RESUMEN ANALITICO DE ESTUDIO -R.A.E.-

TITULO: Isoperímetria: Relación Geométrica entre perímetro y área.

AUTORES: DIAZ Lesmes Magaly.

TIPO DE DOCUMENTO: Tesis de Pregrado.

PUBLICACION: Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional. 2006

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Programa de Licenciatura en Matemáticas.

PALABRAS CLAVES: Isoperímetria, lúnula, cuadratura, perímetro, área, polígono, circunferencia, círculo.

.

DESCRIPCIÓN: en este trabajo se presentan los resultados obtenidos a las preguntas planteadas en el anteproyecto y se realizó el estudio de diferentes documentos relacionados con el tema, haciendo uso de los conocimientos adquiridos en la línea de geometría brindada por la universidad en mi formación.

FUENTES: Se obtuvo información de 18 fuentes entre éstas, y el punto de partida, los artículos del grupo construir las matemáticas, de la revista Suma; libros de geometría que se encuentran referenciados en la bibliografía.

CONTENIDOS: El trabajo en general se encuentra dividido en cinco partes a saber, introducción, justificación, objetivo (general y específico), marco conceptual, y conclusiones

El marco conceptual está dividido en tres partes que son: conceptos preliminares para el desarrollo del trabajo, antecedentes históricos de la isoperímetria, donde se encuentran las demostraciones de las proposiciones planteadas por diferentes matemáticos griegos y por último procedimientos geométricos mediante los cuales se logran construir figuras equivalentes con regla y compás.

METODOLOGÍA: Se inicio con revisión bibliográfica, identificando que la mayoría de los aportes se encontraban en los libros de Historia de la Matemática, posteriormente se seleccionaron los matemáticos que más se relacionaban con el tema para realizar el análisis de sus aportes, en este punto fue necesario replantear e idear algunas de las demostraciones respectivas a las proposiciones, finalmente se realizaron exploraciones en Cabri y con regla y compás, que permitieron conjeturar y obtener procedimientos geométricos mediante los cuales se construyen polígonos equivalentes, centrándonos en la cuadratura de algunos.

CONCLUSIONES: Principalmente aumenté mis conocimientos respecto al campo de la geometría e informática con el manejo de Cabri Geometre, también es evidente lo que se desconoce respecto al área y perímetro de figuras planas por algunos de los estudiantes de pregrado, limitándose a la explicación o imposición de una fórmula ignorando los procedimientos geométricos.

ISOPERIMETRÍA: RELACIÓN GEOMÉTRICA ENTRE PERÍMETRO Y ÁREA

MAGALY DIAZ LESMES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2006

ISOPERIMETRÍA: RELACIÓN GEOMÉTRICA

ENTRE

PERÍMETRO Y ÁREA

MAGALY DIAZ LESMES

Tesis

Asesor: Lyda Constanza Mora Mendieta

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLÓGIA.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2006

Nota de aceptación.

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá; Noviembre 2006

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En este trabajo damos a conocer los resultados obtenidos respecto a algunas preguntas que nos planteamos en torno a la isoperímetria desde el punto de vista geométrico; estas son:

- ☑ Entre los cuadriláteros con igual perímetro ¿cuál tiene área máxima?
- ☑ Entre los n-ágonos con igual perímetro ¿cuál tiene área máxima?
- ☑ ¿Es posible con regla y compás construir un triángulo con área igual a otro dado, pero no congruente a él?
- ☑ ¿Es posible construir un cuadrilátero con igual área a un triángulo cualquiera?
- ☑ ¿Es posible construir un cuadrado de igual área a un rectángulo dado?
- ☑ Dado un perímetro *P* fijo ¿cuál es el polígono regular de mayor área que se puede construir?

Inicialmente presentaremos algunos conceptos que consideramos básicos para el desarrollo del tema en cuestión; en el capítulo dos, trabajamos los referentes históricos en los que hay que destacar que la mayoría de los trabajos realizados por diferentes matemáticos se encuentran perdidos, por tal motivo se hizo necesario replantear las demostraciones en términos modernos e idear otras; de igual manera respondimos a algunas de las preguntas y las demás, fueron desarrolladas en la última parte, donde construimos figuras equivalentes a otras , mediante procedimientos geométricos.

JUSTIFICACIÓN

El área y el perímetro son temas que se encuentran incluidos en el currículo escolar colombiano, en los Estándares Nacionales, en los Lineamientos Curriculares y en los Estándares Norteamericanos (NCTM); sin embargo, desde nuestra vivencia como estudiantes y practicantes hemos encontrado que el tratamiento de estos tópicos se centra en remplazar valores en un fórmula dada, sin hacerse un acercamiento intuitivo a dichos temas que permita realizar exploraciones, conjeturas, planteamientos de argumentos, etc., alrededor de tales conceptos y sus relaciones. Consideramos que el estudio sobre estos temas es pertinente porque, por una parte, profundizamos sobre ellos, los resultados derivados de el pueden constituirse en aportes para la enseñanza de las matemáticas en nuestra futura labor profesional y puede establecerse como una base para el planteamiento de propuestas didácticas en la secundaria o en los primeros cursos de Geometría en la formación de profesores de matemáticas.

Pretendemos estudiar la isoperimetría, alrededor de la relación entre perímetro y área de algunos polígonos regulares, desde la Geometría, de manera que se logren establecer ciertos teoremas alrededor de las exploraciones realizadas con base en algunas preguntas propuestas en los artículos del grupo “Construir las matemáticas” , las cuales se citaron en la introducción.

OBJETIVOS

GENERAL

- ☑ Plantear algunos teoremas acerca de la relación entre perímetro y área de diferentes polígonos.

ESPECÍFICOS

- ☑ Identificar relaciones geométricas entre figuras planas, que permitan relacionar áreas y perímetros.
- ☑ Demostrar las conjeturas establecidas en el desarrollo del trabajo.
- ☑ Aplicar algunos de los conocimientos geométricos aprendidos durante la licenciatura en la formulación y demostración de teoremas relacionados con la isoperímetria.

I. PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos los conceptos que consideramos básicos en el estudio de la isoperimetría éstos son el perímetro y área de figuras planas.

1. El concepto de perímetro

Para definir perímetro es necesaria una definición previa:

Punto frontera*: Se dice que F es un punto de frontera de la región R, si cualquier disco circular de centro F contiene puntos de R y puntos que no son de R.*

Veamos los siguientes ejemplos:

a. *F* es un punto frontera de R; figura (1).

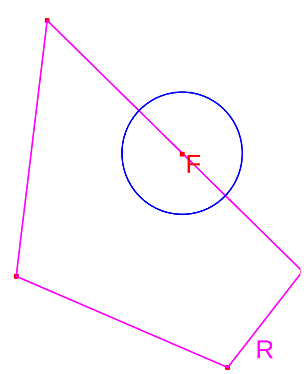

Figura **(**1)

b. *F'* no es un punto frontera de *R'* porque existe al menos un disco con centro en *F* no contiene puntos de *R'*, *F''* tampoco lo es porque existe al menos un disco con centro en *F''* que no contiene puntos de *R'*, figura (2)

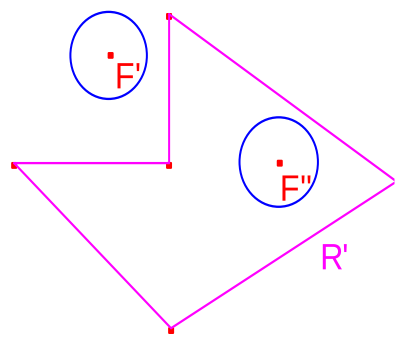

Figura (2)

Atendiendo a esto:

Se llama perímetro de una región plana a la longitud de su frontera.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores afirmamos que el perímetro corresponde a la longitud de la frontera de la región plana que es diferente al atributo de medida en el que le asignamos un número real positivo, partiendo de esto podemos decir que: En un polígono regular cualquiera de *n* lados y cada uno de ellos de una longitud *t*, la medida de su perímetro es igual a *nt*. Un problema interesante relacionado con esta noción es el siguiente; si se conoce la medida del perímetro de un polígono regular de *n* lados inscrito en una circunferencia, se puede determinar la medida del lado del polígono regular cuyo número de lados sea el doble del anterior y se halle inscrito en la misma circunferencia; iniciemos realizando una construcción:

Construcción:

Dado un polígono regular inscrito en una circunferencia, se trazan los rayos bisectores de los ángulos centrales opuestos a los lados del polígono original; el punto en que cada rayo corta a la circunferencia, es un vértice del polígono de 2*n* lados, un ejemplo se muestra en figura (3), en ésta, el segmento AD es un lado del polígono regular de *n* lados. Si CH es la mediatriz del $\overline{AD}$ que corta a la circunferencia en los puntos B y F entonces $\overline{AB}$ es un lado del polígono regular de 2*n* lados.

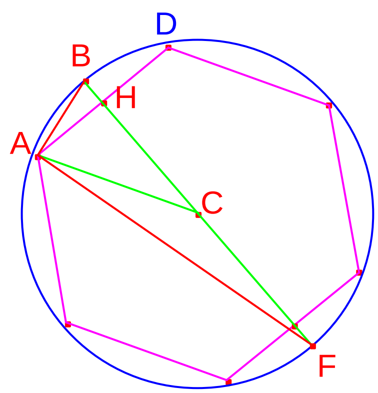

Figura (3)

Demostración:

Afirmación	***Razón***
1. AD = *t*	Dado.
2. $\overline{CH}$ mediatriz $\overline{AD}$	Dado.
3. CA = CB = *r*	Radios de la misma circunferencia.
4. AB = *x*	Supuesto.
5. ∠ BAF es recto	Colorario: Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es recto.
6. $\overline{AH}$ es una altura del Δ HAC	Definición de mediatriz (2).
7. Δ FBA es rectángulo	Definición triángulo rectángulo (5).

8. Δ ABH ~ Δ FBA	Teorema: En un triángulo rectángulo cualquiera, la altura correspondiente divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre sí y semejantes también al triángulo original. (6, 7).
9. $\dfrac{AB}{FB} = \dfrac{BH}{BA}$	Definición de triángulos semejantes (8).
10. C está entre $\overline{BF}$ H está entre $\overline{CB}$	Construcción.
11. BF = BC + CF CB = CH + HB	Definición punto entre (10).
12. BH = CB – CH	Álgebra (11)
13. $\dfrac{x}{2r} = \dfrac{BH}{x}$	Sustitución (4, 3, 9, 11)
14. BH = r – CH	Sustitución 3 en 12.
15. $\dfrac{x}{2r} = \dfrac{r - CH}{x}$ $x^2 = 2r(r - CH)$	Sustitución de 14 en 13.
16. $(CH)^2 = r^2 - \left(\dfrac{t}{2}\right)^2$	Teorema de Pitágoras. (1,3, 6).
17. $x^2 = 2r^2 - 2rCH$	Álgebra (15).
18. $x^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \dfrac{t^2}{4})}$ $x^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - t^2}$ $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - t^2}}$	Sustitución de 16 en 17.

1.2 El concepto de área.

Así como en el concepto de perímetro se hace la diferencia entre la longitud y la medida asignada a ésta, lo mismo ocurre en el caso del área de un polígono ya que se distinguirá entre el atributo o propiedad de los objetos considerados y la medida correspondiente, que es un número real no negativo.

Para llegar al concepto de área de una figura plana debemos partir de un conjunto de objetos a los cuales podamos atribuirles esta propiedad, luego de tener definido nuestro conjunto, el paso a seguir es definir una relación de equivalencia que conlleve en él una partición; donde las clases de equivalencia de esta partición estarán constituidas por todas las regiones de la misma área.

