



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

**DISEÑO DE UN PROTOTIPO DE ROBOT BÍPEDO PARA LA
CONFIGURACIÓN ANTROPOMÉTRICA DE SUS PERCENTILES**

TRABAJO DE GRADO

PARA OBTENER EL TÍTULO DE PREGRADO DE

LICENCIADO EN ELECTRÓNICA

PRESENTAN

ANA SILVIA CLAROS COLLAZOS

ANDRÉS DAVID RAMÍREZ GONZÁLEZ

DIRECTOR

DOCTOR LUIS CARLOS SARMIENTO VELA

BOGOTÁ, 2017.

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DEL DIRECTOR

JURADO

JURADO

RESUMEN

El presente Trabajo de Grado evidencia el diseño de un Robot Bípedo que tiene como finalidad el cambio en la longitud de sus eslabones entre los percentiles 5 y 95. El Robot tiene 9 Grados de Libertad (GDL), compuestos por 5 GDL prismáticos (dos en cada pierna y uno en la cadera) y 4 rotacionales (uno en cada pierna y dos en la cadera). El conjunto prismático se encarga de elongar y comprimir las piernas del robot gracias a la distancia que toma el sensor adaptado para esta tarea; por su parte, los pares rotacionales permitirán la futura caminata del prototipo. Es importante aclarar que en este proyecto se realizará el diseño del sistema para la configuración antropométrica dentro del rango de percentil especificado.

El Trabajo de Grado está dividido en cinco capítulos: el primer capítulo está conformado por el marco teórico y referencial en donde se definen los conceptos fundamentales para la realización del proyecto, así como los antecedentes que permitieron darle fundamento al presente trabajo. En el segundo capítulo, se hace hincapié al estudio antropométrico en el cual se establecen las dimensiones que debe tener el robot en sus eslabones y se presentan las alternativas de solución del diseño para seleccionar el modelo final del robot. En el tercero, se desarrollan los modelos cinemático y dinámico para el robot bípedo, además del modelado CAD en donde se describen los componentes mecánicos y electrónicos que lo conforman. En el cuarto capítulo se seleccionan los componentes electrónicos del sistema que permitirá la configuración de sus eslabones con su respectivo esquema de conexión. Finalmente, se tienen en cuenta las recomendaciones y conclusiones, con miras a la construcción del prototipo en un futuro.

Palabras claves: Robot Bípedo, percentiles, eslabones, antropometría, cinemática, dinámica.

ABSTRACT

The present work of Degree evidences the biped robot design that has like purpose the change of the length of their links between the percentile 5 and 95. The robot has 9 degrees of freedom (DOF), compound by 5 prismatic DOF (two on each leg and one on the hip), and 4 rotational DOF. The prismatic assembly is in charge of elongating and compacting the robot legs, thanks to the distance that the adapted sensor takes for this task; for their part, the rotational pairs (two GDL on the knees and other two on the hip) will allow the future walk of the prototype. It is important to clarify that in this work only the design of the system will be shown for the anthropometric configuration within the specific percentile range.

The degree work is divided in five chapters: the first chapter is conformed by the theoretical and referential frameworks where is defined the fundamental concepts for the realization of the project, as well as the background that allow give him basis to the work. In the second chapter emphasis is placed to the anthropometric study in which are established the dimensions that the robot must have in their links and are presented the solution alternatives of the design of the robot for choosing the final model. In third, are developed the kinematic and dynamic models for the biped robot, in addition to the CAD modeling, besides the description of the mechanical and electronic components of the system that shape the prototype. In the fourth chapter are selected the electronic components of the system that will allow the configuration of the links with respective connection system. Finally, the recommendations and conclusions are taken into account, with a view to implementing the prototype in a future for the change of length of their links and, possibly, its walk.

Keywords: Biped Robot, percentile, links, anthropometry, kinematic, dynamic.

AGRADECIMIENTOS

A mi hija Samantha, por amarme aun estando lejos y perdonar mi ausencia durante su etapa de niñez mientras culminaba mi carrera; a mis padres por su constancia y apoyo incondicional; a mis hermanos por su lealtad durante mi proceso de formación; a los docentes de la Universidad Pedagógica Nacional, por su constante enseñanza y entrega; a mi director de tesis el profesor Luis Carlos Sarmiento Vela, por enseñarme a perfeccionar cada parte del proyecto y hacer las cosas bien, por su guía, por su conocimiento impartido y por su paciencia (mi más profunda admiración); al profesor Fabio González por su ayuda en la etapa de diseño del Robot, al señor Wilmar Hernández por su apoyo en el proceso de selección de algunos materiales, a quienes creyeron en mí; y a la vida, por darme tanto.


DEDICATORIA

A mi padre, por estar conmigo en los buenos y malos momentos, por ser el mejor formador que haya tenido, el más grande de los maestros, el mejor compañero de lucha, el personaje que me alumbró con su sabiduría, el que me ha dado la oportunidad de estar aquí, saliendo adelante con este trabajo, que más que un proyecto de grado, es un proyecto de vida; a mi hermano mayor, mi hermanita y mi hermano menor, por apoyarme dentro y fuera de la casa, tolerando y valorando mi forma de ser, y a mi madre, por darme la vida, alentarme en las derrotas, permitirme alegrarla en las victorias, por la pujanza para no abandonar el camino recorrido, por hacerme sentir un miembro más del hogar sin juicios ni perjuicios y por acompañarme y ser motivación para superar los problemas. A ellos, por ser la razón de mi existencia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Maestro Luis Carlos Sarmiento por hacerme parte de este gran proyecto y fomentarlo con sus enseñanzas, que son lecciones para la vida; a los profesores Fabio González y Augusto Guarín, por las sabidurías compartidas, los maestros de la Licenciatura en Electrónica, y a los integrantes de la familia de la Universidad Pedagógica Nacional don Wilmar, don Julio, Luz Marina, don William y demás miembros del departamento de Tecnología.

A mi gran familia, por alentar mis propósitos; a mis grandes compañeros Carlos y Christian, por la amistad brindada y su gratitud, y a mi amiga Laura, por hacerme compartir su simpatía, su conocimiento, su compañerismo, su amabilidad y otras virtudes que la destacan como una gran persona, a pesar de los problemas; a las personas que me rodearon a lo largo de la carrera, como colegas y futuros profesores; a mis formadores, por enseñarme las razones por las que vale la pena hacer realidad este sueño; a Doña Liliana, por su sincera estimación, a la señora Liliana, por la confianza y el apoyo recibido, y en especial, a esa compañera que me abrió las puertas para emprender este proyecto para salir adelante y triunfar en este ideal, como estudiante, y quizás una amiga, a pesar de los defectos, a pesar de las circunstancias, a pesar de las diferencias...

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Ingeniería</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 8 de 271	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Diseño de un prototipo de robot bípedo para la configuración antropométrica de sus percentiles
Autor(es)	Claros Collazos, Ana Silvia; Ramírez González, Andrés David
Director	Luis Carlos Sarmiento Vela
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 271P
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ROBOT BÍPEDO, PERCENTILES, ESLABONES, ANTROPOMETRÍA, CINEMÁTICA, DINÁMICA.

2. Descripción
<p>Trabajo de grado presentado para obtener el título de Licenciado en Electrónica, en el cual se propone el diseño de un robot bípedo de nueve grados de libertad que pueda configurar las longitudes de sus eslabones entre los percentiles 5 y 95. Se hace un estudio antropométrico en donde se establecen las dimensiones que debe tener el robot en sus eslabones y luego se proponen las alternativas de solución en donde se selecciona el modelo final del diseño del prototipo. Fijando los parámetros adecuados se desarrollan los modelos cinemático y dinámico del robot bípedo, y se determinan los parámetros y criterios para la selección de los componentes electrónicos que se implementarán en una futura etapa de construcción.</p>

3. Fuentes
<p>[1] Da, X., Harib, O., Hartley, R., & Griffin, B. (2016). From 2D Design of Underactuated Bipedal Gaits to 3D Implementation: Walking With Speed Tracking. IEEE Access, 3469-3477.</p>

- [2] Galloway, K., Sreenath, K., Ames, A. D., & Grizzle, J. W. (2015). Torque Saturation in Bipedal Robotic Walking Through Control Lyapunov Function-Based Quadratic Programs. IEEE Access, 323-332.
- [3] He, B., Wang, Z., Shen, R., & Hu, S. (2014). Real-time Walking Pattern Generation for a Biped Robot with Hybrid CPG-ZMP Algorithm. International Journal of Advanced Robotic Systems, 1-10.
- [4] Lee, H., & Neville, H. (2015). Time-Varying Ankle Mechanical Impedance During Human Locomotion. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, 755-764.
- [5] Vázquez, J. A., & Velasco-Villa, M. (2013). Design and Real-Time Control of a 4-DOF Biped Robot. International Journal of Advanced Robotic Systems, 1-11.
- [6] Wang, L., Liu, F., Xu, S., Wang, Z., Cheng, S., & Zhang, J. (2010). Design, Modeling and Control of a Biped Line-Walking Robot. International Advanced Robotic Systems, 39-47.
- [7] Sreejith, C. & Sreeshma, K. (2012). Design and Experimental Implementation of Bipedal Robot. International Journal of Advanced Computer Research, Vol. 2. No. 3, 33-39.
- [8] Nirmala, Tanaya, P. I. & Sinaga, M. (2015). A Study on Bipedal and Mobile Robot Behavior Through Modeling and Simulation. CommIT (Communication and Information Technology) Journal, Vol 9, No 1. 1-10.
- [9] Shih, C., Lee, W. & Wu, C. (2012). Planning and Control of Stable Walking for a 3D Bipedal Robot. International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 9, 1-10.
- [10] Wee, T. C. (2014). Mechanical design and optimal control of humanoid robot (TPinokio). The Journal of Engineering. 1-12.
- [11] Kwon, S. & Park, J. (2012). Kinesiology-Based Robot Foot Design for Human-Like Walking. International Journal of Advanced Robotic Systems, 1-10.
- [12] Aloulou, A. & Boubaker, O. (2010). Control of a Step Walking Combined to Arms Swimming for a Three Dimensional Humanoid Prototype. Journal of Computer Science 6, Vol. 8, 886-895.
- [13] López Guillén, M. E. Identificación de sistemas, aplicación al modelado de un motor de continua. *Universidad de Alcalá, España. Departamento de Electrónica*. Recuperado de <http://www.depeca.uah.es/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema6.pdf>
- [14] Barrientos, A. Fundamentos de Robótica. Mc. Graw Hill, segunda edición. 2007.
- [15] Pérez Cisneros, M., Cuevas Jiménez, E., y Zaldívar Navarro, D. Fundamentos de Robótica

con Matlab y Simulink. Alfaomega, primera edición. México. 2015.

[16] Saha, S. K. Introducción a la Robótica. Mc. Graw Hill. primera edición. 2008.

De León Gómez, V. Pámanes, J. y Santibañez, V. (2015). Evaluación experimental del caminado en tiempo real de un robot bípedo de 5 g.d.l. con marcha basada en movimientos cicloidales.

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, 12(1), 408–418.

[17] Vázquez, J. A. y Velasco-Villa, M. (2013). Experimental Estimation of Slipping in the Supporting Point of a Biped Robot. *Journal of Applied Research and Technology*, 11(1), 348-359.

[18] Peca, M., Sojka, M. y Hanzálek, Z. (2007). SPEJBL– The Biped Walking Robot. *Czech Technical University in Prague*, 1(1), 63-70.

[19] Aguilar, D. y Vivas, A. Modelado y control de un robot bípedo de nueve grados de libertad.

Universidad del Cauca, Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, 1(1), 1-6.

[20] González Mejía, S. Ramírez Scarpetta, J. M. y Avella Rodríguez, E. J. (2015). Técnicas de control para el balance de un robot bípedo: un estado del arte. *Tecnura*, 19(43), 133-156.

[21] Méndez Rodríguez, C. y Ordoñez Córdoba, J. A. (2014). Modelado de un bípedo junto a un mecanismo robótico exoesqueleto. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, 1(23), 67-73.

[22] Barrero Parra, A. M., Quiroga Páez, D. F. y Suárez Ramírez, L. (2009). Estudio y desarrollo de una estrategia para controlar la estabilidad de una plataforma bípeda con proporciones antropométricas, e implementación de un prototipo capaz de caminar en un proyecto plano PeDro. (Trabajo de pregrado) Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

[23] Vega Bustamante, M. M. (2008). Diseño, construcción e implementación de sistemas de medidas de fuerzas de reacción en robots bípedos. (trabajo de pregrado). Universidad Simón Bolívar, Sertenejas.

[24] Sánchez Alonso, R. E., González Barbosa, J. J., Castillo Castañeda, E. y García Murillo, M. A. (2016). Análisis cinemático de un Novedoso Robot Paralelo Reconfigurable. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 1(13), 247-257.

[25] Da, X., Harib, O., Hartley, R., & Griffin, B. (2016). From 2D Design of Underactuated Bipedal Gaits to 3D Implementation: Walking With Speed Tracking. *IEEE Access*, 3469-3477.

[26] Galloway, K., Sreenath, K., Ames, A. D., & Grizzle, J. W. (2015). Torque Saturation in Bipedal Robotic Walking Through Control Lyapunov Function-Based Quadratic Programs. *IEEE*

Access, 323-332.

- [27] He, B., Wang, Z., Shen, R., & Hu, S. (2014). Real-time Walking Pattern Generation for a Biped Robot with Hybrid CPG-ZMP Algorithm. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-10.
- [28] Lee, H., & Neville, H. (2015). Time-Varying Ankle Mechanical Impedance During Human Locomotion. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 755-764.
- [29] Vázquez, J. A., & Velasco-Villa, M. (2013). Design and Real-Time Control of a 4-DOF Biped Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-11.
- [30] Wang, L., Liu, F., Xu, S., Wang, Z., Cheng, S., & Zhang, J. (2010). Design, Modeling and Control of a Biped Line-Walking Robot. *International Advanced Robotic Systems*, 39-47.
- [31] Sreejith, C. & Sreeshma, K. (2012). Design and Experimental Implementation of Bipedal Robot. *International Journal of Advanced Computer Research*, Vol. 2. No. 3, 33-39.
- [32] Nirmala, Tanaya, P. I. & Sinaga, M. (2015). A Study on Bipedal and Mobile Robot Behavior Through Modeling and Simulation. *CommIT (Communication and Information Technology) Journal*, Vol 9, No 1. 1-10.
- [33] Shih, C., Lee, W. & Wu, C. (2012). Planning and Control of Stable Walking for a 3D Bipedal Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 9, 1-10.
- [34] Wee, T. C. (2014). Mechanical design and optimal control of humanoid robot (TPinokio). *The Journal of Engineering*. 1-12.
- [35] Kwon, S. & Park, J. (2012). Kinesiology-Based Robot Foot Design for Human-Like Walking. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-10.
- [36] Aloulou, A. & Boubaker, O. (2010). Control of a Step Walking Combined to Arms Swimming for a Three Dimensional Humanoid Prototype. *Journal of Computer Science* 6, Vol. 8, 886-895.
- [37] Arcos Legarda, W. J. (2013). Control autónomo de un exoesqueleto de marcha para pacientes con discapacidad motora. *Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Mágister en Ingeniería y Automatización Industrial*.
- [38] Saha, S. K. Introducción a la Robótica. Mc. Graw Hill. primera edición. 2008.
- [39] López Guillén, M. E. Identificación de sistemas, aplicación al modelado de un motor de continua. *Universidad de Alcalá, España. Departamento de Electrónica*. Recuperado de <http://www.depeca.uah.es/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema6.pdf>

[40] Martínez Bueno, Á. (2011). Identificación experimental de sistemas. *Universidad de Alicante, GITE - IEA*.

[41] Rodríguez Ramírez, D. & Bordóns Alba, C. (2005). Apuntes de Ingeniería de Control.

4. Contenidos

El presente documento trata los siguientes capítulos:

En el primer capítulo se establece el marco teórico, en el cual son tenidos en cuenta los conceptos fundamentales a trabajar para el diseño del robot bípedo, así como un marco referencial, en donde se hace revisión de los antecedentes ligados a este proyecto.

El segundo se hace un estudio antropométrico en donde se establecen las dimensiones que debe tener el robot en sus eslabones y luego se proponen las alternativas de solución en donde se selecciona el modelo final del diseño del prototipo

El tercero define el diseño mecánico, determinando la cinemática y la dinámica del robot bípedo y el modelado CAD del esquema establecido.

El cuarto contempla el diseño electrónico, en el cual se seleccionan los actuadores, sensores, drivers y tarjetas a utilizar para el prototipo y su respectivo esquema de conexión, junto con el modelo de la planta del robot.

Finalmente, se dan a conocer las conclusiones y recomendaciones del trabajo realizado en el diseño del robot bípedo.

5. Metodología

En este trabajo de grado se realiza una investigación aplicada, la cual se enfoca en encontrar mecanismos o estrategias que permitan lograr un objetivo concreto, como curar una enfermedad o conseguir un elemento o bien que pueda ser de utilidad.

Las estrategias utilizadas fueron las siguientes: la evaluación de sistemas mecánicos a partir de matrices DOFA y de ponderación de datos particulares, la obtención de los modelos cinemático y dinámico mediante un método cuantitativo y un método cuasi-experimental de selección de los componentes electrónicos adecuados para el funcionamiento del robot bípedo.

6. Conclusiones

- Luego de la búsqueda de información y la presentación de alternativas viables para el diseño se encontró en la valoración y análisis que el sistema tuerca tornillo es recomendable por cuanto a las características físicas que incluyen la baja fricción, la variación casi nula del centro de gravedad, el tiempo de respuesta adecuado para la variación de sus longitudes, la rigidez que le brinda al sistema, la eficiencia en el posicionamiento y además es un mecanismo liviano.
- Debido al análisis de los estados de la marcha bípeda, se desarrollan dos modelos cinemáticos para el robot bípedo mediante los parámetros de Denavit-Hartenberg: el primer modelo es el momento en el que el robot tiene el pie derecho en fase de soporte simple (contacto con el suelo) y el izquierdo está en estado de balanceo, y el segundo, cuando el pie izquierdo está en fase de soporte simple y el pie derecho está en balanceo; cuando ocurre la transición del primer modelo al segundo, las 2 piernas hacen un contacto simultáneo con el suelo; definiendo así los modelos correspondientes al robot de 9 GDL, 5 prismáticos que son los encargados del posicionamiento de los eslabones y 4 rotacionales que permitirán la marcha del robot.
- El desarrollo del modelo dinámico del robot bípedo por el método algorítmico de Lagrange – Euler permitió hallar la ecuación de torque en donde se establecen la matriz de inercia D , la aceleración angular \ddot{q} , la matriz de fuerzas de Coriolis y centrípeta H y C como columnas de fuerzas de gravedad, obteniendo así los valores de los torques requeridos tanto para las articulaciones prismáticas como para las articulaciones rotacionales, con el fin de facilitar la selección de los motores cuyos torques tuvieran una aproximación a los hallados en la ecuación final del modelo dinámico para el robot bípedo de 9 GDL.
- Se seleccionan los componentes electrónicos para el funcionamiento adecuado del robot bípedo como los sensores infrarrojos lineales que se encargan de operar dentro del rango de variación de los percentiles requeridos, los motores aptos para mover las masas de las articulaciones prismáticas y rotacionales, además de los módulos drivers que permiten el control de sentido de giro de los motores y la tarjeta de adquisición de datos que controla las señales digitales y análogas del sistema; con estos elementos seleccionados se logra llevar a cabo la futura construcción del robot bípedo para un funcionamiento óptimo.
- La realización de este Trabajo de Grado habrá la posibilidad de gestionar espacios en los

cuales se fomente la enseñanza de la robótica no sólo en el ámbito universitario, sino en cualquier otro espacio académico.

- Este proyecto es novedoso ya que se trabaja una configuración antropométrica dada por la variación de los percentiles de los eslabones del robot; esto no se evidencia en los prototipos bípedos que tratan un solo tipo de antropometría.

