CONSTRUCCIÓN DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE EN TORNO AL PROCESO DE GENERALIZACIÓN GEOMÉTRICA

INGRID XIMENA BOCANEGRA GONZALEZ
MARIA ANGELICA DEVIA AVILA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2019

CONSTRUCCIÓN DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE EN TORNO AL PROCESO DE GENERALIZACIÓN GEOMÉTRICA

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas

INGRID XIMENA BOCANEGRA GONZALEZ

Código: 2014140018

C.C: 1018471952

MARIA ANGELICA DEVIA AVILA

Código: 2014140031

C.C: 1033798191

Directora

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C

2019

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, queremos dar gracias a Dios por la sabiduría y el valor para poder culminar esta experiencia de vida.

A nuestra directora, la profesora Leonor Camargo Uribe por guiar nuestra formación investigativa en el campo de la Educación Matemática enfocada en la generalización geométrica. Por su paciencia, sus impulsos de ánimo, sus aportes y orientaciones precisas que permitieron encajar cada una de nuestras ideas.

A la profesora Lyda Mora por brindarnos su apoyo y sus conocimientos en un primer momento. Al profesor Rodolfo Vergel quién con sus enseñanzas dio luz al tema de investigación.

A las instituciones: Institución Educativa Isabel II y Colegio Técnico Guillermo Cano Isaza I.E.D, a los profesores que nos brindaron su apoyo logístico y a los estudiantes de grado sexto por su participación, su compromiso y su entusiasmo en la investigación.

A la Universidad Pedagógica Nacional, a los profesores de la licenciatura que aportaron desde sus experiencias y conocimientos en nuestra formación profesional.

A todos nuestros compañeros y amigos quienes brindaron una voz de aliento para continuar la tarea cuando se agotaban las energías.

Angélica y Ximena

A Dios por guiar mi camino, por llenarme de fortaleza para afrontar cada reto que se presenta.

A mis padres, Bertha y Jaime quienes siempre han estado apoyándome en todo momento. Gracias por siempre impulsarme a cumplir mis sueños, por su paciencia, por cuidarme y encaminarme a ser una mejor persona cada día. Espero un día poder compensar todo lo que han hecho por mí. Este logro es por ustedes y para ustedes.

A mi familia por todo su apoyo y sus palabras de aliento para cumplir mis sueños. A mi tía Gladys, por ser mi segunda mamá, gracias por apoyarme, cuidarme y por guiarme en todo momento de mi vida. A mi tío Moisés, gracias por impulsarme y contribuir significativamente en este proyecto desde muy pequeña. A mi prima Carolina, por ser como mi hermana, por escucharme en los momentos de angustia y siempre tener un consejo y una motivación para darme.

A mi novio, por creer en mí y siempre impulsarme a crecer como persona. Gracias por darme ánimo, por la paciencia, el apoyo y el cariño incondicional.

A mis amigas Karen y Yeraldin, y mi amigo Nimrod, mis confidentes. Gracias por escucharme, por sus palabras, risas y apoyo en todas las locuras.

A mi compañera de lucha Ximena, gracias por seguir en este proyecto que, aunque al comienzo era una locura finalmente resultó siendo una excelente y bonita experiencia. Gracias por toda su paciencia, por ser mi confidente, por su apoyo y por las noches largas y las risas durante la realización de este trabajo y a lo largo de la carrera.

Angélica

Al todo poderoso por sus múltiples bendiciones, por ser mi mayor compañía en la soledad, por ser luz en la oscuridad y guía en la adversidad.

A mis padres, Ana y Yesid quienes con su esfuerzo me enseñaron a luchar la vida; con su ejemplo, me hicieron una persona de bien; con su gran nobleza y amor por el campo me educaron con el don de servir y ayudar a los demás sin interés. Todos mis logros son para ustedes mi mayor orgullo, los amo.

A mis hermanos, Carolina y Yesid, mis compañeros de vida que a pesar de las adversidades y las circunstancias desde la distancia me han acompañado en este camino, en la lucha constante por alcanzar las metas propuestas.

A mi pueblo natal "tierra del eterno retorno", Baraya – Huila, comunidad de gente campesina, honesta, pujante y trabajadora, golpeada por el conflicto armado que desde sus montañas y horizontes sueña con la paz y trabaja por la construcción de ella.

A mi extensa familia que en medio de las diferencias y las distancias han aportado desde sus enseñanzas en la construcción de un camino de vida distinto. A mi prima Diana por su apoyo y ejemplo de valentía. A mi tío Santiago por su incondicional apoyo moral. A todas mil gracias, son muchos y no me alcanzan las páginas para expresar tantos sentimientos y emociones encontradas.

A Angélica mi compañera de trasnochas y sufrimientos académicos, a pesar de los desacuerdos y las locuras escritas, finalmente logramos consolidar nuestras ideas en este trabajo. Gracias por los momentos de discusión académica que terminaban en chisme, confidencias y risas.

Ximena

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 1 de 7**

1.Información General

Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje en torno al proceso de generalización geométrica.
Autor(es)	Bocanegra González, Ingrid Ximena; Devia Ávila, María Angélica
Director	Camargo Uribe, Leonor
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 138p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE (THA); GENERALIZACIÓN; GENERALIZACIÓN GEOMÉTRICA; CONJETURA.

2.Descripción

Este documento es fruto de intereses adquiridos durante la formación académica y disciplinar en el programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Este trabajo descansa sobre dos pilares que son de gran importancia en la Educación Matemática: por un lado, las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje; y por otro lado, la generalización, en especial la generalización geométrica. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje han sido una herramienta importante para el desarrollo práctico e investigativo de profesores e investigadores. Por esta razón cada vez ha ido cobrando más auge en el campo de la Educación Matemática. Es un tema de interés que debería ser abordado en la formación de profesores de matemáticas. Es importante que como profesoras en formación tengamos la experiencia de construir trayectorias hipotéticas y ofrezcamos posibilidades para la gestión del aprendizaje con indicaciones sobre cómo los niños aprenden matemáticas y cómo podemos intervenir y generar apoyo en los conocimientos matemáticas que se trabajen.

El proceso de generalización es considerado uno de los procesos de importancia en el desarrollo del pensamiento matemático y uno de los principales retos en el estudio de las matemáticas. La utilidad en la resolución de problemas matemáticos hace que sea uno de los procesos inevitables de abordar. En diferentes documentos encontramos cantidad de definiciones sobre generalización, algunas de estas definiciones son propuestas por Poyla (1965), Radford (1997), Mora (2012), Vergel (2016), pero ninguna específica sobre el proceso de generalización geométrica. En este documento presentamos una definición de generalización geométrica, producto de una recopilación de distintas fuentes.

El objetivo del trabajo de grado fue construir una THA sobre el proceso de generalización geométrica para que estudiantes de 10 a 13 años descubran una propiedad de una figura geométrica. Para llevarlo a cabo seguimos un proceso que se consigna en siete capítulos.

3. Fuentes

Arzarello, F., Olivero, F., Domingo, P., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM* Vol. 34 (3), 66-72.

Bressan, A., y Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. Correo del maestro, N° 168.

Camargo, L. (en evaluación). Estrategia de investigación – entrevista basadas en tareas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias,* 26(3), 431–444.

Cárcamo, A. (2017). Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra-España.

Clements, D., y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education, *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89.

Clements, D., y Sarama, J. (2009). Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach. New York, NY: Routledge.

García, S.S. (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años [Trabajo de maestría]. Universidad pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.

Giaquinta, M., y Modica, G. (2012). Mathematical analysis: Functions of one variable. New York: Springer Science y Business Media. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/ep/v44/1517-9702-ep-44-e181974.pdf

Gómez, P., y Lupiáñez, J.L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, I(2), 79-98.

Ivars, P., Buforn, A., y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”. *Acta Scientiae*, v.18, n.4, Edição Especial,48-64.

León, O. L., Díaz Celis, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 9-28.

Martínez, F. J., Llinares, S., y Torregrosa, G. (2015). Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos. Universidad de Alicante.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1988). Rutas y raíces hacia el álgebra (C. Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Colombia.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Colombia.

Mora, L (2012). Álgebra en los primeros niveles escolares. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.

Orts, A., Llinares, S., y Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 36*(3), 121-140.

Perry, P., Camargo, L., y Samper, C (2017). Puntos medios en triángulo: un caso de construcción de significado y mediación semiótica. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*, 22 (3), 309-332.

Rodríguez, L. (2016). Trayectoria hipotética de aprendizaje: aprendizaje de las operaciones suma y resta en aulas inclusivas con incorporación tecnológica [Trabajo de Licenciatura]. Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá.

Sicuamia, G. (2017). Trayectorias de Aprendizaje en la orientación espacial para la formación de profesores de básica primaria en ejercicio [Tesis de maestría]. Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), 114-145.

Simon, M., y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory, *Mathematical Thinking and Learning,* 6:2, 91-104.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 390–416.

Tzur, R. (2000). An integrated research on children's construction of meaningful, symbolic, partitioning- related conceptions, and the teacher's role in fostering that learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 123–147.

Tzur, R. (2019). Hypothetical Learning Trajectory HLT: A Lens on Conceptual Transition between Mathematical "Markers". In Siemon, D., Barkatsas, T., y Seah, R. (Eds.), *Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education*: Vol. 3 (pp. 56-74). Leiden, The Netherlands: Brill.

Tzur, R., y Simon, M. (1999). Postulating relations between stages of knowing and types of tasks in mathematics teaching: A constructivist perspective. In Hitt, F y Santos, M (Eds.), *Twentieth-First Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 805–

810). Cuernavaca, México: ERIC.
Vergel, R. (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria [Tesis doctoral]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
Esquinas, A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente [Tesis doctoral]. Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (XIX Reimp. 1995) [título original: ¿How To Solve It?]. México: Trillas.

4.Contenidos

El documento tiene siete. El capítulo 1, hace referencia a nuestra inquietud investigativa. Tratamos las delimitaciones del trabajo de grado dando a conocer las razones que motivaron la realización de este trabajo, los objetivos y la respectiva justificación de este.

En el capítulo 2, damos a conocer los elementos teóricos que dan sustento al estudio. Proporcionamos una definición, las características y los componentes de THA en Educación Matemática. También presentamos una definición de generalización y particularmente de generalización geométrica. Además, propusimos una serie de pasos para generalizar y ejemplificamos tanto las THA como la generalización geométrica.

En el capítulo 3, presentamos el proceso de construcción de una THA sobre el proceso de generalización geométrica. Damos a conocer nuestra estrategia investigativa y las etapas del proceso de construcción de esta trayectoria.

El capítulo 4, hace referencia a la THA para la experimentación piloto. Esta THA está diseñada en torno al proceso de generalización geométrica mediante el uso de papel. Aquí presentamos los componentes de la THA a implementar teniendo en cuenta lo investigado en los capítulos anteriores.

En el capítulo 5, mostramos la descripción del desarrollo de la THA implementada en la experimentación piloto con niños de grado sexto del colegio Isabel II I.E.D y también proponemos posibles modificaciones para la segunda experimentación.

El capítulo 6, describe la segunda experimentación de la THA. Esta THA está diseñada en torno al proceso de generalización geométrica mediante el uso del software GeoGebra, siguiendo las pautas de diseño de la THA de la experimentación piloto y teniendo en cuenta las recomendaciones del capítulo cinco. Esta segunda experimentación se adelantó con niños de grado sexto del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D.

5.Metodología

Nuestra estrategia de investigación en la que se enmarca el trabajo de grado es la entrevista basada en tareas. Según Romberg y Goldin (citado por Camargo, en evaluación) y Clement (citado por Camargo, en evaluación), esta estrategia de investigación consiste en llevar a cabo una indagación sistemática relacionada con la solución de tareas que llevan a cabo un grupo de individuos. Esta estrategia es útil en Educación Matemática cuando se busca profundizar sobre procesos de pensamiento matemático de los individuos, documentar las formas de resolver tareas, estudiar mecanismos de exploración en la solución de tareas y validar hipótesis acerca del aprendizaje. En nuestro trabajo, actuando como investigadoras y docentes en formación, interactuamos con estudiantes mediante preguntas pre-planeadas de acuerdo a los propósitos de la investigación, mientras ellos resuelven una tarea, apoyando su proceso de generalización y buscando que generalicen la propiedad: Dado una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

6.Conclusiones

Sobre la Inquietud Investigativa

Aunque en los currículos nacionales e internacionales escolares se habla de trabajar en el proceso de generalización en grados de secundaria, antes de dar inicio al estudio del álgebra, varios académicos han expuesto la posibilidad de trabajar este tema en edades tempranas. Creemos que nuestro trabajo de investigación puede servir de ejemplo sobre como emprender este reto. Al ser divulgado otros profesores pueden llevar a cabo experiencias similares en sus aulas o animarse a formular sus propias Trayectorias para desarrollar el proceso de generalización en sus estudiantes.

En nuestro trabajo nos percatamos que la generalización geométrica es distinta a la generalización aritmética y a la generalización algebraica. Consideramos que los estudios acerca de la generalización aritmética y generalización algebraica no necesariamente dan la pauta para la generalización geométrica. Por ende, es necesario hacer adaptaciones a las herramientas existentes sobre el proceso de generalización.

Con lo anterior consideramos que se respondió a nuestra inquietud investigativa, puesto que a través de este trabajo vemos cómo se puede propiciar la enseñanza y el aprendizaje de la generalización geométrica por medio de las THA.

Sobre los Objetivos

Podemos decir que se cumplió el objetivo general del trabajo ya que construimos dos Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en torno al proceso de generalización geométrica. La primera THA hace referencia al trabajo mediante el uso de papel "THA con el uso de papel" (ver Anexo 7) y la segunda hace referencia al uso del software de geometría dinámica GeoGebra "THA con el uso del software GeoGebra" (ver Anexo 8).

Sobre el proceso de generalización geométrica pudimos llevar a niños de 10 y 11 años en un tránsito suave a la generalización de una propiedad geométrica. Nos encontramos con expresiones como: "¡Oh!, entonces encontré algo" (Óscar), "por fin me siento inteligente" (Laura), "¿Por qué esto no lo hacemos más seguido en la clase de matemáticas?" (Alejandra), "no quiero que la clase se termine" (Esteban), "podemos encontrar otras propiedades no solo en los triángulos" (Laura), "esto es divertido porque no siento frustración y entiendo todo” (Sofía), estas voces nos muestran que es una experiencia impactante para los niños. Ellos se sienten capaces, les gusta y se motivan a aprender. Las expresiones mencionadas y los relatos presentados en los capítulos 5 y 6 nos permiten asegurar que la THA funciona. Claro está, es susceptible de mejorar en sucesivas implementaciones. Sin embargo, consideramos que es una base para que otros profesores puedan implementar este trabajo con niños de grado sexto e incluso con niños de grado cuarto o quinto de primaria.

Creemos que hemos logrado hacer una caracterización de lo que es una THA que no solo aclara qué es y qué características tiene, sino que además las ejemplificamos. En el capítulo 2.1 se puede ver una recopilación documental que abarca desde los comienzos del estudio de la THA en 1995 hasta trabajos de investigación a nivel nacional del año 2018. Esto puede servir de base para otros trabajos que quieran hacer estudios sobre THA.

En el capítulo 2.4 presentamos cuatro fases y siete pasos para el proceso de generalización geométrica, los cuales han sido adaptados de distintos documentos que dan cuenta del estudio sobre generalización y el proceso de elaboración de conjeturas. Durante la construcción de la THA tomamos las cuatro fases presentadas en el marco teórico, pero en el estudio detallado de la misma vimos la necesidad de incluir dos pasos nuevos en la fase de ver. Finalmente proponemos para el proceso de generalización geométrica seguir cuatro fases y nueve pasos (Ver anexo 9).

El ejercicio piloto de implementación de la THA nos permitió asegurar ciertos supuestos y reestructurar nuestra propuesta para nuevas implementaciones. De esta implementación podemos decir que este tipo de espacios requieren tiempo, dedicación, disposición para escuchar las distintas intervenciones y orientarlas a conseguir la meta propuesta.

Sobre Nuestros Aprendizajes

Nuestros aprendizajes se centran en dos dominios que consideramos importantes en educación matemática: Las THA y la generalización geométrica. A nuestro criterio, decimos que las THA son importantes porque construir una meta de aprendizaje, crear una ruta cognitiva de aprendizaje de los estudiantes, diseñar una secuencia de tareas que respondan a la meta propuesta y demás, son procesos que debe desarrollar todo docente en su labor diaria. Esto le ayuda a visualizar de antemano los posibles sucesos en la intervención del aula. Da pautas para prever situaciones en el intercambio de discurso docente-estudiante y estudiante-docente. Permite una tener una mayor profundidad de los temas a enseñar por la planificación misma.

Adicionalmente, compartiendo la opinión de distintos académicos, para nosotras la generalización es un proceso importante en el desarrollo de pensamiento matemático. En este estudio en las instituciones educativas donde adelantamos nuestras prácticas educativas la geometría no se trabaja con la suficiente profundidad para promover este proceso. Y es una lástima porque se limita el aprendizaje de los niños. Aprendimos que, aunque la generalización aritmética, la generalización algebraica y la generalización geométrica comparten ciertos enfoques, estas no son iguales. Generalizar

geométricamente implica pensar y razonar sobre figuras geométricas. Además, podemos decir que la generalización geométrica es un proceso se puede desarrollar en edades temprana, por tanto, como futuras maestras consideramos que estos aprendizajes son significativos en nuestra labor docente. **Sobre las Perspectivas Futuras de este Trabajo** Nos estamos imaginando la posibilidad de escribir un artículo de divulgación para que otros profesores conozcan la propuesta. También estamos viendo la posibilidad que en estudios de posgrado podríamos retomar el tema para avanzar con otros hechos geométricos o modificaciones a las tareas de acuerdo a nuevas implementaciones.

Elaborado por:	Bocanegra González, Ingrid Ximena; Devia Ávila, María Angélica
Revisado por:	Camargo Uribe, Leonor

Fecha de elaboración del Resumen:	08	02	2020

TABLA DE CONTENIDO

pág.

TABLA DE TABLAS

TABLA DE IMÁGENES

Introducción

Este trabajo descansa sobre dos pilares que son de gran importancia en la Educación Matemática: por un lado, las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje; y, por otro lado, la generalización, en especial la generalización geométrica. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje han sido una herramienta importante para el desarrollo práctico e investigativo de profesores e investigadores. Por esta razón cada vez ha ido cobrando más auge en el campo de la Educación Matemática. Es un tema de interés que debería ser abordado en la formación de profesores de matemáticas. Es importante que como profesoras en formación tengamos la experiencia de construir trayectorias hipotéticas y ofrezcamos posibilidades para la gestión del aprendizaje con indicaciones sobre cómo los niños aprenden matemáticas y cómo podemos intervenir y generar apoyo en los conocimientos matemáticas que se trabajen.

El proceso de generalización es considerado uno de los procesos de importancia en el desarrollo del pensamiento matemático y uno de los principales retos en el estudio de las matemáticas. La utilidad en la resolución de problemas matemáticos hace que sea uno de los procesos inevitables de abordar. En diferentes documentos encontramos cantidad de definiciones sobre generalización, algunas de estas definiciones son propuestas por Poyla (1965), Radford (1997), Mora (2012), Vergel (2016), pero ninguna específica sobre el proceso de generalización geométrica. En este documento presentamos una definición de generalización geométrica, producto de una recopilación de distintas fuentes.

El objetivo del trabajo de grado fue construir una THA sobre el proceso de generalización geométrica para que estudiantes de 10 a 13 años descubran una propiedad de una figura geométrica. Para llevarlo a cabo seguimos un proceso que se consigna en siete capítulos: Primero, delimitación del trabajo de grado. Segundo, marco de referencia. Tercero, proceso de construcción de una THA sobre el proceso de generalización. Cuarto, diseño de la THA –experimentación piloto. Quinto, experimentación piloto de la THA. Sexto, adaptaciones a la THA debidas a la primera implementación y séptimo, las conclusiones.

El capítulo 1, hace referencia a nuestra inquietud investigativa. Tratamos las delimitaciones del trabajo de grado dando a conocer las razones que motivaron la realización de este trabajo, los objetivos y la respectiva justificación de este.

En el capítulo 2, damos a conocer los elementos teóricos que dan sustento al estudio. Proporcionamos una definición, las características y los componentes de THA en Educación Matemática. También presentamos una definición de generalización y particularmente de generalización geométrica. Además, propusimos una serie de pasos para generalizar y ejemplificamos tanto las THA como la generalización geométrica.

En el capítulo 3, presentamos el proceso de construcción de una THA sobre el proceso de generalización geométrica. Damos a conocer nuestra estrategia investigativa y las etapas del proceso de construcción de esta trayectoria.

El capítulo 4, hace referencia a la THA para la experimentación piloto. Esta THA está diseñada en torno al proceso de generalización geométrica mediante el uso de papel. Aquí presentamos los componentes de la THA a implementar teniendo en cuenta lo investigado en los capítulos anteriores.

En el capítulo 5, mostramos la descripción del desarrollo de la THA implementada en la experimentación piloto con niños de grado sexto del colegio Isabel II I.E.D y también proponemos posibles modificaciones para la segunda experimentación.

El capítulo 6, describe la segunda experimentación de la THA. Esta THA está diseñada en torno al proceso de generalización geométrica mediante el uso del software GeoGebra, siguiendo las pautas de diseño de la THA de la experimentación piloto y teniendo en cuenta las recomendaciones del capítulo cinco. Esta segunda experimentación se adelantó con niños de grado sexto del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D.

Finalmente, en el capítulo 7 damos a conocer las conclusiones del trabajo. Las organizamos haciendo referencia a la inquietud investigativa, a los objetivos planteados, al producto, a los aprendizajes y sobre las perspectivas futuras.

Delimitación del Trabajo de Grado

En este capítulo damos a conocer las razones que motivaron la realización de este trabajo, señalando el camino recorrido para configurar el anteproyecto que pusimos a consideración de la coordinación de la Licenciatura en Matemáticas. A partir de algunas ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas que estudiamos en nuestra carrera y de aspectos identificados en la práctica nos llevaron a plantear preguntas que se presentan como inquietud investigativa.

Inquietud Investigativa

El proceso que da lugar a nuestro trabajo de grado parte del interés generado en la materia *Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo,* que hace parte del pensum de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Dicha materia, a cargo del profesor Rodolfo Vergel (2017-II), nos proporciona una orientación teórica sobre el *proceso de generalización aritmética y algebraica* en niños entre 6 a 7 años. Esta materia también nos brinda la posibilidad de diseñar o usar algunas tareas e implementarlas con niños. Sin duda alguna para nosotras, como investigadoras en formación, es de gran ayuda usar la fundamentación mencionada, ya que a través de esta vemos cómo se puede propiciar la enseñanza y el aprendizaje de la generalización en niños de primaria. Es a partir de este ejercicio práctico que buscamos enfocar inicialmente esta tesis en el estudio de los *procesos de generalización aritmética y algebraica*.

En consecuencia, pensamos que nuestro trabajo de grado se puede centrar en el análisis de propuestas curriculares de diferentes colegios de Bogotá, para ver cómo enfocan la enseñanza de la generalización en primaria, y en caso de no encontrar propuestas, diseñar diversas tareas para promoverla. Así, en 2018-I buscamos un profesor de la línea de aritmética y álgebra que nos dirija el trabajo. Nos acercamos a la profesora Lyda Mora para darle a conocer esta idea inicial. Al escucharnos, la educadora indica que el planteamiento inicial es bueno. Sin embargo, también añade que el trabajo es difícil de llevar a cabo debido a su extensión y la complejidad de la temática. Por consiguiente, decidimos trabajar en la idea base del proyecto, la generalización, pero de forma más específica, centrándonos únicamente en el diseño de tareas. Los aportes realizados por la profesora Lyda Mora en ese sentido nos permiten enfocar el trabajo en torno a *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje* (THA) sobre la generalización aritmética.

Durante los siguientes meses, realizamos un avance del trabajo, con el apoyo de la profesora Lyda Mora en el que estudiamos qué es una THA y cuáles son sus características. Infortunadamente, a partir de julio de 2018 ella recibe un nuevo cargo en la administración universitaria. Por ende, tenemos que buscar a otro profesor para la dirección del trabajo y nos dirigimos, por sugerencia de la profesora Lyda, a la profesora Leonor Camargo. Ella acepta ser nuestra asesora de trabajo de grado, pero nos explica que su interés investigativo es sobre la enseñanza de la geometría. Es así como cambiamos nuevamente el tema de investigación quedando delimitado finalmente en la construcción de una THA en torno al proceso de generalización geométrica. Adicionalmente, cambiamos el punto de vista del trabajo sobre la generalización desde una mirada de patrones figurales que desarrolla el sentido numérico y la visualización, hacia la búsqueda de una ruta para descubrir y generalizar una propiedad geométrica. El anteproyecto es presentado en esa dirección y recibimos el aval para su realización en enero del 2019.

Objetivos

Objetivo General

Construir una trayectoria hipotética de aprendizaje del proceso de generalización geométrica para que estudiantes de 10 a 13 años descubran una propiedad de una figura geométrica.

Objetivos Específicos

- Definir y caracterizar qué es una THA y ejemplificar el constructo con varios objetos matemáticos escolares.
- Hacer una revisión documental sobre el proceso de generalización geométrica recopilando tareas que sirvan de base para elaborar la THA.
- Establecer una meta para la THA sobre el proceso de generalización geométrica que se pretende impulsar con estudiantes de 10 a 13 años.
- Prever una posible ruta cognitiva para alcanzar la meta de la THA y preparar una secuencia progresiva de tareas que apoye el avance en la ruta prevista.
- Hacer un ejercicio piloto de la implementación de la THA con estudiantes de 10 a 13 años de la institución educativa Isabel II I.E.D. y una segunda experimentación en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. de Bogotá D.C.

Justificación

Como lo mencionan Gómez y Lupiáñez (2007) la noción de THA ha despertado gran interés en la investigación en Educación Matemática, desde hace aproximadamente 22 años. Según estos autores, Martin Simón fue el primero en introducir esta noción y surgió como un modelo de apoyo para la enseñanza de las matemáticas, basado en la búsqueda de desempeños predeterminados y en el diseño riguroso de tareas para lograrlos. En este sentido, las THA ayudan a los profesores a mirar de forma estructurada el aprendizaje de un concepto o proceso matemático.

Las THA son una herramienta importante para nuestro desarrollo práctico como futuras docentes, ya que en la gestión del aprendizaje podemos tener una comprensión más clara sobre cómo los niños aprenden matemáticas y cómo podemos intervenir y generar cierto apoyo en el desarrollo de los conocimientos matemáticos que estén trabajando. Con base en Simón y Tzur (2004) decimos que al enfocarnos en THA podemos identificar qué es lo que saben los estudiantes, tener presentes los logros de aprendizaje y fundamentar las tareas que se les propongan con base en las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje. La importancia de esta herramienta y la necesidad como docentes en formación de estudiar estrategias didácticas nos motiva el reto de construir THA sobre el proceso de generalización geométrica.

Al realizar una búsqueda en portales de difusión de producción científica como Dialnet, Google Académico y Funes, no encontramos mucha información sobre THA en torno al proceso de generalización geométrica. Algunos de los documentos revisados hacen referencia a THA enfocadas en conceptos geométricos, en el cálculo y en el estudio de fracciones, siendo este el más reciente. En particular, en el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional de tesis de pregrado y de maestría del Departamento de Matemáticas no encontramos algún estudio realizado con respecto a dicho tema. En este sentido el trabajo que adelantamos resulta pertinente.

Acerca del proceso de generalización, vemos que este es importante en el desarrollo del pensamiento matemático y es uno de los principales retos de las matemáticas. Es considerado como uno de los procesos centrales de resolución de problemas matemáticos más útil. Por esto en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se dice que

> “las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras son muy importantes; son una forma de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico, antes de llegar a grados superiores de secundaria” (pag.67).

En el proceso de generalización se involucran la visualización, la exploración y la manipulación de los números y las figuras. De manera similar, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), también se dice que el estudio de patrones es una herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria, incluyendo así escenarios en la vida práctica. Las actividades de generalización de patrones numéricos y geométricos, la exploración y la manipulación de números y figuras, hacen que los estudiantes busquen y formulen regularidades y además argumenten la certeza de estas.

