

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO
MATEMÁTICO DE ÁREA O SUPERFICIE EN ESTUDIANTES DE GRADO 6º

LUIS ALBERTO GUAJE HERNÁNDEZ

FACULTAD DE EDUCACIÓN
ESPECIALIZACIÓN EN PEDAGOGÍA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA DE COLOMBIA
BOGOTÁ D.C.

2024

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO
MATEMÁTICO DE ÁREA O SUPERFICIE EN ESTUDIANTES DE GRADO 6º

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
ESPECIALISTA EN PEDAGOGÍA

LUIS ALBERTO GUAJE HERNÁNDEZ

ASESOR
CARLOS EDILBERTO ORDOÑEZ

FACULTAD DE EDUCACIÓN
ESPECIALIZACIÓN EN PEDAGOGÍA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA DE COLOMBIA
BOGOTÁ D.C.

2024

DEDICATORIA

*Dedico este trabajo a la vida por permitirme la oportunidad de pretender un logro más en
ella.*

*A la Secretaría de Educación de Bogotá por financiar mis estudios y mejorar mi
desempeño profesional como docente de la institución.*

A la comunidad educativa del colegio Compartir Recuerdo IED.

A mi esposa, a mis hijos y nieto.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a: La Universidad Pedagógica por aceptarme como estudiante y a los profesores de la Especialización en Pedagogía por compartirme sus conocimientos y ser pacientes conmigo.

A mi asesor por su colaboración.

A mi esposa por su apoyo incondicional.

TABLA DE CONTENIDO

DEDICATORIA.....	3
AGRADECIMIENTOS	4
RESUMEN.....	6
INTRODUCCIÓN	7
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	9
JUSTIFICACIÓN.....	11
OBJETIVO GENERAL	16
Objetivos específicos.....	16
MARCO TEÓRICO O DE REFERENCIA	17
La Didáctica	17
La Didáctica de las matemáticas	21
El pensamiento matemático en el currículo: el concepto de área	26
El tratamiento del concepto de área en la enseñanza.....	30
La Unidad Didáctica en la enseñanza del concepto de área	33
El origami como herramienta en la enseñanza del concepto del área	34
METODOLOGÍA	37
Diseño de la Propuesta Didáctica.....	37
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	45
Recomendaciones	45

TÍTULO

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO MATEMÁTICO DE ÁREA O SUPERFICIE EN ESTUDIANTES DE GRADO 6º

RESUMEN

Periódicamente los estudiantes en colegios Distritales de Bogotá son evaluados y medidos mediante las pruebas Saber realizadas en los grados 3º, 5º, 9º y 11º. Estos resultados son entregados como un Índice Sintético de Calidad Educativa ISCE a los colegios. Específicamente, para el año 2017, en el Colegio Compartir Recuerdo IED, este índice evidenció puntajes insuficientes para áreas como matemáticas y español. Por esto, la institución, en articulación con los docentes a cargo de estas áreas deben desarrollar las estrategias y acciones para mejorar estos índices de calidad. De acuerdo con esto, el objetivo de este trabajo es diseñar una unidad didáctica para la enseñanza del concepto matemático de área o superficie en estudiantes de grado 6º de educación básica del colegio Compartir Recuerdo, con el propósito de promover su aprendizaje. La unidad propuesta recurre a la visualización de figuras geométricas, a la producción de un retículo a partir del doblado de superficies para dibujar figuras equivalentes y a la identificación de unidades de medida no convencionales a partir del retículo, para dar cuenta intuitiva de la magnitud de las áreas o superficies de figuras geométricas regulares. En este contexto, el seguimiento y la verificación del aprendizaje, mediante el uso de la unidad didáctica en la enseñanza aprendizaje del concepto general de área, considerará el impacto de la generación de retículos y la visualización de patrones de área, para ubicar áreas equivalentes en la elaboración de los preconceptos de los estudiantes sobre la noción de área y su medición.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje en los estudiantes de los conceptos matemáticos en los niveles de educación primaria y bachillerato es fundamental tanto para el aprendizaje de otras ciencias en estos niveles como para el aprendizaje de algunas disciplinas en niveles superiores de educación. Por otro lado, el aprendizaje debe promoverse mediante un proceso de enseñanza que permita al aprendiz organizar conceptos. El docente o profesor y sus estrategias pedagógicas juegan un papel fundamental para que se dé en el estudiante el aprendizaje significativo de los conceptos.

De acuerdo con los resultados de la evaluación estandarizada de conocimientos se reflexiona sobre si las estrategias de enseñanza actuales han cumplido con el objetivo de permitir un aprendizaje significativo en los estudiantes y, en caso negativo, si ésta pudiese ser la razón por la cual se evidencian bajos resultados académicos de los estudiantes en todo tipo de pruebas. Investigaciones al respecto proponen estrategias de enseñanza basadas en modelos que destacan el papel activo del sujeto que mejorarían el proceso de aprendizaje considerando la enseñanza aprendizaje como un proceso integral donde se debe tener en cuenta tanto la participación del profesor como la del estudiante para lograr los fines educativos.

El presente trabajo tiene como propósito presentar una estrategia didáctica innovadora para la estructuración del concepto de área mediante actividades de visualización y manipulación de materiales didácticos que permitan a los estudiantes ubicar y dibujar áreas equivalentes y descubrir unidades de medida no convencionales para una primera aproximación al concepto de área, su cálculo y su posterior generalización y uso de fórmulas. Las actividades están planteadas y dirigidas para que los estudiantes utilicen la plataforma de comunicación WhatsApp para objetivar sus ideas en relación con aspectos geométricos unidimensionales y bidimensionales que encuentran en un dibujo geométrico en una hoja de papel, y comunicarlas solo a través de mensajes escritos, con el fin de comprender estos

aspectos y hacerlos comprender de sus compañeros mediante la visualización y el uso de la técnica de doblado de papel (origami). Las actividades así planteadas pretenden también que los estudiantes desarrollen sus competencias comunicativas orales y escritas y de trabajo cooperativo necesarias en el aprendizaje tanto de la matemática como de otras ciencias.

Este documento pretende también informar al lector acerca de la problemática analizada por la cual surge esta idea de investigación y la justificación para su desarrollo, con base en la literatura relacionada y referenciada al final de este. Además, se menciona la metodología para el diseño de la propuesta, así como el diseño mismo de la Unidad didáctica de enseñanza que se espera permita cumplir con los objetivos del trabajo. Por último, se plantearán las conclusiones tentativas a las que se puede llegar con el desarrollo de este trabajo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Anualmente los colegios distritales de Bogotá reciben del Ministerio de Educación el informe por colegio de los resultados de las pruebas Saber realizadas a estudiantes de grados 3º, 5º, 9º y 11º (llamado Índice Sintético de Calidad Educativa ISCE) obtenidos en el cuatrienio inmediatamente anterior al año en curso con el fin de que se conozcan los avances o retrocesos en la calidad de la educación impartida en la institución y se planteen estrategias para el mejoramiento de la misma en el año siguiente. En el informe de resultados del Colegio Compartir Recuerdo IED, se evidencia efectivamente que altos porcentajes de estudiantes se encuentran en franjas de desempeño académico insuficiente en las asignaturas de matemáticas y español (para el año 2017 los porcentajes de insuficiencia son 23% en grado 3º, 69% en grado 5º, 15% en grado 9º y 21% en grado 11º, cifras extraídas del Reporte de la excelencia 2018), razón por la cual la institución y los docentes a cargo de estas asignaturas deben preguntarse el porqué de los mismos y responder a preguntas como ¿qué acciones toma la institución para mejorar dichos resultados? o ¿qué acciones realizan los docentes en la misma dirección?

En relación con esto, de un lado, al final del año lectivo los directivos del Colegio Compartir Recuerdo IED realizan lo que se llama la evaluación anual de desempeño a los docentes con el fin de convenir estrategias pedagógicas encaminadas al mejoramiento de los resultados académicos de los estudiantes, como parte de la planeación para cada año antes del inicio de labores, de otro lado, los docentes en reuniones del área de matemáticas, revisan las mallas curriculares y elaboran conjuntamente los planes de estudios para cada uno de períodos académicos del año que inicia, en ambos casos con el fin de procurar el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes y por ende en su desempeño en las diferentes pruebas.

- **Pregunta orientadora**

Mediante el desarrollo de este trabajo se pretende responder el siguiente interrogante:

¿Cómo aporta el diseño de una unidad didáctica que trabaja los “*preconceptos de la geometría*”, esto es, la promoción del aprendizaje mediante la visualización de patrones de área no convencionales e iterables, al aprendizaje del concepto general de área de una figura geométrica regular, en estudiantes de grado 6°?

Hipótesis: El diseño y la implementación de una unidad didáctica para la enseñanza aprendizaje de los preconceptos de la geometría en estudiantes de grado 6°, puede mejorar el aprendizaje del concepto general de área de una figura geométrica regular.

En esta unidad didáctica se considera un método para la generación de *situaciones ricas* en el aula y que pueden convertirse en herramientas de planificación y metodológicas para la enseñanza aprendizaje, como un instrumento estratégico *constructivista*, que define una estrategia pedagógica para favorecer el aprendizaje y que recurre al uso crítico de materiales manipulativos, involucrados como elementos de las situaciones didácticas, los cuales se consideran como un puente entre la realidad y los objetos matemáticos.

JUSTIFICACIÓN

La formación y/o actualización de los educadores en ejercicio es una necesidad como también es necesaria una profunda reflexión sobre la práctica docente acompañada de la investigación de las problemáticas de la educación, como lo es el proceso enseñanza aprendizaje, para que esta cumpla con los fines sociales que la definen.