Elaborado por:	Ana Silvia Claros Collazos y Andrés David Ramírez González
Revisado por:	Luis Carlos Sarmiento Vela

Fecha de elaboración del Resumen:	24	08	2017
--	----	----	------

ÍNDICE GENERAL

Preliminares	21
Introducción	21
Planteamiento del problema.....	23
Descripción del problema.....	23
Formulación del problema.....	23
Justificación.....	24
Objetivos.....	25
General.....	25
Específicos.....	25
CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO	26
1. 1. Conceptos	26
1. 1. 1. Antropometría.....	26
1. 1. 2. Marcha bípeda.....	33
1. 1. 3. Cinemática.....	36
1. 1. 4. Dinámica.....	37
1. 1. 5. Identificación de sistemas.....	39
1. 2. Marco Referencial.....	44
CAPÍTULO 2. DISEÑO CONCEPTUAL.....	77
2. 1. Dimensiones antropométricas para adultos entre los 19 y los 65 años.....	77
2. 2. Diseño del prototipo.....	82
2. 2. 1. Alternativas de solución.....	82
CAPÍTULO 3. DISEÑO MECÁNICO DEL ROBOT BÍPEDO.....	98
3. 1. Cinemática del Robot Bípedo.....	98
3. 1. 1. Modelo Cinemático 1.....	99
3. 1. 1. 1. Cinemática Directa.....	99
3. 1. 1. 2. Cinemática Inversa.....	104
3. 1. 2. Modelo Cinemático 2.....	106

3. 1. 2. 1. Cinemática Directa.....	107
3. 1. 2. 2. Cinemática Inversa.....	110
3. 2. Dinámica del Robot Bípedo.....	112
3. 3. Modelado CAD.....	119
CAPÍTULO 4. SELECCIÓN DE LOS COMPONENTES ELECTRÓNICOS DEL SISTEMA	132
4. 1. Sensores.....	132
4. 2. Actuadores.....	138
4. 2. 1. Parámetros físicos de los motores.....	139
4. 2. 2. Motor para el sistema de posicionamiento.....	139
4. 2. 3. Motor para articulaciones rotacionales.....	140
4. 3. Tarjeta de control.....	140
4. 4. Tarjetas de alimentación.....	143
4. 5. Drivers.....	145
4.5. 1. Módulo driver L298N (para las articulaciones prismáticas)	145
4.5. 2. Módulo driver L298N (para las articulaciones rotacionales)	147
4. 6. Esquema de conexión.....	148
4. 7. Modelo de la planta (ROBOT BIPEDO).....	149
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	153
5. 1. Conclusiones.....	153
5. 2. Recomendaciones	154
BIBLIOGRAFÍA.....	155
ANEXOS	159

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2. 1. Dimensiones antropométricas de la población británica adulta entre los 19 y 65 años.....	77
Tabla 2. 2. Valores máximos y mínimos de los percentiles 5 y 95.....	79
Tabla 2. 3. Ecuaciones de acuerdo a cada módulo de los eslabones.....	79
Tabla 2. 4. Matriz de ponderación de datos particulares (mecanismos discretos)....	83
Tabla 2. 5. Matriz de ponderación de datos particulares (mecanismos continuos)...	86
Tabla 2.6. Matriz de evaluación de datos particulares (diseños finales)	90
Tabla 2. 7. Matriz de Debilidades, Oportunidades, Fortalezas y Amenazas..... (DOFA)	92
Tabla 2. 8. Matriz de ponderación de datos particulares (mecanismo tuerca tornillo)	94
Tabla 2. 9. Matriz de Debilidades, Oportunidades, Fortalezas y Amenazas (Matriz DOFA)	96
Tabla 3. 1. Parámetros D - H para modelo 1.....	101
Tabla 3. 2. Parámetros D - H para modelo 2.....	107
Tabla 3. 3. Distribución de las masas del robot bípedo.....	117
Tabla 3.4. Asignación de valores a las variables de las matrices D, H y C.....	118
Tabla 3. 5. Componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la pierna derecha.	121
Tabla 3.6. Componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la cadera.....	126
Tabla 4.1. Rango de distancia que debe tomar el sensor. (Medida máxima del hombre)	133
Tabla 4.2. Rango de distancia que debe tomar el sensor. (Medida máxima de la mujer)	133
Tabla 4. 3. Criterios requeridos para la selección del sensor.....	133
Tabla 4. 4. Caracterización de sensores.....	134
Tabla 4. 5. Parámetros físicos de los motores.....	139
Tabla 4.6. Fuentes de alimentación para la activación del prototipo.....	144
Tabla 4. 7. Características de Módulo Driver L298N.....	146
Tabla 4. 8. Características de Módulo Driver L298N.....	148

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. 1. Distribución estándar de la estatura de los hombres británicos.....	28
Figura 1. 2. Posturas antropométricas estándar	31
Figura 1. 3. Modelos de robots bípedos	34
Figura 1. 4. Relación entre cinemática directa y cinemática inversa	36
Figura 1. 5. Algoritmo del proceso de identificación	42
Figura 1. 6. Detalles de la estructura física del Robot Bípedo de 4 GDL	44
Figura 1. 7. Estructura mecánica del BR	46
Figura 1. 8. BR diseñado para caminata lineal	47
Figura 1. 9. BR BIDOID para implementación de control de marcha con base en aprendizaje Q-Learning	49
Figura 1. 10. BR de 5 GDL	51
Figura 1. 11. Estructura Física del BR con fase de soporte doble	52
Figura 1. 12. BR RH-1 en momento inicial	54
Figura 1. 13. Robot Bípedo neumático musculo-esquelético	56
Figura 1. 14. Mecanismo de robot bípedo diseñado	58
Figura 1. 15. Humanoide EkInBot	60
Figura 1. 16. Prototipo de pierna HADE	61
Figura 1. 17. Estructura física del Robot Humanoide Poppy y detalle de las piernas y el mecanismo de rodilla	63
Figura 1. 18. Estructura física del Robot Humanoide y ubicación de sus GDL	64
Figura 1. 19. Mecanismo de caminata del robot humanoide SURENA III	66
Figura 1. 20. Estructura física y distribución de los GDL del robot humanoide	67
Figura 1. 21. Mecanismo prostético de pierna con la ubicación de sus articulaciones	68
Figura 1. 22. Estructura física y distribución de los GDL del robot humanoide ASIMO	70
Figura 1. 23. Robot bípedo con piernas heterogéneas	71
Figura 1. 24. Características del Robot Humanoide WABIAN-2R	73
Figura 1. 25. Parámetros físicos del Robot Bípedo Hum	74
Figura 2. 1. Percentil 5 y 95 del hombre y de la mujer	78
Figura 2. 2. Gráfica de interpolación del eslabón cadera-rodilla	80
Figura 2. 3. Gráfica de interpolación del eslabón de rodilla – pie	80
Figura 2. 4. Gráfica de interpolación del eslabón de la cadera	81
Figura 3. 1. Modelo 1, aplicación del algoritmo de Denavit – Hartenberg	99
Figura 3. 2. Modelo 2, aplicación del algoritmo de Denavit – Hartenberg	107
Figura 3. 3. Sistema de referencia del modelo dinámico del robot bípedo	113
Figura 3. 4. Enumeración de los componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la pierna derecha	120
Figura 3. 5. Estructura del módulo de la cadera	126

Figura 4. 1. Voltaje análogo de salida (V_o) Vs. Distancia L realizada por el Sharp GP2Y0A21YK.	135
Figura 4. 2. Gráfica de voltaje análogo de salida (V_o) vs distancia L, obtenida por la experimentación práctica del sensor Sharp GP2Y0A21YK.	136
Figura 4. 3. Comportamiento del sensor con el desplazamiento como salida (eje x)	137
Figura 4. 4. Tarjeta National Instruments PCI-6229	141
Figura 4. 5. Comunicación completa	142
Figura 4. 6. Configuración de canales de la National Instruments PCI-6229	143
Figura 4. 7. Pines puente H L298	146
Figura 4. 8. Pines del módulo H I298P	147
Figura 4.9. Esquema de conexión del sistema	149
Figura 4.10. Diagrama de bloques de la dinámica de un robot en el espacio de estados	152

PRELIMINARES

INTRODUCCIÓN

El diseño de robots bípedos ha generado un aporte significativo en la tecnología, a partir del desarrollo de mecanismos autómatas o humanoides que suplan ciertas actividades humanas, como la marcha, y ha contribuido en el campo de la medicina en el desarrollo de dispositivos que faciliten la caminata en personas con discapacidad motora. Dado el enorme alcance que puede abarcar la elaboración de dichos diseños, se hace mención en el análisis científico y, especialmente, en el matemático, ya que se recurre al álgebra lineal para resolver los modelos cinemático y dinámico (los movimientos del robot bípedo), elementales para el desarrollo de estos sistemas. La consolidación de los robots bípedos se ve reflejada en prototipos de desarrollo parcial, destinados exclusivamente al estudio de la marcha humana con alteraciones de densidad baja o escasa, o se asocian con el desarrollo completo de los humanoides (de más GDL), y los cuales incorporan el mecanismo bípedo dentro del robot.

Aunque el alcance de los robots bípedos en diversas aplicaciones es continuo y está a disponibilidad de las personas que trabajan en robótica tanto en el campo educativo como en el industrial y de acuerdo a la revisión bibliográfica que se llevó a cabo, no existe el registro sobre un prototipo que pueda configurar la longitud de sus eslabones, y menos cuando esta se da por percentiles, que es un patrón empleado con frecuencia en la antropometría para la medición de eslabones o articulaciones del cuerpo humano. El presente trabajo tiene como finalidad permitir configurar cualquier sistema en cuanto a eslabones, por eso la importancia de hacer una revisión antropométrica previa para establecer las dimensiones de las articulaciones del robot.

Es de rescatar el análisis inmerso en este proyecto, que involucra conceptos desarrollados en diferentes áreas de la Licenciatura en Electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional (informática, instrumentación y sistemas de control, entre otras), como la identificación de los motores que se utilizan en el sistema, el análisis cinemático y dinámico del mecanismo

de 9 GDL; y también es importante contar con el soporte teórico de áreas inherentes al programa de Diseño Tecnológico de la UPN, el cual es de apoyo esencial al momento de dar el enfoque técnico en el diseño mecánico del robot bípedo.

El documento se desarrolla en los siguientes capítulos: el primero hace mención a los marcos teórico y referencial, en los cuales se tienen en cuenta los conceptos a trabajar durante el proyecto, así como los antecedentes que se revisan para la posterior elaboración del prototipo; en el segundo se desarrolla la fase inicial del prototipo del robot, contemplando datos de los percentiles a trabajar y alternativas de solución para el diseño final del robot; en el tercero se hace mención al diseño mecánico, desarrollando la cinemática, dinámica y el modelado CAD; en el cuarto se seleccionan los componentes del sistema electrónico, como los sensores, los actuadores, los drivers y una tarjeta de adquisición de datos y la conexión de dichos elementos para el funcionamiento adecuado, junto con el modelo de la planta del robot, y en el quinto, se realizan las posteriores reflexiones de este trabajo, evidenciadas en las conclusiones y recomendaciones.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es la antropometría importante dentro del desarrollo de sistemas bípedos por la información suministrada para el diseño de estas estructuras, simuladas y controladas, que han permitido la elaboración de prototipos para el estudio de la marcha bípeda y, en algunos casos, para posibilitar la ayuda en la caminata a las personas con dificultad para realizar esta tarea. Más allá de encontrar un modelo que ejecute la marcha bípeda, desarrollar el diseño de uno que pueda configurar los percentiles en sus eslabones no se evidencia dentro de los antecedentes indagados para este trabajo de grado.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Dentro de la revisión bibliográfica que se llevó a cabo se elaboran prototipos de robots con un solo tipo de antropometría para los diferentes modelos de marcha bípeda.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Qué tipo de mecanismo permite que un prototipo de robot bípedo pueda configurar la longitud de sus eslabones entre el percentil 5 y el percentil 95?

JUSTIFICACIÓN

El estudio realizado en robots bípedos ha contribuido en diversos campos de desarrollo, como en la didáctica misma de la robótica y la industria, contemplando siempre la disponibilidad y actualización de mecanismos exitosos (que bien pueden ejecutar la caminata parcial o total, o sólo contemplan el movimiento de sus extremidades para alguna función específica). Empezar un proyecto de esta magnitud implica un alto costo en recursos tangibles, así como poseer una formación adecuada en sistemas de control, instrumentación y representación de estados para considerar el sistema como una solución viable.

Dentro de la revisión bibliográfica que se llevó a cabo, incluyendo el trabajo de grado realizado en la Licenciatura en Electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional, no se ha evidenciado un robot bípedo que varíe la longitud de sus eslabones. Dada la importancia del análisis teórico y práctico que conlleva el mecanismo a desarrollar se propone el diseño de un prototipo de robot bípedo que permita configurar la longitud de sus eslabones entre los percentiles 5 y 95, lo que significa que el 90% de la población será beneficiada para una aplicación futura basada en este estudio, teniendo en cuenta las siguientes dimensiones: longitud desde la cadera hasta la rodilla, longitud desde la rodilla hasta el pie y longitud del ancho de la cadera. Este proyecto invita a promover el desarrollo de robots bípedos en la Universidad con base al estudio de las dimensiones antropométricas y a las alternativas de diseño para obtener el modelo final del robot. Por ende, la propuesta contemplará la posibilidad de ser desarrollada para posteriores trabajos de grado dando paso a la construcción del prototipo.

OBJETIVOS

Objetivo general

- Diseñar un prototipo de robot bípedo que pueda configurar sus dimensiones antropométricas entre el percentil 5 y el percentil 95.

Objetivos específicos

- Evaluar las alternativas de solución para el diseño de un prototipo de robot bípedo que pueda configurar sus eslabones.
- Determinar el modelo cinemático del prototipo de robot bípedo.
- Determinar el modelo dinámico del prototipo de robot bípedo.
- Seleccionar los componentes del sistema electrónico que le permita la configuración de los eslabones que conforman el robot bípedo.

CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

Se tienen en cuenta conceptos fundamentales como la antropometría, la marcha bípeda, la cinemática, la dinámica y la identificación de sistemas, debido a que algunos conceptos relacionados con las áreas anteriormente mencionadas permiten desarrollar el cálculo de los parámetros de desempeño adecuados para el robot bípedo y además, define una correcta aplicación metódica de los procedimientos para establecer los modelos cinemático y dinámico del robot. Esta recopilación conceptual es el soporte teórico del presente documento.

1. 1. Conceptos

1. 1. 1. Antropometría

- **Generalidades**

La antropometría es una rama de las ciencias del cuerpo que trata sobre la medición de las dimensiones del mismo; esto se refiere a tener certeza de la proporción de longitud, fuerza, forma y capacidad de trabajo de las extremidades, articulaciones u otras regiones del físico del ser humano en cuestión. La antropometría estudia la ergonomía, la cual está definida como la ciencia del trabajo en el sentido técnico, para la adaptación y manejo de artefactos (en especial, herramientas) útiles para el cuerpo, y para tal fin se analizan la forma física y las dimensiones que puede llegar a manifestar un usuario final respecto a sus capacidades de alongarse, comprimirse o ajustarse, así como el espacio en el que desarrolla las mismas aptitudes, estableciendo así un patrón de distancia y masa, magnitudes físicas relacionadas con la medición del cuerpo, llamada percentil, y éste se establece en milímetros (mm) para medir longitudes y en kilogramos (kg) para establecer únicamente la masa del cuerpo.

- **Principios y práctica de la antropometría**

Al momento de poner en práctica el conocimiento referente a la antropometría, se debe tener en cuenta la intención final, esto se refiere al problema existente de diseño en el cual no se pueden generalizar patrones dimensionales sobre algunas partes del cuerpo, sino de la adaptabilidad; este último término se refiere a las características antropométricas de la población usuaria de algún producto final, las formas que conllevan a plantear restricciones sobre el diseño planeado y los criterios que definen una coincidencia definitiva entre el producto y el usuario. Para tener en cuenta en el posterior análisis de los percentiles, al momento de diseñar el robot bípedo, se hará una introducción matemática de la ciencia antropométrica tanto en el énfasis que se hace sobre la estadística de las dimensiones del cuerpo humano, como algunos términos y ecuaciones utilizados en esta rama.

- Descripción estadística de la variabilidad humana: es un análisis matemático que contempla la variedad de datos de una población determinada sobre una dimensión establecida para definir, según la cantidad de dicha población, la adaptación del prototipo a diseñar. Por ejemplo, dada una gráfica que caracterice una medición estipulada, como la altura de la cadera en los individuos de sexo masculino, se pueden definir algunos términos esenciales al momento de contemplar el diseño del sistema que adecuará los percentiles de la cadera y las piernas. En la siguiente gráfica se muestra la distribución de frecuencia (o función de probabilidad de densidad) para la estatura de los hombres británicos (Knight, 1984):

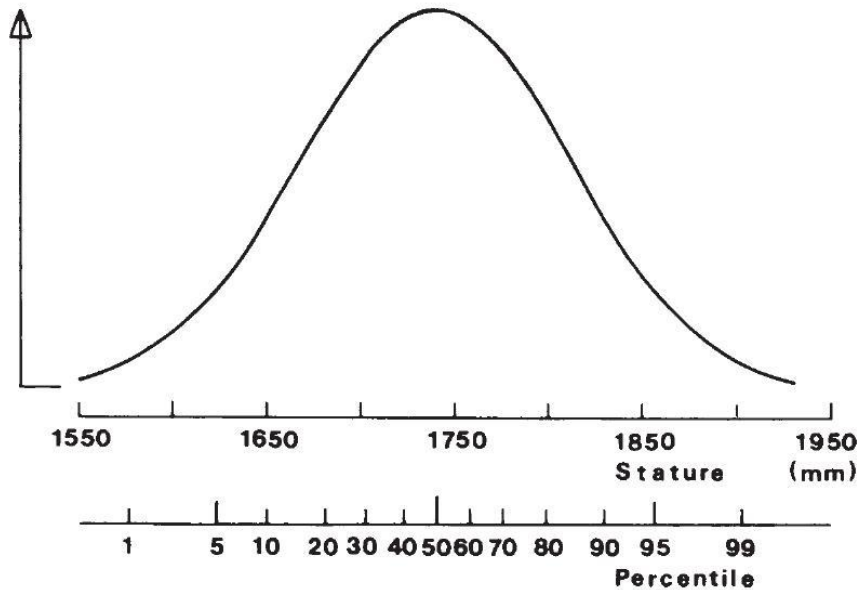


Figura 1. 1. Distribución estándar de la estatura de los hombres británicos. En la parte inferior de la gráfica se establece una recta en paralelo con el eje horizontal que indica la estatura; dicha recta representa los percentiles para la dimensión medida (Kinght, 1984).

Según la gráfica expresada, ya que obtenemos una distribución simétrica, podemos realizar las siguientes caracterizaciones:

- **Media:** es la dimensión (en este caso, estatura) más probable en encontrarse en una población determinada. Cuando hay curvas simétricas, se refiere a la división en poblaciones de mayor y menor longitud en dimensión respecto a la media; en conclusión, la distribución de la media es igual al percentil 50 (P50% o P₅₀).
- **n% de población:** según la dirección que se le dé a la gráfica, dicho porcentaje es de menor o mayor longitud en dimensión respecto al percentil P_n. Para el caso de la gráfica, una parte de la población es corta, o de menor proporción al percentil P₅, y otra parte de la muestra es alta, o de mayor proporción al percentil P₉₅. Dada la simetría de la curva, entre los dos percentiles descritos anteriormente, se puede encerrar el 90% de la población, que bien puede representar un promedio, pero se debe aclarar que tanto el percentil como el promedio no es general.

- **Percentil:** éste no es un patrón universal en una población. Es decir, en una muestra, un sujeto con un percentil P_n tiene un percentil P_m en un grupo específico de dicha muestra. Además, el percentil de una parte del cuerpo de un individuo en cuestión no es el mismo para otra región a medir (el percentil de estatura no es el mismo que el percentil de la altura de la cadera).

Es común encontrar en estudios antropométricos gráficas simétricas, o resultantes de una distribución gaussiana; esta distribución, en este campo, se conoce como *normal*, ya que es de bastante utilidad al momento de aplicar y permite el ajuste de variables antropométricas a la distribución *normal*, al menos, dentro de poblaciones razonablemente homogéneas.

- **Restricciones y criterios**

La gestión de calidad en el diseño de un objeto es fundamental, por lo que se han de considerar ciertas restricciones y algunos criterios. En antropometría se debe tener certeza en la definición de estos dos conceptos. El primero se refiere a una característica observable en los seres humanos, de preferencia medible y que tiene consecuencias en el diseño de un artefacto adaptado a los cuerpos medidos para definir el diseño, y el segundo hace referencia a un aspecto de juicio que establece condiciones en la medición de la “casualidad” entre el usuario y el artefacto, como lo son la comodidad, la seguridad, la eficiencia, la estética, etc. Estos criterios se conocen como generales y para llegar a ellos se deben satisfacer criterios de segundo nivel o especiales (características sobresalientes de un cuerpo en cuestión).

- **Conjunto de restricciones de la antropometría.**

- **Alcance:** determina la dimensión máxima aceptable del objeto diseñado y está basado en la proporción mínima (P_5).
- **Distancia:** también conocida como restricción de espacio libre, es un parámetro unidimensional que determina la dimensión mínima aceptable en el objeto a diseñar.

Es decir, basado en la proporción máxima que puede concebir un objeto (P_{95}), éste será necesariamente cómodo para percentiles inferiores.

- **Postura:** Se determina a partir de la relación entre las dimensiones del cuerpo y las de su estación de trabajo.
- **Fuerza:** Es indispensable determinar un nivel de fuerza para el objeto, ya que en el diseño pondera la resistencia, o sea, cuán mayor es la aplicación de fuerza que se debe tener en cuenta en el diseño final, para que el objeto soporte energías mayores y tenga una solidez robusta.

Nota: Estos parámetros (restricciones y criterios) son establecidos a partir del principio del usuario limitador, el cual es el que impone las condiciones de mayor consideración al diseño del artefacto, dadas sus características físicas. Además, para llegar al diseño final, se debe realizar un ensayo apropiado, y en la mayoría de los casos se aplica una maqueta ajustable del objeto para cierta cantidad de sujetos de diferentes proporciones corporales; a partir de éste se determina la dimensión final para la población en general.

- **Definiciones antropométricas**

- **Fuentes:** Pocos estudios tienen en cuenta mediciones de las dimensiones humanas, en especial, la altura y el peso. En dichas mediciones escasas se ha aplicado el método de medición de “escala de proporción”, definida como el manejo de datos de una población que tiene una variación mínima relativa.
- **Precisión:** Para un percentil P_n , se hace prácticamente imposible una precisión de más de 5 mm, dadas ciertas mediciones antropométricas. Para establecer una precisión sobre algunas mediciones hay que hacer algunas correcciones sobre la ropa, la variación postural y demás, pero serán inexactas. En cálculos antropométricos habituales, la precisión establecida ha alcanzado los 25 mm, y dentro de los mismos este valor se ha considerado como una pulgada antropométrica.
- **Correcciones de la ropa:** La mayoría de mediciones antropométricas se realizan con personas desnudas.

- **Posturas antropométricas estándar:**

- **Postura de pie estándar:** el sujeto está erguido, tiene los hombros relajados, los brazos colgando sueltos por los costados y ojos mirando hacia adelante, libre de muros, instrumentación o cualquier otro objeto que se pueda considerar un obstáculo.
- **Postura de sentado estándar:** el sujeto se encuentra sentado y erecto sobre una superficie horizontal plana, tirado a toda su altura y mirando hacia adelante. Los hombros se relajan con los brazos, colgando libremente por los lados y codos flexionados en ángulo recto. La altura del asiento se ajusta hasta que los muslos estén horizontales y las pantorrillas estén verticales (rodillas flexionadas en ángulo recto). El plano de referencia es la superficie del asiento.