En una búsqueda similar a la realizada para THA, encontramos mayor cantidad de trabajos sobre generalización, pero ninguno alude a THA. Por ejemplo, un documento que trata específicamente el tema de la generalización algebraica es la tesis de García (2011) en la que se desarrolla una ruta de acceso a la generalización utilizada por niños de 13 años describiendo el proceso de generalización desarrollado por los estudiantes al resolver problemas de este tipo. Otro documento es la tesis doctoral desarrollada por Vergel (2016) quién investiga la generalización algebraica en secuencias figurales y numéricas de estudiantes de grado cuarto y quinto de educación básica primaria (9 a 10 años). Estos estudios nos ayudan a construir nuestra THA sobre el proceso de generalización, aunque se orientan hacia la generalización aritmética y algebraica mientras que nosotras lo orientamos hacia la generalización geométrica.

Marco de Referencia

En este capítulo damos a conocer los elementos teóricos que dan sustento al presente estudio. Primero, presentamos el desarrollo del concepto de THA en Educación Matemática. Segundo, damos la definición de THA y listamos sus características y sus componentes. Tercero, ilustramos el concepto de THA con algunos ejemplos. Cuarto, damos la definición de generalización y la particularizamos a la generalización geométrica. Quinto, proponemos una serie de pasos para generalizar. Sexto, damos ejemplos de generalización geométrica.

Evolución de los Trabajos sobre THA en Educación Matemática

En nuestra investigación, como primer referente sobre THA tenemos el estudio de Simón (1995). En este, el autor, plantea lo que es una THA. En un estudio posterior, Tzur (1999) toma la idea de Simón (1995) para el desarrollo de un trabajo referente a la construcción del concepto de fracciones impropias en niños de grado cuarto. Además de usar la idea de THA, Tzur propone elementos que debe tener en cuenta un docente al construir una THA. Tzur y Simón (1999), teniendo en cuenta los estudios anteriores hechos por cada uno de ellos, se reúnen para desarrollar un trabajo donde estudian las etapas del conocimiento de los niños y los tipos de tareas en la enseñanza de matemáticas que las promueven. Lo anterior considerando cómo involucrar estos aspectos en el diseño de una THA.

En el año 2000, Tzur retoma sus estudios sobre las fraccionas impropias y la producción investigativa hecha en conjunto con Simón para hacer una nueva investigación en la que avanza en una THA sobre el concepto de fracción pasando de ver la fracción unitaria como una partición de partes iguales a verla como un operador (Tzur, 2000). Para el año 2004 nuevamente Simón y Tzur se unen, retoman sus investigaciones y enfatizan en el rol que cumplen las tareas matemáticas en el aprendizaje de un concepto y por lo tanto en la concepción de las THA (Simón y Tzur, 2004).

A partir del trabajo de Simón y Tzur surge el interés investigativo en Educación Matemática sobre THA. En la mayoría de estudios los autores toman con referencia la definición de Simón (1995) y proponen sus propias perspectivas. Uno de los estudios es el de Clements y Sarama (2004) quienes dejan de lado el carácter hipotético de las THA e inician el estudio de trayectorias de aprendizaje (TA). Indican que las THA hacen referencias al conocimiento a priori mientras que las TA al conocimiento posteriori. Para el 2009 estos autores toman sus trabajos desarrollados en el 2004 y construyen TA en el proceso de conteo mostrando la transición por niveles de acuerdo a las edades de los niños (Clements y Sarama, 2004).

Gómez y Lupiáñez (2007) toman la definición de Simón (1995) sobre THA y la conciben como una herramienta importante en la formación de profesores de matemáticas de secundaria. Construyen una THA sobre función cuadrática indicando los posibles caminos o rutas que siguen los estudiantes en el aprendizaje de dicho concepto. Esto les permite a los futuros profesores saber qué conocimientos tienen los estudiantes y cómo debería enseñarse el concepto.

León, Celis y Guilombo (2014) toman las ideas de los trabajos desarrollados por Simón y Tzur (2004) y Sarama y Clements (2009) para construir TA de la geometría, dirigida a estudiantes sordos en escolaridad inicial. Cabe resaltar que en nuestra búsqueda este el primer estudio encontrado realizado en Colombia. Un nuevo trabajo enfocado a la población de inclusión colombiana es desarrollado por Rodríguez (2016) tomando como referentes a Sarama y Clements (2009). En León, Celis y Guillomo (2014) se resalta que Rodríguez, al articular estas ideas de THA e inclusión, busca incorporar la tecnología en las THA de las operaciones de suma, resta y en el proceso de conteo de estudiantes que presenten cualquier discapacidad, no solo de estudiantes sordos.

En la última década encontramos varios trabajos que retoman las ideas de Simón y Tzur (1995, 2004) y Clements y Sarama (2004, 2009). Martínez, Llinares y Torregrosa (2015) usan las TA para concebir trayectorias de aprendizaje en los maestros en formación y diseñan THA sobre la enseñanza del concepto de fracciones usando tangram. Ivars, Buforn y Llinares (2016) enfocan su estudio en el desarrollo de la competencia de mirar profesionalmente, proponiendo a los maestros estudiar TA sobre las fracciones. En el año 2017, Cárcamo desarrolla un estudio enfocado a la innovación docente en el que identifica una TA de los conceptos algebraicos "conjunto generador" y "espacio generado". Sicuamia (2017) presenta una TA para la formación de profesores de básica primaria en ejercicio en torno a la orientación espacial. En el año 2018 encontramos a Otrs, Llinares y Boigues (2018) quienes exponen una TA del concepto de recta tangente para alumnos de bachillerato.

En una comunicación personal reciente entre Cárcamo y Tzur a la que tuvimos acceso gracias a Cárcamo, Tzur (2019) indica que ha desarrollado estudios aun no publicados sobre marcadores matemáticos y transiciones conceptuales, relacionados con las THA. Según Tzur (2019) un marcador matemático es un punto de referencia conceptual que comprende una trayectoria de aprendizaje. Por ejemplo, "contar unidades" y "comunicar el cardinal de una colección", son marcadores matemáticos del aprendizaje del conteo. Una transición conceptual hace referencia a la especificación de la transformación conceptual involucrada en el progreso de marcadores matemáticos. Por ejemplo, en el caso del conteo la transición se da al identificar el último número contado como el cardinal de la colección.

Definición, Componentes y Características de una THA

En consonancia con lo que platean Simón (1995) y Sarama y Clemens (2004) en este trabajo consideramos que una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) es un proceso conjeturado de pensamiento y aprendizaje orientado por una meta específica, el cual se organiza con base en unas tareas relacionadas entre sí que ayudan a conseguir la meta a partir de una hipótesis acerca de la ruta que debería seguir el aprendizaje. Las tareas se diseñan para engendrar aquellos procesos mentales o acciones hipotéticas para que los estudiantes transiten por niveles de pensamiento que apoyen el logro de objetivos específicos en un dominio matemático.

Sicuamia (2017) indica que las THA y las TA posibilitan describir las progresiones en el aprendizaje y pueden proporcionar la base de conocimiento para la toma de decisiones de los profesores sobre cuándo enseñar qué tópico y cómo hacerlo. Además, implican hipótesis sobre el orden y la naturaleza del crecimiento de la comprensión matemática de los estudiantes y sobre el tipo de actividades de enlace para apoyar la transición paso a paso hacia los objetivos pretendidos en el currículum de matemáticas.

Según la definición, una THA incluye:

- La meta de aprendizaje.
- Una secuencia de tareas de instrucción.
- Una o más trayectorias o progresiones hipotéticas sobre el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje mediante el cual se diseñan las tareas de instrucción.

Una THA tiene las siguientes características:

- Se basa en la comprensión de los conocimientos actuales de los estudiantes.
- Es una ruta que sirve para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares.

- Mediante tareas matemáticas proporciona herramientas que promueven el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares y, por lo tanto, las tareas son parte clave del proceso de instrucción.
- La participación del profesor en orientar la enseñanza según la THA es esencial, debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso.

Ejemplos de THA

A continuación, presentamos cuatro ejemplos de THA, de aritmética (fracciones), cálculo (recta tangente), aritmética básica (cantidades, números y subitización) y álgebra lineal (conceptos de conjunto generador y espacio generado). Cada uno de los ejemplos presenta la fuente, el nivel de escolaridad al que es posible aplicarlo, la descripción de la tarea y la hipótesis sobre la progresión, la meta de aprendizaje, una o varias tareas de la secuencia prevista por los autores, la progresión del pensamiento por cada una de las tareas mencionadas y por último las submetas dispuestas a cada progresión de la tarea.

EJEMPLO 1	
Fuente:	Tomado y adaptado de Clements y Sarama (2009); pág. 27.
Tema:	Cantidades, números y subitización.
Nivel:	Desde pre – K hasta grado 2 (Estudiantes de 3 a 7 años).
Tarea e hipótesis sobre la progresión:	Esta THA trata sobre el aprendizaje de las cantidades, números y subitización. En esta se presupone una progresión del aprendizaje de los estudiantes en la forma de concebir las relaciones entre el ordinal y el cardinal de una colección. Esta trayectoria consta de diez tareas; aquí presentamos dos de estas.
Meta de aprendizaje:	Desarrollar una comprensión de los números naturales, incluyendo conceptos de correspondencia, conteo, cardinalidad y comparación.

Tabla 2.1. Ejemplo de THA: Cantidades, números y subitización.

Tarea 1.

Usar palabras como "más" y adicionar objetos para comparar cantidades, por medio de la manipulación de objeto.

PROGRESIÓN | **SUBMETAS**

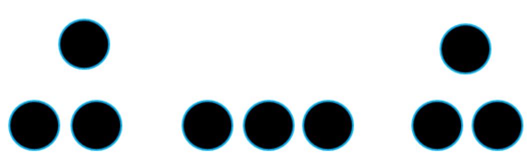
Los estudiantes no están habituados al número, no tienen conocimiento explícito e intencional del número.

Los estudiantes pequeños inician con colecciones de objetos estáticos.

Reconocer el número de objetos en grupos pequeños sin utilizar el conteo. (Nivel de subitización 1 - Numérico Pre-Explicito).

Tarea 2.

1. Cuando los estudiantes responden adecuadamente a los simbolos 1 o 2, pueden responder a la pregunta ¿Cuántos hay?
2. Nominar colecciones como "dos", incluyendo contraejemplos y ejemplos en su expresión lingüística.
3. Mostrar grupos de dos elementos y grupos de tres elementos. Los estudiantes deberán encontrar los grupos que no tienen la misma cantidad de elementos y en sus palabras explicar ¿Por qué?
4. Los estudiantes deben realizar grupos de 3 elementos, como los que se muestran en la siguiente figura, y nombrarlos.



Los estudiantes nombran grupos de 1 a 2 y algunas veces de 3 elementos.

Los estudiantes saben que es una pareja y un trio.

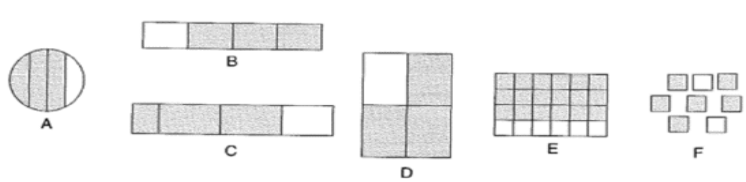
Escoger, combinar y aplicar estrategias efectivas para responder a preguntas cuantitativas, incluyendo el reconocimiento rápido del número en un conjunto pequeño. (Nivel de subitización 2 – Nominador de pequeñas colecciones).

EJEMPLO 2	
Fuente:	Tomado y adaptado de Ivars, Buforn y Llinares (2016); pág. 53.
Tema:	Concepto de fracción.
Nivel:	Primaria (Estudiantes de 6 a 12 años).
Tarea e hipótesis sobre la progresión:	Esta THA trata sobre el aprendizaje del concepto de fracción. En esta se presupone la progresión en el aprendizaje de los estudiantes sobre la forma de ver y concebir el concepto de fracción.
Meta de aprendizaje:	Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes y considerarlas como unidad iterativa.

Tabla 1.2. Ejemplo de THA: Concepto de fracción.

Tarea.

¿Qué figuras de las siguientes representan $3/4$?



PROGRESIÓN

SUBMETAS

En magnitudes continuas los estudiantes no reconocen que las partes en que se divide una unidad para obtener una fracción de esta deben ser congruentes.

Pasar del significado intuitivo de dividir en partes congruentes a la idea de fracción como relación parte-todo y reconocer diferentes representaciones en magnitudes continuas.

En magnitudes continuas los estudiantes reconocen que las partes deben ser congruentes; es decir, reconocen la idea de fracción como relación parte-todo y también consideran la fracción unitaria como unidad iterativa.

En magnitudes discretas los estudiantes reconocen la fracción como relación parte-todo. Consideran una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como unidad iterativa (una parte puede estar dividida en otras partes y consideran un grupo de partes como una parte). Reconocen las fracciones en diferentes modos de representaciones.

Pasar del significado intuitivo de dividir en partes congruentes a la idea de fracción como relación parte-todo y reconocer diferentes representaciones en magnitudes continuas.

Los estudiantes pueden operar y resolver problemas aritméticos simples usando fracciones con ayuda.

Los estudiantes pueden operar y resolver problemas aritméticos con fracciones simbólicamente, identificando secuencias. Pueden justificar gráficamente lo que realizan, pero solo en situaciones sencillas.

Los estudiantes comprenden por qué funcionan los algoritmos de cálculo con las fracciones, y pueden usar dibujos para explicar su funcionamiento.

Construir el significado de los procedimientos de cálculo con las fracciones.

EJEMPLO 3	
Fuente:	Tomado y adaptado de Orts, Llinares y Boigues (2018); pág. 126
Tema:	Concepto de recta tangente.
Nivel:	Primer curso Media (Estudiantes de 15 a 16 años).
Tarea e hipótesis sobre la progresión:	Esta THA trata sobre el aprendizaje del concepto de recta tangente de estudiantes de media. En esta se presupone una progresión del aprendizaje de los estudiantes en la transición desde la concepción euclídea de tangente a la concepción cartesiana, con el apoyo de GeoGebra. Esta trayectoria consta de cuatro tareas; aquí solo presentamos dos de estas.
Meta de aprendizaje:	Transitar de la concepción euclídea a la concepción cartesiana de recta tangente.

Tabla 2.3. Ejemplo de THA: Concepto de recta tangente.

Tarea 1.

Dada la curva $f(x) = 2x^2 - x$, averigua cual de las siguientes dos rectas es tangente a ella en $x = 1$:

a. $y = 3x - 2$

b. $y = \frac{17x-12}{5}$

PROGRESIÓN	**SUBMETAS**
Los estudiantes identifican una recta cercana a la recta tangente por medio de la representación gráfica de una recta que corta a la función en más de un punto y una recta que no la corta en ninguno de los puntos mediante el ejercicio de	Construir el concepto de recta tangente superando la concepción euclídea.
Los estudiantes identifican la recta tangente a una función en un máximo relativo.	
Los estudiantes identifican una recta cercana a la recta tangente a una función en un punto que coincide con un segmento de recta de la función.	Construir el concepto de recta tangente superando la concepción euclídea.

Los estudiantes discuten sobre la existencia de la recta tangente en un punto anguloso[1].

⬇

Los estudiantes usan el zoom de GeoGebra para estudiar la linealidad local de varias funciones en diferentes puntos, incluyendo puntos angulosos.

Construir el concepto de recta tangente superando la concepción euclídea.

⬇

Tarea 2.

Obten la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$

⬇

Los estudiantes hacen uso del deslizador de GeoGebra para visualizar dinámicamente la convergencia de las rectas secantes a la recta tangente.

Hacer uso del concepto de recta tangente como objeto.

⬇

[1]Punto anguloso**:** Una función f posee un punto anguloso en $a \in Dom(f)$ si se verifica una de las siguientes condiciones:

a. $\lim_{h\to o^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty \ y \ \lim_{h\to o^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k$

b. $\lim_{h\to o^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k \ y \ \lim_{h\to o^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$

c. $\lim_{h\to o^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k_1 \ y \ \lim_{h\to o^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k_2$

Donde $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 \neq k_2$. Guiaquinta, M; Modica, G (2012).

Los estudiantes realizan actividades de cálculo de la recta tangente.

↓

Los estudiantes obtienen de forma analítica la ecuación de la recta tangente.

Hacer uso del concepto de recta tangente como objeto.

EJEMPLO 4	
Fuente:	Tomado y adaptado de Cárcamo (2017); pág. 61 y 174.
Tema:	Conjunto generador y espacio generado.
Nivel:	Estudiantes universitarios de primer año de ingeniería.
Tarea e hipótesis sobre la progresión:	Esta THA trata sobre el aprendizaje de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. En esta se presupone la progresión del aprendizaje de los estudiantes en la construcción de conceptos de álgebra lineal, desde una actividad matemática informal (con vectores y contraseñas) hacia un razonamiento matemático más formal (aplicación de conjunto generador y espacio generado). Esta trayectoria consta de cinco tareas; aquí presentamos dos de esas tareas.
Meta de aprendizaje:	Los estudiantes determinan un modelo matemático para generar contraseñas con base en vectores siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemáticas y también relacionan los conceptos en estudio con un contexto real con la finalidad de que eviten confundirlos.

Tabla 2.4. Ejemplo de THA: Conjunto generador y espacio generado.

Tarea 1.

Crear un generador de contraseñas seguras basado en vectores.

PROGRESIÓN **SUBMETAS**

Los estudiantes usan su conocimiento actual de combinación lineal para construir una combinación lineal de R^n con escalares genéricos.

Recordar los conocimientos previos sobre vectores.

Los estudiantes proporcionan, al menos, un ejemplo de un vector que surge de la combinación lineal que construyeron.

Los estudiantes coordinan su conocimiento sobre conjuntos y la combinación lineal que construyeron para describir dos conjuntos. Por ejemplo, S y V. S lo describen por extensión y tiene los vectores que permiten hacer la combinación lineal que construyeron. V lo describen por comprensión y contiene todos los vectores que se generan al darle valores a los escalares de la combinación lineal que construyeron.

Recordar los conocimientos previos sobre vectores.

Los estudiantes caracterizan a los conjuntos S y V en términos de su cardinal, notación matemática y la inclusión de uno sobre otro.

Recordar los conocimientos previos sobre vectores.

Tarea 2.

Hacer una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Los estudiantes caracterizan al conjunto generador y al espacio generado en términos de su cardinal y notación matemática.

Los estudiantes buscan las características de conjunto generador y espacio generado en los conjuntos S y V.

Los estudiantes vinculan al conjunto S con el concepto de conjunto generador y al conjunto V lo relacionan en el concepto de espacio generado.

Visualizar y distinguir los conceptos de conjunto generador y espacio generado en contexto real y matemático.

Los estudiantes observan los conjuntos de las tablas de analogía de sus compañeros para describir conjunto generador y espacio generado en términos de los elementos que tiene cada uno.

Visualizar y distinguir los conceptos de conjunto generador y espacio generado en contexto real y matemático.

Elementos del Proceso de Generalización a Considerar en una THA

A continuación, damos a conocer los elementos teóricos que, desde nuestro punto de vista, dan sustento al estudio del proceso de generalización geométrica. Esto es, la definición, las fases y pasos para su desarrollo y ejemplos que muestran cómo es el progreso en tal proceso.

Definición de generalización geométrica.

Encontramos diversas definiciones de generalización, pero ninguna específica sobre el proceso de generalización geométrica. De acuerdo con lo que plantean Polya (1965, p. 97), Mason (1989, Citado por Esquinas, 2008, p.94), Radford (1997, Citado por Vergel, 2016, p. 74) y Mora (2012) generalizar es descubrir una ley o regla general que indica: algo que parece ser cierto (conjetura), por qué parece ser cierto (justificación), y dónde parece que es cierto (dominio de validez). En geometría, usualmente, la generalización se hace con el fin de descubrir propiedades de objetos geométricos partiendo del estudio de casos particulares, para luego identificar características comunes y expandir estas características al objeto geométrico general.

Nos parece pertinente diferenciar cuándo se generaliza y cuándo no; esto es, qué es generalizar y qué no es. En la tabla 5 se resumen algunas de tales diferencias, según una adaptación hecha a una propuesta de Mora (2012):

¿Qué es?	*¿Qué no es?*
• Buscar una propiedad común en casos particulares, abstraer las invariantes esenciales; a estas propiedades comunes se les llama regularidades. • Relacionar varios objetos geométricos a partir de características en común y que permiten incluirlos dentro de una determinada clase (Bressan y Gallego, 2010) • Transferir las propiedades que se cumplen en un objeto geométrico, a otro, con características similares.	• Identificar aspectos en común de casos particulares. • Pasar de un caso particular (uno solo) a una expresión general. • Definir un conjunto de objetos geométricos a partir de las propiedades de un solo objeto.

Tabla 2.5. ¿Qué es? y ¿Qué no es? Generalización.

Según Mora (2012) la generalización está relacionada con otros procesos propios de la actividad matemática, que podrían considerarse más particulares tales como: inducir, observar, descomponer, hacer analogías, descontextualizar e identificar características comunes y argumentar. Estas relaciones dejan ver que la generalización es importante y deba atenderse en la enseñanza de las matemáticas.

Fases y pasos del proceso de generalización.

Mora (2012), quien hace una recopilación de autores que tratan sobre la generalización desde principios de siglo XVIII (como Descartes, Wallas, Hadamard, Polya, Schoenfeld, André y Mason), propone las siguientes fases para lograrla: ver, describir, escribir y verificar. Por su parte, Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov (2008) sugieren cinco tipos de rutas para el proceso de elaboración de conjeturas, en el marco de la resolución de problemas, uno de los cuales denominan "Conjeturas basadas en la percepción". Esta, afín a nuestro trabajo, consta de siete pasos, que articulamos a las fases propuestas por Mora (2012), aunque con algunas adaptaciones de la siguiente manera.

Fase 1: Ver

La primera fase en el proceso de generalización geométrica es el reconocimiento de semejanzas y diferencias entre los atributos de varias representaciones que tienen una propiedad común, la identificación de regularidades entre las representaciones, la diferenciación "de los rasgos fundamentales que conforman una estructura de aquellos no esenciales a la misma" (Bressan y Gallego, 2010, p. 15). Esta fase se refiere a ver atributos comunes, a encontrar relaciones desde la visualización de las representaciones del objeto geométrico. En esta etapa no necesariamente se es capaz de expresar la propiedad, consiste en sólo *verla*.

<u>Pasos:</u>

1. Traducción de un enunciado verbal o escrito en dos o más representaciones.
2. Exploración empírica de las representaciones realizadas.
3. Observación de las características especiales de las representaciones y de sus regularidades, con base en la percepción de las representaciones individuales.

Fase 2: Describir

La segunda fase en el proceso de generalización geométrica es la descripción de la regularidad identificada en las representaciones. Aunque en la fase anterior se pueden usar algunas expresiones para referirse a la propiedad geométrica, esto no es usual con los estudiantes; muchas veces el paso de la fase ver a la fase describir conlleva dificultades. Al respecto Mason et al. (1988, p. 21, citado por Mora, 2012, p.18), resaltan que “los alumnos con frecuencia encuentran muy difícil el moverse del “ver” al “decir”, y su esfuerzo para decir lo que ellos ven necesita apoyo en cuanto al tiempo y a la aceptación de sus esfuerzos incompletos”. En la etapa de describir hay que animar a los estudiantes a que hablen, a que comuniquen sus ideas, que expresen lo que ven, de manera oral. Es fundamental el rol del profesor como orientador.

Pasos:

4. Formulación oral de una regularidad detectada con base en las características específicas de las representaciones.

Fase 3: Escribir

Esta fase se refiere a escribir en palabras la conjetura formulada oralmente, con apoyo de dibujos, símbolos, términos y notación geométrica, de manera natural, espontánea, propia, preferiblemente por necesidad y no por persuasión o instrucción del profesor(a). Escribir o registrar la propiedad geométrica ayuda a dejar más claras las ideas que habían surgido en las dos fases anteriores. Cuando se piensa o se habla las ideas suelen ser poco rigurosas. Cuando se escribe, o se plasma una idea, es posible revisarla, discutirla y modificarla.

Pasos:

5. Escritura de la regularidad descrita en un enunciado tipo conjetura con base en las representaciones específicas.

Fase 4: Verificar

Consiste en buscar argumentos, dar explicaciones de la propiedad hallada, la búsqueda de relaciones entre las diferentes expresiones escritas. Consiste en preguntarse acerca de ¿Cómo se está seguro de que la propiedad siempre se cumple? ¿Por qué se da esa situación? Para poder decir por qué la regla es cierta se necesita tener una noción de lo general, y esto involucra admitir que un ejemplo particular puede mostrar lo general, a pesar de que éste sea específico. Y poder mostrar lo general requiere de la estructuración del ejemplo particular para así poder señalar las características generales (Mason et al., 1988, p. 25, citado por Mora, 2012, p. 20).

Pasos:

6. Justificación empírica de la conjetura y búsqueda de una explicación.
7. Generalización del enunciado de la conjetura a la figura geométrica genérica, es decir, sin condiciones específicas.

Ejemplos del proceso de generalización geométrica.

A continuación, presentamos tres ejemplos del trabajo realizado por estudiantes, que nosotras consideramos de generalización geométrica. Cada uno está referido una propiedad distinta: Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado; si un cuadrilátero está circunscrito en una circunferencia, entonces las bisectrices de sus ángulos concurren en un punto; dado un triángulo y la mediana a uno de sus lados, si la mediana es congruente con los segmentos determinados por el extremo de esta, entonces el triángulo está inscrito en una circunferencia cuyo diámetro es el lado en el que se encuentra el extremo de la mediana. Para cada ejemplo indicamos la fuente, el tema, el nivel de escolaridad de los estudiantes que hicieron la generalización, el enunciado de la tarea que dio lugar a la generalización y la descripción de las fases y pasos de la propiedad geométrica según nuestra caracterización.

EJEMPLO 1	
Fuente:	Tomado y adaptado de Perry, Camargo y Samper (2017).
Tema:	Propiedades de los triángulos.
Nivel:	Séptimo de bachillerato.
Enunciado de la tarea:	Representa cualquier ΔABC. Sea D punto medio del $\overline{AB}$ y E punto medio

	del $\overline{AC}$. Construye el $\overline{DE}$. Busca una relación especial entre DE y BC. Describe cómo la encontraste. Escribe cuál es la relación que existe.
Conjetura lograda:	Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Tabla 2.6. Ejemplo 1 de generalización geométrica: Propiedades de los triángulos.

Ver

1. Traducción de un enunciado verbal o escrito en una o varias representaciones, con base en la percepción visual.

Usando una tableta, el estudiante Andrew representa un triángulo, denomina sus vértices como indica el enunciado y determina los puntos medios de los lados sugeridos. Como el enunciado menciona que debe encontrar una relación especial entre DE y BC, Andrew observa la representación y propone que DE y BC son segmentos. La profesora le aclara al estudiante que DE y BC se refiere a distancias, $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ se refiere a segmentos.
Con la anterior aclaración, el estudiante toma las medidas de los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ y propone como relación que DE es la mitad de BC. La profesora le pregunta si piensa que esta relación se verifica solo para el triángulo específico y Andrew dice que sí. Ella se sugiere averiguar si la relación se cumple o no en cualquier triángulo. Andrew menciona que tendría que construir nuevos triángulos. Para esto la profesora le sugiere usar el arrastre que ofrece GeoGebra.

2. Exploración empírica de las representaciones realizadas.

Andrew arrastra uno de los vértices y obtiene cinco triángulos; toma las medidas de los segmentos cuya distancia quiere comparar.

3. Observación de las características especiales de las representaciones y de sus regularidades, con base en la percepción de las representaciones individuales.

Andrew se da cuenta que la relación entre las medidas, encontrada para el primer triángulo, al parecer se cumple en cada uno de los otros triángulos. Aunque los valores no le dan exactos, menciona, con cierta duda, que parece que una de las medidas es la mitad de la otra. La profesora le aclara que la inexactitud de las medidas se debe a la falta de precisión en las medidas que GeoGebra proporciona. Con esta aclaración Andrew se convence de la regularidad.

