“LOS ALGORITMOS DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUEVA CONSTITUCIÓN”

AUTORAS

LILIANA MARCELA CORREDOR CASTILLO

ANA MARÍA SALAMANCA ZANGUÑA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN INFANTIL

BOGOTA D.C.

2014

"LOS ALGORITMOS DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUEVA CONSTITUCIÓN"

AUTORAS

LILIANA MARCELA CORREDOR CASTILLO

ANA MARÍA SALAMANCA ZANGUÑA

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

TUTORA:

MARTA TORRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN INFANTIL

BOGOTA D.C

2014

Queremos agradecer a todas las personas que en diferentes momentos nos brindaron su apoyo y tuvieron una palabra o una frase de aliento para no desfallecer durante este arduo proceso, que estuvo lleno de emociones y sentimientos. Damos agradecimientos especiales a nuestra tutora Marta Torrado por su entrega y exigencia durante todo este tiempo, por ayudarnos a vencer los temores que se nos presentaron a lo largo de este proceso: ¡Infinitas gracias! A nuestras familias por acompañarnos, ser nuestro apoyo incondicional y la fuerza para seguir adelante; porque con cada palabra, consejo y regaño lograban ayudarnos a superar nuestros propios límites.

Gracias al buen trabajo en equipo aquí concluye este documento fruto del esfuerzo y la dedicación de cada día.

RESUMEN ANALÍTICO DE EDUCACIÓN-RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Los algoritmos de la multiplicación y la división en la Institución Educativa Distrital Nueva Constitución
Autor(es)	Salamanca Zanguña, Ana María; Corredor Castillo, Liliana Marcela
Director	Torrado, Marta Cecilia
Publicación	Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 104 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Algoritmo, conocimiento procedimental, conocimiento conceptual, sistema de numeración decimal (SND), estructura multiplicativa, multiplicación, división, operación, propiedad distributiva, estrategias y modelos de representación.

2. Descripción
Proyecto para optar por el título de Licenciadas en Educación Infantil, presenta un ejercicio investigativo de corte cualitativo realizado en la IED Nueva Constitución, con niños. Monografía que presenta algunos algoritmos de la multiplicación y la división desde la mirada de diferentes autores, para luego, enfocarse en el que es trabajado en la IED Nueva Constitución. Se analizan las estrategias que los niños utilizan en una prueba escrita y que explican en entrevistas semiestructuradas, para resolver situaciones multiplicativas usando los algoritmos, así como las dificultades que estos presentan en el uso del algoritmo.

3. Fuentes
De las fuentes tenidas en cuenta, resaltamos las siguientes: Ministerio de Educación Nacional. (2010). Cartillas Modelo Educativo Escuela Nueva. Castaño, J. (1996). La construcción del pensamiento multiplicativo simple. Hojas Pedagógicas. Colecciones Matemáticas. Serie Lo numérico N°3. Castaño, J. (1996). Pensamiento multiplicativo Compuesto. Hojas Pedagógicas. Colecciones Matemáticas. Serie Lo numérico N°4. Chamorro, M. (2003). Didáctica de las matemáticas para primaria. Madrid: España. Editorial

Pearson, Prentice Hall.
Maza, C. (1991). Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Editorial Síntesis.
Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México. Trillas, Cap.11, 1° edición

4. Contenidos

Este documento, inicia con una introducción, una contextualización y un registro de los antecedentes del tema a trabajar, a raíz de esto emerge la pregunta problema. Así mismo se plantean los objetivos a los cuales se responderá con el ejercicio investigativo; para el desarrollo de esta monografía se tuvieron en cuenta conceptos que fueron explicados en el marco de referencia. Se plantea una metodología que determinará la recolección de datos y su análisis. El análisis se realizará a partir de la información obtenida de las pruebas escritas y de las entrevistas, extrayendo las conclusiones que permitan visualizar los objetivos propuestos al inicio del documento. Finalmente se plantean unas recomendaciones formuladas en relación a las conclusiones. Para terminar este proyecto de grado se realizará un registro bibliográfico con las fuentes consultadas para la realización de la monografía y los anexos que evidencian y explican apartados de la misma.

5. Metodología

Este es un ejercicio investigativo de corte cualitativo debido a que se intentó recoger una muestra de la realidad educativa de una institución, describiendo situaciones en las que el algoritmo de la multiplicación y la división se hacía presente. Se usó el estudio de caso, como tipo de investigación, ya que este analiza una problemática real, en un contexto delimitado, por medio de la formulación de objetivos, los cuales, permiten establecer lo que se va a investigar, sus características del objeto a investigar permitiendo que se realice un ejercicio de contraste entre lo teórico y lo vivenciado en la institución. Se hace una revisión de los datos recogidos, se categorizan y se analizan tomando como criterio de análisis el algoritmo. Las técnicas utilizadas fueron exámenes diagnósticos, entrevistas semi-estructuradas y análisis de libros de texto.

6. Conclusiones

Se concluye que en esta institución el uso de las tablas de multiplicar y de los algoritmos canónicos o convencionales se convierten en eje fundamental para la enseñanza de las operaciones de la estructura multiplicativa, limitando la adecuada apropiación de conceptos tales como SND, valor posicional y propiedad distributiva de la suma con respecto a la adición, como soporte o justificación de los algoritmos, que no se diversifican ni comparan con otras posibilidades.

Elaborado por:	Ana María, Salamanca Zanguña; Liliana Marcela, Corredor Castillo
Revisado por:	Marta Cecilia, Torrado

Fecha de elaboración del Resumen:	20	11	2014

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

La siguiente monografía fue realizada en la IED Nueva Constitución, por estudiantes de los últimos semestres de la Licenciatura de Educación Infantil. Realizando un ejercicio investigativo con el fin de indagar por el uso de los algoritmos de la multiplicación y la división. Se optó por realizar un estudio de caso en esta institución debido al interés generado en el espacio enriquecido de Educación Matemática II, al trabajar la estructura multiplicativa desde una mirada que permite evidenciar que hay más de un algoritmo para resolver multiplicaciones y divisiones, y que existen muchos materiales didácticos para trabajar el proceso de construcción del algoritmo de las operaciones anteriormente mencionadas.

Gracias al interés que se generó, se realizó una indagación en la Facultad de Educación para rastrear trabajos de grado relacionados con la estructura multiplicativa, la búsqueda permitió verificar que, a la fecha, no se ha realizado ningún trabajo relacionado con esta; lo cual sirvió de motivación para empezar esta monografía como precedente, esperando que pueda servir como aporte a la Facultad, a la carrera y a otros compañeros que sientan gusto por este tema. En la indagación realizada se encontró que, aunque no había nada relacionado con la estructura multiplicativa, sí había un trabajo sobre la estructura aditiva, por lo cual se pretende que esta monografía le dé continuidad al trabajo realizado por Karen Hernández y Connie Parra, presentado como requisito para optar al título de Licenciadas en Educación Infantil, para completar la indagación sobre algoritmos en las operaciones básicas en la Educación Primaria.

Se dio inicio con una revisión de trabajos realizados en el espacio enriquecido de Educación Matemática II, siguiendo por la indagación de documentos de la I.E.D, así como de las políticas educativas, tales como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. A partir de lo anterior, surge el problema al evidenciar la diferencia que existe entre lo planteado en dichos documentos y lo realizado en la escuela. Luego, se realizó una revisión documental en la que se abordó lo referente a la estructura multiplicativa, sus operaciones, los tipos de problemas, las estrategias de resolución, los modelos de representación de la misma y los diferentes algoritmos que existen alrededor de esta.

Por otra parte, se realizó un examen diagnóstico que permitió identificar a los estudiantes cuyos casos resultaban relevantes, tomando como referencia el uso del algoritmo. Lo anterior derivó en la realización de una serie de entrevistas semi-estructuradas a niños pertenecientes a la institución; que luego se analizaron, haciendo evidente el uso del algoritmo trabajado en esta institución, las estrategias utilizadas por los niños y las confusiones que ellos presentan.

Finalmente, teniendo en cuenta los datos recogidos y el análisis realizado a los mismos, se extrajeron una serie de conclusiones que permitieron evidenciar la importancia de la enseñanza de otros algoritmos diferentes al tradicional, para que los niños logren una comprensión de las operaciones de multiplicación y la división.

2. JUSTIFICACIÓN

La importancia de este ejercicio radica en la necesidad de mostrar que existen otros algoritmos diferentes al que normalmente se trabaja en la escuela, sus ventajas y posibilidades de trabajo en la misma, ya que las autoras consideran que el aprendizaje de los niños podría favorecerse si se les posibilita conocer otros algoritmos. Así mismo, se pretende que pueda servir de antecedente para futuros trabajos sobre este tema; además se aspira que a través de este, se pueda generar un cambio en las dinámicas de enseñanza de esta temática en la institución, de tal manera que el presente documento pueda servir como insumo que incentive el uso de algoritmos diferentes al canónico.

3. CONTEXTUALIZACIÓN

La Institución Educativa Distrital Nueva Constitución, se encuentra ubicada en la Carrera 107b #74b-31, en el barrio Garcés Navas de la localidad de Engativá. Esta institución busca alcanzar la educación de calidad, por medio del proyecto de organización curricular de educación por ciclos. Su malla curricular se enfoca en los Estándares Básicos de Competencias pretendiendo que el estudiante potencie su ser, saber y saber hacer. Así mismo, estos Estándares buscan desarrollar a nivel nacional una educación de calidad, entendiendo calidad como un elemento que asegura el progreso en el desarrollo de un país. Estos estándares cobijan cuatro áreas básicas del conocimiento, que son: Lenguaje, Ciencias Sociales y Ciencias Naturales, Competencias Ciudadanas y Matemáticas. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, siguiendo la estructura de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), están planteados por pensamientos y sistemas, los cuales, pretenden lograr que los estudiantes desarrollen unas habilidades fundamentales en el proceso de adquisición del pensamiento matemático, para ponerlo en práctica en diferentes contextos.

Esta institución al igual que otras instituciones distritales, se encuentra enmarcada bajo la propuesta de organización curricular por ciclos, haciendo referencia a una reorganización en la estructura educativa distrital. Esta busca que los procesos adelantados en diferentes grados académicos no se segmenten, sino que evidencien continuidad, permitiendo valorar y visualizar el proceso de cada estudiante. La propuesta de organización curricular por ciclos, se fundamenta en tres aspectos: cognitivos, socios afectivos y físicos-recreativos, que son contemplados en el desarrollo integral de los estudiantes. Cobra relevancia en esta propuesta no solo lo que aprendan los estudiantes, sino la manera en que este aprendizaje es llevado a la vida diaria para lograr una transformación social.

La Secretaría de Educación Distrital, a través de la propuesta de educación por ciclos, plantea una estructura de organización de los grados de escolaridad de la siguiente manera:

Tabla 1. Características de cada ciclo de acuerdo con la perspectiva de desarrollo humano que reconoce la RCC.

CICLOS	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO	QUINTO
Impronta del Ciclo	Infancias y construcción de los sujetos	Cuerpo, creatividad y cultura	Interacción social y construcción de mundos posibles	Proyecto de Vida	Proyecto profesional y laboral
Ejes de Desarrollo	Estimulación y Exploración	Descubrimiento y Experiencia	Indagación y Experimentación	Vocación y Exploración profesional	Investigación y desarrollo de la cultura para el trabajo
Grados	Preescolar, 1° y 2°	3° y 4°	5°, 6° y 7°	8° y 9°	10° y 11°
Edades	3 a 8 años	8 a 10 años	10 a 12 años	12 a 15 años	15 a 17 años

Secretaria de Educación de Bogotá. (2013).Referentes conceptuales y metodológicos de la organización curricular por ciclos. Recuperado de http://www.redacademica.edu.co/archivos/redacademica/colegios/politicas_educativas/ciclos/Cartilla_Reorganizacion_Curricular%20por_ciclos_2da_Edicion.pdf

Estos ciclos son la base de la estructura de la educación distrital en Bogotá, y por tal razón, fundamentan la organización de la malla curricular en cada Institución Educativa Distrital (IED); esta propuesta se complementa con los estándares básicos de competencias, en que, y acorde a la ley 115 de 1994 en su artículo 77, se decreta que:

> Autonomía escolar. Dentro de los límites fijados por la presente ley y el Proyecto Educativo Institucional PEI, las instituciones de educación formal gozan de autonomía para organizar las áreas fundamentales de conocimientos definidas para cada nivel, introducir asignaturas optativas dentro de las áreas de este tipo, establecidas en la ley,

adaptar algunas áreas a las necesidades y características regionales, adoptar métodos de enseñanza y organizar actividades formativas, culturales y deportivas, dentro de los lineamientos que establezca el Ministerio de Educación Nacional, MEN. Alcaldía Mayor de Bogotá D.C. (2013). Ley 115 de 1994 "Ley general de la educación". Recuperado de http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=292

Se brinda autonomía a las IED para consolidar su malla curricular de acuerdo a las necesidades de su contexto y su población. En el caso de la IED Nueva Constitución, se observa que ésta, retoma los estándares y los aplica de acuerdo a las necesidades de sus estudiantes, por lo que, en la malla curricular de la institución se visualiza que, en cada área de conocimiento, sólo son tenidos en cuenta algunos de los componentes planteados para la formulación de los estándares.

La institución propone los siguientes procesos de aprendizaje matemático para el ciclo I:

Pensamiento numérico:

a) Correspondencia uno a uno, más, menos, igual que, con cantidades de hasta 100 elementos conteo, seriación y numeración.
b) Nombrar, describir, contar y comparar colecciones de hasta 100 objetos.
c) Clasificación de conjuntos de acuerdo al número de elementos (hasta 100) y representación de los mismos con material concreto
d) Lectura, escritura y ordenación de números hasta 100, comprensión del significado y la relación que hay entre la suma y la resta con números hasta 100.
e) Solución de problemas

Para ciclo II se plantea:

a) Lectura y escritura de números de hasta 6 dígitos – Formulación y solución de problemas.
b) Sistemas Geométricos, triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.
c) Sistemas de Medidas, Sistema métrico decimal – Medidas de tiempo.
d) Sistemas de Datos, Pictogramas, encuestas, diagramas, Combinaciones.

Se evidencia que en ninguno de estos ciclos se nombra la estructura multiplicativa como proceso de desarrollo del aprendizaje. A pesar de lo cual, la observación que se hace en la práctica en los grados primeros, refleja que las docentes sí comienzan a acercar a los niños a la estructura multiplicativa y que lo hacen a partir de la memorización de las tablas de multiplicar, la repetición de éstas y las planas que se hacen de las mismas, mediando la evaluación por la cantidad de planas que los estudiantes tengan, así como la acertada respuesta a preguntas que tratan de indagar por la memorización de las tablas de multiplicar. Colegio Nueva Constitución. (2013). Malla curricular ciclo 1. Recuperado de http://www.colegionuevaconstitucion.edu.co/index.php?option=com_wrapper&view=wrapper&Itemid=278).

Esta situación particular de los primeros grados surge como iniciativa de las maestras titulares para que los niños sean "hábiles" en el manejo de la multiplicación, considerando que un estudiante hábil es aquel que memoriza las tablas y responde acertadamente a las preguntas que permiten ver la memorización de los niños (2 x3=?). En los grados segundos, las maestras se enfocan en fortalecer los procesos propios de la estructura aditiva, sin embargo, en el último periodo académico se comienza a trabajar la multiplicación a través de la memorización de las tablas de multiplicar y las primeras aproximaciones al algoritmo. A través de la observación participante, realizada en las prácticas pedagógicas en la institución se pudo observar la siguiente situación que corresponde a las dinámicas del grado segundo:

> La maestra trabajó con los niños la multiplicación, nos resultó interesante ver cómo los niños ya iban en la tabla de 4, el tema del día fue la multiplicación por dos cifras, por la cual, la profe puso en el tablero la siguiente operación:
>
> 24
> *2
>
> Entre los niños y ella revisaron las tablas y escribieron la respuesta. Sin embargo, muchos niños no entendieron, razón por la cual, ella explicó esa operación de la siguiente manera:
>
> | | |
> |---|---|
> | 24 | 2+2+2+2=8 |
> | X2 | 2+2=4 |
> | 48 | |
>
> La maestra dijo que debían sumar el multiplicador tantas veces como dijera el multiplicando (lo hizo, cifra por cifra), y que el resultado de la primera suma era el número que se escribía de últimas y el resultado de la segunda el que se escribía de primeras.” (Recuperado del diario de campo del 4 de septiembre de 2014, realizados por las autoras en el sitio de práctica.)

Esta manera de explicar no permite que el niño visualice el algoritmo canónico, pues aunque muestra el manejo dado al SND, este, es inadecuado y descontextualiza a los niños, ya que se le hace creer a los niños que todos los números funcionan como unidades y que deben operarse como tales. Además, confunde a los niños pues no sigue el orden establecido en el algoritmo canónico, pues al hacer suma reiterada de 4 x 2 reitera el multiplicador y no el multiplicando.

En los grados tercero, a comienzo del año se hace de nuevo un repaso de las operaciones propias de la estructura aditiva haciendo progresiva su dificultad, al aumentar el número de cifras operadas; después de mitad de año, se empiezan a ver algunas nociones sobre la estructura multiplicativa y sus operaciones, comenzando con un trabajo en la memorización y mecanización de las tablas de multiplicar, donde se parte de multiplicaciones y divisiones por una cifra.

Es realmente en cuarto grado que el tema de la estructura multiplicativa se desarrolla completamente, en él, se enseñan las dos operaciones (multiplicación y división), únicamente a través de los algoritmos convencionales.

Lo anterior permite concluir que en la IED Nueva Constitución, aunque esto no se encuentre explícito en su plan de estudios, se hace un acercamiento a las operaciones de la estructura multiplicativa a través del algoritmo canónico y de la utilización de las tablas de multiplicar y la memorización de estas.

4. PROBLEMÁTICA

Surge al contrastar la indagación hecha a los documentos institucionales y lo vivenciado en la institución en las prácticas pedagógicas, durante las cuales, se hizo evidente la poca relación que existe entre estos dos referentes; ya que en los documentos no se menciona la estructura multiplicativa y en algunos grados del ciclo I se hace presente.

Según lo observado en esta institución se trabaja bajo el algoritmo canónico de la multiplicación y la división, él se reduce al uso de las tablas de multiplicar, haciéndolo a través de la memorización, la escritura repetitiva y la evaluación de estas, mediada por la repetición de las mismas en voz alta. Aunque en muchas ocasiones este algoritmo no es claro para todos los niños, no se muestra otros algoritmos a los niños, sino que se insiste en que los niños aprendan este, haciendo además mal uso del SND y del valor posicional de los números. Esta problemática será ampliada en los antecedentes.

4.1 ANTECEDENTES

La presente monografía tiene como un antecedente los informes presentados por las estudiantes Ana María Salamanca y Carol Cárdenas en el espacio enriquecido de matemáticas II bajo la dirección de la maestra Marta Torrado. Particularmente los informes, presentan un análisis sobre la enseñanza de los componentes de la estructura multiplicativa, a través del análisis de cuadernos y libros de texto en los que ésta se hace evidente. Estos informes serán referidos en esta monografía como los informes uno (de Ana María) y dos (de Carol). El otro antecedente es el trabajo de grado, ya mencionado, sobre algoritmos de suma y resta realizado por Karen Hernández y Connie Parra para optar al título de Licenciadas en Educación Infantil.