Porlan (1987), al respecto, propone *un modelo didáctico basado en la investigación* que considere como elemento fundamental en su estructura, como todo modelo, *la definición de las tareas específicas del maestro* que hagan viable el modelo manteniendo el mayor grado de coherencia de dichas tareas con los principios psicológicos, sociológicos y específicamente didácticos que lo defiendan.

De esta manera “La concepción del profesor como *facilitador del aprendizaje* de sus alumnos y, al mismo tiempo, como *investigador de los procesos del aula*”, (Porlan,1987, p. 63) lo propone el autor, para favorecer aspectos esenciales como:

La concepción constructivista del aprendizaje. 2. La importancia de las *representaciones y errores conceptuales* en la construcción del conocimiento. 3. El papel de la comunicación en el aula. 4. La influencia de los intercambios ecológicos y sociales en los procesos de aprendizaje. 5. El desarrollo de actitudes y valores propios del pensamiento científico en el alumno (Porlan,1987, p.63).

También centrar la discusión “sobre la pertinencia y viabilidad de incluir entre las tareas profesionales del maestro, la de investigador de las situaciones en las que, como docente, está inmerso” (Porlan,1987, p.63).

Observar y analizar la práctica docente responde a la necesidad de enfrentar algunos problemas de la enseñanza de las matemáticas por cuanto, de un lado, los resultados

académicos de los estudiantes son muy bajos en las pruebas estandarizadas nacionales y de otro lado, el interés por el aprendizaje y el manejo de los conceptos matemáticos escolares de los estudiantes es muy bajo. Así, es necesario indagar sobre el uso de estrategias de enseñanza aprendizaje innovadoras y sustentadas en recientes teorías pedagógicas y en resultados de investigaciones al respecto que permitan mejorar los aprendizajes y el interés de los estudiantes por los conceptos matemáticos.

Rico, L (2004) plantea, para la sociedad española, que uno de los puntos conflictivos con relación a la educación que debe abordarse en profundidad es la revisión, regulación y puesta en práctica efectiva de planes de formación, inicial y permanente, del profesorado de los niveles educativos primario, secundario y superior que contribuirá a la solución de buena parte de los problemas del sistema educativo español. Propone algunas ideas relativas a la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria. Analiza los bajos resultados de los estudiantes en las pruebas PISA 2003 que preocupan y ponen en evidencia que “el sistema educativo español no está formando adecuadamente a los escolares, al menos en aquellas competencias que actualmente se consideran prioritarias en los países desarrollados y que caracterizan la alfabetización matemática. Abordar esta situación implica una reflexión sobre la enseñanza obligatoria en España.” (Rico, 2004, p.1).

Algo similar aplica para Colombia, de un lado, por el referente de los bajos resultados tanto en las pruebas internas antes mencionadas como en las mismas pruebas PISA y, de otro lado, por su reciente membresía en la OCDE.

Ante los problemas recurrentes de bajo desempeño académico en general en las matemáticas en la educación primaria y secundaria en muchos sistemas educativos, incluyendo el colombiano, a lo largo de los últimos años, numerosos estudios han explorado diversas estrategias y enfoques pedagógicos para abordar esta problemática. A continuación, se presenta un resumen de algunos de los trabajos más relevantes que han buscado mejorar el aprendizaje de las matemáticas en este contexto:

Estrategias de enseñanza basadas en el Constructivismo: Investigaciones como la de López (2019) han explorado el impacto de estrategias de enseñanza basadas en el enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de educación primaria. Este estudio encontró que la implementación de actividades de aprendizaje activo y participativo contribuyó significativamente al desarrollo de habilidades matemáticas y al mejoramiento del rendimiento académico.

Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas: Investigaciones recientes, como la de Ramírez et al. (2020), han examinado el efecto del uso de la tecnología, específicamente herramientas digitales interactivas, en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria. Los resultados sugieren que la integración de la tecnología en el aula puede aumentar el interés de los estudiantes por las matemáticas y mejorar la comprensión de conceptos difíciles.

Enfoques Pedagógicos Diferenciados: Estudios como los de García Hoz (1992) y de García y Michels (2018) han investigado la eficacia de enfoques pedagógicos diferenciados para atender las necesidades individuales de los estudiantes en matemáticas. Este trabajo encontró que la personalización del aprendizaje, adaptando las actividades y materiales a los estilos de aprendizaje y niveles de habilidad de cada estudiante, condujo a una mejora significativa en el desempeño académico.

Formación Continua del Profesorado: La formación continua del profesorado ha sido identificada como un factor crucial para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones como la de Gómez et al, (2017) han examinado el impacto de programas de desarrollo profesional en la práctica docente y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas. Los hallazgos indican que la participación en programas de formación continua puede llevar a una implementación más efectiva de estrategias pedagógicas innovadoras y, en última instancia, a una mejora en los resultados académicos.

Aprendizaje Basado en Proyectos: El enfoque de aprendizaje basado en proyectos ha ganado popularidad como una estrategia efectiva para enseñar matemáticas. Investigaciones como la de Vargas et al (2020), han explorado cómo la realización de proyectos matemáticos, que implican la resolución de problemas del mundo real, puede promover un aprendizaje más profundo y significativo. Los resultados sugieren que este enfoque puede mejorar tanto el rendimiento académico como la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas.

Estos estudios ofrecen una visión panorámica de las diferentes estrategias y enfoques pedagógicos que se han investigado para mejorar el desempeño académico en matemáticas en educación primaria y secundaria. Sin embargo, es importante destacar que cada contexto educativo presenta sus propios desafíos y que la efectividad de estas intervenciones puede variar según las características específicas de los estudiantes y los docentes involucrados.

Considerando aspectos puntuales, en relación con la formación del profesorado de matemáticas, Rico, L (2004) plantea que uno de los aspectos de la problemática es la no existencia de un plan de formación de matemáticas de secundaria articulado pedagógicamente que contemple los nuevos avances sobre el currículo de matemáticas y *procesos de aprendizaje basados en competencias* que faciliten la tarea del profesorado con el aporte de “un modelo de planificación y desarrollo de *unidades didácticas* basadas en un análisis didáctico fundado.” (Rico, 2004, p. 3). Para el autor el bajo rendimiento de los escolares de secundaria en matemáticas en pruebas nacionales e internacionales tiene como una de sus causas la escasa preparación del profesorado y en consecuencia los deficientes aprendizajes de los estudiantes.

Algunas de las preguntas importantes que se deben hacer en el análisis de la enseñanza para tener en cuenta en la intención de mejorar la práctica docente y producir aprendizajes significativos en los estudiantes y buenos resultados de estos en las pruebas son ¿qué se enseña? y ¿cómo se enseña?

Al respecto de qué se enseña y cómo se enseña, con base en las diferentes corrientes filosóficas que sustentan los conceptos de la didáctica de las disciplinas, algunos docentes y/o

investigadores, para responder a las preguntas anteriores, plantean el concepto de *unidad didáctica*, como un instrumento estratégico *constructivista*, al que definen como una elemento pedagógico para la enseñanza aprendizaje, “en el que el docente diseña (crea, selecciona, modifica, etc.), implementa y evalúa las unidades didácticas que aplica en su aula” (Couso et al., 2005, p.11). Una unidad didáctica es un instrumento estratégico *constructivista* muy importante para la práctica docente que representa *la concreción de las ideas e intenciones educativas en el aula* y se vincula con la reflexión-acción de los docentes en el sentido de cambiar lo que somos y evolucionar a lo querríamos ser.

Estos autores (Couso et al., 2005) plantean, como aporte a los futuros docentes y maestros en ejercicio, la conveniencia de diseñar *unidades didácticas*, consideradas como un método para la generación de *situaciones ricas* en el aula y que pueden convertirse en herramientas de planificación y metodológicas para la enseñanza aprendizaje. Con sentido práctico, con fundamento en teorías referidas en su investigación y también como resultado de la reflexión de la aplicación de esta estrategia en su práctica docente, los autores presentan en el texto ejemplos de *unidades didácticas*, para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias.

OBJETIVO GENERAL

Diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica que trabaja con la visualización de patrones de área no convencionales e iterables y la generación de retículos, como estrategia para la enseñanza del concepto matemático de área o superficie en estudiantes de grado 6° de educación básica del colegio Compartir Recuerdo para mejorar su aprendizaje.

En esta oportunidad se aborda solo el diseño de la unidad didáctica.

Objetivos específicos

- Identificar preconceptos, procedimientos y actitudes matemáticas que, según diversos autores, intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de área o superficie en estudiantes de educación básica.

- Abordar los preconceptos, procedimientos y las actitudes matemáticas identificados dentro del diseño de la unidad didáctica para el aprendizaje del concepto de área o superficie, en los estudiantes de grado 6° del colegio Compartir Recuerdo.

- Identificar distintas secuencias de construcción que siguen los estudiantes de grado 6° del colegio Compartir Recuerdo. Este último objetivo hace parte de las fases de implementación y evaluación subsiguientes a la fase de diseño de la unidad didáctica.