Describir

4. Formulación oral de una regularidad detectada con base en las características específicas de las representaciones.

La profesora le propone a Andrew relatar lo descubierto sin usar letras para especificar los vértices del triángulo o el segmento. Ella promueve un intercambio verbal con Andrew preguntándole: "¿cómo le contarías lo descubierto a la profesora que estuvo la semana pasada? si para esto no tienes la tableta ni papel a mano ¿qué le dirías?" Andrew menciona: "un segmento que es DE y otro segmento que es BC… La relación es que… DE es la mitad de BC". La profesora le pregunta si su recuento es preciso y Andrew menciona que lo debe precisar más. La profesora le ayuda a mejorar el recuento, dándole pistas sobre cómo comenzar, sugiriéndole cómo evitar nombrar el triángulo específico y complementando lo que el niño dice. El texto en azul corresponde a las intervenciones de la profesora y el texto en negro, a las de Andrew:

> Se tomó un triángulo. Se tomó un triángulo y se buscó la… ¿Se tomó un triángulo cualquiera o uno especial? Un triángulo… ABC. No hablemos del triángulo *ABC*. Se tomó un triángulo cualquiera, no tenía condiciones especiales ¿o sí? Un triángulo cualquiera… ¿y? Se buscó la relación… Se ubicaron los puntos medios. Ajá. Se ubicaron los puntos medios… De dos de los lados. De dos de los lados. Y luego se unieron, se hizo un segmento. Se construyó el segmento de extremos esos puntos medios. Esos puntos medios y luego se buscó… eee, las… ay, se me olvidó la palabra. ¿La relación? La relación entre ese segmento y el segmento… uno de los segmentos. ¿Uno de los segmentos o uno de los lados? Uno de los lados. ¿Cualquiera de los lados? No. ¿Cuál? El de abajo… Pero, ¿tiene que estar abajo o podría estar de ladito a veces? Sí, puede estar de lado. Ah, entonces, no te sirve decir debajo o de lado porque… El lado BC. (…) Pero si no has dicho nada de letras…

Escribir

5. Escritura de la regularidad descrita en un enunciado tipo conjetura con base en las representaciones específicas.

La profesora le pregunta a Andrew "¿Cómo escribirías esa propiedad que encontraste? Teniendo en cuenta que tú tomaste varios triángulos." Andrew escribe: "la relación que existe es que la medida de DE es la mitad de BC y que BC es el doble de DE." Si bien Andrew no expresa la regularidad de manera condicional, formula una conjetura.

Verificar

6. Justificación empírica de la conjetura y búsqueda de una explicación.

Andrew no hace intentos por justificar la conjetura encontrada.

7. Generalización del enunciado de la conjetura a la figura geométrica genérica (sin condiciones específicas).

La profesora procura que Andrew generalice pidiéndole que enuncie lo que descubrió. Se da el siguiente intercambio entre ellos, en el ella le va dando pistas sobre de dónde partir, qué debe escribir y qué concluir:

Partimos ¿de qué? Partimos desde un triángulo. Partimos de un triángulo cualquiera. Luego… buscamos los puntos medios… de dos de los lados… luego, eee... construimos el segmento de los puntos medios, después de haber hecho eso eee… utilizamos… ¿Qué encontraste? Una relación… entre el lado opuesto al segmento de los puntos medios o… tercer lado. ¿Cuál es esa relación? La relación era que el segmento de los puntos medios era la mitad de… del tercer lado, y también que el doble del segmento de los puntos medios era… la medida del tercer lado.

EJEMPLO 2	
Fuente:	Tomado y adaptado de Arzarello, Olivero, Domingo y Robutti (2002).
Tema:	Propiedades de los cuadriláteros.
Nivel:	Noveno de bachillerato (estudiantes de 15 años de edad).
Enunciado de la tarea:	Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Considere las bisectrices de sus ángulos internos y sus puntos de intersección H, K, L, M de las bisectrices consecutivas por pares. Arrastre $ABCD$, considerando todas sus diferentes configuraciones: ¿Qué sucede con el cuadrilátero $HKLM$? ¿En qué tipo de figura se convierte?
Conjetura lograda:	Si el cuadrilátero está circunscrito en una circunferencia, entonces las bisectrices de los ángulos del cuadrilátero concurren en un punto.

Tabla 2.7. Ejemplo 2 de generalización geométrica: Propiedades de los triángulos.

Ver

1. Traducción de un enunciado verbal o escrito en una o varias representaciones, con base en la percepción visual.

La pareja formada por Mariana y Julián, representan en Cabri un cuadrilátero al que denominan $ABCD$. Construyen las bisectrices de cada uno de los ángulos del cuadrilátero y los puntos de intersección de las bisectrices consecutivas, por pares. A los puntos de intersección los nombran como H, K, L y M.

Ver

2. Exploración empírica de las representaciones realizadas.

Mariana y Julián exploran varios casos por medio del arrastre. Observan que cuando arrastran el cuadrilátero $ABCD$ hasta que visualmente parece ser un cuadrado, los puntos $HKML$ se convierten en un solo punto. Mediante el arrastre, los estudiantes continúan la exploración en la búsqueda de algunas propiedades comunes para todas las figuras en donde H, K, L y M concurran. A partir de esto Mariana y Julián se dan cuenta que este tipo de configuración se puede ver en cuadriláteros que aparentemente no tienen ninguna propiedad común.

3. Observación de las características especiales de las representaciones y de sus regularidades, con base en la percepción de las representaciones individuales.

Mariana y Julián arrastran el cuadrilátero $ABCD$ manteniendo la concurrencia de los puntos H, K, L y M. Toman las medidas de los lados del cuadrilátero $ABCD$, ven que la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos y recuerdan que esta propiedad caracteriza a los cuadriláteros circunscritos.

Describir

4. Formulación oral de una regularidad detectada con base en las características específicas de las representaciones.

Cuando hacen su reporte, Mariana y Julián mencionan que vieron que la suma de dos lados opuestos del cuadrilátero es igual a la suma de los otros dos lados y que ellos recuerdan que un cuadrilátero está circunscrito si y solo si la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados. Formulan oralmente la siguiente propiedad: “Los cuadriláteros cuya suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados están circunscritos en una circunferencia”.

Escribir

5. Escritura de la regularidad descrita en un enunciado tipo conjetura con base en las representaciones específicas.

Escribir

Con base en lo anterior, Mariana y Julián formulan la siguiente conjetura: "Si un cuadrilátero se puede circunscribir a una circunferencia, entonces las bisectrices de sus ángulos internos se juntarán en un punto, por lo que las distancias desde este punto son iguales y la suma de los lados opuestos también es igual". Después, con la ayuda del profesor, presentan la siguiente conjetura de forma condicional: "Si un cuadrilátero está circunscrito en una circunferencia entonces los puntos de corte de las bisectrices coinciden".

Verificar

6. Justificación empírica de la conjetura y búsqueda de una explicación.

Utilizando las herramientas de Cabri, Mariana y Julián construyen rectas perpendiculares a cada lado del cuadrilátero $ABCD$ de modo que cada una de estas rectas contenga al punto de la intersección de las bisectrices. Toman la medida de los segmentos cuyos extremos son el punto de intersección de las bisectrices y la intersección de la recta perpendicular con el lado del cuadrilátero. Luego observan que estos segmentos tienen la misma medida, por lo tanto, construyen la circunferencia cuyo radio es uno de estos segmentos determinados y el centro es el punto de intersección de las bisectrices. De esta forma intentan verificar que la conjetura escrita anteriormente es válida.

7. Generalización del enunciado de la conjetura a la figura geométrica genérica, sin condiciones específicas.

Finalmente, Mariana y Julián generalizan lo encontrado de la siguiente manera:

*"*Si el cuadrilátero está circunscrito en una circunferencia, entonces los puntos de intersección de las bisectrices del cuadrilátero coinciden en un punto*".*

EJEMPLO 3	
Fuente:	Tomado y adaptado de Arzarello, Olivero, Domingo y Robutti (2002.
Tema:	Propiedades de los triángulos.
Nivel:	Noveno de bachillerato (estudiantes de 15 años de edad).
Enunciado de la tarea:	Sea ΔABC. Considere un punto P en $\overline{AB}$ y los ΔAPC y ΔPCB. Realiza una hipótesis sobre las propiedades del ΔABC que son necesarias para que los ΔAPC y ΔPCB sean isósceles.
Conjetura:	Dado un triángulo y la mediana a uno de sus lados, cuando la mediana es congruente con los segmentos que determina el extremo de esta sobre el

	lado correspondiente del triángulo, entonces el triángulo está inscrito en una circunferencia y el diámetro es el lado en el que se encuentra el extremo de la mediana.

Tabla 2.8. Ejemplo 3 de generalización geométrica: Propiedades de los triángulos.

Ver

1. Traducción de un enunciado verbal o escrito en una o varias representaciones, con base en la percepción visual.

La pareja formada por Gabriela y Santiago, representan en Cabri un triángulo al que denominan ABC, y construyen a P como punto medio de $\overline{AB}$.

2. Exploración empírica de las representaciones realizadas.

Gabriela y Santiago realizan la siguiente exploración. Primero toman las medidas de los segmentos $\overline{AP}, \overline{PB}, \overline{PC}$, luego arrastran el punto C y observan que los ΔAPC y ΔPCB son isósceles, cuando $PC = AP$. Luego Gabriela y Santiago observan que si se tiene $PC = AP$, entonces al mover el punto C parece ser que este siempre está en una circunferencia.

3. Observación de las características especiales de las representaciones y de sus regularidades, con base en la percepción de las representaciones individuales.

Al tomar las medidas y mover los puntos del triángulo, Gabriela y Santiago descubren que el vértice C del ΔABC pertenece a la circunferencia con centro en P y radio $\overline{AP}$ ($\odot P,_{PA}$), $\overline{CP}$ es la mediana del triángulo y $\overline{AB}$ es el diámetro de la circunferencia.

Describir

4. Formulación oral de una regularidad detectada con base en las características específicas de las representaciones.

Una vez Gabriela y Santiago han observado características de las representaciones y su regularidad, mencionan lo siguiente: "*Los triángulos isósceles se forman cuando el vértice C pertenece a la circunferencia con centro en P y radio $\overline{AP}$, pero también $\overline{CP}$ es mediana*".

El profesor interviene preguntando, si hay otra forma equivalente de expresar la conjetura antes mencionada. A lo que ellos responden "*El triángulo ABC, su mediana $\overline{CP}$, cuando $\overline{AP} \cong \overline{BP} \cong \overline{PC}$, significa que el triángulo está inscrito en una circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y $\angle ACB$ es recto*".

Escribir

5. Escritura de la regularidad descrita en un enunciado tipo conjetura con base en las representaciones específicas.

Con lo anterior, Gabriela y Santiago formulan una conjetura precisa de forma condicional: Si ΔABC, su mediana $\overline{CP}$ y cuando $\overline{AP} \cong \overline{BP} \cong \overline{PC}$, entonces el ΔABC está inscrito en la circunferencia con centro en P, radio $\overline{AP}$ y diámetro $\overline{AB}$.

Verificar

6. Justificación empírica de la conjetura y búsqueda de una explicación.

Gabriela y Santiago no hacen intentos por justificar la conjetura encontrada.

7. Generalización del enunciado de la conjetura a la figura geométrica genérica (sin condiciones específicas).

Al final, Gabriela y Santiago generalizan lo encontrado de la siguiente forma: Si ΔABC , $\overline{CP}$ es mediana y $\overline{AP} \cong \overline{BP} \cong \overline{PC}$, entonces el ΔABC está inscrito en $\odot P,_{PA}$ y $\overline{AB}$ es el diámetro.

Construcción de una THA sobre el Proceso de Generalización

En este capítulo damos a conocer el proceso de construcción de la THA sobre el proceso de generalización geométrica. Primero, presentamos la estrategia investigativa; segundo, describimos las etapas del proceso de construcción; tercero, informamos sobre la experimentación piloto de la primera versión de la THA y cuarto, nos referimos a una segunda experimentación con adaptaciones a la primera versión.

Estrategia Investigativa

Nuestra estrategia de investigación es la entrevista basada en tareas. Según Romberg y Goldin (citado por Camargo, en evaluación) y Clement (citado por Camargo, en evaluación), esta estrategia de investigación consiste en llevar a cabo una indagación sistemática relacionada con la solución de tareas que llevan a cabo un grupo de individuos. Esta estrategia es útil en Educación Matemática cuando se busca profundizar sobre procesos de pensamiento matemático de los individuos, documentar las formas de resolver tareas, estudiar mecanismos de exploración en la solución de tareas y validar hipótesis acerca del aprendizaje. En nuestro trabajo, actuando como investigadoras y docentes en formación, interactuamos con estudiantes mediante preguntas pre-planeadas de acuerdo a los propósitos de la investigación, mientras ellos resuelven una tarea, apoyando su proceso de generalización y buscando que generalicen la propiedad: Dado una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

Goldin (2000) (Citado por Camargo, en evaluación) indica que mediante las entrevistas basadas en tareas no se buscan resultados generales sobre el funcionamiento de la tarea o sobre formas de pensar, debido a que cada experiencia es diferente y por tanto no se puede tener un control sobre los resultados de forma global. Pero sí se obtiene información útil para que otros investigadores o docentes usen la tarea adaptándola a situaciones particulares. Esta aclaración se relaciona con nuestra intención de construir una THA porque realizamos dos aplicaciones una como prueba piloto y una segunda aplicación de la misma tarea en otra institución, con la intención de adaptarla para que sea usada en diferentes situaciones y contextos.

Según Goldin (citado por Camargo, en evaluación) en esta estrategia investigativa no solo intervienen los participantes informantes (uno o varios) y los investigadores, sino también la tarea y todos los recursos disponibles para desarrollarla. En nuestro caso participa un grupo de estudiantes de grado sexto, una investigadora y las autoras de este trabajo cuya labor es promover el diálogo con los estudiantes mientras resuelven las tareas. Las maestras en formación a partir de preguntas previstas buscan que los estudiantes expresen en voz alta o por escrito, de manera clara, completa y precisa, lo que piensan, cuáles estrategias creen que les permiten resolver la tarea por qué emplean estas estrategias, que proceso siguen y qué resultados obtienen. Las maestras en formación tienen la libertad de hacer preguntas o sugerir el uso de ciertos materiales para que los estudiantes clarifiquen sus reportes, pero minimizando sus intervenciones, aspecto que consideramos es de importancia en el proceso de generalización, con el fin de conseguir que los estudiantes logren los objetivos planeados en la tarea.

Según Goldin (Citado por Camargo, en evaluación) las tareas que se proponen para seguir esta estrategia investigativa no deben ser rutinarias y tienen que preverse detalladamente con el fin de anticipar el éxito en el proceso por parte de los estudiantes y cierto control sobre la información que se recoge. El enfoque se dirige al proceso de resolución de las tareas y no a la evaluación de las repuestas. Los productos de las entrevistas basadas en tareas pueden ser explicaciones o reportes detallados acerca del proceso seguido por las investigadoras que dan cuenta de cómo los estudiantes desarrollan las tareas.

Las etapas de la entrevista basada en tareas, que se ajustan a nuestra investigación son las siguientes: Primero, fundamentación conceptual que sirve de marco de referencia y herramienta para la toma de decisiones sobre el contenido, la estructura, la complejidad de las tareas. Segundo, la definición de: las preguntas que harán las maestras en formación con el fin de conseguir la meta planteada, el escenario, los materiales disponibles, la selección de los estudiantes a quienes se les realizará la entrevista y el tiempo de la misma que puede distribuirse en una o varias sesiones. Tercero, preparación del libreto de la tarea y de la posible interacción entre las maestras en formación y los estudiantes seleccionados. Cuarto, la aplicación piloto de la tarea y el estudio detallado de los resultados obtenidos en esta primera aplicación, que puede incluir el juicio de expertos. Quinto, la preparación de las maestras en formación para una nueva aplicación de la tarea, buscando precisar mejor las intervenciones, con el fin de conseguir mejores resultados que en la anterior aplicación.

Etapas del Proceso

Fundamentación conceptual.

La fundamentación conceptual de nuestra investigación está compuesta por dos referentes: el primero son las THA y el segundo es el proceso de generalización geométrica. Para elaborar el primer referente, hicimos una revisión de aproximadamente 20 documentos. Como mencionamos en el capítulo 2.1, página 7, quien trabajó por primera vez acerca de las THA fue Martin Simón en 1995. Desde este momento realizamos un rastreo encontrando diversos planteamientos y enfoques. Con la información recopilada en la revisión bibliográfica diseñamos una línea de tiempo, en la cual identificamos la evolución del concepto de THA en trabajos de Educación Matemática, además las características y los componentes de una THA. A partir de este estudio propusimos una definición de THA y mostramos cuatro ejemplos de temas matemáticos distintos. Este marco se encuentra en el capítulo dos de este documento.

Para construir un marco de referencia sobre el proceso de generalización, en particular sobre la generalización geométrica, realizamos una revisión de aproximadamente 10 documentos. A partir de estos, identificamos elementos que nos permitieron proponer una definición de generalización geométrica. Además, establecimos una serie de fases y pasos que permiten plantear tareas donde el proceso de generalización sea desarrollado de forma progresiva y se pueda identificar la ruta que se sigue en tal proceso. Además, propusimos ejemplos de generalización geométrica donde damos a conocer las especificaciones y las relaciones entre las fases y los pasos que influyen en tal proceso. La fundamentación conceptual lograda se encuentra en el capítulo 2.

Diseño de la THA.

A partir de la fundamentación conceptual diseñamos una THA para el proceso de generalización geométrica de estudiantes de grado sexto de colegios donde desarrollamos nuestras prácticas de inmersión. La tarea consiste en construir una semicircunferencia y explorar qué propiedad geométrica común tienen los triángulos que se forman tomando los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia, como vértices.

En el diseño propusimos una meta de aprendizaje, una tarea general, la construcción de sub-tareas que ayuden a dar solución a la tarea general y preparamos preguntas orientadoras para la entrevista, vista como herramienta de interacción con los estudiantes a medida que desarrollan cada sub-tarea. Para cada sub-tarea se pensó qué podría suceder en el momento de la aplicación de modo que se elaboraron hipótesis acerca de estas y las progresiones sobre cómo se desarrollaría el proceso de generalización geométrica para el enunciado de cada sub-tarea. Por último, se diseñaron los instrumentos de recolección de información. El diseño de la versión piloto de la THA está reportado en el capítulo 4.

Preparación de la entrevista.

A continuación, presentamos una descripción del contexto general y del aula de las instituciones donde realizamos la aplicación piloto y la segunda aplicación; además damos a conocer características de los participantes de la entrevista y los recursos que se utilizaron para el desarrollo de cada tarea.

Contextos institucionales.

Como la estrategia investigativa requiere al menos dos experimentaciones, las llevamos a cabo en dos contextos institucionales distintos, pero con el mismo grado de escolaridad (grado sexto). La aplicación piloto se desarrolló en el colegio Isabel II I.E.D. dirigida por la maestra en formación María Angélica Devia Ávila y la segunda aplicación en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D dirigida por la maestra en formación Ingrid Ximena Bocanegra González. En estos lugares realizamos las prácticas de inmersión (Práctica de Integración Profesional a la escuela y Práctica según modalidad). Dichas prácticas se encuentran estipuladas en el pensum de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

La institución Isabel II I.E.D. sede A es de carácter distrital y tiene dos sedes (sede A y sede B). En cada sede se adelantan dos jornadas escolares (mañana y tarde). En la mañana se encuentran estudiantes con discapacidad auditiva total o parcial. Desde 1997, se incluyó un estudiante sordo y de ahí en adelante el colegio Isabel II I.E.D. se ha consolidado como una institución líder de la inclusión educativa, integradora de personas sordas desde preescolar hasta once. La institución se encuentra ubicada en la localidad 8 de Kennedy, cuenta con un equipo de profesionales, con amplia experiencia en la educación de escolares sordos. Los estudiantes que tienen discapacidad auditiva se encuentran en los cursos que terminan en 2, es decir, 602, 702, 802, 902, 1002 y 1102. Cada curso con estudiantes de inclusión cuenta con un interpreté el cual facilita la comunicación entre docente y estudiantes.

El Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D es una institución de carácter distrital, ubicado al sur de la ciudad, en la localidad de Ciudad Bolívar, en el barrio Meissen. El CEDID Técnico Guillermo Cano Isaza nace en la década de los 80, como respuesta a las políticas de inclusión social apoyadas por el Banco Interamericano de Desarrollo, creándose El Plan de Ciudad Bolívar, el cual buscaba enfrentar los graves problemas de salud, educación, vías y seguridad de la zona. Como respuesta a este Plan emergente nace el Subprograma de Educación del cual hacen parte cinco complejos educativos llamados CEDID (Centros de Enseñanza Diversificada). A la fecha se desarrollan las jornadas mañana, tarde y noche y se ofrecen tres especialidades de educación técnica: Contabilidad y Finanzas, Agroindustria Alimentaria y Electromecánica y Diseño.

Contexto del aula para cada experimentación.

La entrevista de la experimentación piloto fue diseñada para ser aplicada a estudiantes de grado sexto, curso 601, de la institución Isabel II I.E.D. En el curso se encontraban 40 estudiantes, 18 hombres y 22 mujeres, cuyo rango de edad es de 11 a 13 años. Había una estudiante con discapacidad cognitiva, y tres estudiantes repitentes. Evidenciamos que algunos estudiantes no recordaban los conceptos matemáticos abordados en clases anteriores, aspecto que hacía difícil llevar un proceso de aprendizaje y enseñanza secuencial y apropiada de las diferentes temáticas.

En este curso, la clase de geometría es de una hora cada semana. En el momento de realizar la aplicación de la entrevista piloto, los estudiantes ya habían estudiado las nociones primitivas, punto, recta y plano y conceptos como rectas paralelas y perpendiculares, definición y clasificación de ángulos, triángulos y su clasificación. Además, habían trabajado el plano cartesiano. Aunque teníamos conocimiento de que los estudiantes habían abordado estos temas, una semana antes de la aplicación hicimos un repaso, en donde se evidenció que algunos de los estudiantes habían olvidado de estos conceptos. Asumimos que esto una consecuencia de la falta de intensidad horaria de geometría, pues al ser una hora cada semana los estudiantes olvidan los conceptos y elementos trabajados con facilidad.

La entrevista de la segunda experimentación se desarrolló con estudiantes de grado sexto de la jornada mañana de distintos cursos (601, 602 y 603) del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Cada curso tiene 4 horas de matemáticas a la semana, pero no hay distinción horaria entre aritmética, geometría o estadística. El docente tiene libertad para manejar los contenidos de clase y las asignaturas. En las observaciones de clase se notó que el docente hacia mayor énfasis en la asignatura de aritmética y se dejaba un poco de lado la geometría y la estadística. Aunque el área de geometría no era trabajada en igual forma que el área de aritmética los estudiantes mostraban deseo por aprender y descubrir características. La entrevista se adelantó con 3 niños y 3 niñas, con edades entre los 11 y 12 años. Antes de iniciar el desarrollo de la entrevista se hizo una sesión de 2 horas con el fin de acercar a los estudiantes al software de geometría dinámica GeoGebra ya que nunca habían trabajado y la institución cuenta con los elementos para poder hacerlo. Mediante trabajo dirigido por la maestra en formación y exploración de los estudiantes se consiguió abordar la mayoría de las opciones de construcción que permite el software.

Participantes de la entrevista.

Para la entrevista piloto, de los 40 estudiantes del curso 601 seleccionamos 6 estudiantes, que a nuestro juicio se destacaban en la clase de geometría.

Hicimos esta selección porque estos estudiantes podrían responder mejor la tarea que les propondríamos, obteniendo así mayor riqueza y calidad en las respuestas, podrían dar a conocer mejores estrategias de solución y solvencia en la comunicación acerca de lo que pensaban ya fuera de manera oral o escrita. Además, se percibía que con estos estudiantes podríamos ver si en realidad las tareas funcionaban como se tenía previsto y si los objetivos y la meta planteada se lograban conseguir. Parecería que la selección fuera excluyente, pero consideramos que, una vez aplicada la prueba piloto, la tarea se podría aplicar a todo el curso, teniendo un mayor control de la situación.

Para la segunda entrevista, con el apoyo del profesor de matemáticas de grado sexto de la institución, seleccionamos 6 estudiantes, 2 estudiantes de cada curso (601, 602, 603), que se destacaban en la clase de matemáticas. Al igual que en la entrevista piloto hicimos esta selección porque estos estudiantes podrían responder mejor la tarea propuesta y así obtener mejores resultados en nuestra investigación.

Recursos para el desarrollo de las tareas.

El desarrollo de la tarea en la experimentación piloto se llevó a cabo durante dos semanas (6 sesiones de clase) en las horas de matemáticas. Aunque la actividad se aplicó a todo el curso nuestro análisis se realizó a las producciones de los 6 estudiantes seleccionados. Las producciones de los demás niños no fueron tenidas en cuenta en la investigación. El aula disponía de un tablero grande y buena iluminación. Inicialmente a los estudiantes se les hizo entrega de varios materiales; entre ellos, transportador, regla, compás, una hoja en donde estaba el enunciado de la tarea a desarrollar y hojas blancas tamaño carta donde debían registrar sus respuestas. Durante la aplicación se evidenció que los estudiantes no hacían uso adecuado del compás y el transportador por lo que se les hizo entrega de moldes en forma de semicircunferencia y de cuñas con forma de triángulo rectángulo.

Durante el desarrollo de la tarea se les hizo entrega de guías diferentes a las entregadas inicialmente, con ayudas para que los estudiantes lograran conseguir lo que se requiere en cada paso del desarrollo de la tarea (Ver capítulo 5). En la última sesión mediante el uso del software GeoGebra se mostró a los estudiantes gráficamente la propiedad descubierta por ellos en papel con el fin de permitir la visibilidad de generalidad de la propiedad geométrica. Cabe mencionar que los materiales se entregaban a medida que los estudiantes los iban requiriendo. Durante el desarrollo de la tarea se grabaron audios y se tomaron fotos como evidencias del trabajo desarrollado en cada subtarea por parte de los estudiantes.

El desarrollo de la tarea de la segunda experimentación se llevó a cabo en el transcurso de 3 semanas, 3 sesiones de clase (cada sesión de 2 horas), en el aula de matemáticas donde se encuentran las tabletas (En la institución hay dos salones de matemáticas en uno hay un carro con tabletas y en el otro un carro con computadores portátiles). El aula es grande, cuenta con mesas que facilitan el trabajo individual y en grupo, tiene buena iluminación. Inicialmente, a los estudiantes se les hizo entrega de una tableta y una hoja donde estaba el contenido de la tarea a desarrollar y hojas blancas tamaño carta donde debían registrar las respuestas. Durante el desarrollo de la tarea se tuvieron en cuenta las recomendaciones realizadas en la experimentación piloto. Cabe resaltar que al hacer uso de geometría dinámica se omitieron subtareas referentes al manejo del compás para la construcción de circunferencias y del transportador para la toma de las medidas de los ángulos. En la última sesión (Generalizar) se hizo entrega a los estudiantes de diversas representaciones en papel en donde debían identificar en cuáles se cumplía la propiedad descubierta y en cuáles no. Durante la solución de la tarea se grabaron videos y se tomaron fotos como evidencias del trabajo desarrollado por los estudiantes.

Experimentación piloto.

En el capítulo 5 se encuentra descrita en detalle la experiencia piloto. Se menciona lo que hicieron los niños, se realiza un planteamiento sobre los ajustes que se deben tener en cuenta en el diseño y la aplicación de la experimentación definitiva.

Segunda Experimentación.

En el capítulo 6 se encuentra descrita en detalle la segunda experimentación. Se menciona en detalle el trabajo realizado por los niños y se muestra algunas producciones. También se presentan los resultados sobre los ajustes planteados en la experimentación piloto y los alcances obtenidos en la THA planteada.

Diseño de la THA – Experimentación Piloto

En este capítulo, damos a conocer los componentes de la THA prevista para la experimentación piloto. Para esto presentamos primero, la meta de aprendizaje; segundo, los aprendizajes esperados; tercero, el enunciado de la tarea; cuarto, una tabla (T*abla 4.1*) con la ruta de aprendizaje.

