° y 11° grado	Cálculo	4 horas
	Estadística	1 hora

Tabla 2. Intensidad horaria del área de Matemáticas, Colegio A
Fuente. Propia inspirada en Gamboa (2016)

GRADO	ASIGNATURA	INTENSIDAD
6° a 9° grado	Matemáticas	6 horas
10° grado	Trigonometría	4 horas
	Estadística	2 horas
11° grado	Cálculo	4 horas
	Probabilidad	2 horas

Tabla 3. Intensidad horaria del área de Matemáticas, Colegio B
Fuente. Propia inspirada en Cárdenas (2017)

En otra institución, pero de índole privada, a partir de intervención asociada a la práctica de la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística (Cárdenas y Gamboa, 2017), se pudo analizar la intensidad (Tabla 4). Se evidencia que el Pensamiento

Aleatorio es abordado desde 1° grado hasta 9° grado. Sin embargo, en esta institución fue evidente a partir de las vivencias de la práctica inicial, que de 1° a 7° grado los docentes se ocupan del Pensamiento Numérico y algunas veces del Pensamiento Espacial, sin tener en cuenta la hora semanal asignada para el Pensamiento Aleatorio, pues esta es utilizada en varios casos para la enseñanza de otra asignatura, como por ejemplo Aritmética.

GRADO	ASIGNATURA	INTENSIDAD
Primero a Séptimo	Aritmética	3 horas
	Geometría y Estadística	1 hora
Octavo	Algebra	3 horas
	Geometría y Estadística	1 hora
Noveno	Algebra	3 horas
	Geometría y Estadística	1 hora
Décimo	Trigonometría	4 horas
Undécimo	Cálculo	4 horas

Tabla 4. Intensidad horaria para el área de matemáticas, Colegio C
Fuente. Propia inspirada en Cárdenas y Gamboa (2017)

En la Tabla 4 se observa que para 8° y 9° grado se propone desarrollar el Pensamiento Aleatorio, sin embargo, esto no se cumple, pues en la observación de clase que se realizó (Cárdenas y Gamboa, 2017), el docente que tenía a cargo estos grados, en 8° grado desarrollaba el Pensamiento Espacial pero no el Pensamiento Aleatorio, y en 9° grado desarrollaba el Pensamiento Aleatorio, pero no el Espacial. Para 10° y 11° grado solo se propone desarrollar el Pensamiento Variacional. Así, se evidencia que en esta institución se desarrolla el pensamiento matemático de forma fragmentada y al Pensamiento Aleatorio no se le da la suficiente importancia para ser desarrollado de manera constante a lo largo de toda la formación educativa.

En la Imagen 4 se muestran evaluaciones presentadas por los estudiantes de un mismo grado de escolaridad (Gamboa 2018), evidenciando el abordaje de conceptos específicos de una sola asignatura del área de Matemáticas. Mostrando que, así como en la enseñanza, la evaluación del pensamiento matemático se realiza de forma dividida.

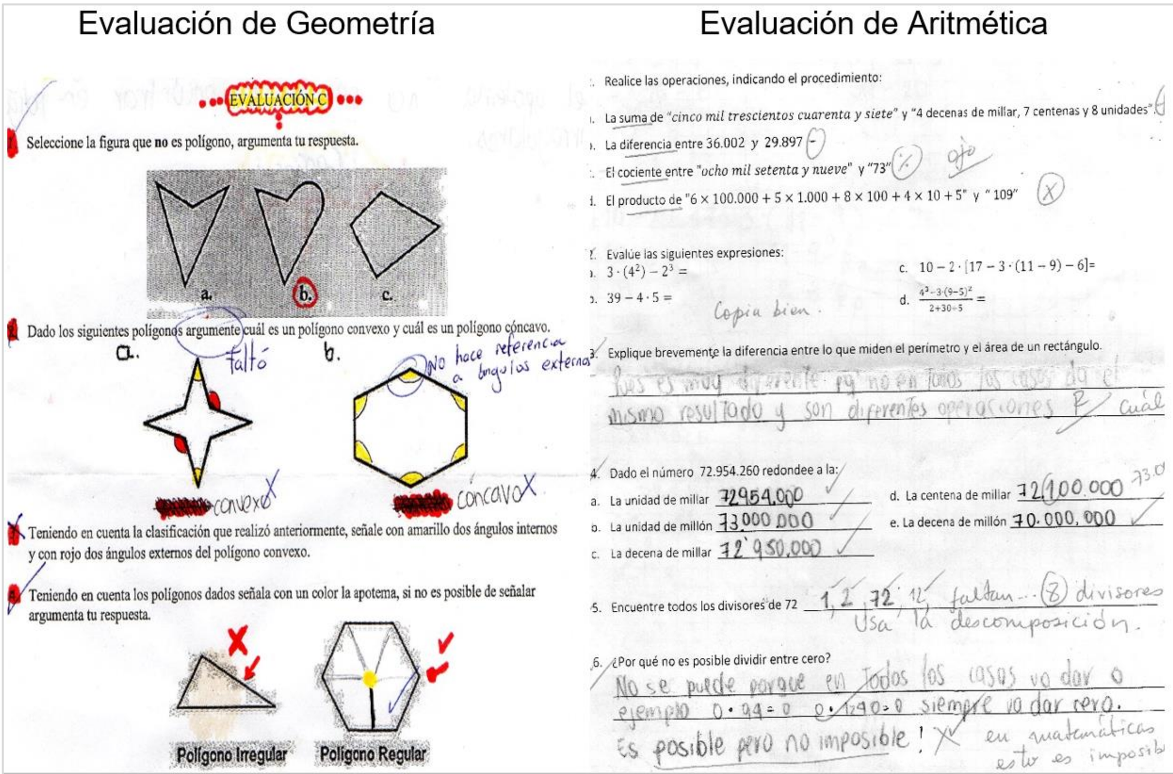


Imagen 6. Evaluaciones de Aritmética y Geometría
Fuente. Gamboa (2018)

Dado el anterior análisis se puede sustentar que en el aula de matemáticas no se le da la suficiente relevancia al Pensamiento Aleatorio y que este no se integra con los demás pensamientos que componen al pensamiento matemático, yendo esto en contravía con lo expuesto en las orientaciones curriculares nacionales, puesto que en los EBCM (MEN, 2006) se afirma que los cinco tipos de pensamientos

> Tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje […] que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas. (MEN, 2006, p. 69)

La anterior tensión entre la teoría y la práctica se debe a que, según la Secretaría de Educación del Distrito [SED] (2007), "la tendencia a estudiar la matemática por la matemática ha conducido a que en la enseñanza no se apoye a los alumnos para que vinculen los conceptos que se le enseñan con situaciones de la vida no escolar" (p 53); 'estudiar la matemática por la matemática' refiere a que:

> Tradicionalmente las matemáticas se han enseñado como la suma de contenidos más o menos inconexos entre sí, los contenidos correspondientes a los diferentes sistemas en los que suele organizar el conocimiento matemático escolar se presentan como compartimentos independientes. Como resultado de este proceder los alumnos aprenden contenidos desarticulados. (SED, 2007, p. 53)

En los procesos de evaluación nacional se observa que el Pensamiento Aleatorio también es relegado, puesto que la estructura conceptual de las Pruebas Saber se organiza "en tres componentes el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio" (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES], 2014, p. 67), demostrando que desde las mismas evaluaciones que se implementan en el país, el Pensamiento Aleatorio es excluido de los demás pensamientos que componen el pensamiento matemático.

Lo expuesto se condensa en el Diagrama 1 el cual converge en la pregunta de indagación que orienta el desarrollo de este trabajo: ¿cómo aportar al desarrollo del pensamiento matemático asumiendo como eje central e integrador del estudio de la matemática escolar, el Pensamiento Aleatorio?

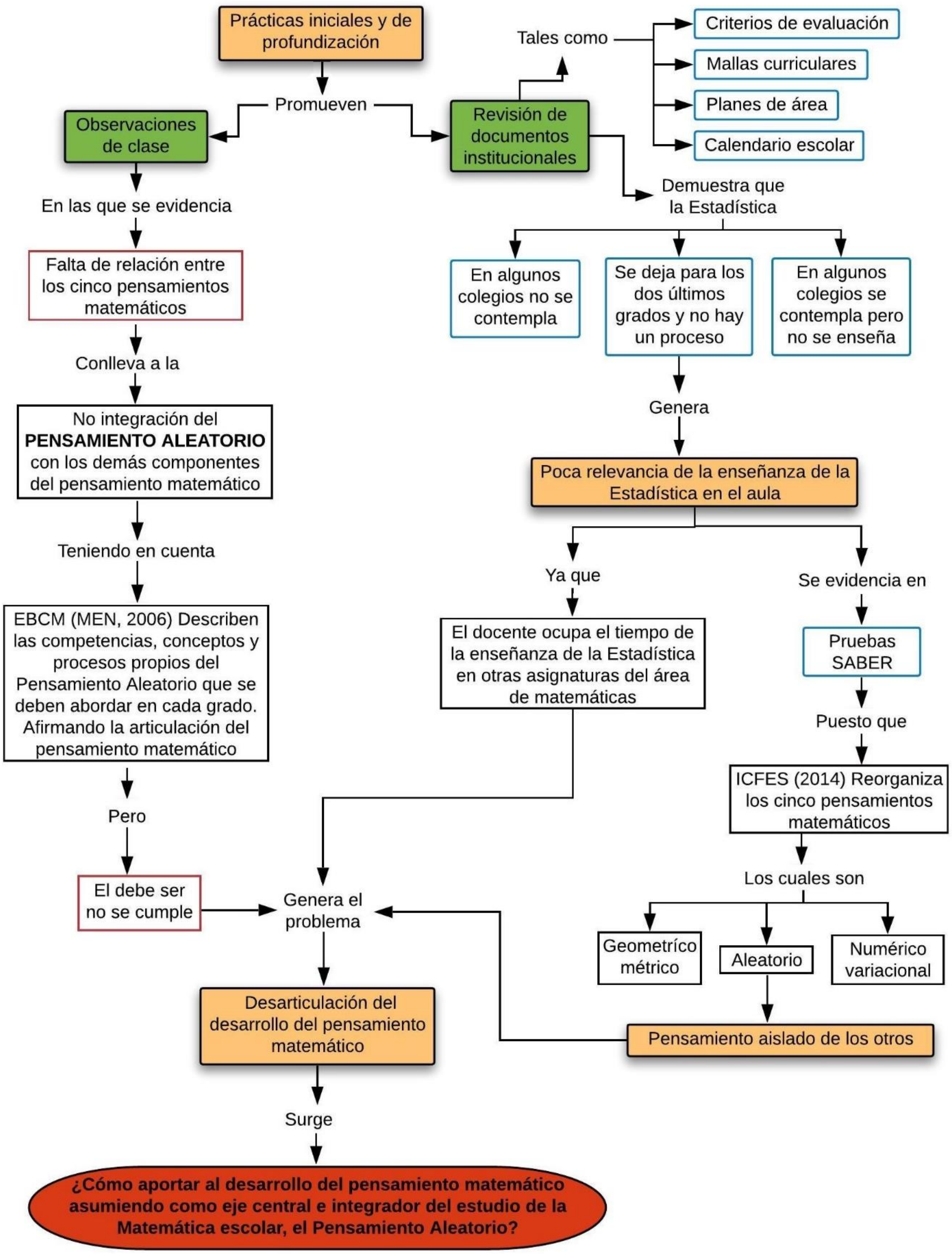


Diagrama 1. Problema de indagación: Articulación del pensamiento matemático
Fuente. Propia

1.2. ANTECEDENTES

A continuación, se presentan algunas propuestas de enseñanza de la Estadística en la escuela. Los autores de estas propuestas han hecho el esfuerzo por plantear cambios significativos para dicha enseñanza, sin embargo, queda corto el hecho de llevar al aula la integración del Pensamiento Aleatorio con el Pensamiento Métrico, el Variacional, el Espacial y el Numérico.

Por ejemplo, Jiménez y Jiménez (2005) diseñan una propuesta dirigida a profesores de matemáticas, la cual se fundamenta en que los estudiantes comprendan conceptos propios del Pensamiento Aleatorio y a su vez desarrollen los procesos inherentes a este pensamiento. Para ello plantean actividades tanto para primaria como para secundaria. En el caso de primaria buscan enseñar conceptos sobre probabilidad, y para la secundaria, crean actividades enfocadas en la introducción de las definiciones y conceptos propios de Probabilidad.

Por otra parte, Jiménez y Jiménez (2005) afirman que "es muy importante que el maestro planifique las actividades integrando otras áreas del currículo" (p. 8). Sin embargo, al revisar algunas de las actividades no se evidencia tal integración; pues en la Actividad 1 (Imagen 7) se enfoca en desarrollar la noción de azar sin ahondar en nociones de proporciones o razones lo cual refiere al Pensamiento Variacional o al Pensamiento Numérico.

Actividad 1.

El maestro escribe en el pizarrón los nombres de cinco personas y pregunta a los niños. "¿Si se quiere escoger un comité de tres personas que representen a estos niños, de cuántas formas podemos hacerlo?". Una vez que se han escuchado algunas opiniones se les pide que digan posibles escogencias y se van anotando en la pizarra, teniendo el cuidado de que no queden repetidas. Es importante que en algún momento de la actividad se establezca que el orden no interesa, es decir que tres nombres en diferente orden representan el mismo comité. En este caso un problema que se plantea es cómo determinar cuando se tienen todos los resultados posibles para garantizar que se tienen todas las posibilidades. Si no se oyen sugerencias, conviene entonces que el profesor plantee a los estudiantes una técnica para formar estos comités. Una de ellas podría ser fijar un nombre, y luego escoger el segundo y el tercero. Es muy importante que en este nivel el profesor no dé fórmulas, para que el alumno logre construir resultados.

Imagen 7. Descripción de actividad para primaria para enseñar estadística
Fuente. Jiménez y Jiménez (2005)

La actividad 2 (Imagen 8) se enfoca en analizar los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio, lo cual deja en evidencia que solo se enfoca en desarrollar el Pensamiento Aleatorio dejando de lado los demás pensamientos del pensamiento matemático.

Actividad 2.

El profesor muestra a los alumnos una caja con tres bolas distintas solo en el color --R: roja, B: blanca, A: amarilla--. Pide a un estudiante que seleccione una bola, anota la letra que corresponde al color. Devuelve la bola. La acción se repite dos veces más. El profesor dice a sus alumnos que este tipo de experimento se denomina "tres extracciones con reemplazo". Luego les dice: "Escriban en sus cuadernos todos los tipos de resultados que se podrían obtener". Cuando ya los hayan realizado, pregunta: "¿Cuántos resultados se obtuvieron?" Conviene que aquellos estudiantes que no obtengan una respuesta correcta revisen cuáles consideraciones no hicieron.

Imagen 8. Descripción de actividad para secundaria para enseñar estadística
Fuente. Jiménez y Jiménez (2005)

Por otro lado, Carranza y Guerrero (2016) diseñan una propuesta curricular en la cual proponen integrar los cinco componentes del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, relacionando conceptos y procesos que fueron identificados en los EBCM (MEN, 2006). Dicha propuesta se teoriza para cada grado de escolaridad exponiendo diferentes estructuras gráficas, las cuales describen relaciones con los demás pensamientos matemáticos desde los conceptos del Pensamiento Aleatorio, logrando así la integración de los pensamientos. Sin embargo, este trabajo solo es realizado desde una mirada teórica y desde las generalidades del estándar. Y aunque proponen un ejemplo para 1° grado de la educación básica se quedan cortas en materializar la propuesta curricular en actividades planeadas para el aula de matemáticas.

Siguiendo la idea de integración, autores Garzón y García (2009) manifiestan la importancia de la Estadística en el aula. Ellos mencionan que “muchos investigadores en didáctica de la estadística afirman que cuando analizamos los planes y programas de matemática para educación, en especial los contenidos mínimos obligatorios, podemos ver que la estadística está incorporada como un contenido más” (p.1), dando a notar la poca relevancia que esta tiene en la escuela.

También exponen que cuando se enseña Estadística se hace de forma algorítmica sin inmiscuir otras áreas del conocimiento lo cual conlleva a que el estudiante presente dificultades en el proceso de aprendizaje de conceptos estadísticos. Para superar estas dificultades Garzón y García (2009) presentan una secuencia de actividades (Imagen 9) con el objetivo de que el estudiante pueda construir la noción de probabilidad desde una concepción frecuencial, por medio de estrategias donde se modela de lo probable e incierto para salir victorioso en el juego 'Descúbreme'. Sin embargo, al revisar las temáticas propuestas para cada secuencia, la integración de la Estadística con otras áreas del conocimiento no es evidente, dando la sensación de que, a pesar del diseño de dicha actividad, las dificultes reportadas van a permanecer en los estudiantes ya que no hay relación con otras áreas de conocimiento.

Secuencia	Temática	Acciones de estudiantes
Secuencia 1	Azar, experimentos aleatorios, y determinìsticos	Construcción de un personaje a partir de experi-mentos aleatorios.
Secuencia 2	Espacio Muestral	Crear estrategias para descartar opciones de personaje del compañero.
Secuencia 3	Suceso Seguro, imposible, elemental.	Elección de diferentes tipos de suceso para dar la partida.
Secuencia 4	Frecuencias absolutas y relativas	Reflexión de estrategia de juego comparando posi-bilidades a partir de frecuencias relativas. (*juegan*)
Secuencia 5	Cálculo y comparación de probabilidades	Elección de estrategia final a partir del cálculo y comparación de probabilidades.

Imagen 9. Secuencia de la actividad propuesta por Garzón y García (2009)
Fuente. Garzón y García (2009)

Lo anterior es una muestra de que las intenciones del cambio no son suficientes, pues debe existir una correspondencia entre lo descrito por los autores y las actividades planteadas por ellos, al momento de integrar el Pensamiento Aleatorio con el Pensamiento Métrico, el Variacional, el Espacial y el Numérico.

2. JUSTIFICACIÓN

“El conocimiento matemático es imprescindible y necesario en todo ciudadano para desempeñarse en forma activa y crítica en su vida social y política para así poder interpretar la información necesaria en la toma de decisiones” (MEN, 2006, p. 47), así que es necesario y fundamental desarrollar los cinco componentes del pensamiento matemático de forma integrada en todos los grados de escolaridad, pues como lo afirma López (2013) “pensar en enseñar matemáticas desagregando los cinco pensamientos genera en los estudiantes dificultades para solucionar problemas donde tienen que abordar más de un pensamiento” (p. 6).

A pesar de las anteriores afirmaciones, el pensamiento matemático se sigue desarrollando de forma dispersa y en algunos casos de manera incompleta, pues el Pensamiento Aleatorio sigue siendo un pensamiento al que se le da poca importancia en las aulas, sin tener en cuenta que diferentes autores han insistido en la importancia de éste. Al respecto se pueden encontrar afirmaciones como:

- Ben Zvi y Garfield (2004) citados en Pinzón (2016), afirman que la importancia del Pensamiento Aleatorio radica en que con frecuencia los medios de comunicación presentan gran cantidad de información estadística la cual debe ser analizada por el ciudadano del común. Mencionando así que dicho pensamiento desarrolla en los estudiantes la capacidad de evaluar información basada en datos.
- García, Gaviria, Peralta y Romero (2017) mencionan que el Pensamiento Aleatorio promueve el desarrollo de predicciones e inferencias partiendo de la información que se tiene. Ellos precisan que dicho pensamiento ayuda a desarrollar en los estudiantes la “capacidad para argumentar y establecer relaciones; potenciar la capacidad de abstracción, de plantear y resolver problemas; permite crear ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones diversas que conducen a los estudiantes que avancen a niveles de

competencia cada vez más complejos" (p. 42) lo cual contribuye en la toma de decisiones en diferentes situaciones de la vida cotidiana.

- Batanero y Godino (2004) mencionan diferentes razones por las cuales es importante la enseñanza de la Estadística, entre ellas:

> Es útil para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema. Ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos, frente a criterios subjetivos. También ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos (p. 411).

Estos autores coinciden con que el Pensamiento Aleatorio ayuda al estudiante en su vida cotidiana a tomar decisiones de forma crítica basados en la información que tiene. Por tanto, no desarrollar este pensamiento conlleva a una formación incompleta, dificultando que el ciudadano se desempeñe de forma activa y crítica en su vida social y política. Sin embargo, como se evidenció en la formulación del problema, la formación matemática en muchos casos es incompleta pues el Pensamiento Aleatorio es relegado debido a la falta de tiempo o es dejado para los últimos grados de escolaridad.

La propuesta de enseñanza se plantea para 6° grado ya que es el nivel de escolaridad en el que se divide la vida académica en dos, se deja de lado la educación básica primaria y se pasa a la educación básica secundaria. En la secundaria los estudiantes deben hacer uso de conceptos y procesos abordados en la primaria, pero se evidencia en algunos casos que los estudiantes llegan a la secundaria con dificultades para comprender conceptos o procesos relacionados con la Estadística. Por tal motivo, 6° grado se considera óptimo para integrar los cinco componentes del pensamiento matemático, reforzando el Pensamiento Aleatorio promovido en la primaria, y consolidando los cimientos de la Estadística.

La integración de los cinco componentes del pensamiento matemático está dada desde los EBCM (MEN, 2006) cuando se afirma que “en cada institución se debe desarrollar de manera integrada los distintos pensamientos y no cada uno de ellos de manera aislada” (p. 16). Si en el aula se integran los componentes del pensamiento matemáticos, ningún pensamiento generaría mayor dedicación que otro y de este modo el estudiante podría desarrollar los conceptos y procesos matemáticos de forma articulada.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo de grado presenta el diseño de una propuesta de enseñanza para integrar el pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, asumiendo que es posible articular conceptos de otros pensamientos matemáticos. Autores como López (2013) y Carranza y Guerrero (2016), exponen la transversalidad que tiene el Pensamiento Aleatorio con los demás pensamientos. López (2013) afirma que es posible abordar conceptos como: fracciones y variables dependientes e independientes, cuando se enseña frecuencias relativas, gráficos de sectores y probabilidades, cuando se clasifica variables cualitativas y cuantitativas, y con las medidas de tendencia central.

Carranza y Guerrero (2016) fundamentan de forma teórica la posibilidad de integrar los cinco pensamientos, afirmando que “la Estocástica es la herramienta primordial sobre la que se fundamenta el desarrollo del Pensamiento Variacional, el Espacial, el Numérico y el Métrico” (p. 15), logrando articular los conceptos matemáticos de los cinco pensamientos que componen el pensamiento matemático y lo demuestran a partir de varios esquemas, donde los conceptos de los otros cuatro pensamientos se desprenden de uno o varios conceptos nucleares del Pensamiento Aleatorio.

3. OBJETIVOS

Se plantea el objetivo general el cual conduce a una propuesta didáctica en el campo de la Educación Estadística, fundamentado en tres objetivos específicos.

3.1. OBJETIVO GENERAL

Aportar estrategias de enseñanza centradas en el Pensamiento Aleatorio, para el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes de 6° grado de la educación básica colombiana.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Articular diversos contenidos del pensamiento matemático: Variacional, Numérico, Métrico, Espacial y Aleatorio a partir de escenarios de aprendizaje.
- Diseñar una estrategia metodológica centrada en el Pensamiento Aleatorio, que aporte al desarrollo del pensamiento matemático, de la población en cuestión.
- Validar la propuesta de enseñanza, su pertinencia y viabilidad, para proyectar su implementación en el aula de matemáticas.

4. MARCO DE REFERENCIA

A continuación, se describe lo que se concibe como pensamiento matemático y las estrategias didácticas para su desarrollo, teniendo en cuenta los LCM (MEN, 1998), los EBCM (MEN, 2006) y la propuesta relacionada con la SED (2007). Por otra parte, se describe la integración del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio desde una propuesta micro curricular enfocada a 6° grado. Por último, se expone el marco pedagógico y didáctico para tener en cuenta en la enseñanza del Pensamiento Aleatorio.

4.1. PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Para el MEN (1998) el pensamiento matemático hace parte del desarrollo del conocimiento matemático, este conocimiento se convierte en una herramienta que ayuda a ampliar otros pensamientos como el Numérico, el Espacial, el Variacional, el Aleatorio y el Métrico, a partir de los procesos generales y los conocimientos básicos. Según el MEN (1998), los procesos generales involucran el aprendizaje matemático, el cual debe facilitar que el estudiante desarrolle el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos hacen referencia a procesos específicos tales como, analizar las propiedades de correlación entre variables de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos entre sí, identificar características de localización de objetos en sistema de representación cartesiana y geométrica, interpretar datos provenientes de diversas fuentes, entre otros. Así, procesos y conceptos desarrollan el pensamiento matemático desde los sistemas propios asociados a cada uno de los cinco pensamientos: el Numérico, el Espacial, el Métrico, el Aleatorio o Probabilístico y el Variacional; lo que conlleva a ser matemáticamente competente.

A partir de lo expuesto, este trabajo de grado asume el pensamiento matemático como la conjugación de los cinco pensamientos (el Numérico, el Espacial, el Variacional, el Aleatorio y el Métrico) los cuales se desarrollan mediante los procesos generales (el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos) a partir de los conceptos asociados a cada pensamiento, esto con el fin de formar estudiantes matemáticamente competentes, es decir, estudiantes que saben matemáticas y la aplican en diferentes contextos.

Dado que el pensamiento matemático se asume como la unión de cinco pensamientos, a continuación, se presenta la descripción de cada uno de estos, empezando por el Pensamiento Numérico, para el cual el MEN (1998) afirma que se adquiere gradualmente y evoluciona a medida que el estudiante tiene oportunidad de desarrollarlo en contextos significativos. Según Mcintosh (1992) citado en el MEN (1998) el Pensamiento Numérico hace referencia a la comprensión general sobre el número y las operaciones. Mientras que la SED (2007) asegura que, para potencializar tal pensamiento, el docente debe ser capaz de desarrollar en el estudiante comprensiones mentales las cuales le permitan comprender y resolver problemas que involucren los sistemas numéricos.

El Pensamiento Métrico hace referencia a la comprensión general que tiene el estudiante frente a las magnitudes y las cantidades, la medición de las magnitudes y el uso de medidas en diferentes situaciones. El MEN (1998) afirma que los estudiantes se relacionan con diferentes magnitudes (fuerza, velocidad, etc.) y cantidades (las cuales resultan de la medición de una magnitud acompañada de unidades de medidas) desde la niñez.

Para el MEN (2006) el Pensamiento Espacial es entendido como el conjunto de procesos cognitivos con los cuales se construyen representaciones mentales de los objetos del espacio, por lo que dicho pensamiento y los sistemas geométricos abordan relaciones topológicas entendidas como, las transformaciones y las distintas traducciones y representaciones de un objeto. Asimismo, el MEN (1998) afirma que el desarrollo de este pensamiento se hace de forma lenta, ya que se busca llegar a un nivel deductivo partiendo de un nivel intuitivo.

En esta misma línea, la SED (2007) describe los tres componentes del Pensamiento Espacial. La localización que da cuenta de la posición relativa de los objetos para así construir un sistema de referencia. El estudio de la forma que se enfoca en la exploración de objetos geométricos en todas las dimensiones y el Modelo de Euclides. La inferencia y la validación, reconocidos como ejemplo de construcción lógica por medio de modelos axiomáticos.

De otra parte, según el MEN (2006) el Pensamiento Variacional se ocupa de la identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, también afirma que este pensamiento desarrolla una estrecha relación con los otros tipos de pensamientos matemáticos puesto que:

> La variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos, de medidas y de datos, porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional. (MEN, 2006, p. 66)

Además, este pensamiento tiene el propósito de dar sentido al aprendizaje del cálculo numérico en la educación primaria, y al algebraico en la educación media. Por lo anterior, el desarrollo del razonamiento algebraico se debe potenciar desde edades tempranas, para lo cual se puede iniciar con las generalizaciones de patrones numéricos.

Referente al Pensamiento Aleatorio, Shanghnessy (1985) citado en el MEN (1998) afirma que éste se desarrolla a partir de contenidos enfocados en la Probabilidad y la Estadística, los cuales se fundamentan en la exploración e investigación tanto del docente como del estudiante. Shanghnessy (1985) precisa que el Pensamiento Aleatorio significa resolución de problemas, por lo cual el MEN (1998) describe que tal pensamiento tiene como fin que los estudiantes puedan recolectar, organizar, sistematizar, representar y analizar los resultados de algún tipo de experimento en cualquier contexto significativo para ayudar a conjeturar a partir de los datos. El MEN (2006) amplía y complementa lo descrito en 1998, agregando que este pensamiento también es conocido como pensamiento estocástico o probabilístico el cual tiene como propósito ayudar a tomar decisiones en situaciones de azar, relacionando al azar “con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones” (MEN, p. 65).

Al igual que en 1998, el MEN en el 2006 afirma que el Pensamiento Aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades, la Estadística (inferencial y descriptiva) y la Combinatoria, para ayudar a buscar soluciones razonables a situaciones de incertidumbre; por lo que afirma que no es necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos sino que es fundamental avanzar en el desarrollo de habilidades de predicciones y toma de decisiones a partir de los datos.

Por último, el MEN (2006) relaciona estos pensamientos entre sí, reconociendo la articulación que tienen al momento de estudiar conceptos de cada pensamiento. Es así como afirman que el Pensamiento Variacional es “una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos”

(p. 69), y a partir de allí se forjan relaciones entre los demás pensamientos. Este tipo de relaciones se pueden observar en el Diagrama 2, evidenciando que el pensamiento matemático se puede integrar desde uno de los demás pensamientos.

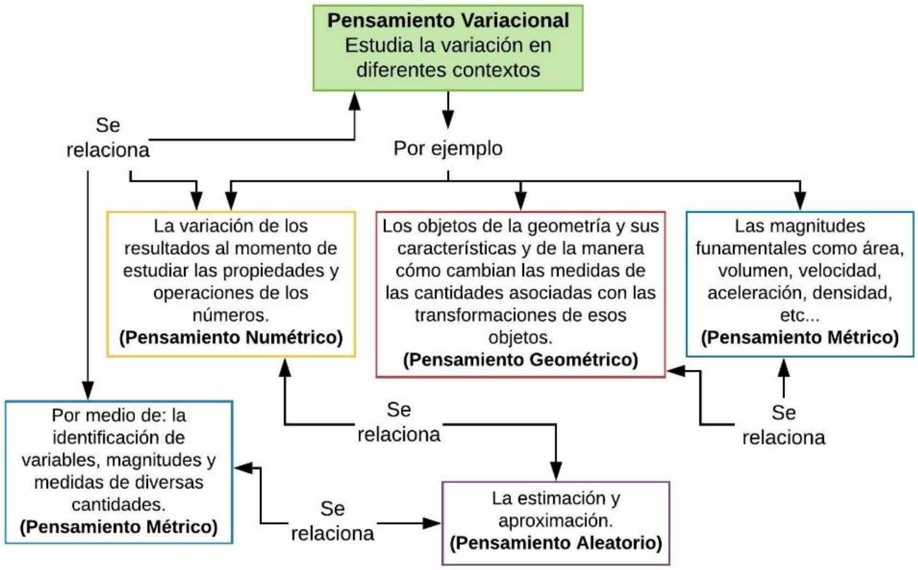


Diagrama 2. Pensamiento matemático a partir del Pensamiento Variacional
Fuente. Propia

Sin embargo, en la mayoría de las instituciones de educación básica y media esto no se hace evidente, o se deja de lado el Pensamiento Aleatorio dando prioridad a los demás pensamientos. Pero como es de interés para este trabajo centrarse en el Pensamiento Aleatorio, a continuación, se expone una propuesta de integración del pensamiento matemático desde dicho pensamiento.

4.2. PENSAMIENTO MATEMÁTICO A PARTIR DEL PENSAMIENTO ALEATORIO

Dado que este trabajo se enfoca en aportar estrategias de enseñanza en la cual se pueda integrar el pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, y teniendo en cuenta que la MEN (2006) afirma que los cinco pensamientos tienen en común elementos conceptuales que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje y de problema que ayudan la integración de estos, se presenta una propuesta de integración (Diagrama 3).

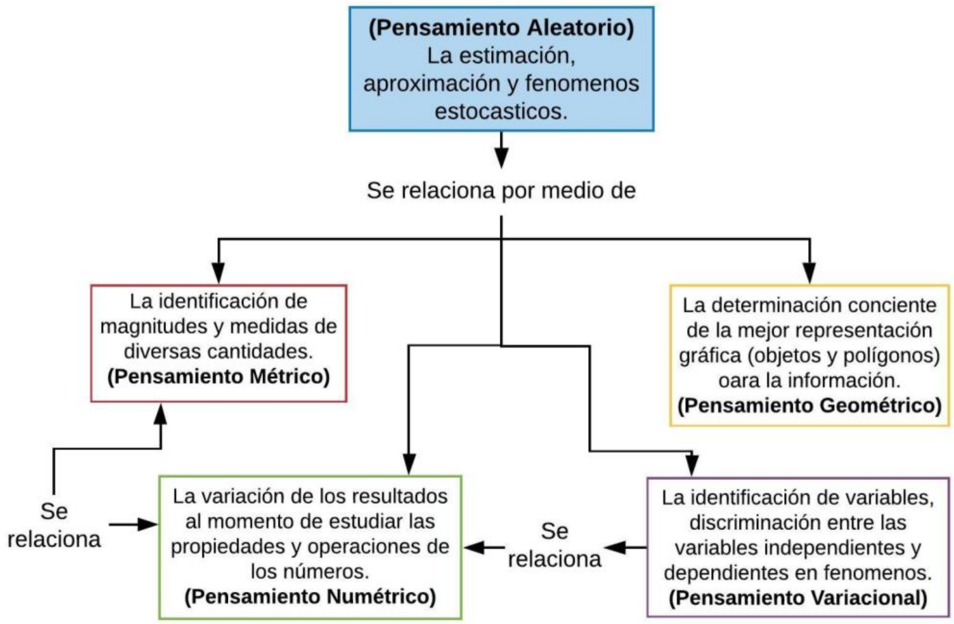


Diagrama 3. Pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio
Fuente. Propia

De igual manera, se estudia a Carranza y Guerrero (2016) quienes presentan una propuesta de integración del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio desde las directrices del MEN (1998 y 2006). Ésta logra establecer relaciones entre los conceptos y procesos propios de cada pensamiento y los procesos generales que permiten desarrollar el pensamiento matemático. Tal propuesta expone una malla curricular para cada grado de escolaridad con el fin de mostrar de forma práctica (desde el currículo) el desarrollo de cada pensamiento a partir del Pensamiento Aleatorio.

Para 6° grado Carranza y Guerrero (2016) presentan un diagrama (Imagen 10) de relaciones entre conceptos a partir del proceso de interpretar datos provenientes de diversas fuentes (R-Pa22) asociado al pensamiento aleatorio (Ca7: Representaciones de conjuntos de datos, Ca8: Medidas de tendencia central y Ca9: noción de Experimento aleatorio). Del pensamiento espacial asociado al pensamiento aleatorio surgen procesos como E-Pe25: Identificar figuras y cuerpos geométricos, R-Pe26: Describir figuras y cuerpos geométricos, R-Pe34: Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica, y conceptos como: Ce13: Objetos tridimensionales, Ce14: Cuerpos generados por cortes, Ce15: Polígonos, Ce16: Transformaciones rígidas y homotecias, Ce17: Semejanza y congruencia, Ce18: Modelos geométricos y Ce19: Gráfica cartesiana y geográfica. Del pensamiento numérico asociado al pensamiento aleatorio surgen conceptos y procesos como: Cn13: Medidas relativas, Cn14: Números racionales (fracciones, razones, decimales o porcentajes), Cn15: Relaciones entre números racionales, Cn16: Operaciones entre números racionales, Cn17: Propiedades básicas de la teoría de números, Cn18: Potenciación y radicación, Cn19: Proporcionalidad directa e inversa, R-Pn30: Reconocer propiedades de las relaciones entre números racionales, P-Pn32: Resolver problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números y P-Pn33: Formular problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números. Del pensamiento variacional los conceptos y procesos asociados al pensamiento aleatorio son: Cv8: Variación, Cv9: Representaciones, Cv10: Correlación positiva y negativo, Cv11: Variable, Cv12: Variación lineal, Cv13: Proporcionalidad directa e inversa, Cv15: Graficas cartesianas, Cv14: Ecuaciones, R-Pv20: Analizar las propiedades de correlación entre variables, R-Pv22: Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas y E-Pv18: Relacionar diferentes representaciones. Del pensamiento métrico asociado al pensamiento aleatorio lo conceptos y procesos que surgen son: Cm7: Figuras planas y cuerpos, Cm8: Escalas, Cm10: Composición y descomposición, Cm11: Magnitud, P-Pm25: Resolver problemas que requieren técnicas de estimación y P-Pm26: Formular problemas que requieren técnicas de estimación.

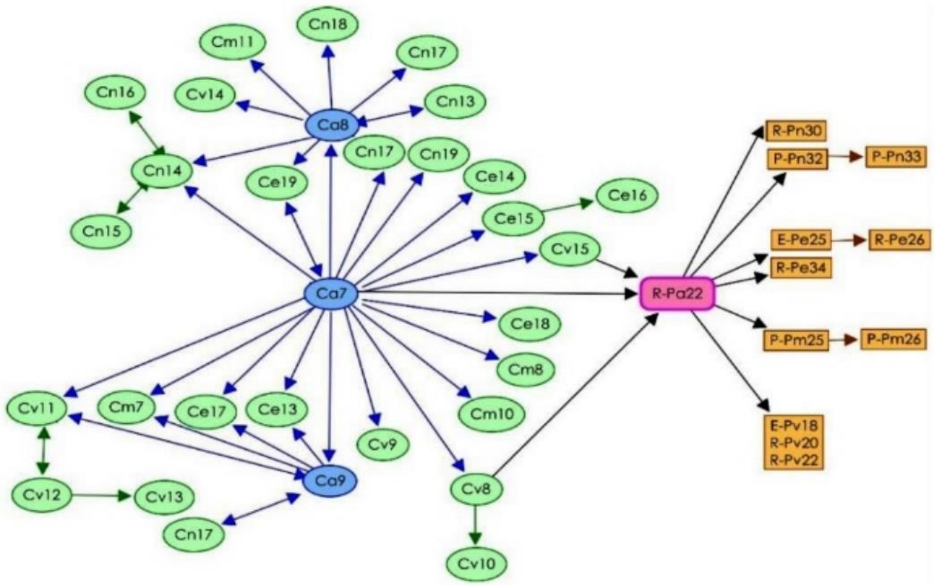


Imagen 10. Relaciones entre conceptos matemáticos propuestas para 6° grado
Fuente. Carranza y Guerrero (2016)

Debido a que las relaciones planteadas por Carranza y Guerrero (2016) son amplias y se enfocan en tres conceptos y un proceso general, se decide orientar la presente propuesta de enseñanza hacia experimentos aleatorios (Ca9) (Imagen 11), puesto que, éste comparado con los otros dos conceptos no ha sido enseñando en grados anteriores, permitiendo así construir habilidades, reforzar y complementar conceptos abordados de 1° a 5° grado según lo propuesto por MEN (2006). Adicional, Jiménez y Jiménez (2005) mencionan que las actividades para primaria deben comprender modelos de experimentos aleatorios, por tal motivo dicha afirmación da peso a la elección de la temática.