Sea J una región dada, el área de J se puede identificar como el conjunto de todas las regiones que son equivalentes con J, para llegar a la relación de equivalencia buscada tomaremos como punto de partida la siguiente afirmación: *"si dos regiones son congruentes, entonces son de la misma área"*[2]. Si dos regiones las podemos descomponer en sub-regiones respectivamente congruentes, no necesariamente dispuestas en el mismo orden, entonces podemos concluir que son de la misma área, por ejemplo:

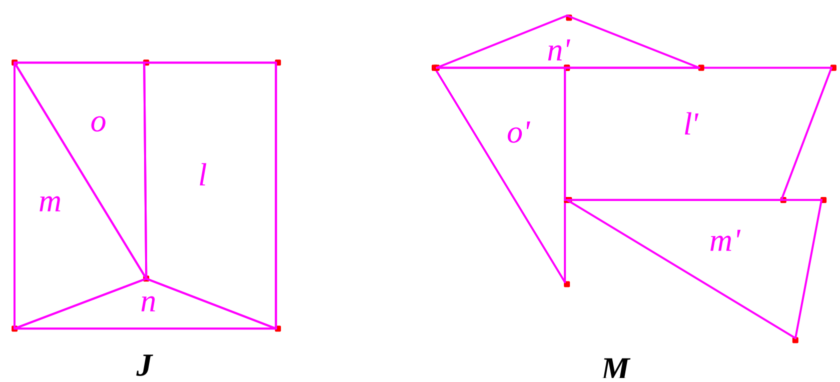

Figura (4)

Las sub-regiones que se encuentran denotadas con la misma letra son congruentes, por lo dicho anteriormente podemos establecer la relación de equivalencia respecto a la congruencia denominando a las regiones como ***equidescomponibles***; sin embargo, debemos tener en cuenta que al descomponerlas, éstas no deben tener puntos en común distintos a los puntos frontera, llegando así a la siguiente definición:

> *"Las regiones J, M son equidescomponibles, si y sólo si cada una de ellas se puede descomponer en el mismo número de sub-regiones, respectivamente congruentes y tales que dos a dos solamente pueden tener en común puntos frontera."*[2]

A partir de esta definición, enunciamos el siguiente teorema:

> *La relación de equidescomponabilidad entre regiones planas es de equivalencia*

Que se demuestra probando cada una de las siguiientes propiedades:

- ☑ ***Reflexiva:*** Las regiones *M* y *M* son equidescomponibles, pues debido a que la relación de congruencia es reflexiva, la región *M* es congruente con ella misma; luego, si descomponemos cada región en una sola subregión (ella misma), se cumple la propiedad reflexiva en la relación definida.

- ☑ ***Simétrica:*** Si las regiones *J* y *M* son equidescomponibles entonces las regiones *J* y *M*, también lo son, esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición.

- ☑ ***Transitiva*** Si las regiones *J* y *M* son equidescomponibles y las regiones *M* y *T* son equidescomponibles entonces *J* y *T* son equidescomponibles, esto por la transitividad de la congruencia entre las sub-regiones que componen cada región.

De esta manera hemos comprobado que la relación de equidescomponabilidad es una equivalencia, a partir de las anteriores definiciones tenemos que:

"Las clases de equivalencia de la partición inducida por la equidescomponabilidad, en el conjunto de las regiones planas se llaman áreas." [2]

II. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA ISOPERÍMETRIA

"El conocimiento de la historia de la matemática proporciona una comprensión más profunda de los conceptos y de los métodos matemáticos al desvelar sus orígenes, su evolución y sus relaciones, al mismo tiempo ofrece una visión encarnada de los mismos, ya que pone de manifiesto los rostros y las vidas de quienes fueron sus constructores"[15]

Inicialmente consideraremos la siguiente definición:

La palabra isoperímetria combina tres raíces griegas: iso *"igual"*, peri *"alrededor de"*, y metria *"medida"*, así que, de manera general, la isoperímetria trata del estudio de la relación entre perímetro y área de figuras planas o de superficies tridimensionales; en particular, el problema isoperimétrico enuncia la equivalencia entre las dos proposiciones siguientes: *"Entre las figuras planas con igual perímetro, el círculo tiene mayor área", "Entre las figuras planas con igual área, el círculo es el que tiene menor perímetro"* [10]

La isoperímetria nace durante la búsqueda de soluciones a la cuadratura del círculo, uno de los tres problemas clásicos de la geometría; éste es uno de los problemas que más ha trascendido en la historia, junto con su trascendencia se ha destacado el trabajo de diferentes matemáticos, que han tratado la isoperímetria; en este capítulo citaremos algunos de sus aportes en relación con el tópico que estudiamos.

La isoperímetria se encuentra involucrada en otras materias o ciencias entre ellas encontramos la música, la arquitectura, la historia e inmersa en la naturaleza, por ejemplo; en la arquitectura, los modernistas utilizaban circunferencias en sus construcciones, respondiendo a la pregunta ¿cómo conseguir mayor iluminación en los ventanales para un tamaño dado?, llegando así al estilo circular, el como de este resultado aún es desconocido, una hipótesis que podemos plantear es que a través de la observación de la naturaleza descubrieron que una gota de aceite en un vaso de agua, o la forma que toman las hondas en un lago son circulares, como ejemplo de esto podemos citar a Gaudí uno de los principales arquitectos de esta época, y quien hace uso de las circunferencias en sus construcciones; en la figura (5) podemos ver como hace uso de estas para el paso de la luz dando así iluminación al *Parabolide de la revolución de Palau.*

Figura (5) [Parabolide de la revolución de Palau]

Al igual que en estas ciencias la isoperímetria se desarrollo en diferentes entornos culturales, con el trabajo de importantes matemáticos los cuales conoceremos a continuación.

2.1 Aportes griegos

Dentro de los matemáticos griegos, hubo muchos que se ocuparon del problema isoperimétrico, aunque los más destacados han sido Arquímedes y Zenodoro de quienes encontramos la siguiente afirmación:

"Se ha demostrado, no solamente por Aristóteles, sino por Arquímedes y Zenodoro, que, entre las figuras isoperimétricas, la mayor es, entre las planas, el círculo y, entre los sólidos la esfera" [10]

De igual manera existen otros que han aportado; entre ellos:

- ☑ *Hipócrates*
- ☑ *Herón de Alejandría*
- ☑ *Pappus de Alejandría*

Trataremos aquellos matemáticos que desde nuestra revisión, hicieron contribuciones más relevantes.

2.1.1 Hipócrates de Chios

Hipócrates, hacia el año 430 a.C abandonó su patria para trasladarse a Atenas en condición de mercader, como consecuencia de una crisis económica se dedicó al estudio de la geometría, cosechando grandes éxitos. Proclo cuenta que Hipócrates escribió unos "*Elementos de Geometría*", anticipándose en más de un siglo a los conocidos *Elementos de Euclides*; sin embargo, el texto de Hipócrates se perdió. Hipócrates no resolvió el problema de la cuadratura del círculo, pero sí resolvió otros relacionados con él al trabajar con la cuadratura de lúnulas.

Hipócrates definió una lúnula como una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos; figura (6).

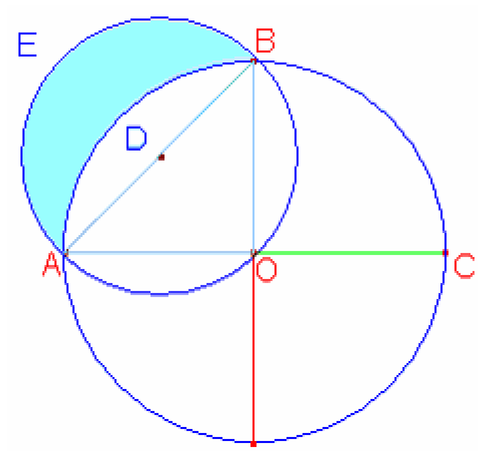

Figura (6)

y citó el siguiente teorema, según dice Eudemo:

1. "Segmentos semejantes del círculo[1] están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus diámetros"

Teorema que usó para hacer la cuadratura de las lúnulas y que al parecer fue demostrado a partir de la demostración de otro teorema similar que se enuncia:

"Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros"

Éste corresponde a la proposición 2 del libro XII de los Elementos de Euclides.

Vamos a citar una demostración de este teorema, a la manera moderna[2], similar a la demostración del teorema 1. Sean dos círculos *HIJK* (*C*) y *LMNO* (*C')* de diámetros *HI (d)* y *LM (d')***,** como se muestra en la figura (7) y afirmamos que "*el círculo HIJK es al LMNO como el cuadrado de HI al de LM, porque si no fuera así, será menor o mayor"* [8]

[1] *"Dos segmentos de círculo son semejantes si los ángulos centrales subtendidos por sus cuerdas son iguales."*(CASTRO, Ivan: Razonamiento griego con regla y compás, pp-19)

[2] Todas las demostraciones de este capítulo se encuentran escritas de manera moderna0

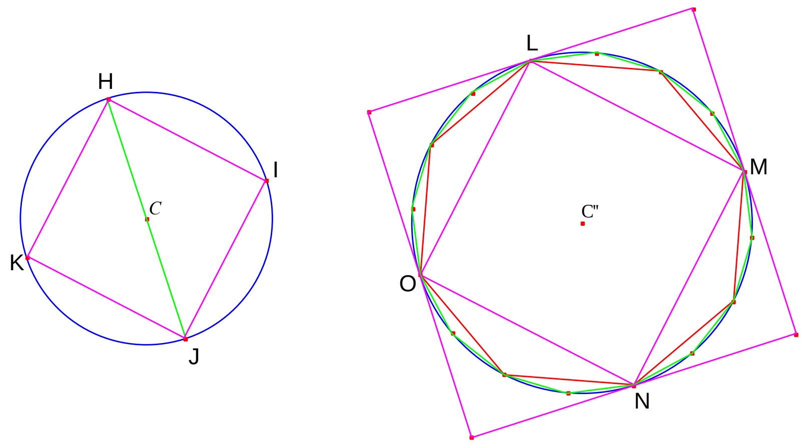

Figura (7)

Si se cumpliera la anterior afirmación entonces, debe existir un área P, menor o mayor que el círculo *LMNO* tal que:

$$\frac{C}{P} = \frac{(d)^2}{(d')^2} \qquad (1)$$

Inicialmente consideramos el caso en que $P < C'$; en este círculo se inscriben polígonos regulares, empezando con un cuadrado y duplicando la cantidad de lados, bisecando los arcos determinados por los lados de cada polígono; siendo así cada polígono inscrito es mayor que la mitad de los segmentos circulares determinados por sus lados, en términos de áreas; por ejemplo, el área del cuadrado *LMNO* es mayor que la mitad del área del círculo, ya que al trazar las tangentes a la circunferencia por los vértices del cuadrado, se obtiene un cuadrado circunscrito igual al doble del cuadrado inscrito y como el círculo es menor que el cuadrado circunscrito, su mitad será menor que el cuadrado inscrito.

Realizando este mismo proceso indefinidamente, en virtud del método de exhausión, con algún polígono inscrito con un número suficiente de lados (Q') obtendremos segmentos circulares menores que la diferencia entre C' y P, debido a que de la mayor de las dos magnitudes, en este caso C', estamos restando una magnitud mayor que su mitad y en general, magnitudes mayores que las mitades que van quedando al sustraer los polígonos inscritos, entonces, al realizar este proceso continuamente quedara una magnitud menor que P, con lo cual, la diferencia entre el círculo y el polígono inscrito será menor que la diferencia entre el círculo y el área P; es decir:

$$C' - Q' < C' - P$$

Donde podemos deducir que $Q' < P$.