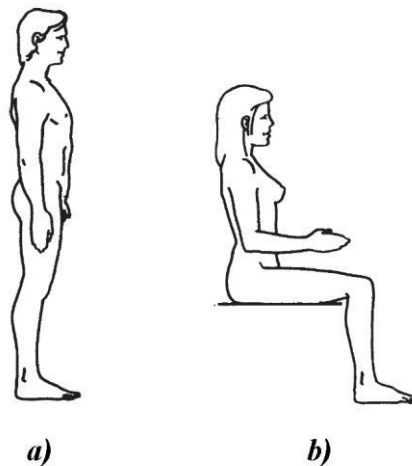


Figura 1.2. Posturas antropométricas estándar: a) de pie, y b) sentada. Tomado y modificado “Bodyspace: Anthropometric, Ergonomics an the Design of Work”, por S. Pheasant, 2003, Taylor & Francis. 2a. edición, p. 31 y 34.

- **Definición de la población objetivo:** al momento de definir una población objetivo, que en últimas será la usuaria final del artefacto diseñado, o sobre la cual se elabora un prototipo, se debe tener en cuenta un conjunto con los siguientes factores: sexo,

edad, etnia o nacionalidad, y ocupación o clase social, establecidos en ese orden de importancia, con miras a obtener datos antropométricos.

○ **Dimensiones del cuerpo para tener en cuenta**

- **Estatura:** es la distancia vertical desde el suelo hasta el vértice (corona de la cabeza). En antropometría esta dimensión define el espacio vertical requerido para el trabajo de pie y la altura mínima aceptable para evitar obstrucciones aéreas. Para hacer mediciones precisas, se agregan 25 mm cuando el individuo usa sombrero o 35 mm si usa casco protector; debe tener zapatos puestos, y en aplicaciones en las cuales el cuerpo se alarga, se agregan 15 mm aproximadamente.
- **Altura de la cadera:** una longitud vertical que comprende desde el piso hasta el trocánter mayor, un hueso saliente situado en el extremo superior del fémur. Éste actúa como centro de rotación de la articulación de la cadera, de ahí la longitud funcional de la extremidad inferior (cualquiera de las piernas).
- **Longitud nalga-rodilla:** distancia horizontal desde la parte posterior de la nalga, sin comprimir, hasta la rótula. Esta longitud aplica en el caso de separar los respaldos y los obstáculos ubicados delante de la rodilla. Para hacer una medición antropométrica precisa, se agregan 20 mm por la ropa pesada.
- **Longitud nalga-poplíteo:** es una distancia horizontal desde la parte posterior de las nalgas descomprimidas hasta el ángulo poplíteo (por ello la denominación de la longitud), ubicado en la parte posterior de la rodilla, donde la parte posterior de las piernas se articula con la parte inferior del muslo. Esta dimensión define el alcance máximo del eslabón formado por el fémur, en especial para diseñar objetos donde reposa éste.
- **Altura rodilla:** longitud vertical comprendida desde el suelo hasta la superficie superior de la rodilla (generalmente medida en los cuádriceps en lugar de la rodilla). Como la anterior longitud, define el alcance máximo del eslabón, esta vez formado

por la pantorrilla (tibia y peroné), así como el espacio máximo para la elaboración de mesas o cualquier otro objeto en el cual circule libremente dicho eslabón.

- **Ancho de cadera:** es la distancia horizontal máxima a través de la cadera en posición sentada, en cuya postura se establece dicha longitud. Para una mejor precisión en la medición antropométrica, se agregan 10 mm para ropa ligera, 25 mm para ropa mediana y 50 mm para ropa pesada.

1. 1. 2. Marcha bípeda

Dentro de los propósitos de la robótica se encuentra el construir robots que supere las habilidades propias de un prototipo que emula una función biomecánica, así como la adaptación de dicho mecanismo diseñado a las condiciones las cuales son comunes al observar, por ejemplo, en la caminata, como el balanceo y el apoyo de las piernas durante la marcha. Tal es el caso de la locomoción bípeda, fundamental para la investigación y el desarrollo de sistemas bípedos tanto autónomos como controlados.

La locomoción bípeda es el ciclo de movimiento de las dos extremidades inferiores que se asumen, para el caso del análisis matemático y la obtención del posterior modelo del sistema a diseñar, como dos pares cinemáticos y a su vez, pueden ser modelados como mecanismos de 4 o 6 barras (4 para la unión fémur – rodilla – tibia, y 6 para la conexión fémur – rodilla – tibia – tobillo – pie) debido a la perspicacia que se tiene sobre la caminata, es decir, no se percibe con obvedad la flexibilidad de los músculos de las piernas.

Haciendo análisis sobre el plano sagital de un ser humano, se puede modelar el correspondiente mecanismo que simula su marcha bípeda y se puede tener en cuenta dos aspectos esenciales (ver fig. 1. 3.):

1. Si se considera el sistema como un mecanismo dinámico en constante movimiento, el robot posee 5 GDL (fig. 1. 5), y
2. En el caso de encontrarse el mecanismo en estado de reposo, este se vuelve un sistema rígido, que contiene 3 GDL, que sólo tiene en cuenta el movimiento del centro de

gravedad (para mantener el equilibrio) y el de apoyo de las piernas (dado por los pies o el extremo de la tibia opuesto a la unión con la rodilla).

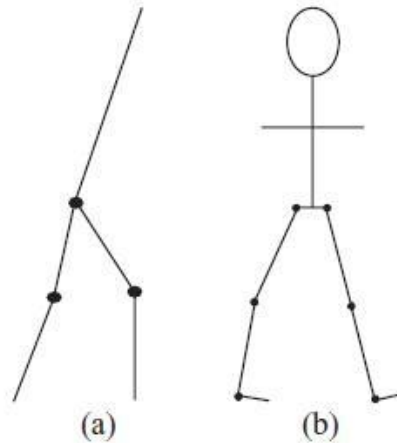


Figura 1. 3. Modelos de robots bípedos: a) Modelo de robot bípedo en fase de caminata, b) modelo de caminata en modo balístico (movimiento de alta velocidad de los músculos de las piernas)¹
 Un mecanismo en reposo implica la pérdida de un grado de libertad respecto al modelo original. Como el sistema resultante es de 3 GDL, se consideran éstos para el movimiento de un GDL, ubicado a la altura de la cadera, para el movimiento relativo de las piernas, y de los dos GDL restantes, del movimiento pie – tobillo. Es importante considerar el mecanismo en reposo, ya que es soporte para el análisis de la caminata en sistemas bípedos y, esencialmente, en humanos, debido a que durante un pequeño lapso de tiempo el sistema se vuelve rígido mientras se efectúa la transición de los movimientos entre los dos pares de eslabones.

El ciclo de caminata de un robot bípedo hace la división del modelo en modos establecidos para las piernas: modo de apoyo (que mantiene la pierna de soporte en un estado de rigidez) y modo oscilante (en el cual actúa el GDL que se omite en la fase de reposo, correspondiente a la rodilla); a partir del establecimiento de estos modos se puede inferir en las siguientes 3 fases para la caminata:

1. Despegue del pie o dedo del pie, de la superficie. El despegue lo realiza la pierna en modo oscilante, empezando así el paso.

¹ Vepa, R. (2009). a) Vista en plano sagital de modelos de caminata, b) en modo balístico (figura 2. 1). Recuperado de *Biomimetic Robotics: Mechanisms and Control*. Cambridge.

2. Movimiento del cuerpo: el tronco se impulsa hacia adelante con la ayuda de la pierna en modo de apoyo, articulada con la superficie, que es la acción que efectúa durante el paso.
3. La pierna oscilante ancla con la superficie (gracias al talón, que es el primer elemento en hacer contacto con el suelo), y ésta se transforma en la pierna de soporte, mientras que la pierna contraria (de apoyo) se convierte en la nueva pierna oscilante, ya que vuelve a hacer contacto con la superficie, completando el paso.

Durante la transición de las fases 2 y 3, las 2 piernas hacen un contacto simultáneo con el suelo, convirtiéndose en pares de soporte del cuerpo, completando la acción muscular del GDL de la cadera.

El proceso dinámico de la caminata implica una coordinación en la que se debe mantener el equilibrio y la energía que proporcionan las piernas para el soporte y el impulso de las mismas, ya que un desajuste en la postura, por mínimo que sea, propende a la pérdida de control efectivo. El modelo de la caminata es asumido como uno que permite movimientos inelásticos, es decir, sin tener en cuenta el efecto de los músculos, y en el cual durante algunos intervalos de tiempo se restringe o libera al robot de un GDL. Las ecuaciones del movimiento presentes en esta dinámica establecen “un ciclo límite” estable, representado por un movimiento periódico neutral. Los componentes de este ciclo límite son las fases anteriormente descritas (apoyo y oscilación), con cambios de velocidad instantáneos al momento de que se presenten contactos o colisiones con el suelo. El control efectivo que se debe realizar sobre este ciclo se basa en la aplicación de torques en las articulaciones, generando ángulos de desplazamiento y grandes ganancias, que produzcan “ciclos límite” estables, y con una mayor órbita de afinidad que sea invariable a pequeñas pendientes. Esta aplicación es única en el campo de la ingeniería y del control, debido a que se necesita incrementar los márgenes de estabilidad, característico del estado de equilibrio dinámico de un sistema.

1. 1. 3. Cinemática

La cinemática es una rama de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo generan. Por lo general, la cinemática se enfoca en el análisis teórico de la trayectoria de un cuerpo en función del tiempo, cuya base está en el uso de transformaciones entre sistemas de referencia, partiendo de un sistema de coordenadas $(q_0, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ para calcular la posición y orientación del extremo final de un mecanismo $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, y viceversa. En síntesis, la cinemática establece la relación entre los valores de las variables articulares (coordenadas) y su localización (posición y orientación) en el espacio. El desarrollo de la cadena cinemática del robot permite obtener la topología y geometría de los eslabones y las articulaciones del mismo (fig. 1. 3).

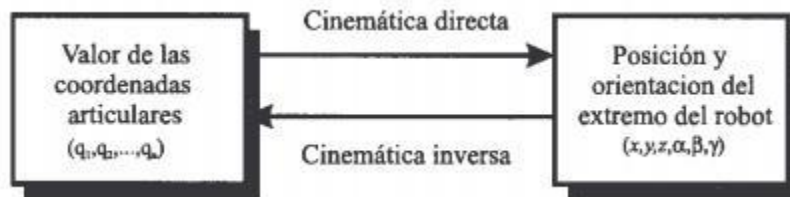


Figura 1. 4. Relación entre cinemática directa y cinemática inversa²

En la cinemática se tienen en cuenta las magnitudes de posición, velocidad y aceleración; se pueden desarrollar cadenas abiertas y cerradas (aunque las cadenas cinemáticas que más se analizan son las abiertas, siendo esta la que se aplicará posteriormente), y se divide en dos modelos de solución: cinemática directa y cinemática inversa. La descripción de cualquier sistema en forma cinemática se logra a partir del conocimiento de 4 cantidades asociadas a cada articulación: una, que es la variable de la misma, y 3 parámetros fijos. Estos 4 valores se conocen como parámetros *Denavit-Hartenberg D-H*, y deben ser definidos al momento de desarrollar una solución del sistema (cinemática directa o inversa). Antes de definir los

² Barrientos, A. (1997). Diagrama de relación entre cinemática directa e inversa (figura 4. 1). Recuperado de Fundamentos de Robótica. Mc. Graw Hill.

parámetros D-H se debe aplicar una secuencia algorítmica asignando los sistemas fijos a cada articulación. Dicha secuencia se puede definir de la siguiente forma:

- Numeración de segmentos: se enumera desde 0 la base inmóvil y se sigue enumerando las siguientes articulaciones (1, 2, 3, ..., n).
- Eje z_i , descansa a lo largo del eje de la articulación.
- Eje x_i es normal al eje z_{i-1} , y se dirige fuera de él.
- Eje y_i se obtiene a partir de la regla de la mano derecha.

Un robot de n grados de libertad se puede definir como un sistema de n eslabones unidos por n articulaciones, y cada par articulación-eslabón representa un grado de libertad. Para dicho robot, se asocia una matriz ${}^{i-1}A_i$, que es la representación DH mencionada con anterioridad, y la cual permite establecer un sistema de coordenadas que está ligado a un eslabón i de una cadena articulada, para determinar las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa. El **anexo No. 11**, dará explicación, con mayor énfasis, sobre los análisis cinemáticos directo e inverso.

1. 1. 4. Dinámica

○ Generalidades

La dinámica se encarga de desarrollar y solucionar las ecuaciones que describen el movimiento de un robot, calculando el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de cada uno de los eslabones que componen el mecanismo, generados por la aplicación de una fuente motora, especialmente fuerzas presentes en las articulaciones prismáticas o torques en las rotacionales. La dinámica se entiende como el modelamiento de un robot que puede definirse, en teoría, como la relación matemática de:

- La localización del robot, la cual está definida por sus variables articulares o por las coordenadas de ubicación de su extremo (variables de desplazamiento y orientación) y sus derivadas: velocidad y aceleración,
- Las fuerzas y los pares aplicados en las articulaciones, y
- Parámetros dimensionales del mecanismo a desarrollar: longitud (l), masas (m) e inercias (i).

Al calcular la dinámica de un sistema robótico, se deben obtener del mismo los siguientes aspectos: su simulación y movimiento (computación del modelo dinámico), el diseño y la evaluación de su estructura mecánica, el dimensionamiento de los actuadores (tipos de motores o sensores), y el diseño y la evaluación del control dinámico del robot: esta última propiedad determina la calidad del control, debido a que se han de fijar la precisión y velocidad de los movimientos del mecanismo. El desarrollo de la dinámica de los elementos (barras o eslabones), y de los sistemas de transmisión, actuadores y equipos electrónicos de mando también se debe priorizar a la par con la dinámica del sistema físico, a su vez que esto implica el establecimiento de nuevas inercias, rozamientos, saturaciones, etc., aumentando su complejidad. Esta complejidad va en aumento al número de grados de libertad que posea el robot, aunque en sistemas simples (1 o 2 grados de libertad), el método no es exhaustivo, pero en cualquier caso, se ha de aplicar un procedimiento numérico de forma iterativa para obtener la dinámica del sistema a desarrollar.

Es esencial tener en cuenta al robot como rígido, como una regla que facilita el cálculo de la dinámica del mecanismo (en casos especiales, como sistemas de mayores dimensiones o para aplicaciones espaciales, se establecen como no rígidos, dada las deformaciones presentes), esta regla permite obtener ecuaciones que se basan en la segunda ley de Newton, el equilibrio de fuerzas, y la ley de Euler, referente al movimiento de rotación. Matemáticamente, el modelo dinámico se expresaría de la siguiente manera, respecto a las leyes mencionadas anteriormente:

$$\sum F = mA, \text{ y } \sum T = I\omega + \omega(I\omega) \quad (7)$$

Determinar la locomoción del robot a partir de su análisis dinámico se refiere, esencialmente, al análisis de fuerzas con parámetros fijos así como con restricciones tenidas en cuenta y condiciones físicas asumidas. En el **anexo No. 12.** se mencionan algunas pautas a tener en cuenta en el desarrollo dinámico del diseño.

1. 1. 5. Identificación de sistemas

La identificación es un método de solución al funcionamiento de un sistema dinámico. Éste permite obtener la expresión matemática de un modelo que representa al mismo sistema; de este modo, dicha expresión rige al mecanismo o planta gracias a los datos (entradas y salidas) que se registran para su posterior análisis, propio de esta técnica. Es una herramienta algorítmica ya que se puede experimentar sobre ésta el registro de valores de entrada y salida infinitas veces hasta obtener un modelo que se aproxime lo más cercano posible al comportamiento deseado del sistema. Para tener una mejor comprensión de este proceso, se debe hacer hincapié en los conceptos de sistema dinámico y de modelos, además se tendrán en cuenta diferentes métodos para modelar un sistema.

○ Sistemas dinámicos

En el sentido más general de todos, un sistema es un objeto en el que interactúan variables de diferentes tipos (en general, físicas). Para el caso concreto de identificación y de control, se ha de tener en cuenta la enorme relevancia que tiene reconocer un sistema dinámico y más aplicado en el campo de la robótica, ya que no son arbitrarias las condiciones de funcionamiento del mismo, sino que han de cumplir los requerimientos adecuados para que se logre ese buen rendimiento; estas condiciones se distinguen por ser estímulos externos, y que al interactuar con el sistema producen señales cuya observabilidad dependerá del tipo de sistema; dichas señales que interactúan en éste son las entradas y salidas, normalmente. Hay otras señales que interfieren en el comportamiento puro de la dinámica del sistema, pero que

influyen mucho o poco en el modelamiento posterior, en la medida que se tenga en cuenta dicha interferencia; además, existe una relación entre la entrada y el sistema, llamado error, que a menudo se considera poco importante (Lennart, 1999).

Para demostrar esta definición, se toma como ejemplo de un sistema dinámico, una casa que emplea energía solar. Para este sistema, se puede definir como la entrada (estímulo externo) una fuente de energía como la radiación solar; la salida (o señal a distinguir) es la temperatura con la que es activada la casa, y algunas interferencias como el viento y la temperatura exterior pueden ser las posibles interferencias. Posteriormente, se hace el registro de dichas variables (temperatura, radiación) en una serie de tiempo, la cual será importante para hacer la elección del modelo que se adecúe al sistema en mención. Se puede inferir que la salida, que no es observable en un sistema dinámico, produce valores que dependen de la señal de entrada y de los valores registrados anteriormente a la medición en un tiempo t .

○ **Modelado de sistemas**

En un sistema dinámico, un modelo es la relación entre variables, las cuales son las señales de entrada – salida que maneja dicho sistema. El modelo se expresa en varias formas y se determina con una variedad amplia de formalismos matemáticos. Estos modelos se elaboran, mayoritariamente, por experimentar con el registro de datos entrada – salida, en tablas (mediciones) o en el comportamiento reflejado en “plots” (gráficos que muestran el comportamiento de la salida respecto a la entrada); para sistemas avanzados, se manejan ecuaciones diferenciales (continuos) o en diferencias (discretos). Estos dos últimos, que se determinan matemáticamente, son los que tienen mayor validez en el proceso de modelado, ya que sus características variadas permiten la mejor selección del modelo apropiado (manejo en dominio continuo o discreto, agrupado o distribuido, determinístico o estocástico, lineal o no lineal, etc.); esto es fundamental para la posterior identificación.

Para facilitar la elección o construcción del modelo adecuado para un sistema determinado, se acostumbra a elaborar múltiples software que maneje varias subrutinas, tablas de búsqueda y demás aspectos relacionados, además de seguir un procedimiento secuencial, que establece un modelo listo para ser evaluado. El modelamiento requiere de la división del sistema en

varios subsistemas, que es una forma empírica para comenzar a modelar; si se parte de un análisis matemático, los subsistemas obtenidos, unidos, pueden formar el modelo deseado, aunque en programas de computadora estos subsistemas se representan en bloques, y la unión de éstos genera un modelo mejor establecido para la identificación consecuente.

- **Metodología de identificación**

La identificación es un proceso secuencial e iterativo que se desarrolla continuamente, teniendo en cuenta todos los elementos presentes en el registro de las mediciones realizadas (valores de las variables establecidas con anterioridad, características de ambiente de trabajo, etc.) y en el cual el empleo de su algoritmo correspondiente permitirá obtener un modelo válido después de su implementación; de lo contrario, se procede a la revisión de parámetros y datos registrados, entre otras condiciones. La identificación involucra la aplicación del algoritmo como sigue (ver fig. 1. 1): tener conocimiento previo del sistema a identificar, diseñar el sistema o el experimento, registrar datos de entrada y salida, elegir los modelos que mejor se adecúen al sistema, ajustar criterios, el cálculo de los parámetros que mejor se adecúan al modelo y la validación del mismo [21] .

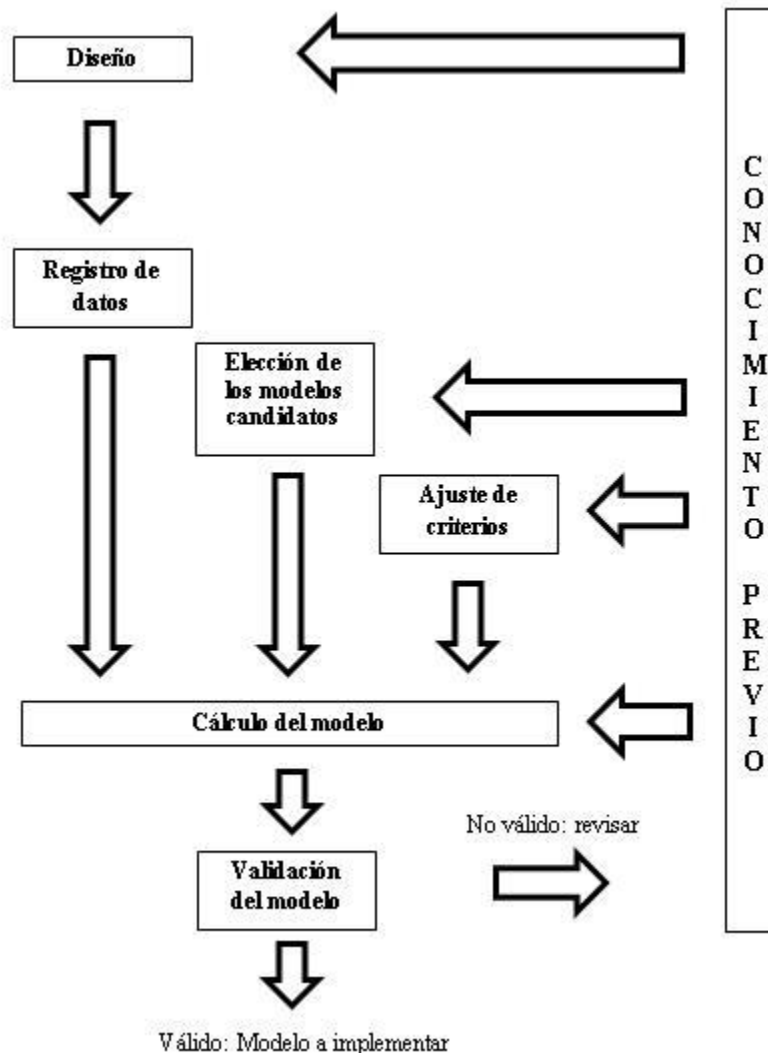


Figura 1.5. Algoritmo del proceso de identificación (Saha,2015)

La identificación del sistema o de una planta define características listas a tener en cuenta para la aplicación de un componente, como un motor, posterior a su medición, elección de los modelos candidatos para ajustarse al funcionamiento del motor, definición de criterios o características de funcionamiento y validación (después de un número indefinido de pruebas) para aplicar en un sistema controlado:

- **Conocimiento previo del sistema:** en términos generales se ha de tener certeza del funcionamiento de una planta o un sistema, se seleccionan las entradas y las salidas

y se han de reconocer las posibles perturbaciones así como manifestaciones no deseadas pero presentes en dicho sistema.