MARCO TEÓRICO O DE REFERENCIA

La Didáctica

Por su origen etimológico griego, la didáctica no es otra cosa que “el arte de enseñar”, y todas las palabras con la misma raíz tienen que ver con el término de “enseñanza” (Brousseau, 1990). Con respecto a la enseñanza Astolfi en 1977, menciona *la didáctica* como uno de los conceptos para tener en cuenta en la enseñanza aprendizaje y con relación al término didáctico, dice que, rompiendo con la connotación de este como adjetivo, en lo sustantivo se trata de “un movimiento de constitución de nuevos campos de estudio y análisis de los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje en relación con un contenido de aprendizaje bien especificado” (Astolfi, 1977, p. 73-74).

La didáctica de las disciplinas responde a este movimiento y se caracteriza por “centrarse en *campos conceptuales delimitados* y examinar los problemas específicos que se plantean desde el punto de vista de su enseñanza y su aprendizaje” (Astolfi, 1977, p. 74); por la conciencia que se tiene en cuanto a que los contenidos de la enseñanza no vienen dados de antemano y se deben construir mediante elaboraciones específicas para cada nivel de enseñanza; y por el análisis de los procesos de aprendizaje que permita una construcción apropiada de los contenidos de enseñanza lo que requeriría crear conceptos nuevos.

En este contexto, Astolfi presenta apreciaciones de Vergnaud, G (1983), en relación con la investigación en didáctica, la enseñanza, el aprendizaje y el papel del docente y afirma:

La investigación en didáctica no consiste, como creían algunos de manera un tanto ingenua, en investigar los medios de enseñar un objeto de conocimiento determinado, definido de antemano e intangible. En cambio, puede cuestionar profundamente los contenidos teóricos y prácticos de la enseñanza y los métodos y procedimientos que se

les asocian. ¿Cómo romper con la presentación dogmática del saber y trasponer adecuadamente, para los alumnos jóvenes, el modelo de conocimiento en vías de formación? ¿Cómo organizar una relación viva entre los aspectos teóricos y prácticos del conocimiento, entre la acción del alumno o del profesional y los saberes que la garantizan? (p.75).

De otro lado al respecto Brousseau (1977) plantea que la enseñanza es una actividad que concilia dos procesos: uno de enculturación y otro de adaptación independiente.

En una interpretación del rol del maestro según Brousseau, Cabanne (2011) postula dos partes contradictorias, ya que este debe hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y además transformar esa “respuesta razonable” en un “hecho cognitivo extraordinario”, identificado y reconocible desde el exterior; por otra parte, se acepta que el aprendizaje se logra por mantener asociaciones o vínculos entre los estímulos y las respuestas que se estampan en la mente por repetición para arraigar un hábito.

Otra interpretación del rol del maestro consiste en verlo como un actor que propone y anima estrategias de aprendizaje.

Las estrategias de aprendizaje hacen referencia a las operaciones cognitivas que los estudiantes utilizan para organizar, integrar y elaborar la información que reciben con el objetivo de facilitar la adquisición, almacenamiento y utilización de dichos conocimientos. Por su parte, en el trabajo realizado por Campos, (2000), se da una explicación sobre las estrategias de enseñanza, que son utilizadas principalmente por los profesores para mediar, facilitar, promover y organizar el conocimiento que se imparte para mejorar la experiencia de aprendizaje en los estudiantes. Estas estrategias están centradas en el proceso de enseñanza. Partiendo de estos dos conceptos se llega a un engranaje conceptual conocido como estrategias de enseñanza – aprendizaje [Estrategias de EA], las cuales dependen de si es el estudiante o el docente quien las toma en una lección determinada. Dichas estrategias están divididas en tres fases:

La primera fase es la fase de construcción de conocimiento. Aquí se encuentran estrategias que propicien la interacción de la realidad, la necesidad de conocimientos previos y la generación de nuevos interrogantes para el estudiante. Son estrategias que usualmente se utilizan antes de brindar la información que el estudiante va a aprender. Permiten que los conceptos centrales del conocimiento sean aclarados y establecer cuáles son los resultados de aprendizaje que el estudiante ganará al culminar con el proceso de enseñanza y con qué problemas detectados se espera que el estudiante afronte su proceso de aprendizaje. Algunas de estas estrategias son actividades focales introductorias, discusiones guiadas, actividades generadoras de información previa, enunciado de objetivos o intenciones, interacción con la realidad o simulaciones de ésta por medio de recursos como el tablero, hojas, tarjetas o software programados para este proceso.

En esta fase se puede recurrir a estrategias para solución de problemas, para enlazar conocimientos previos con la nueva información y para organizar la información nueva.

- Estrategias para solución de problemas: Se establecen situaciones en las que se detecten situaciones problemas, las cuales requieren una solución y se cuenta con varias vías de solución, donde el estudiante puede comprender e idear cual debería ser la mejor solución posible dependiendo del contexto que se le presente. Algunos de los recursos que se utilizan para esta estrategia son: situaciones problema, análisis de medios y razonamiento análogo, búsqueda de soluciones por medio de descripciones orales, escritas o gráficas como diagramas de Venn, mapas conceptuales, diagramas de flujo, mapas entre otros.
- Estrategias para enlazar conocimientos previos con la nueva información: Estas estrategias buscan conectar los conocimientos previos con la información que llega nueva al estudiante, por medio de recursos como organizadores de información,

analogías o metáforas, o incluso la búsqueda de conceptos encontrados en bases de datos como la internet y herramientas de inteligencia artificial.

- Estrategias para organización de información nueva: Funcionan para organizar mejor de manera global la información que se le brinda al estudiante, lo que puede aumentar la probabilidad de aprendizaje significativo, por lo que los resúmenes, los cuadros sinópticos, los mapas y las redes de conectividad son los recursos de mayor utilización para este objetivo.

La segunda fase es la fase de permanencia de los conocimientos. En esta fase, las estrategias se orientan a que los conocimientos previamente adquiridos, puedan ser comprendidos y se incorporen en la memoria de largo plazo, aquí se destacan experiencias y estrategias de ejercitación.

Es recomendable que los conocimientos conceptuales como los algoritmos matemáticos, físicos o químicos, entre otros, sean repetidos de tal manera que se generen hábitos, por lo que la ejercitación es recomendable que sea creativa, relevante, suficiente y adecuada, evitando que sea aburrida, con soluciones arduas o de mucho trabajo, sin caer en el facilismo del ejercicio, pues se busca que el estudiante sea desafiado paulatinamente a avanzar entre algunos niveles de complejidad. Ejemplos de esta ejercitación son el juego, el cuestionario y el uso de medios.

La tercera fase es la fase de transferencia de conocimientos. Las estrategias propias de esta fase permiten identificar cuál es el conocimiento adquirido, en situaciones, simulaciones y escenarios diferentes al aprehendido, donde se plantea que el estudiante apropie dicho conocimiento y lo aplique en otros campos de la vida, y pueda proveer su utilidad en la vida real. Aquí se da el espacio para que el estudiante con los conocimientos adquiridos (nuevos), pueda abrir la ventana a nuevo conocimiento cuestionando sobre nuevas situaciones,

entendiendo que por una respuesta al conocimiento se abren nuevamente interrogantes que llevan a formular nuevos problemas con nuevas soluciones.

Por su parte, Shulman, en 1986, centrándose en el rol del contenido en la enseñanza, planteó la necesidad de tener en cuenta el conocimiento que se requiere por parte de los profesores, al respecto sugirió distinguir tres tipos de conocimiento del contenido de los maestros: el conocimiento del contenido específico, el conocimiento curricular y el conocimiento pedagógico del contenido.

La Didáctica de las matemáticas

De acuerdo con el planteamiento de Astolfi (2001), la didáctica de la matemática es la didáctica de una disciplina, y como tal, se centra en un campo conceptual delimitado y examina los problemas específicos que se plantean desde el punto de vista de su enseñanza y su aprendizaje.

En esa dirección, Godino et al. (2004), en relación a una visión general de la matemática, plantean crear espacios de reflexión y estudio sobre las matemáticas en cuanto objeto de enseñanza y aprendizaje y sobre los *instrumentos conceptuales y metodológicos* generales que la *didáctica de las matemáticas* genera como campo de investigación, con el deseo de que los maestros adquieran una visión de la enseñanza de las matemáticas que toca aspectos fundamentales de la misma, y establecen como referencia, para el caso de España, su propuesta de los Principios y Estándares 2000 del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas NCTM (por sus siglas en inglés), que describen asuntos cruciales de la educación conectados con los programas de matemáticas y que “Deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo de propuestas curriculares, la selección de materiales, la planificación de *unidades didácticas*, el diseño de evaluaciones, las decisiones instruccionales en las clases, y el

establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores” (Godino et al., 2004, p.12).

En un primer momento, estos autores tratan del *análisis del propio contenido matemático* con el fin de que los maestros reflexionen sobre sus creencias y actitudes hacia las matemáticas e inducir hacia una *visión constructiva y social* de las mismas. Plantean que el análisis de la actividad matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje necesita adoptar un *modelo epistemológico* que con detalle considere como objetos matemáticos las situaciones – problemas, el lenguaje, las propiedades y argumentaciones, adicional a los conceptos y procedimientos.

En un segundo momento proponen el estudio de los procesos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas iniciando con la contextualización de las creencias de los maestros al respecto. Consideran necesario el análisis del “*conocer o saber matemáticas*” desde el punto de vista del que aprende con el fin de tener criterios claros al respecto. Adicional a la importancia de los *enfoques constructivistas* en el estudio de las matemáticas proponen considerar el papel crucial del profesor en la organización, dirección y promoción de los aprendizajes de los estudiantes y para que estos sean significativos debe tenerse en cuenta el *aspecto social* de fuertes interacciones en el aula y la complejidad de la tarea de la enseñanza para lo que recomiendan el diseño y gestión de *situaciones didácticas*.