Meta de Aprendizaje de la Tarea

Descubrir, conjeturar y proponer, a manera de expresión general la siguiente propiedad geométrica: Dado una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

Aprendizaje Esperado

Promover el desarrollo del proceso de generalización geométrica a partir del descubrimiento del hecho geométrico: Dado una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

Enunciado de la Tarea y Subtareas

Construye una semicircunferencia. Explora qué propiedad geométrica común tienen los triángulos que se forman tomando los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia, como vértices.

THA

La tabla 4.1 muestra las fases del proceso de generalización, la progresión prevista del aprendizaje propuesta según las fases y pasos de generalización mencionados en el capítulo 2 sección 2.4.2, una idea de lo que podría pasar cuando se resuelva la tarea, las subtareas de acuerdo a lo que podría pasar, y una propuesta de ayuda para el profesor.

THA con el uso del papel			
Progresiones	**¿Qué puede pasar?**	**Subtarea**	**Ayudas para el profesor**
Fase 1: Ver			
Interpretar el enunciado de la tarea.	Los estudiantes entienden los términos e interpretan lo que tienen que hacer.	Subtarea 1: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no entienden algunos términos geométricos involucrados.	Subtarea 2: Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice.	Resaltar las palabras, poner ejemplos, preguntar por las relaciones entre algunos de los objetos.
	Los estudiantes no entienden qué tienen que hacer.	Subtarea 3: Explica con tus palabras de qué se trata la tarea.	Guiar la interpretación dirigiendo la atención a los objetos geométricos que hay que considerar y sobre cuál es el que hay que buscar algo. Guiar la atención hacia las palabras del enunciado que indican lo que hay que hacer para aclarar de qué se trata la tarea.
Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración. (Paso 1 de Cañadas).	Los estudiantes hacen una representación correcta con más de un triángulo.	Subtarea 4: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes hacen una representación correcta con un solo triángulo.	Subtarea 5: Construye otros triángulos que cumplan las condiciones del enunciado.	Pedir releer el enunciado y representar otros triángulos.
	Los estudiantes no tienen destreza en el uso de compás o no tienen un compás adecuado.	Subtarea 6: Construye una semicircunferencia usando el molde de una circunferencia.	Proporcionar plantillas, pedirles que recorten y doblen, etc.

Construir una representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (el triángulo). (Paso 2 de Cañadas).	Antes de explorar la representación, a los estudiantes se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.	Subtarea 7: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes realizan alguna acción sobre la representación (como contar los segmentos, comparar las figuras que hay, subrayar, medir lados o ángulos) sin haber construido una representación mental de las propiedades que quieren investigar.	Subtarea 8: Explica qué propiedades puede tener un triángulo.	Proponer ejemplos sobre que propiedades se pueden investigar en los triángulos: 3 lados, 3 vértices, aunque esas no sean de interés se pueden mencionar hasta conseguir que los estudiantes hagan alusión a estudiar las medidas de los lados y medidas de los ángulos.
	Antes de explorar a los estudiantes no se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.		
Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad.	Los estudiantes hacen uso correcto del transportador y la regla.	Subtarea 9: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes hacen uso incorrecto del transportador y la regla.	Subtarea 10: Construye y toma las medidas de distintos ángulos y segmentos.	Explicar cómo se miden ángulos y segmentos haciendo uso del transportador y la regla. Proporcionar actividades en la que deben construir y medir ángulos y segmentos, como se muestra en la actividad del anexo 1 (ver Anexo 1).
Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3 de Cañadas).	Los estudiantes encuentran la propiedad solicitada.	Subtarea 11: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no encuentran alguna propiedad común a todos los triángulos.	Subtarea 12: Explica qué propiedades puede tener un triángulo y explora esas propiedades que construiste u otras.	Sugerir que dibujen unas semicircunferencias más grandes o más pequeñas y en estas pedir que construyan otros triángulos para ver si identifican la propiedad común de interés (proporcionar moldes de circunferencia con distinto

			radio). Sugerirles medir ángulos. Proporcionar escuadras o cuñas.
Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3 de Cañadas).	Los estudiantes solo exploran triángulos (isósceles) trabajados comúnmente.	Subtarea 13: En las representaciones presentadas, sin medir, muestra en dónde se puede asegurar que el triángulo es rectángulo.	Presentar varias representaciones para que los estudiantes señalen donde hay un triángulo rectángulo o donde no hay, como lo presentado en la actividad del anexo 2 (ver Anexo 2).
Fase 2: Describir			
Formulación de una conjetura. (Paso 4 Cañadas).	Los estudiantes formulan la conjetura empleando el formato si… entonces o el formato dado… entonces.	Subtarea 14: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no saben cómo iniciar la formulación.	Subtarea 15: Ubicar las circunferencias entregadas, según corresponda en ejemplos o contraejemplos.	Sugerir recordar la propiedad descubierta y el procedimiento para su hallazgo. Ayudar a iniciar la formulación. Mostrar una tabla en la que se deben ubicar ejemplos y contraejemplos según correspondan las circunferencias entregadas, como lo mostrado en la actividad del anexo 3 (ver Anexo 3).

Formulación de una conjetura. (Paso 4 Cañadas).	Los estudiantes formulan la conjetura casi completa pero no escriben algunas de las condiciones del antecedente o en consecuente.	Subtarea 16: Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma? Si todos los lados de triángulo son cuerdas distintas del diámetro, ¿Qué tipo de triángulo se forma?	Dar no ejemplos para que se den cuenta de la necesidad de cada condición, para esto se entregará la actividad del anexo 4 (ver Anexo 4).
Fase 3: Escribir			
Escritura de una conjetura. (Paso 5 Cañadas).	Los estudiantes realizan la escritura de la conjetura correctamente.	Subtarea 17: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no saben cómo iniciar la escritura o no saben que deben hacer.	Subtarea 18: Formula con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.	Orientar al estudiante en la escritura de la conjetura, desde su formulación. Entregar actividades donde deban expresar de forma escrita la formulación de la conjetura (ver Anexo 5).
	Los estudiantes mencionan cuál es la propiedad, pero realizan la escritura de manera incorrecta.	Subtarea 19: Escribe con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.	Ayudar a comenzar la escritura de la conjetura, por medio de ejemplos, contraejemplos y preguntas. Entregar actividades donde deban expresar de forma escrita la formulación de la conjetura (ver Anexo 5).

Fase 4: Verificar			
Justificación empírica de la conjetura. (Paso 6 Cañadas).	Los estudiantes justifican la conjetura, completando la otra mitad de la figura o realizando dos diámetros de la figura y verificando que son dos triángulos rectángulos en la circunferencia.	Subtarea 20: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no saben que deben hacer.	Subtarea 21: Dada una circunferencia y un cuadrilátero inscrito en ella, sin medir, ¿Este cuadrilátero es un rectángulo?	Ayudar a iniciar la justificación de la conjetura descubierta por medio de preguntas orientadoras, como: ¿Qué medida tienen los ángulos? Sin medir, ¿cómo puedes estar seguro de la medida de los ángulos? Explicar las diagonales del rectángulo dado son diámetros de la circunferencia, mostrar la actividad del anexo 6 (ver Anexo 6, parte I).
Generalización de la conjetura. (Paso 7 Cañadas)	Los estudiantes generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 22: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 23: Dar una circunferencia y un cuadrilátero inscrito en ella, sin medir, ¿Cuándo puedes afirmar que este cuadrilátero es un rectángulo?	Mostrar una imagen con una circunferencia y un cuadrilátero inscrito. Presentar la actividad del anexo 6 (ver Anexo 6, parte II). Preguntar a los estudiantes si lo encontrado ocurre siempre y pedir que expliquen por qué.

Tabla 4.1. THA experimentación piloto.

Experimentación Piloto de la THA

En este capítulo hacemos una breve mención de la identificación de los participantes en la tarea. Luego describimos el desarrollo de la experimentación piloto y proponemos cambios para la segunda experimentación.

Identificación de los Participantes

Los estudiantes seleccionados son: Óscar, Ana María, Mariana, Sebastián, Michell y Valeri, estudiantes que, a nuestro juicio, se destacaban en la clase de geometría. Estos estudiantes, se destacan por el comportamiento y el interés mostrado durante la clase de matemáticas. Son niños respetuosos y responsables, les gusta participar y expresan sus ideas sin dificultad.

Recuento del Desarrollo de la Tarea

<u>Fase 1: Ver</u>

Paso 1: Interpretar el enunciado de la tarea

Los seis estudiantes se organizan en un grupo[2] para iniciar el desarrollo de la tarea. La maestra en formación (MEF) pide a los estudiantes que lean el enunciado. Al finalizar la lectura uno de los estudiantes menciona que no sabe que debe hacer. Los demás hacen gestos corroborando la misma inquietud.

De acuerdo a la planeación la MEF recurre a la subtarea 2, porque supone que la dificultad radica en los términos incluidos en el enunciado.

Subtarea 2: Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice.

[2] Los demás niños del curso también se organizaron en grupos. Se organizaron 7 grupos de 7 estudiantes cada uno.

La MEF pide al grupo que respondan "¿qué entienden por semicircunferencia?", Óscar representa una circunferencia en la hoja entregada y los demás estudiantes hacen lo mismo. Ella les dice: *"*Sí, lo que acaban de dibujar es una circunferencia, pero no una semicircunferencia, ¿qué sería media circunferencia?" y todos manifiestan entender que es una semicircunferencia.

La MEF pide que escriban cada una de las definiciones de los elementos geométricos involucrados en la tarea. Para esto apoya a los estudiantes en la escritura. A continuación, mostramos la descripción detallada de este proceso.

La MEF pide al grupo que mencione "¿qué entienden por diámetro y por extremos del diámetro?", Mariana, Michell, Sebastián y Valeri representan un radio, Óscar y Ana María no hacen ninguna representación y mencionan que no se acuerdan. La MEF dibuja en el tablero una circunferencia, el centro y un radio, ella les pregunta*:* "Si hago otro segmento opuesto a este (señalando el $\overline{\mathrm{PB}}$ radio de la circunferencia) usando la regla para que quede un segmento más grande (Imagen 5.1) ¿qué elemento geométrico se obtiene?" Sebastián responde: "Dos diámetros". La MEF pregunta: "¿Están seguros que se obtienen dos diámetros?" Todos hacen gestos confirmando la afirmación hecha por Sebastián.

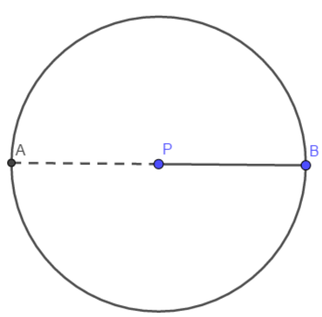


Imagen 5.1. Dibujo MEF en el tablero

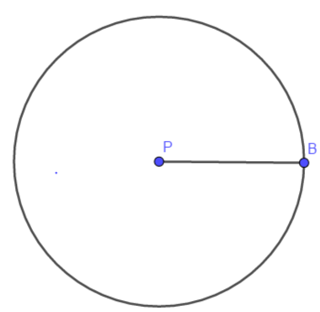


Imagen 5.2. Explicación de radio (Óscar)

En este momento la MEF pregunta: "¿cuál es la fórmula para hallar el área de un círculo?", Ana María dice: *"*Es πr^2*".* Óscar pide un marcador, pasa al tablero, borra $\overline{AP}$ de la representación que estaba allí (Imagen 5.2) y dice: "Pero si la fórmula es πr^2 y en la representación que hacemos es solo un segmento yo digo que ese segmento es un radio y no un diámetro”.

La MEF le pregunta a Óscar: “¿Qué es un diámetro?”, Óscar inseguro y haciendo alusión a la representación del tablero dice: “Un diámetro son dos radios”. La MEF interviene y confirma lo que dice Óscar, aclarando que un diámetro si está conformado por dos radios, pero dichos radios deben estar contenidos en una misma recta y esta debe contener el centro de la circunferencia. Seguido la MEF pregunta: “¿Es claro qué es un diámetro?” y ellos hacen gestos afirmando que sí. Luego la MEF pide que escriban la definición de diámetro. Posteriormente, la MEF pide definir extremos de un diámetro. Óscar toma la palabra y menciona: “Tomemos una semicircunferencia, entonces queda como un transportador, por lo que el punto A es $180°$ y B es $0°$”, Valeri lo interrumpe: “Así es muy confuso, es más fácil decir que los extremos del diámetro son A y B que hacen parte del diámetro y la circunferencia” (Imagen 5.3). La MEF confirma lo dicho por Valeri y los demás estudiantes están de acuerdo con ella.

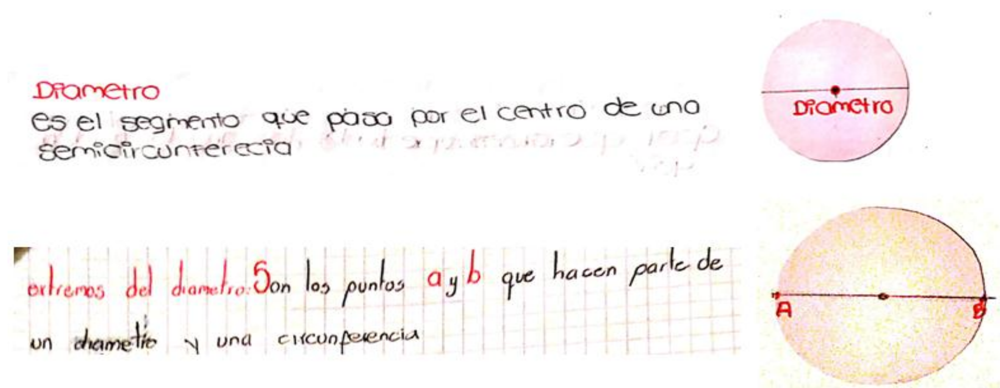


Imagen 5.3. Definición de diámetro y extremos de diámetro (Valeri)

Sobre las definiciones de ángulo y vértice del ángulo no se hacen intervenciones, dado que los estudiantes las escriben de forma correcta.

La MEF pregunta: “¿Ahora qué deben hacer para continuar con la actividad?” Los estudiantes manifiestan que no entienden. Entonces, se acude a la subtarea 3.

Subtarea 3: Explica con tus palabras de qué se trata la tarea.

La MEF dirige la atención hacia los elementos geométricos, estos se subrayan en rojo en el enunciado. También busca que los estudiantes se enfoquen en los elementos sobre los que deben buscar alguna propiedad geométrica. Una vez terminada esta intervención, la MEF les pide explicar lo que deben realizar. Óscar pide la palabra y dice:

> “Para resolver el problema toca hacer el dibujo de una semicircunferencia y en ella ubicar el diámetro y los extremos. Luego se hace un punto en cualquier lugar de la semicircunferencia y ese punto y los dos puntos del diámetro formarían un triángulo. Cuando se hace eso, toca encontrar una propiedad geométrica de ese triángulo” (Óscar).

La MEF les pregunta si se puede hallar una propiedad geométrica observando características de un solo triángulo. Cinco de los seis estudiantes mencionan que sí, pero Ana María dice: “a mí me enseñaron el año pasado que para encontrar una propiedad geométrica se deben usar dos o más objetos.” La MEF aprueba lo que dice Ana María y hace referencia a ver la propiedad en más de un triángulo.

Luego Óscar pide la palabra y dice: “Se deben hacer varios puntos en la semicircunferencia, luego tomando un punto de los que se acaban de hacer en la semicircunferencia y con los dos puntos extremos del diámetro se forma un triángulo”. La MEF le pregunta a Óscar: “¿Qué haces con los otros puntos que construyes en la semicircunferencia?”, Óscar responde: “Con cada punto de la semicircunferencia y los extremos del diámetro se forma un triángulo”. La MEF pregunta a los demás estudiantes: “¿Están de acuerdo con lo que menciona Óscar?, ¿Qué deben hacer entonces?” Óscar dice:

> “Para solucionar la actividad, los triángulos se realizan tomando un punto de la semicircunferencia y los dos puntos extremos del diámetro (…) mmm, pero bueno, para hacer varios triángulos hay que cogerse varios

puntos de la semicircunferencia. Y pues (…) mmm (…) ahí se halla una propiedad geométrica común a todos los triángulos que se hicieron" (Óscar).

Con la intervención de Óscar los demás estudiantes mencionan tener claridad de lo que deben realizar. Sin embargo, mencionan que el enunciado de la tarea estaba confuso.

<u>Recomendaciones para la segunda aplicación:</u>

- El enunciado de la tarea debe ser modificado agregando las palabras descubre y comunica, porque el proceso de generalización no solo es explorar, es necesario también descubrir y comunicar lo que se descubre.

La tarea debería quedar: Construye una semicircunferencia. Explora, descubre y comunica qué propiedad geométrica común tienen los triángulos que se forman tomando los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia, como vértices.

- Si los estudiantes no entienden que es una semicircunferencia, preguntar por relaciones de "semi" (semiabierto o semicerrado) o proponer ejemplos de la vida cotidiana, para que los estudiantes sean quienes mencionen que es semicircunferencia.
- Si los estudiantes no hacen alusión a que deben encontrar una propiedad geométrica, preguntar acerca de qué entienden por propiedad geométrica. Esto para verificar que todos los estudiantes tengan claro qué deben hacer durante el desarrollo de la tarea.
- Si los estudiantes mencionan que se debe dibujar un solo punto, no adelantarse a proponer que sea más de uno hasta que no se esté en la fase de exploración, ya que se estarían dejando de lado fases que son pertinentes en el proceso de generalización.

Paso 2: Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración (Paso 1 de Cañadas)

Al no tener buena destreza con el uso del compás, los estudiantes deciden hacer uso de los moldes entregados por la MEF. Con los moldes construyen la semicircunferencia y los demás elementos geométricos son construidos con regla. Debido a que construyen más de tres triángulos en cada semicircunferencia deciden usar distintos colores para cada triángulo, con el fin de diferenciarlos (Imagen 5.4). De modo que se opta por la subtarea 6.

Subtarea 6: Construye una semicircunferencia usando el molde de una circunferencia.

La MEF les pregunta: "¿Por qué hicieron tres o más triángulos y no solo uno?" Mariana responde: "Usando lo que dijimos hace un rato. Para encontrar una propiedad que se cumpla en muchos triángulos toca hacer más de dos triángulos".

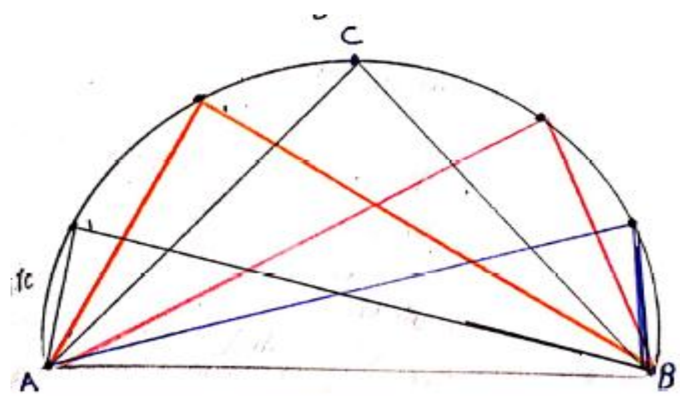


Imagen 5.4. Representación de más de un triángulo inscrito en la semicircunferencia (Óscar)

Sebastián pregunta: "¿El punto puede estar en cualquier lugar de la semicircunferencia, cierto profe?" Como al lado de Sebastián está Óscar, este responde: "Se puede en cualquier lugar de la semicircunferencia y se forma un triángulo". La MEF afirma: "Es correcto lo que dice Óscar, el triángulo que se forma es cualquiera, por lo tanto ¿el punto es…?” Sebastián interrumpe diciendo: “¡Cualquiera!”.

Recomendaciones para la segunda aplicación:

- Proponer actividades para verificar el uso correcto del compás. No esperar a estar en el desarrollo de la tarea para hacerlo.
- Cuando los estudiantes realicen preguntas lo mejor es que entre ellos se ayuden y obtengan la respuesta. La MEF solo debe ser guía (no dar las repuestas directamente).
- Para una mejor identificación de los triángulos es pertinente sugerir a los estudiantes que coloreen el interior de los triángulos y no solo el contorno, ya que permite una mejor visualización.
- En la segunda implementación, si los estudiantes realizan correctamente la representación y además usan la herramienta de arrastre, es oportuno que la MEF comente: ¿Se están construyendo un triángulo o muchos? También puede pedir que se construyan dos triángulos y que arrastren uno hasta superponer al otro y observen qué sucede.

Paso 3: Construir una representación mental de posibles propiedades del triángulo (Paso 2 Cañadas)

Los estudiantes cuentan el número de lados, de vértices y de ángulos. La MEF pregunta: “¿Qué propiedades puede tener un triángulo?” Sebastián responde: “Siempre en los triángulos podemos ver que tienen tres lados, también tres vértices y los ángulos que también son tres”. La MEF pregunta: “¿Alguien indica otras propiedades distintas a las mencionadas por Sebastián?” Todos se quedan en silencio. La MEF dice: “Debemos investigar las propiedades que cumplen los triángulos que acabaron de construir, ¿Qué podemos buscar en ellos?”. En este momento se hace necesario proponer a la subtarea 8.

Subtarea 8. Explica qué propiedades puede tener un triángulo.

Los estudiantes responden la subtarea 8 en la hoja que se le entregó al inicio. En este momento surge la siguiente conversación:

Michell:	Yo sé. Tal vez se puede mirar la forma que tienen los triángulos.
MEF:	¿Cómo así que la forma? ¿A qué te refieres?
Michell:	Pues si es grande, chiquito (…)
Valeri:	Yo creo que Michell se refiere a la medida de los lados, ¿no?
Óscar:	Si vemos algo en común, los triángulos tendrían que ser escalenos, isósceles o equiláteros. Ya que esa es la clasificación según sus lados, ¿cierto, profe?
MEF:	Sí, esto es correcto. ¿Qué otra propiedad podríamos mirar?
Óscar:	Profe, entonces ver si es obtusángulo, acutángulo o rectángulo ¿verdad?
Mariana:	O sea clasificación por la medida de sus ángulos.
MEF:	Sí, tienen toda la razón. ¿Creen que podríamos mirar alguna otra propiedad?
Sebastián:	Profe, también podríamos mirar los ángulos externos del triángulo y ver qué pasa.
MEF:	Sí puede ser una propiedad a investigar. Más adelante miramos si es pertinente mirar esta propiedad.

A partir de las propiedades expuestas por sus compañeros Ana María narra y escribe las propiedades indicadas en la conversación: “Las propiedades que se pueden estudiar son: la medida de los lados, la medida de los ángulos internos y externos, hacer la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados y sus ángulos”.

Paso 4: Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad

La MEF pregunta: “¿Cómo verifican las propiedades mencionadas?”, Valeri responde: “Podemos usar, para medir los ángulos, el transportador y, para medir los lados la regla”. Los demás estudiantes manifiestan estar de acuerdo con lo mencionado por Valeri. Cuando comienzan a medir los ángulos, la MEF se da cuenta que Sebastián, Michell, Valeri y Mariana no usan correctamente el transportador. Decide suspender el trabajo con el fin de explicar cómo usarlo. De modo que acude a la subtarea 10.

Subtarea 10: Construye y toma las medidas de distintos ángulos y segmentos.

La MEF hace entrega de una hoja (ver Anexo 1) en la cual los estudiantes deben realizar dos acciones: primero, deben tomar la medida de lo ángulos dados y luego deben construir los ángulos según la medida indicada. Esta misma instrucción la deben realizar con segmentos. La MEF busca que los estudiantes recuerden y tengan dominio en la toma de medidas de ángulos y segmentos. Cabe aclarar que los estudiantes muestran mayor dificultad con la toma de medida de los ángulos.

Recomendaciones para la segunda aplicación:

- Si los estudiantes presentan dificultad con el uso del transportador se debe proponer una actividad distinta a cuando tienen dificultad con el uso de la regla. Es decir, se debe separar la actividad propuesta ya que los estudiantes pueden tener solo una dificultad y no las dos.

Paso 5: Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos (Paso 3 Cañadas)

Los estudiantes terminan la actividad propuesta por la MEF y comienzan a medir los ángulos y los lados de los triángulos construidos en la semicircunferencia, en busca de la propiedad geométrica común. Pasan a la subtarea 12.

Subtarea 12: Explica qué propiedades puede tener un triángulo y explora esas propiedades que construiste u otras.

Los estudiantes inician la búsqueda de la propiedad que cumplen los triángulos. Exploran primero la medida de los lados de los triángulos, usando la regla. Pero Sebastián, Mariana y Valeri se enfocan en un sólo triángulo. La MEF se da cuenta de esto y les pregunta: “¿Cuántos objetos se deben estudiar para encontrar una propiedad geométrica?”, Mariana responde: “Ay (…) se deben mirar al menos dos triángulos; se nos había olvidado eso”. La MEF sugiere explorar más de dos triángulos. Surge el siguiente diálogo:

Ana María:	Ya medimos todos los lados de los triángulos y no encontramos algo en común, todas las medidas nos dan distintas.
Óscar:	¡He encontrado algo!
MEF:	¿Qué encontraste?
Óscar:	Medí todos los triángulos y encontré que tienen un lado que mide siempre lo mismo.
MEF:	¿Por qué crees que siempre mide lo mismo?
Óscar:	Eso sucede por la forma en como se hizo la construcción de la figura, hay un lado que es el mismo en todos los triángulos.
MEF:	Esto es correcto, ¿Y en la semicircunferencia este segmento “lado” cómo se llama?
Óscar :	Ese (…) ¿Cómo se dice profe?
MEF:	Segmento.
Óscar:	Ese segmento es el diámetro. Es por esto que siempre mide lo mismo.

Luego de medir los lados de los triángulos, los estudiantes miden los ángulos externos. Pero Valeri menciona: “Yo creo que, a simple vista, los ángulos externos tienen diferentes medidas, para mi es algo obvio”. La MEF pregunta: “¿Qué hacemos ahora?”, Ana María dice: “Yo propongo medir los ángulos internos”.

Miden los ángulos internos de todos los triángulos representados. Después de un rato, Sebastián dice: “Los ángulos de abajo siempre me dan menor a 90°” y Mariana alude con asombro: “¡Oh!, y el ángulo de arriba siempre es de 90°”. Valeri, Michell y Sebastián mencionan que la medida del ángulo cuyo vértice es distinto a los extremos del diámetro no les daba exactamente 90°, por lo que la

MEF les explica que esto sucede por falta de precisión al medir con el transportador (Imagen 5.5).

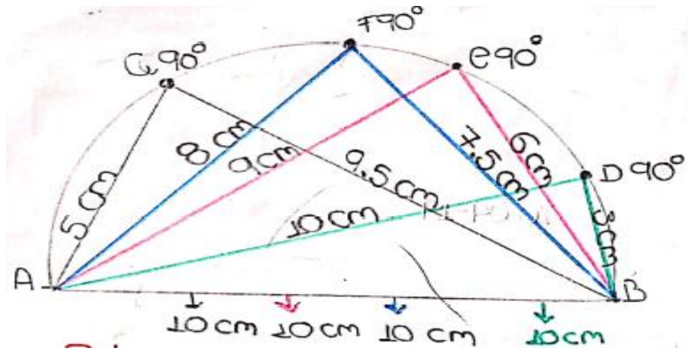


Imagen 5.5. Toma de medidas de lados y ángulos de los triángulos construidos (Michell)

Óscar llama a la MEF a solas y le comenta:

> "Mira profe, siempre el ángulo de arriba es de 90 y los otros dos ángulos son agudos. Ves, ves, entonces no estoy muy seguro, pero podría decir que esos triángulos son siempre rectángulos" (Óscar).

La MEF pregunta: "¿Qué pasaría si la semicircunferencia es un poco más grande?", Óscar afirma: "El ángulo de arriba ya no sería de 90° sino mayor", Sebastián y Mariana manifiestan estar de acuerdo con lo que dijo Óscar. Por otro lado, Valeri, Ana María y Michell hacen gestos manifestando no estar seguros de tal afirmación.