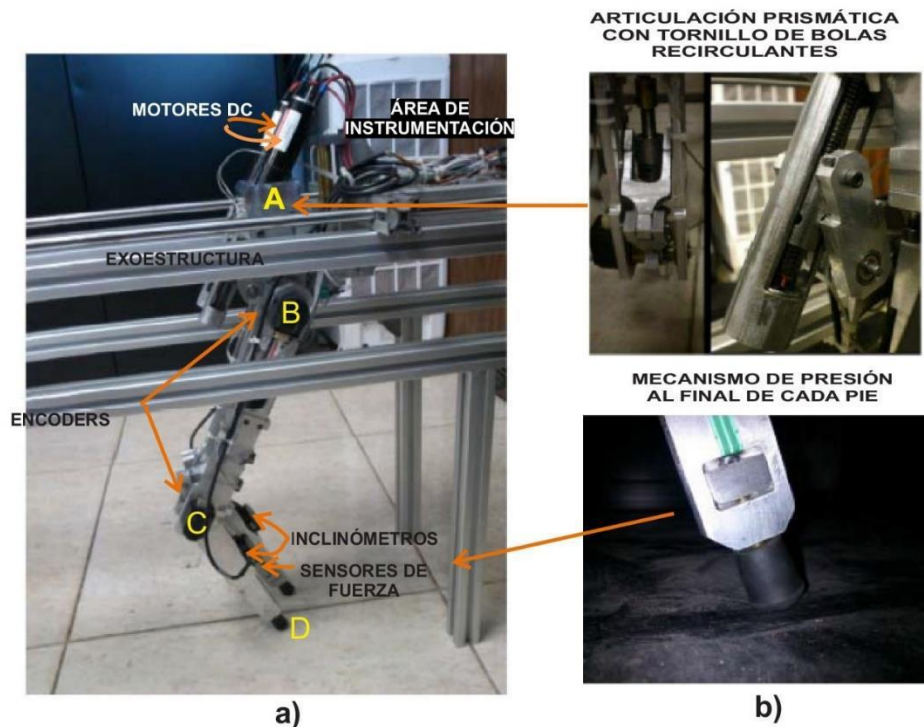
- **Diseño:** se procede a elaborar el sistema adecuado, teniendo en cuenta las variables a registrar en la obtención de los valores de entrada – salida.
- **Registro de datos de entrada – salida:** se debe registrar la evolución de *entradas – salidas* del sistema, durante un intervalo de tiempo y al ser excitado con una señal de entrada.
- **Selección del conjunto de modelos candidatos:** conociendo y teniendo en cuenta la física que rige el proceso (que se analizará posteriormente), se puede determinar la estructura para un modelo entre varios posibles, y según las señales a manipular (entradas) y las posibles perturbaciones (errores) que se vayan a presentar durante la implementación del sistema se prepara uno de estos.
- **Ajuste de criterios:** se estima la calidad del modelo a trabajar.
- **Obtención de los parámetros del modelo:** se estiman los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos recopilados inicialmente.
- **Validación del modelo:** por la validez que se le dé al sistema, lo más esencial de la identificación es verificar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación deseada, y dada dicha validez se puede implementar el mecanismo y efectuar el análisis matemático presente en él.

El **anexo No. 13.** muestra el proceso de identificación para los motores con mayor detalle.

1. 2. MARCO REFERENCIAL

Los antecedentes revisados hacen mención a diversos sistemas bípedos que en su mayoría ejecutan la caminata y se enfatizan en el análisis de diseño y construcción, así como de su movimiento a partir de los GDL presentes en el mecanismo, plano de marcha, componentes electrónicos, etc. Son de relevancia en el presente documento debido a la relación que guardan con las temáticas expuestas en el marco teórico, es decir, consideran la importancia del sistema para la marcha, aunque resultan obviando el aspecto antropométrico, por lo cual estos registros hacen destacar el presente proyecto dentro del mismo ámbito.

- “Design and Real-Time Control of a 4-DOF Biped Robot” (Vásquez & Velasco Villa, 2013)



• *Figura 1.6.* Detalles de la estructura física del Robot Bípedo de 4 GDL; a) ubicación de los GDL b) mecanismos de presión y de articulación. En “Design and Real-Time Control of a 4-DOF Biped Robot”, por J. A. Vásquez y M. Velasco-Villa, 2013, International Journal Advanced Robotic Systems, Vol 10, p.4.

Este trabajo está enfocado en el diseño y control de un Robot Bípedo (BR) de 4 GDL. El movimiento del robot se lleva a cabo en el plano sagital, realizando una fase de balanceo durante un 80% de la marcha, seguida por una fase de doble apoyo ejecutada en el 20% restante. El sistema tiene 2 GDL distribuidos en L1 y L2 (fig. 1. 8. a), que son prismáticos con tornillos de bolas recirculantes, y 1 GDL prismático en el punto C de cada pierna. Su altura, en posición inicial entre A y D, es de 0.75 m y su masa total es de 7.5 kg. El BR se activa a partir de 4 motores DC de 24 V, 1 por cada articulación y su consumo de corriente total es de 2.5 A; para calcular la presión que se ejerce al momento del impacto de la pierna oscilante con el suelo, se utilizan dos sensores de fuerza FlexiForce, ubicados en el punto D; para medir la variación angular en las articulaciones, se emplea un encoder en cada una de ellas, de 1000 CPR (ciclos por revolución) y se implementa un inclinómetro de 9000 CPR que se encarga de medir el ángulo de inclinación entre C y D con respecto a la vertical.

Se hace un análisis Denavit – Hartenberg para definir el modelo cinemático del BR. Su modelo dinámico es obtenido por medio de la formulación de Euler-Lagrange, bajo la hipótesis de masa concentrada en cada articulación, sin tener en cuenta la fuerza de fricción en las articulaciones y los actuadores. Se establece un análisis de control por realimentación y éste se implementa en un dispositivo DSP DS1104. La programación del sistema se realiza en la plataforma Matlab – Simulink con un tiempo de muestreo de 1 ms. Se registran los primeros 10 s de la marcha produciendo así 4 pasos completos en los cuales el bípedo muestra un sistema estable. La fase de soporte simple (FSS) es el patrón fundamental de la marcha, ya que la fase de soporte doble (FDS) se considera una perturbación, esto por el impacto instantáneo de la pierna oscilante con el suelo.

- **“Tuning a PD Controller Based on an SVR (Support Vector Regression) for the Control of a Biped Robot Subject to External Forces and Slope Variation”**
(Ferreira, Crisóstomo & Coimbra, 2013)

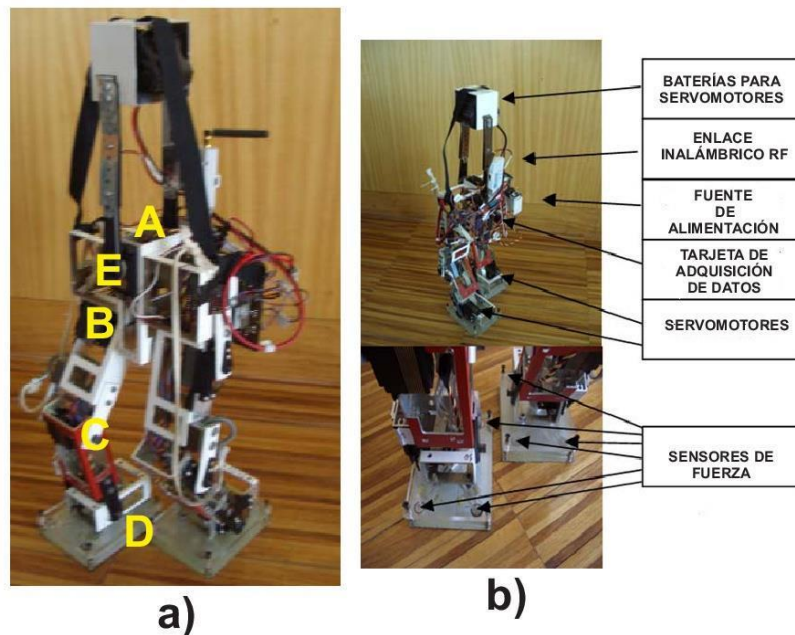


Figura 1. 7. Estructura mecánica del BR; a) ubicación de los GDL de BR b) sensores y actuadores. En “Tuning a PD Controller Based on an SVR for the Control of a Biped Robot Subject to External Forces and Slope Variation”, por J. P. Ferreira, M. Crisóstomo & P. Coimbra, 2014, International Journal Advanced Robotic Systems, p.2.

El robot tiene 7 GDL rotacionales: 6 en los puntos B, C y D de las piernas, y 1 en un péndulo invertido para el equilibrio lateral de la estructura, ubicado en el punto E (fig. 1. 9. a). Para calcular la magnitud de la presión al momento del impacto del pie con el suelo, se implementan 8 sensores de fuerza tipo Strip (4 por pie). Para activar las articulaciones se utilizan 7 servomotores (fig. 1. 9. b). La estructura del bípedo está hecha en acrílico y aluminio, pesa 2.3 kg (0.15 kg entre los puntos C y D, 0.15 kg entre B y C, 0.6 kg entre los puntos A y B, y 0.54 kg el péndulo) y tiene una altura de 0.5 m entre A y D distribuidos de la siguiente forma: 0.035 m los pies, 0.115 m entre C y D, 0.115 m entre B y C, 0.065 m entre A y B, y 0.17 m el péndulo. Su placa tiene 2 PIC: uno lee los datos de los sensores de fuerza y el otro acciona los servomotores.

Se muestra un sistema de control hecho a partir del análisis dinámico del ZMP (Zero Moment Point) (Vukobratovic, 1970), el ZMP se calcula leyendo los sensores de fuerza colocados debajo de cada uno de los pies del robot; no obstante, esto no permite mantener un estado de equilibrio del bípedo, por lo que se opta por desarrollar una técnica de control eficaz basada

en el método SVR para diseñar un controlador PD, cuyos valores se establecen a partir del segundo método de Ziegler – Nichols. Se logró el objetivo propuesto gracias a la implementación del SVR pudiendo demostrar que un controlador desarrollado bajo esta técnica es eficiente para mantener la estabilidad en el BR.

- “Design, Modeling and Control of a Biped Line-Walking Robot” (Wang, Liu, Xu, Wang, Cheng & Zhang, 2010)

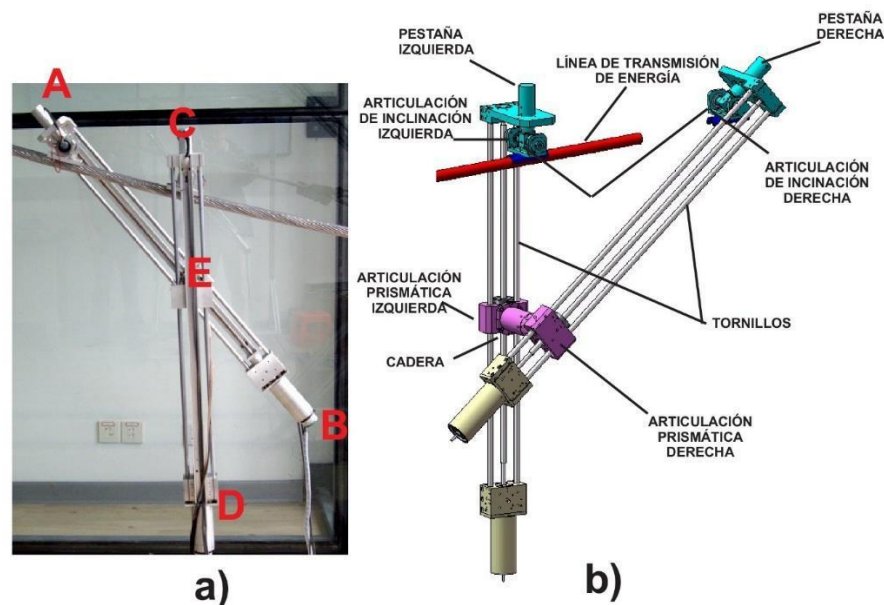


Figura 1. 8. BR diseñado para caminata lineal, a) prototipo y b) modelo del LWR. En “Design, Modeling and Control of a Biped Line-Walking Robot”, por L. Wang, F. Liu, S. Xu, Z. Wang, S. Cheng & J. Zhang, 2010, International Journal Advanced Robotic Systems, p.45.

Este trabajo trata sobre el diseño y análisis de movimiento de un robot bípedo de marcha lineal con una sola pierna de balanceo. Debido a la estructura del robot, al menos un pie debe estar en contacto con la línea todo el tiempo; esto hace que la estructura no sea simétrica. Los bloques deslizantes de las dos piernas están conectados por una articulación rotacional que representa la cadera, y el ángulo de esta articulación junto con la longitud de las dos piernas determinan la marcha del robot; el movimiento del mismo se ejecuta en el plano sagital. El BR tiene 80 cm entre A – B, y C – D (fig. 1. 10. a), y 10 cm de ancho cuando está en posición inicial. La propulsión de la pierna oscilante se efectúa al anclar la otra a la línea de

transmisión. Tiene una línea de energía que enlaza la extremidad izquierda para realizar su caminata por medio de la articulación de inclinación. El LWR tiene 2 GDL: uno en el punto E (fig. 1. 10. b), que corresponde a la unión de las articulaciones prismáticas y uno en una pierna, correspondiente a la articulación de inclinación que se adjunta a la línea de transmisión, rotacional, lo cual permite la elongación o contracción de las piernas. La longitud del bípedo es de 80 cm entre los puntos C – D y A – B y en posición cero, la longitud a lo ancho es de 10 cm.

El BR tiene 7 servomotores de los cuales se emplean 2 para las articulaciones prismáticas, acopladas con sus respectivos tornillos de bolas recirculantes, y los 5 restantes son para accionar 4 módulos configurados con el chip TMS320F2812 de Texas Instrument, que brindan el control del mecanismo. Al anclar el pie izquierdo a la línea de transmisión de energía se definen los parámetros Denavit – Hartenberg y se emplea la cinemática inversa para obtener las variables de las articulaciones con una configuración conocida de la ubicación de los pies al inicio y en el extremo del sistema. El modelo dinámico se establece en función de la locomoción de las articulaciones prismáticas del BR y la gravedad que influye en dicho movimiento, gracias al método Lagrange – Euler. Al momento de la implementación del bípedo, se propone el CdM ajustado a la pierna derecha, permitiendo una secuencia de dos fases de movimiento: levantamiento de la pierna izquierda por contracción de la pierna derecha, y la rotación de la pierna izquierda a partir del punto E. Después de la experimentación se logró proyectar la estabilidad deseada para posibilitar el ciclo completo de marcha, proporcionando una caminata y salto efectivos, dada la ejecución alterna del movimiento de las articulaciones.

- **“Gait Balance and Acceleration of a Biped Robot Based on Q-Learning”** (Lin, Hwang, Jiang & Chen, 2016)

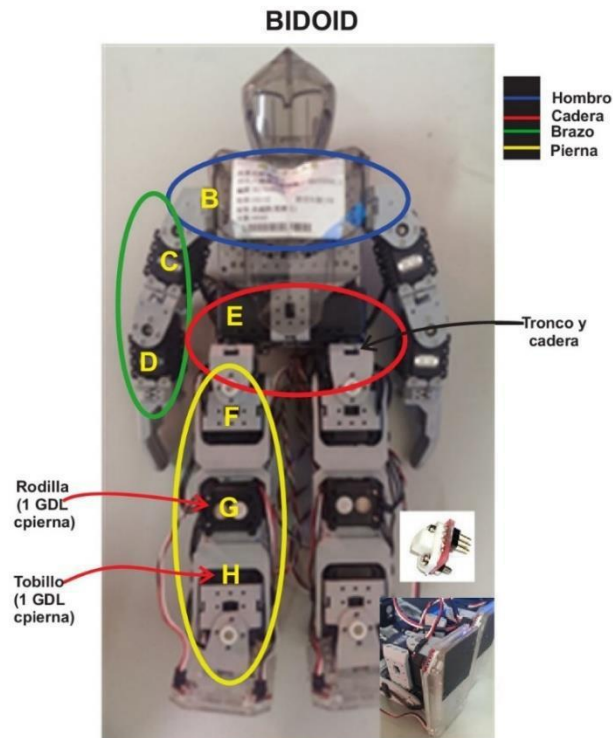


Figura 1. 9. BR BIDOID para implementación de control de marcha con base en aprendizaje Q-Learning. En “Gait Balance and Acceleration of a Biped Robot Based on Q-Learning”, por J. L. Lin, K. S. Hwang, W. C. Jiang & Y. J. Chen, 2016, IEEE Access. Open Access Journal, p. 7.

Este BR realiza su movimiento en el plano sagital. Para el sistema se definen las fases FDS (soporte y reposo) y FSS (balanceo y transferencia de ZMP). El robot tiene 18 GDL, de los cuales 7 se ubican en las piernas y están distribuidos así: 2 entre E y F (rotacionales), 2 en G (rotacionales), 2 en H (rotacionales) y 1 en un péndulo invertido (traslacional) (fig. 1. 11). La masa del BR es de 2.3 kg, de los cuales se asignan 0.15 kg a los enlaces formados entre H-I, 0.15 kg entre F-G, 0.6 kg la región de la cintura y 0.54 kg al péndulo; la masa resultante se distribuye en los brazos, la cabeza y el torso. Su altura en estado de reposo es de 0.5 m entre los puntos A e I y se distribuyen de la siguiente forma: 0.035 m de H a I, 0.115 m de G a I, 0.115 m de E a G, 0.065 m la cadera, y 0.17 m el péndulo. El mecanismo cuenta con 18 servomotores RC ubicados en cada articulación y se implementan dos sensores de fuerza ubicados en el enlace H – I, que establecen un valor analógico de presión durante la marcha.

Se emplea el método SVR (Support Vector Regression) para diseñar un controlador PD teniendo en cuenta la segunda regla de Ziegler – Nichols. BIODID camina bajo diversas inclinaciones de la plataforma, programando la configuración de caminata realizada en una simulación proporcionada por el software WEBOTS. La estructura bípeda sigue un algoritmo que detecta los valores de los sensores de fuerza y son procesadas en un módulo AGB65-ADC. En este trabajo se diseña y se implementa la estrategia de control de aprendizaje por refuerzo (Q-Learning) en el humanoide BIODID. Se orienta la acción de control que determina las diferentes distancias del logro del aprendizaje, manejando las condiciones de inclinación de la superficie. El aprendizaje por Q-Learning de la caminata del robot se logra en 100 pasos, determinando así su adiestramiento en las diferentes modalidades de marcha.

- **“Evaluación experimental del caminado en tiempo real de un robot bípedo de 5 GDL con marcha basada en movimientos cicloidales”** (De-León-Gómez, Pámanes & Santibañez, 2015)

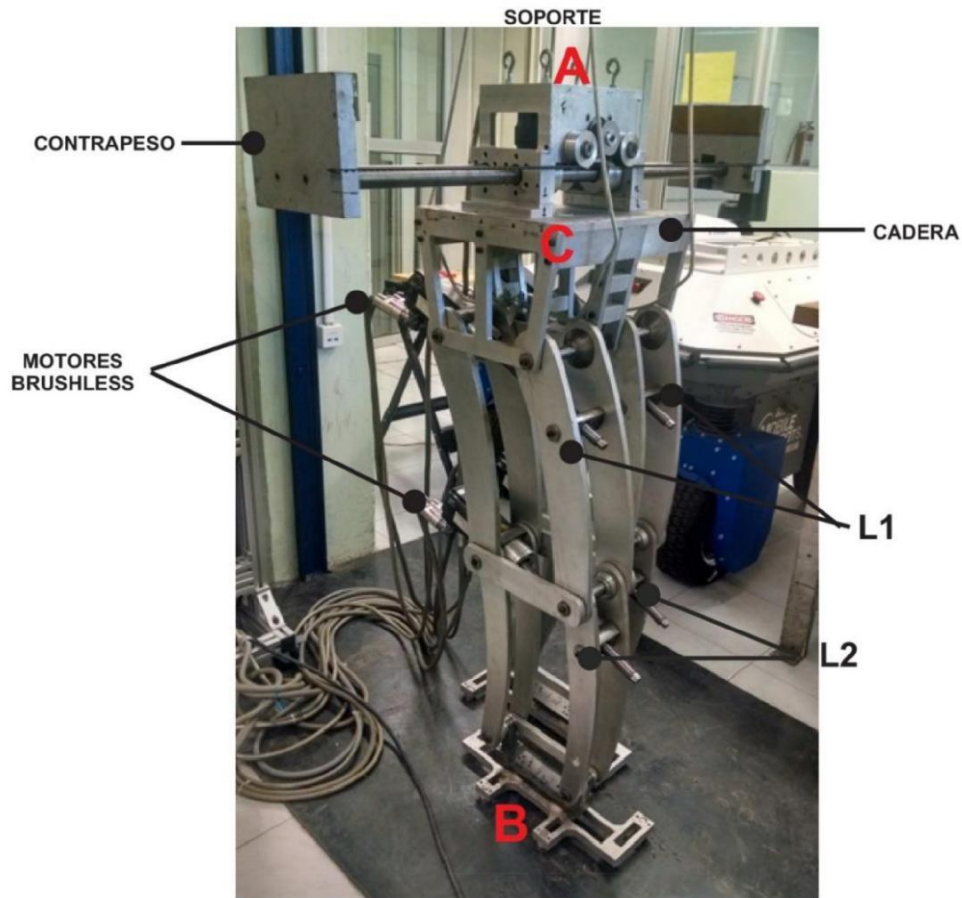


Figura 1. 10. BR de 5 GDL. En “Evaluación experimental del caminado en tiempo real de un robot bípedo de 5 GDL con marcha basada en movimientos cicloidal”, por V. De-León-Gómez, J. A. Pámanes & V. Santibáñez, 2015, Science Direct, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 12, p. 9.