En un tercer momento tratan del estudio del currículo básico de matemáticas y de la programación de *unidades didácticas*, y al respecto del diseño y gestión de estas, presentan “los principales elementos a tener en cuenta en la planificación, gestión y evaluación de las unidades, así como las correspondientes adaptaciones curriculares para alumnos con necesidades específicas” (Godino et al., 2004, p.13).

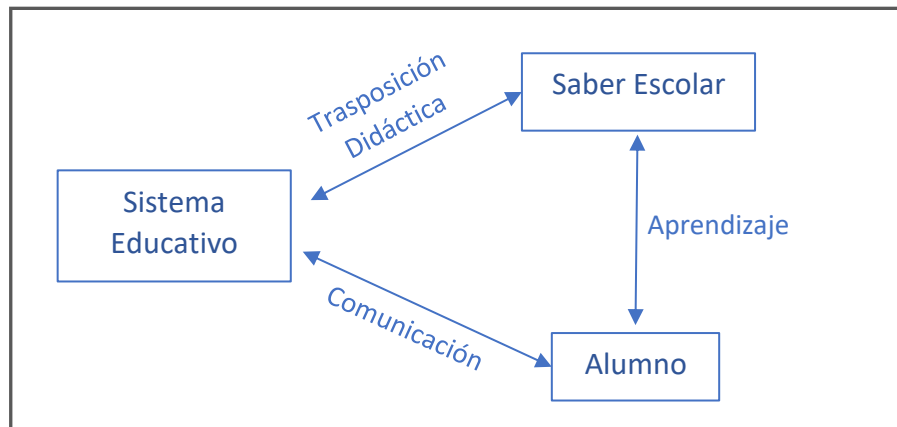
Finalmente tratan del estudio de los recursos didácticos por utilizar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y entre otros recomiendan el uso, de manera crítica, de

materiales manipulativos de toda clase involucrados como elementos de las situaciones didácticas, los cuales consideran como un puente entre la realidad y los objetos matemáticos.

Por su parte, para el caso de la enseñanza de las matemáticas, Ball *et al.* 2008, siguiendo el planteamiento de Shulman (1986), sobre los tres tipos de conocimiento que debe tener el maestro (el conocimiento del contenido específico, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular), dividió el conocimiento del contenido en dos áreas principales: el conocimiento matemático y el contenido didáctico de las matemáticas. Dentro de este último, se destacan tres aspectos: el conocimiento de la enseñanza en matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje matemático de los alumnos y el conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas basados en el currículo.

En ese sentido, Brousseau (2007) propicia la reflexión sobre las relaciones entre los contenidos y los métodos educativos y considera la didáctica como área de investigación con objeto de la comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones.

Este autor plantea un esquema sobre la enseñanza, que integra saber escolar, sistema educativo y procesos del alumno (Figura 1). Este esquema permite determinar, los objetos a estudiar, el papel de los actores, y la asignación del estudio de la enseñanza a diversas disciplinas. Plantea que la matemática se responsabiliza por legitimar el saber escolar; las ciencias de la comunicación por la traducción de ese saber en mensajes adaptados, cuyo propósito es la enculturación del alumno del lado de la sociedad; y la psicología cognitiva por las adquisiciones y los aprendizajes de los alumnos.

Figura 1. Concepción de la enseñanza según Guy Brousseau

El esquema propuesto permite ver que los comportamientos de los alumnos revelan el funcionamiento del medio educativo como un sistema y, entonces, lo que se debe modelar es el medio.

En relación con el aprendizaje del alumno en la tríada, saber-sistema educativo-alumno, y al respecto de la tendencia natural de los individuos a adaptarse a su medio, han existido diferentes corrientes teóricas y experimentales que van desde el conductismo y cognitismo hasta el constructivismo.

A las preguntas sobre el aprendizaje, la respuesta de la educación tradicional es *enseñar y ejercitar*, sin embargo, en un sentido distinto, los piagetianos mostraron que los niños elaboran una noción de espacio e incluso desarrollan conceptos matemáticos no enseñados. Por esto, en un modelo constructivista se trata de “estudiar” los problemas donde los conceptos resultan pertinentes para proponer situaciones que requieran del estudiante la realización de actividades que les permitan enfrentarlos.

En ese sentido, con relación a los dispositivos experimentales, utilizados por la psicología cognitiva, para evidenciar la originalidad del pensamiento matemático de los niños, se reconoce que en muchos casos no se da cuenta de la relación entre estos y la noción matemática cuya adquisición estudia.

Brousseau (2007) reflexiona sobre “cuáles son los conocimientos matemáticos “necesarios” para la educación y la sociedad y cómo llevar a cabo su difusión” (p.11), y habla de la abundante información al respecto que plantea la necesidad social de una cultura matemática en cada ciudadano y contar también con técnicos y científicos para enfrentar los desafíos del futuro, poniendo de relieve el papel de las matemáticas en ello debido a las propiedades formativas inherentes a estas, individual y colectivamente. “El comportamiento racional de una sociedad, es decir, su relación tanto con la verdad como con la realidad no descansa únicamente en las virtudes individuales de sus miembros. Exige una práctica social y una cultura que deben enseñarse en la escuela” (Brousseau, 2007, p.11). Con relación a la difusión de los conocimientos matemáticos plantea Brousseau que esta depende en cierta medida de las ciencias de la educación, la psicología o las propias matemáticas y cuestiona el papel de la didáctica y, en particular, el de la didáctica de las matemáticas y pregunta qué instituciones asegurarían la coherencia y pertinencia de esos conocimientos.

Sumado a trabajos experimentales y a la elaboración de teorías sobre *educación matemática*, en el texto de 2007, Brousseau aborda el enfoque de la teoría de las *situaciones didácticas* como instrumento científico que pretende “unificar e integrar los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas” (p.12).

En ese sentido, el problema central para la didáctica remite a la pregunta: “¿en qué condiciones puede propiciarse que un sujeto –cualquiera- tenga la necesidad de un conocimiento matemático determinado para tomar ciertas decisiones? y ¿cómo explicar de antemano la razón por la cual lo haría?” (Brousseau, 2007, p.14-15).

Para este autor, *situación* refiere “a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable” (Brousseau, 2007, p.16).

Desde una perspectiva metodológica, las *situaciones didácticas* son modelos que describen la actividad del profesor y también la del estudiante. Una *situación* es un entorno para el alumno, diseñado y manipulado por el profesor como una herramienta. Una *situación matemática* es aquella que provoca una actividad matemática en el alumno con una intervención limitada del profesor (el profesor puede preguntar durante el desarrollo y cierre de la actividad).

Un dispositivo diseñado para enseñar un conocimiento o controlar su adquisición comprende un medio material (un juego, un reto, un problema entre otros) y las reglas de interacción con ese dispositivo. El funcionamiento y el desarrollo de este dispositivo pueden producir un efecto de enseñanza, para lo cual es necesario incluir el estudio de la evolución de la situación pues se asume que el aprendizaje se logra por la adaptación del sujeto al medio creado.

El pensamiento matemático en el currículo: el concepto de área

El concepto de área juega un papel crucial en la construcción de otros conceptos matemáticos y en el desarrollo de habilidades y destrezas matemáticas. Además, la evaluación de este concepto es incluida tanto en pruebas internas como externas.

Sin embargo, varios aspectos de las propuestas de enseñanza tradicionales no han logrado avances con respecto al aprendizaje del concepto de área, pues se detecta: bajo rendimiento en pruebas de conocimientos, dificultades de los estudiantes al tratar el área en el aula, incluso al pasar de un nivel escolar a otro y hacia estudios universitarios. Debido a esto, se evidencia gran interés de los investigadores en este tema como también en las instituciones, en la formación de educadores matemáticos, capaces de participar en el diseño, aplicación y evaluación de secuencias de enseñanza que promuevan el estudio del área, así como su abordaje en los textos escolares.

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas [EBdeCM] propuestos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006) en la tradición existen dos formas de hacer matemáticas, respecto al número (aritmética) y respecto al espacio (geometría) lo que implica una división del pensamiento matemático en numérico y espacial.

En términos generales, se considera que el pensamiento espacial “requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico” (MEN, 2006, p. 61). En un primer momento, para el pensamiento espacial, no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas “sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio” (MEN, 2006, p. 61).

Con el desarrollo de la matemática aparecen las nociones métricas o de medida aplicadas no solo a lo espacial (longitud, área y volumen) sino a lo temporal (duración y frecuencia) lo que implicó la aparición del pensamiento métrico.

Solo a partir del desarrollo de los sistemas de representación espacial se hace necesario, en un segundo momento, la metrización o medición para establecer qué tan cerca o lejos están dos objetos, lo que implica un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo y la complejización de la percepción geométrica. El estudio de las propiedades espaciales que involucran la métrica, en un tercer momento, producen la aparición de los conocimientos formales de la geometría, en particular de la geometría euclidiana. El estudio de la geometría se relaciona con diversas actividades sociales y con formas de lectura y comprensión del espacio que enriquecen el desarrollo del pensamiento espacial.

La apropiación del espacio físico y geométrico por parte de los estudiantes requiere el estudio de relaciones espaciales de figuras entre sí y respecto a los estudiantes; de cada figura con sus formas y elementos; de las figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las figuras geométricas. El trabajo con objetos

bidimensionales y tridimensionales permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro lo que posibilita la relación con la medición entre otros. “Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio” (MEN, 2006, p. 62) y esta se puede complementar con el uso de recursos manipulativos para mejorar su aprendizaje.