El informe uno fue elaborado tomando como insumo para el análisis, el cuaderno de una niña, que en su momento, se encontraba en grado tercero de primaria en un colegio privado de la localidad de Engativá. En este cuaderno, se observan varios ejercicios de multiplicación y división. El análisis de este cuaderno, permite evidenciar que la niña presenta dificultades al componer y descomponer cantidades, así como al reconocer la multiplicación en su contexto, pues la Institución Educativa no plantea situaciones matemáticas significativas en las que los niños vean elementos de su realidad.

También se evidenció que existían dificultades en la memorización de las tablas de multiplicar, agravado, ya que la institución proponía como único método para apropiar las operaciones de la estructura multiplicativa, la memorización de estas. Al respecto, Mariela Orozco Hormaza (s.f) afirma que

> Para abordar la operación multiplicativa, la escuela se centra en el manejo de las tablas y en el manejo de los algoritmos, convirtiendo la memorización de las multiplicaciones básicas (o tablas de multiplicar) en uno de los objetivos centrales de la enseñanza de la matemática en primaria. (p. 6)

Lo anterior, se hace evidente en este cuaderno ya que la niña se confunde en el manejo de la tabla, se bloquea y esto afecta sus procedimientos.

Por otra parte, el informe uno permitió deducir que en este colegio, solo se trabajaron problemas de proporcionalidad simple, a pesar de que existen otros contextos multiplicativos (como de comparación y los de combinación), que enriquecen los procesos de aprendizaje de la estructura multiplicativa.

En cuanto a la división el informe uno mostró que, en la propuesta de trabajo hecha a la niña, no existía relación entre la multiplicación y la división, lo cual, hizo que fuera complicado para la niña realizar las operaciones de división, puesto que el algoritmo que le fue enseñado no era lo suficientemente flexible como para que pasara de una operación a la otra:

> (…) el niño no ha logrado organizar un pensamiento multiplicativo que le permita articular la multiplicación y la división hasta el punto de que en su pensamiento, estas operaciones hagan parte de un mismo esquema mental, de tal forma que reconozcan los términos de una en otra, y a la vez las maneje simultáneamente (Castaño, 1996 (a), p. 1).

Otro aspecto que cabe resaltar dentro del análisis del informe uno es el mal manejo del cero, ya que en este cuaderno, el cero se vuelve nulo en las operaciones (sobre todo en la división) pues no se tiene en cuenta su valor posicional dentro de las operaciones.

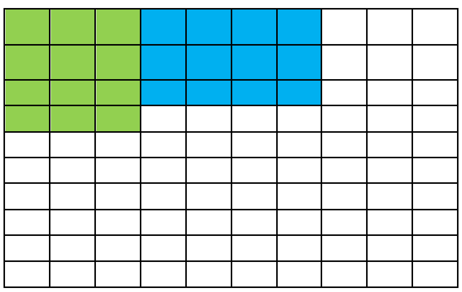
Este informe permite hacer las siguientes conclusiones:

1. La falta de coordinación entre la manera como los maestros presentan las operaciones de la estructura multiplicativa, puesto que se muestra la multiplicación como suma reiterada y la división como reparto en partes iguales. Sin embargo, esto no se evidencia en el momento en el que los niños ponen el algoritmo en práctica, pues se les prohíbe realizar lo que ellos mismos enseñaron. Esto muestra la necesidad de que los maestros, permitan a los niños la exploración y acercamiento paulatino a las operaciones, posibilitándoles descubrir aciertos y errores.

2. El manejo que se da a las tablas de multiplicar impuestas como una obligación y como algo que los niños deben recitar, las convierte en el único método válido para realizar operaciones multiplicativas y de división en la escuela, limitando el aprendizaje de los niños, al anular el proceso por el cual una cantidad es aumentada equis número de veces, para llegar a una cantidad mayor.
3. La dificultad que se presenta en relación al Sistema de Numeración Decimal, SND, en el manejo de los algoritmos de la multiplicación y la división, ya que en estas operaciones no se le da el valor posicional a los números, sino que se trabajan con su valor absoluto.

El informe dos, parte de la revisión de los cuadernos de matemáticas de dos niñas que son hermanas, que cursaban en ese momento grado tercero en una institución muy prestigiosa a nivel educativo, ubicada en el norte de Bogotá. Este referente se combinó con el análisis del tratamiento de la estructura multiplicativa que hace el texto de Matemáticas "Casa de las Matemáticas 2", de editorial Santillana, publicado en el 2009. En los cuadernos analizados, la multiplicación es presentada como la adición de sumandos iguales, se toma un conjunto de objetos y se suman entre sí, utilizando expresiones como "tres veces dos lápices". El cuaderno de la primera hermana, muestra la realización de varios ejercicios en los que se debe modelar la multiplicación haciendo uso de material concreto. Este cuaderno permite ver además la mecanización que se busca a través de los procedimientos, pues se encuentran muchas hojas en las que la hermana uno debe realizar ejercicios del mismo tipo para lograr una automatización de las operaciones y su procedimiento a través de las tablas de multiplicar. Esto conlleva a que se olvide, con el paso del tiempo, aquello que trató de "implantarse" a través de la repetición continua de ejercicios, lo cual, se afirma en unas entrevistas posteriores utilizando como elemento los cuadernos del año anterior y se observa en sus respuestas que las niñas no recuerdan nada.

Se evidencia también que se utilizan los modelos cardinal, numérico, de medida y funcional para construir las tablas de multiplicar, lo cual es un acierto pues se hace gráfico para los estudiantes la construcción de cada una de las tablas de multiplicar. A través de la representación gráfica del modelo de medida, que en este caso presenta una conservación de área de una malla de 100 cuadros los niños son capaces de ver que 3x4=12 (verde) así como 4x3= 12 (azul), propiedad conmutativa.



Las niñas logran hacer reflexiones al respecto; sin embargo se mostró en el análisis, que de cierta manera se desaprovechó este modelo de área pues la maestra no lo usó para hacer que los niños realizarán más construcciones, resolvieran sus dudas, hicieran procesos de inferencia y conclusión de hechos numéricos.

En el cuaderno de la segunda hermana, la manera de abordar las tablas de multiplicar fue a través de las planas de las mismas, en otras palabras ‘exigiendo’ hechos memorísticos. Lo más interesante es que al preguntarles a las hermanas, un año después, como hubieran preferido aprender las tablas, ambas responden que de la manera de la hermana dos, o sea, a través de las planas de las tablas de multiplicar, porque gastan menos tiempo. Castaño (1996 (a)), afirma que, para desarrollar el pensamiento multiplicativo la mayoría de contextos escolares decide empezar enseñando las tablas de multiplicar pero sin posibilidad de darle significado a lo que el niño graba de memoria, lo que no es otra cosa sino la memorización por la memorización, para ahorrar el tiempo. (p. 1).

Este informe también mostró que es clave tener un apoyo verbal (consiste en que el adulto verbalice el proceso que realiza el niño, nombrando con claridad las unidades de diferente orden que se están operando) al momento de realizar las operaciones matemáticas, ya que ayuda a los estudiantes a comprender el valor posicional, y, al operarlas, a no tomar todos los números de la cifra como unidades de orden cero. Lo cual se logra verbalizando el proceso a través del cual se adquiere el algoritmo. Es importante que tanto niños como maestros apropien de manera correcta el Sistema de Numeración Decimal para lograr que en las operaciones sean conscientes del valor posicional de las cantidades.

Por otro lado, el informe dos muestra que el manejo de la división se hace a través del libro de texto “Casa de las Matemáticas 2”, de editorial Santillana publicado en el 2009. Este acerca a los niños al concepto de división a través del reparto de unidades, y plantea ejercicios de este tipo. Las niñas entrevistadas para hacer el informe dos, hacen el reparto de objetos teniendo en cuenta las cualidades de los mismos pero también realizando multiplicaciones, es decir, si hay que repartir ocho peces en cuatro peceras, es posible decir: $8 \div 4 = 2$ corresponden dos peces por peceras porque $4X2=8$ lo cual da muestra de la coordinación entre la multiplicación y la división, mostrando que estas dos operaciones están estrechamente relacionas entre sí.

La reflexión que queda como aporte del informe dos es:

> Parece que los docentes temen arriesgarse a probar nuevas maneras de enseñar a los niños, bajo el supuesto de que se trabaja de una manera desde hace años y funciona. Sin embargo, cabe resaltar que existen otras maneras y que los niños pueden ser partícipes, y por qué no, guías, en su propio aprendizaje.

Estos dos informes dan cuenta de los problemas que existen en la escuela en cuanto al manejo que se le da a la estructura multiplicativa y a la forma en la que es entendida por los niños. Ofrecen un panorama general de la realidad en las escuelas y ponen en escena situaciones ante las cuales los maestros deben estar atentos y allí, tratar de proponer estrategias que evidencien cambios en las maneras de manejar la estructura multiplicativa, evitando relegar el proceso a la memorización de las tablas y la mecanización de los algoritmos.

El segundo antecedente de la presente monografía es el ejercicio investigativo realizado por Karen Hernández y Connie Parra acerca de los algoritmos de la suma y la resta, siendo una base para la realización de la monografía de la estructura multiplicativa que se presenta en este documento, pretendiendo dar continuidad al trabajo, para abordar las cuatro operaciones básicas.

Los trabajos expuestos anteriormente permiten que surja el interés por ver cómo se usa el algoritmo en la escuela y cómo se le posibilita al niño su comprensión, porque se realiza un trabajo analítico de ciertas experiencias que surgen en la escuela. Así mismo, plantea una inquietud frente a lo que se está entendiendo por algoritmo y cuál es el que se maneja en la escuela.

4.2 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo se enseña el algoritmo de la multiplicación y la división en la Institución Educativa Distrital Nueva Constitución, concretamente en grado cuarto de primaria, y cuáles son los modelos y estrategias manejados por los niños para la utilización del algoritmo?

5. PROPUESTA

Este trabajo pretende mostrar un ejercicio investigativo realizado en la IED Nueva Constitución, con el fin de indagar por el algoritmo de la multiplicación y la división trabajado. Para ello, se realizó un estudio de caso en el cual se mostró la realidad de la institución mencionada anteriormente, analizando específicamente el trabajo de niños de cuarto grado de primaria.

Para llevar a cabo tal análisis, fue necesario implementar exámenes diagnósticos y entrevistas que permitieran observar el algoritmo trabajado y de las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los niños. Este análisis permitió hacer una comparación entre lo que diferentes teóricos exponen y lo visto en la institución.

5.1 OBJETIVOS

5.1.1 Objetivo general:

Indagar y analizar si los niños de la Institución Educativa Distrital Nueva Constitución comprenden los algoritmos de la multiplicación y la división a través de instrumentos que hagan visible cómo lo aplican en la resolución de problemas.

5.1.1 Objetivos específicos:

O1. Verificar si los niños comprenden el algoritmo canónico de la multiplicación y la división.

O2. Identificar las diferentes estrategias utilizadas por los niños para la solución de situaciones multiplicativas.

6. MARCO DE REFERENCIA

Dado lo anterior las autoras consideran pertinente indagar sobre los diferentes teóricos que abordan este tema, para realizar un ejercicio de comparación entre lo teórico y lo observado.

6.1 Estructura Multiplicativa

Antes de abordar el tema de la estructura multiplicativa, es necesario definir estructura conceptual en general. Una estructura conceptual, constituye un sistema de conceptos, objetos, cualidades y relaciones, que se afectan entre sí y se soportan mutuamente. Según Ricardo Vargas Trepaud (s.f), citando a Stephen Covey

> El maestro es quien debe dar el primer paso a fin de que el (sujeto) alumno se apropie de esos conceptos y realice la elaboración o construcción de los mismos, el sujeto deberá entender que estos conceptos no se elaboran de manera individual, sino que se construyen de manera entrelazada. (Covey, S. (s.f). (2014, 25 de agosto). Efectividad personal y organización e inteligencia emocional. Recuperado de www.rrhhmagazine.com/articulo/psico8.htm)

De acuerdo con lo planteado por la Alcaldía Mayor de Santa Fe de Bogotá a través de la Secretaría de Educación (1999), se propone comprender la estructura multiplicativa como la capacidad de identificar, comprender y abordar situaciones en las que se hace uso de las operaciones de multiplicación y división.

Desde los planteamientos de Castro, Rico y Castro (1999) “la estructura multiplicativa es una de las más ricas de las matemáticas” ya que les exige a los niños tener un dominio total del concepto de número así como de su simbolización. (p 45).

La estructura multiplicativa también es vista como campo conceptual según Vergnaud, citado por Castro et al. (1995) como “un espacio de problemas o de situaciones-problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión” (Vergnaud, 1981)

Se entiende que estos campos conceptuales se componen de un conjunto de problemas y situaciones problemas, que hacen uso de diferentes operaciones, en este caso, de tipo multiplicativo. Aunque el campo conceptual de la estructura multiplicativa se basa en la estructura aditiva, no puede reducirse a ella, por cuanto sus operaciones no son las mismas.

La estructura multiplicativa comprende dos operaciones que son Multiplicación y División:

Multiplicación:

Según Castro et al. (1995) multiplicar es repetir una cantidad cuantas veces se requiera. La multiplicación está compuesta por tres partes:

10	x 2	=20
Multiplicando	Multiplicador	Producto

a) Multiplicando, elemento pasivo o unificador: Es la cantidad que se va a repetir.
b) Multiplicador, agente activo o contador: Es el número de veces que se repite el multiplicando.
c) Producto: Resultado de la operación entre el multiplicando y el multiplicador.

Por otro lado, en Matemáticas, desde la cardinalidad se define la multiplicación a través de la Teoría de Conjuntos, usando concretamente el Producto Cartesiano. Para ello se parte de la definición de cardinal de un conjunto finito A, como su número de elementos y se representa #(A). Por ejemplo si A = {a, b}   #(A) = 2

A partir de lo anterior, cuando se tienen dos conjuntos finitos, se define su Producto Cartesiano como el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar que se originan en A y terminan en B. Por ejemplo si A es el conjunto dado antes y B = {c, d, e} su Producto Cartesiano es: A x B = {(a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e) }

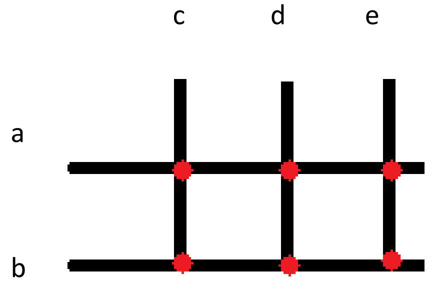
Ahora bien, si los conjuntos son disyuntos, se cumple que el número cardinal del Producto Cartesiano es el producto de los números cardinales de los conjuntos, que se combinan entre sí.

A continuación se plantea un ejemplo:

A = {a, b}   #A = 2   B = {c, d, e} # B = 3

(A x B) = 6

(A x B) = (#A) x (#B)



Según Muñoz (2002) se deduce que para cardinales se cumple la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición. Esta definición refuerza las situaciones multiplicativas con contexto de combinación, que se verán más adelante.

Desde los axiomas de Peano se puede hacer la definición recursiva de la multiplicación, que corresponde a la suma reiterada, se definen así:

- px 1= p para todo número natural p, Lo cual se apoya en la propiedad modulativa de la multiplicación, según la cual todo número multiplicado por 1 da el mismo número.
- p x sig (n) = pxn+p, para todo n diferente de cero. Esto porque el siguiente de n (sig(n)) es n+1 y al multiplicar p xsig(n) quedaría px(n+1)=(pxn)+(px1)=pxn+p. Esto por las propiedades distributiva de la multiplicación sobre la suma y modulativa de la multiplicación.

  Por ejemplo: 4 x 5 =

  4 x (s4) = (4 x 4) +4 = 4 x (s3) +4 = (4 x 3 + 4) +4 = 4 x (s2+4) +4 +4 = (4 x 2) +4 +4 + 4 + 4 = 4 x (s1) + 4 + 4 + 4 + 4 = (4 x 1 + 4 + 4 + 4) + 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

Para Mariela Orozco (s.f), la multiplicación corresponde a una operación de la forma:

$$a \times b = c$$

Esta operación cumple con ciertas propiedades. Según la autora, el niño multiplica si compone dos números cualquiera en un tercero que es su producto. Dado el carácter diferenciado, "los dos términos del producto responden a contextos diferentes; uno de ellos es la cantidad que se repite *multiplicando*, y es un número cardinal concreto; el otro factor nos dice las veces que se repite la cantidad inicial *multiplicador* (Castro et al., 1995, p. 39) de las variables que intervienen en la multiplicación, se la tipifica como operación binaria. Sus términos se denominan factores.

Por otro lado, Vergnaud (1991) plantea que la multiplicación es una operación cuaternaria, ya que implica cuatro cantidades y dos tipos de medida; estas cuatro cantidades se agrupan de a dos dependiendo de lo planteado en la situación multiplicativa:

"Si un pan cuesta $200, ¿Cuánto cuestan 3 panes?"

M1	M2
1 pan	$200
3 panes	$600

En lo planteado anteriormente, se evidencian los dos tipos de medidas, llamadas magnitudes. En este caso, una de ellas representa el número de objetos, y la otra su valor.

Propiedades de la multiplicación:

a) Conmutativa: Plantea que el orden de los factores no altera el resultado, por lo cual el multiplicando puede ir en el lugar del multiplicador y viceversa sin cambiar el producto. Esto también es expuesto por Vergnaud "(…) permite perfectamente invertir el papel del multiplicador y del multiplicando" (Vergnaud, 1991, p. 150). Ejemplo:

   10 X 3 = 3 X 10

   30   30

Sin embargo, es necesario tener en cuenta el contexto de los problemas, ya que, aunque en el siguiente ejemplo, en cualquier caso, la compra costaría $600, en la realidad, no es lo mismo tener 3 panes que valen a $200 cada uno a tener 200 panes que valen a $3 cada uno.

b) Propiedad asociativa: Cuando se operan tres o más números, las agrupaciones de los factores no influye en el resultado, así se pueden hacer diferentes grupos con un mismo conjunto de números y el resultado final siempre será igual.

$(3 \times 2) \times 5 = 3 \times (2 \times 5)$

$6 \times 5 = 3 \times 10$

$30 = 30$

c) Existencia de elemento neutro o idéntico: Todo número multiplicado por 1 da como resultado el mismo número.

$3 \times 1 = 3$

$1 \times 3 = 9$

Se deben tener en cuenta algunas condiciones para que en efecto éste sea elemento neutro:

1. El elemento neutro se puede escribir a derecha o a izquierda pues se comporta bien con la propiedad conmutativa.
2. El elemento neutro es igual para todos los números
3. Existe un único elemento neutro.

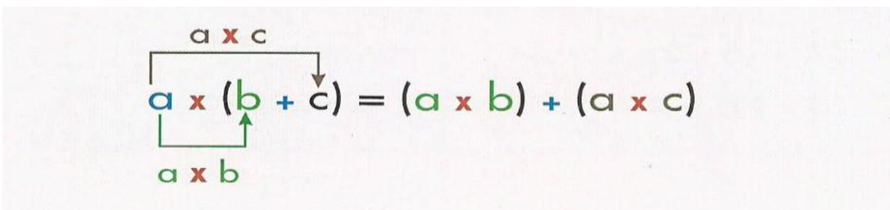
d) Propiedad clausurativa: Siempre que se realice el producto de un número natural por otro número natural, el resultado será un número natural. Clausurando la operación en el conjunto de los números naturales.