Ahora si inscribimos en C un polígono Q'', semejante al polígono Q', estos serán entre sí como la razón de los cuadrados de los diámetros de los círculos respectivos donde están inscritos, es decir:

$$\frac{Q''}{Q'} = \frac{(d)^2}{(d')^2} \qquad (2)$$

Utilizando (1), podemos concluir que:

$$\frac{C}{P} = \frac{Q''}{Q'} = \frac{(d)^2}{(d')^2} \qquad (3)$$

Por lo tanto:

$$\frac{C}{P} = \frac{Q''}{Q'} \qquad (4)$$

Llegando así a una contradicción ya que $Q' < P$ y $Q'' < C$; entonces el área P no puede ser menor que el área del círculo C''. De manera análoga, se demuestra que no es posible que haya un área mayor que C'' que cumpla la proposición, debe ser C' y, en consecuencia, la proposición queda demostrada.

A partir de estos teoremas sobre los círculos, Hipócrates consiguió la primera cuadratura de una figura curvilínea. Comenzó con un semicírculo circunscrito a un triángulo rectángulo isósceles y sobre la base (hipotenusa) construyó un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo rectángulo, figura (8).

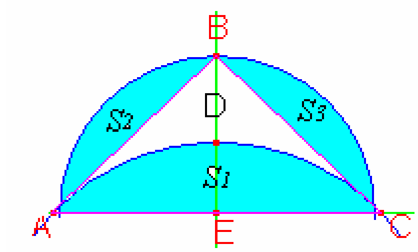

Figura (8)

Como los segmentos semejantes son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus bases, a partir del teorema de Pitágoras se obtiene que la suma de los dos segmentos circulares menores sea igual al segmento circular mayor, expresándolo en términos de las áreas que se encuentran es lo siguiente, figura (9):

$$\mathbf{S_2 + S_3 = S_1}$$

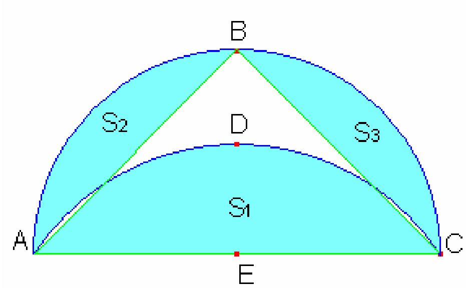

Figura (9)

Demostración:

Establecemos las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_2}{S_3} &= \frac{AB^2}{BC^2} \\ \frac{S_1}{S_3} &= \frac{AC^2}{BC^2} \\ \frac{S_1}{S_2} &= \frac{AC^2}{AB^2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ahora, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad (2)$$

Utilizando álgebra en (1) y sustituyendo en (2), teniendo en cuenta que $BC^2 \neq 0$ obtenemos:

$$BC^2 . \frac{S_2}{S_3} + BC^2 = BC^2 \frac{S_1}{S_3}$$

$$BC^2 . \left(\frac{S_2}{S_3} + 1 \right) = BC^2 \frac{S_1}{S_3}$$

$$\frac{S_2}{S_3} + 1 = \frac{S_1}{S_3}$$

$$\frac{S_2 + S_3}{S_3} = \frac{S_1}{S_3}$$

De esta manera podemos concluir que:

$$\mathbf{S_2 + S_3 = S_1}$$

Por lo tanto, la diferencia entre el semicírculo de diámetro AC y el segmento circular $\mathbf{S_1}$ será igual al área del triángulo ABC; es decir, la lúnula ABCD es exactamente igual al triángulo ABC, expresado en otros términos:

Si llamamos S el área del semicírculo de diámetro $\overline{AC}$, y partiendo de lo anteriormente demostrado tenemos que:

$$S - (S_2 + S_3) = \text{área } (\Delta ABC)$$

$$S - S_1 = \text{área } (\Delta ABC)$$

Observando la figura (9), notamos que $S - S_1$ corresponde a la lúnula, concluyendo que el área del triángulo ABC es igual al cuadrado construido sobre la mitad de AC, consiguiendo así la cuadratura de la lúnula; figura (10)

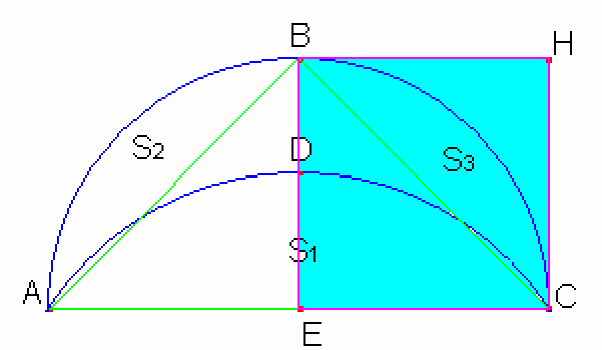

Figura (10)

Hipócrates según lo cita Eudemo trabajo con otras clases de cuadraturas, entre ellas encontramos la que se obtiene a partir de un trapecio isósceles ABCD inscrito en un círculo; figura (11), se tiene que la lúnula *AEBCDA* tiene igual área que la del trapecio.

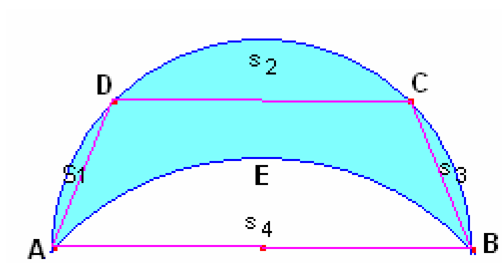

Figura (11)

Para la realización de la demostración del enunciado anterior, es necesario hacer uso de una proposición auxiliar respecto al área de las lúnulas la cual se enuncia de la siguiente manera:

"En el trapecio ABCD, el área del segmento circular S_4 es igual a la suma de las áreas de los segmentos S_1, S_2, S_3" [3]

Utilizaremos la figura (12) para la demostración:

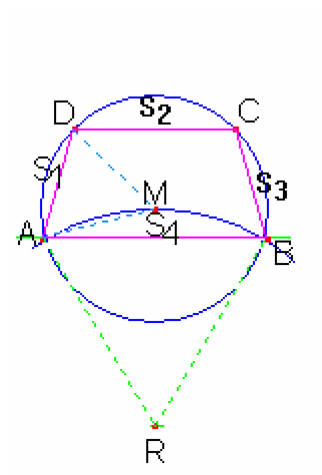

Figura (12).

Demostración

$$\frac{S_4}{S_1} = \left(\frac{RB}{MD}\right)^2 \qquad (1)$$

También tenemos que los triángulos *MDA* y *RAB* son semejantes, ya todos sus lados son proporcionales, entonces establecemos las siguientes razones:

$$\frac{RB}{MD} = \frac{AB}{AD} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\frac{S_4}{S_1} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{AB^2}{AD^2} \qquad (3)$$

Luego se cumple que $\overline{AB}^2 = 3\overline{AD}^2$, por lo tanto el área de S_4 es tres veces el área de *S1,* pero tenemos que $S_1 = S_2 = S_3$, quedando así demostrada la proposición auxiliar, sigamos con la enunciada en la afirmación:

El área del trapecio la podemos expresar de la siguiente manera:

a ♦ABCD = área del segmento circular ADCB – área de S_1– área de S_2– área de S_3

Por la anterior demostración tenemos que:

a ♦ABCD = área del segmento circular ADCB – área de S_4

Lo que es igual al área de la lúnula *AEBCDAK,* quedando así demostrada la proposición y logrando expresar el área de una figura curvilínea en un polígono.

2.1.2 Zenodoro

Matemático griego del cual se desconoce su biografía, desarrolló completamente la teoría de los isoperímetros en el s. III a. C. en un tratado sobre las figuras isoperimétricas, hoy desaparecido, uno de los teoremas trabajado por el es el siguiente:

"El polígono de n lados óptimo, si existe, debe encontrarse entre aquellos que tienen todos sus lados iguales" [16].

Los trabajos de Zenodoro hoy no se encuentran ya que todos fueron perdidos, las demostraciones y teoremas que citaremos a continuación se encuentran redactados con un vocabulario moderno.

Empezaremos con un caso particular el cual enunciaremos de la siguiente manera:

De entre todos los paralelogramos de perímetro P, *el cuadrado de lado* P/4 *es el que tiene mayor área.* [1]

Inicialmente, elijamos un rectángulo (no cuadrado), cuyos lados sean *a* y *b* respectivamente. Supongamos que existe uno tal que su área es mayor que la del cuadrado de lado *p/4*, figura (13), esto es:

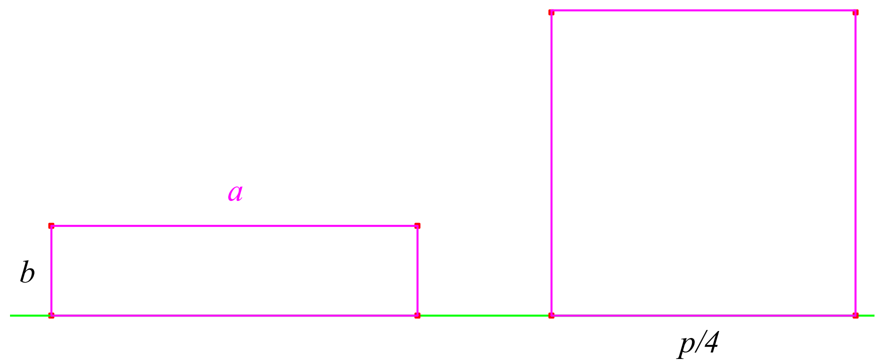

Figura (13)

De acuerdo a la definición de perímetro en el rectángulo tenemos que:

$$p = 2a + 2b \qquad\qquad p = 2(a + b)$$

Suponemos que:

$$\left(\frac{p}{4}\right)^2 < ab \qquad (1)$$

reemplazamos a p; luego:

$$\left(\frac{2(a+b)}{4}\right)^2 < ab \qquad (2)$$

resolvemos el cuadrado en (2);

$$(a+b)^2 < 4ab \qquad (3)$$

Como $p = 2(a + b)$ entonces:

$$b = \frac{p-2a}{2} \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3), tenemos:

$$\left(a + \frac{p-2a}{2}\right)^2 < 4a\left(\frac{p-2a}{2}\right)$$

Resolviendo algebraicamente:

$$a^2 + a(p-2a) + \frac{p^2 - 4ap + 4a^2}{4} < 2ap - 4a^2$$
$$4a^2 + 4ap - 8a^2 + p^2 - 4ap + 4a^2 < 8ap - 16a^2$$
$$20a^2 - 8ap - 4a^2 + p^2 < 0$$
$$16a^2 - 8ap - 4a^2 + p^2 < 0$$

Factorizando la última expresión obtenemos:

$$(4a-p)^2 < 0 \qquad\qquad \otimes$$

Llegando así a una contradicción, porque el cuadrado de un número cualquiera siempre es positivo, por lo tanto el polígono de lado *p/4* es el que abarca mayor área.