El trabajo muestra el resultado de pruebas con un BR de 5 GDL en el cual se establece un patrón de marcha desarrollado con base a las leyes del movimiento de tipo cicloidal. Para su construcción, se elaboran 2 piernas de 2 GDL cada una (enlaces L1 y L2) y la cadera (punto C) (fig. 1. 12) que tiene 1 GDL con un mecanismo de balanceo que permite su movimiento en el plano frontal, con dirección en el eje z. Su estructura está formada por paralelogramos articulados en C y las articulaciones formadas entre L1, L2 y B. Sus dimensiones corresponden a parámetros similares a los de una persona, pues su masa es de 92 Kg (teniendo en cuenta algunos elementos de instrumentación) y su altura entre A y B es de 1.31 m. Para ejecutar el movimiento deseado se emplean 4 motores Brushless DC AKM32D, con sus ejes

inclinados respecto a la horizontal para amplificar el torque y se articulan con un conjunto de tornillos sin fin y tuercas.

Se aplica cinemática directa (parámetros Denavit – Hartenberg) para transformar las trayectorias de los movimientos cicloidales especificados para la cadera y el pie libre a coordenadas en el espacio articular (q_i , donde $i = 1, \dots, 4$); este modelo está definido en función a q_i , así como su respectivo modelo cinemático inverso. El desarrollo de controladores que aseguran la estabilidad durante la marcha se enfoca en el análisis ZMP y un PD saturado. Para su experimentación en tiempo real, se usa el ToolBox de Matlab-Simulink, con un tiempo de muestreo de 3 ms; 2 tarjetas adquisitorias Sensoray 626 para la comunicación y aplicación de señales de control, y 5 drivers Koll Morgen 5603, que controlan los motores. Los parámetros especificados para los patrones de marcha aseguraron una caminata estable del robot, sin saturar los torques de los motores usados.

- **“Realization of a Biped Robot Lower Limb Walking without Double Support Phase on Uneven Terrain”** (Wang & Li, 2013)

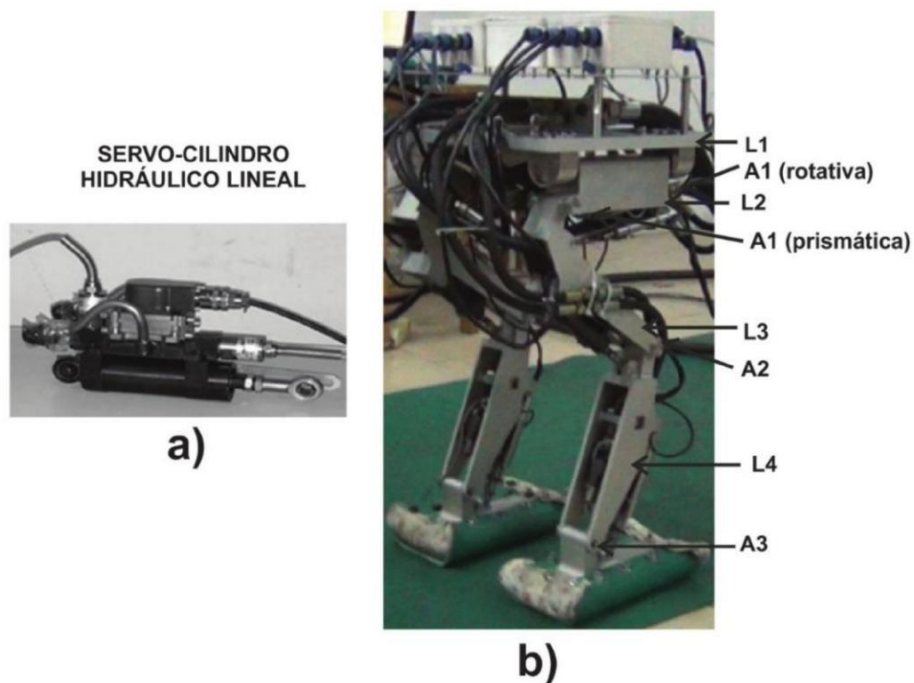


Figura 1. 11. Estructura Física del BR con fase de soporte doble; a) mecanismo de articulación b) Distribución de GDL. En “Realization of a Biped Robot Lower Limb Walking without Double Support Phase

on Uneven Terrain”, por H. Wang & Y. Li, 2013, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Control Science and Engineering. Volumen 2013, p. 2.

El sistema diseñado muestra la mejora en caminata a condiciones de alteración complejas de un sistema cuadrúpedo³, convirtiéndolo a uno bípedo. El BR realiza su marcha en los planos frontal y sagital y fija el centro geométrico del tronco como punto de origen del sistema de coordenadas en X (desplazamiento delantero), Y (movimiento frontal) y Z (eje perpendicular a L1). Se realiza el modelo de péndulo invertido inverso para considerar algunas variables físicas que inciden en la marcha. Tiene 8 GDL, 4 que corresponden a A1 (2 rotacionales y 2 traslacionales), 2 a A2 y 2 a A3 (rotacionales) (fig. 1. 13). Sus longitudes en los ejes X, Y y Z son de 44 cm, 48.2 cm y 88.236 cm, respectivamente. La masa total del robot es de 40 Kg, distribuida de la siguiente forma: 12.53 Kg para L1 y 27.22 Kg para las dos piernas (L3 y L4), al cual se le agrega un contrapeso de 100 Kg, que ayuda a mantener el equilibrio del sistema. El robot tiene 8 servocilindros, que corresponden a los 8 GDL descritos con anterioridad, y se emplean dos sensores de fuerza de 6 dimensiones, que determinan la variación del peso en los enlaces que forman las piernas.

Se hace un análisis de parámetros Denavit – Hartenberg para determinar las condiciones de marcha en los planos X, Y y Z, y cinemática inversa para establecer las relaciones entre los ángulos de movimiento de las articulaciones y la elongación de las mismas. Se utiliza el *método de equilibrio dinámico*⁴. Se realizan dos experimentaciones para el robot: la primera fase se simula en MSC-ADAMS sobre una superficie inclinada en 3° y -3° (en dos ciclos de marcha) y se programa el paso de escalón de 20 mm (movimiento sobre el eje Z) y 270 mm (sobre el eje X), teniendo en cuenta el contrapeso. En la segunda fase se omite el bloque de contrapeso, generando así un sistema más liviano. El BR camina sobre una superficie con algunas alteraciones que varían de los 8 mm hasta los 13 mm, por esto, se fija el CoM en las piernas. Es un éxito el proceso de caminata bajo las dos fases ya que, a partir del traslado de CoM que se hace por medio del método de equilibrio dinámico, el BR puede caminar en superficies desiguales. Como se desea calcular los parámetros de la caminata para el miembro

³ X. Rong, Y. Li, J. Ruan, and B. Li, “Design and simulation for a hydraulic actuated quadruped robot,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 26, no. 4, pp. 1171–1177, 2012.

⁴Boston Dynamics. <http://www.bostondynamics.com/robotpetman.html>

inferior del sistema, la máxima longitud de desplazamiento del paso es 30 cm, así como el escalón ejecutado por este es de 24 cm, en un período de marcha de 0.4 s.

- “Step-Exchange Strategy for Balance Control of a Walking Biped under a Lateral Impact” (Kim, Lee & Lee, 2014)

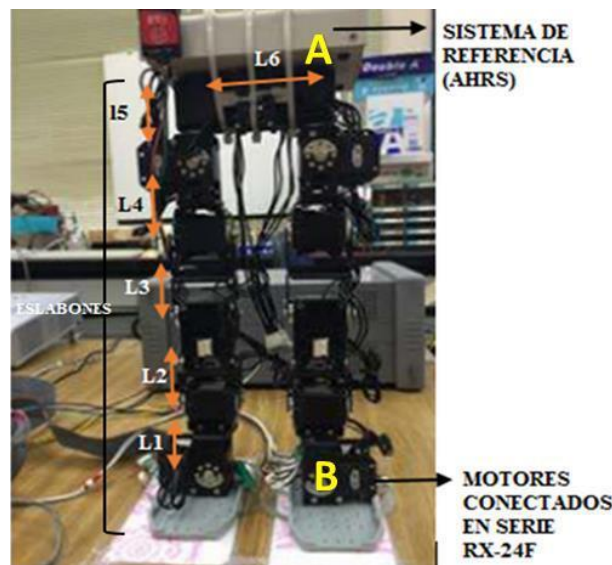


Figura 1. 12. BR RH-1 en momento inicial. En “”, por Y. J. Kim, J. Y. Lee y F. F. Lee, 2014. Emerald Insight, Journal of Control Step-Exchange Strategy for Balance Control of a Walking Biped under a Lateral Impact Science and Engineering. Volumen 2014, p. 458.

El BR RH-1 tiene una altura de 36 cm entre A y B (fig. 1. 14), distribuidos de la siguiente forma: 5.2 cm en L1, 7.17 cm en L2, 6 cm en L3, 5.2 cm en L4, 4.25 cm en L5 y 8 cm en L6. Su peso total es de 1.162 kg. Tiene 12 GDL: 2 en las rodillas y 2 en los tobillos (rotacionales), 2 en los pies (rotacionales) y 6 en la cadera (2 para el movimiento de las piernas, 2 para el balanceo en el plano frontal, y dos para el movimiento en el plano sagital, todos rotacionales). Se utilizan motores RX-24F en cada articulación, con un torque de 26 kgf/m y una resolución de 0.33 grados. El robot se desplaza en los planos frontal, sagital y lateral, utilizando una eficiencia energética generada por el método de Tchebyshey para crear una estrategia de intercambio de pasos, con un tiempo total de 9.75 s y el paso entre cada pie es de 0.15 m aproximadamente. A la altura del torso, el bípedo tiene un Sistema de Referencia de Actitud y Encabezamiento (AHRS), que es el que controla a todo el robot.

El modelo cinemático se establece mediante los parámetros de Denavit – Hartenberg. El BR realiza dinámica directa a partir de la solución de la ecuación discreta de Newton – Euler; se implementa un equilibrador dinámico que efectúa un estado instantáneo de velocidad angular cero después de que se aplique una fuerza de impacto lateral al robot. Se emplean dos métodos de control: el feed – forward, que permite al robot mantener cierto grado de equilibrio y controlar el motor en el plano sagital, y el feed – back, que proporciona un balance más robusto y controla los motores en los planos lateral y frontal. Además, se utiliza una estrategia de patrones centrales ZMP para mantener un movimiento de ciclo límite mientras el robot se mantiene equilibrado. La unidad de control está conectada a través de un protocolo IEEE 485, con una unidad de muestreo de 30 Hz. El equilibrador dinámico extiende la pierna del BR en el plano frontal para alcanzar una velocidad angular cero instantánea, incorpora la dinámica de avance, la conservación del momento angular y la ecuación de energía para calcular el ángulo de extensión de la pierna. Después de alcanzar una velocidad angular cero instantánea, el mantenedor de balanceo se activa para ayudar al robot a mantener el equilibrio.

- **“Design and control of a pneumatic musculoskeletal biped robot”** (Zang, Liu, Liu & Zhao, 2016)

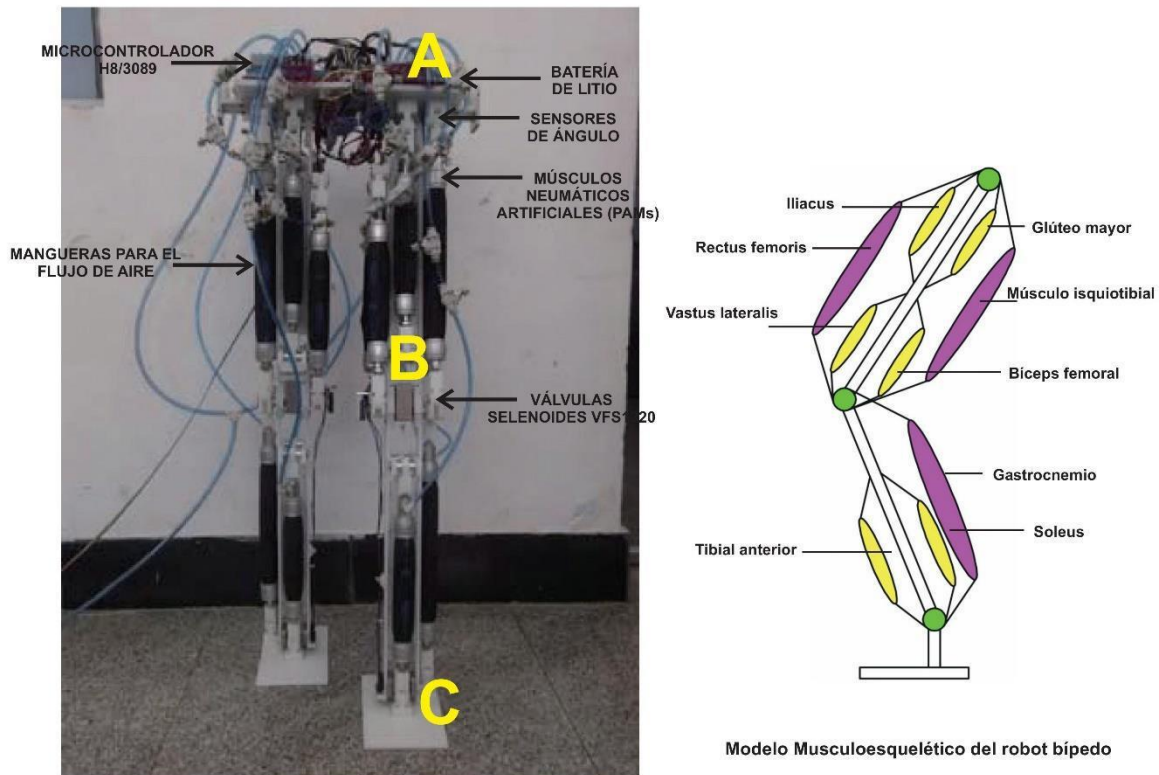


Figura 1. 13. Robot Bípido neumático musculo-esquelético. En “Design and control of a pneumatic musculoskeletal biped robot”, por X. Zang, Y. Liu, X. Lee & J. Zhao, 2014 Technology and Health Care 24, Journal of Control Science and Engineering.2016, p. 445.

En este estudio se diseña un BR musculo-esquelético actuado por PAMs (Músculos Neumáticos Artificiales). El robot está hecho en polioximetileno (POM) una especie de polímero con alta resistencia mecánica y baja densidad. Su altura desde los puntos A-C (fig. 1. 15) en posición inicial es de 110 cm (44 cm el muslo y 43 cm la tibia) y 35 cm de ancho. Todas las piezas están conectadas con un pin de articulación unidimensional, creando la articulación de cadera, rodilla y tobillo, obteniendo así un sistema de 6 GDL. El movimiento del robot está restringido en el plano sagital, ejecutando una fase de soporte simple y una fase de soporte doble. Se planea la marcha según el criterio ZMP. La estructura del BR está compuesto por baterías de litio, un microcontrolador en el cual se procesa la información, electroválvulas solenoides on/off VFS1320 para el control del sistema y para fijar el ángulo en las articulaciones, se usan sensores.

En la identificación del BR se tuvieron en cuenta los modelos de control del PAM incluyendo los procesos de presurización y despresurización. Se observa la relación entre el tiempo de acción de la válvula solenoide y la longitud del músculo bajo determinada presión de trabajo. Durante este proceso se mide la contracción del músculo que cambia a lo largo del tiempo. En el proceso de presurización la curva obtenida muestra la longitud de contracción media del músculo, obteniendo así un sistema de segundo orden con un rendimiento de retraso de tiempo puro. Se utiliza una entrada escalón que permite la respuesta reflejada durante el experimento. El proceso de despresurización a diferencia del proceso de presurización, se aplica la técnica de ajuste polinomial para establecer la curva y así obtener la relación entre la longitud de la contracción y el tiempo. Se opta el método general de control PID para controlar cada PAM. Los ángulos de unión se utilizan como la señal de realimentación del controlador PID. El robot se coloca en una exoestructura con ruedas que es la que le permite mantener el equilibrio durante la marcha, pero no proporciona ninguna fuerza de propulsión hacia adelante. La longitud del paso del BR es de 50 cm y el ciclo de marcha es de 8 s. Los resultados muestran que el robot es capaz de caminar con la estrategia de control propuesta.

- **“Motion synthesis and force distribution analysis for a biped robot”** (Trognacki & Zielinska, 2011)

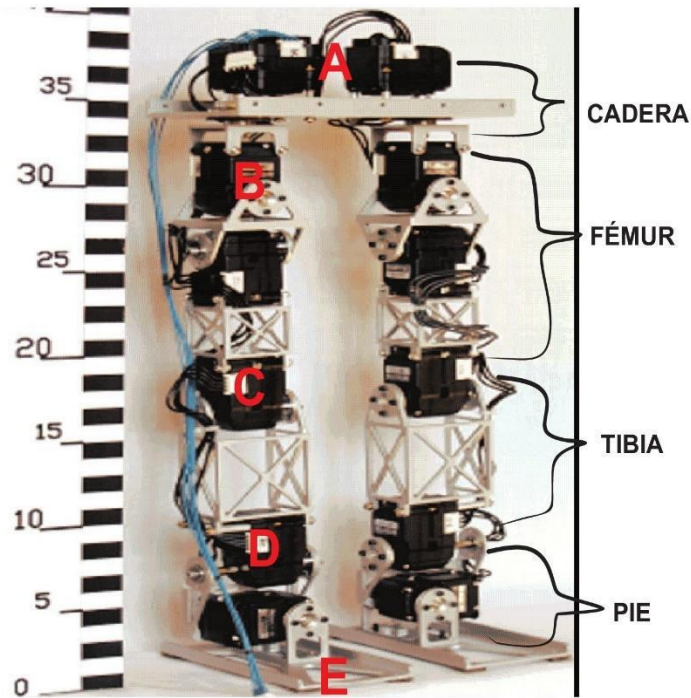


Figura 1. 14. Mecanismo de robot bípedo diseñado. En “Motion synthesis and force distribution analysis for a biped robot”, por M. T. Trognacki & T. Zielinska, 2011. Acta of bioengineering and biomechanics, Journal of Control Science and Engineering.2016, p. 4.

La construcción del robot bípedo se efectuó con base en la simulación realizada en el software Ungraphics, hecha por los autores del presente trabajo. El movimiento del sistema se ejecuta en los planos sagital y frontal, aunque la locomoción que realiza es únicamente de avance. Toma como referencia dos sistemas de coordenadas: OXYZ, que es un marco no móvil, esencial para analizar el movimiento de elementos pasivos como los muelles insertados en el pie, y el marco móvil RXYZ, para el análisis de los elementos activos. El bípedo está compuesto por 12 GDL, 6 GDL para cada pierna (fig. 1. 16), distribuidos de la siguiente forma: 3 GDL en la región A (rotacionales), 1 GDL en C (rotacional) y 2 GDL en el enlace D – E (pies), siendo asignado 1 para D (rotacional y activo) y 1 para E (rotacional y pasivo, por el resorte insertado). La masa total del BR es de 1.5 Kg: 0.363 Kg en A, 0.109 Kg en el enlace formado entre A y B, 0.171 Kg en el enlace B – C, 0.103 Kg en el enlace C – D y 0.193 en enlace D – E. Su estatura es de 40.6 cm entre los puntos A y E (13.5 cm en A – B, 10 cm en B – C, 10 cm en C – D y 7.1 cm en D – E), y sus proporciones en los ejes X y son

130 cm y 140 cm, respectivamente. Para activar los GDL se emplean los servomotores Dynamixel DX – 113 y DX – 116.

La identificación del sistema es paramétrica y se hace a partir de un patrón de tiempo de 0.08 s y teniendo en cuenta la trayectoria de la pierna derecha, se analiza la variación de los ángulos que se forman en los puntos B y C, obteniendo una función de movimiento que involucra el marco de coordenadas RXYZ. Para la cinemática, los autores proponen un algoritmo que definen los puntos fijados sobre las coordenadas OXYZ, ya que este es un sistema en el cual no se fija el movimiento del robot o es nulo. Se aplica la estrategia de Newton-Euler para definir la dinámica del BR en el sistema de coordenadas RXYZ, es decir, el sistema móvil. La simulación del robot se hace en la plataforma Matlab-Simulink y Simulink 3D, y en estas representaciones se pone a prueba el mecanismo, teniendo en cuenta la determinación de valores para las fuerzas de fricción con el suelo, la dependencia (producto de la aplicación de los resortes dentro de los pies) y la facilidad de evitar el deslizamiento. Se espera en futuras investigaciones implementar el sistema en tiempo real, que refleje el éxito obtenido en las simulaciones.