4 x 5 = 20

e) Propiedad anulativa: Todo número multiplicado por cero da como producto cero.

15 x 0 = 0

f) La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición: "Siempre que se tenga la multiplicación en la que uno de los factores sea un número y el otro una adición, se puede distribuir la multiplicación en los sumandos de la adición" (MEN, 2010 (b) p. 49).



(Imagen tomada de MEN (2010 (b)). P. 49.)

Con base en esta propiedad, es posible descomponer las cifras dadas en base 10 y operarlas con el multiplicador, después de obtener estos resultados parciales, sumarlos todos y dará el resultado total de la multiplicación.

Como una aplicación de esta propiedad, cuando se tiene, **5X12** se puede hacer:

5X12= 5 X (10 + 2) = (5 X 10) + (5 X 2)= 50 + 10 =60

"la distributividad de la multiplicación, en relación con la adición, es necesaria a partir del momento en que se introduce la multiplicación por un número de dos cifras." (Vergnaud, 1991, p. 151), ya que le permite al niño descomponer la cifra en otras más pequeñas para poderlas operar haciendo uso de la suma.

División:

Castro et al. (1995), afirman que dividir es repartir una cantidad en partes iguales. La división está compuesta por el dividendo que es lo que se va a repartir, el divisor es el número de partes a repartir, el cociente que es el resultado de la operación y el residuo que es lo que queda o sobra después de hacer el reparto. El residuo es cero cuando las divisiones son exactas y diferentes de cero cuando la división no es exacta.

La división está compuesta de cuatro términos:

Dividendo ⟵ 62'4' |__24___ ⟶ Divisor

14 26 ⟶ Cociente

144

Residuo ⟵ 0

Desde una mirada conceptual "(…) la división, por su parte, no es siempre exacta, y el cociente no es sólo el resultado de la aplicación del operador al operador. El verdadero resultado es la pareja (cociente, residuo), donde el residuo puede ser nulo." (Vergnaud, 1991, p.156.). Esto hace explícita la necesidad de tener en cuenta el residuo como parte fundamental de la operación de la división; este enunciado evidencia que la división para Vergnaud no es la operación inversa a la multiplicación:

285|4__ El resultado de dividir 285 entre 4 es:
05 71
1 71 en el cociente y 1 el residuo

Para realizar la operación de la división se debe hacer uso de otras operaciones diferentes a la multiplicación, lo mismo sucede cuando se quiere comprobar la misma.

“En el plano de las reglas operatorias, la división evidentemente es la más compleja de las cuatro operaciones, porque implica a la vez la sustracción, la multiplicación y la búsqueda por tanteo o cuadramiento de las cifras del cociente.” (Vergnaud, 1991, p.157).

En contraste, para Mariela Orozco (S.f) la división es la operación inversa a la multiplicación y se representa: $c \div b = a$, *o* $c \div a = b$ siempre que a x b = c.

Es útil tener en cuenta que el residuo tiene la misma importancia cuando es cero u otra cifra diferente ya que, por el teorema fundamental de la aritmética si $c \div b = a$ *con residuo* r, $c = (axb) + r$.

Por ejemplo 68 ÷ 12 = 5 con residuo 8, porque 68 = (12 X 5) + 8

En referencia al contexto o a las situaciones que se resuelven mediante una división, se encuentran dos posibilidades:

La primera es cuando se pregunta por el tamaño de las partes (valor unitario, que es el valor que tiene cada objeto):

“Si tres panes valen $600 ¿Cuánto vale un pan?”

3 ------ 600

1 ------ ?

La segunda cuando se pregunta por el número de partes (contador):

“Si con $200 compro un pan, ¿cuántos panes compro con $600?”

200 ------ 1

600 ------ ?

Propiedades de la división:

Se debe recordar que según Luque, Mora y Páez. (2002) "…la división no es conmutativa y no es asociativa, pero sí, se cumple parcialmente la propiedad distributiva de la división respecto a la adición si la división está a la derecha de la suma." (p.70)

1. Propiedad distributiva, a derecha, de la división respecto a la adición:

   (6 + 4) ÷ 2 = (6 ÷ 2) + (4 ÷ 2)

   10 ÷ 2 = 3 + 2

   5

Se cumple únicamente si la división está al lado derecho de adición. Se relaciona cada término de la adición con el divisor y se operan.

6.1.1. Tipos de problemas con estructura multiplicativa

Un problema matemático plantea una pregunta **y** fija ciertas condiciones. Para resolverlo, se debe hallar un número u otra clase de entidad matemática que, cumpliendo con las condiciones fijadas, posibilite la resolución de la incógnita. (Definición. D (2014). Problemas matemáticos. Recuperado de http://definicion.de/problemasmatematicos/#ixzz3BW1tSewM)

Existen varios tipos de problemas de acuerdo a lo que el niño deba encontrar o realizar, esta clasificación se plantea desde varios autores de los cuales se retomaran: Castaño (1996 (a,b)), Vergnaud (1991), Chamorro (2003), Orozco (s.f) y Maza (1991).

En general, los problemas se pueden clasificar en simples o compuestos:

a) Problemas multiplicativos simples: Son simples cuando solo es necesario realizar una operación multiplicativa para darles solución.

   "Una caja de chocolates contiene 12 unidades, si se quieren repartir los chocolates en partes iguales a 4 niños, ¿Cuántos chocolates le tocan a cada uno?"

   $12 \div 4 = 3$

b) Problemas multiplicativos compuestos: Son compuestos cuando involucran dos o más operaciones, para Vergnaud (1991) son compuestos si involucran al menos tres magnitudes y para su resolución requieren más de una operación.

   "María realizó una fiesta y quiere saber cuántos invitados llegaron. Si su casa tiene 3 garajes y en cada garaje caben 4 carros y en cada carro 5 personas, ¿Cuántos invitados asistieron si se sabe que los garajes estaban a la mitad de su capacidad?"

   $3 \times 4 = 12$ número de carros que caben en los 3 garajes

   $12 \div 2 = 6$ número de carros que hay con la capacidad de los garajes a la mitad

   $6 \times 5 = 30$ número de personas que han llegado a la fiesta.

Según la operación que implican, los problemas pueden ser:

a) Problemas multiplicativos directos: Son directos si dados los factores se solicita el producto.

b) Problemas multiplicativos Indirectos: Son indirectos si dado el producto y uno de los factores se solicita hallar el otro, también son llamados inversos.

Se muestran a continuación varios tipos de problemas, que pueden ser simples o compuestos, directos o indirectos o combinar estas categorías generales.

1. Encontrar el total: Según Castaño (1996 (a)), estos buscan encontrar el producto. También son llamadas por Castro et al (1995) problemas de subclase de multiplicación.

   Ejemplo: "si un pan vale $200, ¿Cuánto cuestan 3 panes?"

   1 pan → $200

   3 panes →?

2. Encontrar el número de unidades: Para Castaño (1996 (a)), indagan por el número de unidades, o número de grupos a formar. Desde Vergnaud citado por Mariela Orozco H., estos problemas también son conocidos como problemas de división partición. La incógnita se ubica en el multiplicando o contador.

   Para Castro et al (1995) son llamados problemas de subclase de división segundo tipo.

   Ejemplo: "si un pan vale $200 con $600, ¿Cuántos panes puedo comprar?"

   1 pan → $200

   ? → $600

3. Encontrar el valor unitario: Desde los planteamientos de Jorge Castaño (1996 (a)), estos problemas son inversos y buscan el valor de cada unidad o valor que corresponde a cada objeto. Desde Vergnaud citado por Mariela Orozco H. (S.f), estos problemas también son conocidos como problemas de agrupamiento. La incógnita está en el multiplicador o unificador. Son llamados por Castro et al (1995) problemas de subclase de división primer tipo.

   Ejemplo: "si se sabe que 3 panes cuestan $600, ¿Cuánto vale un pan?"

   1 pan →?

   3 panes → $600

4. Encajamiento: Castaño (1996 (b)) enuncia que los problemas de encajamiento hacen referencia a las acciones que se hacen de empaque, de una unidad pequeña a una más grande.

   Ejemplo: "Si en una caja caben 3 bolsas de chicles, y en cada bolsa caben 2 chicles, ¿cuántos chicles hay en 4 cajas?"

5. Equivalencia: Castaño (1996 (b)) plantea que estos hacen referencia a problemas de cambio de unidades por otras, de acuerdo a relaciones de equivalencia establecidas.

   Ejemplo: "Si en un juego de banco 5 billetes rojos se cambian por 1 amarillo, y 2 amarillos por 1 azul, y 3 azules por 1 verde, ¿cuántos billetes rojos se necesitan para tener una billete verde?"

6. Relaciones: Son denominados así por Jorge Castaño (1996 (b)), para Maza (1991) y Castro (1995) los llama de comparación, y para Chamorro (2003) problemas con un espacio; hacen referencia a las relaciones multiplicativas con operadores, ampliadores o reductores.

   Ejemplo:

   Pueden ser simples como:

   "Para realizar una maqueta de un edificio Juan ha reducido 5 veces su tamaño. Si se sabe que el edificio mide 20 metros de alto ¿cuánto mide en la maqueta?"

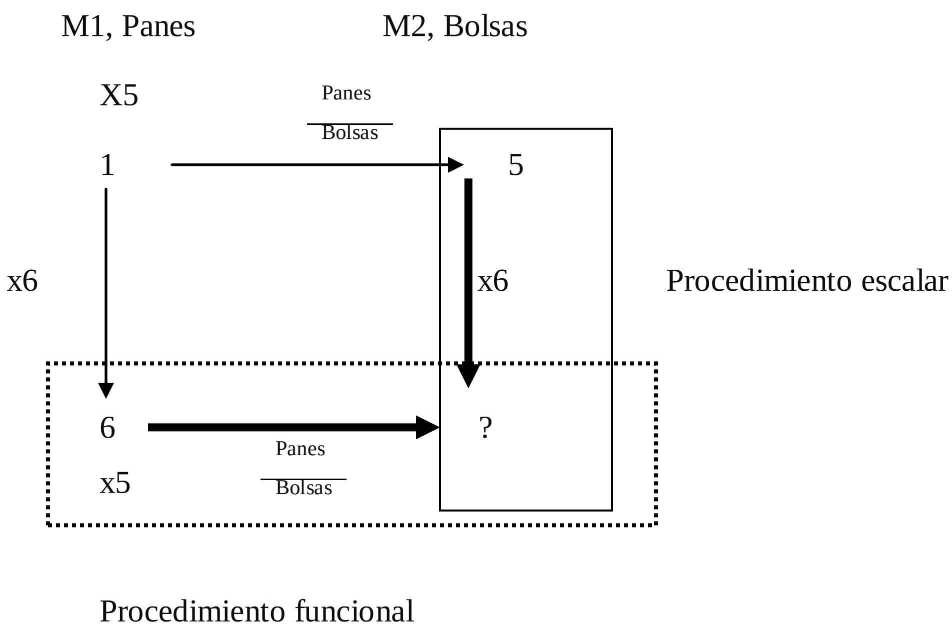
   O compuestas, como:

   "Se hace una maqueta y se amplía 3 veces su tamaño, y, a partir de ésta, una segunda maqueta que le amplían 5 veces más su tamaño. Si se sabe que la segunda maqueta mide 15 centímetros, ¿cuánto mide la original?"

7. Isomorfismo[1] de medidas: Son planteados por Vergnaud, y retomados por Castro et al. (1995) como problemas de proporcionalidad simple directa, en los cuales intervienen 2 magnitudes. Maza (1991) los llama 'problemas de razón'. Según Maza (1991) estos problemas son lineales porque relacionan 2 espacios de medida, llamados por otros autores consultados como magnitudes: M1 y M2.

Dado que intervienen dos magnitudes distintas, los dos números a multiplicar juegan papeles distintos, por ejemplo:

"Si en 1 bolsa de pan vienen 5 panes y tengo 6 bolsas, ¿cuántos panes tengo en total?"



(Imagen adaptada de Chamorro, M. (2003). P. 162)

[1] Un isomorfismo es una aplicación biyectiva (llamada así debido a que comprende dos campos de medida) entre dos conjuntos que <<respeta>> la operación que hay definida en cada uno de ellos. (Chamorro, M. (2003). P. 161)

8. Producto de medida: Contiene tres magnitudes presentando una relación ternaria, una de las magnitudes es producto de las otras dos, que debe ser presentada de manera cartesiana. Para Maza (1991) son problemas con funciones bilineales porque relacionan 3 magnitudes en la operación. Hace referencia a los problemas relativos a áreas, volúmenes y productos cartesianos:

M1 y M2 producen una nueva magnitud, M3, diferente a las iniciales.

Según lo presentado antes, estos problemas pueden ser de multiplicación o de división.

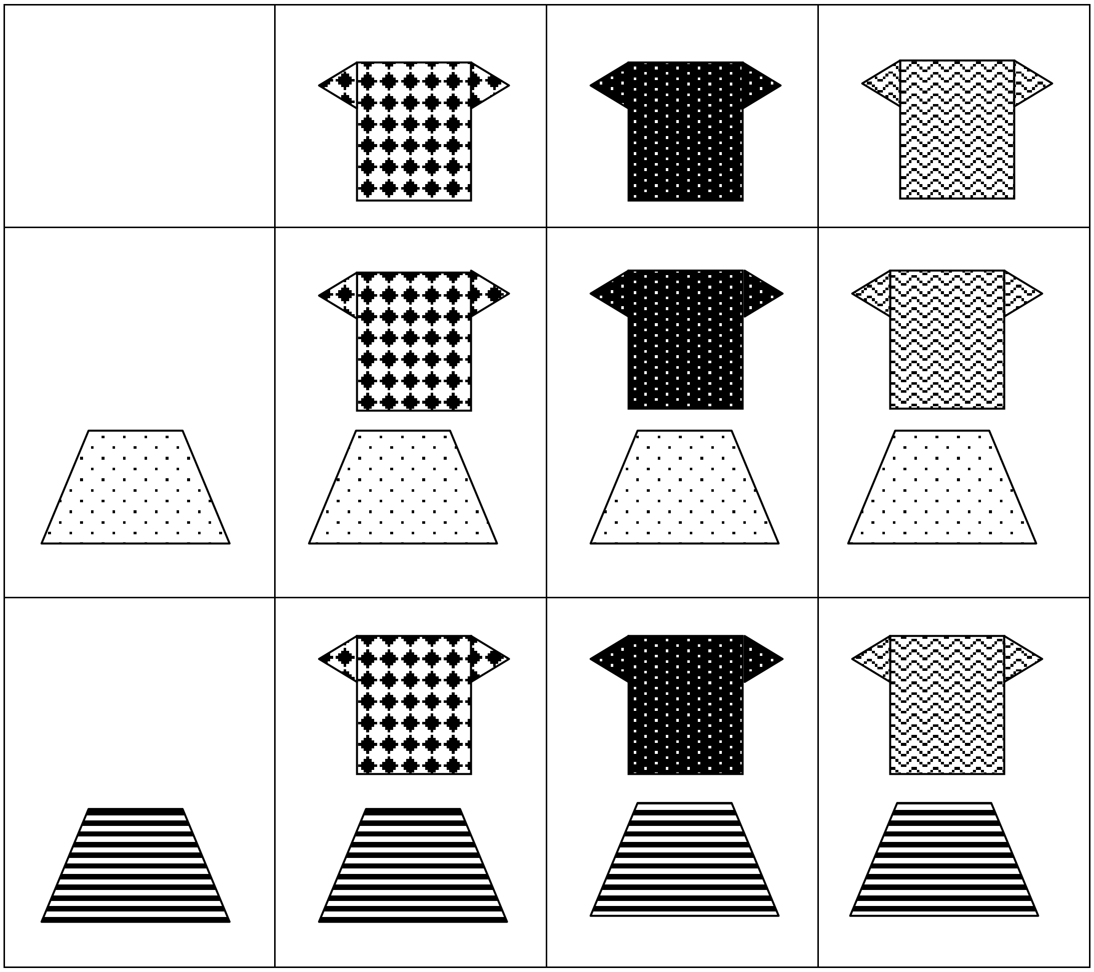
a) Multiplicación: Se busca el producto conociendo las otras dos cantidades de la operación. También son llamados problemas de combinación.

Ejemplos:

- ¿cuál es el área de un salón rectangular, que mide 4 metros de largo y 5 de ancho?

M1= Largo M2= Ancho M3: Área

- Marcela tiene 3 camisetas y 2 faldas. ¿Cuántas pintas puede formar con estas prendas?



(Imagen adaptada de Chamorro, M. (2003). P. 166)

b) División: Se busca encontrar el valor de la magnitud número 1 o del número 2, conociendo el valor dado para la magnitud 3, y el de alguna de las otras dos magnitudes.

Ejemplo:

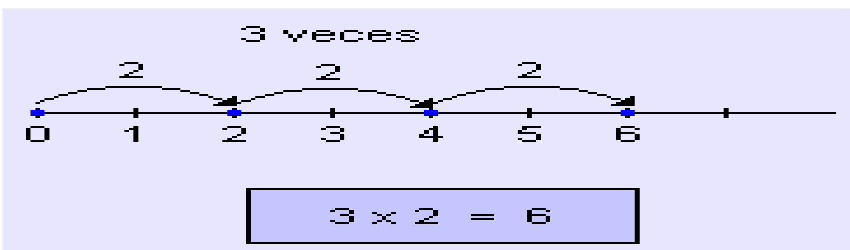
La superficie rectangular de una habitación es de 24 metros cuadrados y el largo de la misma es de 4 metros, ¿cuál es el ancho de la habitación?

6.1.2. Modelos de representación de problemas multiplicativos

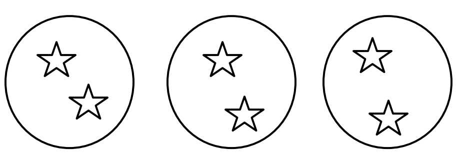
6.1.2.1 Modelos de representación:

Un modelo es un instrumento que sirve para representar las relaciones y transformaciones dentro de una operación. Los modelos les permiten a los niños hacer explícitas las operaciones y entender el porqué de los procedimientos. Castro et al. (1995) nombran los siguientes tipos de modelos para el producto y la división.

1. Modelo Lineal: Utiliza la recta numérica, permitiendo ubicar en esta los valores a operar, representando en "saltos" las operaciones: a la derecha para multiplicar y a la izquierda para dividir. Se realizan sucesiones de recuentos. Se suele trabajar la multiplicación como suma reiterada y la división como resta reiterada.