De esta manera hemos demostrado, que entre el rectángulo (no cuadrado) y el polígono de lado *p/4*, el que mayor área abarca es aquel equilátero y equiángulo, en este caso corresponde al cuadrado; ahora debemos demostrar que entre los paralelogramos se sigue cumpliendo esta proposición, figura (14), partiremos de lo siguiente:

Existe un paralelogramo de perímetro P tal que su área A sea mayor que el área de un cuadrado de lado p/4, esto es:

$$A > \left(\frac{p}{4}\right)^2$$

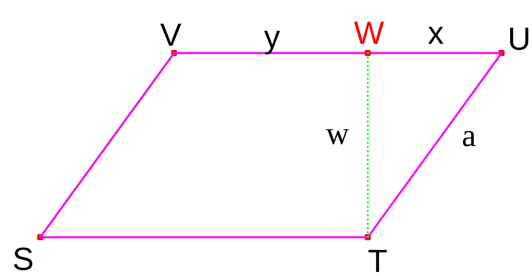

Figura (14)

Dado un paralelogramo *STUV*, donde *W* es el punto de intersección entre la altura trazada desde el punto *T* y el lado *VU*; además:

$VW = y$ $\quad WU = x$ $\quad WT = w$ $\quad UT = a$

Entonces el perímetro lo expresamos de la siguiente manera:

$$p = 2y + 2x + 2a \tag{1}$$

Se tiene que el ΔUWT es rectángulo, utilizando el teorema de Pitágoras expresamos a w como sigue:

$$w = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$p = 2y + 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \tag{3}$$

Utilizando la fórmula para hallar el área de un paralelogramo, tenemos:

$$A = (x+y)*w = (x+y)*\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

Despejando a $(x+y)$ de (1):

$$\frac{p}{2} - a = y + x \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (4):

$$A = \left(\frac{p}{2} - a\right)*\sqrt{a^2 - x^2} \tag{6}$$

Entonces:

$$\left(\frac{p}{2} - a\right)*\sqrt{a^2 - x^2} > \left(\frac{p}{4}\right)^2 \tag{7}$$

Resolviendo algebraicamente (7):

$$\frac{p}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - a\sqrt{a^2 - x^2} > \frac{p^2}{16} \qquad (8)$$
$$8p\sqrt{a^2 - x^2} - 16a\sqrt{a^2 - x^2} > p^2$$

Al tener esta desigualdad planteada vamos a suponer tres casos que son los siguientes:

1. Si $a = x$, entonces:

$$0 > p^2 \qquad \otimes$$

Lo cual es una contradicción porque 0 nunca es mayor que cualquier número real elevado al cuadrado.

2. Si $a < x$, entonces:

$$8(pi - 2ai) > p^2 \qquad \otimes$$

Es decir que nos daría un área expresada con números complejos, que en el campo en que nos encontramos no existen para nosotros lo cual también nos conlleva a una contradicción.

3. Si $a > x$; en este caso haremos uso de la geometría construyendo un rectángulo de base $(x + y)$ y altura w, figura (15);

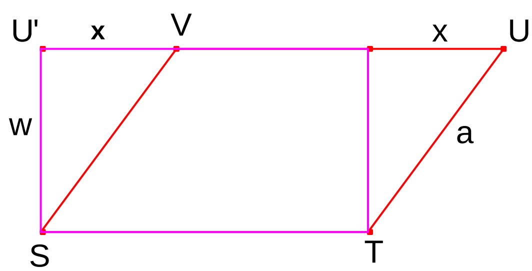

Figura (15)

y utilizando la proposición 35, del libro I de Euclides, tenemos que: *"Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las misma paralelas son equivalentes"* [17] por tanto; el área del rectángulo *STWU'* es igual al área del paralelogramo *STUV* y haciendo uso de la demostración realizada en el primer caso sabemos que el área de polígono de lado *p/4* es mayor que la del rectángulo *STWU'*, entonces llegamos a la contradicción de nuestra hipótesis ya que no existe el polígono que tenga mayor área que el cuadrado, quedando así demostrado que entre los paralelogramos el que abarca mayor área es el cuadrado.

Zenodoro demostró que en general, de todos los polígonos de n lados con perímetro dado, el regular es el que tiene área máxima, demostración de la cual no se encuentran referentes debido a la pérdida de sus trabajos; sin embargo, podemos dar un ejemplo de cómo abarcaríamos la solución de este enunciado el cual lo veremos solucionado más adelante cuando trabajemos sobre los aportes realizados por Pappus.

Otro de los resultados demostrados por *Zenodoro* es que las áreas de los polígonos regulares con perímetro fijo crecen cuando el número de lados (n) aumenta, a continuación encontramos una demostración al respecto, figura (16).

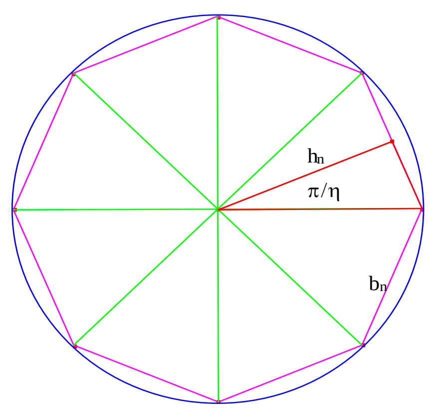

Figura (16)

Si denotamos respectivamente por A_n y P_n el área y el perímetro de un polígono regular y h_n la apotema como vemos en la figura 9, tenemos que:

$$A_n = \frac{h_n}{2} P_n \qquad (1)$$

Considerando como construcción auxiliar la circunferencia circunscrita en el polígono y denotando por R_n su radio, tenemos que los ángulos centrales formados por la apotema están dados por $\alpha = \frac{\pi}{n}$, haciendo uso de la figura y usando trigonometría, podemos afirmar que:

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{h_n}{R_n} \qquad (2)$$

De 1 despejamos a h_n:

$$\cos\frac{\pi}{n} R_n = h_n \qquad (3)$$

Ahora, tenemos que:

$$\begin{gathered} sen\frac{\pi}{n} = \frac{b_n}{2R_n} \\ 2R_n sen\frac{\pi}{n} = b_n \end{gathered} \qquad (4)$$

Ahora reemplazando 3 y 4 en 1, obtenemos:

$$A_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n}.R_n}{2} 2R_n sen\frac{\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n}.sen\frac{\pi}{n}(R_n)^2 \qquad (5)$$

El perímetro es $P_n = 2nR_n sen\frac{\pi}{n}$, de donde despejamos a R_n:

$$\left(\frac{P_n}{2nsen\frac{\pi}{n}}\right)^2 = R_n \qquad (6)$$

Sustituyendo 6 en 5, se tiene:

$$A_n = \cos\frac{\pi}{n} sen\frac{\pi}{n}\left(\frac{p_n}{2nsen\frac{\pi}{n}}\right)^2 .n = \frac{\cos\frac{\pi}{n} p_n{}^2}{4n \operatorname{sen}\frac{\pi}{\mathrm{n}}}$$

Reemplazando tangente por seno sobre coseno, obtenemos lo siguiente:

$$A_n = \frac{p_n{}^2}{4n\dfrac{sen\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}}$$

Realizando el producto extremo medios, llegamos a:

$$\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}\, p_n{}^2}{4n \text{ sen } \dfrac{\pi}{\text{n}}}$$

Lo que es igual a:

$$A_n = \frac{p_n^2}{4n\tan\dfrac{\pi}{n}}$$

Ya que el perímetro es fijo e igual a P, y se tiene que si $n > m$, siendo éstos los lados de dos polígonos regulares con perímetro P, se cumple que:

$$ntg\frac{\pi}{n} \geq mtg\frac{\pi}{m}$$

Y como P es fijo,

$$\frac{p^2}{4n\tan\dfrac{\pi}{n}} \geq \frac{p^2}{4m\tan\dfrac{\pi}{m}}$$

es decir: $A_n \geq A_m$, *c*on lo cual concluimos que el polígono con mayor número de lados es el que abarca mayor área.

Lo anterior es algo de lo que se ha logrado rescatar de los trabajos desarrollados por Zenodoro y que lastimosamente fueron perdidos.

1.1.3 Arquímedes (287 a. C)

"El cadáver de Arquímedes fue enterrado con todos los honores, y sobre su tumba, cumpliendo sus deseos, se colocó un cilindro inscrito en una esfera con una inscripción que indicaba la razón, por él descubierta, entre las áreas y volúmenes en ambos cuerpos" [17]

Aunque es más reconocido por el "*Principio de Arquímedes*", en su vida realizó grandes aportes a la geometría y en lo respecto a la isoperímetria, profundizó más en los sólidos, en su escrito *"Sobre la esfera y el cilindro"* Libro I, encontramos las siguientes proposiciones:

"1. Si un polígono está inscrito en un círculo, el perímetro del polígono es menor que la circunferencia del círculo" [17]; porque cada lado del polígono es menor que el arco que subtiende.

"2. Si un polígono esta circunscrito a un círculo, el perímetro del polígono es mayor que la circunferencia del círculo."[17]

Si *ABCDE* es un polígono circunscrito a la circunferencia *O,* dos lados contiguos que se cortan en A, tocan al círculo en P y Q son mayores, en junto, que el arco que subtienden; y como lo mismo puede decirse de cada par de lados contiguos, el conjunto de todos ellos, que es el contorno del polígono, es mayor que la circunferencia del círculo; figura (17)

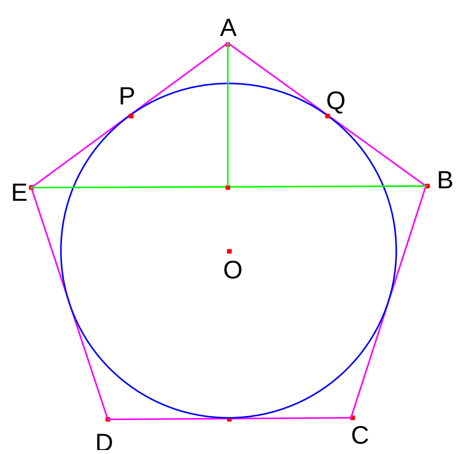

Figura (17)

Esto en cuanto a figura planas, en lo que resta de su libro trabaja con esferas y poliedros, llegando a conjeturas similares a las ya propuestas, estas no las abordamos ya que nos interesan sólo las ideas concernientes a la geometría plana.

2.1.4 Herón de Alejandría (100 a.C)

Nació probablemente en Egipto y realizó su trabajo en Alejandría (Egipto). Escribió al menos 13 obras sobre mecánica, matemáticas y física. También inventó un método de aproximación a las raíces cuadradas y cúbicas de números que no las tienen exactas. A Herón se le ha atribuido el haber desarrollado la fórmula para hallar el área de un triángulo a partir de la longitud de sus lados, pero esta fórmula, probablemente, había sido desarrollada antes de su época, esta es:

$$A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Que la podemos encontrar enunciada como teorema de la siguiente manera:

> *"Si a, b, c son las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo y s designa la medida de su semiperímetro, entonces, la medida del área de la región triangular está dada por:*
>
> $$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
>
> *en unidades cuadradas."* [5]

Está fórmula la podemos deducir por medio del teorema de Pitágoras o por medio de construcciones geométricas, a continuación veremos dos posibles demostraciones para llegar a ésta, antes de iniciar las demostraciones definiremos **semiperímetro**, según Herón:

Sea a, b, c longitudes de los lados del triángulo ABC respectivamente, definimos el semiperímetro como

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Demostración 1:

Sea *ABC* un triángulo donde; *AC = b, AB = c, BC = a, AD = h, BD =n,* figura (18)

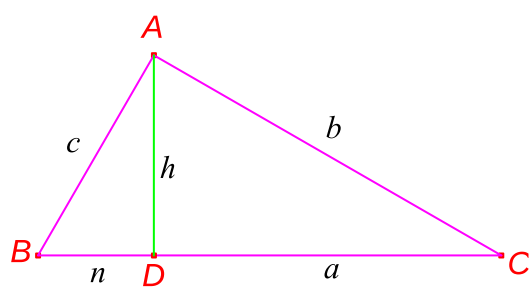

Figura (18)

Haciendo uso del teorema de Pitágoras sobre el ΔADB tenemos:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\ c^2 &= h^2 + n^2 \qquad\qquad (1) \\ h^2 &= c^2 - n^2 \end{aligned}$$

A partir de la generalización del teorema de Pitágoras, planteamos lo siguiente:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \pm 2(BC.BD) \qquad (2)$$

Despejando en (1) a BD y sustituyéndolo en (2), obtenemos:

$$\frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{\pm 2BC} = BD$$
$$\frac{b^2 - c^2 - a^2}{\pm 2a} = n \qquad (3)$$

Elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$\frac{(b^2 - c^2 - a^2)^2}{4a^2} = n^2 \qquad (4)$$

Sustituyendo (4), en (1):

$$h^2 = c^2 - \frac{(b^2 - c^2 - a^2)^2}{4a^2} \qquad (5)$$

Resolviendo algebraicamente (5):

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} \qquad (6)$$
$$h^2 = \frac{(2ac - (a^2 + c^2 - b^2))(2ac + (a^2 + c^2 - b^2))}{4a^2} \qquad (7)$$
$$h^2 = \frac{(2ac - a^2 - c^2 + b^2))(2ac + a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2} \qquad (8)$$
$$h^2 = \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4a^2} \qquad (9)$$
$$h^2 = \frac{(b - (a-c))(b + (a-c))((a+c) - b)((a+c) - b)}{4a^2} \qquad (10)$$

Utilizando la definición del semiperimetro, tenemos que:

$$2s = a + b + c$$

Entonces:

$b + c - a = 2s - 2a$ $\qquad$ $a + c - b = 2s - 2b$ $\qquad$ $a + b - c = 2s - 2a$

Sustituyendo en (10):

$$h^2 = \frac{2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4s.(s-a).(s-b).(s-c)}{a^2} \qquad (11)$$

Sabemos que *h* representa la altura del ΔABC, luego sea x el área del la región triangular y haciendo uso de la fórmula para hallar el área de un triángulo tenemos:

$$x = \frac{BC.AD}{2}$$

$$x^2 = \left(\frac{a.h}{2}\right)^2 \qquad (12)$$

$$x^2 = \frac{a^2 . \frac{4s.(s-a).(s-b).(s-c)}{a^2}}{4}$$

$$x^2 = s.(s-a).(s-b).(s-c)$$

Con lo que llegamos a:

$$x = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

Quedando así demostrada la fórmula de Herón para hallar el área de una región triangular.