Para comprobar lo anterior la MEF hace entrega de unos moldes con semicircunferencias de distintos tamaños. Luego explica que deben pegar los moldes en la hoja o realizar el bosquejo del molde y en ellos hacer la construcción (Imagen 5.6). Finalizando los bosquejos, los estudiantes inquietos por verificar si se cumple la propiedad toman las medidas de los ángulos de varios triángulos construidos. Luego Óscar menciona: "en todos los triángulos siempre hay un ángulo de 90". Los demás estudiantes, entusiasmados, confirman en coro lo mencionado por Óscar.

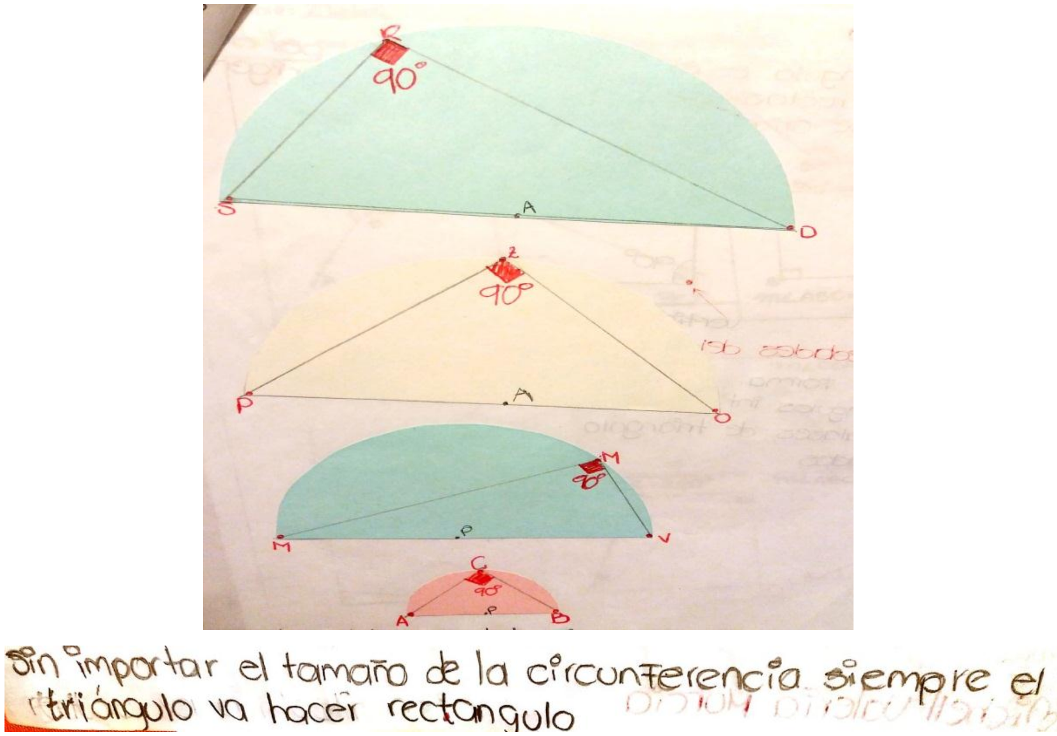


Imagen 5.6. Sin importar el tamaño del radio de la circunferencia identifican que una propiedad geométrica se cumple (Michell)

Óscar interviene preguntando “¿cómo se pueden construir muchos triángulos?, ¿entonces tenemos infinitos triángulos en la semicircunferencia?”, Valeri responde: “sí”. La MEF le pregunta a Valeri: “¿Cómo estas tan segura de que son infinitos triángulos?”, Valeri responde señalando la hoja: “Si yo moviera este punto por toda la semicircunferencia (señala el punto C y simula que lo mueve por la semicircunferencia), entonces, cada vez que se mueve el punto pues hay un triángulo nuevo”.

La MEF recurre a la subtarea 13.

Subtarea 13: En las representaciones presentadas, sin medir, muestra en dónde se puede asegurar que el triángulo es rectángulo.

La MEF hace entrega de una hoja en la que se presentan varias representaciones de una circunferencia y un triángulo inscrito en ella. Sin hacer uso del transportador deben indicar la medida del ángulo que se les pregunta.

El objetivo es que los estudiantes identifiquen en qué casos el triángulo es rectángulo (ver Anexo 2). Como en la tarea se indica que no pueden medir, los estudiantes creen que deben adivinar la medida de los ángulos en cuestión (Imagen 5.7). Percatándose de esto, la MEF les indica: “Nosotros ya encontramos una propiedad, ¿alguien la puede recordar?”. Óscar dice: “Si tenemos una circunferencia o una semicircunferencia, el diámetro y un punto en la circunferencia, se forma un triángulo y el ángulo de arriba siempre va a medir 90 grados (…) O sea, el triángulo es rectángulo”. La MEF pregunta: “¿Recordaron la propiedad descubierta? ¿Es clara la explicación de Óscar?” Los estudiantes hacen gestos corroborando tener todo claro.

Michell dice: “En el primer caso, ningún lado del triángulo pasa por el centro de la circunferencia, entonces, como no hay diámetro, porque no pasa por el centro de la circunferencia, pues ese ángulo ACB no va a medir 90°”. La MEF le dice Michell: “¿Cómo sabes eso Michell?”, Michell responde: “Eso fue lo que encontramos y pues teníamos que el diámetro pasa por el centro siempre y pues si pasa por el centro, entonces el ángulo de arriba es de 90”. La MEF cae en cuenta que los estudiantes no pueden generalizar esto.

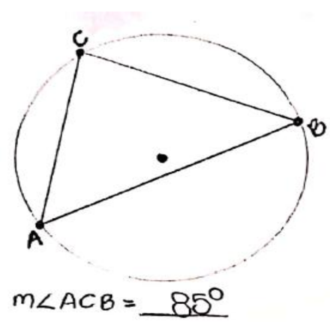


Imagen 5.7. Triángulos presentados (Michell)

La MEF propone que formulen una conjetura teniendo en cuenta lo trabajado en las clases anteriores y lo descubierto en esa última actividad. Los estudiantes hacen gestos de no entender y Ana María indica a la MEF no saber qué hacer ni como iniciar. En este momento la MEF toma la decisión de acudir a la subtarea 15.

Recomendaciones para la segunda aplicación:

- Es importante presentar ejemplos y no ejemplos para que los estudiantes identifiquen más fácil la propiedad encontrada. De igual manera es pertinente hacer diferentes representaciones (circunferencias grandes y pequeñas, casos extremos) para dar la confianza de que siempre se cumple la propiedad.
- Si los estudiantes descubren una propiedad que es obvia, por la forma de la construcción hay que explicarles que se trata de buscar algo nuevo. Es decir, se trata de encontrar información nueva y no información que se sabe de antemano por el enunciado.
- No se puede pedir a los estudiantes que garanticen que el ángulo no es de 90° cuando el triángulo no pasa por el centro de la circunferencia, pues no se puede asegurar sin medir que el ángulo no es de 90°. Por esta razón, se recomienda que se pregunte si están seguros o no que el ángulo mide 90°.

Fase 2: Describir

Paso 6: Formulación de una conjetura (Paso 4 Cañadas)

Para impulsar la descripción de la conjetura la MEF decide recurrir a la subtarea 15, con el fin de recordar lo descubierto en las clases anteriores.

Subtarea 15: Ubicar las circunferencias entregadas, según corresponda en ejemplos y no ejemplos.

La MEF entrega a cada estudiante una figura referente a ejemplos y una figura referente a no ejemplos del cumplimiento de la propiedad geométrica y en el tablero ubica una cartelera con una tabla con dos columnas, una para los ejemplos y otra para no ejemplos (Imagen 5.8). Parece que los estudiantes identifican las características necesarias para garantizar la propiedad geométrica descubierta. Debido a que los estudiantes no saben cómo iniciar la formulación de la conjetura de la propiedad descubierta la MEF acude a la subtarea 16 con el fin de guiar este proceso.

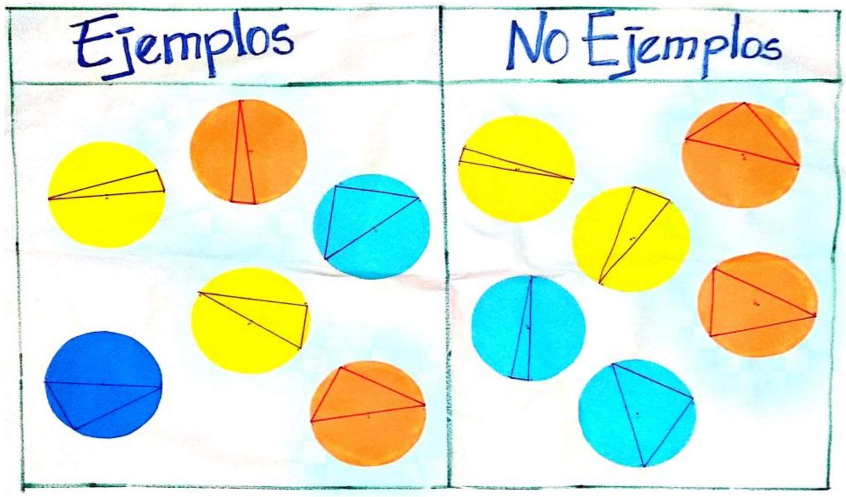
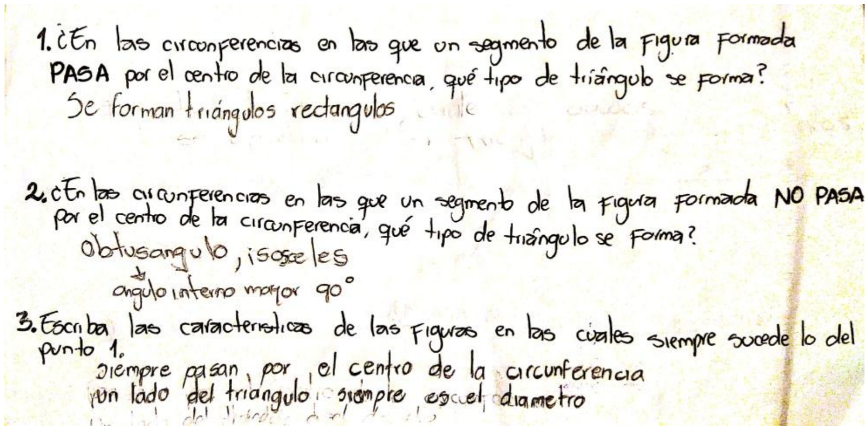


Imagen 5.8. Ejemplos y no ejemplos.

Subtarea 16: Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma? Si todos los lados de triángulo son cuerdas distintas del diámetro, ¿Qué triángulo se forma?

La MEF entrega a los estudiantes una hoja en la que deben responder preguntas que le ayudan a la formulación de la conjetura (ver Anexo 4). Al realizar la lectura de la actividad Sebastián dice: “No entiendo las preguntas”. La MEF explica de manera general:

“En el primer punto deben decir ¿qué tipo de triángulo se forma, si uno de sus segmentos o lados pasa por el centro de la circunferencia?”, Óscar dice: “Entonces, en el segundo punto es responder ¿qué tipo de triángulo se forma, cuando un lado del triángulo no pasa por el centro de la circunferencia?”. La MEF responde: “sí, eso es lo que deben responder en la segunda pregunta”. Michell pregunta: “¿y el tercer punto cómo es?”, Mariana responde: “Yo creo que es escribir un listado de características que cumpla el triángulo formado en el punto, o sea si es rectángulo, obtusángulo o en donde están los puntos (…) características de esas”. Sin ayuda, los estudiantes desarrollan la actividad (Imagen 5.9).


1. ¿En las circonferencias en las que un segmento de la figura formada PASA por el centro de la circunferencia, qué tipo de triángulo se forma?
Se forman triángulos rectangulos

2. ¿En las circunferencias en las que un segmento de la figura formada NO PASA por el centro de la circunferencia, qué tipo de triángulo se forma?
Obtusangulo, isosceles
angulo interno mayor 90°

3. Escriba las características de las figuras en las cuales siempre sucede lo del punto 1.
Siempre pasan por el centro de la circunferencia
un lado del triángulo siempre es el diametro

Imagen 5.9. Actividad pre formulación de la conjetura (Valeri).

Al responder el punto tres de la actividad la MEF evidencia que los estudiantes tienen claridad de la propiedad encontrada. Sin embargo, no la expresan de forma organizada. Óscar formula de manera verbal la siguiente conjetura:

"Las circunferencias en donde el lado del triángulo formado pasa por el centro y el tipo de triángulo que se forma es (…) mmm (…) rectángulo. Porque cuando se tiene que un lado del triángulo es el mismo diámetro, pues un ángulo siempre es de 90°" (Óscar).

La MEF guía a todos los estudiantes en la formulación verbal de la conjetura:

MEF: Vamos a organizar las ideas de Óscar. ¿Qué debemos poner primero?

Mariana: Pues profe, yo creo que primero va cómo se construye la figura.

Valeri: ¡Ah! Sí. Como si fuéramos a hacer una definición.

MEF: Sí, Valeri. Así tenemos que hacerlo. ¿Entonces que ponemos primero?

Michell: La circunferencia, los extremos del diámetro y el diámetro que obviamente pasa por el centro de la circunferencia.

MEF: Sí, pero al decir que es el diámetro no es necesario mencionar que este pasa por el centro de la circunferencia, esto ya lo tenemos, por definición.

Valeri: Entonces sería algo así: En la circunferencia, tomando los puntos extremos del diámetro y otro punto, se forma un triángulo rectángulo.

MEF: Hay que mejorarla, pero vamos por buen camino.

Óscar:	Profe, yo la haría así: En una circunferencia, formando un triángulo con vértice en los extremos del diámetro y otro punto en la circunferencia, el triángulo que se forma es un triángulo rectángulo.
MEF:	Sí, esto es correcto. Pero aún le falta algo.
Mariana:	Profe, pero si así es como hemos hecho la construcción siempre.
MEF:	Sí, pero se acuerdan cómo realizamos las definiciones en geometría. ¿Cómo comenzamos las definiciones?
Sebastián:	Profe, con el “dado no sé qué cosas”.
MEF:	Sí, pero es dado (…) entonces.
Óscar:	Entonces queda así: Dado (…) ¡Ah! No, es dada una circunferencia, formando un triángulo con vértice en los extremos del diámetro y otro punto en la circunferencia, entonces el triángulo que se forma es un triángulo rectángulo.
MEF:	Así está mucho mejor, hay que cuadrarle detallitos pero está mucho mejor.

Al finalizar de manera conjunta la formulación verbal de la conjetura la MEF decide pasar a la subtarea 18.

Recomendaciones para la segunda aplicación:

- Cuando se realicen actividades de clasificación en ejemplo y no ejemplos es importante preguntar ¿por qué se hace tal clasificación?
- La subtarea 16 debe ser modificada en redacción de la siguiente manera: Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma? Si son cuerdas que no son el diámetro, se puede afirmar sin que medir ¿El triángulo formado es un triángulo rectángulo?
- En la formulación verbal de la conjetura es importante y necesario que los estudiantes tengan claras las características de construcción y la propiedad geométrica descubierta para pasar a la fase de escritura.
- Durante la formulación verbal de la conjetura se debe tener en cuenta que los estudiantes pueden insinuar la conjetura. Sin embargo, es posible que no se diferencie claramente el antecedente del consecuente y se debe tener la

habilidad de poder guiar los estudiantes para conseguir una conjetura donde se identifiquen estos componentes.

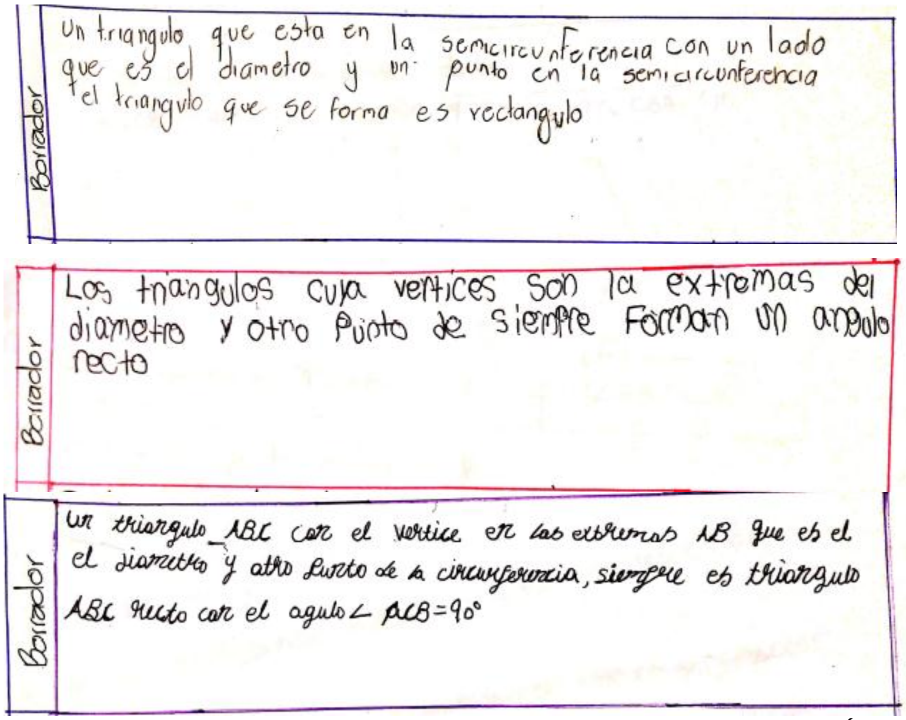
- De la recomendación anterior, también se concluye que los estudiantes pueden formular sólo el consecuente de la condicional y en este momento se debe tener la habilidad de poder guiar a los estudiantes en la formulación correcta de la conjetura.
- No incluir expresiones como: “hay que mejorarla” o “faltan detallitos”, porque no orientan a los estudiantes y pareciera que la MEF quisiera que adivinaran.
- Proponer a los estudiantes que hagan de cuenta que la amiga (o) falto a clase y le pide una explicación sobre lo trabajado en la clase.

<u>Fase 3: Escritura</u>

Paso 7: Escritura de una conjetura (Paso 5 Cañadas)

Subtarea 18: Formula con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.

La MEF analiza lo dicho por cada estudiante acerca de la conjetura y observa que expresan la propiedad geométrica descubierta junto con las características de construcción, pero tienen errores en la expresión de algunos términos matemáticos. En vista de esto la MEF indica: “Recuerdan que para iniciar la conjetura debemos hacerlo de la forma dado… entonces”. Para el desarrollo de esta subtarea la MEF entrega a los estudiantes una hoja con un recuadro “borrador” (ver Anexo 5). Allí deben intentar escribir la propiedad encontrada desde lo caracterizado en formulación verbal (Imagen 5.10).


Borrador

Un triangulo que esta en la semicircunferencia con un lado que es el diametro y un punto en la semicircunferencia el triangulo que se forma es rectangulo

Borrador

Los triangulos cuya vertices son la extremas del diametro y otro Punto de siempre Forman un angulo recto

Borrador

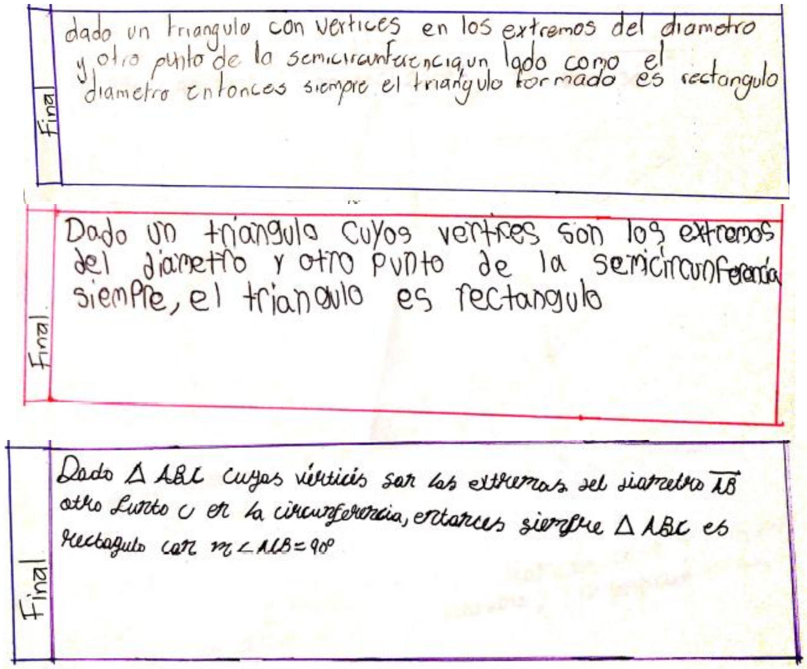
un triangulo ABC con el vertice en los extremos AB que es el el diametro y otro punto de la circunferencia, siempre es triangulo ABC recto con el angulo $\angle ACB = 90°$

Imagen 5.10. Borrador de escritura de la conjetura (Valeri, Sebastián y Óscar)

Como los estudiantes tienen claridad en la formulación de la conjetura la MEF acude a la subtarea 19.

Subtarea 19: Escribe con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.

En este momento los estudiantes escriben la conjetura de forma final, la MEF mediante preguntas orientadoras ayuda en la escritura de manera correcta (Imagen 5.11).



Final

dado un triangulo con vertices en los extremos del diametro y otro punto de la semicircunferencia un lado como el diametro entonces siempre el triangulo formado es rectangulo

Final

Dado un triangulo cuyos vertices son los extremos del diametro y otro punto de la semicircunferencia siempre, el triangulo es rectangulo

Final

Dado ΔABC cuyos vértices son los extremos del diametro $\overline{AB}$ otro punto C en la circunferencia, entonces siempre ΔABC es rectangulo con $m\angle ACB = 90°$

Imagen 5.11. Escritura de la conjetura (Mariana, Sebastian y Óscar)

Luego de que todos los estudiantes tienen la conjetura escrita, la MEF recurre a proponer la subtarea 21.

<u>Recomendaciones para la segunda aplicación:</u>

➢ Si los estudiantes no saben cómo iniciar la escritura o no saben qué hacer se deben proponer actividades o preguntas distintas a las presentadas, como las siguientes: ¿Qué deberíamos poner primero? ¿Qué fue lo que encontraste? ¿Que encontramos en la tarea anterior?

<u>Fase 4: Verificar</u>

Paso 8: Justificación empírica de la conjetura (Paso 6 Cañadas)

Subtarea 21: Dada una circunferencia y un cuadrilátero inscrito en ella, sin medir, ¿Este cuadrilátero es un rectángulo?

Para el desarrollo de esta subtarea la MEF hace entrega de una hoja con un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Los estudiantes deben pensar cómo podrían justificar que el cuadrilátero es rectángulo (ver Anexo 6, parte I). Ana

María menciona: “Profe, no sé qué hacer”. La MEF entrega unas cuñas con la forma de triángulo rectángulo y les dice: “Miremos si tal vez hay algunos ángulos rectos”. Pasado un tiempo Sebastián dice: “Los ángulos son rectos” y los demás estudiantes están de acuerdo. La MEF pregunta: “¿Por qué los ángulos en esta figura son rectos?”, Ana María responde: “profe, pues las cuñas tienen un ángulo recto y este ángulo encaja con el de la hoja”. La MEF dice: “sí, pero y si no tenemos las cuñas ni transportador ¿Cómo podemos estar seguros de la medida de estos ángulos? ¿Qué medida tienen los ángulos?”. En respuesta a esta pregunta surge la siguiente conversación:

Óscar:	Pues tracemos estos segmentos (señalando la diagonal del cuadrilátero).
MEF:	¿Para qué?
Óscar:	Pues profe, esa sería la diagonal del cuadrilátero. (Ver imagen 5.12)
Ana María:	No esperen, esperen (…). Si hacemos un segmento de esos, vendría siendo un diámetro de la circunferencia.
Mariana:	¡Ay! Sí. Mira si yo hago un segmento, como si fuera la diagonal (…) pasa por el centro de la circunferencia, entonces es un diámetro
MEF:	Sí, muy bien. A ver Mariana. Sin hacer uso del transportador ¿Cómo podemos estar seguros de la medida de los ángulos?
Mariana:	Profe, ya teniendo el diámetro pues tenemos lo que hemos venido haciendo todas estas clases.
MEF:	¿Qué es, recuérdame por favor?
Mariana:	Profe, es que tenemos el diámetro y un punto en la circunferencia y de ahí se forma un triángulo con un ángulo recto.
MEF:	¿Segura?
Mariana:	Mmm (…) ¿Sí?
Óscar:	Profe (…) Sí, mira, la medida de los cuatro ángulos es de 90°.
MEF:	¿Cómo puedes asegurar esto?
Óscar:	Profe, pues es lo que dijo Mariana. Se está formando un triángulo, con un lado que es un diámetro, por esto el triángulo tiene un ángulo recto y es rectángulo.
MEF:	¿Seguro?
Óscar:	Sí, siempre pasa eso.

MEF: Muy bien Mariana y Óscar tienen toda la razón.

Luego de esta conversación se logra ver que los estudiantes han identificado que las diagonales del cuadrilátero son diámetros, y que determinan triángulos que cumplen con las características de la propiedad descubierta. Esto les permite concluir que hay cuatro ángulos rectos y por esta razón se puede asegurar que el cuadrilátero es un rectángulo.

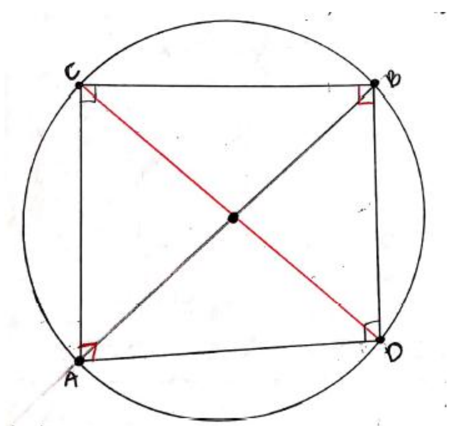


Imagen 5.12. Justificación empírica de la conjetura (Óscar)

Dado que los estudiantes evidencian gráficamente el cumplimiento de la conjetura la MEF recurre a proponer la subtarea 23.

<u>Recomendaciones para la segunda aplicación:</u>

- Con la realización de la subtarea 21 se deben cambiar ya que por medio de esta se usa la conjetura para justificar algo, pero no se busca justificar la conjetura. Por lo tanto, se propone que, si los estudiantes no saben qué hacer, se debe explicar cómo se podría justificar la propiedad descubierta, recordando el teorema 180 y el teorema isósceles triángulos congruentes. Para la justificación la MEF debe orientar a los estudiantes desde los conocimientos aritméticos que posean y los teoremas mencionados anteriormente.
- Se propone que la MEF ayude a iniciar la justificación de la conjetura descubierta por medio de preguntas orientadoras como: ¿Qué medida tienen los ángulos? Sin medir, ¿Cómo puedes estar seguro de la medida de los ángulos?

Paso 9: Generalización de la conjetura (Paso 7 Cañadas)

Subtarea 23: Dar una circunferencia y un cuadrilátero inscrito en ella, sin medir, ¿Cuándo puedes afirmar que este cuadrilátero es un rectángulo?

Óscar, Mariana, Michell, Valeri y Ana María afirman: "Cuando se tiene una circunferencia, un diámetro y otro punto en la circunferencia, siempre… siempre el triángulo que se forma es rectángulo", Sebastián pregunta a sus compañeros "¿por qué dicen que siempre pasa eso?", Óscar responde (señalando su hoja): "Mira, siempre que un lado del triángulo es diámetro (…) ¡Ah!, y pues un punto en la circunferencia, al uno mover ese punto siempre el triángulo va a ser rectángulo". Finalmente, Sebastián se convence de la explicación de Óscar. (Imagen 5.13)

La MEF en su computador muestra una simulación diseñada en el software de GeoGebra donde los estudiantes pueden verificar la propiedad descubierta.