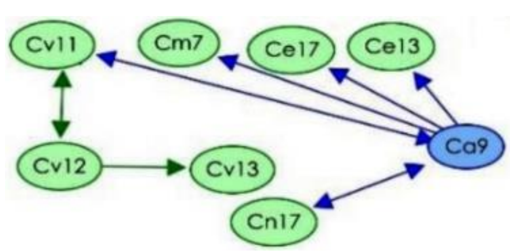


Imagen 11. Relación de conceptos asociados a Experimentos aleatorios (Ca9)
Fuente. Carranza y Guerrero (2016)

En la Tabla 5 se describen los elementos ilustrados en la Imagen 11, contenidos y procesos matemáticos que se abordan al momento de integrar los cinco pensamientos desde el concepto de experimentos aleatorios.

PENSAMIENTOS	CONTENIDOS	PROCESOS
El Pensamiento Aleatorio y sistemas de datos	• (Ca9) Experimento aleatorio	1. Interpretar datos provenientes de diversas fuentes
El Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos	• (Cn17) Propiedades básicas de la teoría de números	1. Reconocer propiedades de las relaciones entre números racionales. 2. Resolver problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números. 3. Formular problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números.
El Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	• (Ce13) Objetos tridimensionales • (Ce17) Semejanza y congruencia	1. Identificar figuras y cuerpos geométricos. 2. Describir figuras y cuerpos geométricos. 3. Identificar características de localización de objetos en sistema de representación cartesiana y geométrica.
El Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas	• (Cm7) Figuras planas y cuerpos geométricos	1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos. 2. Calcular áreas y volúmenes a partir de la composición y descomposición.
Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos	• (Cv11) Variable dependiente • (Cv12) Variación lineal • (Cv13) Proporcionalidad inversa y directa	1. Relacionar diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). 2. Analizar las propiedades de correlación entre variables (variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa) en contextos aritméticos y geométricos. 3. Identificar las características de diversas gráficas cartesianas.

Tabla 5. Contenidos y procesos matemáticos entorno a experimentos aleatorios
Fuente. Carranza y Guerrero (2016)

Teniendo en cuenta lo anterior se evidencia que, la integración del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio incita a darle mayor importancia a su implementación en las aulas de matemáticas, puesto que, a través de este, es viable la construcción de diversos conceptos y la verdadera integración del currículo de Matemáticas.

4.3. MARCO PEDAGÓGICO Y DIDÁCTICO

Este marco hace referencia a estrategias de enseñanza que proponen diferentes autores para abordar contenidos relacionados con el pensamiento matemático. También se tiene en cuenta la teoría sobre escenarios de aprendizaje, propuesta por Azcarate (2015), los cuales serán asumidos como metodología para el desarrollo de la propuesta de enseñanza en el aula.

4.3.1 Estrategias de enseñanza de las matemáticas.

A continuación, se describen las estrategias de enseñanza de los contenidos propuestos en la Tabla 6 desde el punto de vista de diferentes autores, quienes proponen recomendaciones, secuencias de clases y posibles materiales didácticos para su enseñanza de los conceptos matemáticos inherentes al trabajo que se expone en este documento.

4.3.1.1. Experimentos aleatorios

Batanero y Godino (2004) afirman que cuando se quiere construir el concepto de experimentos aleatorios, es fundamental que los estudiantes diferencien un experimento aleatorio de uno determinista, para luego estudiar sucesos que aparezcan con mayor y menor frecuencia. Teniendo esto claro, ellos proponen trabajar sucesos aleatorios, para lo cual se puede hacer uso de dados, ruletas, bolas, monedas, etc. Mediante el estudio de los sucesos aleatorios se puede tratar la estimación. Por ejemplo, se puede hacer uso de dados distinguibles de tal manera que el estudiante estime cuál será el próximo número que caerá al lanzar los dados. Adicional a esto, aseguran que es necesario que el docente gestione actividades de tal manera que los estudiantes puedan recoger datos, hacer la representación gráfica de los mismos y el análisis de estos, lo cual permite que los estudiantes comprendan el estudio sobre experimentos aleatorios.

Glayman y Vargas (1975) citados en Lombardo (2013), mencionan que:

> Para trabajar el carácter aleatorio (experimento aleatorio) de un fenómeno […] recomiendan la experimentación. Se busca familiarizar al niño con el mundo probabilístico y esto consiste en una amplia experimentación, manipulando material variado (dados, monedas, etc.). Cada experiencia se repite muchas veces en las mismas condiciones, y luego se les propone a los niños que traten de adivinar el [siguiente] resultado con el objeto de que capten las propiedades inherentes a los fenómenos aleatorios (p. 14).

Así, se busca que el estudiante estime los posibles valores que caerán, a partir de su propia experiencia. Dodino (2009) citado en Lombardo (2013) afirma que al momento de desarrollar un experimento aleatorio se debe tener en cuenta que un experimento tiene varias características, como lo son: se puede repetir de manera indefinida bajo las mismas condiciones controladas, obteniendo distintos resultados en cada una de las pruebas realizadas; el resultado de cada prueba pertenece a un espacio muestral; antes de realizar una prueba del experimento, no se puede predecir el posible resultado. Características bajo las que se deben plantear las actividades para los estudiantes.

Estos autores concuerdan en hacer uso de material didáctico para la enseñanza de experimentos aleatorios, este material puede ser, dados, monedas, fichas, bolas, ruletas y todo aquello que le permita al estudiante experimentar para luego analizar los datos recogidos mediante dicha experimentación.

4.3.1.2. Propiedades básicas de la teoría de números

La teoría de números inmiscuye procesos como el de reconocer propiedades de los números racionales, y resolver y formular problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números (*v.g.* propiedad asociativa, conmutativa, distributiva, etc.). Por ello, se describen algunas propuestas de enseñanza en relación con este objeto de estudio. Por ejemplo, Martínez (2014) citado en López, Rentería y Vergara (2016) presenta una investigación cuyo objetivo es la enseñanza de la división, donde los estudiantes, siguiendo una secuencia didáctica, abordan el concepto de división, soluciones de multiplicaciones y división sin resta. Esta investigación permitió evidenciar que los estudiantes tienen mayor dominio y compresión respecto al concepto de la división al hacer uso de material concreto o recursos digitales.

Autores como Tamayo y Ramírez (2009) exponen la importancia de la enseñanza de las propiedades y operaciones de los números racionales mediante el uso de juegos; ya que despiertan el interés y motivación de los estudiantes frente a la clase. Tamayo y Ramírez (2009) adaptaron dos juegos comúnmente conocidos, el dominó y el bingo, haciendo modificaciones a las reglas originales de tal forma que se pudiera jugar usando conceptos matemáticos como: números enteros, fracciones, decimales, raíces y potenciación; argumentando que este tipo de actividades no solo aportan en aspectos recreativos, sino que "también pueden constituir un desafío interesante tanto para una acción personal como para un trabajo en equipo" según lo afirma Cofre (2006), citado en Tamayo y Ramírez (2009, p. 4).

Así, para que los estudiantes desarrollen una mayor compresión de los conceptos matemáticos a tratar se recomienda usar recursos digitales o material didáctico (material concreto), como juegos tradicionales, que permitan generar una motivación, interés y dominio del tema.

4.3.1.3. Objetos tridimensionales, Semejanza y congruencia

La enseñanza respecto a objetos tridimensionales, a la semejanza y a la congruencia, inmiscuye procesos como el de identificar y describir figuras y cuerpos geométricos, e identificar características de localización de objetos en sistema de representación cartesiana. Por ello, a continuación, se describen algunas propuestas para su enseñanza.

Para la enseñanza de objetos tridimensionales, es importante el uso de materiales como el geoplano, el tangram, las TIC, figuras rígidas en 3D o el papel (origami) para usar la técnica de papiroflexia, ya que son herramientas pedagógicas que permiten desarrollar diversos contenidos, no sólo conceptuales sino procedimentales, ayuda a desarrollar la psicomotricidad, fundamentalmente la fina, así como la percepción espacial, la destreza manual y la exactitud en la realización del trabajo. Así, autores como Arias, Allan y Romero (2016) proponen actividades como la descrita en la Imagen 12.

Observo los cuerpos geométricos, **cuento** el número de caras, de vértices y de aristas, y **compruebo** los valores registrados. **Realizo** los cálculos y **verifico** los resultados.

Nombre	Tetraedro	Octaedro	Dodecaedro
Cuerpo			
Forma de las caras	Triángulos equiláteros	Triángulos equiláteros	Pentágonos regulares
N° de caras			
N° de vértices			
N° de aristas			
C + V = A + 2			

Imagen 12. Actividad para caracterizar objetos tridimensionales
Fuente. Arias, Allan y Romero (2016)

Este tipo de actividad permite trabajar el Teorema de Euler que establece una relación entre la cantidad de vértices, aristas y caras de los poliedros (C + V = A + 2): "En cualquier poliedro se cumple que la suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas más 2" (Godino & Ruiz, 2002, p. 484).

Por otra parte, Guillén (1997) expone que también es importante hablar sobre las características fundamentales de los objetos tridimensionales. De esta forma se pueden organizar y comparar los objetos tridimensionales conocidos, delimitando previamente observaciones o estableciendo criterios de comparación, por ejemplo: objetos cuyas caras sean todas iguales para hablar de congruencia, y objetos cuyas caras cumplan cierta proporcionalidad para hablar de semejanza.

En conclusión, los investigadores exponen la importancia de usar material concreto para la enseñanza de objetos tridimensionales, semejanza y congruencia, ya que con ello se logra potenciar la percepción espacial, la psicomotricidad y la precisión en el trabajo. Dicho material puede ser el tangram, geoplano y papel origami; es decir, material que permita al estudiante desarrollar la manipulación.

4.3.1.4. Figuras planas y cuerpos geométricos

Para la enseñanza de figuras planas y cuerpos geométricos se atienden procesos que tienen que ver con utilizar técnicas y herramientas para la construcción de tales objetos, y calcular áreas y volúmenes a partir de su composición y descomposición. Alsina, Burgués y Fortuny (1991) afirman que para enseñar de manera óptima lo relacionado con figuras planas es esencial el material concreto, ya que:

> El material está enmarcado en un diseño pedagógico que centra el aprendizaje de un concepto en el paso de lo concreto a lo abstracto. Dicho diseño se desarrolla en tres etapas: etapa de material o manipulativa, etapa gráfica o representativa y etapa formal o deductiva (p. 58).

Estos autores también afirman que el material didáctico óptimo para desarrollar los contenidos de figuras planas y cuerpos geométricos son el geoplano (triangulares, triangulares o cuadrados), las poliformas, el tangram, los ángulos fijos y papel origami, ya que el material se convierte "en un instrumento de construcción descriptiva (construcción manipulativa, gráfica y formal) de un concepto o relación" (p. 58). Alsina, Burgués y Fortuny proponen actividades como: con ayuda del geoplano rectangular, construir todos los posibles polígonos, clasificarlos según el número de lados, tipos de ángulos, paralelismo de los lados, número de diagonales e identificar si son polígonos cóncavos o convexos. Así, se enfatiza en hacer uso de material didáctico, de tal forma que a través de este los estudiantes puedan identificar características propias de las figuras para poder clasificarlas y estudiarlas de una manera formal, permitiendo que se dé el paso de lo concreto a lo gráfico y luego a lo abstracto.

4.3.1.5. Variable dependiente, Variación lineal y Proporcionalidad inversa y directa

Respecto a lo que refiere a la variable dependiente, se tiene que para Usiskin (1988), Bell (1996) y Ursini (1996) citados en Ursini, Trigueros y Lozano (2000), el concepto de variable adopta distintos aspectos según el ámbito en el que se utilice. El primer aspecto que puede tomar es como incógnita, lo cual implica reconocer en un problema matemático la existencia de algo desconocido para poder determinar una ecuación con una incógnita la cual se puede sustituir con valores que hagan cumplir la igualdad. El siguiente aspecto refiere a la variable como número generalizado, es decir, interpretar la variable como un ente que puede tomar cualquier valor, por tanto, este se puede operar de manera algebraica simplificar o desarrollar expresiones algebraicas. El último aspecto refiere a la variable en una relación funcional lo cual implica reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones; es decir expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica o analítica, a partir de los datos de un problema dado (p. 28).

Para la enseñanza de la variable en la idea de relación funcional, Guevara (2011) indica que se puede trabajar a partir de ejemplos de la vida cotidiana, o cercanos a la realidad, de manera que el estudiante pueda simularlos y modelarlos. Uno de los ejemplos que propone es:

> Se observa que cuando a un resorte que cuelga libremente se le agrega peso gradualmente en la parte inferior, éste va experimentando una elongación cada vez más grande, entonces se puede representar este fenómeno físico mediante una función que describa el comportamiento del resorte a medida que se le adiciona peso, es decir, establecer la relación entre la fuerza aplicada al resorte y la elongación sufrida por el resorte (p. 16).

A partir de este ejemplo, se le pide al estudiante que exprese verbalmente la función que permite relacionar las cantidades presentes en el problema para que luego haga distinción de los tipos de variables: dependiente e independiente, de tal manera que pueda expresar de forma algebraica la situación, para luego modelarla matemáticamente.

Valencia (2015) menciona las diferentes dificultades de aprendizaje que los estudiantes presentan al momento de abordar el concepto de variable (en el campo del Pensamiento Variacional), como por ejemplo el paso del lenguaje natural al algebraico, la comprensión del concepto de variable en la resolución de problemas, las diferentes interpretaciones de la variable, la comprensión y comunicación del lenguaje simbólico, y la transición de la aritmética al álgebra. Teniendo en cuenta dichas dificultades, la propuesta de enseñanza de Valencia (2015) parte del concepto variable con el fin que los estudiantes comprendan los diferentes usos que la variable adopta en un problema; contemplando que la enseñanza del algebra debe empezar por el uso del lenguaje natural para dar paso al lenguaje algebraico, comprendiendo el significado de los símbolos; es decir:

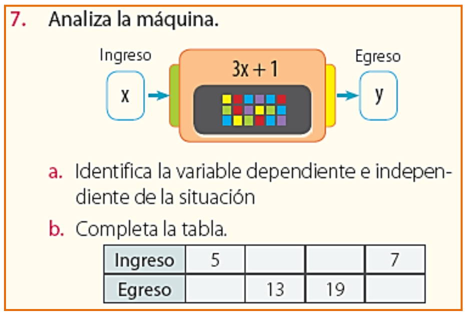
> Que no se dé solo la sustitución de números por letras, sino que se dé el paso de números a variables, además del uso de herramientas que contribuyan a la comprensión de la variable tales como, tablas, gráficas cartesianas y situaciones problemáticas referidas a fenómenos de variación de la vida práctica que permitan la construcción de […] expresiones algebraicas. (Valencia, 2015, p. 10)

Al hablar de variable dependiente en una expresión algebraica, Dirichlet (1837) citado por Hernández (2014), menciona que:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla

según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que, *y* es una función de la variable independiente (p. 7).

Adicional a esto, Merino, Muñoz, Pérez y Rupin (2016) expresan que, al abordar la variación dependiente, lo ideal es explorar diferentes representaciones como tablas, formulas y gráficas. Un ejemplo de ello se describe en la Imagen 13.


7. Analiza la máquina.

a. Identifica la variable dependiente e independiente de la situación

b. Completa la tabla.

Ingreso	5			7
Egreso		13	19	

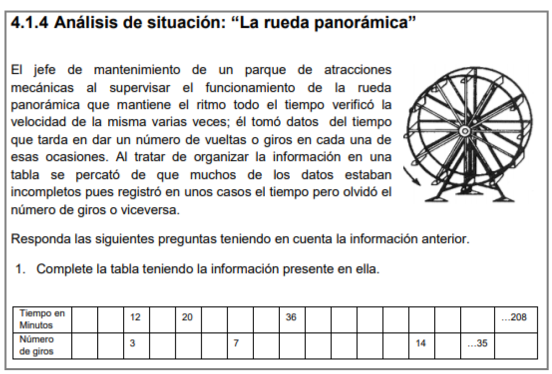
Imagen 13. Actividad que desarrolla el concepto de variable dependiente
Fuente. Merino, Muñoz, Pérez y Rupin (2016)

En esta actividad, los estudiantes deben identificar las variables propuestas por la máquina y completar la tabla que contiene el ingreso (variable independiente) y el egreso (variable dependiente). Se pueden realizar preguntas como: ¿Qué transformación hace la máquina?, ¿Se puede ingresar cualquier número?, con el fin de que los estudiantes reconozcan y empleen diferentes representaciones para la variable dependiente e independiente, como la tabular y la algebraica, ya que estas están relacionadas entre sí.

Por tanto, es importante identificar qué tipo de variable y que concepción de esta se quiere abordar para escoger el material didáctico que permita a los estudiantes experimentar, luego realizar un análisis de los datos que se tienen y modelar matemáticamente la situación. Este estudio se pude realizar a partir de situaciones cercanas a los estudiantes como, por ejemplo, la cantidad de dinero que un estudiante gasta al comprar dulces en la cafetería del colegio, situación en la que la variable independiente es el número de dulces comprados y la variable dependiente es la cantidad de dinero que el estudiante gasta según la cantidad de dulces.

Por otra parte, la enseñanza de la variación lineal involucra conceptos como función y ecuación lineal, los cuales están implícitos en diferentes contextos de la vida cotidiana. Guzmán (2012) asegura que el concepto de variable no tiene mayor sentido si no se comprende que ésta es una cantidad que puede ser medible, la cual va a cambiar a medida que los fenómenos cambian. El asegura que lo fundamental es analizar la relación entre las dos variables x e y, ya que mediante esto se puede comprender qué tipo de relación existe en la ecuación lineal, si es directa o inversa. De la misma manera se pueden establecer relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Al entender el tipo de relación que existe se logra comprender la variación lineal.

Roldán (2013) expresa que al abordar la variación lineal es posible explorar diferentes representaciones como tablas, gráficas y formulas. Para ello plantea tres tipos de actividades, en la primera involucra contextos cotidianos o culturalmente conocidos, con los cuales se pueden analizar elementos conceptuales de la función lineal, un ejemplo de ello se expone en la Imagen 14.



4.1.4 Análisis de situación: "La rueda panorámica"

El jefe de mantenimiento de un parque de atracciones mecánicas al supervisar el funcionamiento de la rueda panorámica que mantiene el ritmo todo el tiempo verificó la velocidad de la misma varias veces; él tomó datos del tiempo que tarda en dar un número de vueltas o giros en cada una de esas ocasiones. Al tratar de organizar la información en una tabla se percató de que muchos de los datos estaban incompletos pues registró en unos casos el tiempo pero olvidó el número de giros o viceversa.

Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información anterior.

1. Complete la tabla teniendo la información presente en ella.

Tiempo en Minutos			12		20				36								...208
Número de giros			3				7							14		...35	

Imagen 14. Actividad sobre función lineal en contextos cotidianos
Fuente. Roldán (2013)

Esta actividad permite realizar diferentes preguntas como: ¿Cuántas vueltas da la rueda en 36 minutos? o ¿Cuántos minutos se demora en dar 14 vueltas? Esto con el fin de que los estudiantes empleen una ecuación que les permita relacionar el número de giros con el tiempo que tarda la rueda en dar las vueltas, para luego pedir a los estudiantes que representen dicha relación gráficamente.

El segundo tipo de actividad que se propone es referente a conceptos matemáticos, por ejemplo, se presentan diferentes tipos de graficas matemáticas en la cual los estudiantes deben discriminar cuál de estas representa una función. En la Imagen 15 se evidencia la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ y la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ lo cual refiere a un ejemplo de las gráficas matemáticas que se pueden presentar a los estudiantes; por consiguiente, a partir del conocimiento matemático previo de los estudiantes, como el hecho de que para que sea función uno de los requisitos es que a cada valor de x le corresponde un único valor en y.

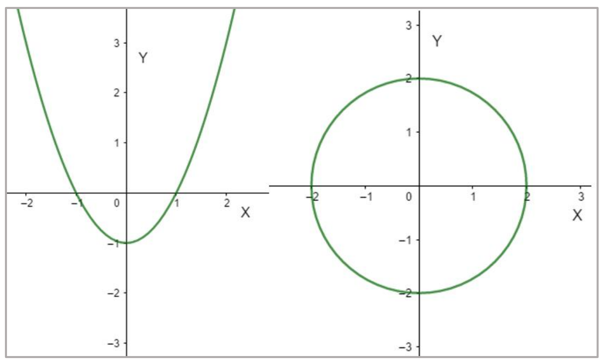


Imagen 15. Ejemplo de gráficas matemáticas
Fuente. Propia

En el tercer tipo de actividad, Roldán propone actividades de experimentación con materiales fáciles de conseguir (velas, agua, termómetro, cronometro, un recipiente, papel para registrar la información y papel para realizar las gráficas), para analizar la temperatura del agua. Este tipo de actividades de experimentación cuenta con cinco fases. La primera refiere a la compresión general de la situación en la cual se pueden realizar conjeturas; la segunda fase consiste en la práctica experimental, la tercera refiere al análisis de la práctica, la cuarta a elaborar un modelo y, por último, la quinta fase se encarga en verificar el modelo. Roldán (2013) asegura que al plantar este tipo de actividades los estudiantes pueden modelar matemáticamente situaciones de la función lineal, lo cual les permite comprender los conceptos matemáticos que subyace del estudio de esta.

Al modelar matemáticamente situaciones planteadas de la vida cotidiana se reconoce la importancia que tiene las matemáticas en la realidad. Los estudiantes pueden identificar las características que tiene la variación lineal (la relación entre variables y la constante de variación), y comprender en dichas situaciones el aspecto que la variable toma en el problema para establecer el tipo de relación en la función, si es de proporcionalidad directa o inversa.

Al hablar de proporcionalidad, ya sea inversa o directa, autores como Godino y Batanero (2003) afirman que para que los estudiantes puedan desarrollar el concepto de proporcionalidad, deben comprender la noción de razón, ésta entendida como el cociente de la división del primero número (dividendo) por el segundo número (divisor). Por ejemplo, la razón de 30 a 6 es $30/6 = 5$, y de igual forma la razón de 15 a 45 es $15/45 = 1/3$. Los números que se comparan se llaman términos de la razón o magnitudes.

Por otra parte, Mochón (2012) afirma que para la construcción de la noción de proporcionalidad es necesario:

> Hacer un primer acercamiento intuitivo […] introduciendo ideas llamadas “pre-proporcionales”, es decir, el uso de factores multiplicativos y tablas numéricas. Este enfoque, basado en las propiedades fundamentales de la proporcionalidad, apoyaría al niño a ir desarrollando sus concepciones sobre este contenido. Una vez que se ha cubierto esta primera etapa […] se puede ir pasando por acercamientos paulatinamente más complejos hasta llegar al acercamiento proporcional que implica ya una igualdad de razones entre los cuatro valores involucrados (p.142).

Van de Walle (2001) citado en Godino y Batanero (2003), proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los estudiantes en el desarrollo del razonamiento proporcional:

- Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.
- Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones.
- Procurar que los estudiantes distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad) de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.
- Ayudar a los estudiantes a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos. El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones es una de las técnicas más apropiadas.
- Hay que reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente (p. 434).

En el momento en que los estudiantes lleguen a las nociones de proporcionalidad por medio de las orientaciones descritas anteriormente, se tiene la capacidad de trabajar con magnitudes directa o indirectamente proporcionales.

Se evidencia que la enseñanza de la variable dependiente y la variación lineal permite abordar conceptos como ecuaciones y funciones lineales, las cuales se pueden reflejar en contextos de la vida cotidiana. Por lo tanto, se considera necesario proponer actividades en contextos cercanos a los estudiantes de tal manera que estas permitan reconocer el aspecto que la variable toma en cada ecuación o función, lo cual se logra a partir de actividades que desarrollen el concepto de proporcionalidad desde sus propiedades.

En general, estas estrategias didácticas logran evidenciar las características que se deben tener presentes al momento de la enseñanza de cada uno de los contenidos mencionados en la Tabla 5. Algo en común para cada uno de los contenidos que se quieren desarrollar, es la importancia que tiene el uso del material didáctico y los contextos de la vida cotidiana de los estudiantes, dentro de las situaciones problemas bajo las cuales se han de abordar los conceptos y procesos.

4.3.2. Escenarios de aprendizaje

Según Skovsmose (2000) la matemática refiere poder interpretar y actuar en un contexto el cual ha sido estructurado con relación a la matemática. Por consiguiente, es fundamental que en las prácticas educativas se generen ambientes de investigación en los cuales los estudiantes no estén trabajando solo algoritmos, sino en donde se promueva la educación matemática crítica. Por ello, dado que la presente propuesta de enseñanza se enfoca en fomentar el pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, es conveniente plantear ambientes de aprendizaje que favorezcan el desarrollo y la comprensión de los conceptos matemáticos desde asuntos de la Estadística. Frente a esto se asume la propuesta de Azcarate (2015) sobre escenarios de aprendizaje. A través de estos, el docente propone problemas en situaciones cotidianas y cercanas a los estudiantes, para que ellos trabajen con datos reales e información del contexto, lo cual permite llevar a cabo las cuatro etapas del proceso de resolución de problemas en Estadística (planteamiento del problema, recogida, análisis e interpretación de los datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado). De esta manera se promueve en los estudiantes el análisis crítico con base en datos, de la información que se presenta en su vida cotidiana.

Azcarate (2015) afirma que en los escenarios de aprendizaje el docente decide cuál escenario es apropiado para llevar al aula, luego representa los casos didácticamente con un guion para así orientar a los estudiantes de forma correcta hacia las decisiones a tomar y los debates a realizar (p. 70). El docente debe dar a conocer los elementos que hacen parte del escenario de aprendizaje (situación o problema, descripción del problema, especificaciones de las actividades, listado de los participantes, roles de cada uno y la forma de evaluación). Cabe aclarar que los escenarios no están organizados bajo un criterio disciplinar, sino que se organizan según situaciones, problemas o actividades vinculadas a problemas que ha de ser de interés para los estudiantes y en lo posible relacionados con su vida cotidiana.

Para Azcarate el hecho de trabajar bajo escenarios de aprendizaje es todo un reto para los docentes ya que se debe analizar y responder a varios aspectos (Tabla 6) antes de llevar el escenario al aula, esto con el fin de orientar las intervenciones de los estudiantes.

EN RELACIÓN CON EL CONTENIDO	EN RELACIÓN CON LOS ESTUDIANTES	EN RELACIÓN CON LA PROPUESTA
• ¿Qué conocimientos están implicados? • ¿Cómo se han organizado y presentado? • ¿Qué relaciones hay entre ellos? • ¿Qué fuentes de información se han utilizado para su selección? • ¿Cuáles han sido los criterios de selección? • ¿Con qué grado de profundidad y extensión se han formulado? • ¿Qué otras situaciones del entorno del alumno están relacionadas con estos conocimientos?	• ¿Qué dificultades puede tener el estudiante al momento de realizar las actividades propuestas? • ¿Cómo saber lo que los estudiantes saben sobre los contenidos de matemáticas? • ¿Cómo y cuándo detectar las ideas de partida de los estudiantes? y ¿Cómo pueden ser utilizadas en el aula?	• ¿Qué tipos de tareas y actividades se han propuesto? • ¿Cuál es el eje que orienta la propuesta? • ¿Qué momentos tiene la propuesta? • ¿Qué tipos de tareas se le asigna al estudiante? • ¿Qué recursos se proponen usar en su implementación? • ¿Cómo puede organizar el tiempo y el espacio? • ¿Qué criterios utiliza para evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje?

Tabla 6. Preguntas que orienta el diseño de escenarios de aprendizaje
Fuente. Propia inspirada en Azcarate (2015)

Azcarate (2015) describe cuatro fases para desarrollar un estudio estadístico: i) Planteamiento de problema: el docente debe plantear un problema en un contexto cercano a los estudiantes, formulando una o más preguntas que se puedan resolver a partir de la obtención de datos. ii) Obtención de datos: la cual se divide en dos etapas, en la primera se debe diseñar un plan para recoger los datos y en la segunda se gestiona dicho plan; iii) Análisis de datos: consiste en seleccionar y utilizar los métodos numéricos y gráficos para representar los datos; iv) Interpretar los resultados: lo cual consiste en ver qué información se ha obtenido y relacionarla con el problema inicial para formular posibles soluciones.

Este marco de referencia permite reconocer acciones para tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas, lo cual se centra en tres focos. El primero señala al pensamiento matemático el cual es la unión de cinco pensamientos: el Numérico, el Métrico, el Espacial, el Variacional; y el Aleatorio el cual ayuda a la toma de decisiones frente a diferentes situaciones. El segundo foco refiere al pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, así los contenidos que en este trabajo de grado se quieren integrar son: experimento aleatorio, propiedades básicas de la teoría de números, objetos tridimensionales, semejanza y congruencia, figuras planas y cuerpos geométricos, variable dependiente, variación lineal y proporcionalidad inversa y directa. El tercer foco plantea estrategias pedagógicas y didácticas para tener en cuenta al momento de la enseñanza de cada uno de los contenidos mencionados, resaltando la importancia del uso del material didáctico, los contextos cercanos a los estudiantes y promover una educación matemática critica a partir de ambientes de aprendizaje en los cuales se pueda seguir una secuencia didáctica, de tal manera que los estudiantes puedan vincular lo aprendido con lo próximo que aprenderán y con su vida cotidiana.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo describe los aspectos metodológicos para el diseño de la propuesta de enseñanza, y se describen las consideraciones éticas que conlleva un trabajo de este tipo y que son asumidas por las autoras para el desarrollo de este.

5.1. FASES PARA EL DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Para el diseño de la propuesta de enseñanza se desarrollan cuatro fases: Fase 1. Directrices pedagógicas y didácticas; Fase 2. Diseño de la propuesta; Fase 3. Valoración de la propuesta; y Fase 4. Ajuste de la propuesta, descritas cada una de estas en la Tabla 7.

FASES	DESCRIPCIÓN
Fase 1. Directrices pedagógicas y didácticas	Hace referencia al análisis y presentación de las consideraciones pedagógicas y didácticas para la enseñanza de los contenidos matemáticos seleccionados. Se busca identificar las recomendaciones de enseñanza para cada uno de los pensamientos que componen el pensamiento matemático, teniendo en cuenta la población a la que va dirigida la propuesta, el marco de referencia expuesto y los objetos de estudio escogidos.
Fase 2. Diseño de la propuesta	Detalla al diseño de la propuesta. Tiene en cuenta las directrices pedagógicas y didácticas expuestas en la Fase 1 y las relaciones planteadas por Carranza y Guerrero (2016) para integrar el contenido de experimentos aleatorios con otros contenidos del pensamiento matemático. Describe cuatro módulos dirigidos a docentes del área de matemáticas. Dichos módulos se consolidan en una cartilla denomina ‘Pensamiento Matemático 6° grado, una propuesta desde el Pensamiento Aleatorio’.
Fase 3. Valoración de la propuesta	Señala cómo se va a evaluar la propuesta. Dicha valoración se gestiona desde dos miradas. La primera, por medio de una entrevista semiestructurada dirigida a estudiantes de 6° grado con el fin de saber si la descripción e instrucciones presentadas en las actividades son claras y entendibles. La segunda mirada se obtiene por medio de un cuestionario valorativo, diligenciado por docentes de matemáticas los cuales podrán dar su opinión sobre la precisión y viabilidad de la propuesta, reconociendo las fortalezas y debilidades que la misma puede llegar a tener.
Fase 4. Análisis y ajuste a la propuesta	Presentación final de la propuesta de enseñanza luego de realizar modificaciones teniendo en cuenta las valoraciones dadas por estudiantes y docentes a partir de las sugerencias y observaciones hechas.

Tabla 7. Descripción de las fases de la propuesta
Fuente. Propia

En el Diagrama 4 se muestra el paso a paso de cómo se desarrolla la presente propuesta.

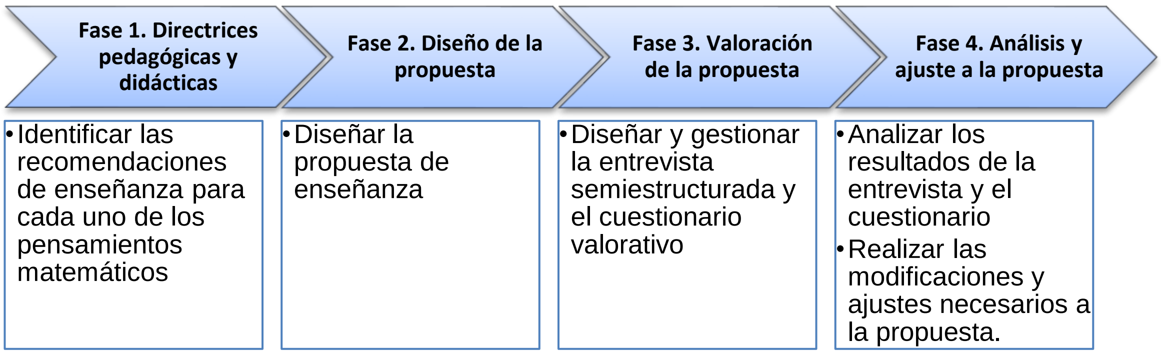


Diagrama 4. Fases del diseño de la propuesta de enseñanza
Fuente. Propia

5.2. CONSIDERACIONES ÉTICAS

Para gestionar la Fase 3 en este apartado se describen las consideraciones éticas que las autoras asumen con los estudiantes y docentes de que participan en la valoración de la propuesta. Estas consideraciones son (i) consentimiento informado, (ii) respeto hacia los participantes, (iii) manejo de la información, (iv) posibles riesgos y beneficios que tiene este trabajo de grado, y (v) autonomía de los participantes.

El consentimiento informado, según Gallagher (2009), citado en Graham, Powell, Taylor, Anderson y Fitzgerald, (2013) implica un acto explícito ya sea de manera escrita o verbal el cual solamente puede ser entregado a los participantes que han sido informados sobre el estudio. Este consentimiento debe darse de manera voluntaria, sin coacción. Por ello se hará entrega de un formato a los acudientes de los estudiantes de 6°grado (Anexo A) ya que son ellos los que velan por la integridad del adolescente, y otro formato a los docentes del área de matemáticas (Anexo B). Dichos formatos consta de tres secciones, (i) información pertinente sobre la propuesta, en la cual se presenta la descripción de la investigación, las acciones que debe realizar como experto o como estudiante, los posibles riesgos y beneficios que como estudiante tiene al participar de la investigación y los datos generales de las autoras, (ii) manejo de los datos, en esta se explica el manejo de los datos dados tanto por estudiantes y expertos como por las autoras, (iii) consentimiento informado en el cual el experto o acudiente del estudiante declara que autoriza su participación para el estudio.

Respecto al manejo de la información brindada tanto desde las autoras de este trabajo hacia los estudiantes de 6° grado o expertos, como de los partícipes de la valoración de la propuesta hacía las autoras, se tendrán en cuenta lo expuesto en las Tablas 8 y 9.

CONSIDERACIONES PARA LA PARTICIPACIÓN EN LA INVESTIGACIÓN
• A los acudientes de los estudiantes y a los expertos se les debe dar suficiente información en los formatos de consentimiento para tomar una decisión informada sobre su disposición para participar o no en la valoración de la propuesta • Los participantes deben conocer el carácter voluntario de la participación y el objetivo de la valoración de la cartilla, mencionando la importancia que tiene tal proceso. • Los estudiantes deben conocer los posibles riesgos de la participación en la valoración de la propuesta, estos son: influenciar en el conocimiento respecto a las temáticas desarrolladas en la cartilla, generar la idea o impresión de que la valoración es un juzgamiento respecto a la clase de matemáticas, pensar que se deben desarrollar las actividades y evaluaciones que van a ser valoradas, y finalmente la vulnerabilidad anímica de los participantes respecto a sus conocimientos de las temáticas expuestas en la cartilla. • Los partícipes deben conocer el beneficio que tienen al participar de la valoración de la propuesta, el cual es: ayudar en el mejoramiento del diseño de la cartilla y la construcción de una propuesta de enseñanza la cual articula de forma explícita el pensamiento matemático en el aula regular de matemáticas, y ayudar en el mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje de estudiantes de 6° grado. • Los participantes deben conocer que toda la información suministrada por ellos recibirá un trato justo y cuidadoso para que no sufran algún daño o puedan sentirse incomodos antes, durante y después de la participación. De igual manera se garantiza el respeto a la protección de la identidad de los participantes. • En cuanto al trato justo y cuidadoso se garantiza que toda la información suministrada en la valoración de la propuesta y en los consentimientos, será manipulada de manera prudente y cautelosa, únicamente por las autoras de este trabajo. Igualmente se garantiza que, al momento de hacer alguna publicación referente a las conclusiones de la valoración, no se expondrán los nombres de los estudiantes ni de los docentes. • Los expertos deben conocer los posibles riesgos que se asumen al ser partícipes de la valoración. Estos son: sentir que se está evaluando su forma de enseñanza y su labor docente; pensar que la estructura de cartilla es la única forma valida en que se puede articular el pensamiento matemático en el aula; y creer que la forma que enseñanza la matemática en el aula ha sido errónea, por el modelo propuesto en la cartilla.

Tabla 8. Consideraciones para la participación en la investigación
Fuente. Propia

MANEJO DE LA INFORMACIÓN EN LA INVESTIGACIÓN
• La información será tratada de manera confidencial y privada de tal manera que esta no sea divulgada con sus pares. • Los participantes del estudio (estudiantes y expertos) no deben copiar o reproducir la cartilla de ninguna manera (fotos, fotocopias, etc.). • Los expertos no deben desarrollar la cartilla en sus clases hasta no tener la versión final de la misma.

Tabla 9. Manejo de la información en la investigación
Fuente: Propia

Respecto a la autonomía, siguiendo a Dos Santos (2017) la autonomía se relaciona con la capacidad de tener libertad de elección y decisión por sí mismos. Por consiguiente, las autoras esperan que los estudiantes y expertos, al momento de la valoración de la propuesta, procedan de manera objetiva teniendo en cuenta sus principios, valores, percepciones y creencias.

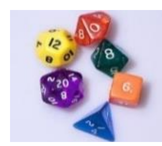
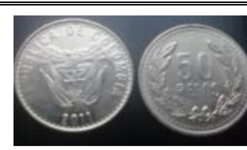
Finalmente, referente al respeto, según Belmont (1979), citado en Sierra, Gutiérrez y Tapia, (2018) éste se enfoca en dos caminos éticos: (i) personas autónomas, es decir los estudiantes y expertos deben ser tratados como personas autónomas y (ii) protección, refiere a que en todo momento los estudiante y expertos tienen derecho a ser protegidos. Por consiguiente, las autoras aseguran la protección de la identidad y de la información suministrada por parte de los participantes.

6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Se presenta el desarrollo de las cuatro fases descritas en los aspectos metodológicos directrices, diseño, valoración y ajustar.

6.1. FASE 1. DIRECTRICES PEDAGÓGICAS Y DIDÁCTICAS

A partir de las estrategias de enseñanza mencionadas en el marco de referencia, surgen recomendaciones respecto al material didáctico que se debe usar al momento de abordar los contenidos seleccionados. Los materiales asumidos para esta propuesta se mencionan en la Tabla 10.