Este teorema también lo podemos demostrar haciendo uso de un teorema auxiliar:

> *"La medida del área de una región triangular cualquiera se puede expresar así:*
>
> *t(s–d), donde t es el radio de la circunferencia exinscrita, s es la medida del semiperimetro y d la medida de la longitud del lado tangente a la circunferencia"* [5]

Antes de iniciar con la segunda demostración de la fórmula de Heron haciendo uso del teorema auxiliar inmediatamente antes enunciado, debemos hacer la aclaración de lo que significa circunferencia exinscrita, pero debemos definir antes exincentro:

> ***"Exincentro:*** *Corresponden a los puntos exteriores de un triángulo que equidistan de las rectas que contienen a cada uno de los tres lados.*
>
> ***Circunferencia Exinscrita:*** *Es aquella circunferencia con centro en un exincentro y tangente a los lados del triangulo o sus prolongaciones."* [18] Figura (19)

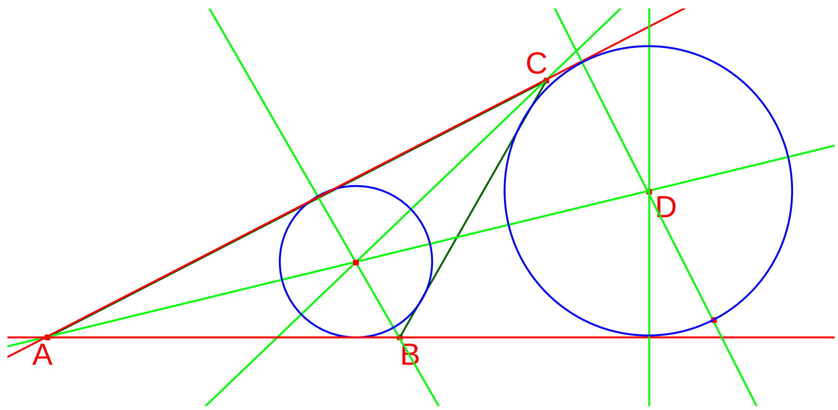

Figura (19)

Demostración 2:

Dado el triángulo BCD y la circunferencia de centro F, tangente al lado BC y a las rectas que contienen los otros dos lados, figura (20)

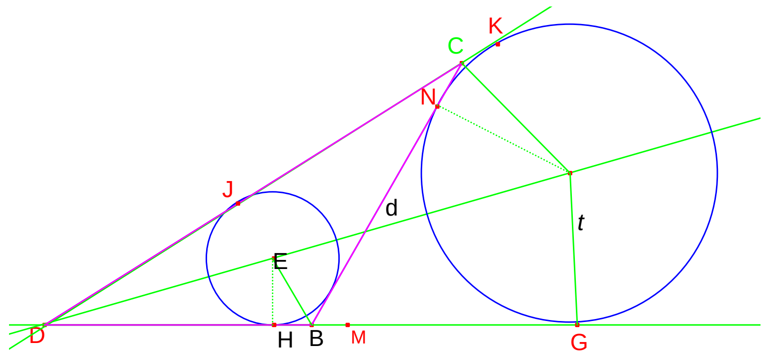

Figura (20)

Como datos preliminares para el desarrollo de la demostración tenemos los siguientes:

$$BC = d \qquad\qquad FG = t$$

$$\Delta\, FBG \sim \Delta\, BEH$$

$BH = MB$ $\qquad$ $CJ = CM$ $\qquad$ $DH = DJ$ $\qquad$ $DG = DK$

Basándonos en la gráfica podemos expresar el área del triángulo *BCD*, de la siguiente manera:

$$a\Delta BCD = a\Delta DBF + a\Delta DCF - a\Delta BCF \qquad (1)$$

Utilizando la fórmula convencional para hallar el área de un triángulo en (1), tenemos:

$$a\Delta BCD = \frac{DB.t}{2} + \frac{DC.t}{2} - \frac{BC.t}{2} \qquad (2)$$

$$a\Delta BCD = \frac{(DB + DC - BC)}{2}.t \qquad (3)$$

Sabemos que:

$$DB + DC - BC = (DB + DC + BC) - 2BC = 2s - 2BC \qquad (4)$$

Ahora sustituyendo (4) en (3):

$$a\Delta BCD = \frac{(DB + DC - BC)}{2}.t \quad = \frac{2\mathrm{s} - 2\mathrm{BC}}{2}.t = (s - BC).t \qquad (5)$$

y como lo enunciamos en la primera parte $BC = d$, entonces:

$$a\Delta BCD = (s - d).\, t \qquad (6)$$

Quedando así demostrado el teorema enunciado; ahora utilicemos este resultado para demostrar la formula de Herón:

La medida del $a\Delta BCD$ la podemos obtener en términos de r que corresponde al radio de la circunferencia inscrita en el triángulo, entonces:

$$a\Delta BCD = sr \qquad (7)$$

Teniendo así dos igualdades para determinar $a\Delta BCD$, multiplicando las dos expresiones (6) y (7) obtenemos:

$$(a\Delta BCD)^2 = rst(s-d) \qquad (8)$$

Ahora considerando la semejanza de los triángulos *FBG Y BEH*, planteamos las siguientes razones:

$$\frac{BG}{EH} = \frac{FG}{BH} \qquad (9)$$

$$FG.EH = BG.BH \qquad (10)$$

Por la construcción sabemos que: $FG = t$ y $EH = r$, son radios de la circunferencias respectivamente; sustituyendo en (10) tenemos:

$$t.\, r = BG.BH \qquad (11)$$

Expresamos el perímetro del triángulo BCD de la siguiente manera:

$$BH + HD + DJ + JC + CM + MB = 2s \qquad (12)$$

Agrupando los términos de (12):

$$(BH+MB) + (CJ+CM) + (HD+DJ)=2s \qquad (13)$$

Utilizando igualdades dadas como datos preliminares y aplicándolas en (13):

$$2\,(BH + CJ + HD)= 2s \qquad (14)$$

H es un punto entre *BD*, entonces:

$$BD = BH + HD \qquad (15)$$

Por lo tanto en (14):

$$BD + CJ = s$$

$$CJ = s - BD \qquad (16)$$

Ahora teniendo en cuenta que $2DG = 2\,DK$, planteamos:

$$2DG = DB + BG + DC + CK$$

$$2\ DK = DB + BN + DC + CN = 2s \qquad (17)$$

De donde podemos deducir que:

$$s = DK = DG \qquad (18)$$

Pero B es un punto entre DG, por consiguiente $DG = DB + BG$, entonces:

$$s = DB + BG$$

$$BG = s - DB \qquad (19)$$

Por (16) y (19) podemos afirmar que $BG = CJ$, falta expresar a BH en términos de las medidas de los demás segmentos paso que realizaremos a continuación partiendo de la igualdad que $BH = MB$:

$$BM = BC - CM$$

$$CM = CJ = BG$$

$$BH = BC - BN = CN = CK = s - DC$$

Ya tenemos las expresiones para BH y BG las cuales sustituiremos en (11):

$$tr = (s - DC)(s - BD) \qquad (20)$$

Ahora $DC = b$ y $BD = c$ y sustiyendo (20) en (8), tenemos:

$$\left(a\Delta BCD\right)^2 = s(s-b)(s-a)(s-d) \qquad (21)$$

Sacando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad, llegamos sin duda alguna a la formula de Herón:

$$\left(a\Delta BCD\right) = \sqrt{s(s-b)(s-a)(s-d)}$$

Llegando así a la fórmula de Herón que es de gran utilidad para el cálculo áreas de regiones triangulares conociendo las longitudes de sus lados.

2.1.5 Pappus de Alejandría

Se ignora donde y cuando nació Pappus, pero se sabe que fue el último nombre ilustre vinculado a la escuela de Alejandría; donde su trabajo más resaltado es el libro titulado "*Colección matemática*", que se encuentra constituido por ocho libros, de los cuales el primero y parte del segundo se han perdido, el libro sobre el cual centraremos nuestro interés es el V, ya que éste se encuentra dedicado a los isoperímetros, dirigido a *Megecio*, en el que habla de la forma adoptada por las abejas para construir las celdillas de sus panales; establece que el área del círculo es mayor que la todo polígono regular del mismo perímetro; que la de éste es mayor que la del irregular.

Nos centraremos en el libro V de Pappus, realizando una síntesis de este tomando lo que se encuentra relacionado con la isoperímetria, en cuanto a las proposiciones solo las enunciaremos ya que son muy similares a las trabajadas anteriormente.

1.2 Libro V de Pappus

El libro empieza con una carta dirigida a Megecio, donde estipula la maravilla de la construcción de los panales de las abejas, destacando la gran habilidad que demuestran estos animales en la construcción de los mismos, la figura que utilizan son los hexágonos que se encuentran yuxtapuestos entre sí, recubriendo totalmente la sección del plano que ocupan sus alvéolos.

Para conseguir este resultado mediante cierta intuición geométrica, las abejas han creído que estas figuras debían estar absolutamente yuxtapuestas y tener sus lados comunes, a fin de que no pudieran caer sustancias extrañas en sus intervalos y ensuciaran su labor; esta condición la cumplen tres figuras rectilíneas, regulares, equiláteras y equiángulas, pues las desemejantes repugnan a las abejas. Los triángulos, cuadriláteros y hexágonos equiláteros yuxtapuestos son las figuras que pueden tener sus lados comunes sin dejar complementos desemejantes entre ellos.

El espacio que hay alrededor de un punto es llenable con seis triángulos equiláteros, puesto que cada uno de los seis ángulos vale dos tercios de un recto, con cuatro cuadrados porque resultan cuatro rectos y con tres hexágono porque cada uno equivale un recto y un tercio; pero tres pentágonos no bastan para cubrir el espacio que circunda a un punto y cuatro lo exceden, porque como el ángulo del pentágono equivale un recto y un quinto, tres son menores y cuatro son mayores que cuatro rectos. Las abejas no saben más que lo que les es útil, y, sobre todo, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y el triángulo y que si se necesita la misma cantidad de materia para construir cada una de estas figuras, el hexágono es el que contiene más miel.