- **“EkInBot - A Humanoid Platform for Human Robot Interaction using Finger Gesture Identification”** (Rokbani, Zaini & Alimi, 2011)

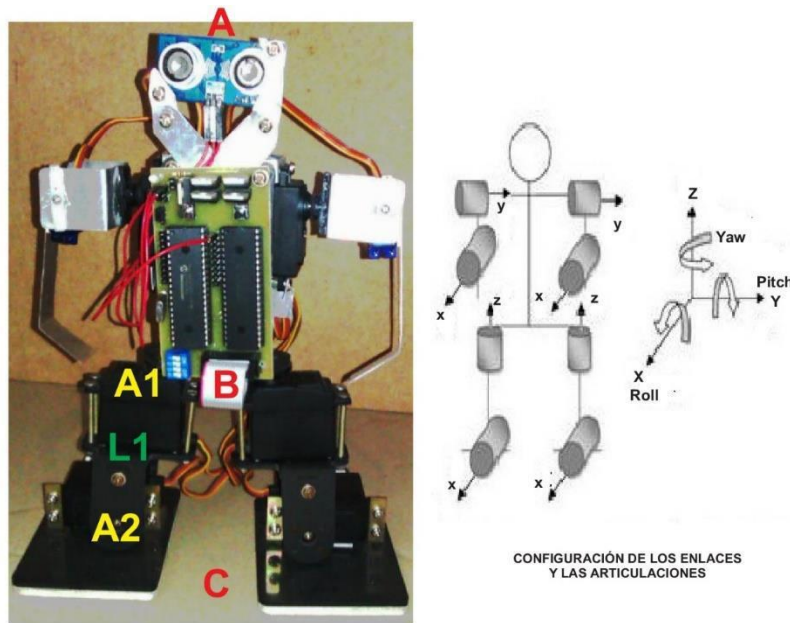


Figura 1. 15. Humanoide EkInBot. En “EkInBot- A Humanoid Platform for Human Robot Interaction using Finger Gesture Identification”, por R. Hari Krishnan & AL. Vallikannu, 2012. International Journal of Computer Applications. Vol. 46, p. 3.

EkInBot, un sistema de bajo costo, está definido por 7 fases sucesivas de caminata, en los cuales se extiende las FSS y FDS, pero se tiene en cuenta el patrón de movimiento de los dedos que simulan la marcha bípeda. El sistema está compuesto por 8 GDL, los cuales 4 se le asignan a las piernas, 2 GDL para cada una. La distribución de los GDL son: 2 en A1 y 2 en A2, todos ellos rotacionales (fig. 1. 17). El robot se caracteriza por ser un sistema liviano, compuesto principalmente de aluminio, y cuyos pies poseen unas almohadillas de plástico. No se denotan longitudes entre A y C ni masas en el documento, se establecen las piernas como enlaces denominados L1. Se implementan 4 servomotores de torque de 14 Kg/cm, los cuales se adecúan al diseño de la estructura, realizado por la estrategia de Interacción Robot – Humano (HRI), además. Se emplean dos acelerómetros, los cuales detectan el contacto del sistema formado por un guante, que ejecutará el patrón de movimiento del robot. Se emplean los parámetros Denavit – Hartenberg para definir el modelo cinemático del robot, determinando la posición de 3 centros de masa, ubicados en B y en un sector intermedio entre A1 y A2, así como la orientación de cada pie. La identificación se lleva a cabo teniendo en cuenta los gestos de los dedos. Para la prueba del robot, se hace la interconexión cableada

entre éste y el guante que maneja el patrón de marcha. Los resultados mostrados proporcionan una plataforma para el sistema, y puede abrir paso a las aplicaciones comunes de los BR como la detección de obstáculos.

- **“Identifying Ground-Robot Impedance to Improve Terrain Adaptability in Running Robots”** (Arévalo, Sanz – Merodio, Cestari & García, 2015).

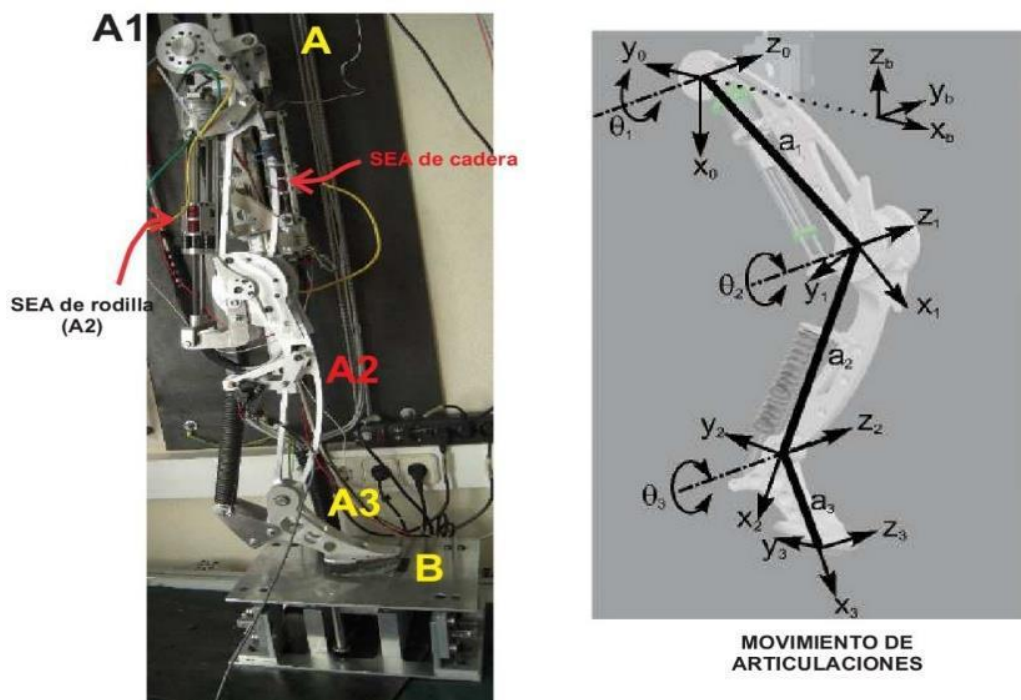


Figura 1.16. Prototipo de pierna HADE. En “Identifying Ground-Robot Impedance to Improve Terrain Adaptability in Running Robots”, por J. C. Arévalo, D. Sanz – Merodio, M. Cestari & E. García, 2015. International Journal of Advanced Robotics Systems. Vol. 2015, p. 5.

Es un mecanismo planar. La pierna marcha sobre el plano sagital y esta se fija a la pared por medio de un riel deslizante, por los que los movimientos horizontales son restringidos, pero es capaz de moverse verticalmente. Se tiene en cuenta la elaboración del prototipo a partir de las proporciones de un caballo árabe. El robot tiene 3 GDL, distribuidos en A1 (cadera), A2 (rodilla) y A3 (espolón) (fig. 1.18). Todas las articulaciones del mecanismo son rotacionales. El sistema es accionado por dos actuadores elásticos en serie SEA (series elastic actuators), cada uno ubicado en A1 y A2, mientras que en A3 se acciona su articulación pasivamente

por medio de un resorte de extensión con una constante de rigidez de 3.113 N/m; además, tiene 2 encoder unidos a un resorte, que sirven como sensores de fuerza de 1.2 N por conteo, 1 encoder para medir la posición con una resolución de 50.8 μm por conteo y el tobillo tiene un encoder lineal con resolución de 224 μm por conteo, equivalente a 0.69 N por conteo.

El modelo cinemático se obtiene por parámetros Denavit – Hartenberg. El sistema diseñado se desarrolla a partir de la identificación del sistema impulsado por eventos, basado en el método de mínimos cuadrados recursivos (RLS), y tiene en cuenta los parámetros del suelo y la variación de algunas variables físicas de la pierna cuando ésta contacte con la superficie. El desarrollo de un esquema de control PID se implementa en dos controladores para A1 y A2, usando un PXI-1024Q de National Instruments. Se prueba la pierna en dos superficies diferentes, ordenando que ésta se mueva hacia arriba hasta que no esté en contacto con el suelo; en esta posición, se programa un estado de reposo que dura 0.5 s y, posteriormente, se programa la fase de contacto con la superficie y otro estado de reposo en esta fase por otros 0.5 s. Este proceso se repite 2 veces por cada experimentación. El método de identificación propuesto genera una convergencia y seguimiento aceptables para el mecanismo que se puede desempeñar en un terreno con diferentes características.

- **“The poppy Humanoid Robot: Leg Design for Biped Locomotion”** (Lapeyre, Rouanet & Oudeyer, 2013).

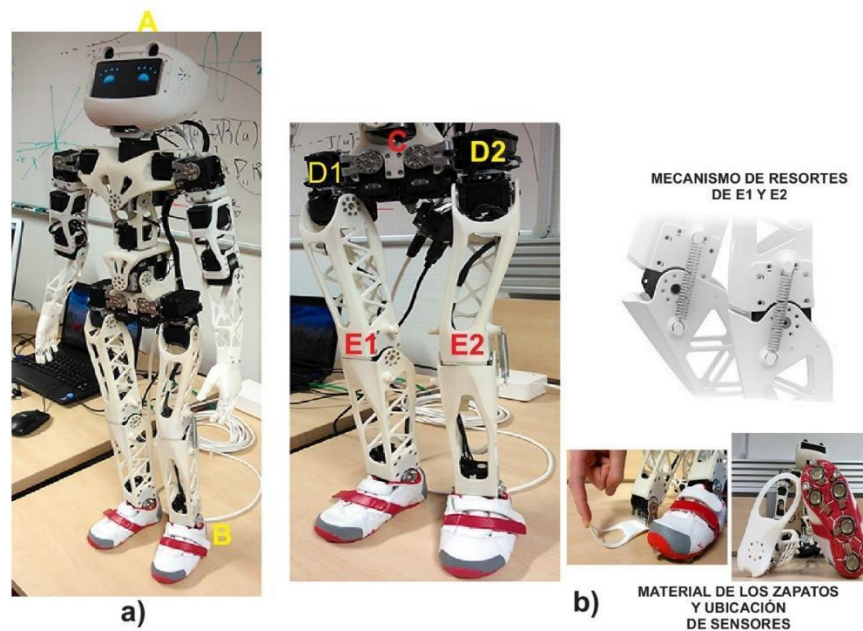


Figura 1. 17. Estructura física del Robot Humanoide Poppy y detalle de las piernas y el mecanismo de rodilla. “The Poppy Humanoid Robot: Leg Design for Biped Locomotion”, por M. Lapeyre, P. Rouanet & P. Y. Oudeyer, 2013. International Journal of Advanced Robotics Systems. Vol. 2013, p. 3.

El Robot Humanoide Poppy tiene un tamaño en posición inicial entre A y B de 84 cm (fig.19. a) y su peso total es de 3,5 kg, sus piezas están hechas en poliamida (un tipo de polímero) las cuales se elaboraron en una impresora 3D. El movimiento del sistema se lleva a cabo en el plano sagital. Poppy cuenta con 7 GDL destinados a la marcha así: 3 en los punto C, D1 y D2, de los cuales 2 son prismáticos que corresponde a la unión con las piernas y 1 de tipo rotacional unido al tronco; 2 en E1 y E2 y 2 en F1 y F2 que son rotacionales (fig. 1. 19). Para el accionamiento de cada articulación se utilizan servomotores Robotis Dynamixel MX-28 y AX-12, con una masa de 1.8 kg. Para calcular la fuerza del impacto del pie con el suelo, se implementan 8 sensores de fuerza debajo de cada pie (fig. 1. 19. b).

Se hace un análisis de cinemática directa basado en la obtención de los parámetros Denavit – Hartenberg. Se realiza la identificación a partir de una representación no lineal por medio de un modelo de péndulo invertido. Para el movimiento de Poppy se lleva a cabo la programación en el software Python, utilizando la librería Pypot para controlar robots basados en motores Robotics. Al momento de su implementación se establece un patrón de marcha en lazo abierto mientras el robot es guiado a través de la interacción física de un ser

humano. La función del usuario es proporcionar equilibrio y control del robot. Al final de la experimentación se demostró que con poca ayuda física del usuario, Poppy puede producir una marcha muy similar a la humana, gracias a los mecanismos implementados en sus articulaciones, compuestos esencialmente de resortes, facilitando el amortiguamiento y la elongación de las piernas en las fases de FSS y FDS.

- “Use of Support Vector Regression in Stable Trajectory Generation for Walking Humanoid Robots” (Kin, Seo, W. de Silva & Park, 2009)

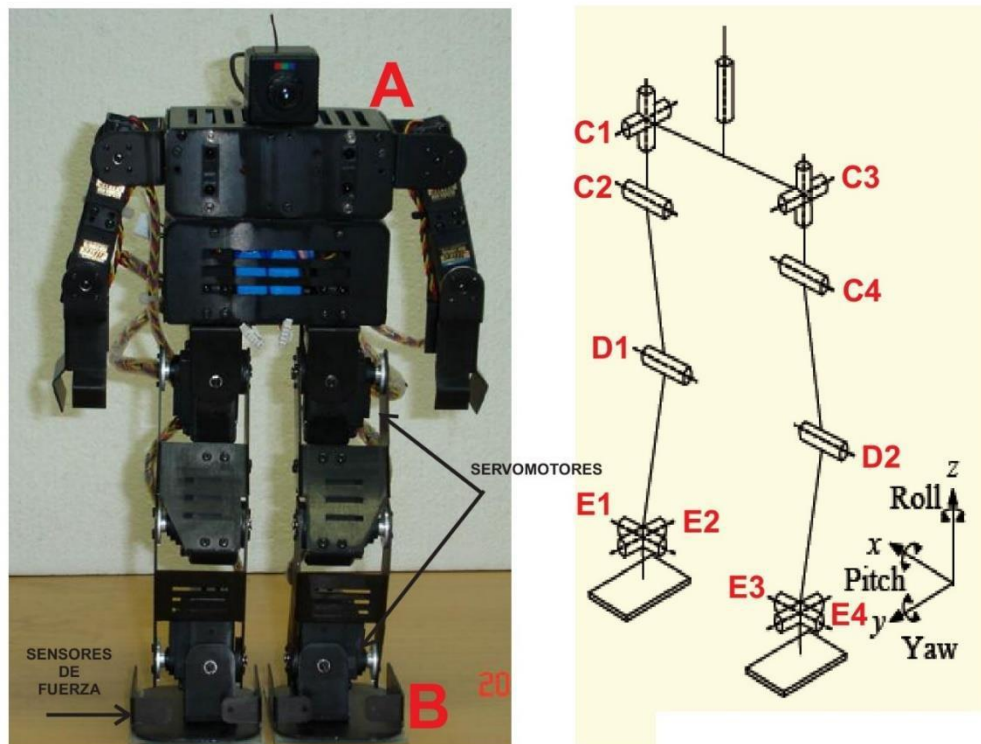


Figura 1. 18. Estructura física del Robot Humanoide y ubicación de sus GDL. En “Use of Support Vector Regression in Stable Trajectory Generation for Walking Humanoid Robots”, por D. W. Kim, S. J. Seo, C. W. de Silva, G.T. Park, 2013. International Journal of Advanced Robotics Systems. Vol. 2009, p. 566.

El robot bípedo tiene una altura desde A y B en posición inicial de 30 cm, y su masa es de 2,7 kg incluyendo baterías y la cámara CCD en su cuerpo (fig. 1. 20) y tiene 19 GDL, de los cuales 10 le permite ejecutar la marcha y se distribuyen así: 5 en cada pierna, 2 de ellos están

ubicados en los puntos C1 y C2 (prismático y rotacional, respectivamente), 1 en D1 rotacional y 2 en E1 y E2 (prismático y rotacional, respectivamente). A partir de los ángulos de unión en las articulaciones se ejecuta un patrón de marcha cíclico a través de la FSS y la FDS. Para activar las articulaciones del robot se utilizan servomotores RC HSR-5995TG con un torque de 30 kg/cm a 7.4 V y usa una tarjeta de control AAA Ni-poly que se alimenta con una fuente de 7.4 V, 1700 mA; para determinar la estabilidad del robot se utilizan sensores de fuerza FlexiForce A201 puestos en las esquinas de cada pie.

Se hace un análisis de parámetros Denavit – Hartenberg. El modelo dinámico del bípedo se obtiene por medio de la formulación Euler-Lagrange, para establecer los parámetros de caminata estable por medio de Máquinas de Soporte Vectorial (SVR), a las que también se le aplica las funciones de Kernel; su identificación se realizó mediante el modelo de regresión lineal, teniendo en cuenta los registros de los valores obtenidos a través de las funciones de Kernel. Para modelar la trayectoria del bípedo a partir del ZMP se determina los parámetros de control según el método SVR. Metodológicamente el robot realiza su marcha por movimientos naturales, como referencia para la caminata a partir de la implementación del SVR y la función RBF. Se obtuvo buenos resultados de estabilidad del sistema con el método SVR, no obstante el robot puede volverse inestable por perturbaciones externas inesperadas.

- **“System Identification of a Humanoid Robot Power Transmission System”**
(Shahrokhshahi, Yousefi-Koma, Khalili & Mahdavian, 2014)

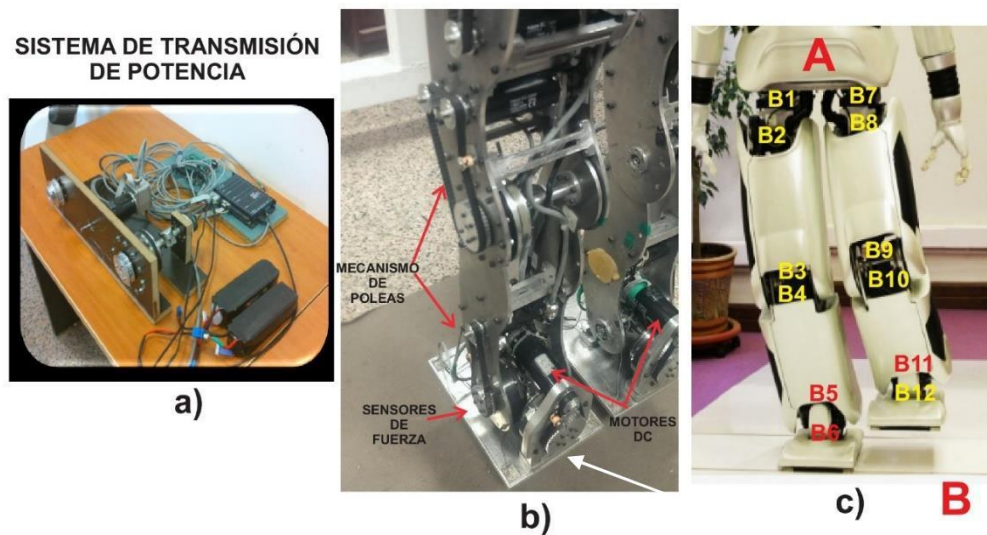


Figura 1. 19. Mecanismo de caminata del robot humanoide SURENA III. En “System Identification of a Humanoid Robot Power Transmission System”, por A. Shahrokhshahi, A.Yousefi-Koma, M. Khalili &M. Mahdavian, 2014. International Journal of Advanced Robotics Systems. Vol. 2014, p. 5.

El robot humanoide SURENA III tiene una altura entre A y B de 100 cm aprox. (fig. 1. 21. c), y su masa total es de 98 kg. De los 31 GDL que tiene el sistema, 12 están destinados para la marcha (6 en cada pierna) y están distribuidos desde B1 hasta B6 y desde B7 hasta B12 (B1, B3 y B5 son rotacionales, y B2, B4 y B6 son prismáticos)⁵. El movimiento del robot se lleva a cabo en los planos sagital y frontal; con el fin de mantener la rigidez de los enlaces y el peso del robot lo más bajo posible, se utilizan placas de aluminio para las piernas; las articulaciones de cada una de éstas son accionadas por motores Maxon EC de 453 W, un mecanismo de poleas y un módulo de accionamiento armónico para la transmisión de potencia (ver figuras 1. 21. a, 1. 21. b). Para accionar los motores, se utiliza interruptores de contacto puestos en la planta de los pies, y para registrar los valores de fuerza al momento del contacto pierna-superficie, se implementaron sensores F/T.

Para analizar el movimiento del robot, el modelo dinámico para la transmisión de potencia del bípedo se calcula empleando funciones de Lagrange y Kane⁶. Se hace un método de

⁵ SURENA III, an autonomous human-size humanoid robot capable of performing various maneuvers. Generalkonsulat der Islamischen Repunlik Iran München. Recuperado de: http://de.munich.mfa.ir/uploads/en_news.pdf

⁶ Surena (2015). Specification. Recuperado de: http://surenahumanoid.com/?page_id=22041

identificación de sistema lineal: los parámetros se obtienen a partir de las curvas de los resultados experimentales del robot bípedo a una velocidad de 3,4 km/h. Un análisis de control en posición de cascada es determinado para corregir las vibraciones que pueden existir debido al accionamiento de los motores. Gracias al sistema de transmisión de potencia de SURENA III se estableció que el robot es apto para caminar en planos inclinados y subir escaleras, además la identificación del sistema de propulsión generó un modelo dinámico más preciso para su ciclo de marcha.