MATERIAL DIDÁCTICO	
CONTENIDO MATEMÁTICO: Experimentos aleatorios y cuerpos geométricos	
MATERIAL DIDÁCTICO	**DESCRIPCIÓN**
Dados poliédricos	Objeto de forma poliédrica que por lo general está hecho de plástico, el cual al ser lanzado muestra un resultado cuando cae en una superficie plana. En la Imagen 16 se muestra cada uno de los dados mencionados a continuación. • Dado de cuatro caras (tetraedro regular) • Dado de seis caras (hexaedro regular) • Dado de ocho caras (octaedro regular) • Dado de diez caras (Trapezoedro pentagonal) • Dado de doce caras (dodecaedro regular) • Dado de veinte caras (icosaedro regular)  *Imagen 16. Dados poliédricos. Fuente. Dados de rol (s.f).*
Monedas	Cilindro el cual cuenta con dos caras: el valor de la moneda y un símbolo representativo del país al que pertenece. En la Imagen 17 se presenta una moneda colombiana.  *Imagen 17. Moneda de 50 pesos colombiana Fuente. Propia*
CONTENIDO MATEMÁTICO: Propiedades básicas de los números racionales	
Juegos tradicionales	Los juegos tradicionales dan la posibilidad de modificar sus reglas y estructura, de tal manera que se pueden adaptar a la enseñanza de algún tema. Para esta propuesta se hace uso del juego 'Guayabita', para lo cual se debe tener como mínimo dos y máximo seis participantes, además de un dado no cargado de seis caras (cúbico). Los participantes, previamente, deben acordar lo que apostaran y

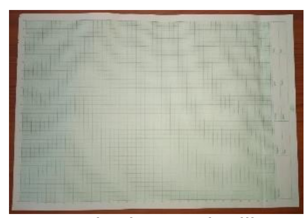
	el valor mínimo de la apuesta (puede ser dinero, dulces, dinero didáctico, etc). Para poder participar en una partida, cada uno de los jugadores deberá realizar un aporte a la mesa con el valor mínimo acordado. Para conocer el participante que dará apertura al juego (Imagen 18), cada uno realizará un lanzamiento del dado y el que obtenga el mayor número iniciará el juego. El siguiente participante que continúa es el que se ubique a mano derecha y así sucesivamente. Cada jugador tiene derecho a dos lanzamientos del dado, con las siguientes excepciones: 1. Si el participante obtiene un uno deberá colocar en la mesa de juego una nueva apuesta según el valor mínimo acordado y no tendrá derecho a un segundo lanzamiento. 2. Si el participante obtiene un seis deberá recoger el valor mínimo acordado al inicio del juego y no tendrá derecho a un segundo lanzamiento. Si el lanzamiento es diferente de uno o seis el participante deberá: • Anunciar una nueva apuesta menor al valor que hay en la mesa de juego, seguido a esto hace su segundo lanzamiento. • Si obtiene un número igual o menor que el del primer lanzamiento, el participante deberá colocar en la mesa el valor que anunció, de lo contrario el jugador recogerá de la mesa el valor de la apuesta anunciada y dará continuidad al siguiente participante. • El juego finalizará cuando la mesa de apuesta quede vacía.  *Imagen 18. Juego Guayabita* *Fuente. Propia*
CONTENIDOS MATEMÁTICOS: Variable dependiente; Variación lineal; Proporcionalidad inversa y directa	
Papel milimetrado	Es papel (Imagen 19) impreso, usualmente de color verde, con finas líneas entrecruzadas, separadas según una distancia determinada, por lo general de un milímetro. Para esta propuesta se hace uso de cuadriculas las cuales hacen las veces del papel milimetrado.  *Imagen 19. Hoja de papel milimetrado* *Fuente. Propia*

Tabla 10. Material didáctico recomendado
Fuente. Propia

Se tienen en cuenta recomendaciones didácticas que diferentes autores sugieren para la enseñanza del contenido matemático seleccionado (Tabla 11).

RECOMENDACIÓN	DESCRIPCIÓN
Recoger datos	Proponer actividades en las cuales los estudiantes tengan la necesidad de recoger datos para dar solución a diferentes problemas.

Diferenciar entre experimentos aleatorios y deterministas	Diferencia fundamental para que se puedan estudiar sucesos aleatorios, analizando la frecuencia con la que aparecen los resultados en el experimento aleatorio con el fin de que los estudiantes puedan proponer estimaciones de los próximos resultados del experimento.
Experimentar	Repetir varias veces, bajo las mismas condiciones, cada experimento aleatorio para lograr que los estudiantes traten de predecir el próximo resultado.
Usar material didáctico	Diseñar actividades en las cuales los estudiantes hagan uso de material concreto, ya que esto genera una mayor motivación.
Desarrollar habilidades cognitivas	Generar actividades mediante las cuales los alumnos no solo desarrollen conceptos, sino que también les permita desarrollar habilidades como la motricidad fina, la percepción espacial y la destreza manual.
Caracterizar los objetos tridimensionales	Abordar las características fundamentales de los objetos geométricos tridimensionales, de tal manera que puedan hacer comparaciones con objetos de la vida cotidiana.
Pasar de lo concreto a lo abstracto	Guiar al estudiante para pasar de lo concreto a lo abstracto, pasando por las etapas: manipulativa, de construcción gráfica y de construcción formal.
Elegir adecuadamente el material didáctico	Usar material didáctico para planear actividades que permitan a los estudiantes identificar las características de las figuras planas para que puedan ser estudiadas de manera formal.
Utilizar situaciones en contextos cercanos a los estudiantes	Proponer ejemplos y situaciones de la vida cotidiana o cercanos a la realidad de los estudiantes.
Emplear lenguaje algebraico	La enseñanza del álgebra debe empezar por el uso de un lenguaje natural para luego dar paso a un lenguaje algebraico.

Tabla 11. Recomendaciones didácticas para la enseñanza
Fuente. Propia

Además, se tiene en cuenta la metodología para el aula, denominada de Escenarios de Aprendizaje. Por lo que es necesario atender a las recomendaciones (Tabla 12) que dicha metodología sugiere.

RECOMENDACIONES PARA ANTES DE LA CLASE	
RECOMENDACIONES	**DESCRIPCIÓN**
Definir el escenario	El docente decide cuál escenario es apropiado para llevar al aula. Propone y presenta actividades o problemas cercanos a los estudiantes, lo cuales permitan desarrollar los contenidos matemáticos que se proponen en el escenario.
Diseñar la propuesta de enseñanza	El docente debe tener en cuenta que la propuesta de enseñanza es un proceso de creación y elaboración por medio del cual se ha de dar respuesta a los aspectos que menciona la Comisión Nacional de Actividades Espaciales [CONAE] (s.f): primero se seleccionan los

	contenidos que se quieren abordar, segundo se elabora los propósitos de enseñanza, a partir de estos convienen buscar y seleccionar los materiales y recursos adecuados que permitan el desarrollo de los contenidos, luego se diseña las actividades y evaluaciones mediante las cuales se desarrollarán y evaluarán los contenidos seleccionados, y finalmente se estipula el tiempo estimado para el desarrollo de las actividades y evaluaciones propuestas. Todos estos aspectos giran en torno al escenario de aprendizaje escogido por el docente.
Diseñar un guion	El docente ha de diseñar un guion de clase, en el cual se definen los siguientes elementos: la situación problema que se va a tratar; la descripción de la situación; las especificaciones que tienen las actividades; el listado de los participantes; los roles de cada estudiante y el instrumento o estrategia pedagógica que permitirá evaluar a los estudiantes.
Diseñar actividades	El docente debe planear actividades que garanticen que los estudiantes van a poder obtener datos relacionados con la situación problema, organizar y analizar los datos recogidos, para que finalmente interpreten la información logrando así obtener posibles soluciones al problema planteado.
RECOMENDACIONES DURANTE EL DESARROLLO DE LAS CLASES	
Socializar con los estudiantes	Se aconseja que el docente dé a conocer los elementos que hacen parte del escenario de aprendizaje, pertenecientes al diseño del guion.
Guiar a los estudiantes	El docente guía a los estudiantes de tal manera que las intervenciones que ellos realicen durante la clase sean a favor de promover el desarrollo del análisis e interpretación de los datos referentes a la situación problema, y a partir de ellos lograr que conceptualicen las temáticas.
Cierre de la clase	Al finalizar la clase los estudiantes deben tener claridad acerca de la temática que se abordó, para ello se socializa la interpretación que los estudiantes hicieron referente a los resultados para generar posibles soluciones al problema planteado.
RECOMENDACIONES PARA DESPUÉS DE LA CLASE	
Valorar el escenario de aprendizaje escogido	Posterior al desarrollo del escenario, el docente evalúa la pertinencia y éxito de este, para ello se puede valer de los productos presentados por los estudiantes al abordar el problema, los logros y percances que se tuvieron en el desarrollo del escenario.

Tabla 12. Recomendaciones de la metodología Escenarios de Aprendizaje
Fuente. Propia

Estas recomendaciones han de permitir desarrollar el contenido matemático seleccionado, teniendo en cuenta el grado al que va dirigido la propuesta de enseñanza y la metodología que se implementa en la gestión de esta.

6.2. FASE 2. DISEÑO DE LA PROPUESTA

Teniendo en cuenta las recomendaciones pedagógicas y didácticas y las relaciones de integración de los contenidos matemáticos propuesto por Carranza y Guerrero (2016), en las cuales se hace explícito que los experimentos aleatorios se pueden relacionar con contenido matemático asociado a objetos tridimensionales, figuras planas y cuerpos geométricos, semejanza y congruencia, se presenta la propuesta. De igual manera, se muestra la relación que hay entre el contenido matemático de experimentos aleatorios con las propiedades básicas de la teoría de números y la variable dependiente e independiente, desde las cuales también es posible estudiar la variación lineal, relacionando este último contenido con la proporcionalidad directa e inversa (Diagrama 5).

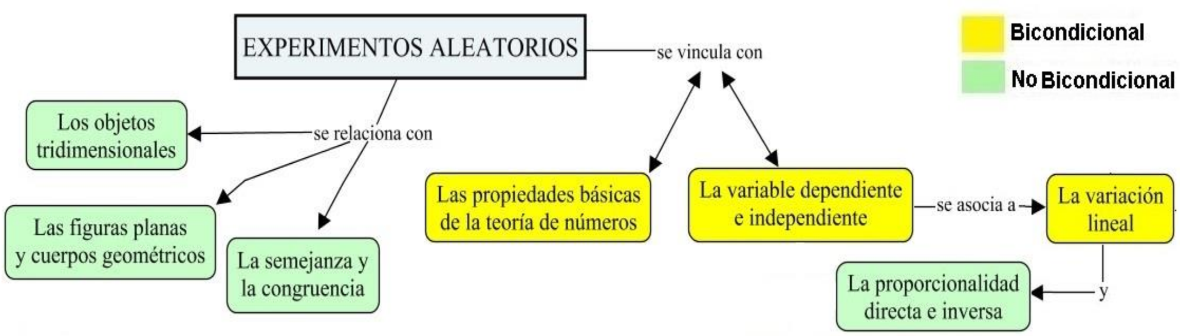


Diagrama 5. Contenidos matemáticos asociados a experimentos aleatorios
Fuente. Propia

A partir de las relaciones expuestas, se diseña la propuesta de enseñanza mediante un escenario de aprendizaje en el cual se evidencian las cuatro etapas que caracteriza a los escenarios, dichas etapas se presentan por medio de cuatro módulos. Módulo 1. Planteamiento del problema, Módulo 2. Obtención de datos, Módulo 3. Análisis de datos, y Módulo 4. Interpretación de los datos. Los módulos se presentan en una cartilla la cual está dirigida a los docentes y se estructura según las descripciones realizadas en la Tabla 13 y 14.

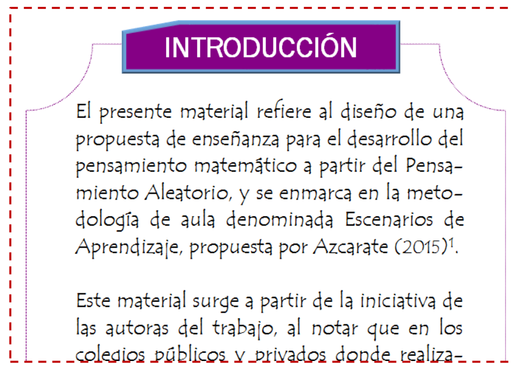
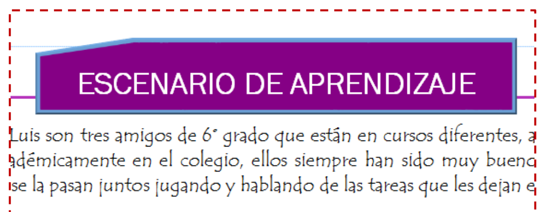
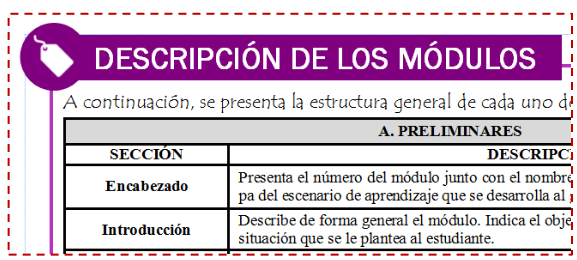
APARTADO	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO
Contenido	Esta parte menciona y ubica cada uno de módulos que se desarrollan en la cartilla. De la misma manera contiene la descripción y las generalidades de cada módulo.	 Contenido pág. INTRODUCCIÓN .... 4 ESCENARIO DE APRENDIZAJE .... 5 DESCRIPCIÓN DE LOS MÓDULOS 6
Introducción	Apartado que refiere a la presentación inicial de la cartilla, en donde se describe que la cartilla surge a partir de una propuesta de enseñanza, producto de la iniciativa de las autoras de este trabajo y bajo la orientación y aportes de la directora, enmarcada en la metodología de enseñanza ‘Escenarios de Aprendizaje’ propuestos por Azcarate (2015).	 INTRODUCCIÓN El presente material refiere al diseño de una propuesta de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, y se enmarca en la metodología de aula denominada Escenarios de Aprendizaje, propuesta por Azcarate (2015)[1]. Este material surge a partir de la iniciativa de las autoras del trabajo, al notar que en los colegios públicos y privados donde realiza-
Escenario de aprendizaje	Aquí se describe el escenario de aprendizaje que se desarrollará durante todo el módulo.	 ESCENARIO DE APRENDIZAJE Luis son tres amigos de 6° grado que están en cursos diferentes, a adémicamente en el colegio, ellos siempre han sido muy buen se la pasan juntos jugando y hablando de las tareas que les dejan e
Descripción del módulo	Esta sección resume la estructura general de los módulos: Aprendizajes esperados, Recomendaciones para antes, durante, y el cierre de la clase, y Actividades para los estudiantes.	 DESCRIPCIÓN DE LOS MÓDULOS A continuación, se presenta la estructura general de cada uno d A. PRELIMINARES SECCIÓN / DESCRIPC Encabezado: Presenta el número del módulo junto con el nombre / pa del escenario de aprendizaje que se desarrolla al Introducción: Describe de forma general el módulo. Indica el obje / situación que se le plantea al estudiante.

Tabla 13. Estructura general de la cartilla
Fuente. Propia

En la Tabla 14, se describe con detalle la organización de cada módulo. Cabe aclarar que dentro de cada módulo existe una sección dirigida a los estudiantes la cual se denomina: Sección de actividades.

A. PRELIMINARES		
SECCIÓN	**DESCRIPCIÓN**	**EJEMPLO**
Encabezado	Presenta el número del módulo junto con el nombre que este recibe, teniendo en cuenta la etapa del escenario de aprendizaje que se desarrolla al gestionar el módulo.	MÓDULO 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
Introducción	Describe de forma general el módulo. Indican el objetivo, el cual se desarrolla por medio de una situación que se le plantea al estudiante.	**INTRODUCCIÓN** Este módulo tiene como objetivo, presentar el problema que guiará el escenario de aprendizaje. *Hugo, Paco y Luis son tres estudiantes y muy buenos amigos que están en 6° grado. Ellos se han caracterizado por su buen desempeño académico, sin embargo, este desempeño ha bajado notoriamente y sus directores de grupo están preocupados porque creen que es debido a un juego llamado Guayabita en el que participan a la hora del recreo. Pues por estar jugando no se percatan que el descanso a acabado y no alcanzan a comprar onces, por tanto, en algunas clases llegan tarde o no prestan la suficiente atención por estar distraídos o por tener hambre dado que no comieron nada*
Contenidos generales	Refiere a enlistar las temáticas generales que se abordan en cada módulo.	**CONTENIDOS GENERALES** 1. Experimentos aleatorios. 2. Variable dependiente. 3. Proporcionalidad inversa y directa. 4. Área y perímetro de figuras geométricas. 5. Unidades de medida. Sugerencia Los temas aquí nombrados pueden ser profundizados desde el sustento matemáticos que usted como docente profesional del área maneja.
Conceptos clave	Esta sección enlista los principales conceptos que se desarrollarán durante la realización de las actividades de cada módulo.	**CONCEPTOS CLAVE** • Espacio muestral • Frecuencia de un suceso • Recta Numérica • Números racionales (decimales, fracciones y porcentuales

Aprendizajes esperados	Indica los aprendizajes esperados que los estudiantes deben abordar al hacerse partícipes de cada módulo. Estos aprendizajes se formulan a partir de lo expuesto en los DBA-M (MEN, 2017) y en los EBCM (MEN, 2006).	**APRENDIZAJES ESPERADOS** Al participar de este módulo los estudiantes podrán desarrollar los siguientes aprendizajes: 1. Registrar adecuadamente los resultados de un experimento aleatorio al realizar varias repeticiones (DBA-M, 2017, p. 52)[8]. 2. Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)[9]. 3. Utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes (EBCM, 2006, p. 82)[9].
Tiempo estimado	Se expone el tiempo estimado que se sugiere para dedicar a cada módulo, cabe aclarar que este tiempo varía según el ritmo de trabajo de los estudiantes y la gestión del docente	**TIEMPO SUGERIDO** Para el desarrollo de este módulo el tiempo estimado es de 135 minutos (3 sesiones de 45 minutos cada una).
B. ANTES DE LA CLASE		
Materiales para la clase	Sección en la que se enlistan los materiales necesarios para el desarrollo del módulo.	**ANTES DE CLASE** ♦ **MATERIAL PARA LA CLASE** Útiles escolares Dados construidos (Cúbico y octaédrico) **Actividad grupal:** Actividad 5 (Juguemos) **Actividades individuales:** Actividad 6 (Exploremos) Evaluación 2
C. DURANTE LA CLASE		
Explicar	Refiere a la explicación que se le sugiere al docente dar acerca de los contenidos matemáticos que se abordan en el módulo.	**Explicar 1.** Explicar acerca de los experimentos aleatorios y deterministas, con la intención de lograr comprender que el azar está involucrado en experimentos aleatorios, por lo cual se propone plantear la siguiente situación: A. Si Hugo, Paco y Luis juegan Guayabita ¿Se puede saber con certeza si Paco ganará? Ex-

Explorar	Alude a acciones o preguntas que se le sugieren al docente realizar, para dar apertura al tema o para dar cierre al mismo. Estas actividades o preguntas retoman de manera directa el escenario de aprendizaje y serán desarrolladas por los estudiantes.	**Explorar 1.** Con el fin de dar un cierre al problema planteado al inicio de la cartilla y con ayuda de las conclusiones generadas en las respectivas exposiciones, se recomienda que el docente plantee a los estudiantes las siguientes preguntas *¿Hay más posibilidades de ganar si se juega con dos dados que con un dado? ¿Es pertinente apostar en este tipo de juego?* **Explorar 1.** Realizar la lectura (Escenario de aprendizaje) del escenario de aprendizaje y guiar a los estudiantes para que reconozcan el problema. Dicho problema se describe en la introducción del módulo.
Practicar	Indica los ejercicios desarrollarán los estudiantes, mencionando el propósito que tienen, el cual puede ser de introducción, de complemento o de cierre de alguna temática.	**Practicar 2.** Con el fin de que los estudiantes practiquen lo socializado acerca de proporcionalidad inversa, entregar a cada estudiantes la Actividad 2 (Paco compra dados).
Socializar	Hace alusión a compartir con todo el grupo cada una de las respuestas que los estudiantes dan a las actividades planteadas, con el objetivo de resolver dudas respecto a la temática o de complementar la temática desarrollada.	**Socializar 1.** Socializar lo desarrollado en la Actividad 7 y Actividad 8, ya que éstas permiten complementar la explicación sobre cómo construir tablas estadísticas o de frecuencias y gráficos estadísticos. Jugando primero con un dado cúbico y posteriormente con un dado octaédrico.

Nota didáctica	A lo largo de cada módulo aparecen diferentes notas didácticas, con el fin de que éste se desarrolle de manera satisfactoria. Las notas están basadas en diferentes referentes teóricos relacionados con la enseñanza de la matemática.	Nota Didáctica Según Batanero y Godino (2004)[6] es fundamental que los estudiantes logren diferenciar un experimento aleatorio de uno determinista para que luego puedan estudiar los sucesos aleatorios.
Sugerencia	Refiere a la conclusión que el docente le desee dar al módulo para finalizarlo, para ello se propone un ejercicio, para los estudiantes, que engloba los temas desarrollados en el trascurso del módulo.	Sugerencia Puede ampliar la explicación acerca de proporcionalidad directa, planteando otras situaciones en donde se pueda profundizar el concepto.
D. CIERRE DEL MÓDULO		
Sintetizar	Refiere a cómo el docente puede finalizar el módulo. Por ejemplo, se propone un ejercicio para los estudiantes, en el cual se engloban los temas desarrollados en el trascurso del módulo.	**Sintetizar.** Resaltar la importancia de hacer un análisis estadístico ya que este permite, entre otras cosas, dar respuesta a preguntas como las realizadas en el desarrollo de los módulos anteriores.
Evaluación	Se exponen sugerencias de instrumentos y estrategias pedagógicos a partir de las cuales el docente puede emitir un juicio valorativo hacia los desarrollos conceptuales, procedimentales y actitudinales de los estudiantes.	Evaluación Para evaluar lo aprendido en el Módulo 2, entregue a los estudiantes la Evaluación 2 con el objetivo de analizar el progreso que tuvieron. Tenga en cuenta los aprendizajes esperados que se establecieron para frecuencia de un suceso, espacio muestral, números decimales, números fraccionarios, etc.
E. ANEXOS		

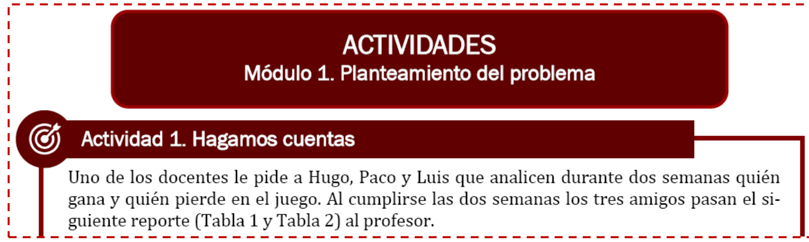
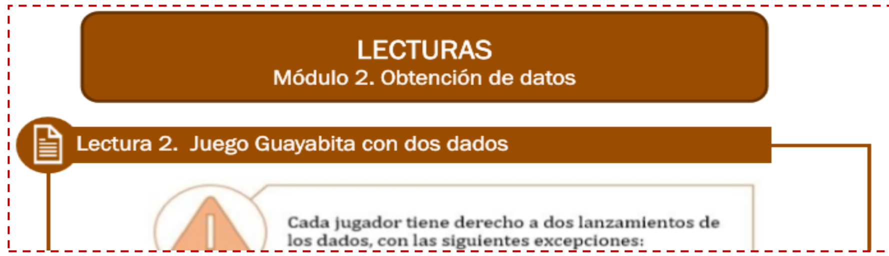
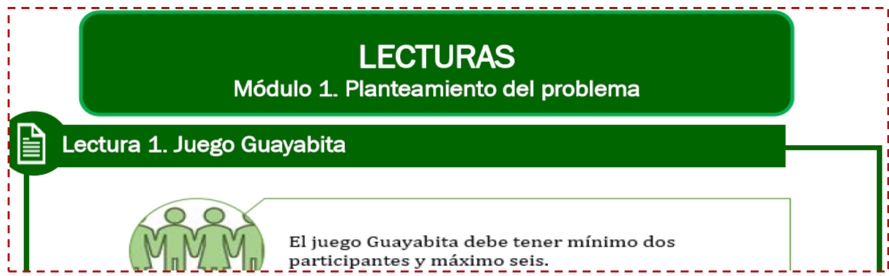
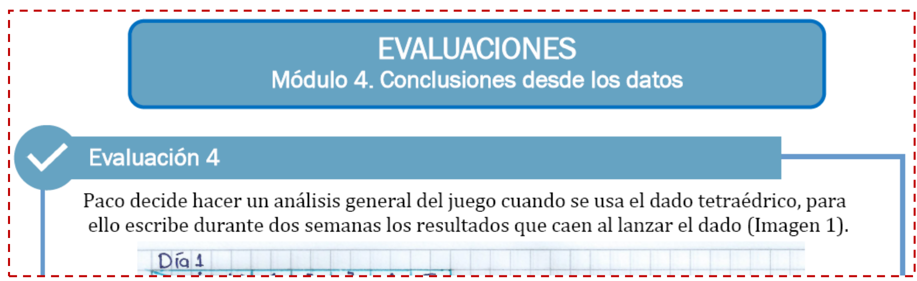
Actividades	Se muestran las actividades dirigidas a los estudiantes, de acuerdo con los contenidos que se abordan en cada módulo.	
Lecturas	Se exhiben las lecturas que se han de usar en el desarrollo de cada módulo.	 
Evaluación	Se presentan las evaluaciones sugeridas para el cierre del módulo.	

Tabla 14. Estructura general de los módulos
Fuente. Propia

A continuación, se describe cada uno de los módulos teniendo en cuenta las recomendaciones pedagógicas y didácticas y la estructura ya mencionada. Se presenta: el objetivo general del módulo y los objetivos de aprendizaje; los temas que se abordan y su articulación, la fase del estudio estadístico que se plantea en cada módulo a partir del escenario de aprendizaje diseñado, la descripción de la clase, y el tiempo estimado para el desarrollo de cada módulo. En el Anexo C se presenta cada uno de los módulos, recopilados en un documento denominado 'Cartilla Pensamiento Matemático 6° grado, una propuesta desde el Pensamiento Aleatorio'.

6.2.1. Módulo 1. Planteamiento del problema

En la Tabla 15 se describe de forma general el Módulo 1 que lleva por nombre 'Planteamiento del problema'.

<table>
<tr><th colspan="2">MÓDULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Este hace referencia a la primera fase del estudio estadístico, en la cual el docente plantea a los estudiantes una situación problema por medio de una lectura, con el fin de que ellos den respuesta a preguntas como: ¿Cuál de los tres estudiantes gana más dinero?, ¿el color del dado influye en la suerte de que alguno de ellos siempre gane?, ¿las reglas del juego están creadas para que siempre se gane o se pierda?, ¿al jugar con un dado convencional, los estudiantes tienen menor posibilidad de ganar que al jugar con un tetraédrico o un octaédrico?

La situación es la siguiente:

Hugo, Paco y Luis son tres estudiantes y muy buenos amigos que están en 6° grado. Ellos se han caracterizado por su buen desempeño académico, sin embargo, este desempeño ha bajado notoriamente y sus directores de grupo están preocupados porque creen que es debido a un juego llamado Guayabita en el que participan a la hora del recreo. Pues por estar jugando no se percatan que el descanso a acabado y no alcanzan a comprar onces, por tanto, en algunas clases llegan tarde o no prestan la suficiente atención por estar distraídos o por tener hambre dado que no comieron nada porque perdieron su dinero en el juego. A pesar de que los docentes les han hablado acerca de lo que implica jugar Guayabita y apostar el dinero de sus onces, ellos no le han dado mayor importancia, pues piensan que al momento de jugar siempre van a ganar, ya que dicen que tienen muy buena suerte, y no se dan cuenta de las muchas veces se quedan sin dinero.</td></tr>
<tr><th>OBJETIVO GENERAL</th><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</th></tr>
<tr><td>Plantear una situación problema que</td><td>• Representar y construir formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo de instrumentos de medidas apropiadas (DBA-M, 2017, p. 48)
• Calcular áreas y volúmenes a través de la composición y descomposición de figuras (EBCM, 2006, p. 85)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>propicie elementos que ayuden a los estudiantes a representar situaciones de variación a partir de diferentes representaciones</td><td>

- Utilizar y explicar diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos geométricos (DBA-M, 2017, p. 48)
- Reconocer el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico y geográfico (DBA-M, 2017, p. 48)
- Identificar y analizar propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos (DBA-M, 2017, p. 49)
- Representar mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) la covariación directa e inversas entre variables (DBA-M, 2017, p. 49)
- Distinguir un experimento aleatorio de uno determinista (DBA-M, 2017, p. 85)
- Identificar conceptos como espacio muestral y suceso (EBCM, 2006, p. 84)
- Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)
- Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa (EBCM, 2006, p. 84)

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEMAS MATEMÁTICOS</th><th>ARTICULACIÓN ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td>

- Diferenciar un experimento aleatorio de un determinista.
- Variable dependiente e independiente.
- Variable aleatoria.
- Propiedades de proporcionalidad
- Áreas y volúmenes de cuerpos sólidos.
- Objetos tridimensionales.
- Figuras planas y cuerpos geométricos.
- Propiedades básicas de los números.
- Unidades de longitud y superficie.

</td><td>

Los conceptos matemáticos que se trabajan en este módulo están asociados al Pensamiento Aleatorio, Numérico, Métrico, Espacial y Variacional, los cuales se relacionan de la siguiente manera:

El estudio de experimentos aleatorios y deterministas permite el análisis de la variable, ya sea aleatoria, dependiente o independiente. Además, al tratar la variable dependiente e independiente se puede estudiar la variación lineal, que a su vez relaciona las propiedades de la proporcionalidad directa e inversa.

Los experimentos aleatorios y deterministas usan objetos tridimensionales que permiten analizar las figuras planas y los cuerpos geométricos con lo cual se puede hacer cálculo del área, y del volumen de un cuerpo sólido. Por lo tanto, se hace necesario usar las propiedades básicas de los números para representar dichos cálculos en expresiones decimales o fraccionarias. El Diagrama 6 presenta las relaciones de los contenidos matemáticos expuestos en este módulo.

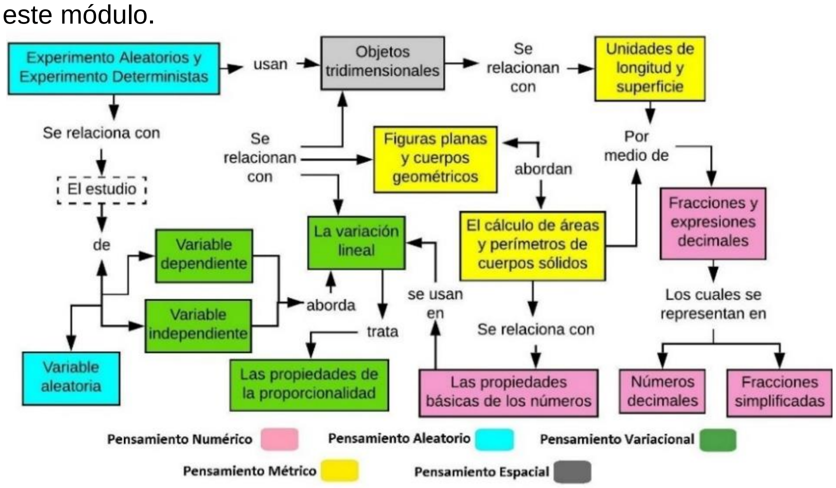


Diagrama 6. Articulación del contenido matemático en el Módulo 1
Fuente. Propia

</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA CLASE	
Este módulo está conformado por 5 secciones que son: Explorar, Explicar, Practicar, Socializar y Cierre. Explorar, hace referencia a las lecturas del escenario de aprendizaje y a las reglas del juego Guayabita. En Explicar, se describe cada una de las temáticas abordadas en el módulo: la proporcionalidad directa e inversa, los tipos de variables, las operaciones básicas con números naturales, las unidades de medida y el cálculo de áreas y volúmenes de algún objeto geométrico. El diseño de situaciones o actividades para ser desarrolladas durante la clase, con el fin de que los estudiantes puedan comprender en su totalidad tanto la temática como las cuatro actividades que deben desarrollar, dichas actividades se resuelven en la sección Practicar. La sección Socializar consiste en compartir los resultados de cada una de las actividades desarrolladas en la sección de Practicar, o los aspectos desarrollados en Explorar. El docente debe dar el tiempo necesario y pertinente para tal fin. Finalmente, el Cierre del módulo hace referencia al diseño de una actividad que permite ampliar el contenido matemático para así poder sintetizar lo desarrollado durante el módulo y dar paso a la evaluación del conocimiento.	
TIEMPO ESTIMADO:	270 minutos divididos en 6 sesiones de clase cada una de 45 minutos.

Tabla 15. Descripción Módulo 1. Planteamiento del problema
Fuente. Propia

6.2.2. Módulo 2: Obtención de datos

El Módulo 2 nombrado ‘Obtención de los datos’, se describe en la Tabla 16.

MÓDULO 2. OBTENCIÓN DE LOS DATOS	
Hace referencia a la segunda fase del estudio estadístico, en la cual el docente ha de diseñar un plan para que los estudiantes lo ejecuten y así puedan obtener los datos adecuados para dar solución al problema planteado. Para este módulo se propone la siguiente situación: *Hugo, Paco y Luis afirman que quieren seguir jugando Guayabita, pues es un juego con el que pueden ganar dinero de forma sencilla, a pesar de que tengan que invertir en comprar dados y de que a veces se han quedado sin comer onces porque todo su dinero fue perdido al no tener suerte en el juego.* *Paco afirma que él casi siempre es el que gana todo el dinero, porque cuando tiene el segundo lanzamiento en el juego lo que hace es apostar siempre al número seis, ya que este es el número que tiene más posibilidad de caer. Luis siempre apuesta a números distintos y por eso las opciones de ganancia de Luis son menores a las de Paco.* A partir de la situación, se puede generar, entre otras, las siguientes preguntas: ¿La afirmación que plantea Paco es verdadera? ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado caiga el número 6, 5, 4, 3, 2 o 1?, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea 6?	
OBJETIVO GENERAL	Diseñar un plan que permita a los estudiantes recolectar datos necesarios para dar solución al problema planteado.
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	• Registrar adecuadamente los resultados de un experimento aleatorio al realizar varias repeticiones (DBA-M, 2017, p. 52) • Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)

<table>
<tr><td></td><td>• Utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes (EBCM, 2006, p. 82)</td></tr>
<tr><td>TEMAS MATEMÁTICOS</td><td>ARTICULACIÓN ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS</td></tr>
<tr><td>• Representación numérica en diferentes expresiones.
• Frecuencia con que se repite los resultados en un experimento aleatorio.</td><td>Los conceptos matemáticos que se abordan en este módulo están asociados al Pensamiento Aleatorio, al Variacional y al Numérico. El estudio de los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia permite analizar y/o expresar los resultados por medio de representaciones numéricas escritas en números: fraccionarios, decimales.

El Diagrama 7 presenta las relaciones de los contenidos matemáticos expuestos en este módulo.

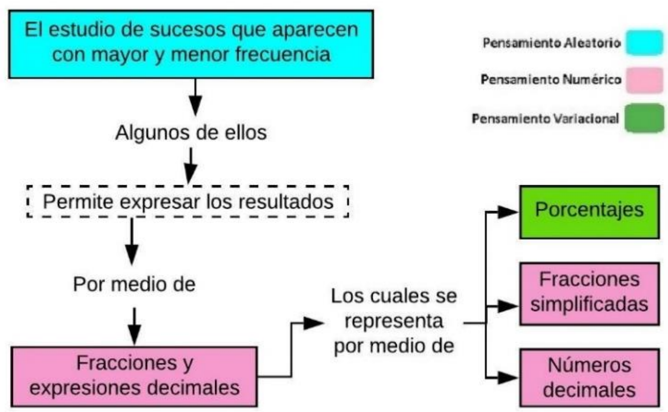


Diagrama 7. Articulación del contenido matemático en el Módulo 2
Fuente. Propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="2">Este módulo está formado por 5 secciones: Explorar, Explicar, Practicar, Socializar y Cierre. La primera de ellas hace referencia a preguntas que se sugiere que el docente realice durante la clase o a lecturas que se deben realizar para la comprensión del módulo. En explicar se describen las temáticas abordadas (espacio muestral, suceso y los resultados que caen con mayor y menor frecuencia en un evento). Se presentan situaciones o ejercicios que pueden servir de referente para explicar de manera detallada conceptos matemáticos y a su vez indicios de los conceptos que serán abordadas en las dos actividades propuestas para este módulo, dichas actividades se resuelven en la sección de Practicar.

En la sección de Socializar se propone llevar a cabo una puesta en común de los resultados de las actividades desarrolladas en la sección de Practicar. El docente debe brindar el tiempo necesario y pertinente para este propósito. Finalmente, el Cierre del módulo se presentan preguntas que le ayuden a los estudiantes a sintetizar lo desarrollado durante todo el módulo, para luego dar paso a la evaluación del conocimiento.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO ESTIMADO:</td><td>135 minutos, repartido en 3 sesiones de 45 minutos cada una.</td></tr>
</table>

Tabla 16. Descripción Módulo 2. Obtención de datos
Fuente. Propia

6.2.3. Módulo 3: Análisis de los datos

En la Tabla 17 se expone el Módulo 3 denominado ‘Análisis de los datos’.

MÓDULO 3. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Hace referencia a la tercera fase de un estudio estadístico. Aquí el docente debe seleccionar y utilizar los métodos numéricos para presentar los datos a sus estudiantes, teniendo en cuenta el tipo de información obtenida en la recolección de los datos, y definir cómo se va a clasificar y a representar la información. Para ello se propone la siguiente situación:

En una de las partidas que Hugo, Paco y Luis jugaron, cada uno con un dado cúbico, Paco decide escribir los números que caen cada vez que lanzan cada dado (Tabla 1).

Jugadas / Jugador	1		2	
	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2
HUGO	3	5	6	X
PACO	6	X	4	5
LUIS	1	X	X	X

Tabla 1. Partida de Hugo, Paco y Luis

Hugo empezó la partida, seguido de Paco y Luis. Resulta que este juego acabó tan rápido que Paco afirma que en toda partida que se juegue de tres personas siempre van a caer en el primer lanzamiento los números 3, 6 y 1. Por ello siempre alguno va a tener que apostar más dinero al inicio del juego y siempre alguno va a recuperar en el primer lanzamiento la cantidad que apostó.

El profesor de Matemáticas que escuchaba la conversación les indicó que para que Paco pueda hacer esa afirmación debe tener los resultados de múltiples juegos que se desarrollen bajo las mismas condiciones, para poder realizar comparaciones y análisis de los resultados. Hugo le dice al profesor que, si se ponen a recoger los resultados de los juegos, tienen que esperar mucho tiempo para saber si es verdad o no lo que está diciendo Paco.

A esto él profesor le indica a Hugo que él les va a mostrar varios resultados de juegos, para que puedan analizar los datos y así saber si lo que dice Paco es cierto o no.