Podemos observar como se logra la yuxtaposición de los hexagonos y cuadrados en la figura (21), respectivamente:

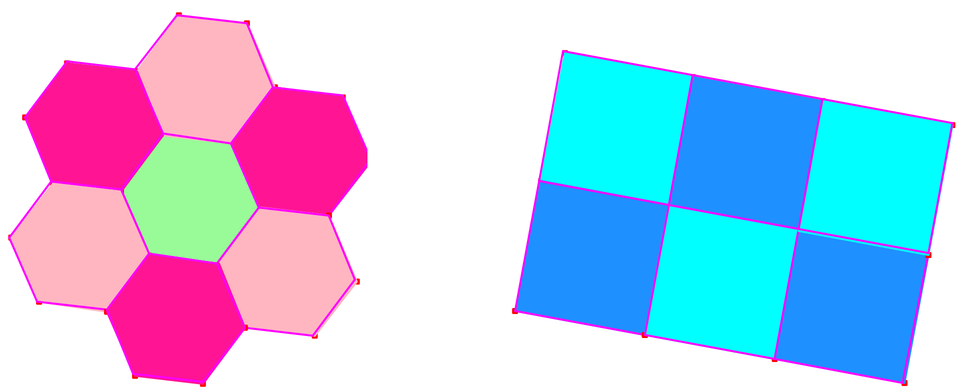

Figura (21)

Ya realizamos la demostración que entre mayor sea en número de lados, mayor área se abarca según lo propone Zenodoro; las proposiciones que enuncia Pappus en su quinto libro referentes a la isoperímetria son las siguientes:

1. *"Entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el de mayor área"*

Realizaremos la demostración de esta proposición utilizando la desigualdad entre la media aritmética y geométrica que definimos a continuación:

Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son positivos entonces $g \leq m$, donde g y m son la media geométrica y aritmética respectivamente; entonces puede darse la igualdad $g = m$ si y solo si $a_1 = a_2, \ldots = a_k$.

El método que utilizaremos es maximizar el área del triángulo, llegando a lo planteado en la proposición.

Demostración:

Suponemos que las longitudes de los lados del triángulo son a, b *y* c, entonces el perímetro es: $p = a+b+c$ y utilizando la fórmula de Heron para hallar el área del triángulo en términos de los lados, obtenemos:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

y sabemos que $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{p}{2}$; que es constante para todos los triángulos considerados; como buscamos maximizar A y esto es lo mismo que maximizar A^2; ya que $A > 0$; y a su ves maximizar $s\,(s-a)(s-b)(s-c)$ es lo mismo que maximizar $(s-a)(s-b)(s-c)$; ya que $s > 0$.

Ahora hacemos uso de la desigualdad entre la media aritmética y geométrica para los números $s-a,\ s-b,\ s-c$; sabemos que todos son positivos utilizando la desigualdad triangular donde se cumple:

$$a < b + c \qquad\qquad b < a + c \qquad\qquad c < b + a$$

Tomando como ejemplo $a < b + c$ y sumamos a a ambos miembros y dividiendo por 2 obtenemos:

$$\frac{a+a}{2} < \frac{a+b+c}{2}$$
$$a < \frac{a+b+c}{2}$$

Utilizando la definición de semiperimetro y reemplazando tenemos; $a < s$, por lo que $s - a > 0$, que es lo que queríamos, el mismo razonamiento lo podemos utilizar para los otros dos números; ahora podemos aplicar la desigualdad entre las medias, definiendo la media aritmética como sigue:

$$m = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}$$
$$m = \frac{3s-(a+b+c)}{3}$$

Utilizando la definición de semiperimetro, entonces:

$$a + b + c = 2s$$

Luego:

$$m = \frac{3s-2s}{3} = \frac{s}{3}$$

y $m \geq g$, debe ser $m^3 \geq g^3$, es decir:

$$m^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3 \geq g^3 = (s-a)(s-b)(s-c) \qquad (1)$$

donde es válida la igualdad si y solo si $s - a = s - b = s - c$, es decir $a = b = c$, o sea si y solo si el triángulo es equilátero.

Multiplicando la desigualdad (1) por s obtenemos:

$$\frac{s^4}{3^3} \geq (s-a)(s-b)(s-c) = A^2$$

Sacando raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad, tenemos:

$$A \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

Llegando a la igualdad si y solo si el triángulo es equilátero; en otras palabras, todas las áreas son menores que el termino derecho (el mismo para todos los triángulos considerados), excepto para el caso del equilátero para el que vale la igualdad.

Ya obtuvimos las demostraciones correspondientes a los triángulos y cuadriláteros de mayor área, ahora podemos analizar el enunciado propuesto por Zenodoro acerca de los polígonos regulares, partamos del siguiente teorema:

"El área de un polígono regular es igual al producto de su semiperimetro por su apotema"[3]

Demostración:

Suponemos que ABC… es un polígono regular de *n* lados, donde:

l = lado *a'* = apotema *p* = semiperimetro

Realizamos ahora la siguiente construcción auxiliar; trazamos la circunferencia circunscrita al polígono y unimos el centro O con cada uno de los vértices. Se formarán *n* triángulos de base *l* (lado) y altura *a* (apotema); figura (22)

[3] BALDOR, Geometría plana y del espacio, pp 220.

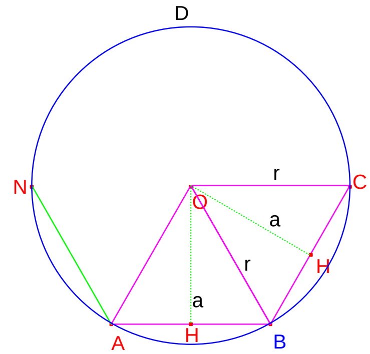

Figura (22)

Expresamos el área del polígono ABC…, como la suma de las áreas de cada uno de los triángulos obtenidos:

$$a \lozenge \text{ ABC}\ldots = a\ \Delta \text{ AOB} + a\ \Delta \text{ BOC} + \ldots \qquad (1)$$

Pero:

$$a\Delta AOB = \frac{1}{2}la' \qquad (2)$$

y así con cada uno de los triángulos que se obtengan, sustituimos en (1):

$$a\lozenge ABC... = \frac{1}{2}la' + \frac{1}{2}la' + \frac{1}{2}la' + ... \qquad \textit{(n veces)}$$

Entonces:

$$a\lozenge ABC... = \frac{1}{2}la' * n \qquad (3)$$

y como $\frac{nl}{2} = p$; por la definición de semiperimetro, sustituimos en (3) y obtenemos:

$$a\lozenge ABC... = p * a$$

que es lo que queríamos demostrar; ya teniendo expresada el área del polígono regular de *n* lados en función del semiperimetro podemos realizar un análisis similar al llevado a cabo en el caso de los triángulos, análisis que omitimos.

De esta manera es posible demostrar que dado un perímetro fijo el polígono regular de *n* lados es el que abarca mayor área como lo propuso Zenodoro.

La segunda proposición propuesta por Pappus es la siguiente:

2. "El círculo es mayor que todo polígono equilátero y equiángulo cuyo perímetro sea igual a la circunferencia del círculo"

Esta proposición es el eje central sobre el cual se ha desarrollado el problema isoperimétrico a través de la historia de la matemática, primero miraremos un caso particular en el cual llegaremos a este resultado por recurrencia y posteriormente citaremos una demostración propuesta por Steiner.

Partamos de que tenemos un perímetro l, y se nos pide construir las siguientes figuras un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un hexágono regular y una circunferencia; por la demostración ya realizada en la página 26, sabemos que a medida que el número de lados del polígono crece el área aumenta por lo tanto el área máxima será la del círculo.

Ahora una de las demostraciones que encontramos referente a la solución de este problema es la propuesta por Jacob Steiner en 1838, haciendo uso del cálculo y métodos geométricos, partiendo de lo siguiente:

Dada una curva ***C***, que entre todas las curvas encerradas de longitud dada l, encierra el área máxima, buscamos demostrar que esta curva es la circunferencia.

Demostración:

Lo primero que debe ser demostrado es probar que ***C*** debe ser convexa, de no ser así, podremos construir una nueva curva C^*, como podemos observar en las figuras siguientes, que tienen la misma longitud que la primera pero que acota mayor área. Figura (23)

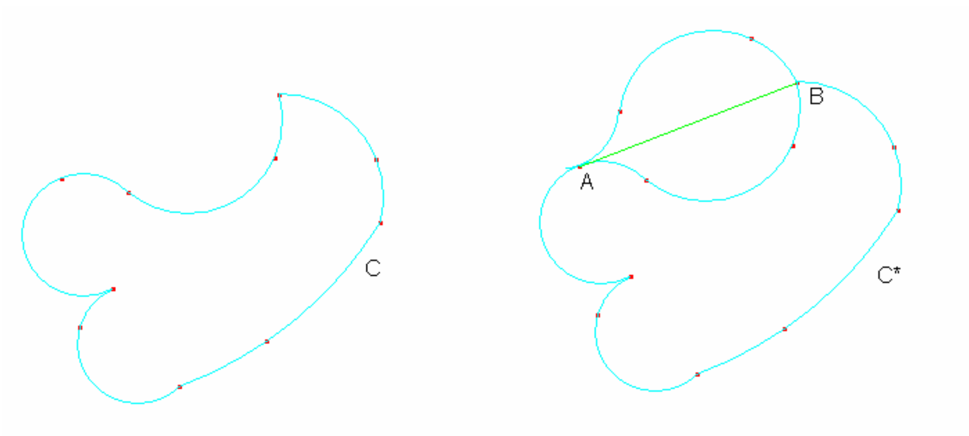

Figura (23)

Una vez justificada la convexidad de la curva, elijamos sobre la curva convexa ***C*** dos puntos, A y B de modo que dividan a ***C*** en dos arcos C′ Y C” de igual longitud. La recta que pasa por A y B divide al área de la curva C en dos trazos de áreas S_1 y S_2 respectivamente.

La propiedad de optimización de la curva ***C*** implica que si S_1 y S_2 sean iguales; si no fuera así por ejemplo si S_1 fuese mayor que S_2, entonces podríamos reflejar la región de área S_1 respecto de la recta que une A con B y obtendríamos una nueva región, la unión de esta región con su imagen reflejada formaría una figura plana de mayor área que la abarcada por la curva ***C***, de manera que la longitud de su perímetro seguiría siendo l; obtendríamos así una contradicción con el carácter óptimo de la curva ***C***, en consecuencia las áreas S_1 y S_2 deben ser iguales.

Por ultimo para demostrar que ***C*** es una circunferencia, será suficiente demostrar que C′ y C” son semicircunferencias.

Para ello suponemos que uno de los arcos no fuera una semicircunferencia, por ejemplo el arco C′.

Ello implicara la existencia de un punto sobre él, R, de manera que el Δ ARB no fuese rectángulo en R.

Entonces movemos como si hubiese un carrete infinitesimal instalado en R hasta que el ángulo en *R* sea recto y en esta posición reflejamos la figura obtenida en la recta AB para obtener una curva cerrada con longitud *l* pero que acota mayor área que ***C***, en contra del carácter óptimo de la curva ***C***, por ende el polígono correspondiente es la circunferencia.

III. *CUADRATURA DE POLÍGONOS*[4]

En el capítulo correspondiente a los antecedentes históricos de la isoperimetría encontramos los aportes realizados por Hipócrates que residen en la cuadratura de lúnulas, procedimiento mediante el cual a partir de una superficie curvilínea se obtiene un cuadrado de igual área, partiendo de esta idea, en este capitulo, mostraremos diferentes procedimientos geométricos mediante los cuales es posible obtener cuadrados de igual área a un polígono dado, entendiéndose por cuadratura lo siguiente:

> *"La cuadratura de una figura plana es la construcción con regla y compás de un cuadrado con la misma superficie de la figura plana original. Si la cuadratura de una figura plana puede ser llevada a cabo, se dice que la figura es cuadrable."*
> [6]

Empezaremos con la cuadratura de un rectángulo, seguidamente la de un triángulo para así llegar a la cuadratura de un polígono cualesquiera.