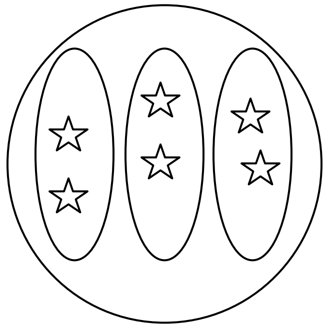


2. Modelo cardinal: Representa uno o dos factores, uniendo objetos en conjuntos o colecciones, tiene cuatro tipos:
    a. Unión repetida: Presenta diferentes conjuntos que contienen los mismos objetos, que se operan.
    b. Multiplicación: 2 X 3



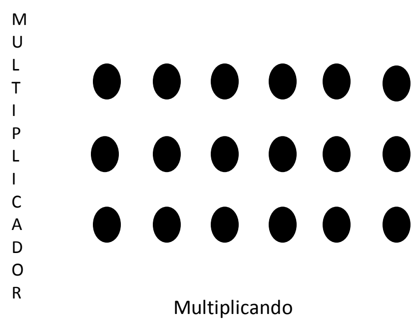
3 veces

División: 6 ÷ 2

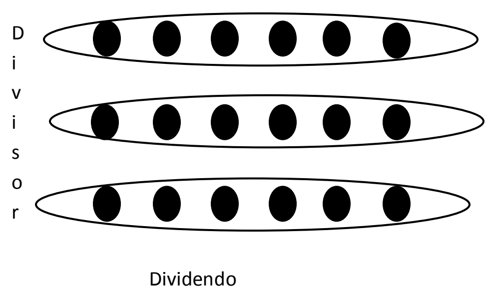


c. Esquema rectangular: Se hace una disposición de tantas filas como diga un factor por tantas columnas como diga el otro.

6 X 3 = 18

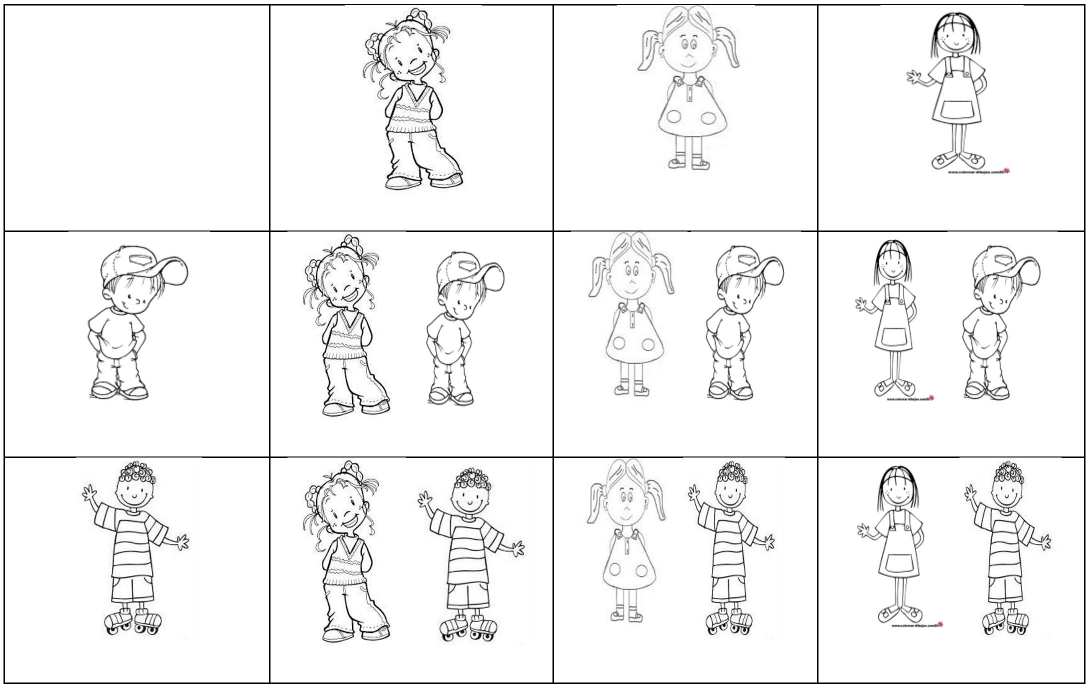


18 ÷ 3 = 6

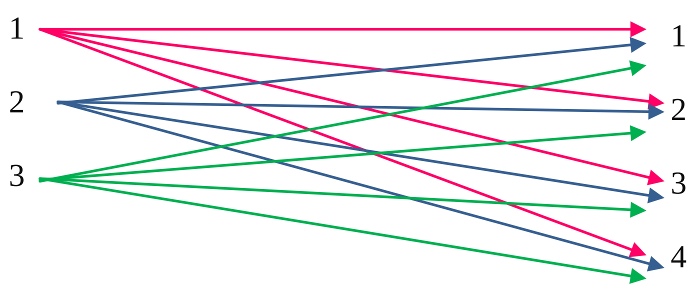


d. Representación mediante producto cartesiano de dos productos: Maneja un cuadro en el que se representan las cifras con algún objeto para hacer combinaciones posibles.

"A una fiesta van 2 niños y 3 niñas, ¿Cuántas parejas se pueden formar?"



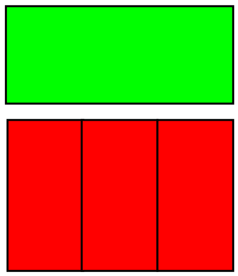
e. Esquema de flechas: Se dibujan tantas flechas como sean posible de un conjunto a otro. Muestra el máximo número posible de combinaciones. ¿Cuántas veces puedo combinar las blusas con los pantalones?



$3 \times 4 = 12$

3. Modelos con medida: Se llaman así ya que usan las medidas para resolver las operaciones. Es el caso de las regletas de Cuisenaire y de las balanzas.

a) Las regletas de Cuisenaire: Toman el número como longitud, para realizar el producto se toma una regleta del tamaño que indique el multiplicando y se completa con la cantidad de regletas que sean necesarias de acuerdo al multiplicador:



2 X 3 = 6 = 2+2+2

Balanza: Se utiliza el número, peso y medida; para operar el producto se coloca una cantidad (multiplicando) el número de veces que indique el multiplicador. El resultado es el peso total.

4. Modelo Numérico: Se limita a la representación simbólica de la operación con los números, en caso del producto se elabora una suma reiterada, ejemplo:

2 X 3 = 6

2+ 2+ 2 = 3 veces 2 = 6

En el caso de la división se habla de una resta reiterada hasta encontrar la respuesta, ejemplo:

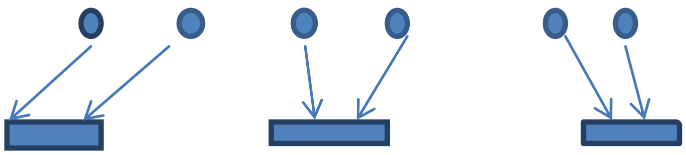
6 ÷ 3 = 6 - 3

3 - 3

0

5. Modelo de razón aritmética: También llamados de comparación, en ellos se deben comparar conjuntos, colecciones o cantidades en “veces más” o “veces menos”. Se establece correspondencia uno a varios.

En la división, por ejemplo, se grafica el total y espacio para cada parte, donde se van ‘llevando’ las unidades. $6 \div 3 = 2$ o $6/3=2$



6. Modelo Funcional: Se da cuando el producto de la operación también puede ser de operador, ejemplo:

3 X 2 = 6

Estado inicial operador estado final

6 ÷ 2 3

Estado inicial operador estado final

6 x 2 12

Los maestros pueden utilizar diferentes modelos para que a los niños se les facilite la comprensión de las operaciones de la estructura multiplicativa, una de ellas es el uso del modelo lineal como soporte gráfico, contando los intervalos de la misma hacia atrás o hacia adelante, dependiendo de la operación.

Otro modelo muy utilizado en la división es el reparto de colecciones en partes iguales, haciendo uso de material concreto, así se le propone al niño que reparta cierta cantidad de objetos en un número *x* para hallar el número de objetos en cada parte.

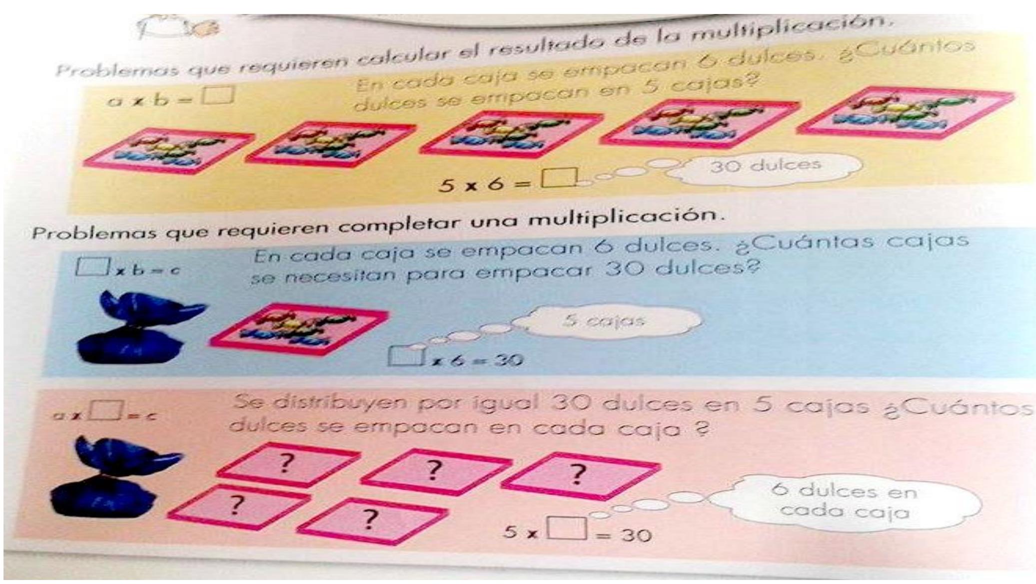
Usando el modelo cardinal con representación concreta algunos maestros se apoyan en la resta sucesiva para explicar el algoritmo de la división empezando por los valores más altos hasta llegar al valor más bajo en el dividendo; así a la colección en general se le van restando el número de objetos que indica el dividendo tantas veces como sea necesarias.

6.1.3. Estrategias de resolución de problemas multiplicativos

En las Hojas Pedagógicas número 3 de Jorge Castaño (1996 (a), se plantean 4 estrategias como momentos que atraviesan los niños para resolver y comprender problemas multiplicativos; estos son:

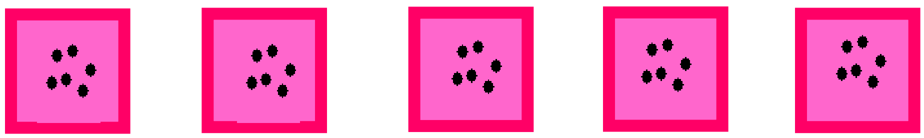
a) Representación realista: Los niños dibujan los elementos agrupándolos de acuerdo a la situación planteada, representado cada elemento que esta contiene.

Esto también se ve reflejado en las cartillas MEN. (2010 (b)). Específicamente en la cartilla de 3° grado, segunda cartilla; donde exponen ésta como una de las estrategias que pueden usar los niños, para resolver, sobre todo en los problemas de encajamiento.



(Imagen tomada de MEN. (2010 (b)). P. 38)

b) Representación esquemática: Se complejizan las representaciones pues ya no son en detalle, sino que se busca un elemento que pueda representar toda la colección.



c) Representación aditiva: Los niños realizan procedimientos de suma reiterada, ya sea de manera icónica o numérica.

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

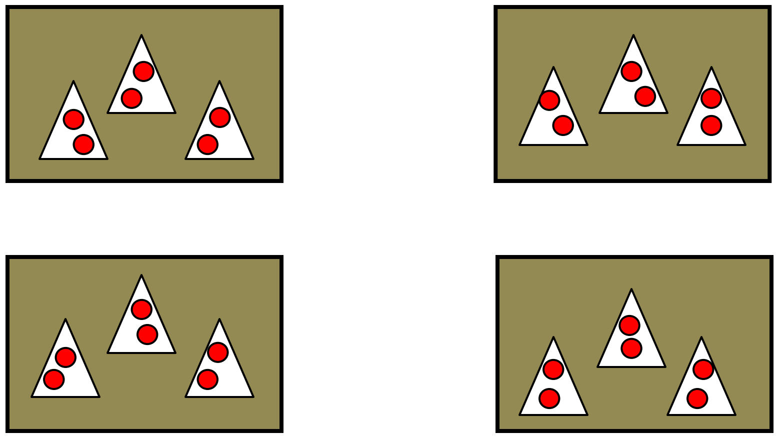
d) Representación multiplicativa: Ocurre cuando el niño realiza la multiplicación con símbolos numéricos. Ejemplo:

$$6 \text{ x } 5 = 30$$

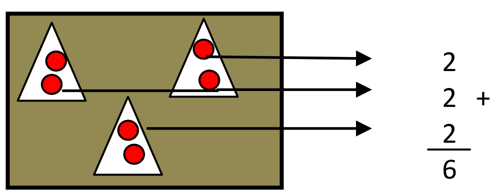
En la resolución de problemas compuestos, los niños atraviesan por tres momentos, según lo expresado por Jorge Castaño en las Hojas Pedagógicas número 4 (1996 (b)):

1. Los niños aún no son capaces de coordinar dos o más operaciones de encajamiento, equivalencia o relaciones multiplicativas.

   “Si en una caja caben 3 bolsas de chicles, y en cada bolsa caben 2 chicles, ¿cuántos chicles hay en 4 cajas?”



2. En una fase llamada intermedia, los niños hacen coordinaciones intuitivas, asumen que un problema compuesto es la sucesión de dos o más problemas simples, realizan sumas a pesar de estar en la capacidad de multiplicar y presentan dificultad para hacer operaciones inversas.



6	6
6	6

3. Los niños logran comprender que un problema compuesto integra dos o más operaciones multiplicativas.

   3 x 2 = 6,   6 x 4 = 24

Jorge Castaño (1996 (b)), afirma que los niños utilizan ciertas estrategias para la resolución de problemas inversos, las cuales son:

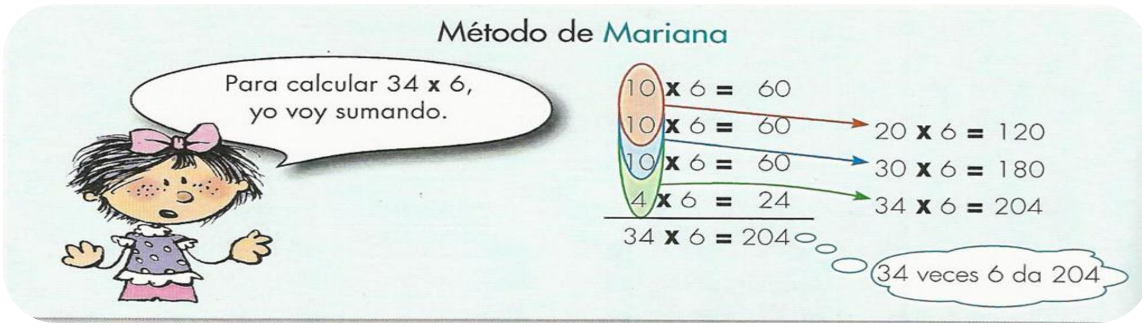
a. Ensayo y error: El niño ensaya con diferentes operaciones y cantidades hasta encontrar una que se ajuste a la situación multiplicativa, (Castaño. (1996 (b)). Esto demuestra que el niño no ha desarrollado la habilidad de representar un problema inverso, ya que se le dificulta ubicar la incógnita en otro lugar por lo que recurre a aproximaciones.
b. Regresar paso a paso: El niño en su búsqueda del resultado elabora procesos de composición y descomposición para buscar el origen de cada cifra regresando a las operaciones que ha hecho. Ejemplo:

   Si un número desconocido de monos aumenta tres veces su tamaño y estos se dividen en cinco grupos y cada grupo queda con seis monos. ¿Cuántos monos había al principio?

   $? \times 3 = R$ y $R \div 5 = 6$

   $6 \times 5 = 30$ y $30 \div 3 = 10$
c. Composición: El niño analiza qué operaciones debe hacer y las compone para llegar a una sola, convirtiendo el problema en uno simple.

Por otro lado, las cartillas, MEN. (2010). Plantean diferentes estrategias que permiten al niño comprender de manera más sencilla algunos problemas y les brindan estrategias de resolución de los mismos.



(Imagen tomada de MEN. (2010 (a)).P. 52)

Este método sirve para las multiplicaciones con números mayores a 10, consiste en descomponer el multiplicando. Así se descomponen las cifras en números no mayores a 10. Una vez descompuesta la cifra se multiplica cada parte por el multiplicador y luego se realiza una suma de resultados parciales para hallar el total.

Otra estrategia comúnmente utilizada es la llamada regla de los ceros:

36 x 10 = 360

UM	C	D	U
		3	6

UM	C	D	U
	3	6	0

Como 1 decena representa 10 unidades y una centena 10 decenas, al ser multiplicado por estos números, el número aumenta 10 o 100 veces como cambiando de posición.

En síntesis, la operación, ya sea por 10, 100, 1.000 o 10.000, se resuelve agregando los ceros respectivos. Por ejemplo para multiplicar

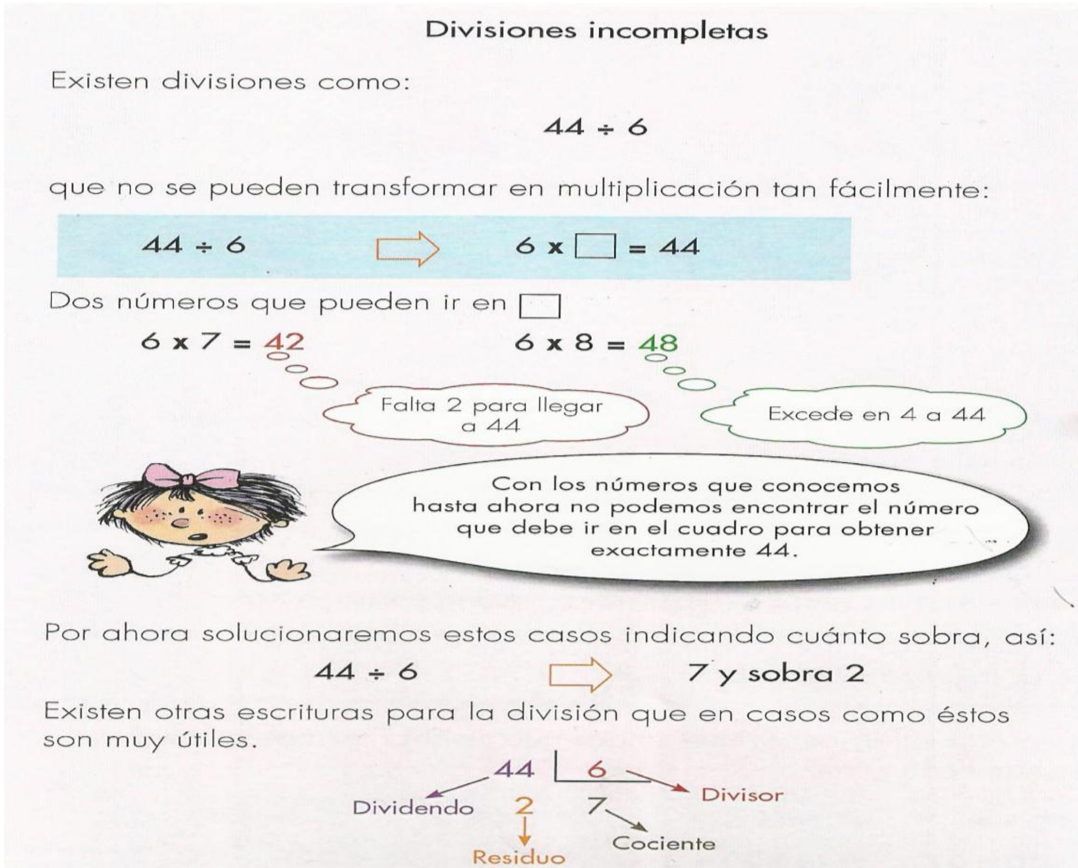
70 X 30 = (7 X 3) X 100 = 21 X 100 = 2100

Para multiplicar una cifra que contenga más ceros como por ejemplo

70.000 X 5 = (7 X 5) X 10.000 = 35 X 10.000 = 350.000 agregando los respectivos ceros.

En las divisiones, lo que se hace es invertir la operación convirtiéndola en una multiplicación, usando como instrumento la tabla de multiplicar para buscar el número que hace falta; en tal caso se busca el número que multiplicado por el multiplicador de cómo producto el dividendo. El número encontrado es el cociente, es decir, el resultado de la división.