OBJETIVO GENERAL	OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
Analizar los datos obtenidos de experimentos aleatorios mediante representaciones y clasificaciones.	• Interpretar, producir y comparar representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares.) (EBCM, 2006, p. 85) • Conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad (EBCM, 2006, p. 85) • Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84) • Utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relacionar estas dos notaciones con la de los porcentajes (EBCM, 2006, p. 82) • Representar datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares) (EBCM, 2006, p. 84)

<table>
<tr><th>TEMAS MATEMÁTICOS</th><th>ARTICULACIÓN ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td>

- Representación numérica en diferentes expresiones.
- Representación de datos usando tablas y gráficas estadísticas.
- Experimento aleatorio.

</td><td>

Los conceptos matemáticos que se trabajan en este módulo están asociados al Pensamiento Aleatorio, al Variacional y al Numérico. Se relacionan ya que el estudio de los resultados de experimentos aleatorios se puede expresar por medio de gráficos estadísticos los cuales permiten el estudio de variables cualitativas y cuantitativas y distribución de frecuencia. Las distribuciones permiten analizar y expresar los resultados por medio de representaciones numéricas. El Diagrama 8 que se presenta a continuación exhibe las relaciones de los contenidos matemáticos expuestos en este módulo.

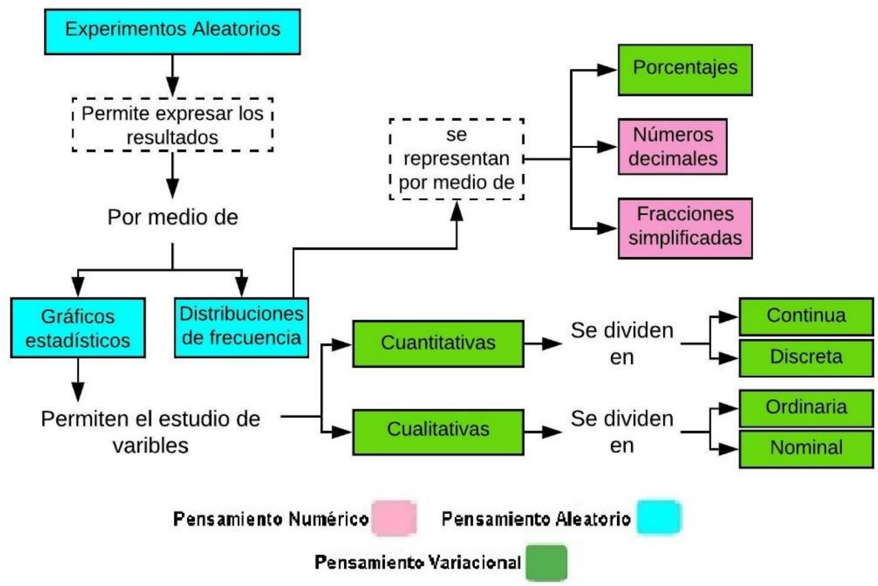


Diagrama 8. Articulación del contenido matemático en el Módulo 3
Fuente. Propia

</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA CLASE</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Este módulo está conformado por 4 secciones: Explicar, Practicar, Socializar y Cierre. La primera sección corresponde a la explicación de cada una de las temáticas abordadas en este apartado: frecuencias de un evento, gráficos estadísticos y tipos de variables estadísticas. Algunas de estas temáticas se les asocian actividades que se desarrollan durante el momento de la explicación, con el fin de que los estudiantes comprendan en su totalidad tanto la temática como las cinco actividades que posteriormente deben desarrollar. Dichas actividades se resuelven en la sección Practicar.

La sección de socializar permite compartir los resultados de las actividades desarrolladas. El docente establece el tiempo necesario y pertinente para este propósito. Finalmente, el cierre del módulo conlleva a una actividad que le ayuda al estudiante a complementar los temas abordados para dar paso al desarrollo de la evaluación del conocimiento.

</td></tr>
<tr><td>TIEMPO ESTIMADO:</td><td>135 minutos distribuidos en 3 sesiones de 45 minutos cada una.</td></tr>
</table>

Tabla 17. Descripción Módulo 3. Análisis de datos
Fuente. Propia

6.2.4. Módulo 4: Interpretación de los datos

El Módulo 4 recibe el nombre de ‘Interpretación de los datos. En la Tabla 18 se describe dicho módulo.

<table>
<tr><th colspan="3">MÓDULO 4.
INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Hace referencia a la cuarta fase de un estudio estadístico en la que los estudiantes generar posibles soluciones al planteamiento del problema basados en la interpretación de los datos analizados durante el desarrollo de módulos anteriores. Se propone la siguiente situación:

El profesor de matemáticas de Hugo, Paco y Luis desea saber qué piensan los demás estudiantes sobre la conclusión que emitió Paco: “En toda partida que se juegue de tres personas, siempre van a caer en el primer lanzamiento los números 3, 6 y 1, por lo cual siempre alguno va a tener que apostar más dinero al inicio del juego, y siempre alguno va a recuperar en el primer lanzamiento la cantidad que apostó.”</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVO GENERAL DEL MÓDULO</th><th>TEMAS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Dar posibles soluciones al planteamiento del problema a partir del análisis de los datos</td><td>• Resolución de problemas a partir de un conjunto de datos.
• Representación de datos por medio de diagramas y/o tablas de frecuencia.</td></tr>
<tr><th>OBJETIVO DE APRENDIZAJE</th><td colspan="2">• Predecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística (EBCM, 2006, p. 85)
• Conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad (EBCM, 2006, p. 85)
• Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)
• Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares (EBCM, 2006, p. 84)</td></tr>
<tr><th>TIEMPO ESTIMADO</th><td colspan="2">135 minutos, divididos en 3 sesiones de 45 minutos cada una.</td></tr>
<tr><th colspan="3">DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA CLASE</th></tr>
<tr><td colspan="3">Este módulo está formado por 5 secciones: Explorar, contiene las preguntas que el docente realiza durante la clase para que los estudiantes puedan ir comprendiendo el desarrollo de las temáticas, en Explicar se describe el tema abordado en el módulo: análisis de datos, que permite explorar e identificar el tipo de datos desarrollados y el comportamiento de estos. Durante esta sección además se analiza una situación que sirve de referencia para el desarrollo de la actividad propuesta, dicha actividad se desarrolla en la sección de Practicar, la cual consiste en responder varias preguntas relacionadas con las actividades desarrolladas en los módulos anteriores. La sección Socializar consiste en poner en común la actividad desarrollada, para lo cual el docente establece el tiempo necesario y pertinente para tal fin objetivo. Además, en esta sección se analiza una situación que sirve de referencia para el desarrollo de la actividad propuesta, la cual será desarrollada en la sección de Practicar, Finalmente, en el Cierre se lleva a cabo el análisis de los datos, sintetizando lo desarrollado durante todo el módulo, para posteriormente dar paso a la evaluación.</td></tr>
</table>

Tabla 18. Descripción Módulo 4. Conclusión del problema propuesto
Fuente. Propia

Finalmente, con la descripción de los cuatro módulos se evidencian estrategias metodológicas las cuales favorecen el desarrollo del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, ya que en cada uno de los módulos se logran articular contendidos matemáticos desde el Pensamiento Aleatorio.

6.3. FASE 3. VALORACIÓN DE LA PROPUESTA

Con el fin de medir la viabilidad de la propuesta, y especialmente la pertinencia del material (la cartilla), se proponen dos métodos de recolección de la información: una entrevista semiestructurada y un cuestionario valorativo. La entrevista (Anexo D) tiene como objetivo determinar si la descripción e instrucciones de las actividades y evaluaciones, son entendibles y favorecen su desarrollo. Está dirigida a estudiantes que cursen 6° grado. El cuestionario (Anexo E) tiene el propósito de evaluar la estructura de la cartilla y su alcance didáctico. Está dirigido docentes que cuenten con experiencia laboral mínima de cinco (5) años en la enseñanza de la matemática, y que tengan o hayan tenido a cargo estudiantes de 6° grado durante mínimo un año escolar. De ser posible se espera que tales docentes hayan incursionado en procesos de investigación (por ejemplo, tesis de maestría, proyectos de investigación) o trabajen en el campo de la didáctica de la matemática en la formación inicial de profesores o docentes en ejercicio.

El cuestionario valorativo busca dejar a juicio de expertos. Este caso de docentes del área de matemáticas. A este tipo de juicio Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) lo definen como una “opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones” (p. 29). Este tipo de valoración se puede realizar ya sea de forma individual o grupal. Para esta propuesta será de manera individual. Se deben tener en cuenta los siguientes pasos expuestos por estos dos autores:

1. Explicitar los aspectos que se están midiendo en cada ítem del instrumento, para que los expertos, logren reconocer la relevancia, suficiencia y pertinencia de lo que se evalúa.
2. Definir el objetivo del juicio de expertos.
3. Especificar el objetivo de la prueba, proporcionando a los expertos toda la información relacionada con la prueba.
4. Realizar el diseño del cuestionario de acuerdo con los objetivos de la evaluación.
5. Identificar expertos que tengan conocimiento sobre el tema.
6. Analizar la concordancia entre expertos.
7. Redactar las respectivas conclusiones.

Los expertos que cumplan los requisitos mencionados pueden evaluar los diferentes apartados de la cartilla según la organización presentada en la Tabla 19.

DOCENTE / COMPONENTE	DOCENTE 1	DOCENTE 2	DOCENTE 3	DOCENTE 4	DOCENTE 5	DOCENTE 6
PRELIMINARES			X	X		X
MÓDULO 1	X	X	X			
MÓDULO 2	X			X	X	
MÓDULO 3		X			X	X
MÓDULO 4			X	X		X

Tabla 19. Distribución para evaluar el material, la cartilla
Fuente. Propia

Se decide tal distribución ya que se espera que un solo docente no lea la totalidad de la cartilla, dado que ésta es extensa para dar una valoración de este tipo. Se busca acopiar diferentes valoraciones según la experiencia y opinión de cada docente y en tal caso que las valoraciones sean extremas u opuestas poder llegar a dirimir entre dichas opiniones. Con el cuestionario valorativo y teniendo en cuenta la distribución (Tabla 19), se busca que el docente evalué aspectos particulares de la cartilla tales como:

- La claridad respecto a la introducción de la cartilla y de la descripción de cada módulo.
- La claridad en las recomendaciones.
- La accesibilidad del material propuesto en cada módulo.
- El diseño de actividades, evaluaciones, lecturas y en general de la cartilla.
- El lenguaje y escritura de las indicaciones, lecturas, actividades, etc.
- La secuencia para el desarrollo de los contenidos.
- La pertinencia de temas, tiempo, material y estructura de la cartilla.

Respecto a las entrevistas semiestructuradas que se gestionan con estudiantes, Cabero (2000) citado en Leal (2018). señala que estas "se enmarcan bajo temas guías, pero son suficientemente abiertas como para permitir al entrevistador indagar con mayor profundidad en las áreas que le parezcan particularmente interesantes a la luz de las respuestas del entrevistado" (p. 41). Siguiendo a Leal, para lograr que la entrevista con los estudiantes cumpla con las expectativas se debe:

> - Explicar el significado y propósito de cada encuentro. Preguntar por su disposición para participar y disponer un momento de inicio, desarrollo y cierre.
> - Contextualizar las preguntas, talleres o actividades propuestas teniendo en cuenta las edades, gustos, intereses y disposición para participar en los encuentros.
> - Escuchar las proposiciones de los niños para el desarrollo de cada encuentro, lo que implica, en ocasiones, cambiar la actividad desde el inicio o durante el encuentro.
> - Establecer una relación de confianza y cordialidad con los niños.
> - Hacer devolución y validar la información generada con los participantes de la investigación (p. 44).

Antes de iniciar con las preguntas, se contextualiza al estudiante explicando el objetivo de la entrevista. Posteriormente se le explica cómo debe responder las preguntas, teniendo en cuenta que para ello se tiene las opciones de Si y No indagando a su vez sobre el porqué de la valoración. En el Anexo D se presentan las preguntas base para la entrevista, las cuales se formulan bajo dos características: i) los enunciados y las instrucciones de actividades y evaluaciones son claros; ii) la redacción y la lectura favorecen el desarrollo de actividades y evaluaciones. Las tres preguntas iniciales responden a la primera característica y las cuatro siguientes dan respuesta a la segunda característica. Además, los estudiantes evalúan solamente las actividades planteadas en las secciones de “Explicar”, “Explorar”, “Practicar”, “Sintetizar” y “Evaluar”, debido a que son ellos los principales actores involucrados en el desarrollo de estas secciones. Para tal valoración se cuenta con cuatro estudiantes quienes evalúan la propuesta de enseñanza teniendo en cuenta la distribución presentada en la Tabla 20.

COMPONENTE / ESTUDIANTE	ESTUDIANTE 1	ESTUDIANTE 2	ESTUDIANTE 3	ESTUDIANTE 4
EXPLICAR	Explicar 2 Página: 22	Explicar 6 Página: 18	Explicar 5 Página: 17	Explicar 3 Página: 16
PRACTICAR	Actividad #1 Página: 32 y 33	Actividad #2 Página:34	Actividad # 2 Página: 34	Actividad #1 Página: 32 y 33
SINTETIZAR	Módulo 2 Página 19	Módulo 1 Página: 13	Módulo 3 Página: 25	Módulo 3 Página: 25
EVALUAR	Evaluación # 1 Página: 53 Ítems: 1 y 2	Evaluación # 2 Página:55 Ítems: 3 y 4	Evaluación # 3 Página: 58 y 59 Ítems:2 y 3	Evaluación # 4 Página: 62

Tabla 20. Malla de ítems a valorar por estudiantes
Fuente. Propia

Dicha entrevista busca evaluar aspectos particulares del material, como:

- La claridad en los enunciados tanto de actividades como de las evaluaciones.
- El lenguaje y redacción de las actividades y de las evaluaciones.
- La accesibilidad a la hora adquirir los materiales.
- La pertinencia de los juegos al momento de enseñar contenidos matemáticos.

Para buscar efectividad en la valoración realizada tanto por los estudiantes como por los docentes, se debe garantizar el bienestar de los entrevistados, por lo cual las autoras de este trabajo tienen en cuenta las consideraciones éticas expuestas en el capítulo anterior.

6.4. FASE 4. ANÁLISIS Y AJUSTES A LA PROPUESTA

Los ajustes a la propuesta se llevaron a cabo a partir de los resultados de la evaluación realizada por los estudiantes (Anexo F) y de los docentes (Anexo G).

Respecto a la evaluación de los estudiantes, se analizan aspectos como: la claridad en lenguaje, y la redacción de las indicaciones y de los ejercicios, teniendo en cuenta temáticas que los estudiantes han abordado con anterioridad en su institución educativa. La evaluación hecha por los expertos se centra en la claridad en el lenguaje, la pertinencia de la propuesta para ser gestionada en el aula, la accesibilidad a los materiales, la secuencia de esta propuesta de enseñanza y el diseño gráfico de la cartilla.

6.4.1. Análisis de las valoraciones

Este análisis se desarrolla a partir de la entrevista realizada por cuatro estudiantes y por las valoraciones y observaciones dadas por seis expertos.

6.4.1.1. Estudiantes

Para el caso de los estudiantes, el análisis se realiza a partir de las respuestas los estudiantes quienes fueron seleccionados de manera aleatoria en diferentes colegios públicos y privados de zonas urbanas y municipales del departamento de Cundinamarca. Los resultados de esta valoración se examinan a partir los componentes que se presenta en la cartilla: Explicar, Practicar, Sintetizar y Evaluar.

Referente al componente Explicar se observa que los estudiantes presentaron dificultades para comprender los enunciados leídos. La mayoría de ellos tuvieron que leerlos más de tres veces para comprender que se debía hacer. Sin embargo, desde la óptica de las maestras en formación quienes aplicaron y acompañaron el desarrollo de esta entrevista, se percibe que dichas dificultades se presentaron debido a que los estudiantes leyeron secciones específicas de la cartilla y algunas actividades dependían de actividades o explicaciones expuestas en páginas anteriores que no fueron no fueron presentadas a los entrevistados. Por lo que ellos no encontraron la correspondiente ilación de ideas, que les permitiera comprender lo que se exponía.

Respecto a al lenguaje, claridad y redacción de los enunciados, se evidencia que estos aspectos ayudan a la compresión de lo que el estudiante debe realizar en cada actividad. Sin embargo, uno de los estudiantes presentó dificultad para comprender la palabra 'sobreponer' del Explicar # 5, pág. 17, así que esta tuvo que ser explicada por las maestras en formación, ayudando a que el estudiante pudiera continuar con la actividad.

En relación con el componente Practicar ningún estudiante tuvo que leer más de tres veces el enunciado para comprender lo que debía hacer. Mientras que, en el aspecto de lenguaje, a dos de los cuatro estudiantes se les dificultó comprender términos como variable dependiente o independiente, lo que obstaculizó el proceso del Practicar # 1, pág. 32. Se evidencia que la redacción de los enunciados favoreció que los estudiantes entendieran y tuvieran claridad sobre qué hacer en cada actividad. Se puede concluir que el componente Practicar es comprensible para los estudiantes, haciendo que este sea viable de desarrollar en el aula de matemáticas. Las dificultades presentadas pueden ser superadas mediante la orientación que el docente considere pertinente.

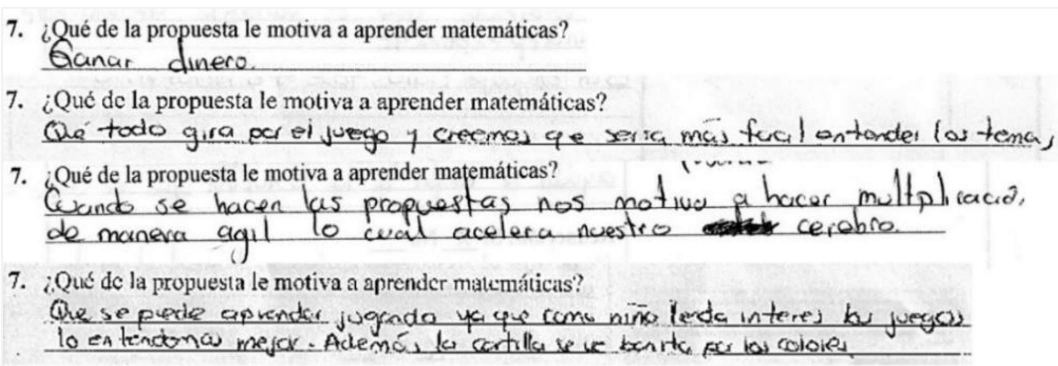
En cuanto al componente Sintetizar, se evidencia que dos de los cuatro estudiantes, necesitaron leer más de tres veces el enunciado de las actividades para entender lo que debían desarrollar. No comprendían las temáticas asociadas al Pensamiento Aleatorio y cuando las maestras en formación preguntaron sobre el porqué de la dificultad, obtuvieron afirmaciones como: "*no he visto este tema*" o "*no recuerdo haber visto este tema*".

Tres de los cuatro estudiantes afirman que el lenguaje usado en los enunciados es claro para el desarrollo de las actividades. El otro estudiante manifiesta que el lenguaje no le ayuda a la comprensión del enunciado ya que este le parece un poco complejo y señala que no conoce lo que significan las palabras octaédrico y tetraédrico. Referente al ítem redacción, tres de los cuatro estudiantes manifestaron que los enunciados del componente tienen buena redacción, y que les permite comprender a plenitud lo que se debe hacer. Sin embargo, un estudiante opina que no hay buena redacción y que no comprende cuál es el objetivo de la actividad.

Dado lo anterior, se puede concluir que el componente Sintetizar es asequible para los estudiantes, puesto que las dificultades presentadas se pueden superar mediante la orientación y el acompañamiento que el docente brinde al estudiante en relación con los conocimientos previos necesarios.

Respecto al componente Evaluar se haya que a dos estudiantes se les dificultó tener claridad del enunciado, uno debido a que no conocían el término tetraédrico y el otro porque requerían de conocimientos previos tales como distribución de frecuencia. Teniendo en cuenta que la evaluación propuesta se enfocaba en el uso del dado tetraédrico, este estudiante manifiesta que el lenguaje usado no le ayuda a comprender el contenido. No obstante, los otros tres estudiantes manifiestan todo lo contrario. Con relación a la redacción de las indicaciones, todos los estudiantes estuvieron de acuerdo en que los enunciados les ayuda a entender el qué hacer. Es así como se concluye que el componente Evaluar es claro para y que las dificultades presentadas se pueden superar con la orientación que el docente le brinde al estudiante para la comprensión de términos o símbolos.

Las últimas cuatro preguntas que se realizan a los estudiantes hacen referencia a los materiales solicitados y la pertinencia del juego. En relación con los materiales solicitados la mayoría de los estudiantes afirman que estos son sencillos de adquirir o de construir. Y referente a la pertinencia del juego, a partir de las respuestas se puede establecer que las reglas del juego son claras y que el juego propuesto motiva el aprendizaje de la matemática, ya sea porque “ganan dinero”, porque necesitan desarrollar la agilidad mental para realizar las operaciones, o porque descubren que mediante el juego es más divertido aprender. Argumentos que se sustentan en afirmaciones como las expuestas en la Imagen 20.


7. ¿Qué de la propuesta le motiva a aprender matemáticas?
Ganar dinero.

7. ¿Qué de la propuesta le motiva a aprender matemáticas?
Qué todo gira por el juego y creemos que sería más fácil entender los temas,

7. ¿Qué de la propuesta le motiva a aprender matemáticas?
Cuando se hacen las propuestas nos motiva a hacer multiplicació, de manera agil lo cual acelera nuestro cerebro.

7. ¿Qué de la propuesta le motiva a aprender matemáticas?
Que se puede aprender jugando ya que como niño le da interes los juegos lo entendemos mejor. Además, la cartilla se ve bonita por los colores

Imagen 20. Respuestas a la pregunta ¿Qué le motiva aprender matemáticas?
Fuente. Propia.

Se concluye que la cartilla dirigida a los estudiantes puede ser gestionados en el aula de matemáticas, ya que los enunciados cuentan con lenguaje y redacción pertinente y clara. El Gráfico 1 expone la compilación de las respuestas positivas dadas por los cuatro estudiantes que valoraron cada uno de los componentes (Explicar, Practicar, Sintetizar y Evaluar) respecto a claridad, lenguaje y redacción de los enunciados.

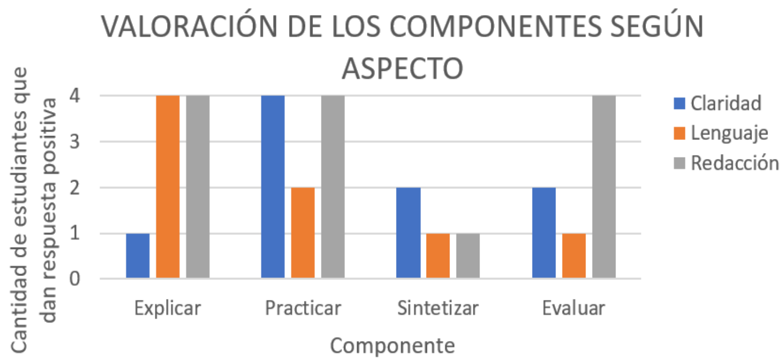


Gráfico 1. Valoración de los componentes según aspecto
Fuente. Propia

A partir de la entrevista a los estudiantes se puedo identificar que los temas que se abordan en 6° grado, en algunos colegios coinciden con las temáticas que se plantean en la propuesta de enseñanza. Los estudiantes entrevistados concuerdan en que los temas que han visto hasta el momento (agosto de 2019), son: fracciones y expresiones decimales, propiedades básicas de los números y variación lineal. Esto deja en evidencia una vez más que el Pensamiento Numérico y el Pensamiento Variacional son los que se desarrollan con mayor frecuencia al iniciar el bachillerato, dejando de lado el desarrollo de los otros tres pensamientos matemáticos.

6.4.1.2. Valoración de los expertos

La Tabla 21 da razón del tiempo de experiencia en la docencia y del perfil profesional de los expertos que evaluaron la cartilla. Los seis expertos, en promedio, cuentan con 20 años de experiencia laboral, han dirigido cursos de pedagogía y didáctica, o han asesorado trabajos de grado relacionados con la didáctica de la matemática.

DOCENTE	AÑOS DE DOCENCIA	PERFIL
Experto # 1	18 años	Licenciada en matemáticas, experiencia como asesora de prácticas de inmersión de la UPN
Experto # 2	30 años	Licenciado en matemáticas, experiencia como tutor y asesor de prácticas iniciales y de inmersión en la UPN, asesor de trabajos de grado relacionados con la didáctica de la matemática.

Experto # 3	32 años	Licenciado en electromecánica, con especialización y maestría en educación matemática. Ha dirigido cursos de Didáctica de la matemática, Geometría para primaria, Geometría dinámica, Evaluación de la matemática en la UPN.
Experto # 4	21 años	Licenciada en matemáticas con maestría en ciencias matemáticas, ha dirigido trabajos de grados relacionados a la enseñanza de la matemática.
Experto # 5	10 años	Licenciada en matemáticas con maestría docencia de las matemáticas y en discapacidad e inclusión social. Experiencia como asesora de práctica de inmersión de la UPN y de trabajos de grados relacionados con la enseñanza de la matemática
Experto # 6	10 años	Licenciada en matemáticas, experiencia como asesora de prácticas pedagógicas de la UPN

Tabla 21. Perfil académico y profesional de los expertos
Fuente. Propia

Este análisis se presenta a partir de las valoraciones que los expertos dan referente a cada sección de la cartilla (Preliminares, Módulo 1, Módulo 2, Módulo 3 y Módulo 4), teniendo en cuenta la Tabla 19 en la cual para la valoración de cada sección se distribuyen a tres de los seis expertos. Para la sección de Preliminares se tienen en total seis indicadores, tres refieren al aspecto Claridad y los otros a Pertinencia. Al analizar los resultados de las valoraciones dadas por los expertos se evidencia que de los dos de los tres expertos están totalmente de acuerdo con el aspecto Claridad y Pertinencia. El tercer experto está en desacuerdo con ambos aspectos ya que considera que es necesario dar recomendaciones no solo para el uso de la cartilla sino también al momento implementar en el aula un escenario de aprendizaje. Teniendo en cuenta lo anterior se concluye que el dos de tres expertos está totalmente de acuerdo que la sección de Preliminares es clara y pertinente.

Respecto a los módulos en estos se analizan seis aspectos: Claridad, Accesibilidad, Diseño, Lenguaje y Escritura, Secuencia y Pertinencia. Los resultados de la valoración de los expertos se observan a partir de cada indicador referente a cada aspecto para finalmente dar una conclusión general de cada módulo.

Referente al aspecto Claridad el cual solo tiene un indicador, se aprecia que ningún experto estuvo en desacuerdo ni totalmente en desacuerdo con este aspecto. En el Gráfico 2 se analiza que dos de los tres expertos para el Módulo 1, 3 y 4 coinciden con estar totalmente de acuerdo en que las instrucciones de las actividades y evaluaciones son claras, y de los tres expertos que evaluaron el Módulo 2 los tres están de acuerdo con que en dicho módulo las instrucciones de las actividades y evaluaciones son claras. Notando así que en general los expertos concuerdan que la claridad en la cartilla se hace evidente desde las actividades y evaluaciones.

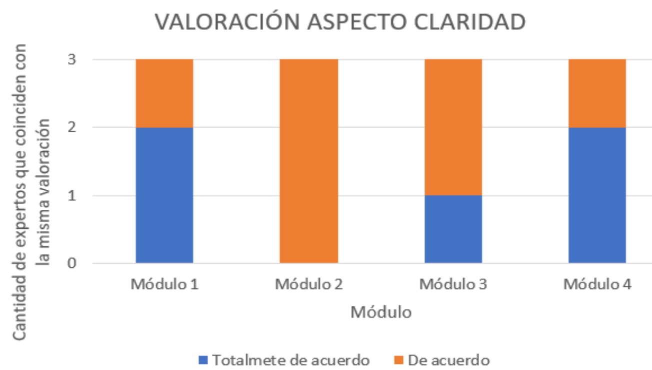


Gráfico 2. Valoración aspecto Claridad
Fuente. Propia

El gráfico 3 expone los resultados de la valoración referente al aspecto Accesibilidad en el cual se puede evidenciar entre otras cosas que ningun experto estuvo en desacuerdo o totalmente en desacuerdo con la accesibilidad a los módulos. De los tres expertos los tres están totalmente de acuerdo con que los materiales que se requieren para desarrollar el Módulos 1 son fáciles de conseguir o en su defecto construir, en el Módulo 2 de los tres expertos que valoraron dicho módulo los tres están de acuerdo en que los materiales son de fácil adquisición o construcción y para los Módulos 3

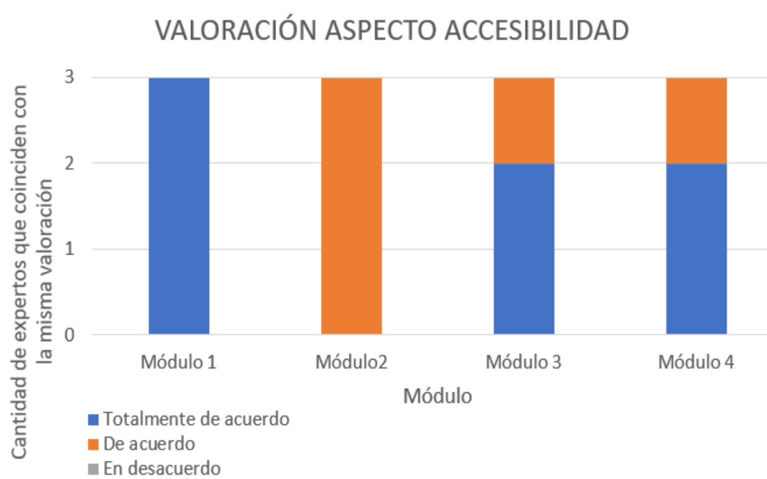


Gráfico 3. Valoración aspecto Accesibilidad
Fuente. Propia

y 4 el dos de los tres de los expertos están totalmente de acuerdo en que los materiales solicitados en dichos módulos son fáciles de adquirir o construir.

Referente al Diseño de la cartilla, el indicador refiere a si es visualmente agradable. Se evidencia que en los Módulos 1, 2 y 3 los expertos no coinciden, entre ellos, con la valoración a dicho aspecto como se muestra en el Gráfico 4 cada experto valora en un nivel diferente este aspecto, totalmente de acuerdo, de acuerdo y en desacuerdo con que el diseño es agradable visualmente, en el caso de estar en desacuerdo el experto manifiesta que se presenta exceso de información, no hay distinción entre la información para el estudiante y para el docente y los colores son muy cálidos u oscuros. No obstante, se presenta también que 2 de los tres expertos están totalmente de acuerdo con el diseño presentado en el Módulo 4 es visualmente agradable; como se evidencia en el grafico ningún experto estuvo totalmente en desacuerdo con el diseño de la cartilla.

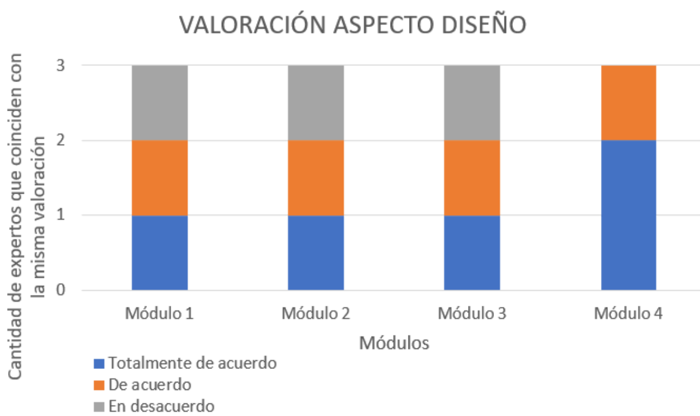


Gráfico 4. Valoración aspecto Diseño
Fuente. Propia

En cuanto al aspecto de Lenguaje y Escritura se tiene dos indicadores; en el Módulo 1 el primer indicador cuenta con que dos de los tres expertos están de acuerdo con que la redacción de los textos es acorde al nivel de los estudiantes y el otro está totalmente de acuerdo con dicha afirmación, en cuanto al segundo indicador coincide que la valoración que los expertos asignan a la redacción que tiene los textos de los docentes es de dos de los tres expertos están de acuerdo con una redacción pertinente y el restante está totalmente de acuerdo con la afirmación. Dando a notar así que para el Módulo 1 se puede afirmar que en general de los tres expertos dos está de acuerdo con el aspecto de Lenguaje y Escritura y uno está totalmente de acuerdo.

Siguiendo con el análisis anterior se evidencia que en el Módulo 2 y 3 no se logra un consenso entre los tres expertos ya que cada uno valora en un nivel diferente que la redacción de los textos sea acorde para el estudiante, y que los textos dirigidos a docentes tengan una redacción apropiada: analizando que dos de tres expertos valora de forma positiva el indicador, el restante realiza observaciones como que se puede mejorar la redacción de los textos presentados haciendo algunas sugerencias en particular dentro de la cartilla. Teniendo en cuenta esto se puede afirmar que de tres expertos dos están de acuerdo con que el Lenguaje y Escritura tienen una redacción acorde y apropiada para los estudiantes y docentes y solo un experto está en desacuerdo con dicha afirmación. Respecto al Módulo 4 de los tres expertos los tres están de acuerdo con que la redacción del texto es acorde para el estudiante y los textos de los docentes tienen una redacción apropiada.

Al realizar el análisis general del aspecto Lenguaje y Escritura se evidencia en el Gráfico 5 que ningún experto estuvo totalmente en desacuerdo con el lenguaje y redacción de algún módulo. También se observa que dos de los tres expertos están de acuerdo con que el lenguaje y la escritura de los Módulos 1, 2 y 3 es acorde y apropiada para los estudiantes y docentes, para el Módulo 4 los tres expertos están totalmente de acuerdo con dicha afirmación y solo uno de los

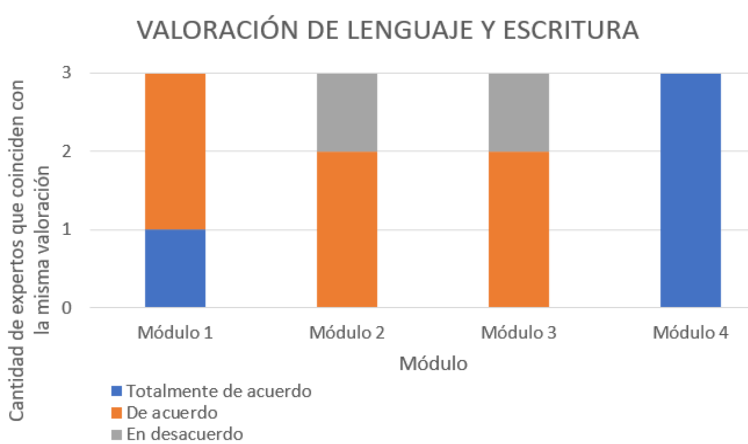


Gráfico 5. Valoración aspecto Lenguaje y Escritura
Fuente. propia

expertos está en desacuerdo con que el lenguaje y la escritura de los Módulos 2 y 3 son acordes y pertinentes para los docentes y estudiantes, haciendo sugerencias en cuanto a la redacción de cada módulo.

En cuanto al aspecto Secuencia se tienen tres indicadores. Al analizar las valoraciones de cada módulo según el indicador se observa que para el primer indicador (la secuencia de contenidos es apropiada para el grado de escolaridad al que está dirigido la cartilla) en el Módulo 1 y 3 coincide que un experto de los tres está totalmente de acuerdo con que se cumple la afirmación de dicho indicador los otros dos expertos coinciden en estar solamente de acuerdo con la aserción; para el Módulo 2 y el Módulo 4 se establece que de los tres expertos los tres están de acuerdo y totalmente de acuerdo, respectivamente, con que la secuencia es apropiada para el grado de escolaridad al que va dirigido. Es decir, que el primer indicador de del aspecto Secuencia en la cartilla es valorado de forma positiva por parte de los expertos.

Respecto al segundo indicador del aspecto de Secuencia (‘Explicar’, ‘Practicar’, ‘Socializar’, ‘Explorar’ y ‘Cierre’ dan respuesta a los aprendizajes esperados) se observa que en el Módulo 1 y 4 se presenta que dos de los tres expertos están totalmente de acuerdo con que las secciones de la cartilla dan respuesta a los aprendizajes esperados y solo uno se encuentra en desacuerdo manifestando que falta una etapa de exploración en este módulo la cual de respuesta a los aprendizajes esperados. En cuanto al Módulo 2, dos de los tres expertos se encuentra de acuerdo con la preposición del indicador y uno está totalmente de acuerdo con esta. Frente al Módulo 3 de los tres expertos los tres están totalmente de acuerdo con que este módulo da respuesta a los aprendizajes esperados desde las diferentes secciones planteadas. Lo anterior refiere que de forma general la secuencia de toda la cartilla es valorada de forma positiva por la mayoría de los expertos los cuales están de acuerdo o totalmente de acuerdo con que las diferentes secciones de la cartilla dan respuesta a los aprendizajes esperados de cada módulo.

Finalmente, respecto al tercer indicador del aspecto Secuencia (la secuencia del módulo es adecuada para su desarrollo en el aula). Referente al Módulo 1 de los tres expertos los tres coinciden en estar de acuerdo con que la secuencia que tiene el módulo es adecuada para la gestión en el aula; respecto al Módulo 2 se observa que dos de los tres expertos están de acuerdo con que la secuencia es adecuada y uno está totalmente de acuerdo con dicha afirmación. En relación con el Módulo 3 se evidencia que los tres expertos coinciden en estar totalmente de acuerdo con que la secuencia del módulo es apropiada para ser desarrollada en el aula.

Se evidencia que de forma global los expertos estuvieron de acuerdo o totalmente de acuerdo con la secuencia de la cartilla, este análisis se da a partir de examinar que cada experto en el aspecto Secuencia tenga dos o más indicadores con el mismo nivel valorativo. El Gráfico 6 expone los resultados generales del aspecto Secuencia; se observa que ningun experto tuvo dos o más indicadores en el nivel ‘en desacuerdo’ o ‘totalmente en desacuerdo’. Respeto a los Módulos 1 y 2, dos de tres expertos están de acuerdo con la secuencia de dichos módulos, referente al Módulo 3 dos de los tres expertos coinciden en estar totalmente de acuerdo con la secuencia de este, y de los tres expertos los tres están totalmente de acuerdo que en el Módulo 4 la secuencia presenta es apropiada para su desarrollo en el aula. Concluyendo que en general la cartilla presenta una secuencia adecuada para ser desarrollada en el aula.