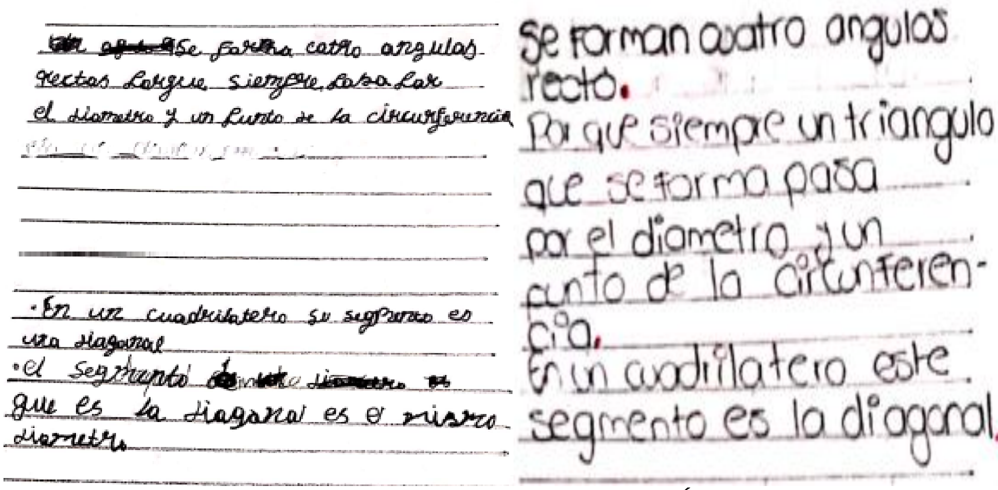


Imagen 5.13. Escritura de la generalización (Óscar y Michell)

<u>Recomendaciones para la segunda aplicación:</u>

➢ La subtarea 23 se debe cambiar ya que por medio de esta no se generaliza la conjetura realizada. Por tanto, se propone mostrar ejemplos y no ejemplos para que los estudiantes identifiquen si cumplen o no la propiedad descubierta. En esta parte se debe preguntar a los estudiantes si lo encontrado ocurre siempre y que explique por qué.

- Como toda la actividad fue desarrollada en papel, se propone que al finalizar se diseñe una actividad en GeoGebra para que los estudiantes evidencian que sin importar el medio en el que se desarrolle la actividad siempre se cumple la propiedad geométrica, consiguiéndose así la generalización de la misma en distintos medios.

Adaptaciones a la THA Debidas a la Primera Experimentación

En este capítulo, damos a conocer los componentes de la THA prevista para la segunda experimentación teniendo en cuenta las recomendaciones de la experimentación piloto y el uso del software GeoGebra desde el comienzo de la implementación. Para esto presentamos primero, la meta de aprendizaje; segundo, los aprendizajes esperados; tercero, el enunciado de la tarea; cuarto, una tabla (T*abla 6.1*) con la ruta de aprendizaje según los pasos de la generalización, una anticipación de lo que podría pasar, las subtareas previstas para atender tales anticipaciones y algunas ayudas para el profesor.

Meta de Aprendizaje de la Tarea

Descubrir, conjeturar y proponer, a manera de expresión general la siguiente propiedad geométrica: Dado una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

Aprendizaje Esperado

Promover el desarrollo del proceso de generalización geométrica a partir del descubrimiento del hecho geométrico: Dado una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

Enunciado de la Tarea y Subtareas

> Construye una semicircunferencia. Explora, descubre y comunica qué propiedad geométrica común tienen los triángulos que se forman tomando los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia, como vértices.

THA

La siguiente tabla muestra las fases del proceso de generalización, la progresión prevista del aprendizaje propuesta según las fases y pasos de generalización mencionados en el capítulo 2 sección 2.4.2 con ayuda de la tecnología haciendo uso del software GeoGebra, una idea de lo que podría pasar cuando se resuelva la tarea, las subtareas de acuerdo a lo que podría pasar, y una propuesta de ayuda para el profesor.

Adaptaciones Realizadas a la THA Diseñada en Papel para Ser Aplicada con Ayuda de la Tecnología

<table>
<tr><th colspan="4">THA con el uso del software GeoGebra.</th></tr>
<tr><th>Progresiones</th><th>¿Qué puede pasar?</th><th>Subtarea</th><th>Ayudas del profesor</th></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 1: Ver</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Interpretar el enunciado de la tarea.</td><td>Los estudiantes entienden los términos e interpretan lo que tienen que hacer.</td><td><u>Subtarea 1</u>:
No se propone subtarea.</td><td>No se requieren ayudas del profesor.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no entienden los términos y tampoco interpretan lo que tienen que hacer.</td><td><u>Subtarea 2:</u>
Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice.</td><td>Resaltar las palabras, poner ejemplos, preguntar por las relaciones entre algunos de los objetos.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no entienden algunos términos geométricos involucrados.</td><td><u>Subtarea 3:</u>
Explica con tus palabras de qué se trata la tarea.</td><td>Guiar la interpretación dirigiendo la atención a los objetos geométricos que hay que considerar y sobre cuál es el que hay que buscar algo.

Guiar la atención hacia las palabras del enunciado que indican lo que hay que hacer para aclarar de qué se trata la tarea.</td></tr>
</table>

Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración. (Paso 1 de Cañadas).	Los estudiantes hacen una representación correcta y además usan la herramienta de arrastre para considerar varios triángulos en GeoGebra.	<u>Subtarea 4:</u> No se propone subtarea	No se requieren ayudas del profesor. Es la oportunidad para que el profesor comente el papel de la herramienta arrastre ¿estamos construyendo un triángulo o muchos triángulos?, puede pedirles que hagan dos y luego arrastre uno hasta superponerse con el otro, etc.
	Los estudiantes saben cómo construir una semicircunferencia pero no saben cómo construir un diámetro con la herramienta GeoGebra.	<u>Subtarea 5:</u> Construye una circunferencia y un diámetro de esta	Construir una recta que contenga al centro y un punto cualquiera de la circunferencia.
	Los estudiantes no saben cómo construir una semicircunferencia o una circunferencia y su diámetro con la herramienta GeoGebra.		
	Los estudiantes no saben cómo construir un diámetro con la herramienta GeoGebra ni hacen uso del arrastre para considerar varios triángulos.		
Representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (en el triángulo). (Paso 2 de Cañadas).	Antes de explorar la representación, a los estudiantes se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.	<u>Subtarea 6:</u> No se propone subtarea	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes inician a realizar alguna acción sobre la representación (como contar los segmentos, comparar las figuras que hay, subrayar, medir lados o ángulos)	<u>Subtarea 7:</u> Explica qué propiedades puede tener un triángulo	Proponer ejemplos sobre que propiedades se pueden investigar en los triángulos: 3 lados, 3 vértices, aunque esas no sean de interés se pueden mencionar hasta conseguir que los

	sin haber construido una representación mental de las propiedades que quieren investigar.		estudiantes hagan alusión a estudiar las medidas de los lados y medidas de los ángulos.
Representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (en el triángulo). (Paso 2 de Cañadas).	Los estudiantes inician a realizar alguna acción sobre la representación (como contar los segmentos, comparar las figuras que hay, subrayar, medir lados o ángulos) sin haber construido una representación mental de las propiedades que quieren investigar.	Subtarea 7: Explica qué propiedades puede tener un triángulo.	Proponer ejemplos sobre que propiedades se pueden investigar en los triángulos: 3 lados, 3 vértices, aunque esas no sean de interés se pueden mencionar hasta conseguir que los estudiantes hagan alusión a estudiar las medidas de los lados y medidas de los ángulos.
	Antes de explorar a los estudiantes no se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.		
Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad.	Los estudiantes tienen dominio y hacen uso correcto de GeoGebra.	Subtarea 8: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes hacen uso incorrecto de GeoGebra al construir y medir ángulos y segmentos.	Subtarea 9: Construye y toma las medidas de distintos ángulos y segmentos.	Explicar cómo se construyen y se miden ángulos y segmentos haciendo uso de GeoGebra.
Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3 de Cañadas).	Los estudiantes encuentran la propiedad solicitada.	Subtarea 10: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes no encuentran alguna propiedad común a todos los triángulos.	Subtarea 11: Explica qué propiedades puede tener un triángulo y explora esas propiedades que construiste u otras.	Sugerir construir otros triángulos para ver si detectan la propiedad común de interés. Colocar la opción traza a los segmentos del triángulo excepto al diámetro. Sugerir realizar varias veces el ejercicio distinguiendo cada uno de los triángulos y mover los puntos del triángulo original (trasponer el triángulo inicial en los construidos).

<table>
<tr><td></td><td>Los estudiantes tienen dificultad para encontrar la propiedad en muchos triángulos por la exactitud de las medidas (cantidad de decimales).</td><td><u>Subtarea 12:</u>
Construir ángulos y segmentos y tomar las medidas.</td><td>Activar la herramienta redondeo a 0 cifras decimales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 2: Describir</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Formulación de una conjetura.
(Paso 4 Cañadas).</td><td>Los estudiantes formulan la conjetura empleando el formato si… entonces o el formato dado… entonces.</td><td><u>Subtarea 13:</u>
No se propone subtarea.</td><td>No se requieren ayudas del profesor.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no saben cómo iniciar la formulación.</td><td><u>Subtarea 14:</u>
Haz de cuenta que tu mejor amiga (o) faltó a la clase y le te pide que le explique lo trabajado en la clase. Explícale a tu amigo lo trabajado.</td><td>Sugerir recordar la propiedad descubierta y el procedimiento para su hallazgo.
Ayudar a iniciar la formulación.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan un enunciado que insinúa la conjetura, pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente.</td><td rowspan="3"><u>Subtarea 15:</u>
Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma?
Si todos los lados de triángulo son cuerdas distintas del diámetro, sin medir se puede afirmar ¿Qué el triángulo formado es un triángulo rectángulo?</td><td rowspan="3">Dar no ejemplos para que se den cuenta de la necesidad de cada condición, para esto se entregará la actividad del anexo 4 (ver Anexo 4).</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan sólo el consecuente de la condicional.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan la conjetura casi completa, pero no describen algunas de las condiciones del antecedente o del consecuente.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">Fase 3: Escribir</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Escritura de una conjetura.
(Paso 5 Cañadas)</td><td>Los estudiantes realizan la escritura de la conjetura correctamente.</td><td>Subtarea 16:
No se propone subtarea</td><td>No se requieren ayudas del profesor.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no saben cómo iniciar la escritura.</td><td>Subtarea 17:
Formula y escribe con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td>Orientar al estudiante en la escritura de la conjetura, desde su formulación.
Entregar actividades donde deban expresar de forma escrita la formulación de la conjetura (ver Anexo 5).</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes escriben un enunciado que insinúa la conjetura, pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente.</td><td>Subtarea 18:
Escribe con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td>Ayudar a comenzar la escritura de la conjetura, por medio de ejemplos, contraejemplos y preguntas.
Entregar actividades donde deban expresar de forma escrita la formulación de la conjetura (ver Anexo 5).</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes escriben la conjetura casi completa, pero no escriben algunas de las condiciones del antecedente o en consecuente.</td><td rowspan="3">Subtarea 19:
Escriba las características de la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td rowspan="3">Hacer preguntas orientadoras como: ¿Qué deberíamos poner primero? ¿Qué fue lo que encontraste? ¿Qué encontramos en la anterior tarea?
Ayudar para comenzar la escritura de la conjetura, por medio de ejemplos, no ejemplos y preguntas.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes mencionan cuál es la propiedad, pero realizan la escritura de manera incorrecta.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes mencionan cuál es la propiedad, pero realizan la escritura de manera incorrecta.</td></tr>
</table>

Fase 4: Verificar			
Justificación empírica de la conjetura. (Paso 6 Cañadas).	Los estudiantes justifican la conjetura, aplicando el Teorema 180 y el Teorema triángulo isósceles – ángulos congruentes y mediante procesos aritméticos concluyen la existencia del ángulo recto.	Subtarea 20: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no saben que deben hacer.	Subtarea 21: Explicar cómo se podría justificar la propiedad descubierta.	Ayudar a iniciar la justificación de la conjetura descubierta por medio de preguntas orientadoras, como: ¿Qué medida tienen los ángulos? Sin medir, ¿cómo puedes estar seguro de la medida de los ángulos? Recordar o mencionar el teorema 180 y el teorema triángulo isósceles ángulos congruentes. Sugerir colorear del mismo color los ángulos congruentes. Orientar una posible justificación desde los conocimientos aritméticos que poseen los estudiantes y los teoremas mencionados.
Generalización de la conjetura. (Paso 7 Cañadas)	Los estudiantes generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 22: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 23: Identificar en que figuras se cumple la propiedad descubierta y en cuáles no.	Preguntar a los estudiantes si lo encontrado ocurre siempre y pedir que expliquen por qué. Mostrar ejemplos y no ejemplos en distintas situaciones y pedir la identificación del cumplimiento de la propiedad.

Tabla 6.1. THA Segunda experimentación.

Identificación de los Participantes

Los estudiantes seleccionados son: Manuel, Juan David, Laura, Alejandra, Sofía y Esteban. A juicio del profesor de matemáticas de la institución ellos se destacan en la clase de matemáticas por su comportamiento e interés. Son niños colaboradores, les gusta participar, debaten con facilidad y fluidez, expresan sus ideas sin dificultad.

Recuento del Desarrollo de la Tarea Mediante el Uso de GeoGebra

Fase 1: Ver

Paso 1: Interpretar el enunciado de la tarea

Los estudiantes se organizan en parejas en distintas mesas (Manuel - Juan David, Laura - Alejandra y Sofía - Esteban). La MEF hace entrega de una hoja donde se encuentra el enunciado de la tarea y pide a los estudiantes que realicen su lectura. Al finalizar la lectura Laura, Alejandra, Sofía y Esteban mencionan que no entienden algunos términos expuestos en la tarea. Por lo tanto, la MEF opta por asignar la subtarea 2 para estos cuatro estudiantes. Manuel y Juan David manifiestan no entender lo que deben desarrollar. La MEF asigna la subtarea 3 para estos dos estudiantes.

Subtarea 2: Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice (Laura - Alejandra y Sofía - Esteban).

La MEF pide a las estudiantes Laura y Alejandra responder "¿Qué entienden por semicircunferencia?", Laura menciona que el único acercamiento que ha tenido con el elemento geométrico semicircunferencia ha sido la exploración con las Tablet y el software GeoGebra realizada en la sesión anterior. Desde lo visualizado en esta oportunidad ella responde: "Para mí la semicircunferencia parece ser la mitad de la circunferencia, pero no sé ¿cómo se define?".

La MEF pregunta: ¿Que entienden cuando decimos la palabra semi? ¿A qué hacen alusión las frases “la puerta esta semiabierta” o “la ventana del salón esta semicerrada”? Alejandra responde: “Mmm (…), que la puerta esta semiabierta es como decir que no está completamente abierta, está abierta solo un poquito. Y lo mismo seria cuando decimos que la ventana del salón esta semicerrada”. Laura retomando la intervención de Alejandra dice: “O sea que por eso la semicircunferencia es muy parecida a la circunferencia, pero no es una circunferencia completa”.

Luego la MEF pide formalizar las definiciones encontradas en la tarea teniendo en cuenta los elementos y las características que las determinan. Alejandra responde: “El diámetro es la línea del centro a la circunferencia”, Laura contradice a Alejandra diciendo: “No, el diámetro son dos radios, eso sí lo recuerdo. La línea del centro a la circunferencia es radio”. La MEF les dice: “cuando se refieren a línea en vocabulario matemático se alude a segmento”.

La MEF pregunta: “¿Cómo se llaman los puntos de inicio y fin cada segmento?”. Alejandra responde: “Profe, yo estoy segura que se pueden llamar extremos, porque son los últimos puntos. Cuando mi mamá me dice que está al extremo de la ciudad es porque está donde se finaliza Bogotá. Yo lo relaciono con esto”. La MEF afirma la respuesta de Alejandra y pregunta: “¿Pueden formular una definición de radio?”. Laura dice: “¡Yo!, ¡yo!, yo la quiero decir. El radio de la circunferencia es el segmento, mmmm… Los extremos de este segmento son el centro de la circunferencia y un punto de la circunferencia.” La MEF afirma la respuesta y pregunta: “¿Qué es un diámetro?”. Alejandra responde: “son dos radios”. La MEF en busca de una argumentación pregunta: “¿El diámetro son dos radios cualesquiera o deben ser radios que cumplen alguna característica?”.

Laura hace la construcción de dos segmentos cualesquiera en la Tablet. Y responde: “no porque si tenemos esto (Imagen 6.1) son dos radios y nos es diámetro. ¿Cierto profe? Pero si yo los muevo y quedan así (Imagen 6.2) esto si es diámetro.”

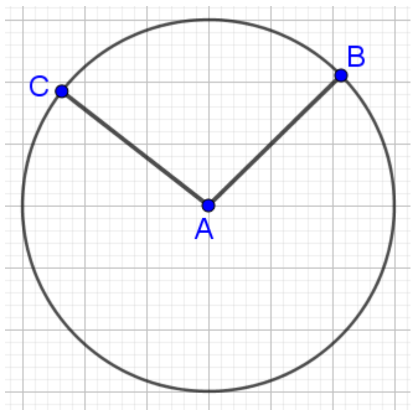


Imagen 14. No ejemplo de diámetro (Alejandra)

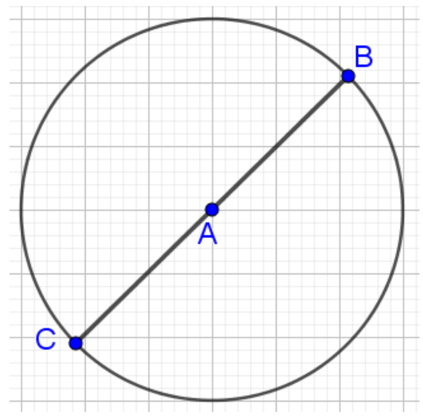


Imagen 15. Ejemplo de diámetro (Alejandra)

Alejandra dice: “¡Ah ya!, por eso cuando se construye el diámetro debemos hacerlo con la recta. Para que nos quede un segmento completo y no quede partido”. La MEF pregunta:” ¿Cuáles son los extremos del diámetro que tienes representado?” Laura responde: “Los puntos de la circunferencia y el diametro, este (selaña el punto *C*) y este (señala el punto *B*). (Imagen 6.2)”. La MEF afirma la respueta y pregunta: “¿Pueden formular la definicion de semicircunferencia?, ¿Cual es?”

Para esto Laura y Alejandra construyen una semicircunferencia con la herramienta “ semicircunferencia” y discuten acerca de las características que la definen. Luego Laura llama a la MEF diciendo: “profe, encontramos que la semicircunferencia si es la mitad de la circunferencia, pero el inicio y el fin de la semicircunferencia son los mismos puntos que llamamos extremos del diámetro. Y movimos los puntos extremos y conseguimos muchas semicircunferencias. Alejandra dice esto es porque tenemos muchos diametros en la circuneferecia. ¿estamos bien profe?. La MEF afirma la respuesta, las niñas entre risasexpresan: “Por fin nos sentimos inteligentes. La profe solo nos pregunta y no nos da la respuesta, nos hace pensar mucho. ¿porque las clases de matemáticas no son siempre asi de cheveres?”. Finalmente Laura dice: “profe ahora si entiendo que debo hacer en la tarea”.

Con Sofía y Esteban se dio una discusión similar a la anterior llegando a las mismas conclusiones.

Subtarea 3: Explica con tus palabras de qué se trata la tarea. (Manuel-Juan David)

La MEF pide a los estudiantes leer pausadamente el enunciado, subrayando con color rojo los elementos geométricos involucrados en la tarea y con color azul la acción a desarrollar para dar solución a la tarea.

Luego los estudiantes manifiestan entender lo que deben hacer para solucionar la tarea y lo relacionan con una actividad de exploración de GeoGebra desarrollada en una sesión de clase anterior.

Paso 2: Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración (Paso 1 Cañadas)

Alejandra, Laura, Sofía y Esteban realizan correctamente la construcción en el software de GeoGebra (Imagen 6.3), por tanto, no es necesario asignar una subtarea.

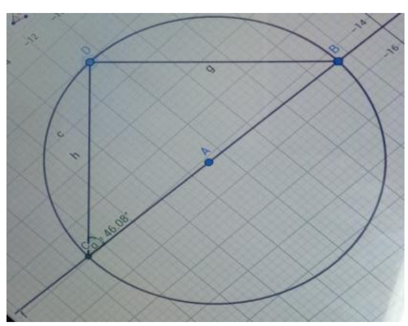


Imagen 16. Representación (Alejandra)

Manuel y Juan David construyen el diámetro de manera incorrecta. La MEF mueve un extremo del diámetro para verificar la construcción y se da cuenta que al mover este punto el segmento deja de contener el centro de la circunferencia (Imagen 6.4), por tanto, asigna la subtarea 5.

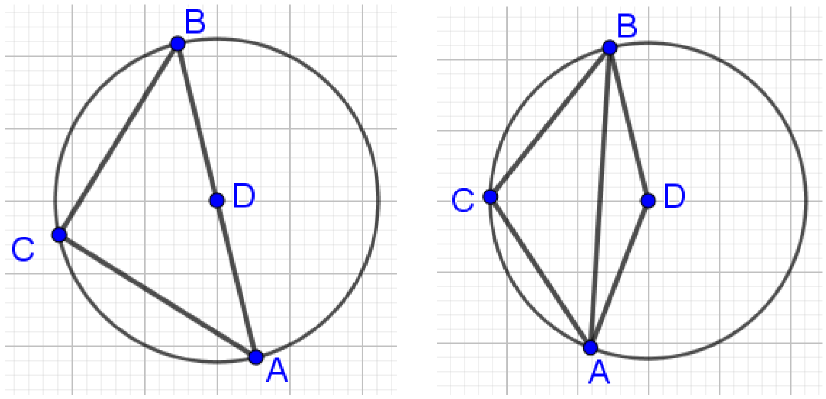


Imagen 17. Verificación de la construcción por parte de la MEF

Subtarea 5: Construye una circunferencia y un diámetro de esta.

La MEF da la siguiente instrucción “Les sugiero construir una recta que contenga el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de la circunferencia. Luego deben utilizar la herramienta intersección para encontrar un punto especial en la circunferencia. Teniendo estos dos puntos en la circunferencia pueden construir el diámetro. Recuerden utilizar la herramienta “ocultar” para ocultar la recta que construyeron inicialmente”.

Teniendo en cuenta la indicación dada, Manuel y Juan David realizan la construcción de manera correcta (Imagen 6.5).

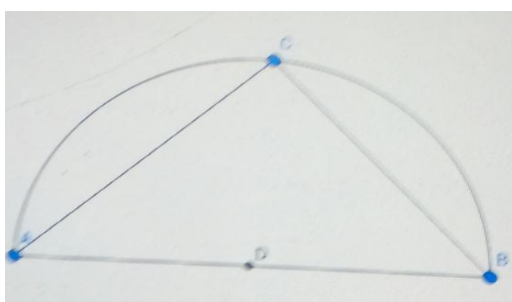
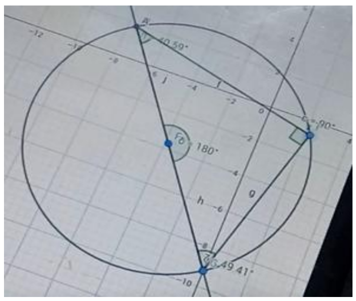


Imagen 18. Representación (Juan David)

Paso 3: Construir una representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (el triángulo) (Paso 2 Cañadas)

Luego de tener la construcción bien hecha Manuel, Juan David, Sofía y Esteban realizan acciones sobre la representación sin haber construido una representación mental de las propiedades que se desean investigar. Algunas de las acciones que hacen los estudiantes son: mover los puntos, tomar medidas de los lados, comparar las figuras obtenidas a través del arrastre (Imagen 6.6). Laura y Alejandra, mediante gestos, manifiestan que no se les ocurre qué investigar. De modo que la MEF opta por asignar a todos los estudiantes la subtarea 7.



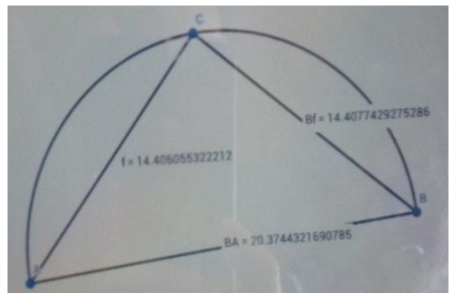


Imagen 19. Acciones sobre la representación sin haber construido una representación mental de las propiedades a descubrir (Esteban y Manuel)

Subtarea 7: Explica qué propiedades puede tener un triángulo.

En este momento las intervenciones giran en dos entornos, el primero enfocado en la intervención 1, con el grupo de Juan David y Manuel, y el otro con la intervención 2, con el grupo de Esteban y Sofía, la respuesta de Laura y Alejandra tiene relación con la intervención 2.

<u>Intervención 1:</u>

Manuel: Podemos medir los lados del triángulo.

MEF: ¿Únicamente pueden tomar la medida de los lados del triángulo?

Juan David : Profe y también podemos mover los vértices y tenemos triángulos de distintos tamaños.

Manuel: Podemos medir los ángulos también.

<u>Intervención 2:</u>

Esteban: Podemos medir los ángulos para saber si es obtuso, recto o agudo.

Sofía: Si se tiene la medida de los ángulos se puede saber si el triángulo es rectángulo.

MEF: ¿Solo se puede tomar la medida de los ángulos?

Sofía: Y los lados también.

Paso 4: Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad

Debido a que antes de la aplicación de la tarea se desarrolló una actividad sobre el uso de GeoGebra los estudiantes hacen uso correcto de la herramienta a la hora de tomar la medida de los lados y los ángulos del triángulo (Imagen 6.7), por tanto, la MEF no tiene necesidad de sugerir subtarea.

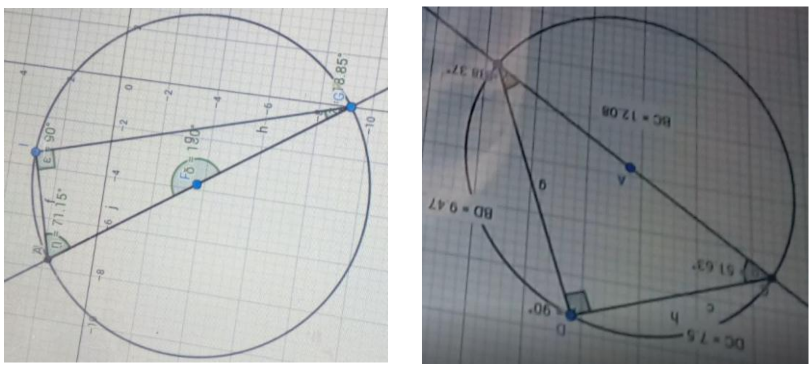


Imagen 20. Exploración (Sofía y Laura)

Paso 5: Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos (Paso 3 Cañadas)

Los estudiantes identifican la propiedad, pues todos toman la medida de los ángulos y de los lados del triángulo. Mediante el arrastre y la construcción de figuras auxiliares (triángulos) identifican qué características siempre se cumplen y cuales dejan de cumplirse si se cambian las condiciones iniciales de la tarea. Por ejemplo: Esteban dice: “Cada vez que se mueven los puntos del triángulo se tienen triángulos distintos, porque cambian las medidas de los lados y los ángulos.” La MEF pregunta: “¿Cuántos triángulos se obtienen?”, Esteban y Sofía en coro responden: “Como 100 triángulos. ¡No! más, son muchos.”. Alejandra y Laura dicen: “Nosotras hicimos un triángulo que no tiene de lado el diámetro y el ángulo de 90° desaparece, pero cuando movemos los puntos y hacemos que un lado sea diámetro aparece”. Teniendo en cuenta esto no se hace necesario proponer subtareas.

<u>Fase 2: Describir</u>

Paso 6: Formulación de una conjetura (Paso 4 Cañadas)

La MEF dice: “Hagan de cuenta que su mejor amiga o amigo no asistió a la clase y les pide que le hagan el favor de contarle qué fue lo que hicieron, ¿Cuál sería su discurso?”. Alejandra y Laura dicen: “el triángulo tiene un ángulo de 90° siempre, los otros dos ángulos cambian cuando está dentro de la circunferencia y un lado es diámetro, pero si el lado no es diámetro el ángulo de arriba no mide 90° y todos los ángulos cambian de medida cuando se mueven los puntos” en este enunciado la MEF evidencia que se insinúa la conjetura, pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente. Manuel, Juan David, Sofía y Esteban dicen: “siempre tenemos un triángulo que tiene un ángulo recto, que mide 90°, entonces el triángulo es rectángulo”, de donde la MEF evidencia que estos estudiantes solo formulan el consecuente. Por tanto, la MEF opta por asignar la subtarea 15.