Objetos como los puntos, líneas y cuerpos son considerados como los elementos de un sistema geométrico y, como sistema, además de sus elementos deben considerarse las operaciones y transformaciones en que se combinan y las relaciones entre ellos. “Los sistemas geométricos pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos, con los cuales se pueden precisar los distintos modelos del espacio y formular teorías más y más rigurosas. Estos modelos con sus teorías se suelen llamar geometrías” (MEN, 2006, p. 62).

Al respecto de qué se enseña y cómo se enseña, en el documento de Orientaciones Curriculares para el campo de Pensamiento Matemático de la Secretaría de Educación de Bogotá [SED] (2007), específicamente para el ciclo de educación básica A, grados 3º a 6º, se hacen recomendaciones sobre aspectos que se consideran importantes de enfatizar en este ciclo. Se ofrecen algunas ideas para el trabajo en el aula y algunas orientaciones de lo que es necesario hacer, no como prescripciones curriculares, pero sí invitando a los maestros a considerarlas como concreciones de los planteamientos generales y que se estudien para “construir acuerdos básicos sobre y hacia donde orientar la educación matemática en el ciclo de educación básica A” (SED, 2007, p.97).

En relación con el *subcampo de pensamiento métrico*, se plantea que “las nociones de magnitudes como longitud, superficie, volumen, peso, capacidad o duración, etc. surgen y se complejizan en variadas acciones que hacen los niños cuando comparan los objetos y los

hechos” (SED, 2007, p.105). El niño en este ciclo posee nociones básicas de algunas de estas magnitudes y se trataría de enriquecerlas “mediante la vivencia de una gran variedad de experiencias de medida” (SED, 2007, p.106) y se sugieren algunas ideas para el diseño y desarrollo de experiencias que enriquezcan el pensamiento métrico de los estudiantes.

Se ve que “es necesario enfrentar a los estudiantes a problemas en los que tengan que tomar decisiones sobre la unidad o unidades más convenientes que deben utilizar...” (SED, 2007, p.106). Para apoyar a los estudiantes en la consolidación de la noción de una magnitud se deben “resolver problemas en los que hagan comparaciones de la cantidad de esas magnitudes, conviene utilizar primero unidades no convencionales antes de introducir las convencionales” (SED, 2007, p.106). Al usar estas se da la posibilidad de “experimentar la necesidad de establecer convenios para utilizar unidades comunes.” (SED, 2007, p.106).

Respecto a las nociones de área y volumen, que se abordan en este ciclo, se plantea que “La comprensión de estas magnitudes no se agota en la capacidad de aplicar fórmulas y manejar unidades, y menos, que este sea el punto de partida” (SED, 2007, p.107). Luego de la “comprensión de la magnitud que se está midiendo y de los métodos que se están utilizando, tiene sentido pasar a formas de cálculo basadas en las fórmulas” (SED, 2007, p.107). Lo anterior supone “avanzar en la forma de representar la medida del área como una cantidad discreta a una cantidad continua” (SED, 2007, p.108) y necesita tiempo y experiencias adecuadas para la transición para evitar vacíos de comprensión posteriores. En este sentido, es conveniente cultivar la inventiva de los estudiantes mediante experiencias en las que tengan que hacer comparaciones directas de magnitudes mediante el recubrimiento con un patrón, para luego hacer el cálculo de la cantidad de este necesario para recubrir una región a medir.

El tratamiento del concepto de área en la enseñanza

Respecto del concepto de área, Avenia et al. (2015) plantean que el estudio de los fenómenos que subyacen al tratamiento del concepto de área de superficies planas ha sido objeto de especial interés en las últimas décadas.

Estos autores resaltan y caracterizan cuatro frentes contemplados en la literatura especializada: el tratamiento y conceptualización del área; la conservación del área y su papel en el tratamiento del concepto de área; la medida de cantidades de área, y el área y su articulación con otros conceptos matemáticos. Avenia et al. (2015) plantean que “a pesar de la variedad de investigaciones realizadas y del sin número de cuestiones planteadas, la complejidad de su estudio se mantiene latente” (p.45).

En cuanto a las pautas para el tratamiento del área, de manera resumida, plantean los autores: el establecimiento de jerarquías sobre la construcción del concepto de área y que su aprendizaje pasa por etapas de desarrollo; la constitución del objeto mental área; la enseñanza del área a partir de sus elementos característicos (superficie, cantidad de área y medida); la complejidad del concepto debido a vocabulario no preciso en relación a acciones o conceptos matemáticamente diferentes; el diseño de secuencias de enseñanza con énfasis en la comparación de áreas y distinción entre área y perímetro; el uso de herramientas culturales que estructuran el concepto de área; *el papel de la visualización* en el apoyo de argumentos sobre conjeturas de los estudiantes sobre el concepto de área; problemas geométricos sobre conservación del área y herramientas para la comprensión de la dinámica del concepto de área; la medición, la estimación, unidades y equivalencia de estas; y el rol de recursos didácticos como *materiales manipulativos*.

Estas pautas planteadas por los autores son fundamentales en el proceso de enseñanza del concepto de área para que su aprendizaje sea más significativo para los estudiantes y puedan así utilizarlo en la adquisición de otros conceptos matemáticos y en la resolución de problemas de la vida real.

En el apartado final, Avenia et al. (2015) afirman que la caracterización de los enfoques en que un objeto matemático es abordado es primordial y un estado del arte como el presentado en su trabajo produce las siguientes reflexiones importantes: la complejidad del estudio del área subyace y deben considerarse nuevos enfoques “que promuevan el diseño, la implementación y evaluación de nuevas apuestas de enseñanza” (p. 53); la diversidad de aproximaciones es necesaria y enriquecedora pero es necesario aunar esfuerzos en la búsqueda de un núcleo común que caracterice los fenómenos asociados al estudio del área; los resultados de diferentes investigaciones “resaltan la presencia de un problema cognitivo que complejiza el estudio del área, que permea las apuestas de enseñanza consideradas, que afecta los resultados en pruebas externas y cuya caracterización debe ser contemplada” y se refieren “al problema del “ver” y su rol (y caracterización) en torno al concepto de área” (p. 53) y de otro lado afirman que la sinergia del “ver” en matemáticas/área no ha sido considerada de manera adecuada lo que conlleva a la no caracterización de cómo a través de otros tópicos es tratada el área en la escuela.

La investigación educativa caracteriza varios elementos que afectan la comprensión de este concepto: las propuestas de enseñanza tradicionales no tienen en cuenta matices de su desarrollo y su conexión con otros aspectos de la matemática escolar; en los textos escolares las técnicas organizativas del concepto exigen ser realizadas por los estudiantes o profesores y no se encuentran *tareas de comparación de áreas* y “se asume que el alumno descubra por sí mismo el concepto y se pasa directamente a su medida” (Avenia et al., 2015, p.46). En síntesis, no se contemplan los *aspectos visuales u holísticos* en la construcción del concepto y la atención se restringe a cuestiones aritméticas, ignorando su verdadera naturaleza.

Como conclusión se identifica la necesidad de un núcleo común que permita abordar en conjunto las diversas aproximaciones realizadas desde enfoques e intereses distintos.

Avenia et al. (2015) consideran que la *visualización* es ese núcleo común, que se ha tratado de forma tangencial y proponen un nuevo enfoque para su consideración y una serie de

cuestiones para describir y comprender la sinergia *visualización/tratamiento del área*, así como sus posibilidades en el tratamiento del concepto de área.

Marmolejo y Vega (2012) en su trabajo sobre la visualización en las figuras geométricas afirman que no obstante en los últimos cinco siglos de una “desvisualización” en la geometría, en el último siglo e inicios del actual, debido al desarrollo de la tecnología, se presenta un renacer de la “visualización” y una tendencia fuerte “a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas” (p.8). Su investigación se centra en la visualización de las figuras geométricas bidimensionales y asumen que esta es una actividad cognitiva compuesta de dos procesos: uno “la acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada)” (p.8) y dos “los cambios de focalización aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta.” (p.8).

Aportes destacados en la investigación matemática plantean la importancia de la visualización de las figuras geométricas en: el desarrollo de otras actividades cognitivas como el razonamiento deductivo, la argumentación y la modelación; el desarrollo de conceptos matemáticos como la homotecia y el área; la incidencia de los educadores en el desarrollo cognitivo de los estudiantes mediante el uso de elementos visuales y el papel de los materiales didácticos para el desarrollo de la visualización.

Otros aportes evidencian que las figuras geométricas como potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo tanto para estudiantes como educadores. Los autores asumen una perspectiva que considera, de un lado, que la particularidad de los objetos matemáticos exige para su aprendizaje actividades fundamentales, entre otras como la visualización y la resolución de problemas, con variados sistemas de representación semiótica; y de otro lado, que el aprendizaje de la geometría se da necesariamente con la coordinación de actividades de

visualización, razonamiento y construcción y que la visualización debe privilegiarse en la enseñanza escolar de la geometría como puerta de entrada, soporte e impulso para el razonamiento y la construcción geométricos. Privilegian los autores Marmolejo y Vega (2012) el tema del área de figuras poligonales ya que su aprendizaje coincide con características del aprendizaje de la visualización: “[la] aplicación de modificaciones sobre las figuras, no requiere razonamientos de naturaleza deductiva y no exige construcciones con instrumentos geométricos.” (p.11).