Este método se asemeja a lo que Chamorro denomina encuadramiento del dividendo por múltiplos del divisor, en el cual se invierte la operación dejando un vacío en la parte del multiplicador ya que es el número a encontrar; este se busca mediante el tanteo, si no se encuentra un número que de este resultado de manera exacta, se busca uno cercano y se escribe lo que sobra, como residuo, tal como se observa en la siguiente imagen,



Divisiones incompletas

Existen divisiones como:

44 ÷ 6

que no se pueden transformar en multiplicación tan fácilmente:

44 ÷ 6 ⇨ 6 x ☐ = 44

Dos números que pueden ir en ☐

6 x 7 = 42 — Falta 2 para llegar a 44

6 x 8 = 48 — Excede en 4 a 44

Con los números que conocemos hasta ahora no podemos encontrar el número que debe ir en el cuadro para obtener exactamente 44.

Por ahora solucionaremos estos casos indicando cuánto sobra, así:

44 ÷ 6 ⇨ 7 y sobra 2

Existen otras escrituras para la división que en casos como éstos son muy útiles.

(Imagen tomada de MEN. (2010 (b)). P. 42)

Varios autores como Maza (1991), Chamorro (2003) y Castaño (1996 (a,b)) plantean la suma reiterada como estrategia de resolución de problemas, así como las cartillas del Modelo Educativo Escuela Nueva (MEN, 2010), ésta, soportada en los axiomas de Peano, consiste en sumar varias veces una misma cifra para hallar el resultado de una multiplicación, por ejemplo:

$$3 \times 28 = 84, \quad \begin{array}{r} 28 \\ +\ 28 \\ 28 \\ \hline 84 \end{array}$$

d) La tabla de multiplicar:

La tabla de multiplicar puede ser entendida como una herramienta que facilita y hace más corto (con respecto a la suma reiterada) el proceso multiplicativo. Se trabajan en la escuela bajo la idea de que estas (las tablas de multiplicar) son la base de la enseñanza de las operaciones que conforman la estructura multiplicativa, llevando a los estudiantes a memorizarlas. Esto es lo que Castro et al. (1995) llama hechos memorizados, ya que plantea que las tablas en la escuela no se comprenden sino que se memorizan.

> La escuela dedica varios años de la primaria al aprendizaje de las tablas de multiplicar y de los algoritmos, convirtiendo estos dos contenidos en uno de los principales objetivos de la enseñanza en la primaria. Sin embargo, es un hecho que al finalizar la primaria, muchos alumnos no utilizan la multiplicación y emplean la suma reiterada para resolver problemas de tipo multiplicativo. (Orozco, M. (s.f) p. 1).

Desde los planteamientos de Castro et al. (1995), el aprendizaje de las tablas viene después de que se ha aprendido el proceso de la multiplicación; para esto se hace necesario el uso de un lenguaje que no utilice el término “por” sino “veces” durante la construcción de las tablas. Sin embargo en la escuela se trabaja al contrario, así como lo expone Mariela Orozco (s.f), en la escuela se toma como base la tabla de multiplicar y a partir de ahí se desarrolla la estructura multiplicativa lo que se pudo observar en los casos analizados y que se presentaron como antecedentes de este ejercicio investigativo.

Entre las estrategias utilizadas para la memorización de las tablas:

a) Se recurre a hechos memorísticos consignados en las tablas, se repiten cada día en voz alta para memorizarlas, empezando por la tabla de dos hasta llegar a la del 10.

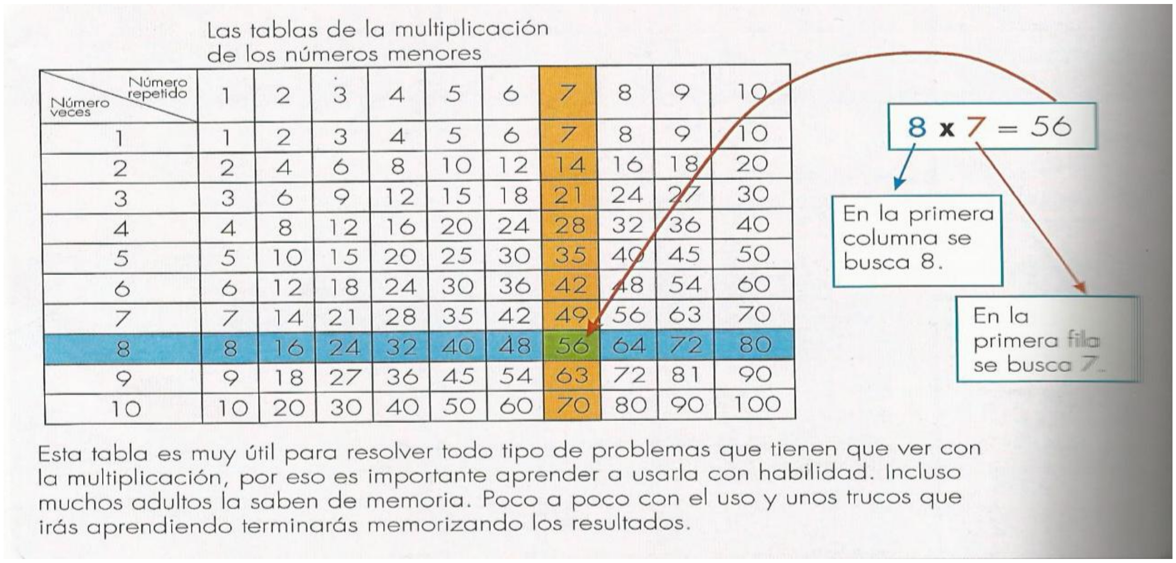
b) Utiliza la suma sucesiva como estrategia de aprendizaje, se suma de dos en dos, de tres en tres… hasta llegar al valor deseado de acuerdo a lo que la tabla disponga.

c) La tercera versión, aborda las tablas como una construcción de los alumnos debido al uso de procedimientos informales como la propiedad conmutativa, la multiplicación por 10, el cálculo del doble, el cálculo de la mitad, la descomposición de los factores y la composición de los resultados obtenidos al multiplicar. (Orozco, M. (s.f) p. 7).

Castro los muestra como hechos deducidos, sin embargo, para llegar a este punto, es necesario que los niños tengan un adecuado manejo de los procedimientos multiplicativos, es decir deben haber superado la suma reiterada y resolver eficazmente situaciones problema de multiplicación y división.

Castro et al. (1995), muestran la tabla en una rejilla 10 X 10, que resulta interesante, así se va construyendo con todos los resultados obtenidos con un mismo multiplicador al variar el multiplicando.

En la cartilla MEN. (2010 (a)). Se hace referencia a la rejilla mencionada anteriormente y se explican los procesos que se siguen con ella.



Las tablas de la multiplicación
de los números menores

Número repetido / Número veces	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Esta tabla es muy útil para resolver todo tipo de problemas que tienen que ver con la multiplicación, por eso es importante aprender a usarla con habilidad. Incluso muchos adultos la saben de memoria. Poco a poco con el uso y unos trucos que irás aprendiendo terminarás memorizando los resultados.

(Imagen tomada de MEN. (2010 (a)). P. 50)

6.1.4. Algoritmo

Un algoritmo es una serie de reglas que se aplican en un determinado orden, a unos datos establecidos, para llegar a un resultado. Desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se plantea que un algoritmo es un conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, y que están ligados, en su mayoría, a elaboraciones sintácticas de las expresiones simbólicas del lenguaje matemático.

Según lo expresado por Orozco (s. f.), en Educación Matemática la enseñanza de los algoritmos se entiende como la formación en Aritmética que los alumnos requieren; algunos autores los analizan como un buen ejemplo de conocimiento procedimental [2] que difiere del conocimiento conceptual ya que este, se entiende como el conocimiento de los conceptos que

[2] Procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo a rutinas secuenciadas. entendido este desde los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998, p, 81)

tiene un sujeto y que le permite, según Orozco (s.f), establecer la relación entre conceptos a través de la inclusión o la analogía.

Se distinguen, según Orozco M (s.f) tres enfoques en la concepción de los algoritmos de la multiplicación y la división:

1. Tradicional: Entiende la enseñanza de las operaciones como la enseñanza de los algoritmos, así como su mecanización y memorización.
2. Conjuntista: Está dentro de la matemática moderna y entiende al algoritmo como una construcción lógica, esta concepción se deriva de la noción de estructura y de la teoría de conjuntos.
3. Actual: Permite que exista una conexión entre los dos enfoques anteriores; además establece una relación entre la comprensión del algoritmo y su utilización en la resolución de problemas.

Estos enfoques entienden el algoritmo como un conjunto de pasos ordenados que se deben seguir para realizar las operaciones, en nuestro caso están regidos por el sistema notacional de base diez, por lo tanto una adecuada comprensión del SND y sus composiciones hacen más sencilla la adquisición del algoritmo de la multiplicación.

Para Orozco (s.f) el manejo de los algoritmos constituye un buen ejemplo de la discusión sobre la conexión entre conocimiento conceptual y procedimental.

Entendido de esta manera, el algoritmo es considerado como un instrumento o herramienta para la resolución de ejercicios matemáticos, que reduce el esfuerzo mental y contribuye indirectamente al desarrollo conceptual por cuanto un algoritmo automatizado facilita la comprensión de conceptos más complejos. (Orozco M, p. 11). En contraste, Kamii (1995) plantea que la enseñanza del algoritmo en los primeros años es perjudicial ya que impide al niño desarrollar un pensamiento propio, pues se limita a seguir los pasos del algoritmo. Con el uso de éste se hace mecánico el procedimiento hasta el punto de que el niño no reflexiona ante el proceso que ha seguido.

En síntesis, Kamii (1995) expone tres dificultades que surgen con la enseñanza basada en el algoritmo:

1. La enseñanza del algoritmo le impide al niño tener procesos de creación, exploración y descubrimiento de nuevas posibilidades de operar las cantidades.
2. Los algoritmos usan de manera incorrecta el valor posicional, pues no se presentan de manera transparente en los procesos de multiplicación. A los niños se les enseña que siempre se multiplica respetando el valor posicional, sin embargo, en el algoritmo, pareciera trabajarse solo con unidades pues no se hace explícito el verdadero valor de las cifras, impidiendo que el niño amplíe su conocimiento del valor posicional y del Sistema de Numeración Decimal.
3. El uso recurrente del algoritmo canónico lleva a que los niños dependan del papel y el lápiz y de la disposición vertical de los números para resolver ejercicios.

6.1.4.1 Algoritmo canónico de la multiplicación:

Para visualizar el algoritmo canónico de la multiplicación, se tendrá como referente el siguiente ejercicio:

324x 16=

1. Se deben organizar las cifras de manera vertical, si no están dispuestas así:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \\ \times & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$$

2. Se operan los números del multiplicando por la unidad del multiplicador, siguiendo el orden del valor posicional, ubicando las cifras de derecha a izquierda:

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 324 \\ \times 16 \\ \hline 4 \end{array}$$

6 x 4 = 24

Se descompone el resultado en unidades y decenas. Debajo de la operación se dejan las unidades (4) y se acarrean las decenas (2)

$$\begin{array}{r} {}^{12} \\ 324 \\ \times 16 \\ \hline 44 \end{array}$$

6 x 20 = 120

Se multiplica la unidad del multiplicador por la decena del multiplicando y se suma las decenas acarreadas anteriormente. Esto da como resultado 140. Dado que lo que se está operando corresponde al lugar de las decenas en la parte del resultado se escriben solo las decenas (4) y se acarrean las centenas (1).

$$\begin{array}{r} {}^{12} \\ 324 \\ \times 16 \\ \hline 1944 \end{array}$$

6 x 300 = 1800

Se multiplica la unidad del multiplicador por la centena del multiplicando y se suma las centena acarreada anteriormente. Esto da como resultado 1900. Debido a que el resultado de la operación no dio una centena sino una unidad de orden mayor se deben escribir las centenas y las unidades de mil (19)

El resultado de operar las unidades del multiplicador por el multiplicando es de 1944.

3. Se operan los números del multiplicando por la decena del multiplicador, siguiendo el orden del valor posicional ubicando las cifras de derecha a izquierda:

```
 324
 X16
-----
1944
  4
```

10 x 4 = 40

Se multiplica la decena del multiplicador por la unidad del multiplicando. El resultado se ubica debajo del resultado que generaron las operaciones anteriores; el resultado de esta operación se ubica debajo de la casilla de las decenas (4), dejando un espacio en blanco que corresponde a las unidades (que, en este caso, son cero).

```
 324
 X16
-----
1944
 24
```

10 x 20 = 200

Se multiplica la decena del multiplicador por la decena del multiplicando. Se escribe el resultado en la casilla correspondiente a las centenas.

```
 324
 X16
-----
1944
324
```

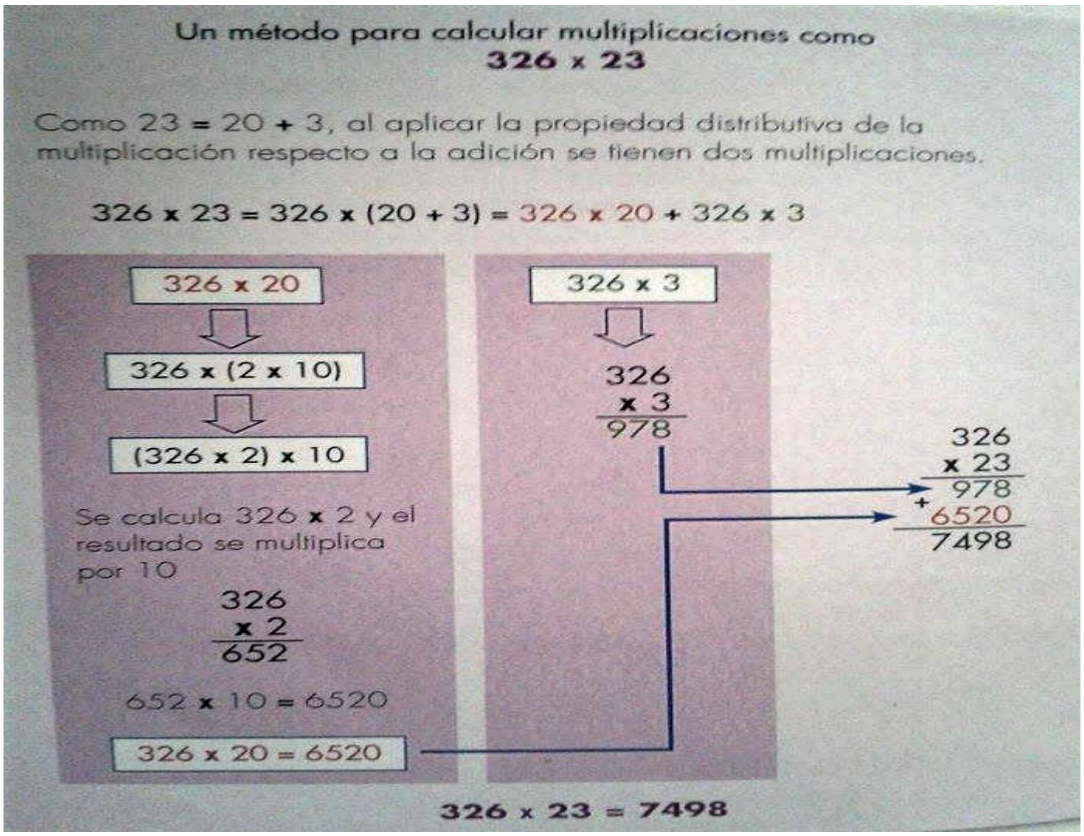
10 x 300 = 3000

Se multiplica la decena del multiplicador por la centena del multiplicando. El resultado se ubica debajo del resultado que generaron las operaciones anteriores; el resultado de esta operación se ubica debajo de la casilla de las unidades de mil.

```
  324
  X16
 -----
 1944
+324
 -----
 5184
```

Para finalizar se suman los dos resultados.

El algoritmo se soporta en la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición, y hace uso de esta así sea implícitamente, ya que permite hacer composiciones y descomposiciones que hacen más fácil la comprensión del proceso multiplicativo; la propiedad distributiva muestra de manera transparente de dónde sale cada cifra, como se puede apreciar en la siguiente imagen:



(Imagen tomada de MEN. (2010). P. 12)

6.1.4.1 Algoritmo canónico de la división:

Para mostrar el algoritmo canónico de la división se tendrá en cuenta el siguiente ejemplo:

423 |8

1. 42'3 |8

Cabe resaltar que este algoritmo, a diferencia de otros, se realiza de izquierda a derecha. Lo primero que se hace es identificar cuántas cifras tiene el dividendo y cuántas el divisor, para comprobar si se puede operar (repartir) sólo con la primera cifra de la izquierda del dividendo o si se necesitan dos o más.

2. 42'3 |8
5

Después de identificar estos números, se debe revisar cuántas partes, del tamaño del divisor, se pueden hacer con las cifras 'activadas' del dividendo, hasta encontrar el número exacto o aproximado de tal forma que sobre, menos que el divisor, pero que no falte. Con este número se

3. 42'3 |8
-40 5
23

Se multiplica el divisor por la cifra del cociente hallada, este producto se resta de la parte del dividendo que se ha activado (bien sea escribiéndolo debajo del dividendo para evidenciar la resta o haciéndolo mentalmente).

Con el resultado de la resta, acompañado de la siguiente cifra del dividendo, se vuelve a hacer el proceso de buscar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo o cuántas partes, del tamaño del divisor, se pueden hacer con las cifras 'activadas' del dividendo. Proceso que se repite hasta que el número obtenido de la resta y la siguiente cifra del dividendo sea menor que el divisor.

4. 42'3 |8
-40 52
23
-16
7

En el ejemplo, de nuevo se busca cuántas veces cabe el divisor en el dividendo (señalado con un círculo), una vez encontrado el número se multiplica por el divisor y su resultado se resta al dividendo parcial.

Como ya no hay más cifras en el dividendo el número que se obtiene al restar, es el residuo.