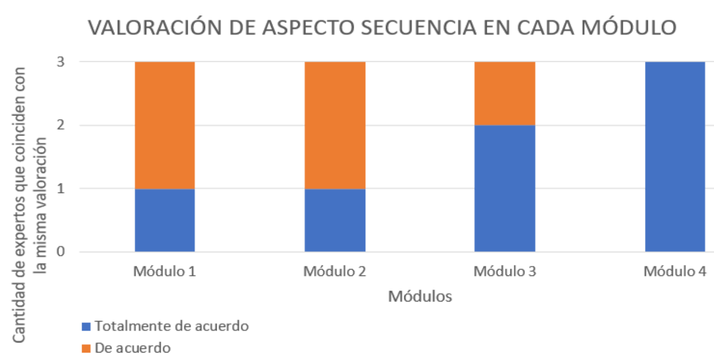


Gráfico 6. Valoración aspecto Secuencia

Fuente. propia

Finalmente, referente al aspecto Pertinencia se tienen seis indicadores. Respecto al primer indicador (el tiempo sugerido para el desarrollo del módulo es apropiado) en el Módulo 1, 2 y 4 de tres expertos los tres están de acuerdo con que el tiempo es apropiado para el desarrollo de estos módulos, en el Módulo 3 dos de tres expertos está de acuerdo con la afirmación respecto al tiempo sugerido para el módulo y el otro está totalmente de acuerdo. El segundo indicador refiere a el material propuesto para el desarrollo de las actividades en el cual para el Módulo 1 y 2 dos de tres expertos están de acuerdo con el material propuesto y uno está totalmente de acuerdo con la afirmación de dicho indicador, contrario al Módulo 4 en el cual dos de los tres expertos están totalmente de acuerdo con la aserción del indicador y solo uno está de acuerdo con esta. En el Módulo 3 de tres expertos los tres están totalmente de acuerdo con los materiales propuestos para este módulo.

El tercer indicador del aspecto Pertenencia refiere a la concordancia de las actividades para grado de escolaridad al que va dirigido la cartilla, en este se evidencia que referente al Módulo 1 y 2 dos de los tres expertos está de acuerdo con que las actividades son acordes para 6° grado y el restante de expertos están totalmente de acuerdo frente a esta afirmación, referente a la afirmación de este indicador en el Módulo 3 de tres expertos los tres están de acuerdo con la severidad que devela el indicador; finalmente el Módulo 4 denota que dos de los tres expertos están totalmente de acuerdo con que las actividades son acordes al grado de escolaridad el otro experto manifiesta estar de acuerdo con dicha afirmación. Respecto al cuarto indicar que refiere a si las evaluaciones están relacionadas de manera directa con los temas abordados en cada módulo se obtiene que para el Módulo 1 y 2 un experto de tres está totalmente de acuerdo con que las evaluaciones se relacionan directamente con las temáticas mencionadas en dicho módulo y restante de expertos manifiestan estar de acuerdo con dicha afirmación, en el Módulo 3 los tres expertos están de acuerdo con que las evaluaciones se relacionan con la temática y en el Módulo 4 se presenta que dos de tres expertos valoran este indicador en un nivel 1, es decir que están totalmente de acuerdo con la afirmación expuesta en el cuarto indicador.

Respecto a el quinto indicador, asociado a la estructura de las evaluaciones se presenta que para el Módulo 1, 2 y 4 dos de los tres expertos se encuentran totalmente de acuerdo en que la estructura que presenta las evaluaciones son acertadas para el grado de escolaridad, el restante de expertos valoran este indicador en un nivel 1, es decir están totalmente de acuerdo con la afirmación, en el Módulo 3 se presenta que de tres expertos los tres están totalmente de acuerdo con la estructura de la evaluación para 6° grado. Finalmente el último indicador da cuenta de la viabilidad para gestionar la propuesta de enseñanza en el aula con lo cual se observa las siguientes valoraciones a este indicador; dos de tres expertos coinciden en que es viable gestionar el Módulo 1 y 2 en el aula el restante de los expertos expresan estar totalmente de acuerdo con esta afirmación, para los Módulos 3 y 4 de los expertos que valoraron dichos módulos todos están totalmente de acuerdo en que es viable gestionar este módulo en el aula. Teniendo en cuenta los indicadores asociados a el aspecto Pertinencia y especialmente el último indicador las valoraciones realizadas por los expertos a cada uno de los módulos develan que es viable gestionar la propuesta de enseñanza en el aula.

Teniendo en cuenta lo anterior se expone la valoración general de cada módulo para el aspecto Pertinencia, esta valoración se da a partir de analizar si los expertos que valoraron el aspecto Pertinencia tienen cuatro o más indicadores valorados en el mismo nivel según el módulo evaluado; se hace evidente que ningún experto valoro cuatro o más indicadores en un nivel 3 o 4 (en desacuerdo y totalmente en desacuerdo). El Gráfico 7 expone que de tres expertos los tres están de acuerdo con la pertinencia del Módulo 1; respecto al Módulo 2 un experto está totalmente de acuerdo con la pertinencia que este módulo tiene y el restante de expertos se encuentran de acuerdo con la pertinencia del módulo. Se analiza que para el Módulo 3 tres expertos de tres están totalmente de acuerdo con la pertinencia del módulo y finalmente en el Módulo 4 dos de tres expertos coinciden en estar de totalmente de acuerdo con la pertinencia para dicho módulo y uno manifiesta estar solamente de acuerdo.

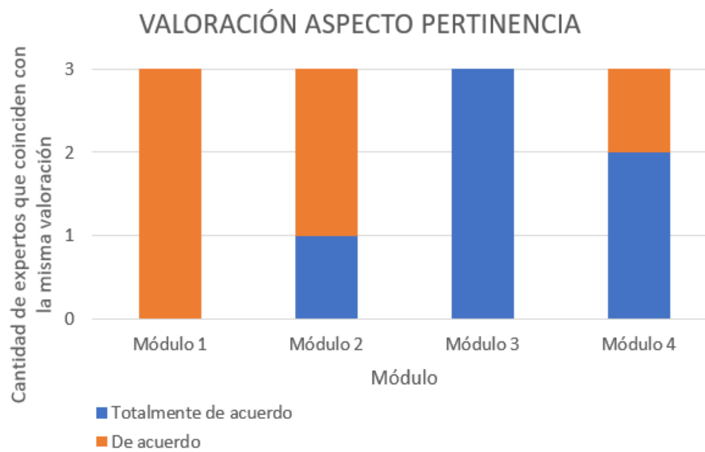


Gráfico 7. Valoración aspecto Pertinencia
Fuente. Propia

Dado el análisis anterior de las valoraciones que los expertos realizan a cada uno de los módulos se concluye que la propuesta de enseñanza cuenta con una claridad, accesibilidad, diseño gráfico, secuencia, lenguaje y escritura pertinente al grado de escolaridad a la que va dirigida.

Es preciso aclarar que si bien se diseñó las mallas que permitían valorar cada módulo esto no fue un sesgo para que varios expertos realizaran comentarios como que la presentación la cartilla es agradable no solo visualmente sino la presentación de fondo también lo es, sugerencias respecto a seguir realizando propuestas de este tipo para otros grados de escolaridad tratando de implementarlas en el aula y aportes que se relacionan con el uso de la tecnología.

6.4.2. Ajustes a la cartilla

A partir de las respuestas a la entrevista y a el cuestionario valorativo se realizan modificaciones a la cartilla que se consideran pertinentes para mejorar la comprensión de la propuesta de enseñanza.

Durante la entrevista uno de los estudiantes presenta dificultad en la actividad de Explicar # 5 de la página 17, en la cual el lenguaje usado en las instrucciones dadas y el material propuesto a usar no contribuía a que el estudiante pudiera realizar el proceso esperado en dicha actividad, por lo cual se decide modificar el lenguaje usado en el enunciado, detallar las instrucciones de la actividad y ampliar el uso del material, Anexo I. A partir de las sugerencias y observaciones que los estudiantes y expertos hicieron en sus valoraciones, se realizaron los ajustes del caso. En la Tabla 22 se presentan los cambios realizados y los que no, junto con el argumento.

SUGERENCIA DE CAMBIOS PROPUESTOS POR LOS EXPERTOS	
NO SE REALIZAN	**JUSTIFICACIÓN**
Indicar al docente que debe realizar más ejemplos	Este aspecto no fue atendido ya que se considera que la propuesta presentada es una guía que el docente puede tener en cuenta para articular el pensamiento matemático mediante la cual puede, si lo ve pertinente y necesario dar más ejemplos para ampliar la explicación conceptual con lo cual puede plantear ejemplos en contextos cercanos a los estudiantes.
REALIZADOS	**JUSTIFICACIÓN**
Se ajusta el nombre de la cartilla, quedando así: “Pensamiento matemático 6° grado, una propuesta de enseñanza desde el Pensamiento Aleatorio”	Con el fin de que el nombre sea más explícito ya que de esta manera desde el título se percibe el pensamiento matemático en el que gira la propuesta de enseñanza.
Se cambia el nombre de la sección Sugerencia, por *Nota didáctica.*	Ya que, si bien el contenido que se describe allí es adecuado para el desarrollo del módulo, el nombre dado no hacía relevancia a que la sugerencia se daba a partir de estudios pedagógicos expuestos por diferentes autores.
Se adiciona la sección C*onceptos que se abordan* en cada módulo	Con el fin de aclarar al docente las temáticas de cada uno de los módulos, para que así pueda ampliar el sustento matemático desde su experiencia como docente.
Se adiciona la sección *Sugerencia*	La cual contiene una propuesta de lo que el docente puede hacer durante la clase si lo considera pertinente y necesario.
Se ajusta el tiempo requerido para el desarrollo de cada módulo	Puesto que se considera que es una variable que es susceptible a los cronogramas y actividades que se realice en el colegio o depende del colegio si tiene secciones de clase más o menos amplias a las propuestas.

Tabla 22. Cambios que los expertos sugieren a la propuesta.
Fuente. Propia

7. CONCLUSIONES

En el presente apartado se presentan las conclusiones desde el punto de vista de los objetivos. Luego se da paso a las recomendaciones que surgen a partir del desarrollo del trabajo.

Referente al objetivo *Articular diversos contenidos del pensamiento matemático*, se concluye que en el proceso de integrar diversos conceptos se logró captar contenidos matemáticos emergentes que no estaban descritos inicialmente en los contenidos y procesos matematicos descritos en el marco de referencia, estos fueron: *experimentos deterministas, sucesos con mayor y menor frecuencia, gráficos estadísticos, variable independiente, variable aleatoria, fracciones, expresiones decimales y porcentuales, y unidades de longitud y superficie*. Estos conceptos surgieron durante el transcurro del diseño de la propuesta de enseñanza. El Diagrama 9 denota la estructura global de los contenidos matematicos para la propuesta de enseñanza. No obstante, al tratar de integrar el contenido temático acerca de *congruencia y semejanza* se presentaron dificultades tales como la no conexión directa entre contenidos, teniendo en cuenta que para abordar dicha temática autores como Arias, Allan y Romero (2016) sugieren el uso de elementos como geoplano, tangram o TIC’S, elementos de los que no se hace uso durante la propuesta, lo cual dificulta plantear actividades en las que los estudiantes puedan hacer comparaciones para determinar la semejanza y congruencia de las figuras geométricas tratadas.

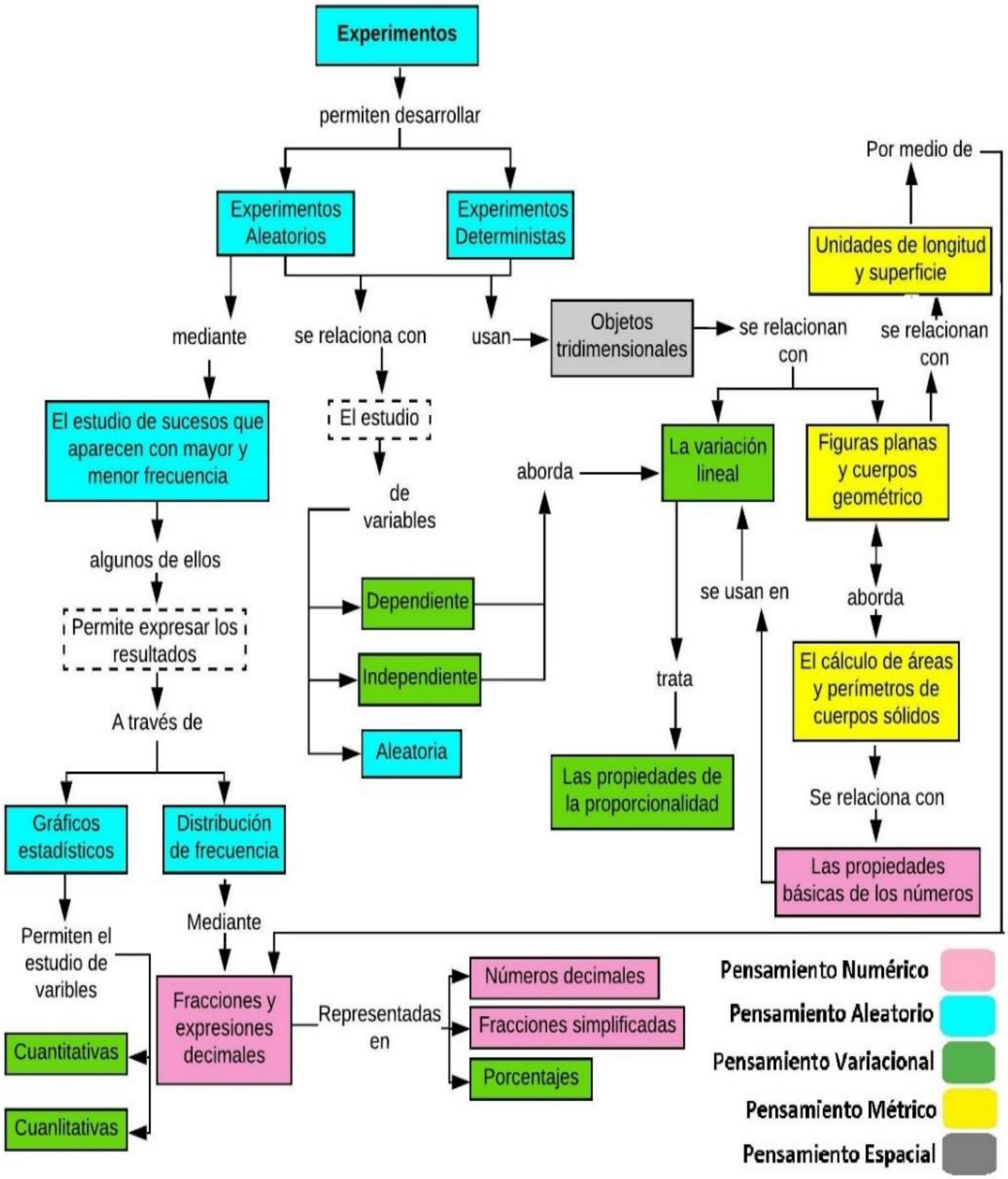


Diagrama 9. Relaciones de contenidos abordados en esta propuesta
Fuente. Propia

En lo relacionado con *diseñar estrategias metodológicas centradas en el Pensamiento Aleatorio*, se diseñó una propuesta de enseñanza estructurada en cuatro módulos, los cuales se relacionan mediante una secuencia de actividades enfocadas en una temática de interés para los estudiantes. La estrategia metodológica que se fundamenta en los escenarios de aprendizaje desde lo cual se plantea como escenario un juego tradicional que involucra el azar, mediante el cual el estudiante ve el desarrollo del Pensamiento Aleatorio, articulando los demás pensamientos a través el juego tradicional. Con este escenario el estudiante ve la necesidad de hacer un estudio estadístico, con el objetivo de dar una posible solución al problema planteado.

En lo relacionado con *validar la propuesta de enseñanza, su pertinencia y viabilidad,* se utilizó la estrategia de que estudiantes y expertos valoraran la propuesta de enseñanza por medio de una entrevista semiestructurada para los estudiantes y un cuestionario dirigido a los expertos. Luego de analizar los resultados de la entrevista propuesta se concluye que el escenario y las actividades planteadas son claras, tienen un lenguaje y una redacción pertinente para que el estudiante las desarrolle. En cuanto a las valoraciones dadas por los expertos se logra determinar que es viable gestionar propuesta de enseñanza en el aula de matemáticas.

Referente a la pregunta indagación de ¿cómo aportar al desarrollo del pensamiento matemático asumiendo como eje central e integrador del estudio de la Matemática escolar, el Pensamiento Aleatorio? se concluye que una de las estrategias para aportar al desarrollo del pensamiento matemático a partir del pensamiento Aleatorio es plantear un escenario de aprendizaje mediante el cual se genere la necesidad de realizar un estudio estadístico. Esto permite potenciar y desarrollar el pensamiento matemático fomentando la integración de diversos conceptos y procesos desde el Pensamiento Aleatorio.

De otra parte, más allá de las observaciones de fondo y estructurales que tuvo la cartilla, es satisfactorio saber que el trabajo realizado es valorado positivamente tanto por los expertos como por los estudiantes, en donde dicho trabajo busca alternativas que permitan desarrollar el pensamiento matemático integradamente. Se recomienda que si se quiere continuar con la articulación de varios conceptos matematicos desde un pensamiento matemático en específico, primero es necesario estudiar a profundidad el concepto matemático asociado a dicho pensamiento, esto con el fin de ver cuáles conceptos del mismo pensamiento se relacionan y posterior a esto crear un mapa relacionando todos los conceptos necesarios para la articulación deseada, con el fin de conocer cuales temáticas son las que se verán involucradas en el diseño de la propuesta de enseñanza.

Aunque se escogió un juego que se considera universal en el contexto colombiano, es importante que los escenarios se formulen de acuerdo con al acceso que tengan los estudiantes a tecnologías, noticias, información de último momento, entre otros, de tal manera que el escenario sea de interés del estudiante. Finalmente se recomienda tener presente el cómo enseñar y desarrollar los diferentes pensamientos matemáticos, no solamente el pensamiento matemático desde el cual va a girar toda la propuesta de enseñanza.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. (1991). Materiales para construir la geometría. Madrid, España: Síntesis S.A.

Arias, A., Allan, P., & Romero, R. (2016). Matemáticas 7° grado. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0B-JyZ7WJiu5teDJZR0VxMTlmWW8/view.

Azcarate, P. (2015). Los escenarios de aprendizaje. Una estrategia para tratar los conocimientos estocásticos en las aulas. En Arteaga, E., Batanero, J., Cañadas, P., Contreras, C., Godino, G., López, M., Molina, M. (Eds.) En Segundas Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Granada, (pp. 69-86).

Batanero, C., & Godino, J. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Cárdenas, D. M. (2017). Unidad didáctica: Geometría para 6° grado (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Cárdenas, D. M. (2018). Unidad didáctica: Geometría para 7° grado (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Cárdenas, D., & Gamboa, E. (2017). Análisis de intervención de la práctica de la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Carranza, S., & Guerrero, M. A. (2016). El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Comisión Nacional de Actividades Espaciales [CONAE] (s.f). Por qué trabajar a través de la elaboración de propuestas de enseñanza. Buenos Aires, Argentina. Programa 2Mp. Recuperado de https://2mp.conae.gov.ar/index.php/lineas-de-trabajo/formacion-docente/propuestas-innovadoras/diseno-de-propuestas-de-ensenanza/785-por-que-trabajar-a-traves-de-la-elaboracion-de-propuestas-de-ensenanza.

Dado de rol. (sin fecha). Set completo de dados de rol [ilustración]. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Dados_de_rol

Dos Santos, D. (2017). Autonomía, consentimiento y vulnerabilidad del participante de investigación clínica. Revista Bioética, 25 (1), 19-29. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bioet/v25n1/es_1983-8042-bioet-25-01-0019.pdf

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. Avances en medición, 6, 27-36. Recuperado de http: // www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Gamboa, E. B (2016). Análisis de intervención de la práctica de la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Gamboa, E. B. (2018). Unidad didáctica: Álgebra para 8° grado (sin publicar). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. UNICIENCIA, 27(1), 74-94.

García, G., Gaviria, G., Peralta, A., & Romero L. (2017). Resolución de problemas – una estrategia para el desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Francisco José de Caldas del municipio Paz de Ariporo Casanare (Tesis de maestría). Universidad La Salle, Yopal, Casanare.

Garzón, A., & García, M. (2009). Diseño de una secuencia de actividades para la enseñanza de la probabilidad simple en estudiantes de sexto grado: aplicación y validación. Comunicación presentada en 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/706/1/diseno.pdf

Godino, J., & Batanero, C. (2003). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Godino, J., & Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.

Graham, A., Powell, M., Taylor, N., Anderson, D., & Fitzgerald, R. (2013). Investigación ética con niños. Florencia: Centro de Investigaciones de UNICEF - Innocenti.

Guevara, C. (2011) Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación (Tesis de maestríar). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Guillén, S. (1997). Poliedros. Madrid, España: Síntesis S.A.

Guzmán, W. (2012). Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional a través de situaciones problemas, de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa “San José del municipio de Betulia” (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Medellín, Colombia.

Hernández, Y. (2014). Interpretación del cambio de funciones de variable real a partir de las formas de representación con el uso de Moodle (Tesis de pregrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2014). Pruebas Saber 3°, 5°y 9°. Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2014. Bogotá: ICFES. Recuperado de http://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/lineamientos_muestral_censal_saber359_2014.pdf

Jiménez, L., & Jiménez, J. (2005). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? Revista digital Matemática Educación e Internet, 6(1).

Recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2138/1944.

Leal, S. (2018). Infancias en el parque educativo: una etnografía focalizada con niños y niñas en el municipio de Santuario-Antioquía. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.

Lombardo, K. (octubre, 2013). El azar en la matemática. Quehacer Educativo, 1(12-17). Recuperado de http://www.fumtep.edu.uy/index.php/didactica/item/download/879_a947bef4b22ee72ae5159fccbaf16701

López, F., Rentería, L., & Vergara, F. (2016). El aprendizaje de las operaciones básicas matemáticas en educación primaria, mediado por ambientes virtuales de aprendizaje: el caso de la I.E Pascual Correa Flórez del municipio de Amagá, I.E San Luis del municipio de San Luis y Centro Educativo Rural El Edén del municipio de Granada (Tesis maestría). Universidad Pontifica Bolivariana, Medellín, Colombia.

López, L. (2013). Diseño de una unidad didáctica que integre los cinco pensamientos matemáticos en el grado 8° de la Institución Educativa la Candelaria de Medellín. Universidad Nacional, Medellín, Colombia.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., & Rupin, P. (2016). Matemática 7° Básico. [Versión DX Reader]. Recuperado de https://drive.google.com/drive/u/0/folders/0ByeKEkqApVXbQnJ2R002eUh3eEU

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá, D.C

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA. Bogotá D.C. Recuperado de http://www.temoa.info/es/node/49170.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas. MEN. Bogotá D.C: Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. Revista Educación Matemática, 24(1), 133-157. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a6.pdf

Pinzón, D. (2016). Habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de aplicaciones móviles. Un estudio exploratorio en semilleros de investigación escolar de la Educación Media (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Roldán, E. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Secretaría de Educación del Distrito [SED] (2007). Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático. Bogotá, Colombia. Imprenta Nacional de Colombia.

Sierra, A., Gutiérrez, P. & Tapia, G. (2018). Sentidos atribuidos a la educación familiar y escolar en las narrativas de un grupo de niños y niñas entre 5 y 9 Años de tres contextos rurales del valle de aburrá: Un estudio de caso múltiple. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. Revista EMA, 6(1), 3–26. http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

Tamayo, C., & Ramírez, A. (2009). La enseñanza de los racionales y sus propiedades a través de juegos como el dominó y el bingo. 10° Encuentro Colombiano de Educación Matemática. Colombia, Pasto.

Ursini, S., Trigueros, M., & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática, 12(2), 27-48

Valencia, P. (2015). Propuesta para la enseñanza en el aula del concepto de variable algebraica a través de situaciones problema (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

ANEXOS

Anexo A. Consentimiento informativo dirigido a los padres o acudientes.

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES[1]

En el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se diseña de la Cartilla *'Pensamiento Matemático 6° grado'* como producto del Trabajo de Grado titulado *Pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio. Propuesta de enseñanza para 6° grado*.

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Ley 1098 de 2006 – Código de la Infancia y la Adolescencia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento.

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Descripción breve y clara de la investigación	Trabajo de grado que desarrolla una propuesta de enseñanza enfocada en el desarrollo del Pensamiento Aleatorio, con el objetivo de integrar las asignaturas del área de Matemáticas mediante la Estadística en el aula de la educación básica, específicamente en 6° grado.
Acciones para realizar por parte del estudiante	El estudiante tendrá que valorar secciones de la cartilla, a través de una entrevista semiestructurada que llevará a cabo las investigadoras.
Descripción de los posibles riesgos de participar en la valoración de la cartilla.	• Influenciar el conocimiento desarrollado en el colegio, a partir del trabajo con la cartilla. • Generar la idea o impresión de que la valoración es un juzgamiento de la clase de matemáticas de su colegio. • Vulnerabilidad anímica de los participantes respecto a sus conocimientos en relación con la temática expuesta en la cartilla.
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación.	• Ampliar la mirada sobre el aprendizaje de las matemáticas. • Despertar el interés por algún tema particular de estudio.
	Nombres y Apellidos:

[1] Tomado y adaptado de: http://mpp.pedagogica.edu.co/verseccion.php?ids=21&idh=46

Datos generales del investigador principal	**N° de Identificación:**	**Teléfono:**	
	Correo electrónico:		
	Dirección:		

PARTE DOS: MANEJO DE LOS DATOS

Respecto al manejo que las autoras del trabajo de grado tienen con la información brindada por los participantes que valoran la propuesta.	♦ Se da a conocer que toda la información suministrada por los padres de familia, acudientes y estudiantes recibirá un trato justo y cuidadoso para que no sufran algún daño o puedan sentirse incomodos antes, durante y después de la participación, de igual manera se garantiza el respeto a la protección de la identidad de los partícipes. ♦ En cuanto al trato justo y cuidadoso se garantiza que toda la información suministrada en la valoración de la cartilla y en los consentimientos, será manipulada de manera prudente y cautelosa, únicamente por las autoras de este trabajo; igualmente se garantiza que, al momento de hacer alguna publicación referente a las conclusiones de la valoración, no se expondrán los nombres de los padres de familia, acudientes o estudiantes.

PARTE TRES: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo ____________________________________ mayor de edad, identificado(a) con Cédula de Ciudadanía Nº__________________ de__________________, número de celular: _______________________ y correo electrónico:___________________________________

Como adulto responsable del niño:
Nombre(s) y Apellidos: Tipo de Identificación N°

______________________ _____________________ _______________________

Autorizo expresamente su participación en este proyecto y

Declaro que:

1. El niño(a) ha sido invitado(a) a participar en el estudio de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. He sido informado(a) y conozco de forma detallada los posibles riesgos y beneficios derivados de la participación del niño(a) en el proyecto.
5. No tengo ninguna duda sobre la participación del niño(a), por lo que estoy de acuerdo en que él o ella haga parte de esta investigación.

6. El niño(a) puede dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Conozco el mecanismo mediante el cual las investigadoras garantizan la custodia y confidencialidad de los datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
8. Autorizo expresamente a las autoras de este proyecto para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.

En constancia, el presente documento ha sido leído y entendido por mí, en su integridad de manera libre y espontánea.

Firma del adulto responsable del niño(a): ____________________________________

Nombre del adulto responsable del niño(a): ________________________
Nº Identificación: _____________________ Fecha: _________________

Declaración de las autoras del trabajo de grado: Nosotras certificamos que le hemos explicado al adulto responsable del niño(a) la naturaleza y el objeto del presente proyecto y los posibles riesgos y beneficios que puedan surgir de la misma. Adicionalmente, le hemos aclarado ampliamente las dudas que ha planteado y le he explicado con precisión el contenido del presente formato de consentimiento informado. Dejamos constancia que en todo momento el respeto de los derechos el menor será prioridad y se acogerá con celo lo establecido en el Código de la Infancia y la Adolescencia, especialmente en relación con las responsabilidades de los medios de comunicación, indicadas en el Artículo 47.

En constancia firman las autoras responsables del proyecto,

ERIKA BRIYID GAMBOA MATEUS Cédula 1032481511 Tel.3133535406 dma_ebgamboam013@pedagogica.edu.co	DIANA MARCELA CÁRDENAS FLÓREZ Cédula 1018421035 Tel. 3165206698 dma_dmcardenasf035@pedagogica.edu.co

Anexo B. Consentimiento informativo dirigido a los docentes.

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Licenciatura en Matemáticas

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES[2]

En el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se diseña la Cartilla *'Pensamiento Matemático 6° grado'* como producto del Trabajo de Grado titulado *Pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio. Propuesta de enseñanza para 6° grado*. Se requiere que por favor lea detenidamente, y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento diligenciando la parte tres de este documento.

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

<table>
<tr><td>Descripción breve y clara de la investigación</td><td colspan="3">Trabajo de grado que refiere al diseño de una propuesta de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio en 6° grado, que se enmarca en la metodología de aula escenarios de aprendizaje propuesta por Azcarate (2017). Dicha propuesta se desarrolla en una cartilla denominada 'Pensamiento matemático 6° grado'; la cual surge a partir de la iniciativa de las autoras del trabajo, al notar que en colegios públicos y privados (tanto en área urbana como municipal) donde realizaron las prácticas iniciales y las prácticas de profundización propias de los espacios académicos del Ambiente de Pedagogía y Didacta de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, no se integraba el Pensamiento Aleatorio con los otros pensamientos.</td></tr>
<tr><td>Acciones para realizar por parte del docente</td><td colspan="3">El docente debe evaluar la cartilla 'Pensamiento Matemático 6° grado' desde una postura crítica valorando fortalezas, debilidades y la viabilidad de la propuesta didáctica allí expuesta.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Datos generales del investigador principal</td><td colspan="3">Nombres y Apellidos:</td></tr>
<tr><td>N° de Identificación:</td><td>Teléfono:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Correo electrónico:</td></tr>
</table>

[2] Tomado y adaptado de: http://mpp.pedagogica.edu.co/verseccion.php?ids=21&idh=46

PARTE DOS: MANEJO DE LOS DATOS

Respecto al manejo que las autoras del trabajo tienen con la información brindada por los participantes que valoran la propuesta.	• Se da a conocer que toda la información suministrada por el docente recibirá un trato justo y cuidadoso para que no sufran algún daño o puedan sentirse incomodos antes, durante y después de la participación. • Se garantiza el respeto a la protección de la identidad del docente. • En cuanto al trato justo y cuidadoso, se garantiza que toda la información suministrada en la valoración de la cartilla y en los consentimientos, será manipulada de manera prudente y cautelosa, únicamente por las autoras de este trabajo y la asesora del trabajo de grado. • Se garantiza que, al momento de hacer alguna publicación referente a las conclusiones de la valoración, se cuidará el nombre y reputación de los docentes.
Respecto al manejo que el docente debe tener con la información de este trabajo, a la cual tiene acceso.	• La información debe ser tratada de manera confidencial y privada de tal forma que esta no sea divulgada con sus pares. • El docente no puede copiar la cartilla, de ningún modo (fotos, fotocopias, etc.) hasta no tener la versión final de la misma. • El docente no puede desarrollar la cartilla en sus clases hasta no tener la versión final de la misma.

PARTE TRES: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo ______________________________ mayor de edad, identificado(a) con Cédula de Ciudadanía Nº________________ de_______________, número de celular: _____________ y correo electrónico:______________________

Autorizo mi participación en este proyecto y

Declaro que:

1. He sido invitado(a) a participar en el estudio de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. No tengo ninguna duda sobre la participación, por lo que estoy de acuerdo en hacer parte de esta investigación.
5. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de los datos personales, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito.
6. Autorizo expresamente a las autoras de este proyecto para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto, con fines netamente académicos/investigativos.

En constancia afirmo que, el presente documento ha sido leído y entendido por mí de manera libre y espontánea.

Firma del (de la) docente de matemáticas: ________________________________
Nº Identificación: ________________________
Fecha: __________________________

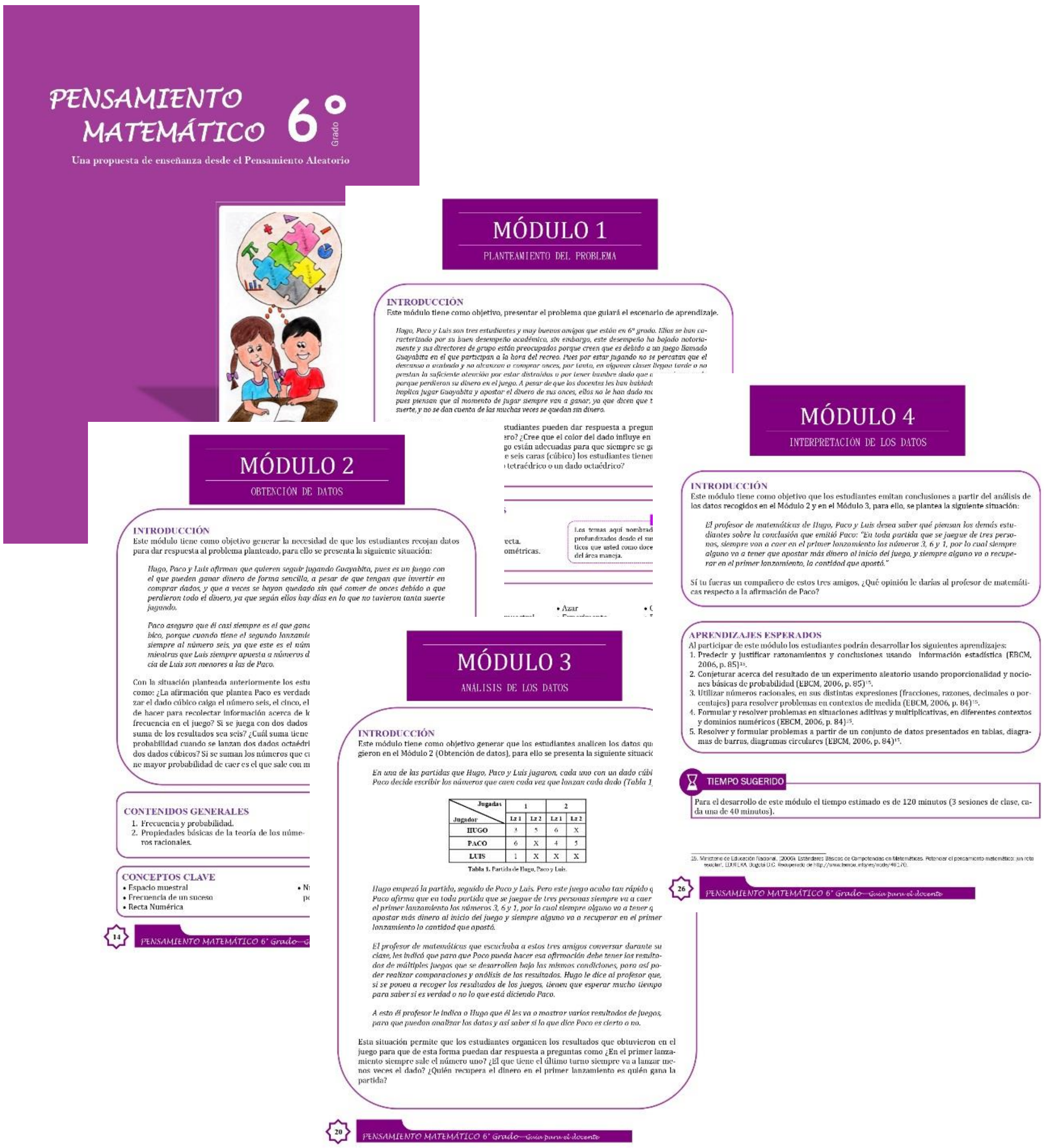
Declaración de las autoras del trabajo de grado: Nosotras certificamos que le hemos explicado al / a la docente la naturaleza y el objeto del presente proyecto. Adicionalmente, le hemos aclarado ampliamente las dudas que ha planteado y le hemos explicado con precisión el contenido del presente formato de consentimiento informado.

En constancia firman las autoras responsables del proyecto,

ERIKA BRIYID GAMBOA MATEUS Cédula 1032481511 Tel.3133535406 dma_ebgamboam313@pedagogica.edu.co	DIANA MARCELA CÁRDENAS FLÓREZ Cédula 1018421035 Tel. 3165206698 dma_dmcardenasf035@pedagogica.edu.co

Anexo C. Módulos de la cartilla

La cartilla ‘Pensamiento matemático 6° grado, una propuesta desde el Pensamiento Aleatorio’ consta de 61 páginas las cuales se encuentran en su totalidad como documento anexo a este trabajo de grado.



Anexo D. Cuestionario dirigido a estudiantes

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Licenciatura en Matemáticas
Elaborado por: Diana Marcela Cárdenas Flórez
Erika Briyid Gamboa Mateus

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURA CON ESTUDIANTES

OBJETIVO:
Evaluar si las descripciones e instrucciones de las actividades descritas en el “Explicar”, “Practicar”, “Sintetizar” y “Evaluaciones”, planteadas para cada módulo son claras y comprensibles para su desarrollo.

INDICACIONES GENERALES:
Tenga en cuenta que las tres (3) primeras preguntas, se repetirán para cada uno de los componentes (Explicar, Practicar, Sintetizar y Evaluar) donde se debe solicitar un argumento o explicación de su respuesta.

PREGUNTAS:
1. **Claridad:** ¿Tuvo la necesidad de leer algún enunciado o actividad más de tres veces para lograr comprender lo qué se debía hacer?
2. **Lenguaje:** ¿El lenguaje utilizado ayuda para la comprensión del contenido de la cartilla?
3. **Redacción:** ¿Comprende a plenitud la actividad expuesta en el enunciado?

COMPONENTE / ACTIVIDAD	RESPUESTA Y OBSERVACIONES
EXPLICAR (# 2, Página 22)	**Claridad: Si ___ No ___** ___________________________ ___________________________
	Lenguaje: Si ___ No ___ ___________________________ ___________________________
	Redacción: Si ___ No ___ ___________________________ ___________________________
PRACTICAR (Actividad # 1, Página 32 y 33)	**Claridad: Si ___ No ___** ___________________________ ___________________________
	Lenguaje: Si ___ No ___ ___________________________ ___________________________
	Redacción: Si ___ No ___ ___________________________ ___________________________

SINTETIZAR (Módulo 2, Página 19)	**Claridad: Si ___ No ___** ____ ____
	Lenguaje: Si ___ No ___ ____ ____
	Redacción: Si ___ No ___ ____ ____
EVALUAR (#1, Página 53, Ítems: 1 y 3)	**Claridad: Si ___ No ___** ____ ____
	Lenguaje: Si ___ No ___ ____ ____
	Redacción: Si ___ No ___ ____ ____

Las preguntas de la 4 a la 7 se realizan con el fin de que el estudiante evalúe de forma general diferentes secciones de la cartilla.

4. ¿Al leer las reglas del juego, puede empezar a jugarlo sin ninguna complicación?
Sí___ No___
¿Por qué?: ____
____

5. ¿Los materiales solicitados para desarrollar las actividades son de fácil acceso?
Sí___ No___
¿Por qué?:
____
____

6. De los temas abordados en la cartilla, ¿Cuál(es) ya había trabajado en la institución educativa?
____
____

7. ¿Qué de la propuesta le motiva a aprender matemáticas?
____
____

Gracias por su colaboración y su tiempo.

Anexo E. Cuestionario dirigido a los docentes

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Licenciatura en Matemáticas

CUESTIONARIO VALORATIVO[3]
DOCENTE #

NOMBRES Y APELLIDOS: ____

AÑOS DE EXPERIENCIA COMO DOCENTE DE MATEMÁTICAS: ____________

OBJETIVO GENERAL DEL CUESTIONARIO: Analizar la viabilidad de una propuesta de enseñanza (cartilla) para el desarrollo del pensamiento matemático a partir del pensamiento aleatorio.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DEL CUESTIONARIO

- Evaluar la pertinencia de las secciones: Preliminares, Módulo 1 y Módulo 4.
- Identificar fortalezas y debilidades de las secciones asignadas.