La Unidad Didáctica en la enseñanza del concepto de área

En el caso de la unidad que se diseña, relacionada con los preconceptos geométricos para la medición de un área, entendido el proceso de medición como identificación de relaciones de parte todo y de equivalencias y congruencias, medir conlleva al establecimiento de equivalencias a partir de la identificación y el conteo de unidades de medida no convencionales iterativas y que conforman un área.

A partir del doblado de una hoja de papel se pueden establecer referentes y patrones que permiten generar unidades de área no convencionales. Los dobleces de una hoja de papel producen en esta un retículo o malla que descompone o fracciona la hoja misma y una figura geométrica dibujada con anticipación en ella en patrones de área no convencionales. El retículo o malla permite identificar partes comparables o subfiguras, en este caso subrectángulos, que pueden ser contados y dar lugar al cálculo tanto del área total de la hoja de papel como el área de una figura dibujada sobre ella. El establecimiento de patrones da lugar a lo que se va a denominar una medición intuitiva o no convencional. El uso de unidades o patrones no convencionales también da lugar a la conservación del área como una operación cognitiva.

El origami como herramienta en la enseñanza del concepto del área

El origami es el arte japonés de plegado de papel, que transforma una simple hoja en intrincadas figuras tridimensionales mediante una serie de pliegues precisos y metódicos. El origami se ha convertido en una herramienta valiosa para enseñar conceptos de área y volumen en el aula. Mediante el plegado de papel, los estudiantes pueden explorar de manera práctica y visual cómo cambian el área y el volumen de las formas geométricas.

Investigaciones como las realizadas por Lang, Hull y Walkington (2011) respaldan el uso del origami en la enseñanza de las matemáticas, destacando su eficacia para mejorar la comprensión de los conceptos geométricos y promover habilidades de resolución de problemas. Al incorporar el origami en la enseñanza del área y el volumen, los educadores ofrecen a los estudiantes una experiencia práctica y estimulante que fomenta la exploración activa y el aprendizaje significativo de las matemáticas geométricas.

En el trabajo desarrollado por *Hernández, (2016)*, basado en el aprendizaje significativo del modelo pedagógico de Ausubel, se logró alcanzar en el estudiante la apropiación en las formas geométricas de los conceptos de área y de volumen, utilizando el origami y las tecnologías digitales.

En el doblado de papel u origami se presenta, por ejemplo, un pliegue básico especial que consiste en doblar una hoja de papel por la mitad en el sentido horizontal de manera que se produzcan dos partes exactamente iguales de la hoja. A su vez cada una de estas dos mitades se puede doblar por su mitad de manera similar, produciendo una figura que en el argot del origami se conoce como la puerta. Este doblez base se usa en el proceso de producción de muchas figuras diferentes.

A partir del doblado se pueden establecer referentes y patrones que permiten generar unidades no convencionales de área. Los dobleces permiten identificar partes comparables que pueden ser contadas y dar lugar al cálculo de un área.

En el caso de la presente propuesta didáctica, estos dobleces, realizados tanto en la dirección horizontal como vertical, permiten descomponer o particionar la forma rectangular de la superficie de la hoja de papel en un conjunto de rectángulos más pequeños o subrectángulos, congruentes con la hoja y que forman una malla o retículo cuyas intersecciones marcan puntos en la superficie que pueden usarse para identificar la ubicación de una figura geométrica regular dibujada sobre la hoja y posteriormente la medición de su área.

De otra parte, las dos sesiones que conforman la unidad didáctica propuesta se relacionan con la visualización y la medición de áreas, entendido el proceso de medición como establecimiento de relaciones de parte todo y de equivalencias y congruencias, y el medir conlleva al establecimiento de equivalencias a partir del conteo de unidades de área, no necesariamente convencionales, que conforman una superficie.

Como resultado del doblado de una hoja de papel, tanto en el sentido vertical como horizontal, se obtiene una malla o retículo, formado por las líneas de doblado y sus intersecciones, que produce el fraccionamiento de la hoja de papel en subrectángulos, ubicados en las filas y las columnas del retículo, que se pueden considerar como patrones no convencionales de área y medir así el área o superficie de la hoja contando el total de dichos patrones.

El conteo de los subrectángulos o patrones de área resultantes del fraccionamiento se puede realizar de dos maneras: sumando uno a uno el total de subrectángulos o identificando el número de subrectángulos que hay en cada fila y columna del retículo y multiplicar estos dos números entre sí. Este producto es lo que luego define y se usa en la fórmula para el cálculo de un área rectangular general como lo es la hoja de papel que se dobla.

El establecimiento de patrones da lugar a lo que se va a denominar una medición intuitiva o no convencional. El uso del fraccionamiento en unidades también dará lugar a la

conservación del área como una operación cognitiva. El doblado en tanto da lugar a un retículo, también permite ubicar y dibujar figuras geométricas regulares de áreas equivalentes y con la misma ubicación en un contexto.

Para la realización de las actividades de ubicación, comparación y medición, los estudiantes pueden recurrir al doblado para identificar la posición de una figura, sus bordes y su tamaño, para lo cual un estudiante o un grupo de estudiantes debe *visualizar* la posición de esta en el retículo formado para resolver las tareas propuestas.

Por otra parte, la consolidación de los conceptos requiere su objetivación, que remite a que los procedimientos sean comunicables, en ese sentido se puede solicitar a los grupos de estudiantes que realicen procesos de comunicación de las acciones y operaciones que realizan, con el fin de objetivar la comprensión que alcanzan de un concepto matemático. Las acciones de doblado de papel se pueden convertir en una acción comunicable que objetiva un concepto matemático.

METODOLOGÍA

Lo expuesto en la justificación, los antecedentes del problema y el marco teórico lleva al proceso de diseño de la estrategia didáctica mediante la cual se propone alcanzar el objetivo de este trabajo.

La investigación propuesta es una investigación de carácter cualitativo que se orienta a establecer la progresión o secuencia del proceso de organización del concepto de área de figuras geométricas regulares en estudiantes de educación básica. El seguimiento a esta secuencia se hace mediante entrevistas que exploran el razonamiento de los niños cuando tratan de dar cuenta de la relación entre aspectos perceptivos y manuales que están involucrados en actividades que involucran la comparación y medición de áreas. Se asume que, si el desarrollo de actividades que ponen en juego los preconceptos de los niños y las inquietudes suscitadas por el docente durante las entrevistas promueven la organización del pensamiento, genera o propicia la organización de conceptos, la secuencia propuesta es válida.

El seguimiento al proceso de organización se realiza durante las fases de implementación y evaluación de la propuesta.

Diseño de la Propuesta Didáctica

En esta oportunidad resulta pertinente, en primera instancia, considerar la estructura general de una unidad didáctica. Al respecto, Couso et al., 2005, mencionados anteriormente, en un primer momento plantean que las didácticas de las disciplinas deben aportar a los profesores al momento de diseñar o adaptar *unidades didácticas*, criterios o sugerencias, fundadas en resultados de investigaciones recientes en el campo de la didáctica. Estos criterios los propone Neus Sanmartí en el capítulo uno introductorio del texto de Couso y hacen referencia a:

- a) la definición de finalidades/objetivos;

- b) la selección de contenidos;
- c) la organización y secuenciación de los contenidos;
- d) la selección y secuenciación de actividades;
- e) la selección y secuenciación de las actividades de evaluación;
- f) la organización y gestión del aula.

En segunda instancia, se requiere establecer las características específicas de la unidad didáctica. Inicialmente con base en las recomendaciones de algunos autores mencionados, se procede a definir y secuenciar los contenidos y las actividades que involucren a los estudiantes en su proceso de aprendizaje y les permitan de manera casi autónoma, mediante la observación, el análisis y la deducción, descubrir, conocer y manejar los preconceptos básicos de la geometría para proceder luego con el cálculo de áreas de figuras geométricas conocidas. Se espera que luego los estudiantes utilicen las fórmulas conocidas para el cálculo de áreas.

Con base en lo expresado en las secciones de justificación, antecedentes y marco teórico, la enseñanza de un concepto matemático debe hacerse teniendo en cuenta el alumno, el saber a enseñar y el contexto, como lo recomiendan corrientes pedagógicas, enfoques, estrategias de enseñanza, orientaciones curriculares y resultados de investigaciones, para lograr un verdadero aprendizaje del concepto en los estudiantes, su incorporación en sus estructuras mentales y el posterior uso de este aprendizaje en la resolución de problemas de la vida real.

Esta propuesta didáctica está relacionada con la enseñanza aprendizaje del concepto de área en estudiantes de 6º grado de educación básica mediante el diseño y planificación de una unidad didáctica en la que el estudiante realiza actividades orientadas a descubrir unidades de medida no convencionales de figuras geométricas planas que le permitirán luego adquirir el concepto de área o superficie de dichas figuras. La actividad propuesta es una adaptación tomada de “Tres tareas para enseñar a enseñar geometría” en Rico et al. (2016) que contempla el uso de herramientas para la comunicación entre los estudiantes y el doblado de papel

(origami) como medio manipulativo que les permitirá obtener una unidad de medida no convencional y usarla luego de manera conveniente para el cálculo de áreas. En las Tabla 1 y 2 se presenta la unidad didáctica propuesta compuesta por dos sesiones de trabajo en el aula.

Tabla 1. Propuesta de la Unidad didáctica para la enseñanza/aprendizaje del concepto de área en estudiantes de grado 6º Sesión 1.