3.1 Cuadratura del rectángulo

Lo enunciamos de la siguiente manera:

[4] Estas construcciones se encuentran basadas en las expuestas por Carmen Galvan en [6]

Sea BCDE un rectángulo arbitrario, con regla y compás construir un cuadrado que tenga área igual a la del rectángulo dado.

A partir del enunciado lo primero que realizaremos es la construcción para posteriormente realizar la demostración:

Construcción:

Dado el rectángulo BCDE y con centro en E trazamos la circunferencia de radio ED, donde F es el punto de intersección entre la recta BE y la circunferencia; luego, encontramos el punto medio del segmento BF sea éste G; con centro en G trazamos la circunferencia con radio BG, donde H es el punto de intersección de la recta DE y la circunferencia con centro G, quedando así determinado el segmento EH, éste corresponde a uno de los lados del cuadrado, con él construimos el, cuadrado HEOK ; figura (24).

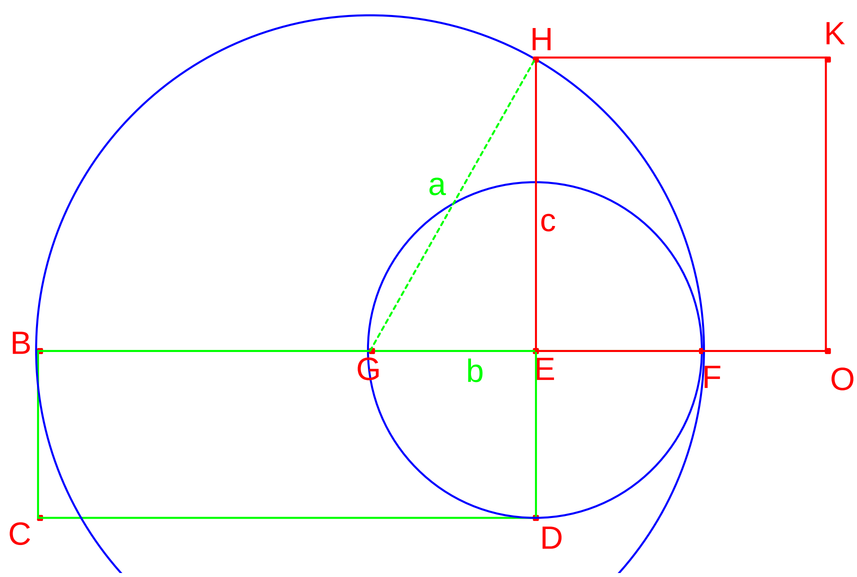

Figura (24)

Ahora debemos demostrar que las áreas del rectángulo BCDE y del cuadrado HEOK son iguales:

Demostración:

Razón	***Afirmación***
1. $HG = a$, $EG = b$, $EH = c$	Notación.
2. $\overline{HE} \perp \overline{BF}$	Construcción.
3. E es un punto entre $\overline{FG}$ G es un punto entre $\overline{BE}$	Construcción.
4. $\angle$HEG es recto	Definición de perpendicular (2).
5. H, E y G no son colineales	Construcción
6. ΔHEG es recto	Definición triángulo rectángulo (4, 5)
7. $a^2 = b^2 + c^2$	Teorema de Pitágoras (6).
8. $c^2 = a^2 - b^2$	Álgebra (7).
9. $FG = BG = HG = a$	Radios de la misma circunferencia
10. $FG = FE + EG$ $BE = BG + GE$	Definición de punto entre (3).
11. $FE = FG – EG$	Álgebra (10)
12. $FE = a – b$	Sustitución (1, 9 , 11)
13. $BE = a + b$	Sustitución (1, 9, 10)
14. $a\square BCDE = BE * ED$	Fórmula para hallar el área del rectángulo.
15. $ED = EF$	Radios de la misma circunferencia.
16. $a\square BCDE = BE*EF$	Sustitución (14, 15)
17. $a\square BCDE = (a + b) *(a – b)$	Sustitución (12, 13, 16)
18. $a\square BCDE = a^2 - b^2$	Diferencia de cuadrados (17)
19. $a\square BCDE = c^2$	Sustitución (8, 18)
20. $a\square EFKH= c^2$	Fórmula para hallar el área del cuadrado
21. $\boldsymbol{a\square BCDE = a\square EFKH}$	Transitividad (19, 20)

Quedando así demostrado que es posible construir un cuadrado de igual área a un rectángulo arbitrario dado, así que el rectángulo es una figura cuadrable.

3.2 Cuadratura del triángulo.

Lo enunciamos de la siguiente manera:

Sea ABC un triángulo arbitrario dado, construir con regla y compás un cuadrado que tenga área igual al triángulo dado.

Construcción:

Dado el triángulo *ABC*, trazamos una de sus alturas, aquella que contiene al vértice *A*, ésta cortará al segmento *BC* en el punto *D*, posteriormente hallamos el punto medio del segmento *AD*, que denominaremos *E*; con centro en C, trazamos una circunferencia con radio BC, hallamos el punto de intersección entre la circunferencia con centro C opuesto al punto B y la recta BC; a este punto lo nombramos *H*, por el punto E construimos una recta paralela a la recta BH; desde el punto *H* trazamos una perpendicular a la recta recta paralela obtenida y al punto de intersección lo nombramos *G*, este mismo procedimiento lo realizamos desde el punto *C* obteniendo así el punto *F*, obteniendo así el rectángulo *CGHF;* figura (25).

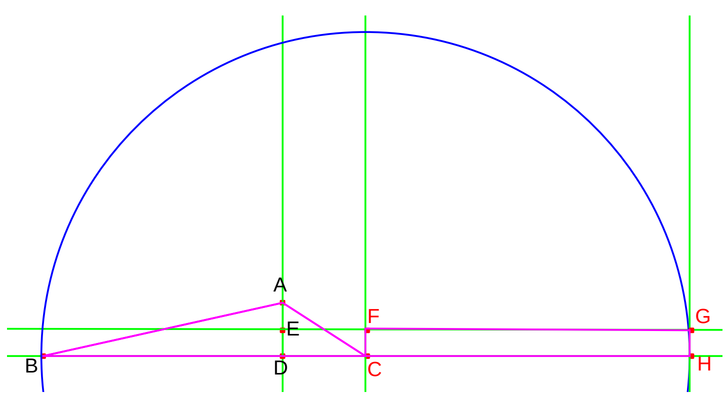

Figura (25)

Debemos demostrar que el área del rectángulo obtenido en la construcción es igual al área del triángulo original.

Demostración:

Razón	*Afirmación*
1. $a \triangle ABC = \frac{1}{2} (BC)*(AD)$	Fórmula para hallar el área del triángulo.
2. $BC = CH$	Construcción.
3. $\overline{CF} \parallel \overline{ED}$	Teorema dos rectas son paralelas, si ambas son perpendiculares a la misma recta.(Construcción).
4. $CF = ED$	La distancia entre paralelas es igual (3).
5. $AD = AE + ED$ $ED = \frac{1}{2} AD$ $AD = 2\ ED$ $a \triangle ABC = \frac{1}{2} (CH)* 2(ED)$	Construcción y definición de punto medio.
6. $a \triangle ABC = (CH)* (ED)$	Sustitución de 2 y 4 en 1.
7. $a \triangle ABC = \frac{1}{2} (CH)*(AD)$	Álgebra en 5.
8. $a \square CHGF = (CH)* (CF)$	Fórmula para hallar el área del rectángulo.
9. $a \square CHGF = (CH)* (ED)$	Sustitución (4, 8).
10 . $\boldsymbol{a \triangle ABC = a \square CHGF}$	Transitividad entre las igualdades (6, 9)

Llegando así a demostrar que el área del rectángulo es igual a la del triángulo original, y con ello podemos realizar la cuadratura del rectángulo como lo hicimos en el primer procedimiento.

Las anteriores cuadraturas serán la base para las cuadraturas y construcciones que realizaremos a continuación

3.3 Cuadratura de polígono de n lados donde n> 4

Al conocer ya los métodos de cuadratura del triángulo y rectángulo, el paso a seguir es construir procedimientos mediante los cuales podamos llevar a cabo la cuadratura de cualquier polígono dado, trabajaremos dos que consisten el primero en la disección de ángulos y el segundo que se basa en la construcción de triángulos equivalentes.

3.3.1 Disección de ángulos

Lo enunciamos de la siguiente manera:

> *Sea ABCDE un polígono irregular arbitrario, con regla y compás construir un cuadrado que tenga área igual a la del polígono dado.*

Construcción:

Dado un polígono *ABCDE* irregular, trazamos los segmentos *AD* y *BD*, subdividiendo así el polígono en triángulos de áreas *m*, *n* y *t*. Figura (26), donde tenemos las siguientes igualdades:

$$a\,\Delta AED = m \qquad a\Delta ADB = n \qquad a\Delta BDC = t$$

Luego:

$$a\lozenge^{5} ABCDE = a\,\Delta AED + a\Delta ADB + a\Delta BDC$$

[5] Este símbolo lo utilizaremos para identificar los polígonos irregulares de más de cuatro lados.

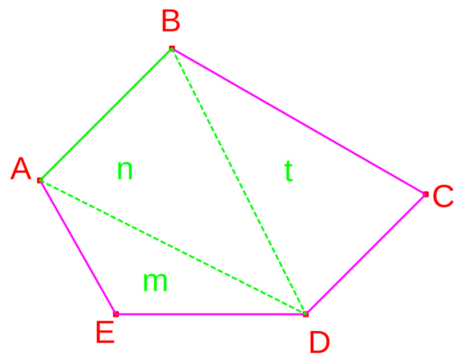

Figura (26)

Realizamos la cuadratura de cada uno de los triángulos como hicimos en la demostración anterior para posteriormente llevar a cabo la cuadratura de los rectángulos obtenidos, en la figura (27) presentamos el ejemplo para el Δ ADB

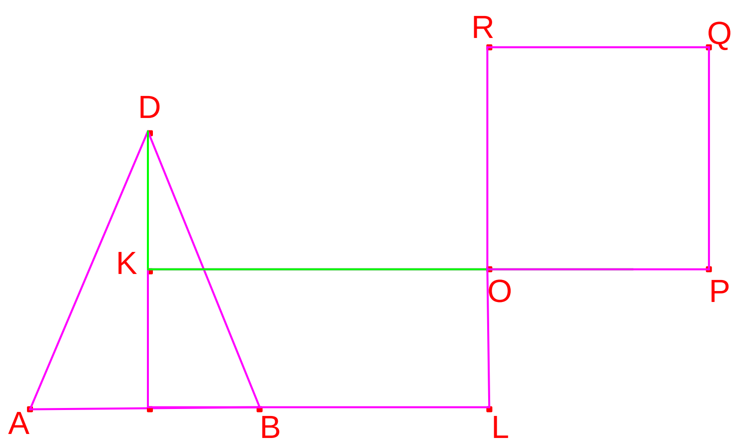

Figura (27)

Las cuadraturas logradas son:

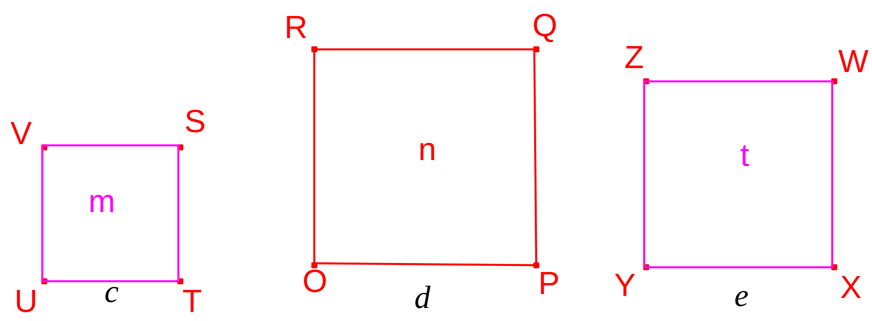

Figura (28)

Establecemos las siguientes igualdades:

$$UT = c \qquad OP = d \qquad YX = e$$

A continuación construimos un triángulo rectángulo tal que la longitud de sus catetos sean c y d respectivamente, cuya hipotenusa, tiene una longitud x; aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$x^2 = c^2 + d^2$$

Seguidamente, sobre x, construimos un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y e, cuya hipotenusa tenga una longitud j (Figura (28)) y nuevamente aplicando el teorema de Pitágoras:

$$j^2 = e^2 + x^2$$

Finalmente, construimos el cuadrado de longitud de lado j (Figura (28)) y utilizando métodos algebraicos y las construcciones realizadas anteriormente podemos comprobar que el área del cuadrado construido es igual a la del polígono dado, de la siguiente manera:

$$j^2 = x^2 + e^2$$
$$j^2 = c^2 + d^2 + e^2$$
$$j^2 = m + n + t$$

Logrando así la cuadratura de un polígono irregular de n lados donde $n > 4$; este mismo procedimiento lo podemos realizar con cualquier clase de polígonos regular o irregular, para la demostración de está construcción lo que hacemos es tomar como base las primera dos cuadraturas realizadas; figura (29).