Subtarea 15: Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma? Si todos los lados de triángulo son cuerdas distintas del diámetro, sin medir se puede afirmar ¿Qué el triángulo formado es un triángulo rectángulo?

La MEF pregunta: “¿Siempre se tienen triángulos rectángulos? ¿Qué sucede cuando todos los lados del triángulo son cuerdas distintas a diámetros?”. Laura dice: “Nosotras hicimos los dos triángulos y encontramos que en el triángulo donde uno de sus lados es diámetro siempre tiene un ángulo que no va a cambiar y mide 90 °, pero cuando los lados son cuerdas distintas al diámetro todos los ángulos son diferentes y las medidas no se mantienen” (Imagen 6.8). Alejandra agrega: “Cuando movemos los puntos del triángulo que todos los lados son cuerdas distintas al diámetro y hacemos que una cuerda sea diámetro se cumple la propiedad de que el ángulo sea de 90°. Sólo se cumple en ese caso, de resto ningún ángulo mide 90°.”

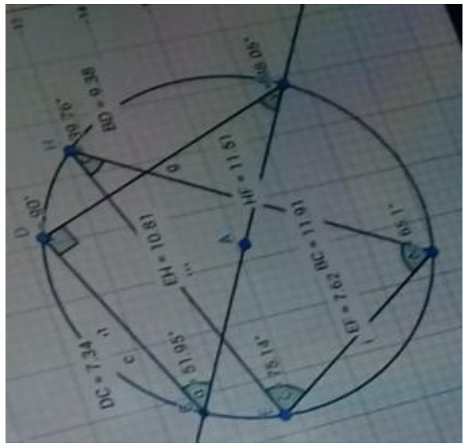


Imagen 21. Construcción auxiliar formulación de la conjetura (Laura)

Teniendo clara la subtarea 15, la MEF pide a los estudiantes retomar la idea de contarle a un compañero que no asistió a la clase lo trabajado en ella, para esto, solicita formular nuevamente el discurso de la propiedad encontrada. Además, sugiere que para ser el mensaje claro y entendible deben tener en cuenta el proceso de construcción y todos los detalles. Luego de un momento, Laura y Alejandra dicen:

> “¡Ah! (…), pues primero hicimos una circunferencia, luego un diámetro, haciendo una recta que pasa por el centro y un punto de la circunferencia, y la interseccion de la recta y la circunferencia. Luego escogimos un punto cualquiera en la circunferencia para hacer el triángulo uniendo con segmentos los extremos del diámetro y el punto cualquiera que escogimos. Si hacemos el triángulo asi, ese triángulo siempre tiene un ángulo de 90°. Pero si el lado no es diámetro ese triángulo no tiene ángulos de 90°” (Alejandra y Laura).

La MEF pregunta: “¿El ángulo de 90° que se determina en el triángulo es cualquiera o es uno específico?”. Laura responde: “ es el de arriba, donde no están los extremos del diámetro”.

Con los demás estudiantes la MEF hace un diálogo similar en donde se busca que logren formular de la conjetura la propiedad descubierta de una manera clara y precisa, para luego hacer la escritura de la misma.

Fase 3: Escritura

Paso 7: Escritura de una conjetura (Paso 5 Cañadas)

La MEF dice: “Ahora, hagan de cuenta que su mejor amigo o amiga no vino a clase porque está muy enfermo y no puede recibir llamadas, de modo que les pide que le envíen un mensaje de texto o un mensaje por WhatsApp donde le cuenten lo trabajado en clase, ¿Qué escribirían en el mensaje?”. Alejandra, Esteban y Juan David en una primera versión escribieron:

“Al hacer un triángulo con un diámetro se obtiene un ángulo de 90°, el cual al mover los puntos no cambia. Al hacer un triángulo con cuerdas distintas al diámetro no se obtiene un ángulo de 90° y al mover un punto todas las medidas de los lados y los ángulos cambian”.

“En algunos casos el ángulo del triángulo cambia, no es de 90°, y es cuando los lados son cuerdas que no son diámetros. Si tienen el centro de la circunferencia son diámetros y siempre tiene un ángulo de 90°”.

“Que cuando un triángulo tenga de lado un diámetro se crea un ángulo de 90°. Si el triángulo no tiene de lado un diámetro, todos los lados son cuerdas y no se crea el ángulo de 90°”.

Como resultado, se tiene que los estudiantes escriben la conjetura casi completa, aunque incluyen algunas condiciones del antecedente o el consecuente les falta claridad. De modo que la MEF opta por asignar la subtarea 19.

Subtarea 19: Escriba las características de la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.

La MEF Mediante preguntas orientadoras ayuda a la escritura de la conjetura. Además, pide a los estudiantes que al escribir nuevamente la propiedad descubierta se tenga en cuenta la construcción realizada (Imagen 6.9; 6.10 y 6.11).

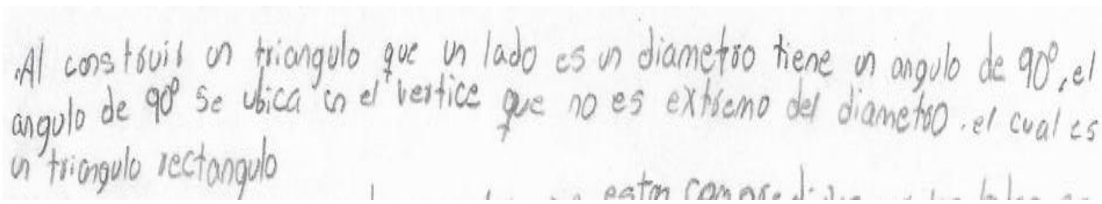

Al constuir un triangulo que un lado es un diametro tiene un angulo de 90°, el angulo de 90° se ubica en el vertice que no es extremo del diametro. el cual es un triangulo rectangulo

Imagen 22. Segunda versión escritura de la conjetura (Alejandra)

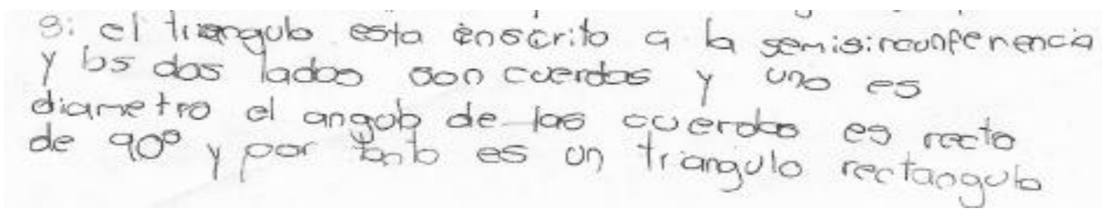

S: el triangulo esta enscrito a la semicircunferencia y los dos lados son cuerdas y uno es diametro el angulo de las cuerdas es recto de 90° y por tanto es un triangulo rectangulo

Imagen 23. Segunda versión escritura de la conjetura (Esteban)

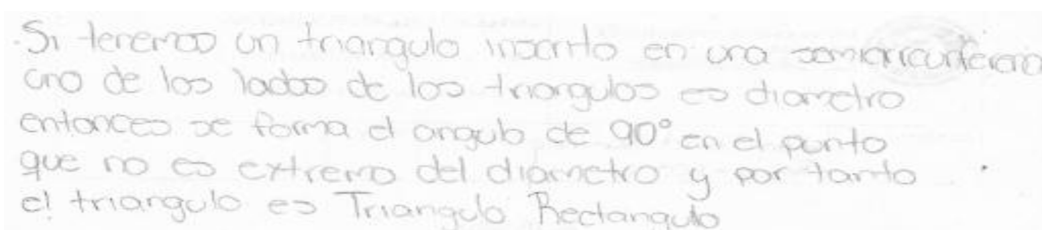

Si tenemos un triangulo inserto en una semicircunferencia uno de los lados de los triangulos es diametro entonces se forma el angulo de 90° en el punto que no es extremo del diametro y por tanto el triangulo es Triangulo Rectangulo

Imagen 24. Segunda versión escritura de la conjetura (Juan David)

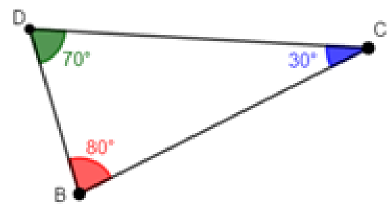
<u>Fase 4: Verificar</u>

Paso 8: Justificación empírica de la conjetura (Paso 6 Cañadas)

La MEF pide a los estudiantes justificar la propiedad geométrica descubierta. Todos, mediante gestos, manifiestan no saber qué deben hacer. De modo que la MEF opta por asignar la subtarea 21.

Subtarea 21: Explicar cómo se podría justificar la propiedad descubierta.

Antes de iniciar la justificación de la propiedad descubierta la MEF le explica a cada grupo el teorema 180° (Ver imagen 6.12) (la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°).



$$\textit{Suma de ángulos internos del triángulo } DBC$$
$$= \textit{Verde} + \textit{Azul} + \textit{Rojo}$$
$$70° + 30° + 80° = 180°$$

Imagen 25. Explicación MEF - Teorema 180°

También les explica el Teorema Triángulo isósceles-ángulos congruentes (en un triángulo isósceles los ángulos que no son determinados por los lados que tienen la misma medida tienen la misma medida entre sí).

> "Si los lados BC y AC tienen la misma medida, entonces el triángulo ABC es isósceles. Ahora como el triángulo ABC es isósceles, entonces los ángulos ABC y BAC tiene la misma medida porque son los ángulos que no están comprendidos por los lados que tienen la misma medida" (MEF) (Ver imagen 6.13).

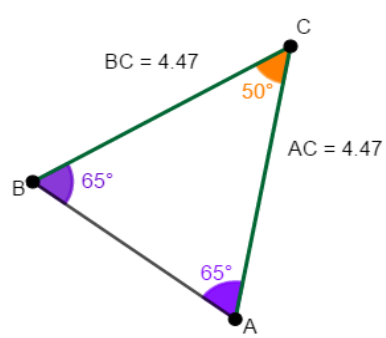


Imagen 26. Explicación MEF - Teorema Triángulo isósceles-ángulos congruentes

Luego de explicar estos dos teoremas y orientar el proceso aritmético los estudiantes consiguen hacer las justificaciones de la propiedad encontrada.

Para ello primero, algunos hacen en una hoja la construcción de la tableta haciendo la semicircunferencia (Imagen 6.14) y otros simplemente construyen los triángulos (imagen 6.15). Segundo, identifican y colorean los triángulos isósceles cuyos lados son radios de la circunferencia. Tercero, señalan del mismo color los ángulos que resultan ser congruentes al aplicar el Teorema Triángulo isósceles-ángulos congruentes. Cuarto, identifican el triángulo grande determinado por los triángulos isósceles. Quinto, aplican el Teorema 180°, a partir del color asignado a los ángulos congruentes y la cantidad de los mismos. Para esto los estudiantes usan distintas estrategias, unos hacen una señal con el color indicado en el ángulo (Imagen 6.14), otros escriben el nombre completo del color (Imagen 6.15) y otros utilizan solo la letra inicial del nombre del color (Imagen 6.16).

Luego de aplicar el Teorema 180° y obtener la operación aritmética los estudiantes usan distintas estrategias de solución. Unos deciden encontrar un factor común entre los sumandos, simplificar y luego dividir (Imagen 6.14). Otros por el contrario deciden no simplificar y dividir cada término (Imagen 6.15 y 6.16). Finalmente, todos obtienen que la suma de las medidas de los ángulos de colores distintos sea de 90° y, además, identifican que este es un ángulo del triángulo inscrito en la semicircunferencia.

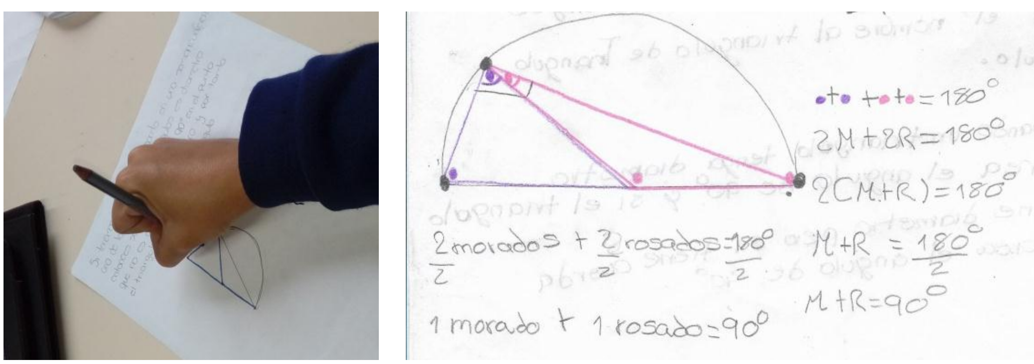


Imagen 27. Justificación de la propiedad (Manuel)

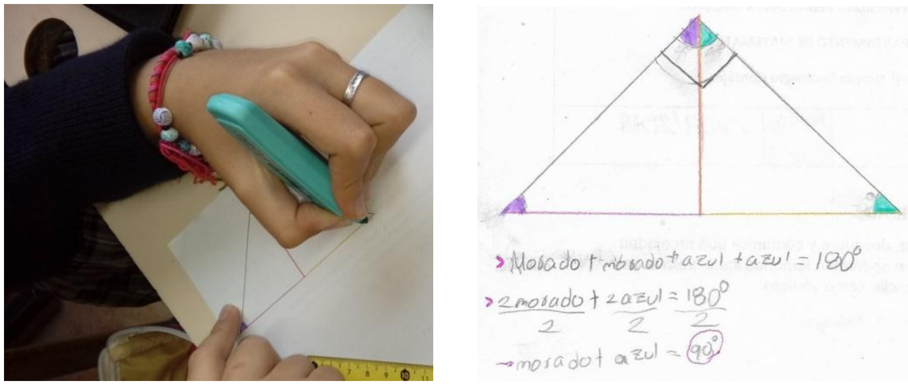


Imagen 28. Justificación de la propiedad (Alejandra)

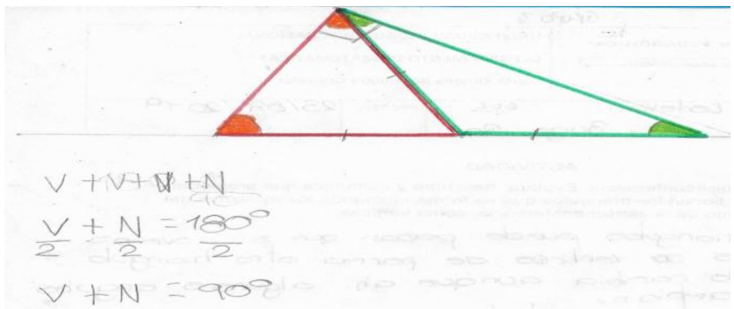


Imagen 29. Justificación de la propiedad (Esteban)

Paso 9: Generalización de la conjetura (Paso 7 Cañadas)

La MEF hace entrega de una hoja con figuras donde se cumple y no se cumple la propiedad descubierta (ejemplos y no ejemplos). Los estudiantes deben mencionar qué tipo de triángulo se está mostrando en cada uno de los casos, identifican en qué casos se cumple la propiedad geométrica descubierta. Todos los estudiantes indican que, en los triángulos inscritos en la circunferencia, en donde uno de sus lados es diámetro, pueden asegurar con certeza que el triángulo es rectángulo, pero en los casos en donde no se cumple esta característica no se puede asegurar o indicar sin medir qué tipo de triángulo es. Por ejemplo, Alejandra escribió: “En los casos donde un lado del triángulo es un diámetro de la circunferencia se forma un triángulo rectángulo. En los casos donde los lados del triángulo son cuerdas distintas a diámetros no puedo asegurar que tipo de triángulo es” (Imagen 6.17). Esteban manifiesta que cuando ninguno de los lados del triángulo es diámetro no se sabe qué tipo de triángulo se forma (Imagen 6.18).

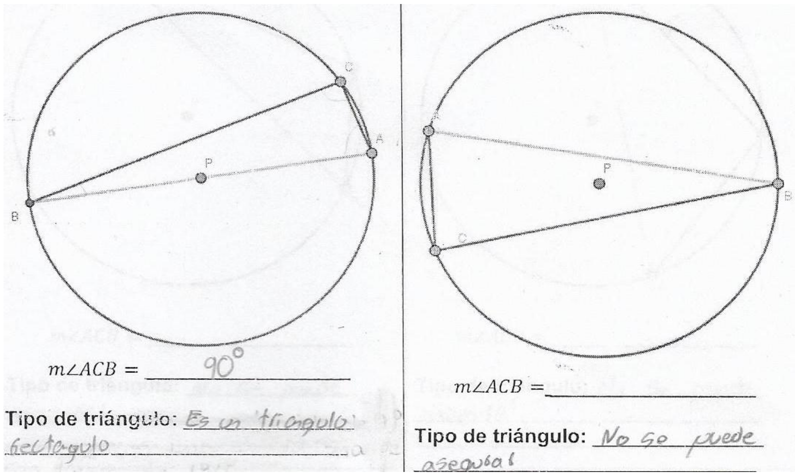
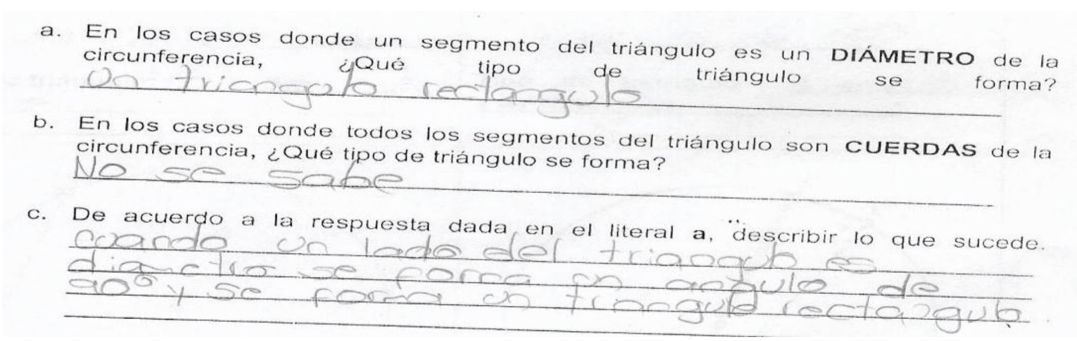


Imagen 30. Generalización (Alejandra)



a. En los casos donde un segmento del triángulo es un **DIÁMETRO** de la circunferencia, ¿Qué tipo de triángulo se forma?
Un triangulo rectangulo

b. En los casos donde todos los segmentos del triángulo son **CUERDAS** de la circunferencia, ¿Qué tipo de triángulo se forma?
No se sabe

c. De acuerdo a la respuesta dada en el literal **a**, describir lo que sucede.
cuando un lado del triangulo es diametro se forma un angulo de 90° y se forma un triangulo rectangulo

Imagen 31. Generalización (Esteban)

Conclusiones

Sobre la Inquietud Investigativa

Aunque en los currículos nacionales e internacionales escolares se habla de trabajar en el proceso de generalización en grados de secundaria, antes de dar inicio al estudio del álgebra, varios académicos han expuesto la posibilidad de trabajar este tema en edades tempranas. Creemos que nuestro trabajo de investigación puede servir de ejemplo sobre como emprender este reto. Al ser divulgado otros profesores pueden llevar a cabo experiencias similares en sus aulas o animarse a formular sus propias Trayectorias para desarrollar el proceso de generalización en sus estudiantes.

En nuestro trabajo nos percatamos que la generalización geométrica es distinta a la generalización aritmética y a la generalización algebraica. Consideramos que los estudios acerca de la generalización aritmética y generalización algebraica no necesariamente dan la pauta para la generalización geométrica. Por ende, es necesario hacer adaptaciones a las herramientas existentes sobre el proceso de generalización.

Con lo anterior consideramos que se respondió a nuestra inquietud investigativa, puesto que a través de este trabajo vemos cómo se puede propiciar la enseñanza y el aprendizaje de la generalización geométrica por medio de las THA.

Sobre los Objetivos

Podemos decir que se cumplió el objetivo general del trabajo ya que construimos dos Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en torno al proceso de generalización geométrica. La primera THA hace referencia al trabajo mediante el uso de papel “THA con el uso de papel” (ver Anexo 7) y la segunda hace referencia al uso del software de geometría dinámica GeoGebra "THA con el uso del software GeoGebra" (ver Anexo 8).

Sobre el proceso de generalización geométrica pudimos llevar a niños de 10 y 11 años en un tránsito suave a la generalización de una propiedad geométrica. Nos encontramos con expresiones como: "¡Oh!, entonces encontré algo" (Óscar), "por fin me siento inteligente" (Laura), "¿Por qué esto no lo hacemos más seguido en la clase de matemáticas?" (Alejandra), "no quiero que la clase se termine" (Esteban), "podemos encontrar otras propiedades no solo en los triángulos" (Laura), "esto es divertido porque no siento frustración y entiendo todo" (Sofía), estas voces nos muestran que es una experiencia impactante para los niños. Ellos se sienten capaces, les gusta y se motivan a aprender. Las expresiones mencionadas y los relatos presentados en los capítulos 5 y 6 nos permiten asegurar que la THA funciona. Claro está, es susceptible de mejorar en sucesivas implementaciones. Sin embargo, consideramos que es una base para que otros profesores puedan implementar este trabajo con niños de grado sexto e incluso con niños de grado cuarto o quinto de primaria.

Creemos que hemos logrado hacer una caracterización de lo que es una THA que no solo aclara qué es y qué características tiene, sino que además las ejemplificamos. En el capítulo 2.1 se puede ver una recopilación documental que abarca desde los comienzos del estudio de la THA en 1995 hasta trabajos de investigación a nivel nacional del año 2018. Esto puede servir de base para otros trabajos que quieran hacer estudios sobre THA.

En el capítulo 2.4 presentamos cuatro fases y siete pasos para el proceso de generalización geométrica, los cuales han sido adaptados de distintos documentos que dan cuenta del estudio sobre generalización y el proceso de elaboración de conjeturas. Durante la construcción de la THA tomamos las cuatro fases presentadas en el marco teórico, pero en el estudio detallado de la misma vimos la necesidad de incluir dos pasos nuevos en la fase de ver.

Finalmente proponemos para el proceso de generalización geométrica seguir cuatro fases y nueve pasos (Ver anexo 9).

El ejercicio piloto de implementación de la THA nos permitió asegurar ciertos supuestos y reestructurar nuestra propuesta para nuevas implementaciones. De esta implementación podemos decir que este tipo de espacios requieren tiempo, dedicación, disposición para escuchar las distintas intervenciones y orientarlas a conseguir la meta propuesta.

Sobre Nuestros Aprendizajes

Nuestros aprendizajes se centran en dos dominios que consideramos importantes en educación matemática: Las THA y la generalización geométrica. A nuestro criterio, decimos que las THA son importantes porque construir una meta de aprendizaje, crear una ruta cognitiva de aprendizaje de los estudiantes, diseñar una secuencia de tareas que respondan a la meta propuesta y demás, son procesos que debe desarrollar todo docente en su labor diaria. Esto le ayuda a visualizar de antemano los posibles sucesos en la intervención del aula. Da pautas para prever situaciones en el intercambio de discurso docente-estudiante y estudiante-docente. Permite una tener una mayor profundidad de los temas a enseñar por la planificación misma.

Adicionalmente, compartiendo la opinión de distintos académicos, para nosotras la generalización es un proceso importante en el desarrollo de pensamiento matemático. En este estudio en las instituciones educativas donde adelantamos nuestras prácticas educativas la geometría no se trabaja con la suficiente profundidad para promover este proceso. Y es una lástima porque se limita el aprendizaje de los niños. Aprendimos que, aunque la generalización aritmética, la generalización algebraica y la generalización geométrica comparten ciertos enfoques, estas no son iguales. Generalizar geométricamente implica pensar y razonar sobre figuras geométricas. Además, podemos decir que la generalización geométrica es un proceso se puede desarrollar en edades temprana, por tanto, como futuras maestras consideramos que estos aprendizajes son significativos en nuestra labor docente.

Sobre las Perspectivas Futuras de este Trabajo

Nos estamos imaginando la posibilidad de escribir un artículo de divulgación para que otros profesores conozcan la propuesta. También estamos viendo la posibilidad que en estudios de posgrado podríamos retomar el tema para avanzar con otros hechos geométricos o modificaciones a las tareas de acuerdo a nuevas implementaciones.

Referencias

Arzarello, F., Olivero, F., Domingo, P., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM* Vol. 34 (3), 66-72.

Bressan, A., y Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. Correo del maestro, N° 168.

Camargo, L. (en evaluación). Estrategia de investigación – entrevista basadas en tareas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias,* 26(3), 431–444.

Cárcamo, A. (2017). Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra-España.

Clements, D., y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education, *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89.

Clements, D., y Sarama, J. (2009). Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach. New York, NY: Routledge.

García, S.S. (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años [Trabajo de maestría]. Universidad pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.

Giaquinta, M., y Modica, G. (2012). Mathematical analysis: Functions of one variable. New York: Springer Science y Business Media. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/ep/v44/1517-9702-ep-44-e181974.pdf

Gómez, P., y Lupiáñez, J.L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, I(2), 79-98.

Ivars, P., Buforn, A., y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”. *Acta Scientiae*, v.18, n.4, Edição Especial,48-64.

León, O. L., Díaz Celis, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 9-28.

Martínez, F. J., Llinares, S., y Torregrosa, G. (2015). Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos. Universidad de Alicante.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1988). Rutas y raíces hacia el álgebra (C. Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad

Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).
MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Colombia.
MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Colombia.
Mora, L (2012). Álgebra en los primeros niveles escolares. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.
Orts, A., Llinares, S., y Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 36*(3), 121-140.
Perry, P., Camargo, L., y Samper, C (2017). Puntos medios en triángulo: un caso de construcción de significado y mediación semiótica. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*, 22 (3), 309-332.
Rodríguez, L. (2016). Trayectoria hipotética de aprendizaje: aprendizaje de las operaciones suma y resta en aulas inclusivas con incorporación tecnológica [Trabajo de Licenciatura]. Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá.
Sicuamia, G. (2017). Trayectorias de Aprendizaje en la orientación espacial para la formación de profesores de básica primaria en ejercicio [Tesis de maestría]. Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá.
Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), 114-145.
Simon, M., y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory, *Mathematical Thinking and Learning,* 6:2, 91-104.
Tzur, R. (1999). An integrated study of children’s construction of improper fractions and the teacher’s role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 390–416.
Tzur, R. (2000). An integrated research on children’s construction of meaningful, symbolic, partitioning- related conceptions, and the teacher’s role in fostering that learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 123–147.
Tzur, R. (2019). Hypothetical Learning Trajectory HLT: A Lens on Conceptual Transition between Mathematical “Markers”. In Siemon, D., Barkatsas, T., y Seah, R. (Eds.), *Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education*: Vol. 3 (pp. 56-74). Leiden, The Netherlands: Brill.
Tzur, R., y Simon, M. (1999). Postulating relations between stages of knowing and types of tasks in mathematics teaching: A constructivist perspective. In Hitt, F y Santos, M (Eds.), *Twentieth-First Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 805–810). Cuernavaca, México: ERIC.
Vergel, R. (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria [Tesis doctoral]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Esquinas, A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente [Tesis doctoral]. Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

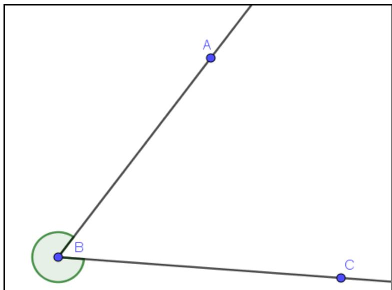
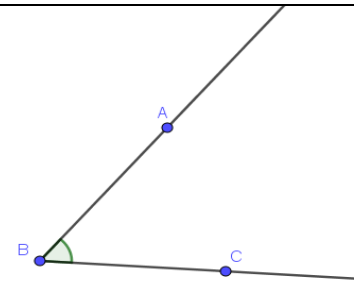
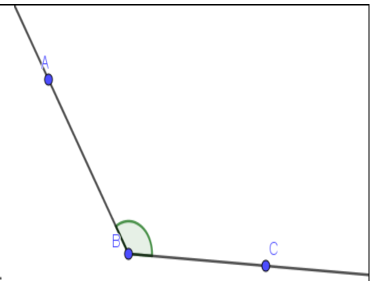
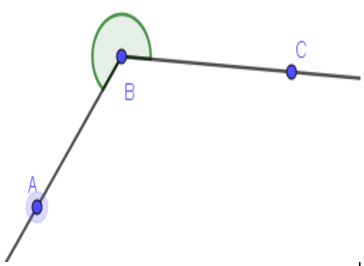
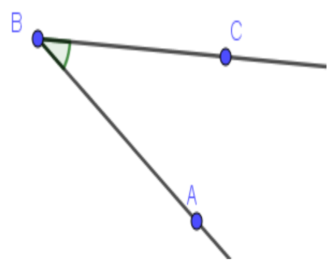
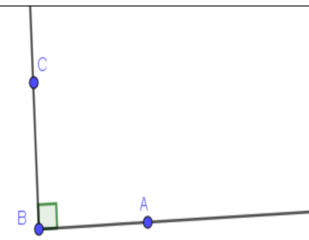
Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (XIX Reimp. 1995) [título original: How To Solve It?]. México: Trillas.