- **“Design and Development of a Biped Humanoid Robot to Generate Dynamic Walking Pattern”** (Shivaraj, Cyril Prasanna Raj & Lasitha, 2012)

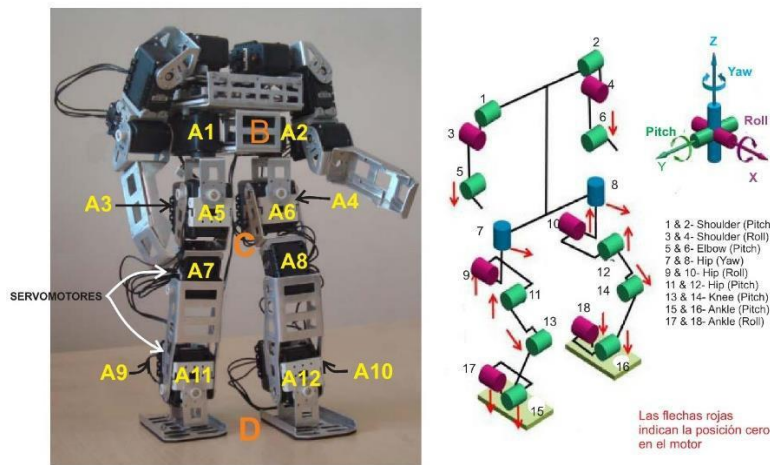


Figura 1. 20. Estructura física y distribución de los GDL del robot humanoide. En “Design and Development of a Biped Humanoid Robot to Generate Dynamic Walking Pattern”, por D. Shivaraj, P. Cyril Prasanna Raj & M. Lasitha, 2012. International Journal of Advanced Robotics Systems. Vol. 11, p. 72.

El robot humanoide de este trabajo tiene una altura en posición inicial de B hasta D de 26.9 cm (14.1 cm desde B hasta C, y de C a D de 12.8 cm) y sus piezas se diseñan en SolidWorks. El robot camina con una marcha dinámica estable en los planos frontal y sagital. Tiene 18 GDL, de los cuales 12 están destinados para la marcha, es decir, 6 en cada pierna (distribuidos en orden impar de A1 hasta A11 y en orden par desde A2 hasta A12) (fig. 1. 22). A1 y A2 son articulaciones prismáticas y las correspondientes desde A3 hasta A12 son rotacionales;

para accionar estas articulaciones se utilizan servomotores con un torque de 1.74 Nm, de 0 - 12 V y 1.5 A, tienen una velocidad de comunicación de 1 Mbps y se emplea una tarjeta FT232L para activarlos. Se aplica la Unidad de Medición Inercial (IMU) para medir la velocidad del robot, la orientación y las fuerzas gravitacionales; un acelerómetro detecta la velocidad actual en el espacio tridimensional y un giroscopio determina el cambio de movimiento del robot y su desplazamiento en los ejes. Para obtener una marcha estable del robot, se estima una cinemática inversa. Se ha utilizado la plataforma MATLAB para construir un protocolo USB para la comunicación en tiempo real entre el computador y el robot humanoide. De este estudio se observó que el robot ha funcionado con éxito gracias al código realizado en MATLAB.

- **“Development and Physical Control Research on Prototype Artificial Leg”** (Li, Zhang & Xie, 2016)

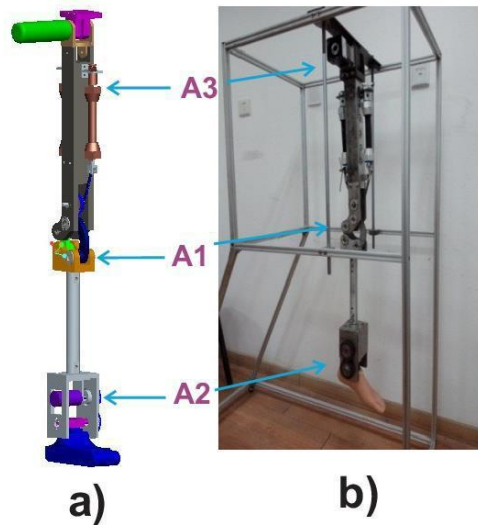


Figura 1. 21. Mecanismo protésico de pierna con la ubicación de sus articulaciones: a) Estructura mecánica virtual de pierna artificial & b) Prototipo. En “Development and Physical Control Research on Prototype Artificial Leg”, por F. Li, F. Zhang & H. Xie, 2016. International Journal of Bionic Automatization. Vol. 20, p. 90.

En este trabajo se estudia el mecanismo de prótesis inteligente que propone un nuevo patrón de funcionamiento para un robot bípedo con piernas heterogéneas (BRHL, por sus siglas en inglés). El movimiento de la pierna se analiza en el plano sagital. Las piezas del mecanismo

se diseñan en MSC – ADAMS (fig. 1. 23. a). Inicialmente, del mecanismo se obtienen 3 GDL (A3, A1 y A2, todos rotacionales (fig. 1. 23. b)), sin embargo, se combinan las características de la pierna humana con la suposición del caminar recto humano para el desarrollo de un mecanismo de 1 GDL rotacional (acople de A2 con A3), y en A1, se trabaja un mecanismo multi-axial de cadena cerrada de 4 barras. Se instalan actuadores neumáticos musculares (PMA) para la rodilla (A1); para una eficiencia y una mejor similitud con la dinámica de la pierna humana se emplean servomotores de corriente alterna SGMJV-04ADE6E para A2 y A3, un servomotor regular SGD V-R90A01B002000 con potencia de 400 W y torque de 1.27 Nm y un reductor armónico IB060L2-32-P2-S2 que maneja un torque de 50 Nm para A3; y para A2 se utiliza el servomotor SGD V-2R8A01B con potencia de 100 W y torque de 0.31 Nm y el reductor armónico IB060L2-12-P2-S2 con un torque de 40 Nm. Para A3 y A2, los torques requeridos son de 45.85 Nm y 8.6 Nm, respectivamente.

El modelo cinemático de la pierna se obtiene por medio de parámetros Denavit – Hartenberg. Se ejecuta una identificación no lineal, basada en el registro de entradas – salidas en función del tiempo; en esta identificación se tiene en cuenta el modelo de caja negra, aplicándose ésta asumiendo que no se tiene una información completa del registro mencionado anteriormente. Se desarrolla la estrategia de Control PID industrialmente maduro y su implementación se hace en un controlador de movimientos programable multi-axiales (PMAC), esencialmente, para el control de los PMA. La experimentación del mecanismo se realiza a partir del diseño de una plataforma de control para la pierna. Se hace seguimiento del funcionamiento del controlador PID sobre las articulaciones durante la marcha. El mecanismo se puede tener en cuenta debido a que su diseño responde de una forma similar a la de una pierna humana. El error, en cuanto al cálculo de los valores obtenidos por la acción de las articulaciones, es menor, y se debe esencialmente a la inestabilidad de los músculos neumáticos.

- “Honda humanoid robots development” (Hirose & Ogawa, 2007)

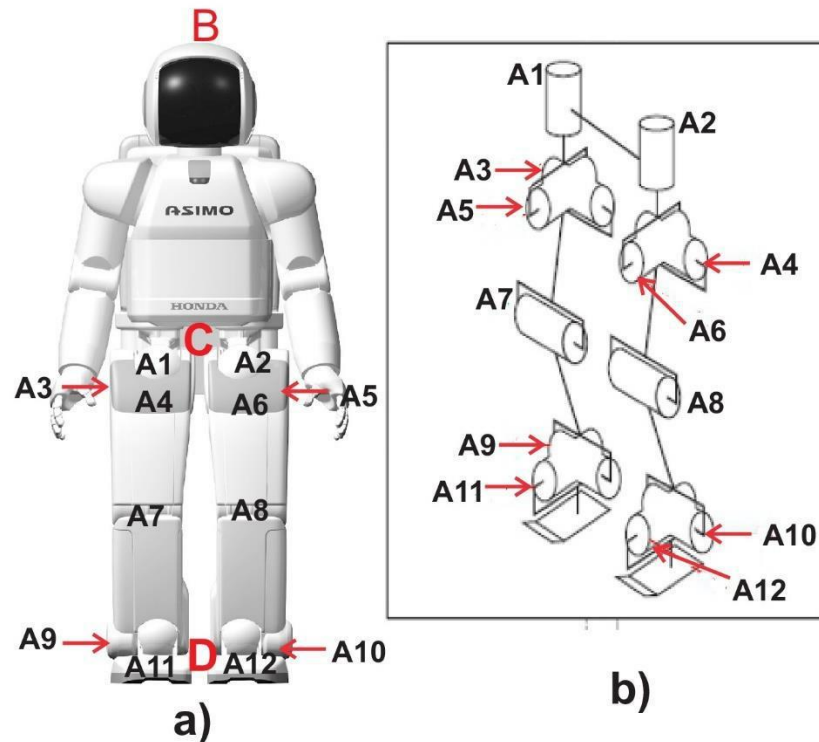


Figura 1. 22. Estructura física y distribución de los GDL del robot humanoide ASIMO. En “Honda humanoid robots development”, por M. Hirose& k. Ogawa, 2007. Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol.365, No. 1850, p. 16⁷.

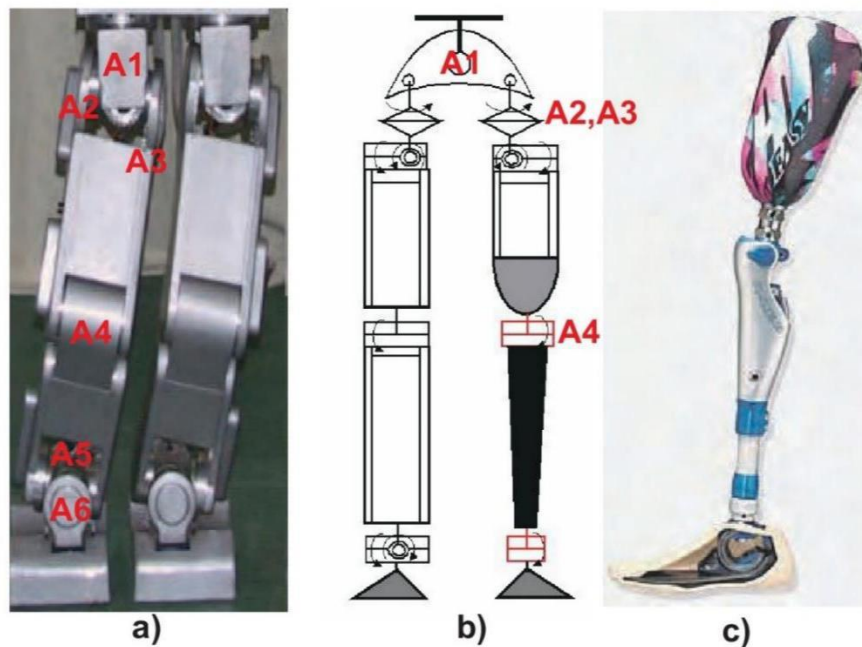
El robot humanoide ASIMO, tiene una altura en posición inicial desde B hasta D de 130 cm y de C hasta D de 61 cm (fig. 1. 24. a); su masa total es de 54 kg; sus piezas están elaboradas en aleación de magnesio y resina de plástico, este material es liviano, por lo tanto ayuda a reducir la fuerza de impacto de los pies con el suelo al momento de ejecutar su marcha. A partir de los ángulos de unión en las articulaciones se ejecuta un patrón de marcha en los planos frontal y sagital a través de la FSS y la FDS. Este humanoide tiene 34 GDL y sólo 12 están destinados para su ciclo de marcha, distribuidos en orden impar desde A1 hasta A11 y en orden par desde A2 hasta A12. A1 y A2 son articulaciones prismáticas y las demás son rotacionales (fig. 1. 24. b). Los servomotores DC y un reductor de velocidad realizan las

⁷ Honda (2007) Technical Information. Recuperado de: <http://asimo.honda.com/downloads/pdf/asimo-technical-information.pdf>

funciones de los músculos. El robot mantiene el equilibrio gracias a los valores que detectan el giroscopio y el acelerómetro puestos en su torso, y los sensores de posición de 6 ejes ubicados en sus pies.

El análisis cinemático del bípedo se describe utilizando la notación Denavit- Hartenberg. La dinámica del modelo se presenta utilizando la formulación de Euler-Lagrange⁸. Se hace un análisis de control PD y se implementa en un dispositivo con compensación por gravedad. Para determinar la ubicación del centro de gravedad de cada pierna, se utilizó el del cuerpo humano como referencia, y para calcular el torque ideal para las articulaciones durante la marcha, se midieron los vectores en las articulaciones durante la caminata humana y durante la reacción del suelo. El ciclo de caminata normal de ASIMO es de 2,7 km/h, logrando así un funcionamiento estable durante la marcha evitando deslizamientos.

- **“Virtual Prototyping Based Collaborative Simulation of Biped Robot with Heterogeneous Legs”** (Wang, Xie, Xu & Wang, 2007)



⁸ Rameez & Ali Khan (2015). Modeling and Kinematic Analysis of the Biped Robot. Recuperado de: <file:///C:/Users/Samsung/Downloads/277%20KK%20New.pdf.pdf>

Figura 1. 23. Robot bípedo con piernas heterogéneas; a) Robot bípedo con piernas homogéneas, b) Modelo BRHL & C) Representación modelo en prótesis de pierna humana. En “Virtual Prototyping Based Collaborative Simulation of Biped Robot with Heterogeneous Legs”, por F. Wang, H. Xie, X. Xu & Y. Zhang, 2007. Paper. Journal of Robotics, p. 2.

Se realiza el diseño de un robot bípedo con piernas heterogéneas (BRHL). La marcha del mecanismo se ejecuta en el plano sagital. El sistema cuenta con 6 GDL (A1, A2 y A3 para la cadera, A4 para la rodilla y A5 y A6 para el tobillo (fig. 1. 25. a)), no obstante, la pierna biónica (BL) tiene 4 GDL: 3 en la cadera, 1 en la rodilla y 0 en el tobillo (fig. 1. 25. b); todas estas articulaciones son rotacionales. Las articulaciones se accionan por electromotores y los amortiguadores magnetoreológicos (MR) ajustan la rotación de cada articulación; se utiliza un sensor de momento de fuerza de 6 ejes que detectan los valores de la fuerza de reacción del suelo.

El cálculo de los parámetros Denavit – Hartenberg determina el modelo cinemático de la pierna. La dinámica se establece por medio del análisis de Lagrange. Se emplea un método de identificación paramétrica, a la vez, con un modelo virtual del amortiguador MR. Además, se aplica un modelo de control de aprendizaje iterativo para sistemas BRHL, en esencial, que maneja de forma parcial dicho amortiguador. Al desarrollar los modelos cinemático, dinámico y de control se simula el sistema en Matlab del prototipo de la pierna, en conjunto con Pro/E y Adams (para el diseño del mecanismo) para ejecutar dichas representaciones. La simulación demuestra que los modelos cinemático, dinámico y de control para la pierna, funcionan en mecanismos BRHL y que además, por tratarse de un sistema virtual y convergen las representaciones matemáticas del movimiento, significa una precisión alta en la marcha de este sistema.

- **“Foot Placement Modification for a Biped Humanoid Robot with Narrow Feet”**
(Hashimoto, Hattori, Otani, Lim & Takanishi, 2014)

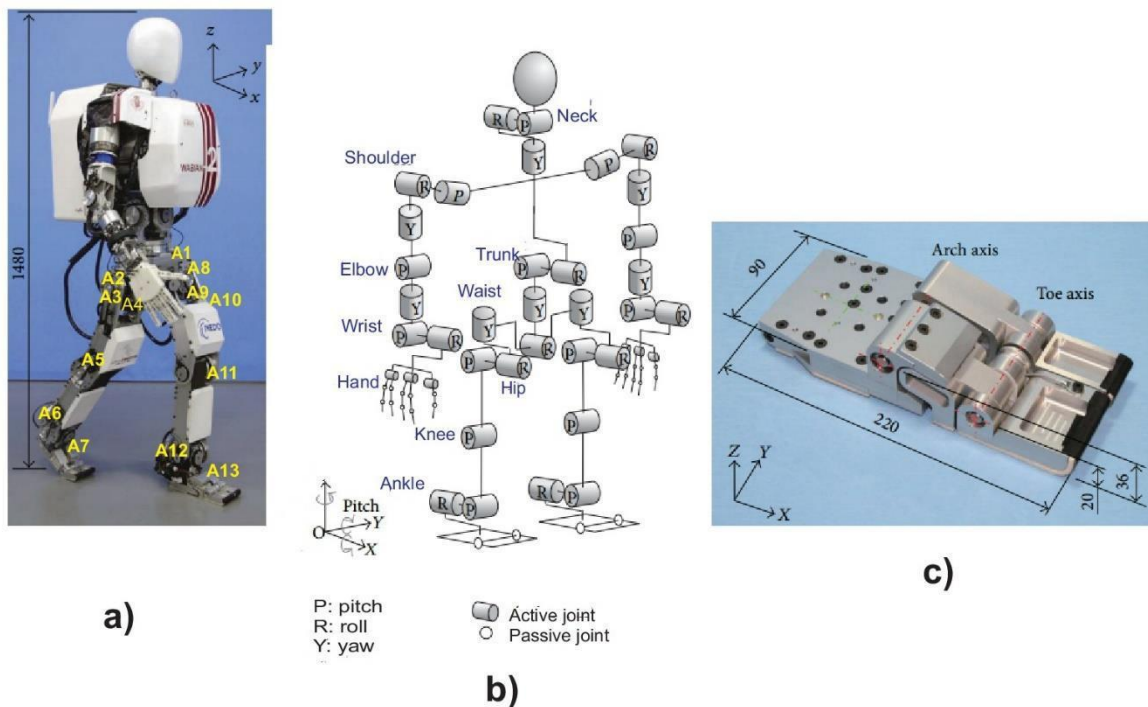


Figura 1. 24. Características del Robot Humanoide WABIAN-2R; a) mecanismo físico, b) esquema de los GDL de WABIAN y c) características de articulación. En “Foot Placement Modification for a Biped Humanoid Robot with Narrow Feet”, por K. Hashimoto, K. Hattori, T. Otani, H. O. Lim & A. Takashami, 2014. Paper. Journal of Robotics, p. 2. Scientific World Journal.

El robot humanoide WABIAN-2R se caracteriza por ser un sistema liviano, compuesto principalmente de aluminio, y sus pies poseen unas almohadillas de plástico. El análisis de la marcha del robot se hace en los planos sagital y frontal, con programación del patrón de las FSS y FDS. La FSS se configura a partir de los módulos de control de obediencia, cambio y retorno del movimiento de la pierna que está en balanceo. El sistema está compuesto por 41 GDL, y de estos se obtienen 13 GDL para ejecutar la marcha: 7 GDL para A1, A2, A3, A4, A8, A9 y A10 (5 rotacionales y 2 prismáticos), 2 para A5 y A11 (rotacionales) y 4 para A6, A7, A12 y A13 (2 rotacionales y 2 prismáticos) (figs. 1. 26. a y fig. 1. 26. b). Se utilizan sensores de fuerza puestos en cada pie para detectar la magnitud generada por éste al momento del contacto con el suelo.

Se establece el modelo cinemático a partir de la aplicación de las cinemáticas directa e inversa. Los datos de los sensores de fuerza se actualizan cada 10 ms, y se halla un polinomio de quinto orden para modificar los ángulos de los pies. Para este sistema se aplica un

algoritmo de control que consta de 5 patrones: 1. Modificación de la ubicación de un pie según su ángulo, 2. Control virtual de obediencia para reducir el impacto del pie, 3. Control del movimiento de retorno del pie a partir de un patrón determinado, 4. Modificación de la trayectoria de la cintura y 5. Control del movimiento de retorno del pie oscilante a lo largo del eje lateral de marcha. Se llevaron a cabo experimentos de caminata hacia adelante con una longitud de paso de 200 mm/s y un ciclo de marcha de 1 seg/paso; el robot no puede caminar con pies más anchos de 30 cm. El sistema de control propuesto no puede evitar la caída lateral del robot, el objetivo es desarrollar controles de estabilidad más sólidos para solucionar este problema.

- “Actuated Dynamic Walking in a Seven-Link Biped Robot” (Braun, Mitchell & Goldfarb, 2012)

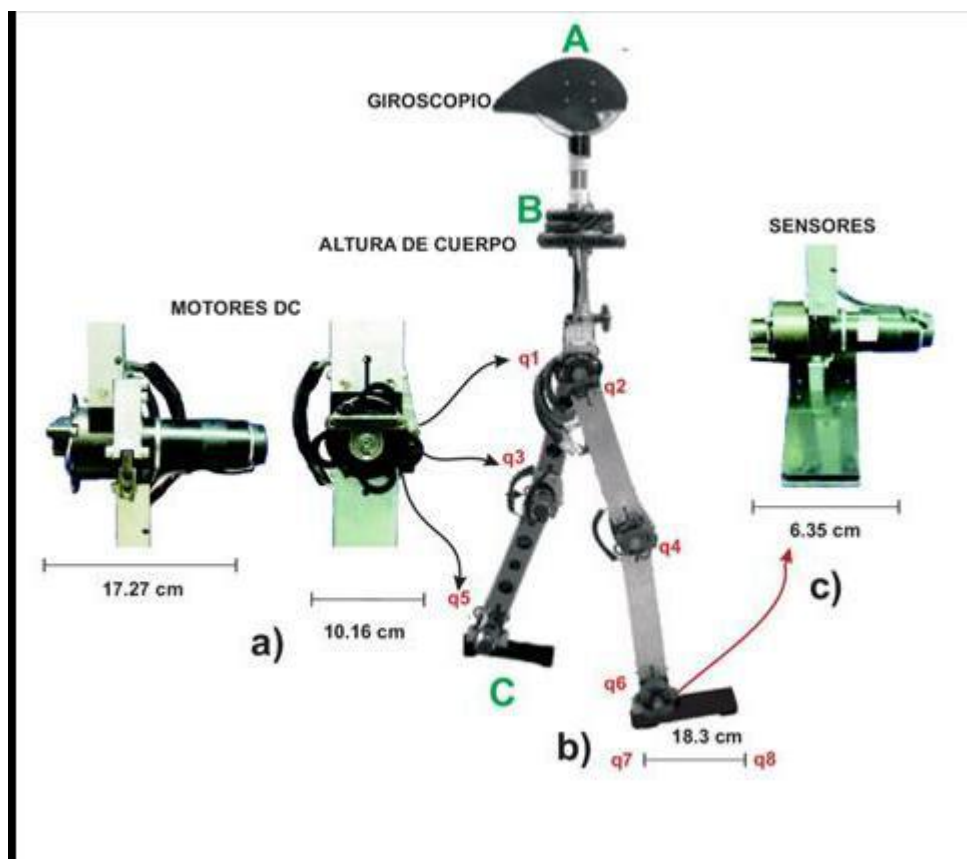


Figura 1. 25. Parámetros físicos del Robot Bípodo Hum; a) actuadores para las articulaciones, b) características de articulación y c) sePRInsosres de fuerza. En “Actuated Dynamic Walking in a Seven-Link

Biped Robot”, por D. J. Braun, J. E. Mitchell & M. Goldfarb, 2012 . [IEEE/ASME Transactions on Mechatronics](#), p. 5.