Nombre de la Estrategia: Enseñanza/aprendizaje del concepto de área. <u>SESIÓN 1</u> <u>Tema:</u> Descubrimiento de unidades de medida no convencionales		Contexto: Estudiantes de grado 6º.	Duración: 120 minutos
<u>Actividad:</u> Doblado de papel, visualización, descripción, ubicación y dibujo de un rectángulo en una hoja de papel.	<u>Propósitos:</u> a) Reconocer la utilidad del doblado de papel para visualizar la ubicación de una figura geométrica regular dibujada en una hoja de papel. b) Descubrir unidades de medida no convencionales de longitud en una figura geométrica regular. c) Dibujar una figura geométrica regular a partir de su visualización, descripción, ubicación y sus medidas. d) Manejar conceptos geométricos de perímetro y área de figuras geométricas regulares, calcular y expresar sus medidas.	<u>Sustentación Teórica:</u> La unidad de medida de la longitud de los lados de una figura geométrica es un preconcepto necesario para abordar el concepto de área. Es recomendable que, inicialmente, el estudiante descubra unidades de medida de longitud no convencionales mediante una tarea retadora que involucre un medio manipulativo. Es importante para la ejecución de la tarea los procesos de visualización y doblado de papel y el trabajo en grupos colaborativos.	

Contenidos:**Conceptuales:**

- Rectángulo, entendido como una figura geométrica de 4 lados, paralelos dos a dos que forman ángulos de 90° en el interior.
- El perímetro, entendido como los límites de la figura geométrica, que en el lenguaje común se puede expresar en términos de los bordes de esta.
- Vértices de un retículo como puntos de referencia para ubicar una figura geométrica: conjunto de puntos que resultan de la intersección de ejes de referencia.

Procedimentales: Visualización, doblado de papel, localización y dibujo del rectángulo a partir del retículo que se forma con el doblado del papel.

Actitudinales: Trabajo en grupos colaborativos, enfrentamiento de retos

Recursos y Medios:

Cada grupo de 4 estudiantes en los que divide la clase dispone de la aplicación WhatsApp, una hoja de papel con un rectángulo dibujado en ella y hojas de papel en blanco.

Seguimiento de la actividad:

Durante el acompañamiento y verificación del desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, el docente animará la discusión sobre la racionalidad de las instrucciones dadas por el grupo que estaba dentro del salón y la comprensión de los destinatarios.

El docente analizará la forma como recurren al retículo para el dibujo y localización del rectángulo.

Secuenciación Didáctica:

- **Momento de Inicio:** Se divide la clase en grupos de trabajo colaborativo de 4 estudiantes que disponen de la aplicación WhatsApp para la comunicación dentro del grupo únicamente a través de mensajes escritos.

Dos (2) estudiantes de cada grupo salen del salón y se les entregan hojas de papel en blanco. Los 2 restantes dentro de la clase reciben una hoja de papel con un rectángulo dibujado en ella (**ver Fig. 2ª**) y las instrucciones siguientes: Deben conseguir que sus compañeros afuera dibujen el rectángulo en la misma posición de la hoja y con las mismas medidas. No disponen de reglas ni de ningún instrumento de medida. Solo pueden enviar mensajes escritos en los que se den instrucciones relacionadas con las características del

rectángulo por dibujar. No se permiten ni audios ni imágenes. Cuando los estudiantes afuera reciban las instrucciones de los compañeros adentro y consigan realizar la tarea entrarán a la clase, entregarán los dibujos al profesor.

- **Momento de Desarrollo:** Los estudiantes dentro de la clase, mediante trabajo en sus grupos colaborativos, utilizan la hoja como modelo y la doblan mediante el doblez que se llama la puerta tanto horizontal como verticalmente y utilizan el retículo que se forma para determinar la posición exacta y las medidas del rectángulo en la hoja (**ver Fig. 2B**).

Una vez encuentran la solución de la tarea les comunican el procedimiento a sus compañeros afuera de la clase para que dibujen el rectángulo en la posición y con las medidas correctas en las hojas en blanco.

- **Momento de Cierre:** Una vez terminada la tarea se reúnen los grupos dentro de la clase y examinan las instrucciones transmitidas y se discuten las razones por las cuales el grupo que estaba en el salón dio esas instrucciones y la forma como las entendió el grupo que las recibió.

Cumplimiento de Propósitos:

Observaciones:

Tabla 2. Propuesta de la Unidad didáctica para la enseñanza aprendizaje del concepto de área en estudiantes de grado 6º Sesión 2.

Nombre de la Estrategia: Enseñanza/aprendizaje del concepto de área. <u>SESIÓN 2.</u> Descubriendo el fraccionamiento como un procedimiento de medición		<u>Contexto:</u> Estudiantes de grado 6º	<u>Duración:</u> 120 minutos
<u>Tema:</u> Identificación de los lados, el perímetro o frontera y el interior de un rectángulo dibujado en una hoja de papel, y	<u>Propósitos:</u> a) Reconocer la importancia de la unidad de medida en el proceso de medir. b) Identificar patrones	<u>Sustentación Teórica:</u> La unidad de medida de la longitud de los lados, el perímetro o frontera, el interior y el fraccionamiento de tanto de los lados como el interior de una figura geométrica, son preconceptos	

un procedimiento de medición del área de una figura geométrica	no convencionales de medida del área para medir el interior (superficie o área) de una figura. c) Cuantificar la cantidad de patrones no convencionales de medida de área para medir el área de una figura geométrica regular. d) Manejar con propiedad el concepto de área de una figura geométrica y el procedimiento de medirla.	necesarios para abordar el concepto general de área. Es recomendable que el estudiante use unidades de medida de área no convencionales mediante una tarea retadora que involucre un medio manipulativo. Es importante para la ejecución de la tarea el trabajo en grupos colaborativos.
<u>Contenidos:</u> - Conceptuales: - Área, entendida como superficie que se cubre con patrones iterables. - unidad de medida de área no convencional: Las unidades de medida de área no convencionales son los patrones de área iterables, que cubren una superficie y dan cuenta de su magnitud. - Procedimentales: Visualización, comparación de dos rectángulos, identificación de sus perímetros y sus interiores y el fraccionamiento de sus interiores como una forma de cálculo de la medida de la superficie o área. - Actitudinales: Trabajo en grupos colaborativos, enfrentamiento de retos. <u>Recursos y Medios</u> Cada grupo dispone de la hoja de papel doblado de la sesión anterior (ver Fig. 2B) y sus cuadernos. <u>Estrategias de Evaluación</u>		

El material usado para el seguimiento de la actividad será la escritura individual en los cuadernos sobre la relación entre el doblado y la generación de unidades de medida. El docente analizará la forma como los preconceptos relacionados con las acciones realizadas se organizan para dar cuenta de la comparación, la medición y el dibujo de áreas equivalentes.

Secuenciación Didáctica

- **Momento de Inicio:** Se divide la clase en grupos de trabajo de 4 estudiantes. A cada grupo se le entrega la hoja de papel doblado resultado del trabajo de la Sesión 1 anterior (**ver Fig. 2B**). Se dan las instrucciones siguientes: Visualizar y comparar la hoja de papel y el rectángulo como dos figuras geométricas similares e identificar en ellas elementos comunes (lados, perímetro o frontera e interior y el fraccionamiento de estos como resultado del procedimiento del doblado) y escribirlo en los cuadernos.

- **Momento de Desarrollo:** Una vez terminada la escritura, resultado de la comparación, un estudiante de cada grupo pasa al tablero y escribe lo que tiene en su cuaderno. El profesor revisa los trabajos de cada grupo identificando similitudes y diferencias, resume y escribe en el tablero las comparaciones realizadas y la referencia a los dobleces como forma de medir las áreas.

- **Momento de Cierre:** El profesor hace énfasis en el fraccionamiento de los interiores de los dos rectángulos. Pregunta si este puede servir para calcular el área de los interiores de los rectángulos y qué operaciones utilizar para llevar a cabo el cálculo. Pregunta si es posible hacer un fraccionamiento diferente que permita también el cálculo del área.

Como tarea los estudiantes deben escribir, en sus cuadernos, la relación que hay entre doblar las hojas, comparar las áreas y calcular las medidas en términos de los patrones que se forman. Las preguntas para ser examinadas en la siguiente sesión de clase.