Anexos

Anexo 1. Actividad referente a medida de ángulos y segmentos

Nombre: ____

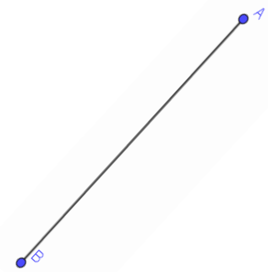
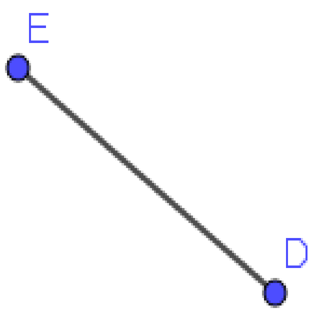
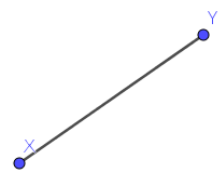
1. Mide los siguientes ángulos con __________________________ (nombra la herramienta con la que se miden los ángulos).

 $m\angle CBA =$ ________	 $m\angle ABC =$ ________	 $m\angle ABC =$ ________
 $m\angle CBA =$ ________	 $m\angle ABC =$ ________	 $m\angle ABC =$ ________

2. Realiza ángulos según las medidas dadas

$m\angle CBA = 45°$	$m\angle ABC = 90°$	$m\angle CBA = 110°$
$m\angle CAB = 170°$	$m\angle ABC = 250°$	$m\angle ABC = 30°$

3. Mide los siguientes segmentos con _________________________ (nombra la herramienta con la que se miden los segmentos).

 $AB =$ _________	 $AC =$ _________	 $AB =$ _________
 $DE =$ _________	 $WY =$ _________	 $XY =$ _________

4. Realiza segmentos según las medidas dadas

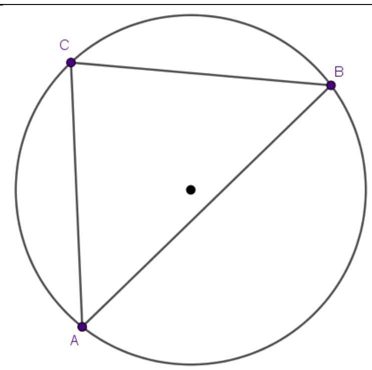
$CB = 4$	$GB = 5{,}5$	$BA = 2$
$KH = 7$	$TJ = 1{,}5$	$KL = 3$

Anexo 2. Actividad referente la identificación de la propiedad sin hacer uso del transportador

Nombre: ____

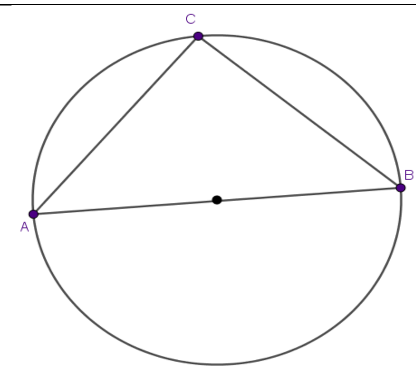
Sin medir, señala en donde puedes asegurar que el triángulo es rectángulo

1.



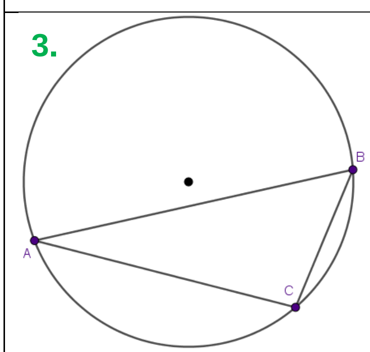
$m\angle ACB =$ __________

2.



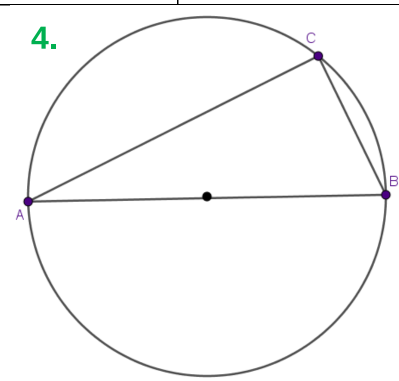
$m\angle ACB =$ __________

3.



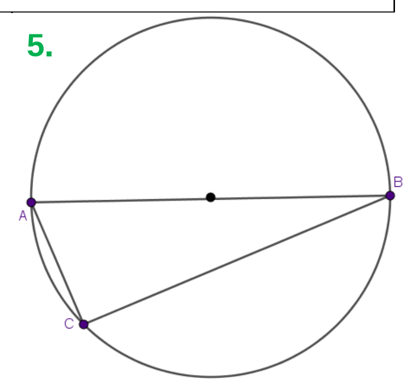
$m\angle ACB =$ __________

4.

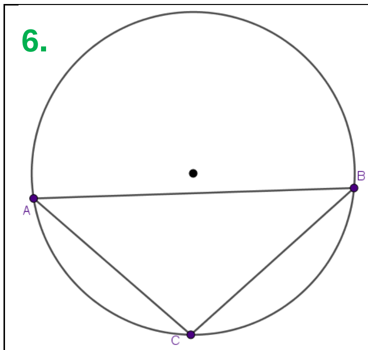
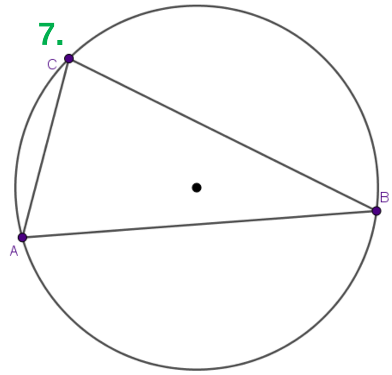
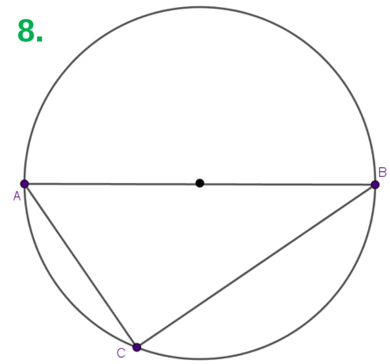
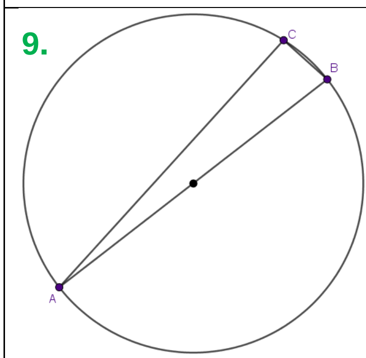
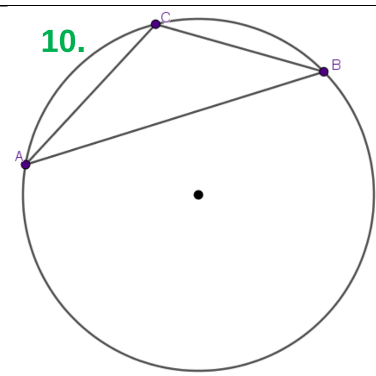
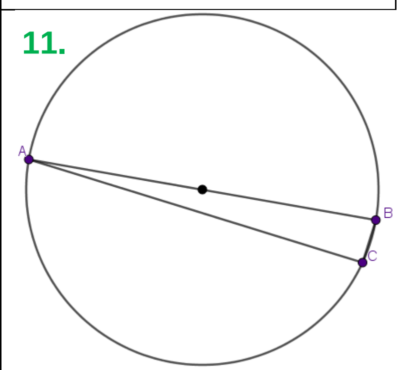


$m\angle ACB =$ __________

5.



$m\angle ACB =$ __________

6.  $m\angle ACB =$ ________	**7.**  $m\angle ACB =$ ________	**8.**  $m\angle ACB =$ ________
9.  $m\angle ACB =$ ________	**10.**  $m\angle ACB =$ ________	**11.**  $m\angle ACB =$ ________

Anexo 3. Clasificación de figuras en ejemplos y no ejemplos que cumplen la propiedad

EJEMPLOS	CONTRAEJEMPLOS

Anexo 4. Actividad inductora a la formulación verbal de la conjetura.

1. ¿En las circunferencias en las que un segmento de la figura formada PASA por el centro de la circunferencia, que tipo de triangulo se forma?

2. ¿En las circunferencias en las que un segmento de la figura formada NO PASA por el centro de la circunferencia, que tipo de triangulo se forma?

3. Escriba las características de las figuras en las cuales siempre sucede lo del punto 1.

Anexo 5. Actividad de la formulación escrita de la conjetura.

Nombre: ____

Formula con tus palabras la propiedad que tiene los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.

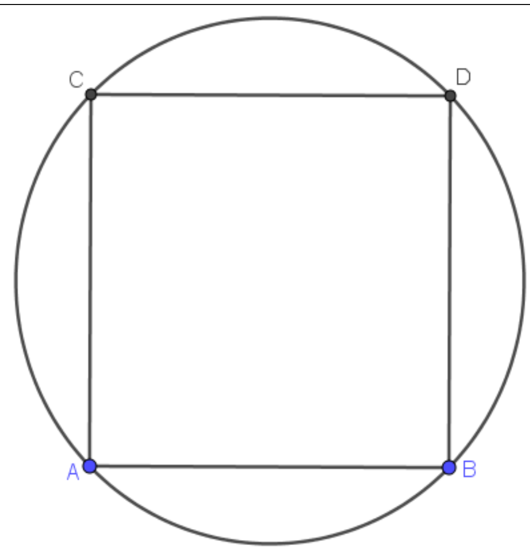
BORRADOR	

FINAL	

Anexo 6. Actividad verificación de la conjetura.

Nombre: ____

En el siguiente caso, sin medir menciona ¿Qué tipo de ángulos se forman? Y ¿Cómo puedes estar seguro de que tienen esa medida?

PARTE I	PARTE II
	________________________________

Anexo 7. THA entorno al proceso de generalización geométrica mediante el uso de papel.

THA con el uso del papel			
Progresiones	**¿Qué puede pasar?**	**Subtarea**	**Ayudas del profesor**
Fase 1: Ver			
Interpretar el enunciado de la tarea.	Los estudiantes entienden los términos e interpretan lo que tienen que hacer.	Subtarea 1: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes no entienden algunos términos geométricos involucrados.	Subtarea 2: Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice.	Resaltar las palabras, poner ejemplos, preguntar por las relaciones entre algunos de los objetos.
	Los estudiantes no entienden qué tienen que hacer.	Subtarea 3: Explica con tus palabras de qué se trata la tarea.	Guiar la interpretación dirigiendo la atención a los objetos geométricos que hay que considerar y sobre cuál es el que hay que buscar algo. Guiar la atención hacia las palabras del enunciado que indican lo que hay que hacer para aclarar de qué se trata la tarea.
Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración. (Paso 1 de Cañadas).	Los estudiantes hacen una representación correcta con más de un triángulo.	Subtarea 4: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes hacen una representación correcta con un solo triángulo.	Subtarea 5: Construye otros triángulos que cumplan las condiciones del enunciado.	Pedir releer el enunciado y representar otros triángulos.
	Los estudiantes no tienen destreza en el uso de compás o no tienen un compás adecuado.	Subtarea 6: Construye una semicircunferencia usando un molde de una circunferencia.	Proporcionar plantillas, pedirles que recorten y doblen, etc.

Construir una representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (el triángulo). (Paso 2 de Cañadas).	Antes de explorar la representación, a los estudiantes se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.	Subtarea 7: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes realizan alguna acción sobre la representación (como contar los segmentos, comparar las figuras que hay, subrayar, medir lados o ángulos) sin haber construido una representación mental de las propiedades que quieren investigar.	Subtarea 8: Explica qué propiedades puede tener un triángulo.	Proponer ejemplos sobre que propiedades se pueden investigar en los triángulos: 3 lados, 3 vértices, aunque esas no sean de interés se pueden mencionar hasta conseguir que los estudiantes hagan alusión a estudiar las medidas de los lados y medidas de los ángulos.
	Antes de explorar a los estudiantes no se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.		
Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad.	Los estudiantes hacen uso correcto del transportador y la regla.	Subtarea 9: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes hacen uso correcto de la regla pero no del transportador.	Subtarea 10: Construye distintos ángulos y toma las medidas.	Explicar cómo se miden los ángulos por medio del uso del transportador.
	Los estudiantes hacen uso correcto del transportador pero no de la regla.	Subtarea 11: Construye distintos segmentos y toma las medidas.	Explicar cómo se miden los segmentos por medio del uso de la regla.
	Los estudiantes hacen uso incorrecto del transportador y la regla.	Subtarea 12: Construye distintos ángulos y segmentos y toma las medidas.	Explicar cómo se miden ángulos y segmentos por medio del uso del transportador y la regla.
Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3 de Cañadas).	Los estudiantes encuentran la propiedad solicitada.	Subtarea 13: No se propone subtarea	No se requieren ayudas del profesor
	Los estudiantes no encuentran alguna propiedad común a todos los triángulos.	Subtarea 14: Explica qué propiedades puede tener un triángulo y explora esas propiedades que construiste u otras.	Sugerir construir otros triángulos para ver si detectan la propiedad común de interés. Sugerir medir ángulos. Proporcionar escuadras o cuñas.

<table>
<tr><td></td><td>Los estudiantes solo exploran triángulos (isósceles) trabajados comúnmente.</td><td><u>Subtarea 15</u>:
Sin medir, señala en donde puedes asegurar que el triángulo es rectángulo.</td><td>Presentar varias representaciones para que los estudiantes señalen donde hay un triángulo rectángulo o donde no hay.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 2: Describir</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Formulación de una conjetura.
(Paso 4 Cañadas).</td><td>Los estudiantes formulan la conjetura empleando el formato si… entonces o el formato dado… entonces.</td><td><u>Subtarea 16</u>:
No se propone subtarea.</td><td>No se requieren ayudas del profesor-</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no saben cómo iniciar la formulación.</td><td><u>Subtarea 17:</u>
Ubicar las circunferencias entregadas, según corresponda en ejemplos o contraejemplos.</td><td>Sugerir recordar la propiedad descubierta y el procedimiento para su hallazgo.
Ayudar a iniciar la formulación.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan un enunciado que insinúa la conjetura, pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente.</td><td rowspan="3"><u>Subtarea 18:</u>
Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma?
Si son cuerdas que no son el diámetro, se puede afirmar sin que medir ¿El triángulo formado es un triángulo rectángulo?</td><td>Ayudar para corregir la formulación.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan sólo el consecuente de la condicional.</td><td>Hacer preguntas orientadoras como: ¿Qué deberíamos poner primero? ¿Qué fue lo que encontraste?</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan la conjetura casi completa pero no escriben algunas de las condiciones del antecedente o en consecuente.</td><td>Dar no ejemplos para que se den cuenta de la necesidad de cada condición.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 3: Escribir</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Escritura de una conjetura.
(Paso 5 Cañadas).</td><td>Los estudiantes realizan la escritura de la conjetura correctamente.</td><td><u>Subtarea 19</u>:
No se propone subtarea.</td><td>No se requieren ayudas del profesor</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no saben cómo iniciar la escritura.</td><td><u>Subtarea 20</u>:
Formula con tus palabras la propiedad que tienen los</td><td>Orientar al estudiante en la escritura de la conjetura, desde su formulación.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Los estudiantes no saben que deben hacer</td><td>triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td>Sugerirles escribir lo encontrado.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Escritura de una conjetura. (Paso 5 Cañadas).</td><td>Los estudiantes escriben un enunciado que insinúa la conjetura pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente.</td><td rowspan="3"><u>Subtarea 21</u>:
Escriba las características de la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td>Ayudar para escribir la escritura de la conjetura</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes escriben la conjetura casi completa pero no escriben algunas de las condiciones del antecedente o en consecuente.</td><td>Hacer preguntas orientadoras como: ¿Qué deberíamos poner primero? ¿Qué fue lo que encontraste? ¿Qué encontramos en la anterior tarea?</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes mencionan cuál es la propiedad, pero realizan la escritura de manera incorrecta.</td><td>Ayudar para comenzar la escritura de la conjetura, por medio de ejemplos, contraejemplos y preguntas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 4: Verificar</td></tr>
<tr><td>Justificación empírica de la conjetura. (Paso 6 Cañadas).</td><td>Los estudiantes justifican la conjetura, completando la otra mitad de la figura o realizando dos diámetros de la figura y verificando que son dos triángulos rectángulos en la circunferencia.</td><td><u>Subtarea 22</u>:
No se propone subtarea.</td><td>No se requieren ayudas del profesor.</td></tr>
</table>

Justificación empírica de la conjetura. (Paso 6 Cañadas).	Los estudiantes no saben que deben hacer.	Subtarea 23: ¿Cómo justificarías la propiedad encontrada?	Mostrar una imagen con una circunferencia y un triángulo inscrito o con la representación hecha por los estudiantes guiar para que respondan la pregunta. Explicar que los triángulos isósceles tienen los ángulos congruentes, también que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180, así mismo guiar el algoritmo aritmético en busca de llegar a la generalización.
Generalización de la conjetura. (Paso 7 Cañadas).	Los estudiantes generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 24: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes no entienden que hacer.	Subtarea 25: Revisa en diferentes representaciones si la propiedad encontrada se cumple.	Sugerir que dibujen unas semicircunferencias más grandes o más pequeñas. Se les proporcionara moldes.

Tabla A.1. THA mediante uso de papel

Anexo 8. THA entorno al proceso de generalización geométrica mediante el uso de GeoGebra.

<table>
<tr><th colspan="4">THA con el uso del software GeoGebra.</th></tr>
<tr><th>Progresiones</th><th>¿Qué puede pasar?</th><th>Subtarea</th><th>Ayudas del profesor</th></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 1: Ver</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Interpretar el enunciado de la tarea.</td><td>Los estudiantes entienden los términos e interpretan lo que tienen que hacer.</td><td>Subtarea 1:
No se propone subtarea.</td><td>No se requieren ayudas del profesor.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no entienden los términos y tampoco interpretan lo que tienen que hacer.</td><td>Subtarea 2:
Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice.</td><td>Resaltar las palabras, poner ejemplos, preguntar por las relaciones entre algunos de los objetos.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no entienden algunos términos geométricos involucrados.</td><td>Subtarea 3:
Explica con tus palabras de qué se trata la tarea.</td><td>Guiar la interpretación dirigiendo la atención a los objetos geométricos que hay que considerar y sobre cuál es el que hay que buscar algo.

Guiar la atención hacia las palabras del enunciado que indican lo que hay que hacer para aclarar de qué se trata la tarea.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración.
(Paso 1 de Cañadas).</td><td>Los estudiantes hacen una representación correcta y además usan la herramienta de arrastre para considerar varios triángulos en GeoGebra.</td><td>Subtarea 4:
No se propone subtarea</td><td>No se requieren ayudas del profesor.
Es la oportunidad para que el profesor comente el papel de la herramienta arrastre ¿estamos construyendo un triángulo o muchos triángulos?, puede pedirles que hagan dos y luego arrastre uno hasta superponerse con el otro, etc.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes saben cómo construir una semicircunferencia pero no saben cómo construir un diámetro con la herramienta GeoGebra.</td><td>Subtarea 5:
Construye una circunferencia y un diámetro de esta</td><td>Construir una recta que contenga al centro y un punto cualquiera de la circunferencia.</td></tr>
</table>

Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración. (Paso 1 de Cañadas).	Los estudiantes no saben cómo construir una semicircunferencia o una circunferencia y su diámetro con la herramienta GeoGebra.	Subtarea 5: Construye una circunferencia y un diámetro de esta	Construir una recta que contenga al centro y un punto cualquiera de la circunferencia.
	Los estudiantes no saben cómo construir un diámetro con la herramienta GeoGebra ni hacen uso del arrastre para considerar varios triángulos.		
Representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (en el triángulo). (Paso 2 de Cañadas).	Antes de explorar la representación, a los estudiantes se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.	Subtarea 6: No se propone subtarea	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes inician a realizar alguna acción sobre la representación (como contar los segmentos, comparar las figuras que hay, subrayar, medir lados o ángulos) sin haber construido una representación mental de las propiedades que quieren investigar.	Subtarea 7: Explica qué propiedades puede tener un triángulo	Proponer ejemplos sobre que propiedades se pueden investigar en los triángulos: 3 lados, 3 vértices, aunque esas no sean de interés se pueden mencionar hasta conseguir que los estudiantes hagan alusión a estudiar las medidas de los lados y medidas de los ángulos.
	Antes de explorar a los estudiantes no se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.		
Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad.	Los estudiantes tienen dominio y hacen uso correcto de GeoGebra.	Subtarea 8: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes hacen uso incorrecto de GeoGebra al construir y medir ángulos y segmentos.	Subtarea 9: Construye y toma las medidas de distintos ángulos y segmentos.	Explicar cómo se construyen y se miden ángulos y segmentos haciendo uso de GeoGebra.

Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3 de Cañadas).	Los estudiantes encuentran la propiedad solicitada.	Subtarea 10: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes no encuentran alguna propiedad común a todos los triángulos.	Subtarea 11: Explica qué propiedades puede tener un triángulo y explora esas propiedades que construiste u otras.	Sugerir construir otros triángulos para ver si detectan la propiedad común de interés. Colocar la opción traza a los segmentos del triángulo excepto al diámetro. Sugerir realizar varias veces el ejercicio distinguiendo cada uno de los triángulos y mover los puntos del triángulo original (trasponer el triángulo inicial en los construidos).
	Los estudiantes tienen dificultad para encontrar la propiedad en muchos triángulos por la exactitud de las medidas (cantidad de decimales).	Subtarea 12: Construir ángulos y segmentos y tomar las medidas.	Activar la herramienta redondeo a 0 cifras decimales.
Fase 2: Describir			
Formulación de una conjetura. (Paso 4 Cañadas).	Los estudiantes formulan la conjetura empleando el formato si… entonces o el formato dado… entonces.	Subtarea 13: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas del profesor.
	Los estudiantes no saben cómo iniciar la formulación.	Subtarea 14: Haz de cuenta que tu mejor amiga (o) faltó a la clase y le te pide que le explique lo trabajado en la clase. Explícale a tu amigo lo trabajado.	Sugerir recordar la propiedad descubierta y el procedimiento para su hallazgo. Ayudar a iniciar la formulación.

<table>
<tr><td rowspan="3">Formulación de una conjetura. (Paso 4 Cañadas).</td><td>Los estudiantes formulan un enunciado que insinúa la conjetura, pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente.</td><td rowspan="3"><u>Subtarea 15:</u>
Dado un triángulo inscrito en una semicircunferencia, si uno de sus lados es diámetro de la circunferencia ¿qué tipo de triángulo se forma?
Si todos los lados de triángulo son cuerdas distintas del diámetro, ¿Qué tipo de triángulo se forma?</td><td rowspan="3">Dar no ejemplos para que se den cuenta de la necesidad de cada condición, para esto se entregará la actividad del anexo 4 (ver Anexo 4).</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan sólo el consecuente de la condicional.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes formulan la conjetura casi completa, pero no describen algunas de las condiciones del antecedente o del consecuente.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 3: Escribir</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Escritura de una conjetura. (Paso 5 Cañadas)</td><td>Los estudiantes realizan la escritura de la conjetura correctamente.</td><td><u>Subtarea 16:</u>
No se propone subtarea</td><td>No se requieren ayudas del profesor.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no saben cómo iniciar la escritura.</td><td><u>Subtarea 17</u>:
Formula y escribe con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td>Orientar al estudiante en la escritura de la conjetura, desde su formulación.

Entregar actividades donde deban expresar de forma escrita la formulación de la conjetura (ver Anexo 5).</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes escriben un enunciado que insinúa la conjetura, pero no se diferencia claramente el antecedente del consecuente.</td><td><u>Subtarea 18</u>:
Escribe con tus palabras la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.</td><td>Ayudar a comenzar la escritura de la conjetura, por medio de ejemplos, contraejemplos y preguntas.

Entregar actividades donde deban expresar de forma escrita la formulación de la conjetura (ver Anexo 5).</td></tr>
</table>

Escritura de una conjetura. (Paso 5 Cañadas)	Los estudiantes escriben la conjetura casi completa, pero no escriben algunas de las condiciones del antecedente o en consecuente.	Subtarea 19: Escriba las características de la propiedad que tienen los triángulos cuyos vértices son los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia.	Hacer preguntas orientadoras como: ¿Qué deberíamos poner primero? ¿Qué fue lo que encontraste? ¿Qué encontramos en la anterior tarea? Ayudar para comenzar la escritura de la conjetura, por medio de ejemplos, no ejemplos y preguntas.
	Los estudiantes mencionan cuál es la propiedad, pero realizan la escritura de manera incorrecta.		
	Los estudiantes mencionan cuál es la propiedad, pero realizan la escritura de manera incorrecta.		
Fase 4: Verificar			
Justificación empírica de la conjetura. (Paso 6 Cañadas).	Los estudiantes justifican la conjetura, aplicando el Teorema 180 y el Teorema triángulo isósceles – ángulos congruentes y mediante procesos aritméticos concluyen la existencia del ángulo recto.	Subtarea 20: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no saben que deben hacer.	Subtarea 21: Explicar cómo se podría justificar la propiedad descubierta	Ayudar a iniciar la justificación de la conjetura descubierta por medio de preguntas orientadoras, como: ¿Qué medida tienen los ángulos? Sin medir, ¿cómo puedes estar seguro de la medida de los ángulos? Recordar o mencionar el teorema 180 y el teorema triangulo isósceles ángulos congruentes. Sugerir colorear del mismo color los ángulos congruentes. Orientar una posible justificación desde los conocimientos aritméticos que poseen los estudiantes y los teoremas mencionados.

Generalización de la conjetura. (Paso 7 Cañadas)	Los estudiantes generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 22: No se propone subtarea.	No se requieren ayudas para el profesor.
	Los estudiantes no generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Subtarea 23: Identificar en que figuras se cumple la propiedad descubierta y en cuáles no.	Preguntar a los estudiantes si lo encontrado ocurre siempre y pedir que expliquen por qué. Mostrar ejemplos y no ejemplos en distintas situaciones y pedir la identificación del cumplimiento de la propiedad.

Tabla A.2. THA mediante uso de tecnología GeoGebra.

Anexo 9. Fases y pasos en la generalización geométrica

FASES	PASOS GENERALIZACIÓN GEOMETRICA
Fase 1: Ver	1. Interpretar el enunciado de la tarea. 2. Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración. (Paso 1 de Cañadas). 3. Construir una representación mental de posibles propiedades del objeto a investigar (el triángulo). (Paso 2 de Cañadas). 4. Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad. 5. Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3 de Cañadas).
Fase 2: Describir	6. Formulación de una conjetura. (Paso 4 Cañadas).
Fase 3: Escribir	7. Escritura de una conjetura. (Paso 5 Cañadas).
Fase 4: Verificar	8. Justificación empírica de la conjetura. (Paso 6 Cañadas). 9. Generalización de la conjetura. (Paso 7 Cañadas).