6.1.4.2 Otros algoritmos de la multiplicación y la división:

1. Técnica de los recortados:

Consiste, según Chamorro (2003), en descomponer las cifras, multiplicarlas entre sí y luego sumar los productos parciales obtenidos. En la aplicación de este algoritmo, se hace uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y se tiene en cuenta el valor posicional de las cifras. Por ejemplo:

38 x 26=

(30+8) (20+6)

30	8	
6 x 100 600	16 x 10 160	20
18 x 10 180	48	6

Problema adaptado de Chamorro (2003) P. 173

2. Técnica de la celosía:

   Miremos el siguiente ejemplo:

245 X 36 = 8820

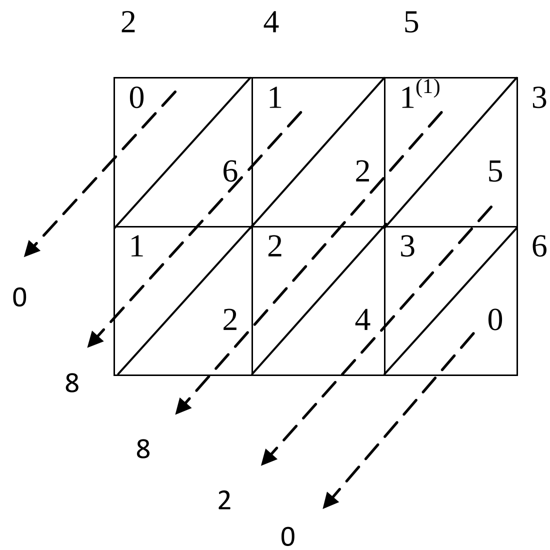


Imagen adaptada de Chamorro (2003) 175

Este método es de la historia, fue experimentado por los investigadores del instituto de investigación para la enseñanza de las matemáticas, de Burdeos y es retomado por Vergnaud (1991) y Chamorro (2003). Para aplicar esta técnica, se ubica horizontalmente el multiplicando y verticalmente el multiplicador, el resultado de esas operaciones se coloca en los cuadros, ubicando decenas en el cuadro superior y unidades en el cuadro inferior, para finalizar se suma diagonalmente hacia la derecha, y se ordena el resultado. “La ventaja de este método es, por supuesto, que lo que se lleva en la fase de la multiplicación se escribe totalmente. Solo lo que se lleva de la adición final se guarda mentalmente.” (Vergnaud, 1991, p. 159)

3. Técnica egipcia de la multiplicación:

28 x 14 =

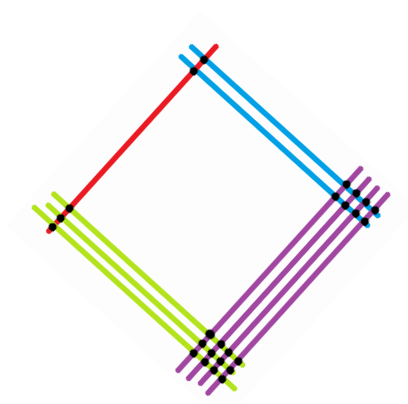
	el doble	2	+	4	+	8 = 14	
1	→	2		4		8	16
28	→	56		112		224	448
	el doble	56	+	112	+	224 = 392	

28 x 14 = 392

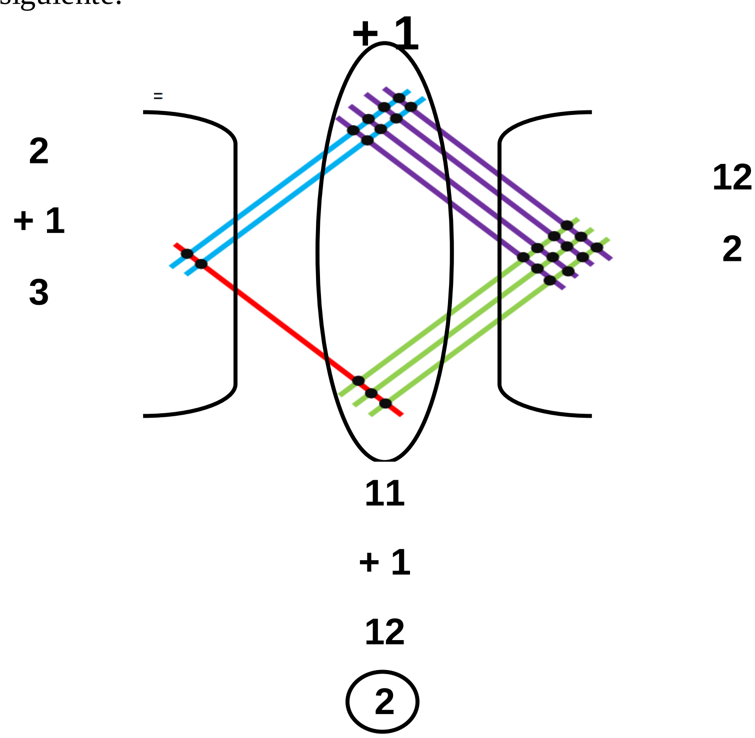
Este método se basa en la adición, y se trabaja utilizando las potencias de dos. Se traza una recta que separa las cantidades; en la parte inferior se ubica el multiplicando, y se va ampliado por el doble. En la parte de arriba se ubica el uno y se va ampliado por el doble, en la parte superior debe encontrarse el multiplicando sumando los números necesarios, producto de las ampliaciones del uno. El resultado es la suma de los números que están debajo de la recta paralelos a los números que forman el multiplicador.

4. Técnica maya de la multiplicación:

14x 23 =



Lo primero que se hace es representar, en la parte inferior izquierda, las decenas del multiplicando con tantas líneas como corresponda al número; se deja un espacio y en el extremo paralelo (superior derecho) se dibujan tantas líneas como corresponda a las unidades del multiplicando. En la parte superior izquierda se representan las decenas del multiplicador y en la inferior derecha las unidades del multiplicador. Las líneas deben cruzarse para poder identificar las intersecciones que se presenten, sobre ellas se marcan puntos, como se puede ver en el gráfico siguiente:



Se separan las esquinas y se agrupan las intersecciones del centro. Luego se procede a contar los puntos de la esquina derecha, si es número excede a 9 se acarrean las decenas al grupo de la izquierda y se dejan las unidades, se sigue con el grupo del centro, y se suman las intersecciones de las puntas y, de ser necesario, se acarrean las decenas a la izquierda, por último se suman las del extremo de la izquierda; para escribir el resultado se bajan los números obtenidos. En este ejemplo, el resultado sería 322

5. Sustracciones repetidas del divisor al dividendo:

Es planteada por Chamorro (2003) y consiste en realizar restas reiteradas. Cogiendo el dividendo y restándole el divisor hasta que el resultado de la resta sea menor al divisor. El cociente es el número de restas realizadas y el residuo el resultado de la última resta. Por ejemplo:

Se quieren repartir 53 caramelos en bolsas, colocando 6 caramelos en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas se necesitan?

Bolsas	**Caramelos que quedan**
1	53 – 6 = 47
2	47 – 6 = 41
3	41 – 6 = 35
4	35 – 6 = 29
5	29 – 6 = 23
6	23 - 6 = 17
7	17 - 6 = 11
8	11 – 6 = 5

Se necesitan 8 bolsas y sobran 5 caramelos.

Para operar cifras grandes con este procedimiento de restas reiteradas, se le pueden ir restando al dividendo 10, 100 o 1000 veces el divisor. Por ejemplo 76.385÷621

100 veces el divisor (621x100= **62100**)	76.385-62100=14.285
10 veces el divisor (621x10= **6210**)	14.285-6210=8.075
10 veces el divisor (621x10= **6210**)	8.075-6210=1.865
1 vez el divisor (**621**)	1.865-621= 1.244
1 vez el divisor (**621**)	1.244-621= 623
1 vez el divisor (**621**)	623-621= 2

Así, el cociente es 123 y el residuo es 2. El resultado del cociente se obtiene de sumar el número de veces que se restó el divisor (Los primeros números en negrilla en el cuadro).

6. Encuadramiento o encajonamiento del dividendo entre múltiplos del divisor:

   Se trata de llegar al dividendo ubicando los múltiplos del divisor que sirvan en el cociente. Por ejemplo:

   "Tenemos 58 cuadritos y queremos construir con ellos el rectángulo más grande posible que tenga 7 cuadritos en uno de sus lados." (Ejemplo Tomado de Chamorro. P. 175)

   Se busca un múltiplo de 7 que permita llegar al dividendo o que se aproxime, en este caso es 8, porque 7 x 8 = 56. Así, el cociente es 8 y queda residuo 2.

Este método, reiterado, permite hacer transparente el cálculo del cociente cifra por cifra. Para resolver el ejemplo anterior 76.385÷621, por encajonamiento se usarían, paso a paso, los múltiplos de 621, así:

76.385	|621	621x1
1428	123	621x2
1865		621x3
2		

Los números conseguidos en el cociente se obtienen de la siguiente manera:

1 resulta de 621, por ser el múltiplo más próximo a 763 (que se obtiene de separar tres cifras en el dividendo).

2 es consecuencia de 621x2=1.242 por ser el múltiplo más próximo a 1.428 (que se obtiene de la diferencia entre 763 y 621 aumentada en 8.

3 producto de 621 x 3= 1.863 por ser el múltiplo más próximo a 1.865 (que obtiene también al agregar la última cifra del dividendo a una diferencia).

Como se pudo observar son múltiples los algoritmos de multiplicación y división que se encuentran en la documentación sobre el tema, lo cual contrasta con lo planteado en el contexto, la problemática y los antecedentes, que muestran la forma de enseñar la multiplicación y la división usando el algoritmo canónico o tradicional. Lo encontrado en la documentación permite abrir la mirada hacia otras formas de trabajar el algoritmo, que posibilitan la comprensión eficaz de procesos de división y multiplicación.

7. MARCO METODOLÓGICO

El presente trabajo muestra un ejercicio investigativo de corte cualitativo, según lo retomado por Pérez Serrano Gloria (1994, P. 46) de Watson-Gegeo (1982) “la investigación cualitativa consiste en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables. Además incorpora lo que los participantes dicen, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamiento y reflexiones, tal y como son expresadas por ellos mismos.”

Uno de los métodos de la investigación cualitativa es el estudio de caso, este permite recolectar datos, analizarlos y presentarlos al interior de un grupo específico; un caso puede ser cualquier cosa, una persona, un grupo, un lugar entre otros, ya que lo que interesa es el objeto de estudio.

Se decidió que éste fuera un ejercicio investigativo cualitativo debido a su flexibilidad, en cuanto es posible analizar el contexto y los actores en el mismo, de manera detallada y teniendo en cuenta las experiencias de los sujetos. Y se utilizó el estudio de caso ya que analiza un contexto en particular y permite confirmar, modificar o ampliar el conocimiento sobre el objeto de estudio al identificar las características específicas del mismo en un contexto en particular, de carácter único y peculiar.

Así mismo, son únicos y particulares los instrumentos a través de los cuales se van a obtener los datos a analizar.

Para Gloria Pérez (1994) el estudio de caso contempla las siguientes etapas:

1. Etapa inicial: en la cual debe hacerse un acercamiento al contexto en el cual está inmerso el sujeto o grupo, objeto de estudio; para visualizar sus dinámicas, tensiones y demás factores en particular.
2. Segunda etapa: Recolección de datos a través de la aplicación de uno o más instrumentos.
3. Tercera etapa: cuando se realiza el análisis de lo recogido en la etapa anterior, relacionando lo experimentado y visto, con un sustento teórico. (Pérez, G. (1994) p,95)

En este caso, el acercamiento al contexto, la Institución Educativa Distrital Nueva Constitución, y específicamente el grado 4° de primaria, jornada de la mañana, se realizó mediante la práctica formativa realizada de 2013 a 2014, como maestras en formación en XVIII, XIX y X semestres.

A partir de la experiencia de práctica, surgió el interés por el manejo que le dan los niños y las niñas a los algoritmos de multiplicación y división, para lo cual se recolectaron datos mediante instrumentos que se describirán más adelante. El análisis de la información recogida, se realizó en contraste con el marco de referencia, y está contenido en el presente documento.

7.1. Diseño metodológico

A partir de las observaciones realizadas a la institución en los ciclos 1 y 2 (mencionados anteriormente), se elaboraron unos instrumentos de investigación que se aplicaron a niños de 4° grado. Sus respuestas permitieron a las autoras, evidenciar el objeto de estudio: El manejo de los algoritmos de la multiplicación y la división.

Durante el proceso de elaboración de los instrumentos, se realizó una prueba piloto con niños de tercer grado del colegio Liceo Sandra Catalina (institución de carácter privado), ya que, debido a las dinámicas del sitio de práctica, los niños no pudieron hacer parte de este proceso.

El primer instrumento fue una prueba oral[3] por medio de la cual, se planteó a los niños, situaciones y ejercicios en los que se hacía necesario el uso de las operaciones representativas de la estructura multiplicativa. El resultado de esta prueba piloto, permitió optar por la prueba escrita, hasta lograr una definitiva y reconocer las dificultades, presentadas a las entrevistadoras, que se trataron de corregir en las entrevistas definitivas. Esta prueba piloto tuvo que ser reajustada en aras de que fuera más clara para los niños, las autoras modificaron la forma de presentar los ejercicios ya que la organización presentada en la prueba oral predisponía a los niños al uso del algoritmo canónico, también se hicieron modificaciones en el lenguaje utilizado para hacer más claras las situaciones problema. Sin embargo después de otra revisión se consideró pertinente rediseñar la prueba, los ajustes se realizaron en el lenguaje usado, en las cantidades y aumentando una situación problema.

Una vez ajustada la prueba, se aplicó el instrumento como examen diagnóstico a un grupo de 40 niños de 4° grado de la IED Nueva Constitución. A partir del análisis de las respuestas, se escogieron los casos que resultaron más interesantes por el particular uso o no de los algoritmos, con los cuales se procedió a establecer unas categorías de análisis, sobre las cuales se profundizó en entrevistas semi-estructuradas realizadas a algunos niños, sobre las respuestas dadas en las pruebas.

La entrevista semi-estructurada se utilizó como herramienta de confirmación de datos, la cual, según Corbetta (2007) se caracteriza principalmente por la flexibilidad que brinda al

[3] Ver anexo 2

entrevistador y al entrevistado de direccionar la conversación de acuerdo a lo que va surgiendo, permitiendo así profundizar en lo que genere inquietudes.

Esta monografía atravesó por tres fases:

7.1.1 Fase de toma de decisiones:

En la cual se estableció y delimitó la temática para definir un objeto de estudio más claro y específico. Se definió la modalidad de trabajo y se decidió hacer un ejercicio investigativo que se registrará en una monografía. Durante este proceso, se revisaron los antecedentes, la contextualización y se formularon la justificación y los objetivos. Se concretó la población con la cual se iba a trabajar y a partir de ello se creó un instrumento que permitiera observar el manejo que tienen los niños de los algoritmos de la multiplicación y la división; los instrumentos que se escogieron son pruebas escritas y entrevistas de carácter semi-estructurado. Para lograr unos instrumentos bien definidos, se decidió realizar una prueba piloto de los mismos y dadas ciertas dificultades en la IED Nueva Constitución se buscaron niños y niñas de otra institución, como se expresó antes.

A partir de esta experiencia, se decidió realizar una prueba general que permitiera evidenciar el uso del algoritmo hecho por los niños y una entrevista semiestructurada a algunos de ellos, con el fin de reafirmar, a través del diálogo, los procesos que siguieron en la prueba.

Se establecieron unos referentes conceptuales que permitieran ver qué es el algoritmo, cuáles son los existentes y cómo son empleados en el aula, lo cual constituyó el marco de referencia para realizar el análisis de los datos recogidos en este ejercicio y reforzar, como problema de contexto, que, a pesar de la existencia de tantas posibilidades, la escuela, limita el acercamiento a la estructura multiplicativa a un único algoritmo.

En un primer momento, se pretendía realizar la prueba piloto en la institución educativa Nueva Constitución, sin embargo, por motivos de organización del colegio se dificultó realizarla en este lugar por los tiempos y dinámicas manejadas; esto conllevó a que fuera necesario buscar otros niños para aplicar la prueba. Los niños que se escogieron para hacer el pilotaje pertenecen al Liceo Sandra Catalina, institución privada y en su momento estaban cursando grado tercero de primaria; por motivos de tiempo se realizó el pilotaje con cuatro niños a quienes se les formularon ejercicios y situaciones problémicas de manera verbal que debían resolver en lo posible sin usar lápiz y papel, pero estas condiciones no permitieron visibilizar lo que se quería, por tal razón las maestras en formación optaron por elaborarla de forma escrita.

7.1.2 **Fase de intervención:**

Se ejecutó una prueba piloto de la entrevista para evidenciar su claridad y estructuración, esta permitió visualizar los aspectos a mejorar, permitió reflexionar y hacer los cambios respectivos, los resultados de la prueba piloto se analizaron desde 4 miradas, las cuales fueron:

a. El instrumento (prueba oral)

1. Algunos de los problemas planteados no fueron claros, pues su estructura o su lenguaje complicaron la situación. Es el caso de los problemas 4 y 5[4].
2. En la parte de los ejercicios, no tuvo sentido plantear un mismo ejercicio dos veces así esté organizado de manera diferente, pues el niño no lo desarrolló debido a que ya lo había hecho anteriormente[5].

---

[4] Ver anexo 1

[5] Ver anexo 1

3. En las entrevistas no se hizo evidente el proceso que lleva el niño en la resolución de operaciones cuya disposición es diferente a la manejada comúnmente en la escuela.
4. El instrumento en su fase verbal, aunque reveló momentos en los que se hace uso del algoritmo, no permitió verlo concretamente pues al preguntarle a los niños, muchos no sabían explicarse, entonces no permitió a los niños verbalizar el algoritmo ni a las entrevistadoras visualizar su uso.

b. Los niños:

1. Los niños siempre estuvieron esperando que el adulto les confirmara o les negara sus respuestas por lo que condicionaron la entrevista a ello. Evidenciando falta de confianza en sus procesos.
2. Mostraron confusión y dificultad cuando se les leyeron los problemas y los ejercicios. Se debió al hecho de que los niños solo retuvieron la cifra y no el contexto de los problemas.

c. Las maestras en formación:

1. Se hizo uso recurrente de expresiones como “muy bien” cuando los niños terminaban los ejercicios, aunque los mismos no estuvieran bien realizados, impidiendo una real autocorrección a los niños.
2. En algunos momentos se trató de conducir el pensamiento y las respuestas de los niños a lo que, según la intención de la entrevista, se quería que se contestara.
3. Faltó trabajo en grupo y apoyo entre las maestras en formación al momento de realizar las entrevistas.

d. La forma de hacer la entrevista:

1. Se debió hacer una introducción a la entrevista.

2. No se supo presentar la entrevista adecuadamente, para que los niños no se sintieran intimidados.
3. Se presentó la entrevista como un juego y luego no se cumplió con esa falsa expectativa creada.
4. Las cifras planteadas en las entrevistas verbales representaron para los niños dificultades al momento de retenerlas debido a que no las veían.

Estas miradas permitieron realizar los ajustes pertinentes hasta obtener un instrumento más preciso y claro para los niños, el cual se dividió en dos partes: la primera fue un examen diagnóstico con problemas y ejercicios; y la segunda una entrevista semi-estructurada a los niños cuyas respuestas fueron más interesantes de acuerdo a determinados criterios de evaluación.

Se realizó la aplicación del instrumento[6] con 35 estudiantes de 401 de la Institución Educativa Distrital Nueva Constitución, el día jueves 3 de Abril de 2014. Se les presentó en forma de examen una hoja con situaciones y ejercicios que exigían para su realización hacer uso de las operaciones de la estructura multiplicativa. El tiempo estimado que duraron los niños realizando el examen fue de 45 minutos debido a las dinámicas de la institución.

9.1.3 **Fase de análisis:**

Se hizo una observación a las respuestas dadas por los niños en los exámenes, teniendo en cuenta los siguientes criterios: uso del algoritmo en las operaciones, manejo de las cantidades, manejo del valor posicional de las cifras y estrategias de resolución de problemas. Finalizada la revisión de las respuestas dadas por los niños se procedió a escoger los casos que

---

[6] Ver anexo 4

resultaban llamativos de acuerdo a los criterios mencionados, para hacerles la respectiva entrevista, utilizando como base el examen ya realizado, que permitió formular preguntas específicas para cada caso.