Cumplimiento de Propósitos:

Observaciones:

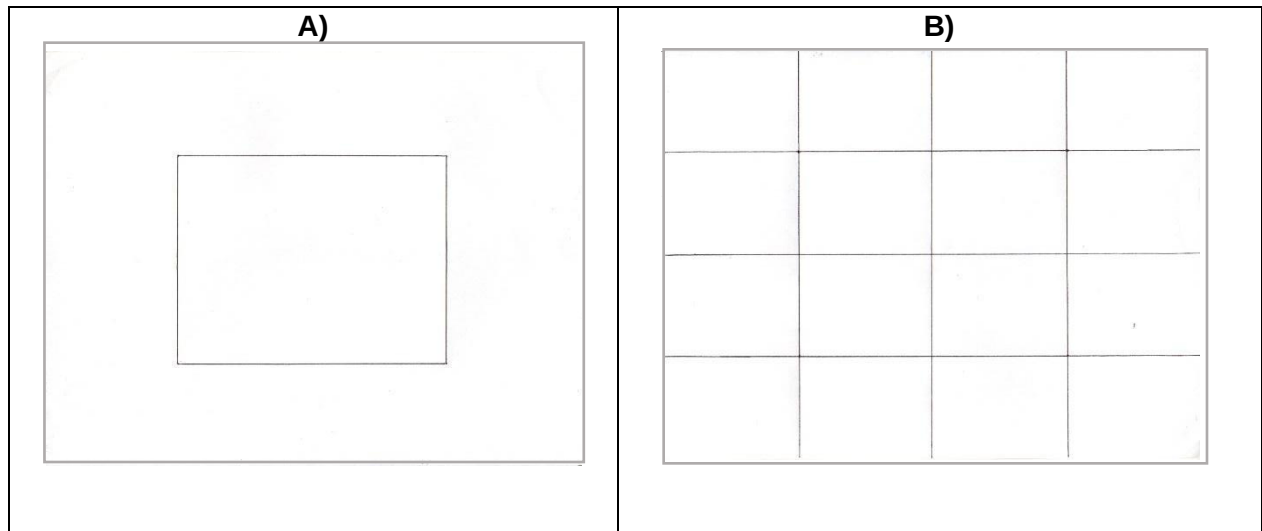


Figura 2. A) Rectángulo presentado a los estudiantes. **B)** Dobleces necesarios para ubicar y dibujar el rectángulo en una en blanco.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Las dos sesiones presentadas en la estrategia pueden ser complementadas con otras donde se profundice en la enseñanza aprendizaje del concepto de área, el proceso de medición y su aplicación en la resolución de problemas cercanos a la realidad de los estudiantes para mejorar su aprendizaje significativo.
- El diseño de la estrategia permite examinar el conocimiento de la matemática en relación con su enseñanza, pues no es lo mismo el saber científico que el saber escolar que necesitan los estudiantes para comprender los conceptos matemáticos y poderlos utilizar tanto en la misma educación escolar como en la vida cotidiana o en sus futuros estudios superiores.
- La justificación para el desarrollo de la estrategia también permite cuestionar la eficacia de las estrategias de enseñanza tradicionales en el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos en los estudiantes. Mediante la indagación sobre algunas de las investigaciones existentes al respecto de la pedagogía y la didáctica de la matemática se puede iniciar un camino de trabajo de mejoramiento de la actuación tanto docente como profesional y que justifica el esfuerzo realizado.

Recomendaciones

Vasco, (2011), después de un análisis de los ires y devenires de más de 50 años, de los aportes de Piaget a las teorías de la educación, en sus conclusiones afirma que “Los discursos potentes, serios y coherentes no mueren” (p.35) y que los postulados de la teoría piagetiana se sumergen, resurgen, se mezclan y se prolongan, incidiendo aún en todo el mundo y en particular en la educación colombiana. Algunos de esos postulados han quedado atrás, pero los

nuevos aportes definitivamente han partido o han estado influenciados por aquellos y las ideas piagetianas han sido incorporadas en el saber tácito de maestras y maestros colombianos.

Por ejemplo reconocen: que los niños y niñas piensan muy bien y creativamente y que desde antes de la educación formal empiezan a construir sus propios modelos mentales y teorías personales; que es necesaria la indagación de los saberes previos de los estudiantes; a apreciar la diferencia entre aprender de memoria y construir conceptos; el valor del error como fuente de aprendizaje; la larga y difícil conformación del pensamiento formal en adolescentes y jóvenes; y la comprensión de la evaluación formativa en el diagnóstico del progreso de la construcción conceptual y oportunidad de nuevos aprendizajes.

En la didáctica de las matemáticas, señala Vasco (2011), que la enseñanza de la aritmética ha cambiado por la teoría piagetiana de la construcción de los números naturales y la geometría se ha recuperado y transformado con sus ideas en sus obras como “La geometría espontanea del niño” y “La representación del espacio en el niño” y en obras de algunos seguidores como “Introducción a la concepción de la geometría en el niño”. Sin los aportes de Piaget no habría sido posible la teoría *noético-semiótica de los registros de representación para la enseñanza de la Geometría* (Duval, 1995) y para terminar menciona lo que dijo Paul Mussen (1983) “ahora todos somos piagetianos’ pero ya no nos damos cuenta” (Vasco, 2011, p. 37). “Las tesis e hipótesis piagetianas cimentaron los edificios actuales de la didáctica de las Matemáticas y de la didáctica de las Ciencias Naturales como disciplinas científicas” (Vasco, 2011, p. 38).

En este trabajo de indagación, en el apartado del tratamiento del concepto de área en la enseñanza, resaltan los aportes de Avenia et al. (2015) y Marmolejo y Vega (2012) con clara influencia de las teorías de Duval (1988-2005), mencionado en el párrafo anterior, y que soportan fuertemente el enfoque de la *visualización* en matemáticas/área en la propuesta

didáctica para la enseñanza de la geometría asumido en este trabajo. Con base en lo expuesto anteriormente se recomienda que:

- Es necesario que la unidad didáctica sea implementada y evaluada para determinar si cumple con su objetivo y así usarla como metodología que permita mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje para alcanzar aprendizajes más significativos en los estudiantes y lograr así desempeños académicos más altos.
- El enfoque de la estrategia didáctica presentada también puede ser adaptado y aplicado en otros grados de la educación secundaria en la institución para mejorar las competencias matemáticas y su desempeño en las diferentes pruebas académicas.

REFERENCIAS

Astolfi, Jean P., (1977), Conceptos claves en la didáctica de las disciplinas. Referencias, definiciones y bibliografías de didáctica de las ciencias, Colección Investigación y enseñanza, Serie No. 17.

Astolfi, Jean P. (2001). Conceptos clave en la didáctica de las disciplinas: referencias, definiciones y bibliografías de didáctica de las ciencias. Sevilla, España: Díada.

Avenia, G. A. M., & Astudillo, M. T. G. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 10(1), 45-58.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? Journal of teacher education, 59(5), 389–407.

Brousseau, G. (1990). “Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte)” Enseñanzas de las Ciencias, vol.9, 10-21.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Brousseau, G., & Greslard, D. (1977). Programación de Matemáticas: CM2, curso 1976/77.

Cabanne, N. (2011). Didáctica de las Matemáticas. Editorial Bonum.

Campos, Y. (2000). Estrategias didácticas apoyadas en tecnología. México: Dgenamdf.

Couso, D., Badillo, E., Perafán, G. A., & Aduriz-Bravo, A. (2005). Unidades didácticas en ciencias y matemáticas. Cooperativa editorial magisterio.

- De Camilloni, A. R., Cols, E., Basabe, L., & Feeney, S. (2007). El saber didáctico. Paidós.
- Decreto ley 1278 de 2002. (junio 19), -Bogotá, Colombia, Diario Oficial No. 44.840 del 20 de junio de 2002.
- Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas, 9-55.
- García Hoz, V. (1992). Sobre el concepto de educación personalizada y algunas derivaciones. In Anales de la Real Academia de Ciencias Morales y Políticas (pp. 191-206). Ministerio de Justicia.
- Garca, R. M. C., & Michels, M. H. (2018). Política de educação especial e currículo: disputas sobre natureza, perspectiva e enfoque. Revista Teias, 19(55), 54-70.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Proyecto de Investigación y desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología y Fondos FEDER, BSO2002-02452.
- Gómez, G. Á., Moya, J. V., Ricardo, J. E., & Sánchez, C. V. (2021). La formación continua de los docentes de la educación superior como sustento del modelo pedagógico. Revista Conrado, 17(S1), 431-439.
- Hernández, E. F. (2016). Estrategia para la Enseñanza de los Conceptos de Área y de Volumen, utilizando como Mediadores de Aprendizaje el Origami y las Tecnologías Digitales (Doctoral dissertation, Maestría en Educación Matemática-Universidad de Medellín).
- Ley 115 de 1994. (febrero 8), -Bogotá, Colombia, Diario Oficial No. 41.214 del 8 de febrero de 1994.

López López, M. (2019). La pedagogía crítica como propuesta innovadora para el aprendizaje significativo en la educación básica. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 4(1), 99-112.

Ministerio de Educación Nacional MEN Decreto 102 de 1984. Marco general de los programas curriculares 1984

Ministerio de Educación Nacional MEN (2006) Estándares básicos de Competencias Matemáticas

Porlán, A.R. (1987) El maestro como investigador en el aula. Investigar para conocer, conocer para enseñar. *Revista Investigación en la Escuela*, 1, 63-69.

Ramírez, L. N. R., Martínez, C. C., & Arias, V. R. (2020). Usabilidad de las TIC en la Enseñanza Secundaria: Investigación-Acción con Docentes y Estudiantes de México. *Revista Científica Hallazgos*21, 5(1), 85-101.

Reporte de la excelencia (2018), Colegio Compartir Recuerdo IED, Código DANE 111001102130 ETC Bogotá D.C. Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Colección Digital Eudoxus*, 1(5).

Rico, L., Cañadas, M.C., Marín, A., Sánchez, M.T., (Eds) (2016) Investigaciones en didáctica de la matemática. Homenaje a Moisés Coriat. Granada: Comares.

Schön, D. (1998). El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan. Paidós.

Secretaria de Educación del Distrito Bogotá SED Orientaciones Curriculares para el pensamiento Matemático 2007

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Vargas, N. A. V., Vega, J. A. N., & Morales, F. H. F. (2020). Aprendizaje basado en proyectos mediados por tic para superar dificultades en el aprendizaje de operaciones básicas matemáticas. *Boletín redipe*, 9(3), 167-180.

Vasco, C. E. (2011), La presencia de Piaget en la educación colombiana 1960-2010, *Revista Colombiana de Educación*, N.º 60. Primer semestre de 2011, Bogotá, Colombia.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures: Acquisition of mathematics concepts and processes. Lesh, R.