ESCALA DE VALORACIÓN:
A continuación, se describe la escala de valoración que se debe utilizar para cada uno de los aspectos.

- Nivel 1: Totalmente de acuerdo
- Nivel 2: De acuerdo
- Nivel 3: En desacuerdo
- Nivel 4: Totalmente en desacuerdo

INSTRUCCIONES

1. Lea detenidamente **los Preliminares, el Módulo 1 y el Módulo 4,** y usando la escala de valoración califique cada uno de los indicadores. Si sus respuestas están en nivel 3 o 4, por favor escriba los argumentos que no permiten tener una mejor calificación.

[3] Elaborado por: Diana Marcela Cárdenas Flórez y Erika Briyid Gamboa Mateus

VALORACIÓN DE PRELIMINARES

Preliminares. Hacen referencia a las siete (7) primeras páginas de la cartilla '*Pensamiento matemático 6° grado'.* En la Tabla 1 se exponen los aspectos a evaluar junto con sus respectivos indicadores de valoración.

ASPECTOS	INDICADOR	NIVEL				OBSERVACIONES
Claridad	La introducción de la cartilla es clara.	1	2	3	4	
	La descripción de los módulos permite comprender la estructura de estos para poder avanzar en su desarrollo.	1	2	3	4	
	Las recomendaciones de la cartilla son entendibles.	1	2	3	4	
Pertinencia	El escenario de aprendizaje que se plantea es acorde para el nivel escolar al que va dirigida la cartilla.	1	2	3	4	
	Las recomendaciones de la cartilla son acordes para poder desarrollar los módulos leídos.	1	2	3	4	
	El escenario de aprendizaje propuesto es apropiado para el desarrollo del pensamiento matemático.	1	2	3	4	

Tabla 1. Valoración de preliminares
Fuente: Propia

VALORACIÓN MÓDULO 1

Módulo 1. Hace referencia a la sección de la Guía para el Docente que va de la página 9 hasta la 13, y la Guía para el Estudiante que se divide en las actividades que el estudiante debe desarrollar. Van de la página 30 hasta la 37, y las evaluaciones que el estudiante debe de realizar, que están en las páginas 53 y 54. En la Tabla 2 se presentan los aspectos a evaluar junto con sus respectivos indicadores de valoración.

ASPECTO	INDICADOR	NIVEL				OBSERVACIONES
Claridad	Las instrucciones de actividades y evaluaciones son claras.	1	2	3	4	
Accesibilidad	El material propuesto para el desarrollo de las actividades es fácil de adquirir o construir.	1	2	3	4	
Diseño	El diseño de la cartilla es visualmente agradable.	1	2	3	4	
Lenguaje y escritura	La redacción de los textos es acorde al nivel de los estudiantes.	1	2	3	4	
	Los textos dirigidos a los docentes tienen una redacción apropiada	1	2	3	4	
Secuencia	La secuencia de contenidos es apropiada para el grado de escolaridad al que está dirigido la cartilla.	1	2	3	4	
	El 'Explicar', 'Practicar', 'socializar', 'Explorar' y 'Cierre' dan respuesta a los aprendizajes esperados que se plantearon.	1	2	3	4	
	La secuencia del Módulo es adecuada para su desarrollo den el aula.	1	2	3	4	
Pertinencia	El tiempo sugerido para el desarrollo del módulo es apropiado.	1	2	3	4	
	El material propuesto para el desarrollo de las actividades es adecuado para el nivel de escolaridad.	1	2	3	4	
	Las actividades son acordes para el grado de escolaridad al que está dirigido la cartilla.	1	2	3	4	
	Las evaluaciones están directamente relacionadas con los temas tratados.	1	2	3	4	
	La estructura de las evaluaciones es acertada para el grado de escolaridad.	1	2	3	4	
	Es viable gestionar la propuesta en un aula regular de matemáticas.	1	2	3	4	

Tabla 2. Valoración Módulo 1
Fuente: Propia

VALORACIÓN MÓDULO 4

Módulo 4. Hace referencia a la sección de la Guía para el Docente que va de la página 26 hasta la 28, y la Guía para el Estudiante que se divide en las actividades que el estudiante debe desarrollar, que está en la página 52, y las evaluaciones que el estudiante debe de realizar, que van desde la página 60 hasta la 62. En la Tabla 3 se presentan los aspectos a evaluar junto con sus respectivos indicadores de valoración.

ASPECTO	INDICADOR	NIVEL				OBSERVACIONES
Claridad	Las instrucciones de actividades y evaluaciones son claras.	1	2	3	4	
Accesibilidad	El material propuesto para el desarrollo de las actividades es fácil de adquirir o construir.	1	2	3	4	
Diseño	El diseño de la cartilla es visualmente agradable.	1	2	3	4	
Lenguaje y escritura	La redacción de los textos es acorde al nivel de los estudiantes.	1	2	3	4	
	Los textos dirigidos a los docentes tienen una redacción apropiada	1	2	3	4	
Secuencia	La secuencia de contenidos es apropiada para el grado de escolaridad al que está dirigido la cartilla.	1	2	3	4	
	El 'Explicar', 'Practicar', 'Socializar', 'Explorar' y 'Cierre' dan respuesta a los aprendizajes esperados que se plantearon.	1	2	3	4	
	La secuencia del Módulo es adecuada para su desarrollo den el aula.	1	2	3	4	
Pertinencia	El tiempo sugerido para el desarrollo del módulo es apropiado.	1	2	3	4	
	El material propuesto para el desarrollo de las actividades es adecuado para el nivel de escolaridad.	1	2	3	4	
	Las actividades son acordes para el grado de escolaridad al que está dirigido la cartilla.	1	2	3	4	
	Las evaluaciones están directamente relacionadas con los temas tratados.	1	2	3	4	

	La estructura de las evaluaciones es acertada para el grado de escolaridad.	1	2	3	4	
	Es viable gestionar la propuesta en un aula regular de matemáticas.	1	2	3	4	

Tabla 3. Valoración Módulo 4
Fuente: Propia

Gracias por su tiempo y colaboración

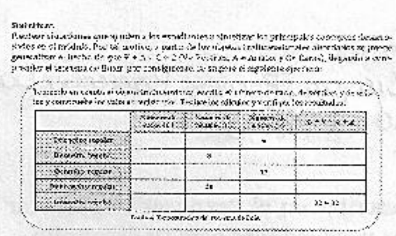
Anexo F. Respuestas a la entrevista semiestructurada

PREGUNTAS:

1. **Claridad:** ¿Tuvo la necesidad de leer algún enunciado o actividad más de tres veces para lograr comprender lo qué se debía hacer?
2. **Lenguaje:** ¿El lenguaje utilizado ayuda para la comprensión del contenido de la cartilla?
3. **Redacción:** ¿Comprende a plenitud la actividad expuesta en el enunciado?

COMPONENTE / ACTIVIDAD	RESPUESTA Y OBSERVACIONES
EXPLICAR (# 2, Página 22)	**Claridad:** Si X No ___ Porque no he visto el tema **Lenguaje:** Si X No ___ Es coherente, si se entiende **Redacción:** Si X No ___ Pero no comprendo el tema

EVALUAR (#1, Página 53, Ítems: 1 y 3)	**Claridad:** Si X No ~~X~~ Porque no sabia que era un dado tetraedrico **Lenguaje:** Si ___ No X No sabia que era el dado tetraedrico **Redacción:** Si X No ___

SINTETIZAR (Mód 1, Página 13) 	**Claridad:** Si ___ No X² Dos veces, por las palabras que no conozco, sería bueno tener una imagen de cada dado para guiarnos **Lenguaje:** Si X No ___ Pero no se que es eso de Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro... No hemos visto eso ni el Teorema de Euler **Redacción:** Si X No ___ Pues según entiendo, a esas figuras toca sacarle las partes como aristas, caras y eso. Y hacer un cálculo

EVALUAR (#3, Página 58 y 59, Ítems: 2 y 3)	**Claridad: Si** ___ **No** ___ Lo leí varias veces porque no conozco el tema. Pero se comprende que se debe hacer. **Lenguaje: Si** X **No** ___ Explica donde estan los datos y de donde se pueden obtener los datos **Redacción: Si** X **No** ___ Con la información del problema se da a conocer que se debe desarollar.

EVALUAR (#4 , Pág: 62) 	**Claridad: Si** ___ **No** X Porque no explica bien cual es la Tabla 1, esta confendida **Lenguaje: Si** X **No** ___ Pero no se entiende que es Lz1, Lz2 ni la X. **Redacción: Si** X **No** ___ Toca decir si es mejor jugar con el dado tetraedrico o cubico pero no se que decir lo conozco el dado tetraedico para dar algo

COMPONENTE / ACTIVIDAD	RESPUESTA Y OBSERVACIONES
EXPLICAR (# 3, Página 16) **Explicar 3.** Explicar cómo hallar la probabilidad de un evento, para lo cual se propone plantear a los estudiantes la siguiente situación: Uno de los directores de curso le pregunta al profesor de matemáticas sobre la probabilidad de sacar siempre un mismo número después de hacer varios lanzamientos. El profesor para explicarle de forma clara saca un dado cúbico y plantea la siguiente situación: se lanza 10 veces un dado y se anotan los resultados según se muestra en la Tabla 5. Por cada vez que el dado cae en esa cara, se escribe una X.	**Claridad: Si** ___ **No** X Dos veces, al comienzo no entendía que significaba la X, pero leí de nuevo la tabla y el texto y entendí **Lenguaje: Si** X **No** ___ Tienen palabras conocidas **Redacción: Si** X **No** ___ Dice que alguien necesita hallar la probabilidad de ciertos lanzamiento con un dado. Se saca diviendo los lanzamientos entre el total.

Anexo G. Respuestas de la malla valorativa

	La descripción de los módulos permite comprender la estructura de estos para poder avanzar en su desarrollo.	1	2	3	4	Nivel 3 Considero que al revisar la sección “Descripción de los módulos” el lector queda con una idea clara acerca de lo que va a encontrar en cada módulo. El comentario que tengo es que lo que está expuesto, que es interesante y se corresponde con lo que habitualmente se pide en el “currículo oficial”, hay una ligera contradicción con la idea de escenario: a través de estos se busca que los estudiantes realicen indagaciones vayan necesitando, en algunos momentos, de las matemáticas. Es decir, las matemáticas emergen según las necesidades de la pesquisa que estén haciendo los estudiantes, no están predeterminadas, como tal vez se insinúa en esta sección de la cartilla.
	Las recomendaciones de la cartilla son entendibles.	1	2	3	4	Nivel 3 Pareciera que son recomendaciones para el profesor. Sería importante incluir alguna recomendación que tenga que ver con la perspectiva de los escenarios, que es en la que se enmarca toda la propuesta de la cartilla.
Diseño	El diseño de la cartilla es visualmente agradable.	1	2	X	4	Exceso de información en la misma página (guía del docente y los soportes o referentes teóricos, pedagógicos y/o didácticos)
Secuencia	El ‘Explicar’, ‘Practicar’, ‘socializar’, ‘explorar’ y ‘cierre’ dan respuesta a los aprendizajes esperados que se plantearon.	1	2	X	4	Es una ruta un tanto conductista. Porque la mediación del docente, la socialización y la validación está presente durante todo el proceso. La socialización no es exclusiva de los estudiantes. Faltaría una etapa de exploración.

ASPECTOS	INDICADOR	NIVEL				OBSERVACIONES
Claridad	La introducción de la cartilla es clara.	1	2	3	4	Nivel 3 Aunque la intención reportada en la introducción pertinente para la educación, me parece que hay que revisar detenidamente el documento de Azcárate.

Diseño	El diseño de la cartilla es visualmente agradable.	1	2	3	4	los colores son muy calidos y oscuros
Lenguaje y escritura	La redacción de los textos es acorde al nivel de los estudiantes.	1	2	3	4	Hay que mejorar por ello hago sugerencias
	Los textos dirigidos a los docentes tienen una redacción apropiada	1	2	3	4	

Anexo H. Observaciones adicionales dadas por los expertos

Al momento de enviar la valoración de los módulos uno de los expertos realiza los siguientes comentarios adicionales

"Te cuento que me encanta tu trabajo de verdad, un diseño muy juicioso y se ve la pasión del ser maestro, toda una profesional. Voy a copiarme de algunas actividades para el año entrante, yo estoy enseñando en sexto este año esperar que el año entrante me dejen el mismo nivel obvio, sin quitarte el crédito. Super muchas gracias es un muy buen material"

Otro experto, vía correo hizo llegar las siguientes observaciones.

Colegas, buenas tardes
Muy interesante lectura, una muy pero muy agradable presentación de fondo y desde lo visual.
Es una propuesta muy interesante con un juego que puede motivar el trabajo de los estudiantes. Se encuentra bien desarrollado y tiene una presentación profesional.

Se debería explicar el juego con un ejemplo: que es lo mejor para primer lanzamiento, cuando debo apostar y cuanto según el número que me salga, etc. No todos los niños de hoy lo conocen. ¿existe una versión para celular? (holamundo.co ofrece una versión del juego lanzada el 30 de octubre de 2017) Las normas del juego están rigurosamente explicadas lo cual es de suma importancia para dar seriedad al proceso: los estudiantes son muy críticos cuando se les ofrece una actividad como esta sin el tratamiento adecuado.

El dado tiene demasiada importancia en el trabajo y en el juego es lo que menos interesa: lo importante es el segundo lanzamiento.

Se debería aclarar que es una cartilla para el docente. El anexo con las actividades para estudiantes está muy bien presentado, con una muy agradable presentación visual y detallado. Preocupa un poco el tiempo que se requiere para su aplicación puesto que en los colegios los cronogramas son muy ajustados y el tiempo empleado "de más" luego hace falta.

Todas las secciones están fundamentadas y se articulan para un producto final que motivan para aplicar en clase. Las secciones **Socializar** y **Explicar** son de gran importancia para el desarrollo de las actividades por parte del docente

INFORME CARTILLA PENSAMIENTO MATEMÁTICO 6

MÓDULO 1

1. Se encuentran algunos pocos errores de escritura, se recomienda revisar todo el documento.
2. Me parece que es muy ambicioso el aspecto de "aprendizajes esperados".
3. En el "durante la clase" hay un "explorar" pero esta sección no se explica en la descripción de los módulos (página 6)
4. Los recuadros que llaman "sugerencia" son bastante pertinentes pero el nombre no parece corresponder con lo que allí se expone.
5. Así como se destaca un recuadro "sugerencias" debía resaltarse un cuadro con lo que debe explicar el profesor desde lo matemático (nombrarlo sin desarrollarlo); esto porque el docente debe comprender que se le está brindando una propuesta de enseñanza pero requiere del sustento matemático que él como profesional del área maneja.
6. Pregunto: ¿las sesiones de clase que se proponen para el desarrollo del módulo son seguidas? Esto porque me parece que del "Explicar 1" al "Explicar 2", del módulo 1 se da un salto abrupto, la idea es que se le sugiera al docente que amplíe la discusión y plantee otros situaciones para profundizar en el concepto.
7. Igual, de la actividad de proporción directa a la de inversa se pasa rápidamente; seguramente el docente debe dedicar más tiempo a las situaciones de proporción directa en otra sesión de clase. Por eso pregunto si las sesiones se proponen consecutivas se, si no es así indicárselo al docente y sugerirle el planteamiento de situaciones similares para ampliar la explicación conceptual. (No digo que deban decirle los ejemplos a tratar, pero insistir en la necesidad de estudiar otros ejemplos similares).
8. En la actividad de compra de promociones el domingo (página 11), creo pertinente aclarar si el valor es por paquete o el valor es el total.
9. Sugiero que en la tabla de la Actividad 1 Hagamos cuentas, se coloque el dinero invertido de dos dados, además del de un dado.
10. En la Actividad 2 Paco compra dados, no me queda claro cuál es el problema de Paco, (porque en la pregunta 3 pide explicar cómo lo soluciona).
11. En el "Explicar 3" ¿se permite el uso de la calculadora? Esto porque muchos docentes consideran que en los primeros niveles de secundaria no se debe permitir su uso; entonces, como creo que se debe usar para esta actividad colocar una "sugerencia" de tipo didáctico que apoye tal uso. Si la sugerencia de ustedes es no usar calculadora me parece una actividad demasiado desgastante por la cantidad de cálculos numéricos.
12. Revisando las actividades parece que las fracciones y su representación en forma de número decimal deben ser parte de los conceptos clave. ¿O debe tenerse una lista de conceptos previos e incluirlos?

13. En la Actividad 3 Más dinero para apostar, puede sugerirse que el docente acuda al trabajo en grupo de modo que asigne puntos a desarrollar a cada grupo, me refiero para los puntos 3, 4, 5, y 6. En la socialización se verifican procesos y se descubren errores.

MÓDULO 3

1. En los aprendizajes esperados algunos se escriben con el verbo inicial en infinitivo y otro en primera persona, sugiero unificar.
2. Otra vez me surge la duda si se debía hacer un listado de conceptos previos, o la idea es que el docente los desarrolle a medida que avanza en el desarrollo de la cartilla. Esto especialmente porque se requiere de las fracciones y decimales.
3. En este módulo se hace más viable que se desarrollen las sesiones de clase seguidas, cosa que me parece que no sucede con el módulo 1.
4. Me queda la duda si al final se retoman las inquietudes iniciales de los profesores frente al bajo rendimiento de Hugo, Paco y Luis. Creo que debe proponerse una reflexión acerca de los juegos de azar y las apuestas con dinero de por medio.
5. Considero que el nombre de la cartilla debe ser más explícito, por ejemplo:
   PENSAMIENTO MATEMÁTICO 6-
   UNA PROPUESTA DESDE EL PENSAMIENTO ALEATORIO

Me parece una muy buena propuesta, la considero pertinente y acorde con lo requerido para el grado y es grato ver que se trate de llevar el trabajo de grado a la escuela y mostrar una propuesta alternativa a lo que usualmente se realiza. Es arriesgada pero el solo reto de pensar y poner en marcha un proyecto de estas características ya es una ganancia. Por favor no terminen aquí, podría pensarse en PENSAMIENTO MATEMÁTICO 7

MIL GRACIAS

El docente # 4 vía correo hizo llegar la siguiente observación.4

Hola.

Les envío mi concepto.

Me parece que el ejercicio que hicieron excede un poco lo esperado para un trabajo de grado. Gracias a la tarea que me propusieron hacer, noto que hay muchos aspectos los que se deben tener en cuenta en el momento de diseñar una cartilla, aspectos que no incluyen únicamente a los profesionales de la educación matemática, sino a otros de diferentes áreas de conocimiento. Por eso traté de hacer énfasis en lo que corresponde a mi campo de saber. Espero haber contribuido al mejoramiento de su propuesta.

A manera de sugerencia en el caso en que quieran publicar la cartilla, es importante que estudien la normatividad asociada a los derechos de autor. Estos días estuve revisando el asunto y hay muchas cosas que no sabemos y que es necesario revisar para no meterse en problemas.

Cordialmente,

Anexo I. Ajustes realizados al Explicar #5

SIN AJUSTES

Explicar 5.

Con el fin de introducir la representación de números racionales (números fraccionarios y números decimales) en la recta numérica, se utilizará la columna ‘fracción simplificada’ (Tabla 5). Para lo que se plantea el siguiente ejercicio:

Tome los valores sin repetir de la columna ‘fracción simplificada’:

1. Complete la siguiente tabla:

Fracción simplificada	Numeró decimal
3/16	
	0,25
	0,138888

Tabla 6. Fracción simplificada y número decimal.

2. Dibuje en dos hojas en blanco dos rectas numéricas cuya unidad de medida tengan las misma longitud.
3. En la recta numérica de la primera hoja represente los valores de la columna Fracción simplificada.
4. En la recta numérica de la segunda hoja represente los valores de la columna ‘número decimal’.

> 5. Sobreponga ambas rectas y mencione qué pasa con los puntos dibujados.

CON AJUSTES

Explicar 5.

Con el fin de introducir la representación de números racionales (números fraccionarios y números decimales) en la recta numérica, se utilizará la columna ‘fracción simplificada’ (Tabla 7). Para lo que se plantea el siguiente ejercicio:

Tome los valores sin repetir de la columna ‘fracción simplificada’:

1. Complete la siguiente tabla:

Fracción simplificada	3/16					
Número decimal			0,25		0,13$\overline{8}$	

Tabla 7. Fracción simplificada y número decimal.

2. Dibuje en una hoja en blanco una recta numérica, defina la unidad de medida de la recta numérica.
3. Recorte una hoja pergamino a la medida de la hoja en blanco en la cual dibujo la recta numérica, posterior a esto calque la recta numérica que dibujo en la hoja en blanco.
4. En la recta numérica de la hoja en blanco represente los valores de la columna Fracción simplificada.
5. En la recta numérica de la hoja pergamino represente los valores de la columna ‘número decimal’.
6. Ponga la hoja pergamino sobre la hoja en blanco, analice y concluya qué pasa con los puntos que ubicó en el ítem 4 y 5.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

6° Grado

Una propuesta de enseñanza desde el Pensamiento Aleatorio

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

6° Grado

Una propuesta de enseñanza desde el Pensamiento Aleatorio

Cárdenas Flórez
Diana Marcela

Gamboa Mateus
Erika Briyid

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Pensamiento Matemático 6° es una obra colectiva, creada y diseñada como material anexo al trabajo de grado titulado:

PENSAMIENTO MATEMÁTICO A PARTIR DEL PENSAMIENTO ALEATORIO, UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA GRADO SEXTO

La cartilla Pensamiento matemático 6° grado, es producto del trabajo de grado elaborado por Diana Marcela Cárdenas Flórez y Erika Briyid Gamboa Mateus, bajo la asesoría de la profesora Ingrith Álvarez Alfonso, en el año 2019, como parte del requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Contenido

INTRODUCCIÓN

El presente material refiere al diseño de una propuesta de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático a partir del Pensamiento Aleatorio, y se enmarca en la metodología de aula denominada Escenarios de Aprendizaje, propuesta por Azcarate (2015)[1].

Este material surge a partir de la iniciativa de las autoras del trabajo, al notar que en los colegios públicos y privados donde realizaron las prácticas iniciales y las prácticas de profundización, propias de los espacios académicos del Ambiente de Pedagogía y Didáctica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, no se integraba el Pensamiento Aleatorio con los demás componentes del currículo escolar de Matemáticas.

1. Azcarate, P. (2015). Los escenarios de aprendizaje. Una estrategia para tratar los conocimientos estocásticos en las aulas. Contreras, C., Batanero, J., Godino, G., Cañadas, P., Arteaga, E., Molina, M., & López M. (Eds.) En Segundas Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Granada, 69-86. Recuperado de http://www.estadis.net/3/actas/PON/05.%20Los%20escenarios%20de%20aprendizaje.%20Una%20estrategia%20para%20tratar%20los%20conocimientos%20estoc%C3%A1ticos%20en%20las%20aulas.pdf.

ESCENARIO DE APRENDIZAJE

Paco, Hugo y Luis son tres amigos de 6° grado que están en cursos diferentes, además de ser sobresalientes académicamente en el colegio, ellos siempre han sido muy buenos amigos y en la hora de recreo se la pasan juntos jugando y hablando de las tareas que les dejan en sus clases.

Últimamente sus directores de curso, entre ellos un profesor del área de Matemáticas, están muy preocupados ya que el desempeño académico de los tres ha bajado, en varias clases llegan tarde o no prestan la suficiente atención por estar pensando que no comieron nada porque perdieron todo su dinero; esto debido a que en todos los recreos los estudiantes en vez de dedicar su tiempo a comer se la pasan jugando y apostando el dinero que sus padres les dan. Para averiguar más sobre la situación, el lunes 19 de agosto uno de los directores de grupo (el profesor de Matemáticas) se acerca a ellos en la hora del recreo y les pregunta ¿Qué están jugando?, Paco responde:

- Es el juego Guayabita, ¡Es muy chévere este juego, profe!, bueno, cuando gano claro está, porque a veces he perdido todo el dinero que me dan y no puedo comprar nada en la cafetería, para mis onces.

El profesor sorprendido por la respuesta de Paco le pregunta a cada uno cuánto dinero le dan sus padres para las onces, Paco responde rápidamente:

- A mis todos los días me dan 2500 pesos, con eso compro un dado nuevo que cuesta 650 pesos, - si es de color verde tengo mucha más suerte.

Luego llegó la respuesta de Hugo, diciendo que sus padres le daban 3000 pesos todos los días, y con eso se compra un par de dados que cuestan 1250 pesos. Así, un día juega con un dado y al día siguiente juega con el otro si no lo ha perdido -pues el que gana se queda con los dados de los que perdieron, además de que sale más económico que a Paco. Y tú Luis -dice el profesor- cuánto dinero sueles traer.

- A mí me dan 2500 pesos, pero solo traigo 2300 porque todos los días guardo en mi mesita de noche 200 pesos, así con ese dinero puedo reemplazar el dado que alguno de ellos me ha ganado, aunque a veces soy yo el que lo gano y eso me parece mejor pues no tengo que comprar otro dado al menos durante dos días.

El profesor no dice nada más, y queda sorprendido al ver que estos tres niños pierden la noción del tiempo por estar jugando y apostando el dinero de sus onces. Así que se reúne con los otros dos profesores y les comenta lo sucedido.

Después de clases los profesores investigan cómo se juega y cuáles son las reglas del juego Guayabita, se dan cuenta que es un juego que involucra el azar, donde no se puede afirmar en estos momentos si los niños siempre perderán o ganarán, es por esto, que el profesor de Matemáticas director de un grupo, propone que en las clases de Matemáticas de 6° grado se realicen diferentes actividades que ayuden los estudiantes a visualizar la pertinencia de seguir gastando su dinero en este juego.

DESCRIPCIÓN DE LOS MÓDULOS

A continuación, se presenta la estructura general de cada uno de los módulos:

A. PRELIMINARES	
SECCIÓN	**DESCRIPCIÓN**
Encabezado	Presenta el número del módulo junto con el nombre que este recibe, teniendo en cuenta la etapa del escenario de aprendizaje que se desarrolla al gestionar el módulo.
Introducción	Describe de forma general el módulo. Indica el objetivo, el cual se desarrolla por medio de una situación que se le plantea al estudiante.
Contenido generales	Refiere a enlistar las temáticas generales que se abordan en cada módulo.
Conceptos clave	Esta sección enlista los principales conceptos que se desarrollarán durante el desarrollo de las actividades propuestas en cada módulo.
Aprendizajes esperados	Indica los aprendizajes esperados que los estudiantes deben desarrollar al hacerse partícipes de cada módulo, estos aprendizajes se formulan a partir de lo expuesto en los DBA-M (MEN, 2017)[2] y en los EBCM (MEN, 2006)[3].
Tiempo estimado	Se expone el tiempo estimado que se sugiere para dedicar a cada módulo, cabe aclarar que este tiempo varía según el ritmo de trabajo de los estudiantes y la gestión del docente.
B. ANTES DE LA CLASE	
Materiales para la clase	Sección en la que se enlistan los materiales necesarios para el desarrollo del módulo.
C. DURANTE LA CLASE	
Explicar	Refiere a la explicación que se sugiere que el docente de acerca de los contenidos matemáticos que se abordan en el módulo.
Explorar	Alude a acciones o preguntas que se le sugieren al docente, realizar para dar apertura al tema o para dar cierre al mismo. Estas actividades o preguntas retoman de manera directa el escenario de aprendizaje y serán desarrolladas por los estudiantes.
Practicar	Indica los ejercicios que desarrollarán los estudiantes, mencionando el propósito que tienen, el cual puede ser de introducción, de complemento o de cierre para alguna temática.
Socializar	Hace alusión a compartir con todo el grupo cada una de las respuestas que los estudiantes dan a las actividades planteadas, con el objetivo de resolver dudas respecto a la temática o de complementar la temática desarrollada.
Nota didáctica	A lo largo de cada módulo aparecen diferentes notas didácticas, con el fin de que éste se desarrolle de manera satisfactoria. Las notas están basadas en referentes teóricos relacionados con la enseñanza de la matemática.
Sugerencia	Alude a propuesta de lo que el docente puede hacer durante la clase si lo considera pertinente y necesario para el desarrollo de las temáticas.
D. CIERRE DEL MÓDULO	
Sintetizar	Refiere a la conclusión que el docente le desee dar al módulo para finalizarlo, para ello se propone un ejercicio, para los estudiantes, que engloba los temas desarrollados en el trascurso del módulo.
Evaluación	Se exponen sugerencias de instrumentos y estrategias pedagógicos, a partir de las cuales el docente puede emitir un juicio valorativo hacia los desarrollos conceptuales, procedimentales y actitudinales de los estudiantes.
E. ANEXOS	
Actividades	Se muestran las actividades dirigidas a los estudiantes, de acuerdo con los contenidos que se abordaron en cada módulo.
Lecturas	Se indican las lecturas que se han de usar en el desarrollo de cada módulo.
Evaluación	Se presentan las evaluaciones sugeridas para el cierre del módulo.

2. Ministerio de Educación Nacional. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá D.C: MEN. Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf
3. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencia ciudadana: MEN. Recuperado de Ministerio de Educación Nacional. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá D.C: MEN. Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

RECOMENDACIONES

Como recomendaciones generales para el desarrollo de cada uno de los módulos recuerde:

Leer con anterioridad el módulo y cada una de las actividades propuestas para los estudiantes, con el fin de que tenga claridad acerca de los conceptos, definiciones y representaciones que debe abordar a lo largo de este.

En cada módulo encontrará sugerencias respecto al tiempo destinado para cada actividad, sin embargo, este se puede ajustar dependiendo del ritmo de trabajo de los estudiantes y las características propias del curso / grupo.

Tenga en cuenta los materiales que se deben usar para el desarrollo de cada módulo, de ser necesario solicite estos con antelación a los estudiantes.

GUÍA PARA EL DOCENTE

MÓDULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

INTRODUCCIÓN

Este módulo tiene como objetivo, presentar el problema que guiará el escenario de aprendizaje.

> *Hugo, Paco y Luis son tres estudiantes y muy buenos amigos que están en 6° grado. Ellos se han caracterizado por su buen desempeño académico, sin embargo, este desempeño ha bajado notoriamente y sus directores de grupo están preocupados porque creen que es debido a un juego llamado Guayabita en el que participan a la hora del recreo. Pues por estar jugando no se percatan que el descanso a acabado y no alcanzan a comprar onces, por tanto, en algunas clases llegan tarde o no prestan la suficiente atención por estar distraídos o por tener hambre dado que no comieron nada porque perdieron su dinero en el juego. A pesar de que los docentes les han hablado acerca de lo que implica jugar Guayabita y apostar el dinero de sus onces, ellos no le han dado mayor importancia, pues piensan que al momento de jugar siempre van a ganar, ya que dicen que tienen muy buena suerte, y no se dan cuenta de las muchas veces se quedan sin dinero.*

A partir de dicho problema los estudiantes pueden dar respuesta a preguntas como: ¿Cuál de los tres estudiantes gana más dinero? ¿Cree que el color del dado influye en que alguno de ellos siempre gane? ¿Las reglas del juego están adecuadas para que siempre se gane o se pierda? ¿Al jugar con un dado convencional de seis caras (cúbico) los estudiantes tienen menor posibilidad de ganar, que al jugar con un dado tetraédrico o un dado octaédrico?

CONTENIDOS GENERALES

1. Experimentos aleatorios.
2. Variable dependiente.
3. Proporcionalidad inversa y directa.
4. Área y perímetro de figuras geométricas.
5. Unidades de medida.

Sugerencia

Los temas aquí nombrados pueden ser profundizados desde el sustento matemáticos que usted como docente profesional del área maneja.

CONCEPTOS CLAVE

- Área
- Diagonal
- Mayor que
- Perímetro
- Variable independiente
- Arista
- Espacio muestral
- Menor que
- Propiedades de proporcionalidad
- Azar
- Experimento aleatorio
- Variable aleatoria
- Vértice
- Caras
- Experimento determinista
- Variable dependiente
- Volumen

APRENDIZAJES ESPERADOS

Al participar de este módulo los estudiantes podrán desarrollar los siguientes aprendizajes:

1. Reconocer el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico y geográfico (DBA-M, 2017, p. 48)[4].
2. Identificar y analizar propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos (DBA-M, 2017, p. 49)[4].
3. Representar mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) la covariación directa e inversas entre variables (DBA-M, 2017, p. 49)[4].
4. Representar y construir formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo de instrumentos de medidas apropiadas (DBA-M, 2017, p. 48)[4].
5. Utilizar y explicar diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos geométricos (DBA-M, 2017, p. 48)[4].
6. Distinguir un experimento aleatorio de uno determinista (DBA-M, 2017, p. 85)[4].
7. Calcular áreas y volúmenes a través de la composición y descomposición de figuras (EBCM, 2006, p. 85)[5].
8. Identificar conceptos como espacio muestral y suceso (EBCM, 2006, p. 84)[5].
9. Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)[5].
10. Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa (EBCM, 2006, p. 84)[5].

TIEMPO SUGERIDO

Para el desarrollo de este módulo el tiempo estimado es de 270 minutos (6 sesiones de clase, cada una de 45 minutos).

ANTES DE CLASE

- **MATERIAL PARA LA CLASE**

Útiles escolares

Dinero didáctico
(Cada estudiante tendrá billetes y monedas)

Actividades individuales:
Lectura 1. Reglas del juego Guayabita
Actividad 1. Hagamos cuentas
Actividad 2. Paco compra dados
Actividad 3. Más dinero para apostar
Actividad 4. Construcción de dados
Evaluación 1

4. Ministerio de Educación Nacional. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá D.C: MEN. Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf
5. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar!, EDUTEKA. Bogotá D.C. Recuperado de http://www.temoa.info/es/node/49170.

DURANTE LA CLASE

Explorar 1.
Realizar la lectura (Escenario de aprendizaje) del escenario de aprendizaje y guiar a los estudiantes para que reconozcan el problema. Dicho problema se describe en la introducción del módulo.

Explorar 2.
Con el fin de contextualizar a los estudiantes con el juego 'Guayabita', entregar la Lectura 1 (Juego Guayabita) en la cual se describe el juego y sus respectivas reglas.

Socializar 1.
Socializar la Lectura 1 con el fin de dar respuesta a las siguientes preguntas *¿Cuál de los tres estudiantes gana más dinero? y ¿Las reglas del juego están adecuadas para que siempre se gane o se pierda?* De acuerdo con las respuestas dadas, el docente debe dar una explicación sobre la noción de azar.

Explicar 1.
Explicar acerca de los experimentos aleatorios y deterministas, con la intención de lograr comprender que el azar está involucrado en experimentos aleatorios, por lo cual se propone plantear la siguiente situación:

A. Si Hugo, Paco y Luis juegan Guayabita ¿Se puede saber con certeza si Paco ganará? Explique su respuesta.
B. Si Hugo, Paco y Luis juegan Guayabita ¿Se sabe con certeza el color de uno de los dados? Explique su respuesta.
C. ¿Se puede saber con certeza, la cantidad de dinero que le dan a Hugo los miércoles? Explique su respuesta.
D. Si Luis juega en el primer turno ¿Se puede saber con certeza qué resultado caerá? Explique su respuesta.

Nota Didáctica

Según Batanero y Godino (2004)[6] es fundamental que los estudiantes logren diferenciar un experimento aleatorio de uno determinista para que luego puedan estudiar los sucesos aleatorios.

Sugerencia

Si considera pertinente, puede ampliar la discusión acerca de qué son los experimentos aleatorios, y así mismo proponer otros ejemplo o situaciones a las ya planteadas.

Explicar 2.
Con el fin de que los estudiantes reconozcan la proporcionalidad directa, proponer la siguiente situación:

1. Paco jugó esta semana con sus amigos Hugo y Luis. La primera semana ganó 2 dados por consiguiente ganó un día, la segunda semana ganó 8 dados, ganando 4 días, en la tercera semana ganó 6 dados ganando 3 días y en la cuarta semana ganó 10 dados ganando 5 días.

   A. Tabule los datos

Número de dados				
Número de días				

Tabla 1. Cantidad de dados ganados por días.

   B. Grafique en el plano cartesiano la información obtenida en la tabla del punto anterior.

2. De acuerdo con la lectura desarrollada por el profesor al inicio de la clase, responda ¿Cómo podríamos analizar cuánto dinero gasta cada uno de los participantes al jugar en la semana?

Sugerencia

Puede ampliar la explicación acerca de proporcionalidad directa, planteando otras situaciones en donde se pueda profundizar el concepto.

Practicar 1.
Hacer entrega a los estudiantes de la Actividad 1 (Hagamos cuentas) con el fin de poner en práctica lo estudiado acerca de proporcionalidad directa.

6. Batanero, C., & Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* [Versión DX Reader]. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Socializar 2.
Hacer la socialización del desarrollo de la Actividad 1 ya que ésta permite reforzar la noción de proporcionalidad directa.

Posterior al contenido de proporcionalidad directa, se plantea la siguiente situación donde los estudiantes pueden reconocer la proporcionalidad inversa:

Cuando Hugo, Paco y Luis se reunieron en el descanso a jugar, Paco les comentó que encontró un sitio cerca a su casa donde solo por el domingo van a vender paquetes de 15 dados en promoción. Las promociones son:

– Un paquete de dados de colección por 9000 pesos.
– Dos paquetes, un paquete de dados de plástico y el otro con dados de metal, 4500 pesos.
– Tres paquetes, un paquete con dados plásticos de colores y los otros dos paquetes con dados de madera por 3000.
– Cuatro paquetes, dos paquetes con dados de madera y dos con dados plásticos de colores por 2300.

A. Según la anterior información tabule los datos reportados.

Cantidad de paquetes de dados				
Valor de la promoción				

Tabla 2. Valor de la promoción de los paquetes de datos.

B. Grafique en el plano cartesiano la información obtenida en la tabla del punto anterior.

Practicar 2.
Con el fin de que los estudiantes practiquen lo socializado acerca de proporcionalidad inversa, entregar a cada estudiante la Actividad 2 (Paco compra dados).

Socializar 3.
Socializar el desarrollo de la Actividad 2, ya que ésta permite reforzar la noción de proporcionalidad inversa, aclarando dudas que los estudiantes puedan tener respecto a este tema.

Cuando Paco, se reunió en el descanso con Luis y Hugo para jugar, les comentó que ese día había ido a la tienda a comprar un dado de seis caras y que en el empaque de este, decía que el área de un cuadrado del dado medida 625 mm^2, Luis intrigado por esa medida, saca el empaque de uno de los dados que había comprado días atrás, en el que decía que la medida de uno de los lados del cuadrado que componía su dado era igual a 0,0025001 *dm*.

Nota Didáctica

Mochón (2012)[7] sugiere que para abordar el concepto de proporcionalidad es necesario hacer un acercamiento intuitivo, es decir, empezar desde el uso de factores multiplicativos y tablas numéricas.

Explicar 3.
Explicar cómo calcular el área y perímetro de figuras bidimensionales como el cuadrado y el triángulo. Por tal motivo se plantea la siguiente situación:

1. Convierta la medida del dado de Paco a *dm.*
2. Halle el área de una de las caras del dado de Luis y del de Paco.
3. Halle el perímetro de una cara del dado de Luis y del de Paco.
4. Convierta los resultados obtenidos en los puntos anteriores de los dados de Luis y de Paco a *cm,* complete la siguiente tabla:

Dados / Medida de dado	Dado de LUIS	Dado de PACO
Perímetro de una cara del dado en *dm*		
Perímetro de una cara del dado en *cm*		
Área de una cara del dado en cm^2		
Área de una cara del dado en dm^2		

Tabla 3. Medidas de los dados de Luis y Paco.

7. Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Revista Educación Matemática*, *24*(1), 133-157. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a6.pdf

Con base a la información obtenida en la tabla)Tabla 3:

a. Ordene de menor a mayor las medidas que obtuvo en el punto anterior.
b. Responda ¿Cuál dado es más grande? Explique su respuesta.

Sugerencia

Si considera pertinente haga uso de la calculadora para el Explicar 3.

Practicar 3.
Hacer entrega a los estudiantes de la Actividad 3 (Más dinero para apostar), con el fin de que puedan poner en práctica lo estudiando hasta el momento.

Socializar 4.
Socializar el desarrollo de la Actividad 3 ya que ésta aborda las nociones de: conversión de medidas de longitud y superficie, área y perímetro, figuras bidimensionales, volumen de una figura tridimensional, mayor que y menor que; analizando el procedimiento que los estudiantes hicieron para llegar a la respuesta, y así poder descubrir y corregir posibles errores.

Explicar 4.
Con el fin de introducir las nociones de espacio muestral y evento, el docente puede explicar detalladamente cada una de estas, para ponerlas en práctica en la Actividad 4.

Practicar 4.
Hacer la entrega a los estudiantes de la Actividad 4 (Construcción de dados) con el fin de poner en práctica lo estudiado.

Socializar 5.
Socializar el desarrollo de la Actividad 4 ya que ésta permite un acercamiento a la definición de cada característica que compone una figura tridimensional, de espacio muestral y de evento.

CIERRE DEL MÓDULO

Sintetizar.
Plantear situaciones que ayuden a los estudiantes a sintetizar los principales conceptos desarrollados en el módulo. Por tal motivo, a partir de los objetos tridimensionales abordados se puede generalizar el hecho de que V + A = C + 2 (V= Vértices, A = Aristas y C= Caras), llegando a comprender el teorema de Euler, por consiguiente, se sugiere el siguiente ejercicio:

Teniendo en cuenta el objeto tridimensional, escriba el número de caras, de vértices y de aristas y compruebe los valores registrados. Realice los cálculos y verifique los resultados.

	Número de caras (*C*)	Número de vértices (*V*)	Número de aristas (*A*)	$C + V = A + 2$
Tetraedro regular			6	
Hexaedro regular		8		
Octaedro regular			12	
Dodecaedro regular		20		
Icosaedro regular				32 = 32

Tabla 4. Demostración del teorema de Euler.

Evaluación

Para evaluar lo aprendido en el Módulo 1, entregue a los estudiantes la Evaluación 1, con el objetivo de analizar el progreso que tuvieron. Tenga en cuenta los aprendizajes esperados que se establecieron para experimento aleatorio, experimento determinista, área, espacio muestral, etc.

MÓDULO 2

OBTENCIÓN DE DATOS

INTRODUCCIÓN

Este módulo tiene como objetivo generar la necesidad de que los estudiantes recojan datos para dar respuesta al problema planteado, para ello se presenta la siguiente situación:

> *Hugo, Paco y Luis afirman que quieren seguir jugando Guayabita, pues es un juego con el que pueden ganar dinero de forma sencilla, a pesar de que tengan que invertir en comprar dados, y que a veces se hayan quedado sin qué comer de onces debido a que perdieron todo el dinero, ya que según ellos hay días en lo que no tuvieron tanta suerte jugando.*
>
> *Paco asegura que él casi siempre es el que gana todo el dinero jugando con el dado cúbico, porque cuando tiene el segundo lanzamiento en el juego, lo que hace es apostar siempre al número seis, ya que este es el número que tiene más posibilidad de caer, mientras que Luis siempre apuesta a números distintos y por eso las opciones de ganancia de Luis son menores a las de Paco.*

Con la situación planteada anteriormente los estudiantes podrán dar respuesta a preguntas como: ¿La afirmación que plantea Paco es verdadera? ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado cúbico caiga el número seis, el cinco, el cuatro, el tres, el dos o el uno? ¿Cómo puede hacer para recolectar información acerca de los números que salen con mayor y menor frecuencia en el juego? Si se juega con dos dados cúbicos ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea seis? ¿Cuál suma tiene mayor probabilidad de caer? ¿Es la misma probabilidad cuando se lanzan dos dados octaédricos? ¿Cuál es el espacio muestral al lanzar dos dados cúbicos? Si se suman los números que caen al lanzar dos dados ¿El número que tiene mayor probabilidad de caer es el que sale con mayor frecuencia al jugar?

CONTENIDOS GENERALES

1. Frecuencia y probabilidad.
2. Propiedades básicas de la teoría de los números racionales.

Sugerencia

Los temas aquí nombrados pueden ser profundizados desde el sustento matemáticos que usted como docente profesional del área maneja.

CONCEPTOS CLAVE

- Espacio muestral
- Frecuencia de un suceso
- Recta Numérica
- Números racionales (decimales, fracciones y porcentuales)

APRENDIZAJES ESPERADOS

Al participar de este módulo los estudiantes podrán desarrollar los siguientes aprendizajes:

1. Registrar adecuadamente los resultados de un experimento aleatorio al realizar varias repeticiones (DBA-M, 2017, p. 52)[8].
2. Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)[9].
3. Utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes (EBCM, 2006, p. 82)[9].

TIEMPO SUGERIDO

Para el desarrollo de este módulo el tiempo estimado es de 135 minutos (3 sesiones de clase, cada una de 45 minutos).

ANTES DE CLASE

- **MATERIAL PARA LA CLASE**

Útiles escolares

Dados construidos (Cúbico y octaédrico)

Actividad grupal:
Actividad 5 (Juguemos)

Actividades individuales:
Actividad 6 (Exploremos)
Evaluación 2

DURANTE LA CLASE

Explorar 1.
Con el fin de ir respondiendo a las preguntas planteadas en la situación de la introducción y apertura al tema "frecuencia de un evento", es pertinente que el docente plantee a los estudiantes la siguiente pregunta: *¿Cómo puede hacer para recolectar información acerca de los números que salen con mayor y menor frecuencia en el juego?*

Explicar 1.
Explicar acerca de la frecuencia de un suceso, para lo cual se propone la siguiente situación:

Con ayuda del dado cúbico y el octaédrico, realice lo siguiente:

1. Lance 4 veces el dado cúbico, y por cada lanzamiento escriba en la Tabla 1 el número que cae en la cara superior.

Número de Jugadas	1	2	3	4
Número de la cara del dado				

Tabla 1. Lanzamientos con el dado cúbico.

2. Lance 6 veces el dado octaédrico, y por cada lanzamiento escriba en la Tabla 2 el número que cae en la cara superior.

Número de Jugadas	1	2	3	4	5	6
Número de la cara del dado						

Tabla 2. Lanzamientos con el dado octaédrico.

8. Ministerio de Educación Nacional. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá D.C: MEN. Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf
9. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA. Bogotá D.C. Recuperado de http://www.temoa.info/es/node/49170.

3. En parejas compare los resultados obtenidos por usted y su compañero, luego responda las siguientes preguntas:
   a. Cuando usted lanzó el dado cúbico ¿cuál número cayó con mayor frecuencia? ______________
   b. ¿Cuál número cayó con mayor frecuencia cuando su compañero lanzó el dado cúbico? ______________
   c. Cuando usted lanzó el dado octaédrico ¿cuál número cayó con mayor frecuencia? ______________
   d. ¿Cuál número cayó con mayor frecuencia cuando su compañero lanzó el dado octaédrico? ______________

4. A partir de los resultados obtenidos ¿Pueden afirmar con seguridad cuál es el número que tiene mayor frecuencia en salir? Justifique su respuesta ______________

Explicar 2.
Explicar acerca de la forma en cómo se debe diligenciar las tablas de los resultados de los eventos, esto es necesario para desarrollar la Actividad 5 (Juguemos), para lo cual se propone desarrollar el siguiente ejemplo a los estudiantes:

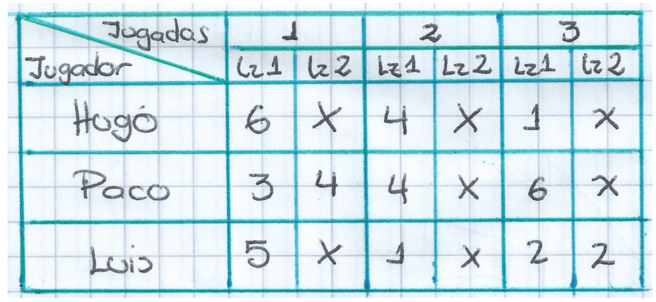
Hugo, Paco y Luis jugaron una partida rápida (Tabla 3) para mirar qué tanta suerte tenían. Jugaron tres veces (cada uno), teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- Si el resultado es 1, 4, 5 o 6 solo deben hacer un lanzamiento.
- Si el resultado es 2 o 3, deben lanzar nuevamente el dado.

Ronda / Jugador	1º Ronda	2º Ronda	3º Ronda
HUGO	Sacó 6 (no hizo el 2° lanzamiento)	Sacó 4 (no hizo el 2° lanzamiento)	Sacó 1 (no hizo el 2° lanzamiento)
PACO	Sacó 3 y en el 2° lanzamiento 4.	Sacó 4 (no hizo el 2° lanzamiento)	Sacó 6 (no hizo el 2° lanzamiento)
LUIS	Sacó 5 (no hizo el 2° lanzamiento)	Sacó 1 (no hizo el 2° lanzamiento)	Sacó 2 y en el 2° lanzamiento 2.

Tabla 3. Resultados de la partida rápida.

Los resultados obtenidos los escribieron en el cuaderno (Imagen 1)



Jugadas / Jugador	1 Lz1	1 Lz2	2 Lz1	2 Lz2	3 Lz1	3 Lz2
Hugo	6	X	4	X	1	X
Paco	3	4	4	X	6	X
Luis	5	X	1	X	2	2

Imagen 1. Resultados de la ronda rápida.

Practicar 1.
Hacer entrega a los estudiantes de la Actividad 5 (Juguemos) con el fin de poner en práctica lo estudiado, tenga en cuenta que dicha actividad está diseñada para ser desarrollada en grupos de tres estudiantes.

Socializar 1.
Socializar el desarrollo de la Actividad 5 ya que ésta permite complementar la explicación acerca de frecuencia de un suceso aleatorio. Y además permite dar respuesta a preguntas como *¿Cuál es el número que cae con mayor frecuencia? y ¿Esa probabilidad asegura que siempre va a caer ese número?*

Nota Didáctica

Se sugiere que esta actividad se desarrolle en grupos para propiciar un trabajo colaborativo. Esto debido a que, según Pujolàs (2012)[10] para el desarrollo de las competencias básicas es necesario un aprendizaje cooperativo, entendiendo este como la interacción entre el profesor-alumno, alumno-alumno y alumno-profesor, lo que permite un proceso mutuo de enseñanza y aprendizaje.

Socializar 2.
Con el fin de dar apertura al tema de probabilidad de un evento, es pertinente socializar las respuestas dadas por los estudiantes sobre la pregunta *¿Cuál es la probabilidad de que al lan-*

10. Pujolàs, P. (2012). Aulas inclusivas y aprendizaje cooperativo. Educativo Siglo XXI, vol. 30, 1, 89-112. Disponible en https://revistas.um.es/educatio/article/view/149151

zar el dado caiga el número seis, cinco, cuatro, tres, dos, uno o cualquier otro valor dependiendo del dado?

Explicar 3.

Explicar cómo hallar la probabilidad de un evento, para lo cual se propone plantear a los estudiantes la siguiente situación:

Uno de los directores de curso le pregunta al profesor de matemáticas sobre la probabilidad de sacar siempre un mismo número después de hacer varios lanzamientos. El profesor para explicarle de forma clara saca un dado cúbico y plantea la siguiente situación: se lanza 10 veces un dado y se anotan los resultados según se muestra en la Tabla 4. Por cada vez que el dado cae en esa cara, se escribe una X.

Número de la cara del dado	Número de veces	Total	Probabilidad
1	X X	2	
2	X X	2	
3	X	1	
4	X X X	3	3/10 = 30%
5	X	1	
6	X	1	

Tabla 4. Resultados de los 10 lanzamientos.

El profesor de matemáticas le explica al director de grupo, que para esta situación la probabilidad del evento se encuentra dividiendo la cantidad de veces del evento sobre el total de lanzamientos, por ejemplo la probabilidad de que en 10 lanzamientos caiga el número 4 es de 3/10 es decir el 30%. Complete en la Tabla 4, la probabilidad para los demás números.

Explicar 4.

Dado que la probabilidad de los eventos también se puede expresar como un número decimal o porcentual, el docente explicará la noción de fracción simplificada, el cómo convertir una fracción a número decimal y viceversa, y el cómo llegar ha hallar un número porcentual. Para ello, se continua con la situación expuesta en 'Explicar 3', pero se le incrementarán 6 lanzamientos, obteniendo como resultado la Tabla 5.

Número de la cara del dado	Número de veces	Total
1	X X X	3
2	X X	2
3	X X X X	4
4	X X X X X X	6
5		0
6	X	1

Tabla 5. Resultados de los 16 lanzamientos.

Con los datos obtenidos en la columna de Total (Tabla 5), el docente explicará dos ejemplos de las diferentes conversiones, utilizando como ayuda la Tabla 6.

Número de la cara del dado	Fracción	Fracción simplificada	Número decimal	Número porcentual
1				
2				
3	4/16	1/4	0,25	25 %
4				
5				
6	1/16	1/16	0,0625	6,25 %

Tabla 6. Conversión de números.

Explicar 5.

Con el fin de introducir la representación de números racionales (números fraccionarios y números decimales) en la recta numérica, se utilizará la columna 'fracción simplificada' (Tabla 7). Para lo que se plantea el siguiente ejercicio:

Tome los valores sin repetir de la columna 'fracción simplificada':

1. Complete la siguiente tabla:

Fracción simplificada	3/16					
Número decimal			0,25		$0,13\overline{8}$	

Tabla 7. Fracción simplificada y número decimal.

2. Dibuje en una hoja en blanco una recta numérica, defina la unidad de medida de la recta numérica.
3. Recorte una hoja pergamino a la medida de la hoja en blanco en la cual dibujo la recta numérica, posterior a esto calque la recta numérica que dibujo en la hoja en blanco.
4. En la recta numérica de la hoja en blanco represente los valores de la columna Fracción simplificada.
5. En la recta numérica de la hoja pergamino represente los valores de la columna 'número decimal'.
6. Ponga la hoja pergamino sobre la hoja en blanco, analice y concluya qué pasa con los puntos que ubicó en el ítem 4 y 5.

Explicar 6.

Para reforzar el proceso de conversión de los distintos conjuntos de números (números racionales, números decimales y números porcentuales) y la representación gráfica de estos en la recta numérica, se plantea a los estudiantes la siguiente situación:

El profesor de matemáticas había estado observado el juego de Hugo, Paco y Luis durante dos semanas, tomando nota de los aciertos y desaciertos de cada uno de los estudiantes. Los datos que reúne son: en dos semanas jugaron 16 veces, Paco perdió 2/4 de las 16 veces, es decir el 0,5; por otra parte Hugo ganó el 12,5% de las veces jugadas.

1. Completa la Tabla 8 con ayuda de la información dada.

Jugadores / Estado de juegos	HUGO	PACO	LUIS
Número de juegos ganados (en número natural).			
Número de juegos ganados (en porcentaje).			
Número de juegos perdidos (en fracción).			
Número de juegos perdidos (en decimal).			

Tabla 8. Juego de dos semanas.

2. Represente en una recta numérica los valores obtenidos en la tabla anterior. Utilice diferentes colores para cada fila, ejemplo color rojo para el número de jugadas, y color azul para el numero en porcentajes.

Explorar 2.

Realizar la Lectura 2 (Juego Guayabita con dos dados) con el objetivo de que los estudiantes den respuesta a *Si se juega con dos dados de seis caras, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea seis? o ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados esté entre 2 y 36?*

Practicar 2

Hacer entrega a los estudiantes de la Actividad 6 (Exploremos) con el fin de que puedan poner en práctica lo estudiando sobre frecuencia de un suceso y probabilidad de que caiga un número específico al lanzar dos dados, dicha probabilidad representada en números decimales, números racionales y números porcentuales.

Socializar 3.

Socializar la Actividad 6 con el objetivo de que los estudiantes comprendan que el hecho de tener una mayor probabilidad de obtener determinada pareja no implica que al lanzar los dado esa sea la pareja con mayor frecuencia en ese evento, por tal motivo es conveniente que se genere la siguiente pregunta *¿Al jugar con un dado cúbico, los números que tienen mayor probabilidad de caer son los que sale con mayor frecuencia al jugar?*

CIERRE DEL MÓDULO

Sintetizar.

Las preguntas que se van a plantear no son para una evaluación, la intención es que el docente generé las preguntas y los estudiantes participen de manera verbal desde su puesto, con representaciones gráficas diseñadas en sus cuadernos o pasando al tablero. El objetivo de estas preguntas es ayudar a los estudiantes a sintetizar los principales conceptos desarrollados en este Módulo, para ello se propone:

Teniendo en cuenta la frecuencia de un suceso y las diferentes expresiones numéricas para la representación de los números en la recta numérica, realice las siguientes preguntas:

- ¿Qué es un suceso?
- ¿En qué consiste la frecuencia de un suceso?
- ¿Cómo se convierte un número decimal en fracción, por ejemplo, el número 0,45?
- ¿La fracción que corresponde al número 0,45 se puede representar en la recta numérica? ¿Si sí, cómo la representa?

Evaluación

Para evaluar lo aprendido en el Módulo 2, entregue a los estudiantes la Evaluación 2 con el objetivo de analizar el progreso que tuvieron. Tenga en cuenta los aprendizajes esperados que se establecieron para frecuencia de un suceso, espacio muestral, números decimales, números fraccionarios, etc.

MÓDULO 3

ANÁLISIS DE LOS DATOS

INTRODUCCIÓN

Este módulo tiene como objetivo generar que los estudiantes analicen los datos que recogieron en el Módulo 2 (Obtención de datos), para ello se presenta la siguiente situación:

En una de las partidas que Hugo, Paco y Luis jugaron, cada uno con un dado cúbico, Paco decide escribir los números que caen cada vez que lanzan cada dado (Tabla 1).

Jugadas / Jugador	1		2	
	Lz 1	**Lz 2**	**Lz 1**	**Lz 2**
HUGO	3	5	6	X
PACO	6	X	4	5
LUIS	1	X	X	X

Tabla 1. Partida de Hugo, Paco y Luis.

Hugo empezó la partida, seguido de Paco y Luis. Pero este juego acabo tan rápido que Paco afirma que en toda partida que se juegue de tres personas siempre va a caer en el primer lanzamiento los números 3, 6 y 1, por lo cual siempre alguno va a tener que apostar más dinero al inicio del juego y siempre alguno va a recuperar en el primer lanzamiento la cantidad que apostó.

El profesor de matemáticas que escuchaba a estos tres amigos conversar durante su clase, les indicó que para que Paco pueda hacer esa afirmación debe tener los resultados de múltiples juegos que se desarrollen bajo las mismas condiciones, para así poder realizar comparaciones y análisis de los resultados. Hugo le dice al profesor que, si se ponen a recoger los resultados de los juegos, tienen que esperar mucho tiempo para saber si es verdad o no lo que está diciendo Paco.

A esto él profesor le indica a Hugo que él les va a mostrar varios resultados de juegos, para que puedan analizar los datos y así saber si lo que dice Paco es cierto o no.

Esta situación permite que los estudiantes organicen los resultados que obtuvieron en el juego para que de esta forma puedan dar respuesta a preguntas como ¿En el primer lanzamiento siempre sale el número uno? ¿El que tiene el último turno siempre va a lanzar menos veces el dado? ¿Quién recupera el dinero en el primer lanzamiento es quién gana la partida?

CONTENIDO GENERAL

Sistemas de representación de datos (Distribución de frecuencias, Tablas y gráficos estadísticos).

Sugerencia

El tema aquí nombrado pueden ser profundizado desde el sustento matemático que usted como docente profesional del área maneja.

CONCEPTOS CLAVE

- Frecuencia absoluta
- Frecuencia absoluta acumulada
- Frecuencia relativa
- Frecuencia relativa acumulada
- Gráficos estadísticos
- Variables estadísticas

APRENDIZAJES ESPERADOS

Al participar de este módulo los estudiantes podrán desarrollar los siguientes aprendizajes:

1. Interpretar, producir y comparar representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares.) (EBCM, 2006, p. 85)[11].
2. Conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad (EBCM, 2006, p. 85)[11].
3. Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)[11].
4. Utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relacionar estas dos notaciones con la de los porcentajes (EBCM, 2006, p. 82)[11].
5. Representar datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares) (EBCM, 2006, p. 84)[11].

TIEMPO SUGERIDO

Para el desarrollo de este módulo el tiempo estimado es de 135 minutos (3 sesiones de 45 minutos cada una).

ANTES DE CLASE

- **MATERIAL PARA LA CLASE**

Útiles escolares

Dados construidos (Octaédrico)

Actividades grupales:
Actividad 7 (Tabla de frecuencia dado cúbico)
Actividad 8 (Tabla de frecuencia dado octaédrico)
Actividad 9 (Dinero jugado en la primera ronda)
Actividad 10 (Dinero jugado en la segunda ronda)
Actividad 11 (Análisis del juego)

Actividad individual:
Evaluación 2

11. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA. Bogotá D.C. Recuperado de http://www.temoa.info/es/node/49170.

DURANTE LA CLASE

Explicar 1.
Explicar cómo se pueden ordenar los datos recolectados en un evento aleatorio, esto con el fin de introducir los elementos asociados a las tablas de frecuencia como lo son: datos, frecuencia absoluta, frecuencia absoluta acumulada, frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada. Para lo cual se propone retomar el ejercicio del Explicar 2 planteado en el anterior Módulo (pág. 16). El cual consiste en: Hugo, Paco y Luis jugaron una partida rápida para mirar que tanta suerte tenían, jugaron tres ve-ces (cada uno), teniendo en cuenta reglas como: si el resultado es 1, 4, 5 y 6 solo deben hacer un lanzamiento y si el resultado es 2 o 3, deben nuevamente lanzar el dado. Al finalizar el juego escribieron sus resultados teniendo en cuenta que por regla, en cada ronda cada jugador debe lanzar dos veces el dado a menos que en su primer lanzamiento el resultado sea 1, 4, 5 o 6, en este caso, se escribe una X en la casilla del segundo lanzamiento.

Jugadas / Jugador	1		2		3	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
Hugó	6	X	4	X	1	X
Paco	3	4	4	X	6	X
Luis	5	X	1	X	2	2

Imagen 1. Resultados de la ronda rápida.

Cara del dado	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia absoluta acumulada (N_i)	Frecuencia relativa $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	Frecuencia relativa acumulada $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total:				

Tabla 2. Tabla de frecuencias de la ronda rápida.

Teniendo en cuenta que los datos obtenidos en el juego de la Imagen 1 se pueden organizar en una tabla de frecuencia (Tabla 2), el docente a medida que va desarrollando el ejercicio debe explicar qué es y cómo se calcula cada uno de los componentes de dicha tabla, de la siguiente manera:

- La frecuencia absoluta representada como n_i refiere a escribir la cantidad de veces que cayó determinado número en la cara superior del dado, cuando los tres jugadores lanzaron los dados.
- La frecuencia absoluta acumulada, se simboliza como N_i, y representa la suma acumulada de las frecuencias absolutas de todos los valores iguales e inferiores al valor considerado, la última frecuencia absoluta acumulada debe ser igual a la cantidad de datos observados.
- La frecuencia relativa se simboliza como $f_i = \frac{n_i}{N}$ y es el resultado de dividir un determinado valor de la frecuencia absoluta sobre el número total de datos analizados, se puede representar en forma de fracción o decimal; la suma de las frecuencias relativas debe ser igual a 1.
- La frecuencia relativa acumulada se representada como $F_i = \frac{N_i}{N}$, y es el resultado de sumar la frecuencia relativa de todos los valores iguales e inferiores al valor considerado, se puede representar en forma de fracción o porcentual; la última frecuencia relativa acumulada debe ser igual a 1.

Explicar 2.
Explicar qué es un gráfico estadístico, cuáles son los elementos constitutivos de un gráfico, y cuál es el gráfico que representa de manera adecuada la información recopilada en la tabla de frecuencias (Tabla 2). Como en este caso el tipo de variable estadística que se está utilizando es cuantitativa discreta, el gráfico estadístico a emplear es un diagrama de barras.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea una situación en la cual los estudiantes deben reconocer que los gráficos estadísticos presentados son erróneos o les faltan elementos. La situación en la siguiente:

Hugo, Paco y Luis después de jugar una partida rápida, ordenaron la información como se denota en la Imagen 1, pero a Hugo le surge la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos representar gráficamente la información de la Imagen 1?

Ayúdeles a dar respuesta a la pregunta que se hizo Hugo, para ello:

1. Responda:
   - ¿Qué tipo de variable estadística está involucrada en la situación de la Imagen 1?
   - ¿Qué gráfico (s) estadístico (s) son los pertinentes para ese tipo de variable estadística?

2. Describa qué falencias o errores tienen los gráficos (Imagen 2 y 3) que Hugo y Paco construyeron.

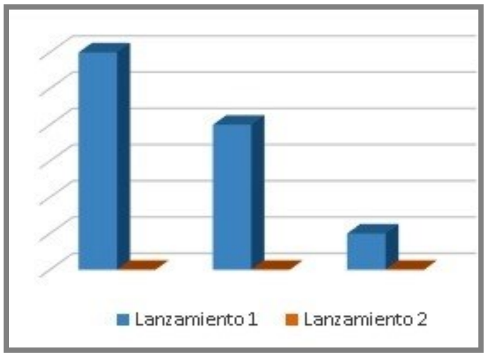


Imagen 2. Gráfico estadístico propuesto por Hugo.

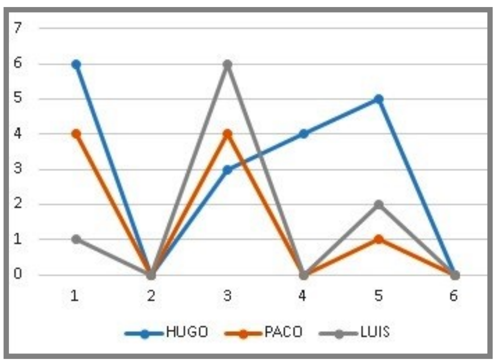


Imagen 3. Gráfico estadístico propuesto por Paco.

3. ¿Está de acuerdo con los gráficos que Hugo y Paco representaron? Si su respuesta es sí, justifique. Si es no, construya el gráfico estadístico que represente la información mostrada en la Imagen 1.

Nota Didáctica

Se sugiere que antes de esta actividad se explique la clasificación de variables estadísticas y el tipo de gráfico estadístico asociado a cada una. Esto para evitar que los estudiantes incurran en dificultades y errores como confusión entre variables cualitativas y cuantitativas, llegando a provocar problemas en la tabulación y en la interpretación de tablas, tal y como lo manifiesta López (2014)[12].

Practicar 1.

Hacer entrega de la Actividad 7 (Tabla de frecuencia dado cúbico) y posterior a esta la Actividad 8 (Tabla de frecuencia dado octaédrico) con el fin de poner en práctica lo estudiado, tenga en cuenta que dichas actividades están diseñadas para ser desarrolladas en grupos de tres estudiantes.

Socializar 1.

Socializar lo desarrollado en la Actividad 7 y Actividad 8, ya que éstas permiten complementar la explicación sobre cómo construir tablas estadísticas o de frecuencias y gráficos estadísticos. Jugando primero con un dado cúbico y posteriormente con un dado octaédrico.

Nota Didáctica

Según Batanero y Godino (2002)[13] los posibles errores que se pueden cometer al momento de abordar los gráficos estadísticos son: elección incorrecta del tipo de gráfico, elección de las escalas de representación poco adecuadas, omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos, entre otros.

12. López, T. (2014). *Puesta en práctica y análisis de la unidad didáctica: proyecto de estadística para 2° ciclo de primaria*. (Tesis de Pregrado) Universidad de Granada, España.
13. Batanero, C., & Godino, J. (2002). Estocástica y su Didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España.

Nota Didáctica

Según Guerrero y Torres (2017)[14] las dificultades y errores que se presentan cuando se abordan tablas de frecuencia son: presentar confusión en cuanto a la definición de frecuencia relativa como relación parte-todo, desconocer los tipos de frecuencia o confundirlas, interpretar de forma inadecuada la lectura de los datos estadísticos desde la representación verbal, entre otros.

Practicar 2.
Entregar la Actividad 9 (Dinero jugado en la primera ronda) y posterior a esta la Actividad 10 (Dinero jugado en la segunda ronda) con el fin de poner en práctica lo estudiado, tenga en cuenta que dicha actividad se debe de desarrollar en grupos de tres estudiantes.

Socializar 2
Socializar las Actividades 9 y 10, ya que éstas permiten complementar lo aprendido sobre cómo construir un gráfico estadístico a partir de información recolectada.

Practicar 3.
Entregar la Actividad 11 (Análisis del juego) a los estudiantes, con el fin de que analicen la información recogida en las tablas de frecuencia construidas en las Actividades de la 7 a la 10, por tanto, dicha actividad debe ser desarrollada por los mismos grupos de estudiantes que realizaron las Actividades de la 7 a la 10.

Socializar 3.
Proponer a los estudiantes que observen y analicen los resultados obtenidos por sus compañeros en las Actividades de la 7 a la 10. El docente debe generar preguntas de tal manera que haga que éstos analicen y cuestionen la información concluida por sus compañeros, con el objetivo de que los estudiantes resalten que no hay un único evento con mayor frecuencia, generando con ello nociones de aleatoriedad.

14. Guerrero, Y., & Torres, Y. (2017). *Tipificación de errores y dificultades en el aprendizaje de tablas de frecuencia*. (Tesis de Pregrado) Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

CIERRE DEL MÓDULO

Sintetizar.

Plantear situaciones que ayuden a los estudiantes a sintetizar los principales conceptos desarrollados en el módulo. Por tal motivo, para complementar los aprendizajes adquiridos sobre tablas de frecuencia y gráficos estadísticos, se propone:

Reúnase con dos compañeros, cada uno realice al tiempo 6 lanzamientos con los dados octaédricos. Posterior a esto sumen los resultados de los números que caen en cada jugada para completar la siguiente tabla de frecuencia (Tabla 3). Luego construyan un gráfico estadístico pertinente para este tipo de datos y la información acoplada.

Suma de los resultados de los 3 dados	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia absoluta acumulada (N_i)	Frecuencia relativa $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	Frecuencia relativa acumulada $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
Total				

Tabla 3. Tabla de frecuencia al lanzar tres dados de seis caras.

Evaluación

Para evaluar lo aprendido en el Módulo 3, entregue a los estudiantes la Evaluación 3 con el objetivo de analizar el progreso que tuvieron. Teniendo en cuenta los aprendizajes esperados que se establecieron para tablas de frecuencia, números decimales, números fraccionarios, porcentajes y gráficos estadísticos.

MÓDULO 4

INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

INTRODUCCIÓN

Este módulo tiene como objetivo que los estudiantes emitan conclusiones a partir del análisis de los datos recogidos en el Módulo 2 y en el Módulo 3, para ello, se plantea la siguiente situación:

> *El profesor de matemáticas de Hugo, Paco y Luis desea saber qué piensan los demás estudiantes sobre la conclusión que emitió Paco: "En toda partida que se juegue de tres personas, siempre van a caer en el primer lanzamiento los números 3, 6 y 1, por lo cual siempre alguno va a tener que apostar más dinero al inicio del juego, y siempre alguno va a recuperar en el primer lanzamiento, la cantidad que apostó."*

Sí tu fueras un compañero de estos tres amigos, ¿Qué opinión le darías al profesor de matemáticas respecto a la afirmación de Paco?

APRENDIZAJES ESPERADOS

Al participar de este módulo los estudiantes podrán desarrollar los siguientes aprendizajes:

1. Predecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística (EBCM, 2006, p. 85)[15].
2. Conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad (EBCM, 2006, p. 85)[15].
3. Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (EBCM, 2006, p. 84)[15].
4. Formular y resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos (EBCM, 2006, p. 84)[15].
5. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares (EBCM, 2006, p. 84)[15].

TIEMPO SUGERIDO

Para el desarrollo de este módulo el tiempo estimado es de 120 minutos (3 sesiones de clase, cada una de 40 minutos).

15. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA. Bogotá D.C. Recuperado de http://www.temoa.info/es/node/49170.

ANTES DE CLASE

- **MATERIAL PARA LA CLASE**

Útiles escolares

Actividades individuales:
Actividad 12 (Conclusión del juego)
Evaluación 4

DURANTE LA CLASE

Explicar 1.
Explicar cómo se pueden analizar los datos, ya que esto permite explorar e identificar el tipo de datos, el comportamiento de los mismos y reconocer los datos erróneos o inesperados.

Nota Didáctica

Se sugiere que se haga una explicación sobre los tipos de datos que se están usando ya que según Orellana(2001)[16], el tipo de datos determina el método de análisis que es apropiado realizar.

Teniendo en cuenta lo anterior y con el fin de que los estudiantes conozcan las conclusiones que se obtuvieron a partir de los respectivos análisis, el docente le comunica a los estudiantes que deben realizar una exposición a sus compañeros respecto a los resultados de las actividades del Módulo 3:

El docente les sugiere que en cada exposición:

1. Dar una explicación sobre los resultados obtenidos.
2. Justificar sus resultados con ayuda de gráficos estadísticos (en diapositivas, carteleras, entre otros).
3. Dar respuesta a la pregunta que se plantea en la introducción de este Módulo (¿Qué opinión le daría al profesor de matemáticas respecto a la afirmación de Paco?) teniendo en cuenta el análisis realizado.

Nota Didáctica

Según Azcarate (2015)[17] es recomendable generar una óptima conclusión de la situación planteada para que esta sea expuesta por medio de carteles, posters, presentaciones; ya que de esta forma los alumnos ven el significado a todo el proceso que han desarrollado en un contexto concreto de la vida cotidiana.

Explorar 1.
Con el fin de dar un cierre al problema planteado al inicio de la cartilla y con ayuda de las conclusiones generadas en las respectivas exposiciones, se recomienda que el docente plantee a los estudiantes las siguientes preguntas *¿Hay más posibilidades de ganar si se juega con dos dados que con un dado? ¿Es pertinente apostar en este tipo de juego*?

Practicar 1.
Hacer entrega a los estudiantes de la Actividad 12 (Conclusión del juego) con el objetivo de que logren generar una conclusión respecto a la situación general, tenga en cuenta que dicha actividad se debe de desarrollar de manera individual.

Socializar 1.
Socializar el desarrollo de la Actividad 12 ya que ésta permite justificar con ayuda de las actividades desarrolladas en los demás módulos, si Hugo, Paco y Luis deberían continuar apostando en el juego Guayabita.

16. Orellana, L. (2001). *Estadística descriptiva*. Universidad de Buenos aires. Buenos aires, Argentina.
17. Azcárate, P. [José Miguel Contreras]. (2015, Abril 14). Los escenarios de aprendizaje... Pilar Azcárate [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=8LileTZeQOs&t=1177s .

CIERRE DEL MÓDULO

Sintetizar.

Resaltar la importancia de hacer una buena conclusión a partir del análisis estadístico frente a situaciones que así lo ameriten, ya que esto permite, entre otras cosas, identificar patrones y tendencias implícitas, dar respuesta a los estudiantes a preguntas realizadas durante el desarrollo del estudio estadístico, para así poder tomar decisiones frente a la situación que se está estudiando.

Evaluación

Para evaluar lo aprendido en el Módulo 4, entregue a los estudiantes la Evaluación 4 con el objetivo de analizar el progreso que tuvieron. Tenga en cuenta los aprendizajes esperados que se establecieron para: análisis de información, números racionales, resolución de problemas a partir de un conjuntos de datos o en situaciones aditivas y multiplicativas, el uso de números porcentuales en distintos contextos y la resolución de problemas a partir de un conjuntos de datos presentados en diagrama de barras.

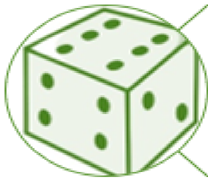
Nota: La conclusión que emite Paco en la introducción del Módulo no está correcta, ya que los cálculos de los porcentajes que realizó están basados en los lanzamientos del dado tetraédrico que él mismo hizo, sin tener en cuenta la cantidad de lanzamientos que Hugo tuvo.

CARTILLA PARA EL ESTUDIANTE

ANEXOS

Lectura 1. Juego Guayabita

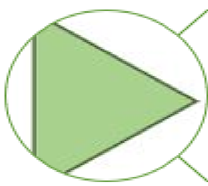
El juego Guayabita debe tener mínimo dos participantes y máximo seis.



Un dado no cargado de seis caras (cúbico).

Los participantes, previamente, deben acordar lo que apostaran y el valor mínimo de la apuesta.

Para poder participar en una partida, cada uno de los jugadores deberá realizar un aporte a la mesa con el valor mínimo acordado.



Una vez que cada jugador haya realizado el aporte, la partida estará lista para empezar.

Para conocer el participante que dará apertura al juego, cada uno realizará un lanzamiento del dado y el que obtenga el mayor número iniciará el juego.

El siguiente participante que continúa, es el que se ubique a mano derecha del que inicio y así sucesivamente.

Lectura 1. Juego Guayabita

Cada jugador tiene derecho a dos lanzamientos del dado, con las siguientes excepciones:

Si el participante obtiene un uno, deberá colocar en la mesa de juego una nueva apuesta según el valor mínimo acordado y no tendra derecho a un segundo lanzamiento.

Si el participante obtiene un seis, deberá recoger el valor mínimo acordado al inicio del juego y no tendra derecho a un segundo lanzamiento.

Si el lanzamiento es diferente de uno y seis, el participante debrá anunciar una nueva apuesta menor al valor que hay en la mesa de juego, seguido a esto hace su segundo lanzamiento y:

Si obtiene un número igual o menor al primer lanzamiento, el participante deberá colocar en la mesa el valor que anunció.

Si obtiene un número mayor que le del primer lanzamiento, el jugador recogerá de la mesa el valor de la apuesta anunciada y dará continuidad al siguiente participante.

El juego finalizará cuando la mesa de juego quede vacía.

Actividad 1. Hagamos cuentas

Uno de los docentes le pide a Hugo, Paco y Luis que analicen durante dos semanas quién gana y quién pierde en el juego. Al cumplirse las dos semanas los tres amigos pasan el siguiente reporte (Tabla 1 y Tabla 2) al profesor.

Análisis del juego durante la semana 1

	HUGO	PACO	LUIS
Lunes	Perdí	Perdí	Gane
Martes	Perdí	Gane	Perdí
Miércoles	Perdí	Gane	Perdí
Jueves	Perdí	Perdí	Gane
Viernes	Gane	Perdí	Perdí

Tabla 1. Reporte del juego en la semana 1.