Para realizar el análisis de las entrevistas se definieron unas categorías emergentes de análisis.

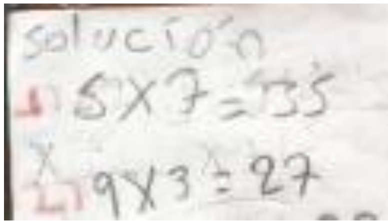
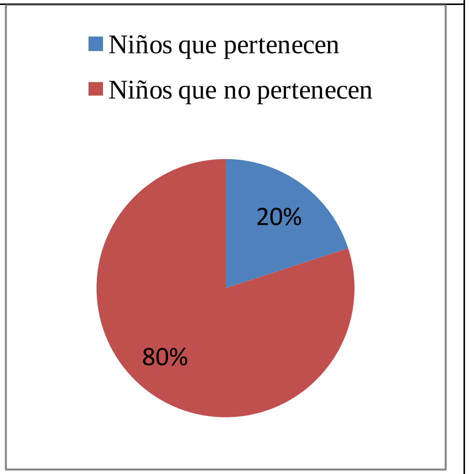
El siguiente cuadro presenta un resumen de las fases del proceso con los actores involucrados y los resultados obtenidos en cada una de ellas. Las actividades se muestran en relación a los objetivos específicos del proyecto:

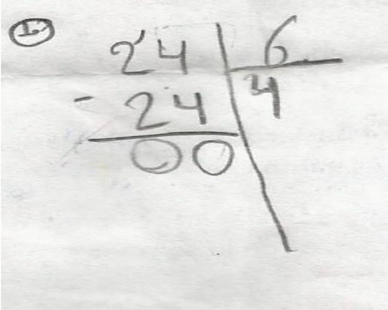
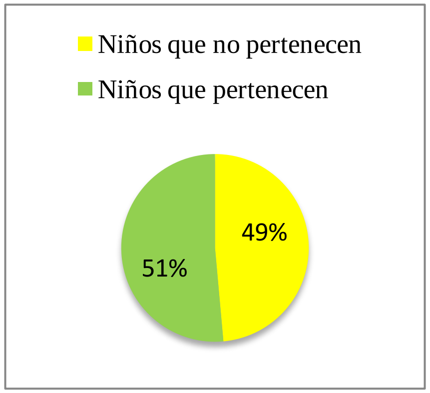
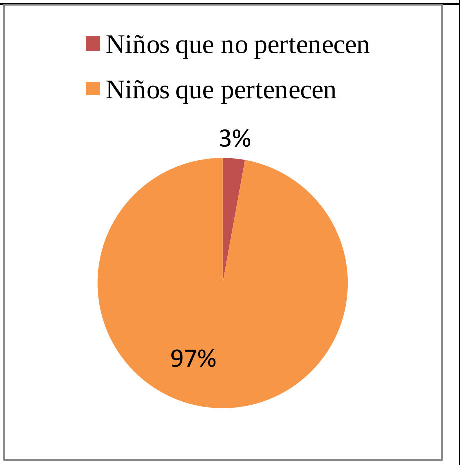
Fases	**Acciones o actividades**	**Involucrados**	**Resultados**
Fase 1, de toma de decisiones:	d) Revisión de antecedentes. e) Elaboración del instrumento de prueba piloto	Las autoras La tutora	Decisiones sobre tema, modalidad de trabajo, referente conceptual y población. Construcción de la justificación, objetivos y contextualización
Fase 2, de intervención	f) Pilotaje de la prueba piloto g) Ajuste de instrumentos h) Aplicación de instrumentos definitivos, teniendo en cuenta los objetivos específicos O1 y O2	3 niños de 3° del Liceo Sandra Catalina Autoras 35 niños de 4° grado de la IED Nueva Constitución	Prueba piloto Prueba y guión de entrevista definitivos Pruebas respondidas
Fase 3 de análisis	i) Revisión de respuestas buscando	Autoras	Respuestas seleccionadas por categoría

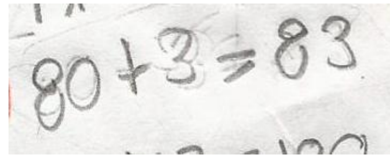
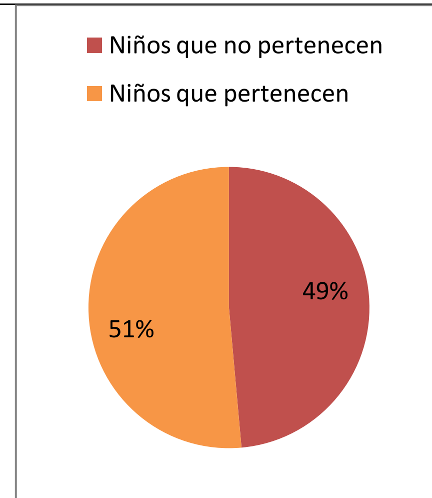
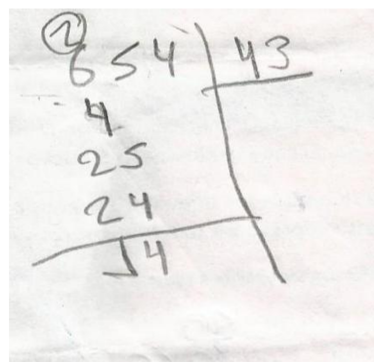
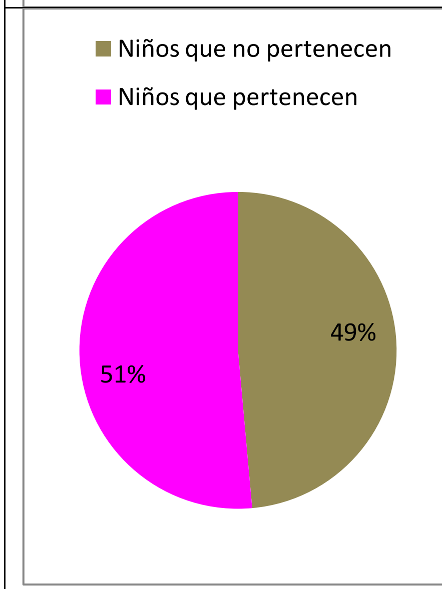
	evidenciar los O1 y O2 j) Preparación de las entrevistas delimitadas k) Realización de entrevistas tomando en cuenta los O1 y O2 l) Sistematización y categorización de análisis visualizando los O1 y O2	9 niños de 4° grado de la IED Nueva Constitución	

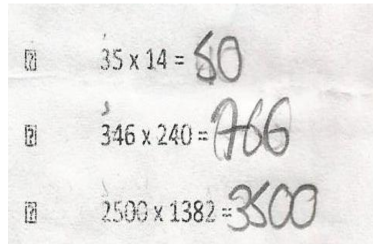
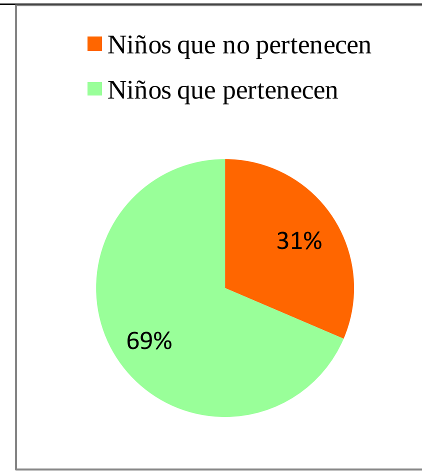
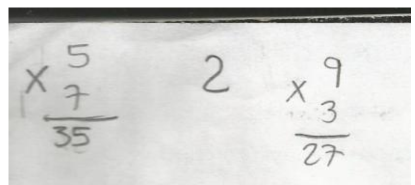
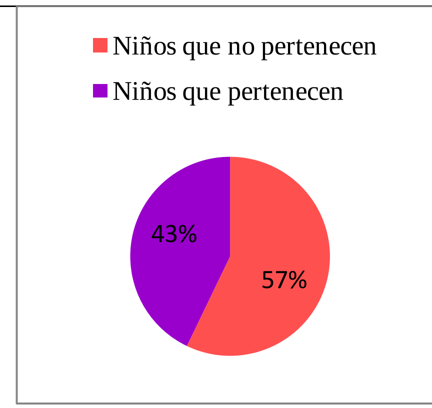
8. RESULTADOS Y ANÁLISIS

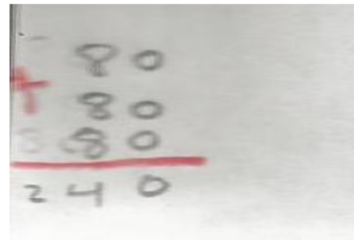
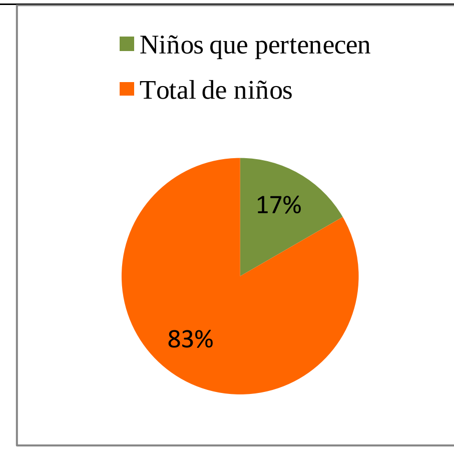
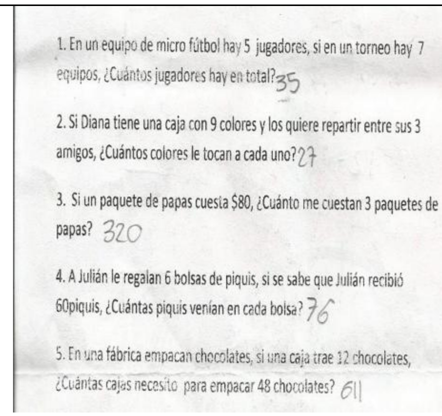
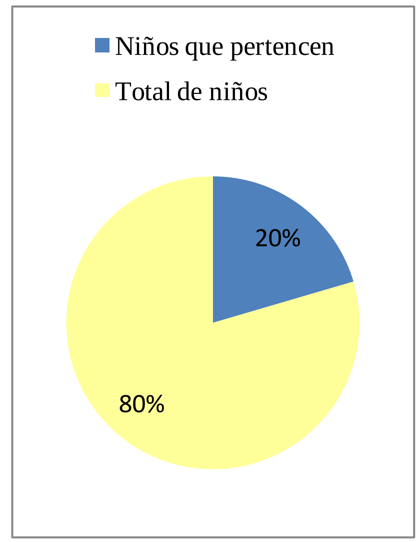
Con base en las respuestas que los niños dieron en las pruebas y en las entrevistas se realizó una categorización de la información, teniendo como eje central el algoritmo; este ejercicio arrojó las siguientes categorías:

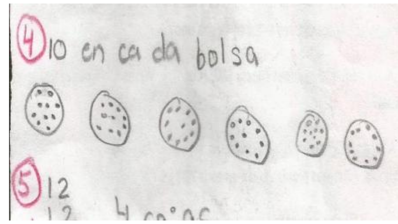
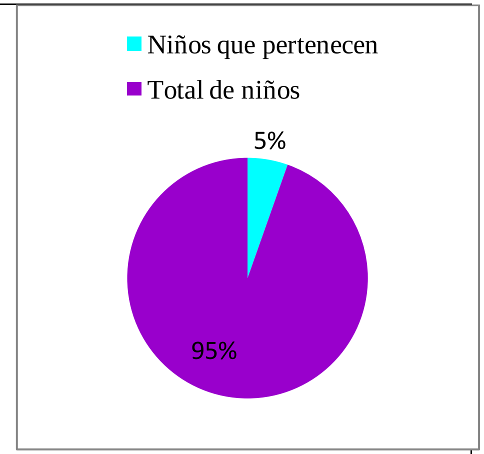
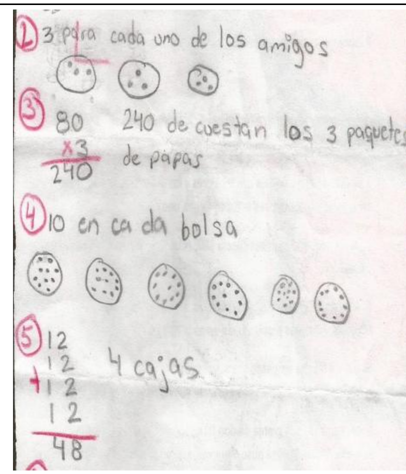
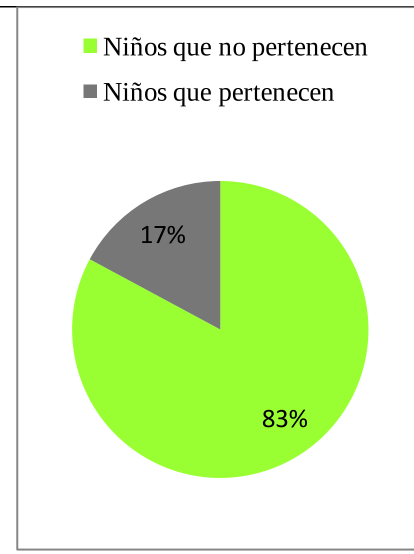
CATEGORÍA	NÚMERO DE NIÑOS EN LA PRUEBA	NIÑOS SELECCIONADOS EN LA ENTREVISTA	PORCENTAJE DE NIÑOS POR CATEGORÍA
1. Organización horizontal: Hace referencia a los casos en los cuales los niños y niñas ubicaron de manera horizontal las cifras para operarlas, independientemente de si su resultado queda bien o no.	7 de 35 lo hacen	 Niña 2, niño 4 y niño 7	

2. Ubicación vertical: Corresponde a los casos en los cuales los niños y niñas ubican las cifras de manera vertical y las operan, siguiendo paso a paso el algoritmo tradicional.	18 de 35 lo hacen	 Niño 1, niña 3, niño4, niña 5, niña 6, niño 8 y niña 9	
3. Operaciones incorrectas: En esta categoría van los casos en los cuales los niños y niñas no resolvieron correctamente las situaciones multiplicativas o los ejercicios.	34 de 35 lo hacen	Todos los niños	

<u>Subcategorías de la categoría 3:</u> **3.1 Confusión de la operación en la resolución de los problemas:** Abarcar todos los casos en los cuales los niños realizan sumas en vez de multiplicaciones.	18 de 35 lo hacen	Niño 1, niña 2 y niño 4 	
3.2 Mal manejo del valor posicional en la aplicación del algoritmo: Pertenecen a esta categoría los casos en los cuales los niños no trabajaron correctamente el valor posicional de los números que incluían el cero en sus cifras.	18 de 35 lo hacen	Niño 1, niña 2, niña 3, niño 8 y niña 9 	

3.3 Mezcla de algoritmos: En esta categoría se encuentran los casos en los cuales los niños usan algoritmos de diferentes operaciones (suma y multiplicación) simultáneamente.	24 de 35 lo hacen	Niña 3 y niño 4 	
4. Abuso del algoritmo: Estos son los casos en los cuales los niños usan el algoritmo en situaciones en las que este no es necesario (principalmente por el número de cifras operadas).	15 de 35 lo hacen	Niña 2, niña 3, niña 5, niña 6 y niño 7	

5. Suma reiterada: Se evidencia en los casos en los cuales los niños recurren a sumar muchas veces una misma cantidad para llegar a la respuesta.	7 de 35 lo hacen	 Niña 3, niña 5, niña 6 y niño 8	
6. Respuestas sin proceso: Enmarca los casos en los cuales los niños escribieron las respuestas sin mostrar el proceso.	9 de 35 lo hacen	 1. En un equipo de micro fútbol hay 5 jugadores, si en un torneo hay 7 equipos, ¿Cuántos jugadores hay en total? 35 2. Si Diana tiene una caja con 9 colores y los quiere repartir entre sus 3 amigos, ¿Cuántos colores le tocan a cada uno? 27 3. Si un paquete de papas cuesta $80, ¿Cuánto me cuestan 3 paquetes de papas? 320 4. A Julián le regalan 6 bolsas de piquis, si se sabe que Julián recibió 60piquis, ¿Cuántas piquis venían en cada bolsa? 76 5. En una fábrica empacan chocolates, si una caja trae 12 chocolates, ¿Cuántas cajas necesito para empacar 48 chocolates? 61 Niño 1, niña 5, niña 6, niño 7 y niña 9	

7. Uso de representaciones gráficas: Incluyen los casos en los cuales los niños usaron dibujos para hacer visibles las operaciones.	2 de 35 lo hacen	 Niña 5 y niña 6	
8. Uso del contexto: Evidencia los casos en los cuales los niños dan respuestas teniendo en cuenta el contexto que se plantea en la situación multiplicativa.	6 de 35 lo hacen	 Niña 5 y niña 6	

Lo expuesto en el cuadro de categorías revela que ninguno de los 35 niños terminó por completo su examen y que en la gran mayoría los procesos y las respuestas no fueron correctas. A partir del análisis general hecho a los exámenes y con base en las categorías planteadas, se decidió realizar las entrevistas a los siguientes niños y niñas, planteando una pregunta general la cuál fue: ¿Cómo resolviste estos ejercicios?, la cual dio paso a que los niños explicaran el uso del algoritmo.