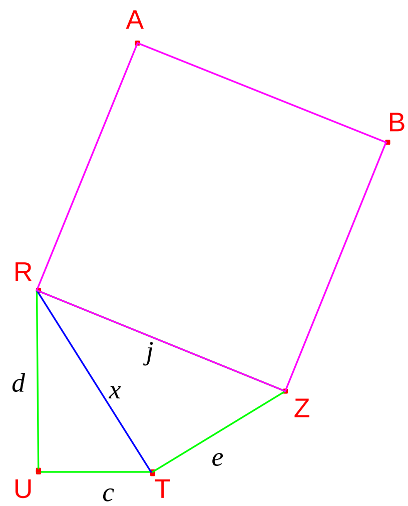

Figura (29)

De está manera llegamos a la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{a \lozenge ABCDE = a \square ABZR}$$

3.3.2 Construcción de triángulos equivalentes

Este es un método en el cual, a partir de la utilización de construcciones geométricas logramos un triángulo de igual área a la de un polígono dado, para posteriormente realizar la cuadratura del triángulo obtenido; sin embargo para realizar está construcción es necesario que primero realicemos la construcción de la siguiente proposición propuesta por Euclides

"Los triángulos colocados sobre la misma base y las mismas paralelas son equivalentes".Figura (30)
[17]

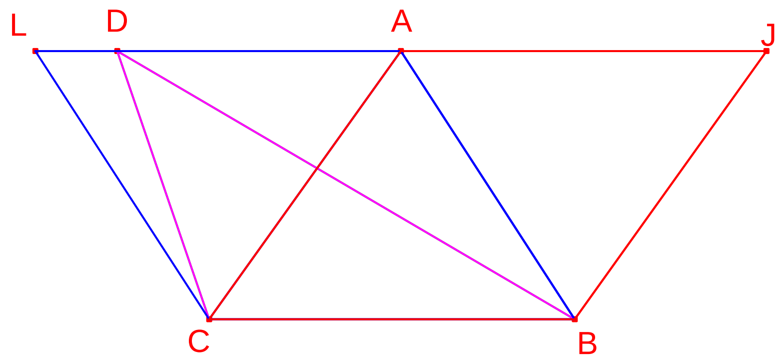

Figura (30)

Demostración:

Dado ΔABC, trazamos una paralela al segmento BC por el punto A, tomamos un punto D sobre la paralela y construimos el ΔDBC, posteriormente trazamos las paralelas correspondientes a los otros dos lados del triángulo; entonces tenemos:

$$\overline{BC} \,||\, \overline{DA} \qquad \overline{BA} \,||\, \overline{CL} \qquad \overline{CA} \,||\, \overline{BJ}$$

Obteniendo así los paralelogramos $BJAC$ y $BALC$, los cuales son equivalentes porque se encuentran entre la misma base $\overline{BC}$ y entre las mismas paralelas $\overline{BC}$ y $\overline{DJ}$, trazamos las diagonales de cada uno de los paralelogramos y obtenemos:

$$\Delta LAC \cong \Delta\, ABC \qquad \text{y} \qquad \Delta ABC \cong \Delta\, JBA$$

por transitividad entre las congruencias;

$$\Delta LAC \cong \Delta\, JBA$$

llegando así a demostrar que los triángulos son congruentes y a la vez equivalentes; por lo tanto al tomar cualquier punto sobre la recta paralela uno de los lados del ΔABC, cuya base sea el lado elegido y el vértice opuesto, al punto marcado equivalente con el triángulo inicial; por consiguiente

$$a\Delta DBC = a\,\Delta\, ABC$$

Ahora, a partir de la anterior proposición vamos a realizar la construcción del triángulo equivalente a un polígono dado.

Construcción:

Dado un polígono convexo *ABCDE*, el punto *D'* es la intersección de la prolongación del lado *AE* con la recta paralela a la diagonal *CE* por el vértice *D*, trazamos el segmento *CD'* obteniendo el cuadrilátero *ABCD'* equivalente al pentágono haciendo uso de la demostración anterior ya que; figura (31).

$$a\Delta CDE = a\ \Delta CD'E$$

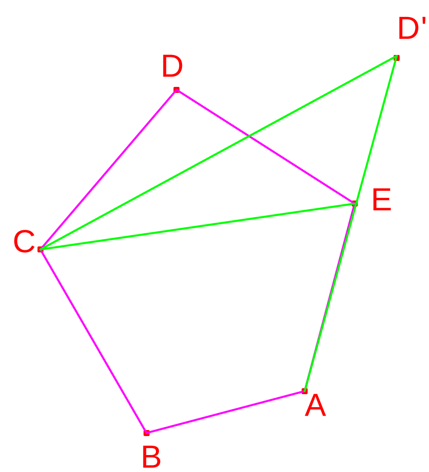

Figura (31)

Ahora trazamos la recta paralela a la diagonal *CA*, por el punto *D'* y prolongamos el lado *BA*, obteniendo así el punto *J* como punto de intersección entre la prolongación de la recta *BA* y una de las rectas que pasa por el punto *C*; si trazamos el segmento *CJ*, obtenemos el ΔACJ equivalente al $\Delta ACD'$; figura (32).

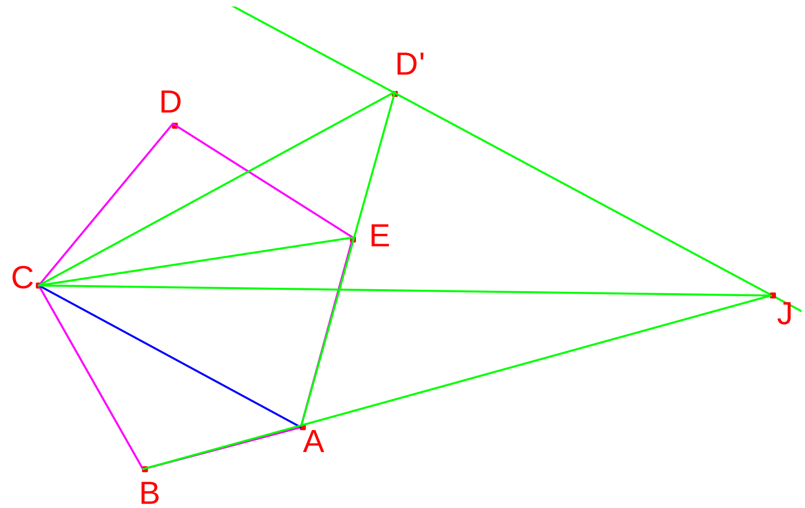

Figura (32)

Posteriormente, podemos plantear lo siguiente:

$$a \Diamond ABCDE = a \Diamond ABCD'$$

por las construcciones realizadas:

$$a \Diamond ABCD' = a \, \Delta ABC + a \Delta ACD'$$

y

$$a \, \Delta JBC = a \Delta ACJ + a \Delta ABC$$

por transitividad de las igualdades y equivalencias anteriores llegamos a que:

$$a \Diamond ABCD' = a \, \Delta JBC$$

que es el propósito que teníamos en esta parte, al tener ya el triángulo equivalente al polígono, el paso final es realizar la cuadratura de este triángulo, paso que omitimos ya que es el mismo realizado anteriormente.

De esta manera concluimos las construcciones de polígonos de igual área, mediante procedimientos geométricos.

CONCLUSIONES

Durante la elaboración de la propuesta y finalización de la misma puedo decir que:

- ☑ El concepto de área y perímetro que se enseña actualmente en la mayoría de las instituciones, está dejando de lado toda una historia y procedimientos geométricos que le pueden aportar a la formación matemática de los estudiantes.

- ☑ Enriquecí mi conocimiento geométrico y mis habilidades para las demostraciones geométricas.

- ☑ El replantear demostraciones elaboradas por los matemáticos en la antigüedad sin referentes bibliográficos, es un procedimiento en el que se requiere dedicación y esfuerzo.

- ☑ Reconocí la importancia de las figuras geométricas dentro de diferentes entornos culturales como, la arquitectura y la naturaleza.

- ☑ Conocí la belleza de las construcciones geométricas, principalmente de las cuadraturas de algunos polígonos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] *BOYER, Carl. Historia de la Matemática. Ed: Alianza. Madrid, 1986, 1987.*

[2]*CASTILLO, Fernando. Geometría plana y del espacio desde un punto de vista euclideano. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.*

[3] *CASTRO, Ivan. Razonamiento griego con regla y compás Encuentro de geometría y sus aplicaciones. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2005.*

[4] *DONADO, Alberto. Topología y Colecciones. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 1998.*

[5] *DUNHAM, William. Viaje a través de los genios. Ed: Pirámide. Madrid 1993.*

[6] *GALVAN, Carmen. Cuadratura de polígonos. En: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 1. Marzo, 2005. pp 7-15.*

[7] *MOISE, Edwin, y otros. Geometría Moderna. Ed:Addison Wesley. Wilmington, Delaware, E.U.A, 1966.*

[8] *LUQUE, Carlos, y otros. Euclides y el círculo. Encuentro de geometría y sus aplicaciones. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2005.*

[9]*PÉREZ, Rafael y otros (2001) Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos. En: Revista Suma. No. 36. Febrero. pp. 101-106.*

[10] *, Isoperímetros en la Grecia Antigua. En: Revista Suma. No. 34. Junio, 2000. pp 95- 98.*

[11] *(2001) Isoperímetros: Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades. En: Revista Suma. No. 37. Junio. pp. 105-110.*

[12] *(2001) Isoperímetros: El panal de abejas y Fejes Toth. En: Revista Suma. No. 38. Noviembre. pp. 95-97.*

[13] *(2002) Isoperímetros: Resolución del problema de los isoperímetros mediante la función cuadrática. En: Revista Suma. No. 40. Junio. pp. 113-1117.*

[14] *(2002) Isoperímetros: El problema de la existencia de solución en el problema isoperimétrico. En: Revista Suma. No. 41. Noviembre. pp. 113-117.*

[15] *SÁNCHEZ, Jose. Historia de la Matemática: implicaciones didácticas. En: Revista Suma. No. 26. Noviembre, 1997. pp. 33-38.*

[16] *SANCHEZ, Carlos, y otros. Los Bernoulli "Geometras y Viajeros". Ed: Nivela Libros Ediciones. España, 2001.*

[17] *EUCLIDES.* Elementos. Recopilación de: *VERA, Francisco. Cientificos Griegos. Ed: Aguilar. Madrid, 1970.*

Referencia Virtual.

[18] ABRISQUETA, Carlos. La geometría del triángulo. Htpp//:www.elternario.com.