Análisis de la juego durante la semana 2

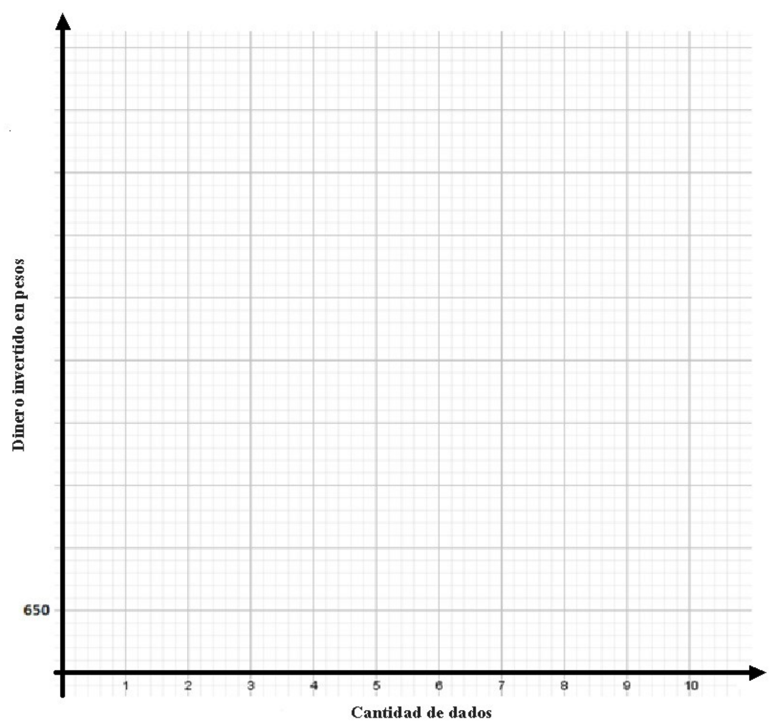
	HUGO	PACO	LUIS
Lunes	Gane	Perdí	Perdí
Martes	Perdí	Gane	Perdí
Miércoles	Perdí	Perdí	Gane
Jueves	Gane	Perdí	Perdí
Viernes	Perdí	Perdí	Gane

Tabla 2. Reporte del juego en la semana 2.

1. Con los datos que reportó Paco, complete la Tabla 3, la cual muestra la inversión del dinero por la compra de dados de forma acumulativa. Realice una gráfica en el plano cartesiano que evidencie el dinero que Paco ha tenido que gastar en la compra de los dados, recuerda que a Paco le gusta coleccionar los dados, por tanto, sin importar si gana o pierde siempre comprará un dado nuevo y al cabo de las dos semanas ha comprado 10 dados.

DADOS	DINERO INVERTIDO
1	$ 650
2	$1300
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabla 3. Dinero invertido por Paco.



Actividad 1. Hagamos cuentas

2. Teniendo en cuenta la Tabla 3 y la gráfica, responda las siguientes preguntas.

   a. ¿Cuánto dinero gasta Paco en la semana comprando dados nuevos?
   ____

   b. En la situación presentada ¿Cuál es la variable dependiente?
   ____
   ____
   ____

   c. En la situación presentada ¿Cuál es la variable independiente?
   ____
   ____
   ____

3. Justifique el porqué la situación que se presenta con Paco involucra proporcionalidad directa.
   ____
   ____
   ____

4. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en la situación anterior?
   ____

Actividad 2. Paco compra dados

Paco le comenta a Hugo y a Luis que está cansado de tener que ir todos los días a la tienda por un dado. Dice que la tienda donde compra el dado le queda muy lejos del colegio y de su casa, pero que sin embargo no pretende dejar de jugar todos los días en el descanso.

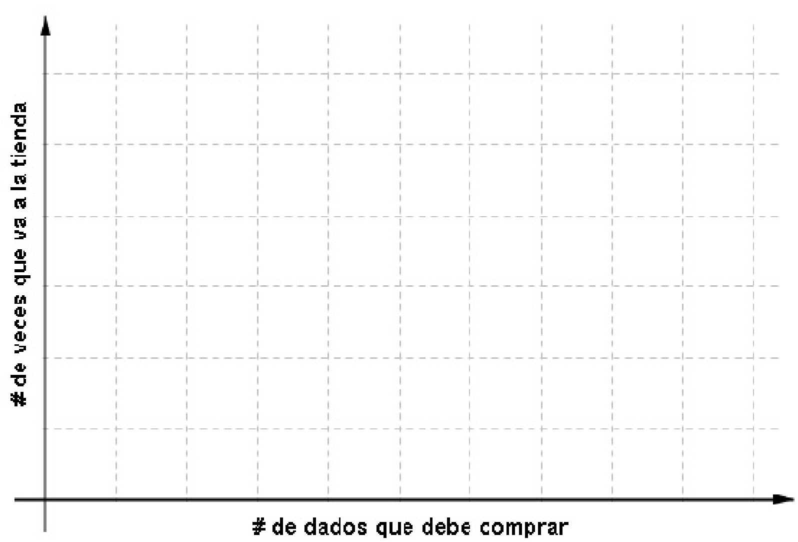
1. Complete la Tabla 4 y determine cuántos dados debe comprar Paco para que no tenga que ir tantas veces a la tienda.

Número de dados que puede comprar (d)	Número de veces que tiene que ir a la tienda (i)	d * i
1	30	30
2		30
3		
6		
10		
30		

Tabla 4. Número de veces que debe ir Paco a la tienda.

2. Elabore en un plano cartesiano, la gráfica que representa los anteriores datos.

Cantidad de dados comprados por Paco



3. ¿Cómo puede Paco solucionar su problema? Justifique su respuesta.

____

____

Actividad 3. Más dinero para apostar

Hugo al escuchar a Paco decir que está cansado de ir a la tienda por los dados, comenta que él ha pensado en construir sus propios dados, pues cree que de esta manera puede ahorrar un poco de dinero, para apostarlo en el juego y así mismo ganar. Así que Hugo les propone a sus dos amigos hacer los dados ellos mismos; sus amigos convencidos de que de esta manera van a poder ganar más dinero porque tendrán más dinero para apostar, aceptan la propuesta de Hugo.

Al terminar las clases, se reúnen en la biblioteca del colegio con el objetivo de crear sus dados; para poder construirlos buscaron por Internet la plantilla (Imagen 1) de un dado de seis caras, es decir un hexaedro, y cada uno se puso a elaborar su propio dado en cartulinas de diferentes colores. Cuando Hugo, Paco y Luis terminaron de armar cada uno su dado, se dan cuenta de que el dado de Luis es más pequeño que el de Hugo y que el de Paco, así que miden cada una de las caras de los dados y obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 5.

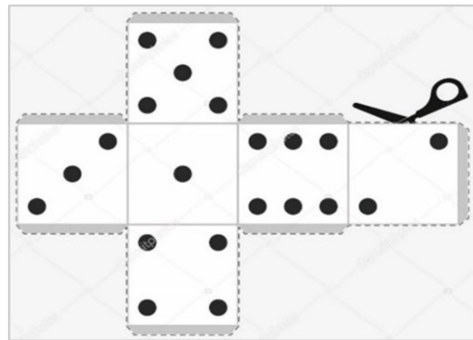


Imagen 1. Dados de papel.
Tomada de: https://sp.depositphotos.com/192145778/stock-illustration-paper-dice-template-model-of.html

1. Las medidas que Hugo, Paco y Luis dan son en metros, convierta cada una de estas medidas a centímetros.

ESTUDIANTE	MEDIDA EN METROS (m)	MEDIDA EN CENTÍMETROS (cm)
Hugo	Cada lado de las caras mide *1/25 m*	
Paco	Cada lado de las cara mide *3/50 m*	
Luis	Cada lado de las caras mide *1/40 m*	

Tabla 5. Medida de los dado en metros y en centímetros.

2. Ordene de mayor a menor las medidas dadas por Hugo Paco y Luis.

$$\frac{\square}{\square} > \frac{\square}{\square} > \frac{\square}{\square}$$

Actividad 3. Más dinero para apostar

3. Halle el perímetro (en centímetros) de una cara de cada dado.
   Dado de Hugo: Perímetro = ________
   Dado de Paco: Perímetro = ________
   Dado de Luis: Perímetro = ________

4. Halle el área (en metros cuadrados) de una de las caras de cada dado.
   Dado de Hugo: Área de una cara = ________
   Dado de Paco: Área de una cara = ________
   Dado de Luis: Área de una cara = ________

5. Halle el área total (en centímetros cuadrados) de cada dado.
   Dado de Hugo: Área total = __________
   Dado de Paco: Área total = __________
   Dado de Luis: Área total = __________

6. Halle el volumen (en centímetros cúbicos) de cada dado.
   Dado de Hugo: Volumen total = __________
   Dado de Paco: Volumen total = __________
   Dado de Luis: Volumen total = __________

ESPACIO PARA REALIZAR OPERACIONES Y PROCEDIMENTOS

Actividad 4. Construcción de dados

1. Tenga en cuenta la plantilla que Hugo, Paco y Luis usaron para construir sus dados y construya uno de tal manera que el perímetro de cada cuadrado que conforma el dado sea de $160\ mm.$

2. Teniendo en cuenta la figura geométrica construida, responda las siguientes preguntas:
   A. ¿Cuántas aristas tiene el dado? ________________________________
   B. ¿Cuántos vértices tiene el dado? ________________________________
   C. ¿Cuántas caras tiene el dado? ________________________________
   D. ¿Cuántas diagonales tiene el dado? ________________________________

3. En la búsqueda que Hugo, Paco y Luis realizaron por Internet se encuentran con una plantilla (Imagen 2) que sirve para construir un octaedro (dado de ocho caras), el cual hace parte de los dados poliédricos.

   Hugo afirma qué si juegan con ese tipo de dado, la posibilidad de ganar será mayor, ya que el espacio muestral correspondiente al lanzar este dado es S= {1,2,3,4,5,6,7,8}, es decir, tienen siete posibilidades de que caiga un número diferente al uno, en cambio con el hexaedro solo tenían cinco posibilidades. Luis corrige a Hugo diciendo que la única forma de que la posibilidad de ganar sea mayor, es si se apuesta por el número siete o el número ocho, por lo cual solo son dos posibilidades.

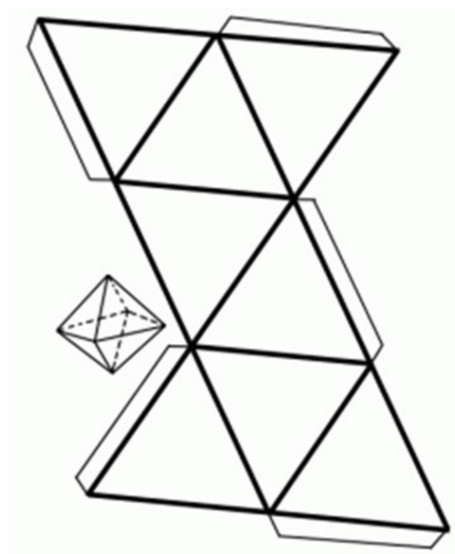


Imagen 2. como hacer un octaedro. **Tomada de** https://www.pinterest.es/carlosjacobsua/figuras-geometricas-para-armar/

   Paco no está muy convencido de lo que Luis y Hugo acaban de afirmar. Ayude a Paco a averiguar si lo que dicen sus dos amigos es verdadero o falso y explique su respuesta.

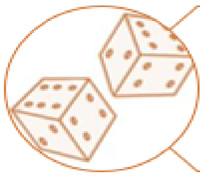
   ____
   ____

4. Teniendo en cuenta la plantilla encontrada por los tres amigos, construya un dado octaédrico de tal forma que cada lado del triángulo equilátero mida $0{,}04m.$

5. Responda las siguientes preguntas con base en el dado que construyó:
   A. ¿Cuántas aristas tiene el dado construido? ________________________________
   B. ¿Cuántos vértices tiene el dado? ________________________________
   C. ¿Cuál es al área de uno de los triángulos que compone el octaedro? ________________
   D. ¿Cuáles el área lateral del octaedro? ________________________________

Lectura 2. Juego Guayabita con dos dados

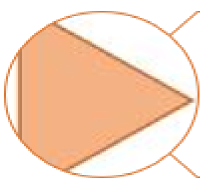
El juego Guayabita debe tener mínimo dos participantes y máximo seis.



Dos dados no cargados de seis caras (cúbico).

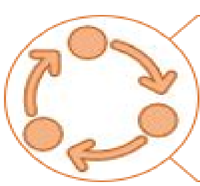
Los participantes, previamente, deben acordar lo que apostaran y el valor mínimo de la apuesta.

Para poder participar en una partida, cada uno de los jugadores deberá realizar un aporte a la mesa con el valor mínimo acordado.



Una vez que cada jugador haya realizado el aporte, la partida estará lista para empezar.

Para conocer el participante que dará apertura al juego, cada uno realizará un lanzamiento del dado y el que obtenga el mayor número iniciará el juego.



El siguiente participante que continúa, es el que se ubique a mano derecha del que inicio y así sucesivamente.

Lectura 2. Juego Guayabita con dos dados

Cada jugador tiene derecho a dos lanzamientos de los dados, con las siguientes excepciones:

Si el participante obtiene par de dos, tres, cuatro o cinco, deberá colocar en la mesa de juego una nueva apuesta según el valor mínimo acordado y no tendra derecho a un segundo lanzamiento.

Si cae par de uno o seis, deberá recoger lo apostado según el valor mínimo acordado al inicio del juego y no tendra derecho a un segundo lanzamiento.

Si el lanzamiento es diferente a pares, el participante debrá anunciar una nueva apuesta menor al valor que hay en la mesa de juego, seguido a esto hace su segundo lanzamiento y:

Si al hacer su segundo lanzamiento, el resultado que obtiene al sumar los números que caen en los dados es igual o menor que la suma del primer lanzamiento, el jugador deberá colorcar en la mesa de juego.

Si al hacer su segundo lanzamiento, el resultado que obtiene al sumar los números que caen en los dados es mayor que el primer lanzamiento, el jugador recogerá de la mesa el valor de la apuesta anunciada y dará continuara al siguiente participante.

El juego finalizará cuando la mesa de juego quede vacía.

Actividad 5. Juguemos

En grupos de tres estudiantes realicen la siguiente actividad.

1. Jueguen dos partidas de "Guayabita", haciendo uso de los dados construidos en la Actividad 4 (Construcción de dados).

   a. Haciendo uso de los dados cúbicos, jueguen la primera partida. Por cada lanzamiento (Lz) escriban en la Tabla 1 el número que cae en la cara superior del dado, adicionen tantas columnas como necesiten.

Jugadas / Estudiantes	1		2		3		4		5		6	
	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2
Estudiante 1												
Estudiante 2												
Estudiante 3												
Nombre del ganador												

Tabla 1. Resultados de los lanzamientos de la primera partida.

   b. Haciendo uso de los dados **octaédricos**, jueguen la segunda partida. Por cada lanzamiento (Lz) escriban en la Tabla 2 el número que cae en la cara superior del dado, adicionen tantas columnas como necesiten.

Jugadas / Estudiantes	1		2		3		4		5		6	
	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2	Lz 1	Lz 2
Estudiante 1												
Estudiante 2												
Estudiante 3												
Nombre del ganador												

Tabla 2. Resultados de los lanzamientos de la segunda partida.

2. Respondan las siguientes preguntas teniendo en cuenta los resultados registrados en las Tablas 6 y 7.

   a. ¿Cuántos lanzamientos fueron necesarios para que la primera partida acabara?

   ____

   b. ¿Cuántos lanzamientos fueron necesarios para que la segunda partida acabara?

   ____

   c. ¿Cuál número cayó con menor frecuencia en la primera partida?

   ____

Actividad 5. Juguemos

d. ¿Cuál número cayó con mayor frecuencia en la primera partida?

___

e. ¿Cuál número cayó con menor frecuencia en la segunda partida?

___

f. ¿Cuál número cayó con mayor frecuencia en la segunda partida?

___

g. ¿Cuál estudiante ganó más dinero en la primera partida?

___

h. ¿El estudiante que ganó más dinero en la primera partida fue el mismo que ganó más dinero en la segunda partida?

___

i. Si no fue así, ¿Cuál estudiante ganó más dinero cuando se jugó con los dados octaédricos?

___

3. ¿Al jugar con el dado octaédrico se tiene mayor probabilidad de ganar, que al jugar con el dado cúbico? Justifique su respuesta.

___

Actividad 6. Exploremos

Teniendo en cuenta las reglas del juego para dos dados, realice la siguiente actividad.

1. En la Tabla 3 complete el espacio muestral, al lanzar al mismo tiempo dos dados cúbicos no cargados.

Dado #2 / Dado #1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					
2						
3						
4					(5,4)	
5				(4,5)		
6						

Tabla 3. Espacio muestral de lanzar dos dados cúbicos.

2. ¿Por cuántos sucesos esta conformado el espacio muestral de parejas ordenadas, al lanzar los dos dados cúbicos?
____.

3. Se lanzan dos dados cúbicos, y se anota el resultado de sumar los números que caen en cada dado. Complete la Tabla 4, con la probabilidad que tiene de caer cada resultado.

SUMA DE NÚMEROS	PROBABILIDAD EN FRACCIÓN	PROBABILIDAD EN FRACCIÓN SIMPLIFICADA	PROBABILIDAD EN DECIMALES	PROBABILIDAD EN PORCENTAJE
2	1/36	1/36	0.028	2.8%
3	2/36	1/18		
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Tabla 4. Representación de la probabilidad al sumar los números que caen al lanzar dos dados cúbicos.

Actividad 7. Tablas de frecuencia dado cúbico

Con los mismos compañeros que realizó la Actividad 5 (Juguemos) realice el siguiente ejercicio.

1. Organicen en la Tabla 1 los números que el Estudiante 1 obtuvo en la primera partida, es decir, cuando jugó con el dado de seis caras.

NÚMERO DE DADO (x)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 1. Tabla de frecuencia primera partida del Estudiante 1, dado cúbico.

2. Organicen en la Tabla 2 los números que el Estudiante 2 obtuvo en la primera partida, es decir, cuando jugó con el dado cúbico.

NÚMERO DEL DADO (x)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 2. Tabla de frecuencia de la primera partida Estudiante 2, dado cúbico.

Actividad 7. Tablas de frecuencia dado cúbico

3. Organicen en la Tabla 3 los números que el Estudiante 3 obtuvo en la primera partida es decir, cuando jugó con el dado cúbico.

NÚMERO DE DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 3. Tabla de frecuencia de la primera partida Estudiante 3, dado cúbico.

4. A partir de los datos recogidos en las tablas de la 1 a la 3 respondan las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántas veces lanzó el dado cada jugador?

Estudiante 1:_______________ Estudiante 2: ______________ Estudiante 3: _____________

b. Indiquen cuántas veces le salió el número cinco a cada uno de los estudiantes en relación con cada lanzamiento. Ejemplo, al estudiante 1 el número tres le salió 4 veces de 15 lanzamientos.

Estudiante 1: ____
Estudiante 2: ____
Estudiante 3: ____

c. Teniendo en cuenta la regla del juego: si en el primer lanzamiento al jugador le salía el número uno, debía apostar más dinero ¿Cuál de los tres estudiantes fue el primero en apostar más dinero?

____
____

Actividad 7. Tablas de frecuencia dado cúbico

5. Organicen en la siguiente tabla de frecuencia (Tabla 4) los números que salieron durante la primera partida, es decir cuando jugaron con el dado cúbico.

NÚMERO DEL DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 4. Tabla de frecuencia de la primera partida, dado cúbico.

6. A partir de la Tabla 4 realicen un gráfico estadístico que represente la información de esta partida.

7. Completen la siguiente frase

El número 8 cayó ___________ veces de _____ veces que se lanzó el dado, es decir, que cayó el _______% de las veces. En cambio el número 1 cayó el _____% de las veces que se lanzó el dado.

Actividad 8. Tablas de frecuencia dado octaédrico

Con los mismos compañeros que realizó la actividad 5 (Juguemos) realice la siguiente actividad.

1. Organicen en la Tabla 5, los números que el Estudiante 1 obtuvo al lazar el dado octaédrico.

NÚMERO DE DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 5. Tabla de frecuencia Estudiante 1, dado octaédrico.

2. Organicen en la Tabla 6, los números que el Estudiante 2 obtuvo al lanzar el dado octaédrico.

NÚMERO DE DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 6. Tabla de frecuencia Estudiante 2, dado octaédrico.

Actividad 8. Tablas de frecuencia dado octaédrico

3. Organicen en la Tabla 7 los números que el Estudiante 3 obtuvo al lanzar el dado octaédrico.

NÚMERO DE DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 7. Tabla de frecuencia Estudiante 3, dado octaédrico.

4. A partir de los datos recogidos en las tablas de la 5 a la 7 respondan las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántas veces lanzó el dado cada jugador?

Estudiante 1:_______________ Estudiante 2: ______________ Estudiante 3: _____________

b. Indiquen cuántas veces le salió el número cinco a cada uno de los estudiantes en relación con cada lanzamiento. Ejemplo, al Estudiante 1 el número ocho le salió 4 veces de 21 lanzamientos.

Estudiante 1: ____
Estudiante 2: ____
Estudiante 3: ____

c. Teniendo en cuenta la regla del juego: si en el primer lanzamiento al jugador le salía el número uno, debía apostar más dinero. ¿Cuál de los tres estudiantes fue el primero en apostar más dinero?

____
____

Actividad 8. Tablas de frecuencia dado octaédrico

5. Organicen en la siguiente tabla de frecuencia (Tabla 8) los números que salieron durante la segunda partida, es decir, cuando jugaron con el dado de ocho caras.

NÚMERO DEL DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA RELATIVA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$

Tabla 8. Tabla de frecuencia resultados totales, dado octaédrico.

6. A partir de la Tabla 8 realicen un gráfico estadístico que representa la información del juego.

Actividad 9. Dinero jugado en la primera ronda

Con los mismos compañeros que realizó la Actividad 5 (Juguemos).

1. Completen la Tabla 9. Registren la cantidad de dinero con la que cada estudiante empezó a jugar la primera partida, es decir, la partida con el dado cúbico.

ESTUDIANTE 1	ESTUDIANTE 2	ESTUDIANTE 3

Tabla 9. Cantidad de dinero al inicio de la primera partida (dado cúbico).

2. Completen la Tabla 10. Registren la cantidad de dinero con la que cada estudiante quedó al finalizar la primera partida.

ESTUDIANTE 1	ESTUDIANTE 2	ESTUDIANTE 3

Tabla 10. Cantidad de dinero al finalizar la primera partida (dado cúbico).

3. Realicen un gráfico estadístico en el cual se evidencien los datos registrados en las Tablas 9 y 10.

4. Teniendo en cuenta el gráfico ¿Cuál estudiante ganó más dinero?
____
____

5. Teniendo en cuenta el gráfico ¿Cuál estudiante perdió más dinero?
____
____

Actividad 10. Dinero jugado en la segunda ronda

Con los mismos compañeros que realizó la Actividad 5 (juguemos) realice lo siguiente:

1. Completen la Tabla 11. Registren la cantidad de dinero con la que cada estudiante empezó a jugar la segunda partida, es decir, la partida con el dado octaédrico.

ESTUDIANTE 1	ESTUDIANTE 2	ESTUDIANTE 3

Tabla 11. Cantidad de dinero al inicio de la segunda partida (dado octaédrico).

2. Completen la Tabla 12, en la cual se registra la cantidad de dinero con la que cada estudiante quedó al finalizar la segunda partida.

ESTUDIANTE 1	ESTUDIANTE 2	ESTUDIANTE 3

Tabla 12. Cantidad de dinero al finalizar la segunda partida (dado octaédrico).

3. Realicen un gráfico estadístico en el cual se evidencien los datos reportados en las Tablas 11 y 12.

4. Teniendo en cuenta el gráfico ¿Cuál estudiante ganó más dinero?
____
____

5. Teniendo en cuenta el gráfico ¿Cuál estudiante perdió más dinero?
____
____

Actividad 11. Análisis del juego

Con los mismos compañeros que realizó la Actividad 5 (juguemos):

1. Respondan las siguientes preguntas teniendo en cuenta las Actividades 7, 8, 9 y 10

a. ¿El estudiante 3 tuvo más lanzamientos con el dado cúbico o con el dado octaédrico?

____

____

b. ¿Algún estudiante tuvo mayor cantidad de lanzamientos que otro?

____

- De ser así, ¿ese fue el mismo estudiante que ganó más dinero?

____

c. ¿Es verdad que se gana más dinero si se juega con el dado octaédrico que con el dado cúbico? Justifique su respuesta.

____

____

d. ¿Es verdad que al jugar con un dado cúbico el que inicia el juego es el que gana la partida? Justifique su respuesta.

____

____

e. ¿Es correcto afirmar que cuando se juega Guayabita en el segundo lanzamiento que se tiene, se debe de apostar más dinero al número mayor del dado, sin importar el número que cayó con anterioridad? Justifique su respuesta.

____

____

f. ¿Se gana más dinero del que se apuesta en el juego?

____

____

g. ¿Es correcto afirmar que al jugar con un dado cúbico la probabilidad de ganar es menor que al jugar con un dado octaédrico? Justifique su respuesta.

____

____

h. ¿Qué tan acertado es apostar dinero en el juego Guayabita? Justifique su respuesta.

____

____

Actividad 12. Conclusión del juego

De manera individual reflexione sobre la siguiente situación:

1. A partir de los resultados obtenidos y analizados en las actividades del Módulo 3 ¿Considera adecuado que Hugo, Paco y Luis sigan apostando todo su dinero en el juego Guayabita?

   Sí ____   No ____

   Justifique su respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

EVALUACIONES
Módulo 1. Planteamiento del problema

Evaluación 1

1. Hugo, Paco y Luis quieren saber si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas. Una con una línea cada experimento a su correspondiente clasificación.

a. Se lanza un dado cúbico no cargado, y se calcula su volumen.

b. Se lanzan dos dados cualesquiera, y se anota la sumatoria de los resultados que caen.

c. Se lanzar un dado cúbico, y se anota el espacio muestral de este.

d. Se lanza un dado cúbico, y se anota la suma de los ángulos internos de una de las caras del dado.

e. Se lanza un dado octaédrico, y se escribe el resultado que cae en la cara superior.

Experimentos aleatorios

Experimentos deterministas

2. Hugo construye un dado de 4 caras (un tetraedro) como el que se muestra en la Imagen 1.

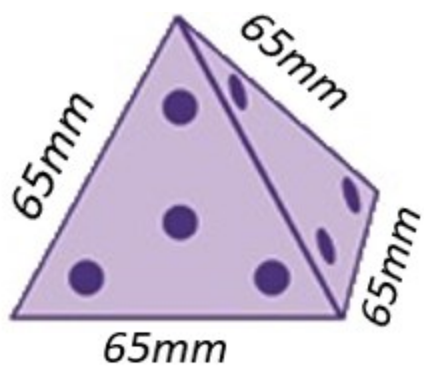


Imagen 1. Dado construido por Hugo. **Tomada y adaptada de** https://rea.ceibal.edu.uy/elp/midiendo-probabilidades/prueba_lo_que_has_aprendido.html

a. Halle el área de una de sus caras.

____

____

b. Halle el área total del dado en cm^2.

____

____

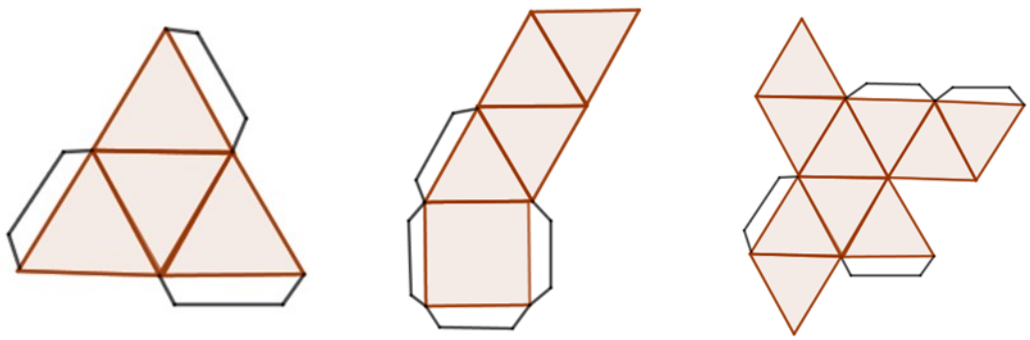
c. Escriba el espacio muestral correspondiente al lanzar el dado tetraédrico.

____

____

Evaluación 1

3. Encierre la plantilla que Hugo debió usar para construir el dado tetraédrico.



Justifique su respuesta.

____
____
____
____

ESPACIO PARA REALIZAR OPERACIONES Y PROCEDIMENTOS

Evaluación 2

1. En la Tabla 1 escriba las parejas que conforman el espacio muestral, al lanzar al mismo tiempo dos dados tetraédricos no cargados.

Dado 2 / Dado 1	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Tabla 1. Espacio muestral al lanzar dos dados tetraédricos.

2. ¿Por cuántos sucesos esta conformado el espacio muestral de la Tabla 1?

____

3. En la Tabla 2 se evidencia el espacio muestral al sumar los resultados que caen cuando se lanzan al mismo tiempo dos dados tetraédricos no cargados.

Dado 2 / Dado 1	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Tabla 2. Espacio muestral: Suma de los resultados que caen al lanzar dos dados tetraédricos.

Complete la Tabla 3, con las probabilidades de los resultados reportados en la Tabla 2.

RESULTADO DE LOS NÚEMROS SUMADOS	PROBABILIDAD EN FRACCIÓN DECIMAL	PROBABILIDAD EN FRACCÓN SIMPLIFICADA	PROBABILIDAD EN DECIMALES	PROBABILIDAD EN PORCENTAJE
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Tabla 3. Tabla de probabilidades de los números que caen en los dados tetraédricos.

Evaluación 2

4. Ubique en una recta numérica las probabilidades, expresadas en fracciones simplificadas, según lo registrado en la Tabla 2.

5. Paco comenta que el 60% de las veces que jugó durante 4 semanas con sus amigos ganó; y que Luis perdió el 25% de las veces.

a. ¿Cuántas veces ganó Paco en ese mes?

____

____

b. ¿Cuántas veces perdió Luis en ese mes?

____

____

ESPACIO PARA REALIZAR OPERACIONES Y PROCEDIMENTOS

Evaluación 3

Hugo, Paco y Luis jugaron con el dado tetraédrico y obtuvieron los resultados representados en la Tabla 1.

Jugadas / Estudiantes	1		2		3		4		5		6	
	Lz 1	**Lz 2**	**Lz 1**	**Lz 2**	**Lz 1**	**Lz 2**	**Lz 1**	**Lz 2**	**Lz 1**	**Lz 2**	**Lz 1**	**Lz 2**
Estudiante 1	4	x	3	2	1	x	1	x	1	x	4	x
Estudiante 2	3	2	4	x	2	4	2	3	1	x	4	x
Estudiante 3	4	x	4	x	2	2	3	4	2	3	x	x

Tabla 1. Resultados del juego con dado tetraédrico.

Las reglas del juego cuando se juega con el dado tetraédrico son:

- Siempre se apuesta o se recuepera la misma cantidad de dinero en cada lanzamiento con la que empezó el juego.
- Si cae el número cuatro, se tiene derecho a recoger lo apostado inicialmente por el participante.
- Si cae el número uno, se debe poner en la mesa una suma de dinero igual que la se acordó para empezar el juego.
- Si cae el número dos o tres, se debe anunciar una nueva apuesta y:
  - Si en el segundo lanzamiento cae un número menor que el que había caído en el primer lanzamiento, se debe colocar en la mesa el valor anunciado.
  - Si en el segundo lanzamiento cae un número mayor que el que había caído en el primer lanzamiento, el jugador recoge de la mesa el valor de la apuesta que anunció y se dará continuidad al siguiente participante.
- El juego termina cuando la mesa de apuesta quede vacía.

Evaluación 3

1. Teniendo en cuenta las reglas del juego analice los datos de la Tabla 1 y determine cuál de los tres amigos perdió en el juego y cuál ganó.

Ayuda:

1. Complete la Tabla 2, para ello reporte si en cada lanzamiento Hugo, Paco y Luis recuperaron el dinero o tuvieron que apostar más.
2. Luego analice los datos registrados y determine quién ganó y quien perdió en el juego. **Nota:** Un '*recupera*' se anula con un '*apuesta'.*

HUGO	RECUPERA					
PACO					APUESTA	
LUIS						FIN DEL JUEGO

Tabla 2. Resumen del juego con dado tetraédrico.

Justifique su respuesta, respecto a quien ganó y quien perdió.
____
____
____

2. Organice los datos de la Tabla 1 en la siguiente tabla de frecuencias (Tabla 3)

CARA DEL DADO (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (n_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA (N_i)	FRECUENCIA RELATIVA $\left(f_i = \frac{n_i}{N}\right)$	FRECUENCIA ABSOLUTA ACOMULADA $\left(F_i = \frac{N_i}{N}\right)$
1				
2				
3				
4				

Tabla 3. Tabla de frecuencia al lanzar un dado tetraédrico.

Evaluación 3

3. Realice un gráfico estadístico que represente la información de la Tabla 3.

4. Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta el ítem 1 y 2.

A. El 33% de las veces cayó el número ______________________________.

B. El número ________________ cayo 1/6 de veces de los lanzamientos realizados por Hugo, Paco y Luis; mientras que el número ___________ cayó 0,29% de las veces que se lanzó el dado.

Evaluación 4

Paco decide hacer un análisis general del juego cuando se usa el dado tetraédrico, para ello escribe durante dos semanas los resultados que caen al lanzar el dado (Imagen 1).

Día 1

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	3	3	3	3	4	X	4	X	4	X
PACO	3	3	1	X	3	2	3	2	2	3
LUIS	2	4	4	X	4	X	4	X	4	X

Día 2

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5		6		7		8	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	2	1	2	4	1	X	3	3	3	2	2	3	4	X	3	4
PACO	1	X	1	X	2	3	3	1	4	X	4	X	4	X	3	4
LUIS	2	3	2	1	2	1	4	X	2	2	1	X	3	4	X	X

Día 3

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5		6	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	2	1	3	3	4	X	1	X	1	X	4	X
PACO	3	2	3	3	4	X	2	4	4	X	4	X
LUIS	4	X	3	4	4	X	1	X	3	4	X	X

Día 4

Jugadas / Estudiantes	1		2	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	2	3	4	X
PACO	1	X	3	4
LUIS	4	X	X	X

Día 5

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	4	X	3	3	1	X	1	X	3	4	1	X	4	X	2	3	4	X
PACO	3	3	3	1	3	4	1	X	1	X	3	4	4	X	4	X	3	4
LUIS	3	2	1	X	1	X	4	X	1	X	3	4	2	4	1	X	4	X

Día 6

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5		6		7		8	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	1	X	1	X	2	4	2	1	1	X	2	3	2	4	2	1
PACO	2	3	3	1	4	X	1	X	1	X	1	X	3	4	4	X
LUIS	2	4	2	2	2	3	1	X	3	4	3	4	4	X	3	4

Día 7

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	3	3	3	3	4	X	4	X	4	X
PACO	3	3	1	X	3	2	3	2	2	3
LUIS	2	4	4	X	4	X	4	X	4	X

Día 8

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	4	X	4	X	4	X	4	1	4	X
PACO	3	3	3	1	3	2	1	X	2	3
LUIS	4	X	3	3	4	X	3	2	4	X

Día 9

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	2	3	4	X	3	4	4	X
PACO	1	X	1	X	1	X	X	X
LUIS	4	X	2	1	4	X	X	X

Día 10

Jugadas / Estudiante	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2	Lz1	Lz2
HUGO	4	X	3	4	4	X	1	X	3	4	1	X	4	X	2	3	3	4
PACO	3	2	3	1	3	2	1	X	1	X	3	4	2	4	4	X	3	4
LUIS	3	2	1	X	1	X	4	X	1	X	3	4	4	X	1	X	4	X

Imagen 1. Resultados que se obtuvieron del juego Guayabita durante dos semanas (dados tetraédricos).

Evaluación 4

Paco concluye: en dos semanas que jugamos con el dado de cuatro caras, yo gané el 30% de las veces, el 50% Hugo y el 20% Luis; a diferencia de cuando jugábamos con el dado de seis caras con el cual yo ganaba casi todas las veces.

Luego decide realizar un gráfico en el cual presenta los resultados de los números que Hugo y él obtuvieron al hacer los lanzamientos (Imagen 2); para así poder comparar los resultados y poder saber a qué número le debería apostar más dinero cuando jueguen con dicho dado, si el resultado que cae es diferente de 1 y de 4.

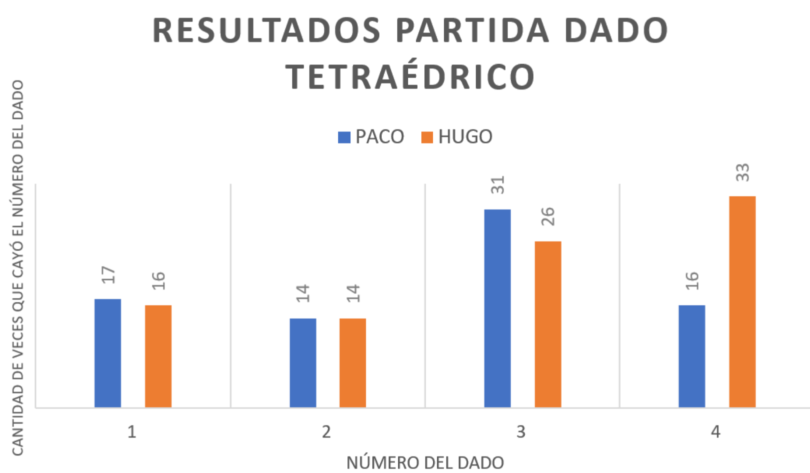


Imagen 2. Gráfico estadístico realizado por Paco en relación con los lanzamientos del dado tetraédrico de Hugo y de él.

En la Tabla 1 se describe el análisis que Paco realiza.

AFIRMACIÓN	RAZÓN
Hugo obtuvo más dinero	De las veces que Hugo lanzó el dado, el número 4 (que es con el que recupera dinero) le salió el 42% de las veces; mientras que a Paco solo le cayó un 20% de esas mismas veces.
Paco tuvo que apostar más dinero	En el primer lanzamiento de cada jugada a Paco casi siempre (el 22% de las veces) le cayó el número 1, mientras que a Hugo solo le cayó un 20% de las veces.
Solo se tiene ventaja cuando cae el número 3	A Paco este número le cayó más veces que a Hugo. Pues a Hugo solo le cayó el 33% de las veces lanzadas, mientras que a Paco el número 3 le cayó un 42% de las veces que lanzó el dado.
Con el número 2 no se tiene ninguna ventaja o desventaja	Cayó la misma cantidad de veces a los dos, es decir, un 18% de las veces lanzadas por tanto, no hay desventaja con este número.

Tabla 1. Descripción del análisis realizado por Paco.

Evaluación 4

Con el análisis descrito en la Tabla 1 Paco concluye que, con el dado tetraédrico no le es conveniente jugar, así que decide pedirles a sus amigos que solo jueguen con el dado cúbico, ¿será que sus amigos aceptaran?

¿Está usted de acuerdo con el análisis realizado por Paco?

Si ____ No ____

Justifique su respuesta.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

6° Grado