DESCRIPCIÓN	ANÁLISIS
Niño 1: Respondió que el proceso no estaba ahí pues lo resolvió todo en otra hoja, sin embargo él se acuerda de todo. Tanto en los problemas de multiplicación como en los de división usó las tablas para encontrar la respuesta. En el último problema restó porque no sabía operar de manera multiplicativa números tan grandes. Organizó de manera vertical porque es más fácil de ver. Argumentó que si no se dejaba el espacio en blanco en la multiplicación la misma salía mal, aseveró que en ese espacio iba un cero. Dice que el número que siempre está a la derecha son las unidades, así estén en el lugar de las decenas.	Tal como lo afirma Mariela Orozco (S.F), en el marco de referencia, las tablas de multiplicar se usan como base para la adquisición de la estructura multiplicativa, esto se refleja en el niño 1 quien usa las tablas de multiplicar para encontrar las respuestas de las operaciones de la estructura multiplicativa. Se visualiza que los niños tienen como base de su trabajo las tablas de multiplicar, razón por la cual se limitan a ellas, especialmente cuando operan cifras grandes. El niño sabe que cuando multiplica por dos cifras debe dejar un espacio en blanco en el lugar de las unidades cuando está operando con las decenas del multiplicador, además

Dijo que de manera horizontal no sabía dividir.	es consciente que en este espacio va un cero; sin embargo no entiende el porqué de esta situación. Esto se puede deber a que el niño aún no comprende correctamente el valor posicional de las cifras debido a que no se le ha mostrado de manera transparente cómo funciona el mismo y por ende no ha comprendido el algoritmo.
Niña 2: No respondió a casi nada de lo que se le preguntó, en uno de los ejercicios dijo que "se multiplican las unidades por las unidades y las decenas por las decenas y así sucesivamente". Usa las tablas de multiplicar memorizadas como herramienta de resolución de las operaciones.	Hace uso de las tablas desde lo que Castro et al. 1995 llaman 'hechos memorizados', estos no necesariamente permiten la comprensión de las mismas, ya que lo que pretenden es simplificar el proceso. Tiene mala comprensión del valor posicional, del SND y por ende del algoritmo canónico de la multiplicación.
Niña 3: Se ubica más con las tablas de multiplicar, se las sabía de memoria y consideraba que todas las operaciones en matemáticas se resuelven con ellas. Realizó suma reiterada como otra opción para resolver que no sea usando las tablas de multiplicar. Al respecto	En este caso se puede evidenciar que la escuela impone la tabla de multiplicar como base para el trabajo de la estructura multiplicativa, ratificado por Orozco (S.f), dejando ver que la manera de enseñar la estructura multiplicativa no ha cambiado con respecto al momento en que las autoras

del ejercicio número uno planteado en el examen la niña 3 dijo: N 3: entonces… 5 por 4… aquí pues en esta multiplicación pues aquí pues 35 por 14 ¿verdad? Pues yo hice, como la profe más o menos entiendo hacía, pues 3 por 1 , 3 y 5 por 4, 20 entonces 320 Utiliza el algoritmo tradicional de la división porque si lo realiza de otra manera se confunde, lo realiza utilizando la tabla de multiplicar como herramienta.	lo trabajaron en la escuela. Hace uso de la suma reiterada como estrategia de resolución de problemas la cual, según Maza (1991), Chamorro (2003) y Castaño (1996), le permite a los niños sumar varias veces una misma cifra para llegar al resultado. De donde se puede inferir que no tiene un correcto manejo del valor posicional razón por la cual, quizás, no ha comprendido realmente el algoritmo.
Niño 4: Cuando veía problemas con pequeñas cantidades tendía a sumar o restar. Organiza de manera vertical porque la profesora le dijo que debía ser así para trabajar el valor posicional de los números y operarlos de acuerdo a su lugar. Trató de multiplicar horizontalmente teniendo en cuenta el valor posicional de las cifras, es decir multiplicó unidades por unidades, decenas por decenas etc. Y sumó lo que iba llevando.	Hace abuso del algoritmo ya que dispone de manera tradicional todas las operaciones multiplicativas, incluso cuando estas se podrían resolver con base en las tablas de multiplicar. Se puede evidenciar que el niño ha interiorizado el algoritmo canónico de manera tan rigurosa, que le cuesta trabajo experimentar otras formas de resolución de problemas, incluso cuando se cambia la organización. Cuando en los ejercicios se le cambió la organización mezcló los

35x14=50 Cinco por cuatro veinte dejó el cero y llevó el dos; una por tres, tres y dos cinco y eso le dio cincuenta. Comentó que si la división está organizada de manera horizontal es más difícil, lo mismo que si tiene muchas cifras.	algoritmos pues su manera de trabajar está limitada a la organización del algoritmo tradicional, por lo cual manejó incorrectamente el valor posicional con respecto al algoritmo tradicional y lo mezcló con el de la suma. Al respecto Kamii (1995) plantea que para el niño es nociva la enseñanza basada en el algoritmo porque limita su pensamiento a su uso.
Niña 5: Realizó suma reiterada 'para confirmar' las respuestas de las multiplicaciones en el examen. Dibujó las bolas con puntos porque considera que así es más fácil realizar las divisiones, lo que hace es que coloca bolas por el número de bolsas que tiene y va colocando dentro uno por uno, lo que se debe repartir, hasta terminar. Ella señala que el algoritmo de la multiplicación y la división se vio influenciado por las representaciones	Las respuestas de ella, muestran que aún no ha comprendido totalmente el algoritmo de la multiplicación, por lo que se devuelve al algoritmo de la adición para confirmar sus respuestas, denotando que aún no ha hecho la transición entre una operación y otra. Realiza lo que Castaño (1996 (a)) denomina representación realista, en la que dibuja la situación multiplicativa, contando uno a uno los elementos. Utiliza una estrategia diferente al algoritmo para la resolución de divisiones (representación gráfica).

gráficas que su padre le enseñó.	
Niña 6: Dibujó para saber cuántos colores le tocaban a cada niño, primero dibujó una pelotica con nueve puntitos y contó cuántos le tocaban a cada niño. Ella realizó aproximaciones sumando para saber cuántos colores debía dar a cada niña, y sumando encontró la respuesta. Realizó suma reiterada para comprobar que el resultado era el que ella pensaba; argumentó que organizó los ejercicios verticalmente pues la profesora le enseñó a resolverlos así en lo que ella denominó “tabla” ya que así es más fácil. Contestó que no colocó los procesos de las divisiones porque las hizo en otra hoja.	Realiza el procedimiento que Castaño (1996) denomina ensayo y error, el cual consiste en que el niño busca diferentes números que le sirvan para operar y encontrar la respuesta, lo cual le permitió hacer conjeturas para encontrar las respuestas. Paralelo a este proceso ella realizó sumas reiteradas que le permitieron comprobar que lo que había hecho anteriormente le servía, esto le permitió comprender de dónde van saliendo las respuestas. También se evidencia que realiza lo que Castaño (1996 (a)) llama representación realista.
Niño 7: Quien utilizaba la tabla de multiplicar para resolver algunas operaciones. Considera que el segundo problema también es una multiplicación, y que solo se deben sumar	De las respuestas obtenidas del niño 7 se puede deducir que él aún no ha adquirido el algoritmo de la multiplicación, tiene acercamientos a las tablas de multiplicar, pero aún no sabe cómo usarla.

las cifras que le dan. Busca en las tablas las repuestas para la resolución de las divisiones, en sus respuestas sabe cómo invertir las operaciones pero no logra determinar cómo y cuál es la respuesta.	Es evidente que no maneja el algoritmo de la división, pues cree que todas las respuestas provienen de las tablas.
Niño 8: A pesar de que la maestra en formación trato de hacer preguntas durante toda la entrevista, el niño se mostró muy tímido y no contestó toda la entrevista, o contestó diciendo porque ese es el resultado. Respondió que no le gustaba la organización horizontal porque los números en ella eran más largos, dijo que el 0 por el 0 era 0, y que por eso había escrito tantos ceros, además dijo que en la multiplicación se dejaba una casilla en blanco debido a que en ese espacio iba un cero. Finalmente le dijo a la maestra que las unidades eran todos los números que siempre se encuentran en el extremo derecho.	Centra su mirada en el uso del algoritmo tradicional, tanto que considera que no hay otras formas de organizar las cifras ni de operarlas, bajo el supuesto de que la organización aumenta o disminuye el número de cifras. No maneja el valor posicional, ni el SND, razón por la cual cree que todos los números que se escriben a la derecha son unidades, no conoce el valor posicional del cero, por lo que lo escribe, de manera indiscriminada, tanto ceros como considere sin ubicarlos en el contexto de la operación. Kamii (1995) permite identificar que la aplicación que el niño le hace al algoritmo usa de manera incorrecta el valor posicional, pues se trabaja bajo la idea de operar únicamente unidades impidiendo que

	el niño vea el valor real de las cifras, generando confusión en él.
Niña 9: Usó las tablas de multiplicar para intentar guiarse sin embargo dice que aún no se las ha aprendido. También uso algunas otras estrategias, como la resta reiterada. Organizó los números de manera vertical, porque así le enseñaron, además dijo que en las multiplicaciones por dos o más cifras se dejaba un espacio en blanco porque si no, no se podía operar.	Hace evidente que, en su proceso la enseñanza, la memorización de la tabla de multiplicar limita el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación y la división, pues se considera que si no se sabe la tabla de memoria no puede operar. Esto reduce la apropiación de las operaciones a la memorización de las tablas lo cual, según Orozco (S.f) se vuelve un contenido fundamental en la enseñanza de las matemáticas en la primaria. Utiliza lo que Chamorro (2003) denomina sustracciones repetidas del divisor al dividendo, como estrategia para la resolución de problemas y ejercicios de división, en las cuales resta el valor del divisor al dividendo hasta que no pueda restar más. Una vez más se hace evidente que el proceso de enseñanza del algoritmo no es transparente, lo cual hace que el niño no

	sepa lo que está multiplicando, causando una mala comprensión del valor posicional.

9. CONCLUSIONES

Con base en el análisis realizado anteriormente, las autoras lograron concluir que:

- Es necesario llevar a los niños a la confrontación de sus respuestas a través de preguntas que les permitan entender de dónde provienen y que le permitan verificar al maestro si existe o no una comprensión del algoritmo.
- Se puede inferir que a pesar de que en la Institución se usa el algoritmo canónico para la enseñanza de la multiplicación y la división, existen algunos niños que han desarrollado sus propias estrategias para la comprensión de estas operaciones.
- Se puede evidenciar que muchos de los niños aún no han realizado la transición de operaciones aditivas a multiplicativas, lo cual se vio reflejado en los niños que realizaban suma reiterada para dar respuesta a situaciones multiplicativas.
- Se puede concluir que los niños entrevistados no han logrado la comprensión del algoritmo canónico de la división, lo cual se puede ver influenciado por el hecho de que es una operación que debe resolverse de derecha a izquierda, que involucra otras operaciones y que no saben las funciones de los números.
- Es clave hacer visible la importancia de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición durante los procesos de multiplicación y división, porque le permite al niño hacer descomposiciones de cifras a números más sencillos de operar.
- Las autoras pudieron verificar que no existe una comprensión total del algoritmo canónico de la multiplicación y la división, teniendo en cuenta que *comprender* no significa solamente aplicar los pasos, sino entender por qué se aplican.

- Se puede evidenciar que algunos niños no comprenden el algoritmo canónico y además no usan otros algoritmos.
- Es importante no desconocer los factores (familia, amigos) externos a la escuela que pueden influir y determinar el aprendizaje de los procesos de multiplicación y división, tales como ideas previas, experiencias en el área, la actitud y opinión de padres, ya que estos pueden determinar positiva o negativamente el aprendizaje.

10. RECOMENDACIONES

Las siguientes recomendaciones son elaboradas por las autoras, de manera respetuosa, en torno a los objetivos específicos planteados anteriormente, en aras de enriquecer el proceso de enseñanza de la multiplicación y la división y de sus algoritmos, en la IED Nueva Constitución:

- Este trabajo deja en evidencia la existencia de otros algoritmos diferentes al canónico. Las autoras consideran que sería muy útil para los niños conocerlos y tener la oportunidad de acercarse a ellos.
- Se debe permitir a los niños operar los números incluso cuando no estén organizados de manera vertical. Promoviendo la exploración de otras maneras que les permitan desarrollar sus propias estrategias.
- Las autoras recomiendan enseñar la tabla de multiplicar y los algoritmos cómo últimos recursos en la adquisición de la multiplicación y la división. Además sugieren que el trabajo con estos recursos no sea desde la memorización y repetición mecánica, sino desde una construcción consiente que permita a los niños entender su lógica y su manejo.
- Es importante plantear a los niños situaciones multiplicativas que tengan un contexto real y significativo para que ellos sepan en qué momento debe ser usada una operación o la otra.

11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Libros

Castaño, J. (1996) (a). *La construcción del pensamiento multiplicativo simple.* Hojas Pedagógicas. Colecciones Matemáticas. Serie Lo numérico N°3.

Castaño, J. (1996) (b). *Pensamiento multiplicativo Compuesto.* Hojas Pedagógicas. Colecciones Matemáticas. Serie Lo numérico N°4.

Castro E., Rico, L. & Castro, E. (1999). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.*. Universidad de Los Andes

Corbetta, P. (2007). Metodología y técnicas de investigación social. España: Mc Graw-Hill.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* Madrid: España. Editorial Pearson, Prentice Hall.

Kamii, C. (1995). *El niño reinventa la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget Madrid: Visor*

Luque C., Mora L. & Páez J. (2002). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Contar e inducir.* Universidad Pedagógica Nacional

Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas*. Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares- Matemáticas.* Bogotá, Colombia .

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Modelo Educativo Escuela Nueva. Cartilla de 3° grado*. Matemáticas primera cartilla.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Modelo Educativo Escuela Nueva*. *Cartilla de 3° grado.* Matemáticas segunda cartilla.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Modelo Educativo Escuela Nueva*. *Cartilla de 4° grado*. Matemáticas primera cartilla.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Modelo Educativo Escuela Nueva*. *Cartilla de 5° grado*. Matemáticas segunda cartilla.

Muñoz J. (2002) *Introducción a la teoría de conjuntos.* Universidad Nacional de Colombia

Orozco, M. (s.f). *La estructura multiplicativa*. Universidad del Valle. Recuperado el 16 de mayo de 2012 en, http://objetos.univalle.edu.co/files/La_estructura_multiplicativa.pdf

Pérez, G. (1994) *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. II. Técnicas y análisis de datos.* Madrid. La Muralla, S.A

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México. Trillas, Cap.11, 1° edición

Libros, documentos y/o artículos electrónicos

Colegio Nueva Constitución. (s.f). *Malla curricular ciclo 1*. Recuperado el 6 de febrero de 2014 en, http://www.colegionuevaconstitucion.edu.co/index.php?option=com_wrapper&view=wrapper&Itemid=278

Definición de problemas matemáticos. (s.f). Recuperado el 26 de Agosto de 2014 en, http://definicion.de/problemas-matematicos/#ixzz3BW1tSewM

Ley 115 de 1994. Ley General de Educación. Recuperado el 19 de Septiembre 2013 en, http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=292.

Secretaría de Educación Distrital. *Reorganización curricular por ciclos. Referentes conceptuales y metodológicos*. Recuperado el 23 de Septiembre de 2013 en, http://www.redacademica.edu.co/archivos/redacademica/colegios/politicas_educativas/ciclos/Cartilla_Reorganizacion_Curricular%20por_ciclos_2da_Edicion.pdf

Secretaría de Educación. (1999). *Solución de problemas con estructuras aditivas y multiplicativas: Proyecto de Evaluación Competencias Básicas*. Serie Guías. Santafé de Bogotá: Alcaldía Mayor.

Vargas, R. (s.f). *Efectividad personal, y organizacional e inteligencia emocional*. Recuperado el 25 de Agosto de 2014 en, www.rrhhmagazine.com/articulo/psico8.htm

Documentos no publicados

Cárdenas, C. (Junio 6 del 2013). Informe Analítico. *Enseñanza de la Estructura Multiplicativa en la escuela.*

Hernández, K. & Parra, C. (2013). *El algoritmo en la estructura aditiva en las IED Gustavo Morales Morales y Fe y Alegría San Ignacio*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Salamanca, A. (Junio del 2012). Informe. *La Estructura Multiplicativa*.

12. ANEXOS

ANEXO 1:

Primer diseño de prueba piloto:

ENTREVISTA N° ____

Responde las siguientes preguntas de acuerdo a tu conocimiento:

1. En un equipo de micro fútbol hay cinco jugadores, si en un torneo hay siete equipos, ¿Cuántos jugadores hay en total?

2. Si Diana tiene una caja con nueve colores y los quiere repartir entre sus tres amigos, ¿Cuántos colores le tocan a cada uno?

3. Si un paquete de papas cuesta $80, ¿Cuánto me cuestan tres paquetes de papas?

4. A Julián le regalan seis bolsas de piquis, si se sabe que Julián recibió sesenta piquis, ¿Cuántas piquis venían en cada bolsa?

5. En una fábrica empacan chocolates, si una caja trae seis chocolates, ¿Cuántas cajas necesito para empacar 54 chocolates?

6. Las gallinas de una granja pusieron 675 huevos en una semana. Si cada gallina puso 5 huevos, ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Realiza los siguientes ejercicios:

- 35 x 3 =
- 346 x 24 =
- 2500 x 132 =
- 24 ÷ 6 =
- 654 ÷ 43 =
- 2378 ÷ 362 =

ANEXO 2:

PRUEBA PILOTO USADA:

ENTREVISTA N° ____

Responde las siguientes preguntas de acuerdo a tu conocimiento:

1. Un equipo de micro fútbol tiene cinco jugadores, si en un torneo hay siete equipos, ¿Cuántos jugadores hay en total?

2. Si Diana tiene una caja con nueve colores y los quiere repartir entre tres niños, ¿Cuántos colores le tocan a cada niño?

3. Si 1 paquete de papas cuesta $80, ¿Cuánto me cuestan 3 paquetes de papas?

4. A Julián le regalan 6 bolsas de piquis, si se sabe que Julián recibió 60 piquis en total, ¿Cuántas piquis venían en cada bolsa?

5. En una fábrica empacan chocolates, si se sabe que una caja de chocolates trae 6 unidades, ¿Cuántas cajas necesito para empacar 54 unidades?

6. Las gallinas de una granja pusieron 675 huevos en una semana. Si cada gallina puso 5 huevos, ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Realiza los siguientes ejercicios:

35	346	2500
X3	x24	x132
____________	___________	____________

- 35 x 3 =
- 346 x 24 =
- 2500 x 132 =
- 24|_6______
- 654|__43_____
- 2378|_362______
- 24 ÷ 6 =

- 654 ÷ 43 =

2378 ÷ 362 =

ANEXO 3:

Primer diseño prueba escrita diagnóstica:

1. En un equipo de micro fútbol hay cinco jugadores, si en un torneo hay siete equipos, ¿Cuántos jugadores hay en total?
2. Si Diana tiene una caja con nueve colores y los quiere repartir entre sus tres amigos, ¿Cuántos colores le tocan a cada uno?
3. Si un paquete de papas cuesta $80, ¿Cuánto me cuestan tres paquetes de papas?
4. A Julián le regalan seis bolsas de piquis, si se sabe que Julián recibió sesenta piquis, ¿Cuántas piquis venían en cada bolsa?
5. En una fábrica empacan chocolates, si una caja trae seis chocolates, ¿Cuántas cajas necesito para empacar 54 chocolates?
6. Las gallinas de una granja pusieron 675 huevos en una semana. Si cada gallina puso huevos, ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Realiza los siguientes ejercicios:

- 35 x 3 =
- 346 x 24 =
- 2500 x 132 =
- 24 ÷ 6 =
- 654 ÷ 43 =
- 2378 ÷ 362 =

ANEXO 4:

Segundo re diseño prueba escrita (Prueba implementada, usada como base para la entrevista)

ENTREVISTA N° ____

Responde las siguientes preguntas de acuerdo a tu conocimiento:

1. En un equipo de micro fútbol hay 5 jugadores, si en un torneo hay 7 equipos, ¿Cuántos jugadores hay en total?
2. Si Diana tiene una caja con 9 colores y los quiere repartir entre sus 3 amigos, ¿Cuántos colores le tocan a cada uno?
3. Si un paquete de papas cuesta $80, ¿Cuánto me cuestan 3 paquetes de papas?
4. A Julián le regalan 6 bolsas de piquis, si se sabe que Julián recibió 60 piquis, ¿Cuántas piquis venían en cada bolsa?
5. En una fábrica empacan chocolates, si una caja trae 12 chocolates, ¿Cuántas cajas necesito para empacar 48 chocolates?
6. Las gallinas de la granja de don Daniel pusieron 675 huevos en una semana. Si cada gallina puso 5 huevos, ¿Cuántas gallinas hay en la granja?
7. Si cada uno de los huevos de la granja de don Daniel se vende en $235 ¿cuánto cuestan los 675 huevos recolectados en la semana?

Realiza los siguientes ejercicios:

- 35 x 14 =
- 346 x 240 =
- 2500 x 1382 =
- 24 ÷ 6 =
- 654 ÷ 43 =
- 2378 ÷ 362 =