El robot bípedo trabajado en este artículo tiene una altura en posición inicial desde A hasta C de 120 cm y su masa total es de 14.3 kg; su altura y su masa para el ciclo de marcha se distribuye de la siguiente manera, respectivamente: desde B hasta q1 39 cm, de q1 a q3 29.5 cm, de q3 a q5 29.8 cm y de q7 a q8 18.3 cm; desde B hasta q1 6.12 kg, de q1 a q3 0.67 kg, de q3 a q5 0.55 kg y de q7 a q8 0.36 kg (fig. 1. 20. b). Los pies del BR están elaborados en plástico y la planta de éstos se complementa con almohadillas de caucho de silicona con altas propiedades de fricción, las cuales tienen buena durabilidad y capacidad de absorción de impactos inapropiados. El bípedo camina en una trayectoria circular de 1.6 m de radio, gracias a una correa mecánica unida a la articulación del cuerpo (fig. 1. 27. a); un mecanismo de bolas recirculantes entre la correa mecánica y el robot, impide que cualquier momento significativo se transfiera a la cuerda del robot para evitar caídas. Este sistema tiene 6 GDL orientados a la marcha distribuidos de la siguiente forma: dos en q1 y q2 que son prismáticos, y cuatro en q3, q4, q5 y q6 rotacionales (fig. 1. 27. b). Cada articulación consta de un motor DC de 150 W Maxon RE40, (fig. 1. 27. a) el cual se une con un reductor planetario de bajo consumo Maxon GP42C cada pie está equipado con cuatro resistencias de detección de fuerza Interlink 402 FSR, (fig. 1. 27. c) estos sensores están situados entre la parte inferior del pie y una placa delgada hecha de acero de resorte. Cuando los pies tocan el suelo la almohadilla de goma circular imparte la fuerza resultante a los sensores del pie, la señal correspondiente sirve para identificar la configuración de contacto entre el pie y el suelo. Las coordenadas de rotación, el contacto de los pies con el suelo y la extensión completa de la rodilla, se proporciona mediante una combinación de 6 codificadores de articulación Maxon, ENC-MR-L-1024 (PT) y un giroscopio MEMS localizado en el punto I1 detecta la velocidad actual del robot.

Se presenta un controlador "no cinemático", es decir, que no prescribe articulaciones de trayectoria, no impone restricciones cinemáticas entre las articulaciones o requiere simetría de movimiento y no requiere un seguimiento preciso de la trayectoria de las articulaciones. Con el fin de evitar la supresión de la dinámica inercial y gravitacional del bípedo, el robot es diseñado con articulaciones de baja impedancia. Se hace un método de identificación por

mínimos cuadrados. Se usa un controlador PD de baja ganancia que permite validar tanto la implementación de la unidad de control de los actuadores como los parámetros del modelo. La respuesta del sistema en este caso no es totalmente prescrita por la fuerza de control, sino influenciada por la dinámica natural del robot. Se tienen en cuenta los primeros 14.03 s de marcha. Los resultados experimentales apoyan las hipótesis hechas previamente que el regulador proporciona la eficacia mejorada de la locomoción del bípedo y una camina natural con respecto a las aproximaciones del control que requieren el seguimiento exacto de la trayectoria.

El marco teórico es referente para el desarrollo del posterior análisis conceptual, ya que se han de tener en cuenta algunos criterios como las mediciones antropométricas que son soporte para definir el diseño final que permitirá el cambio de la longitud de los eslabones. Además, el marco referencial sirve para crear diseños que permiten conocer la ubicación de componentes esenciales como los GDL del robot, los componentes electrónicos más utilizados, el ciclo de marcha y el plano de movimiento, aspectos a considerar dentro del diseño. Es importante mencionar el poco o escaso estudio antropométrico en los anteriores antecedentes, ya que confirma la existencia del problema a tratar en el presente documento: la carencia de un mecanismo que sea capaz de cambiar sus percentiles.

CAPÍTULO 2. DISEÑO CONCEPTUAL

Las estrategias utilizadas para la selección del modelo final de diseño del prototipo fueron las siguientes: la evaluación de sistemas mecánicos a partir de matrices DOFA y de ponderación de datos particulares, la obtención de los modelos cinemático y dinámico mediante un método cuantitativo y un método cuasi-experimental de selección de los componentes electrónicos adecuados para el funcionamiento del robot bípedo.

Antes de seleccionar el modelo final del robot bípedo, es importante hacer una indagación antropométrica para definir las dimensiones en las que se va a llevar a cabo el cambio de eslabones entre los percentiles 5 y 95, por lo que se toma como referencia un estudio de la población británica comprendida en edades entre los 19 y los 65 años (Pheasant, 2003). En la tabla 2.1., se muestran los datos antropométricos de las dimensiones relevantes en este proyecto como el ancho de la cadera, la longitud de la cadera a la rodilla y la longitud de la rodilla al suelo, dentro de otras consideraciones de importancia.

2.1. DIMENSIONES ANTROPOMÉTRICAS ESTIMADAS PARA ADULTOS ENTRE LOS 19 Y LOS 65 AÑOS⁹

Tabla 2. 1. Dimensiones antropométricas de la población británica adulta entre los 19 y 65 años.

Dimensión	Hombre				Mujer			
	P5%	P50%	P95%	SD (Desviación Estándar)	P5%	P50%	P95%	SD (Desviación Estándar)
Estatura	1625	1740	1855	70	1505	1610	1710	62
Altura de cadera	840	920	1000	50	740	810	885	43
Longitud cadera-rodilla	540	595	645	31	520	570	620	30

⁹ Pheasant. (2003). Dimensiones antropométricas para adultos británicos entre 19 y 65 años (Tabla 2. 3). Recuperado de Bodyspace. Anthropometry, Ergonomics and the Design of Work. Second Edition.

Longitud cadera-poplítea	440	495	550	32	435	480	530	30
Altura de rodilla	490	545	595	32	455	500	540	27
Ancho de cadera	310	360	405	29	310	370	435	38

Apartado de algunas de las dimensiones, en especial, de las que se trabajarán en el presente documento, sobre las estimaciones antropométricas para adultos británicos entre 19 y 65 años. Las dimensiones se representan en milímetros (mm). Las dimensiones se representan en milímetros (mm).

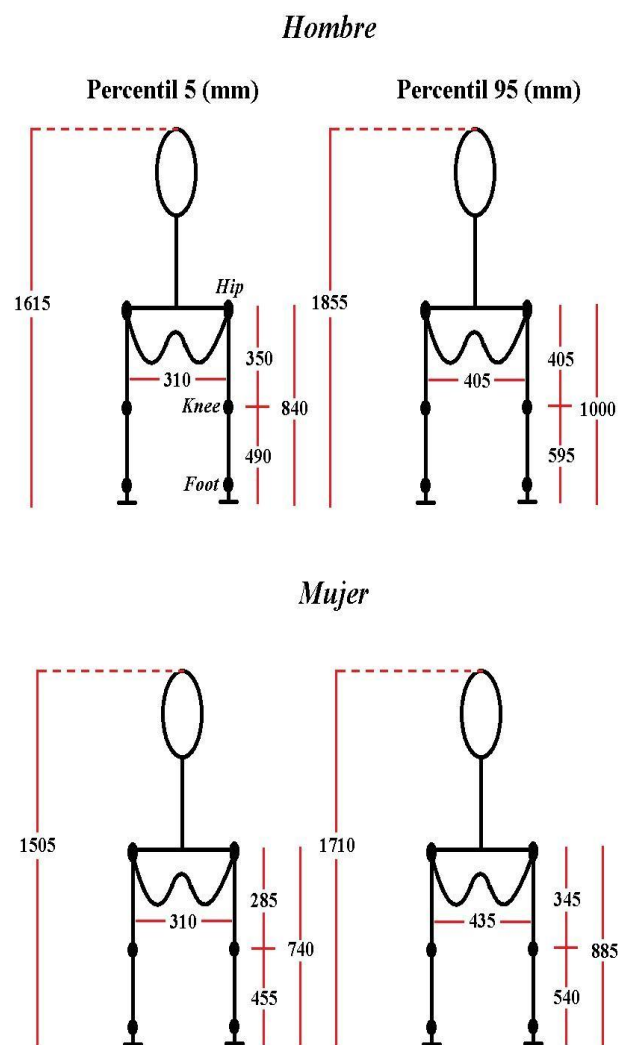


Figura. 2. 1. Percentil 5 y 95 del hombre y de la mujer

En la tabla 2. 2. se muestran los máximos y mínimos de los percentiles 5 y 95, tanto del hombre como de la mujer, como se muestra en la figura 2. 2; sobre estos se trabajarán las dimensiones de los eslabones del robot:

Tabla 2. 2. Valores máximos y mínimos de los percentiles 5 y 95 (todos los valores se expresan en milímetros).

Dimensión	Máximo Hombre	Mínimo Hombre	Diferencia (H)	Máximo Mujer	Mínimo Mujer	Diferencia (M)
Ancho cadera	405	310	95	435	310	125
Cadera-rodilla	405	350	55	345	285	60
Rodilla-pie	595	490	105	540	455	95

Luego de establecer los rangos de los percentiles de cada eslabón se procede a determinar una ecuación característica de la variación de un valor de desplazamiento a otro, es decir, del P₅ al P₉₅, o al P₅₀, cubriendo todas las posibilidades de elongación o compresión de un eslabón. Para ello se utiliza el método de interpolación, que es una técnica para determinar las funciones que regirán el movimiento de los eslabones y determinando un valor de longitud d para un percentil determinado. Por ejemplo, el percentil 5 de la altura de la cadera en el hombre es de 840 (mm), mientras el percentil 95 de la misma distancia es de 1000 (mm); con estos valores es suficiente determinar la función que permitirá la elaboración del modelo para el eslabón que maneja esta altura, y se ejecuta el siguiente proceso en MATLAB® (en los anexos se recopila el código de ejecución de esta técnica):

En la siguiente tabla se evidencia la región en la que se va a trabajar y se determina la función obtenida por interpolación para garantizar el cambio de los percentiles.

Tabla 2. 3. Ecuaciones de acuerdo a cada módulo de los eslabones

Región a trabajar	Función obtenida por interpolación en hombres
Longitud cadera – rodilla (1)	$y = 0.00001*x^2 + 1.2222*x + 433.8889*e^2$
Altura rodilla (2)	$y = 0.0012*x^2 + 1.3*x + 4.8*e^2$
Ancho cadera (3)	$y = 0.0012*x^2 + 1.2*x + 3*e^2$

Ahora se realizan las gráficas correspondientes a cada región como se muestra a continuación:

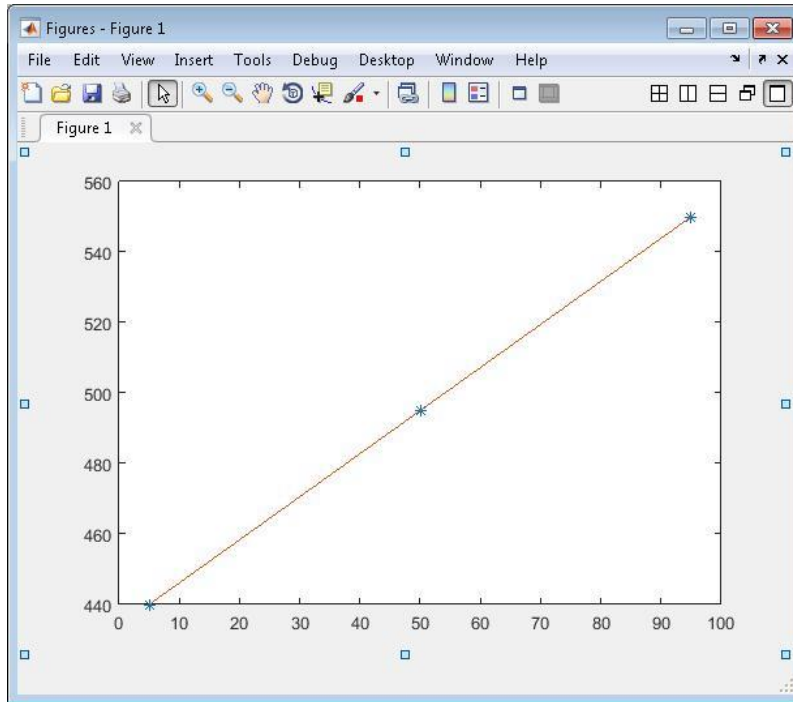


Figura 2.2. Gráfica de interpolación del eslabón cadera-rodilla

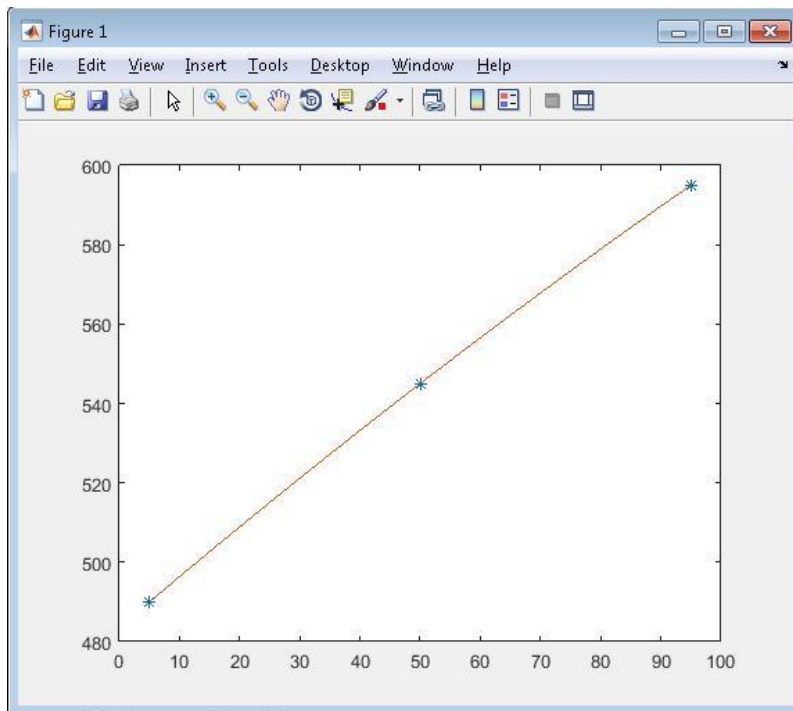


Figura 2.3. Gráfica de interpolación del eslabón de rodilla - pie

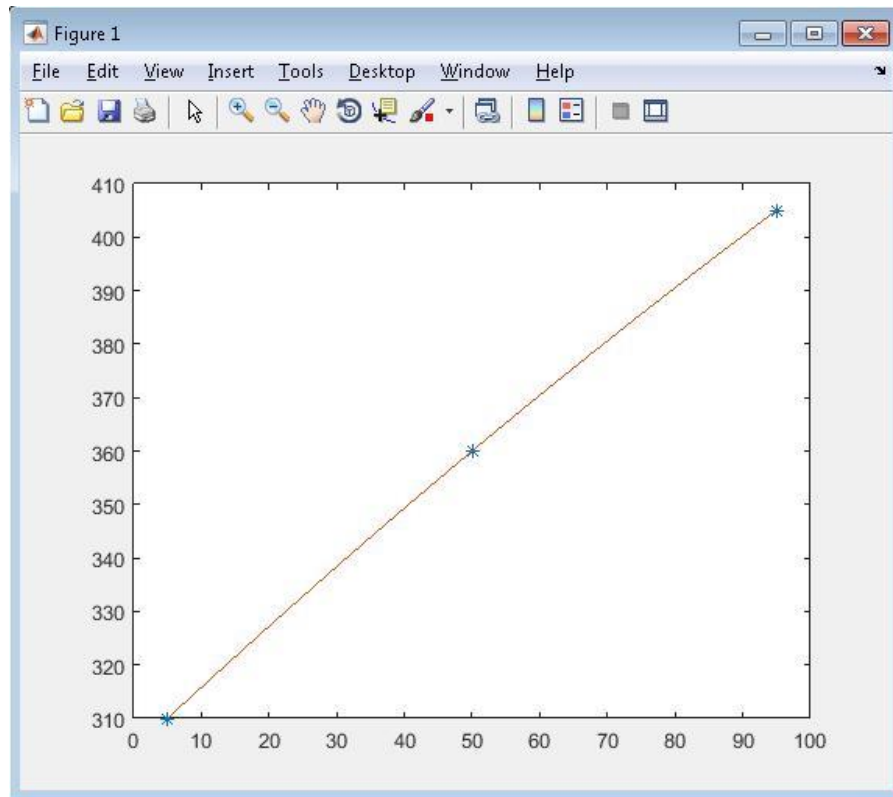


Figura 2.4. Gráfica de interpolación del eslabón de la cadera

El método de interpolación se realizó para establecer el rango de operación de los componentes a tener en cuenta para la variación de la longitud de los eslabones, haciendo hincapié en las dimensiones tratadas en el presente documento y mencionadas en la tabla 2. Las funciones obtenidas son puntos de partida para una eventual programación del sistema electrónico o mecánico que rijan el movimiento del robot, permitiendo configurar las longitudes descritas con facilidad al momento de definir un percentil en específico entre los rangos 5 y 95.

Como se puede observar, las 3 gráficas muestran una respuesta similar por lo que se puede tomar cualquier de las 3 funciones establecidas para proceder al cambio de percentiles.

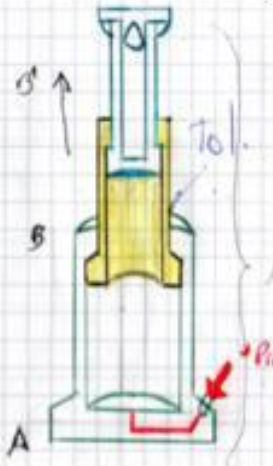
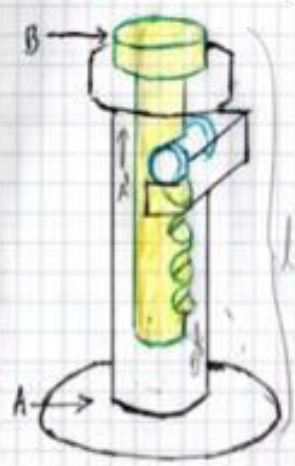
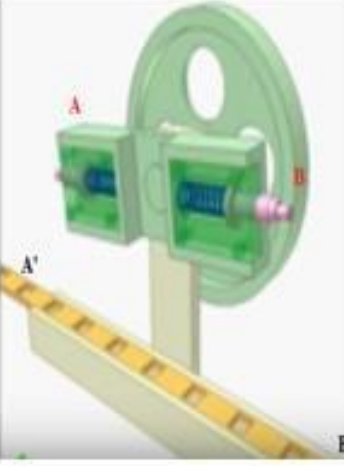
2.2. DISEÑO DEL PROTOTIPO

Las tablas que se muestran a continuación, evidencian el análisis previo de diseño de la estructura mecánica más adecuada para determinar el modelo del robot bípedo, teniendo en cuenta la revisión bibliográfica de antecedentes y conforme a sus características de desempeño y las cualidades abstractas que permiten determinar el mejor sistema. Se tienen en cuenta 16 mecanismos (9 discretos y 7 continuos) y se evalúan bajo una matriz de ponderación general, una de ponderación particular y una matriz de debilidades, oportunidades, fortalezas y amenazas (matriz DOFA) con el fin de llegar a un modelo final para efectuar el cambio de percentiles de los eslabones del robot.

2.2.1. Alternativas de solución

Cada tabla que se muestra a continuación contempla los diferentes diseños que se evaluaron para poder llegar a un modelo final del prototipo.

Tabla 2. 4. Matriz de ponderación de datos particulares (mecanismos discretos)

Mecanismo	Cilindro de telescopio hidráulico	Mecanismo de trinquete	Mechanism for advancing perforated strip 3
Imagen			
Estabilidad centro de masa	3	1	2
Posicionamiento adecuado	1	3	4
Baja fricción	5	3	4
Fácil elaboración	4	2	2
Tiempo de respuesta del sistema	3	4	3
Costo	4	2	2
Masa (kg)	4	2	3
Promedio	3,43	2,43	2,86

Mecanismo	Mecanismo con cierres discretos	Bloques LEGO	Principio mecánico del bisturí
Imagen			
Estabilidad centro de masa	2	5	3
Posicionamiento adecuado	1	2	1
Baja fricción	3	5	2
Fácil elaboración	4	4	3
Tiempo de respuesta del sistema	3	2	3
Costo	4	3	3
Masa (Kg)	4	3	4
Promedio	3	3,43	2,71



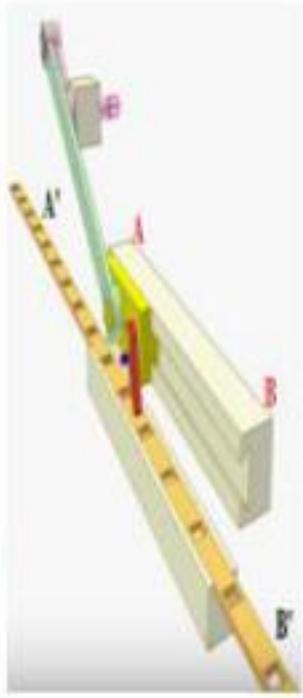
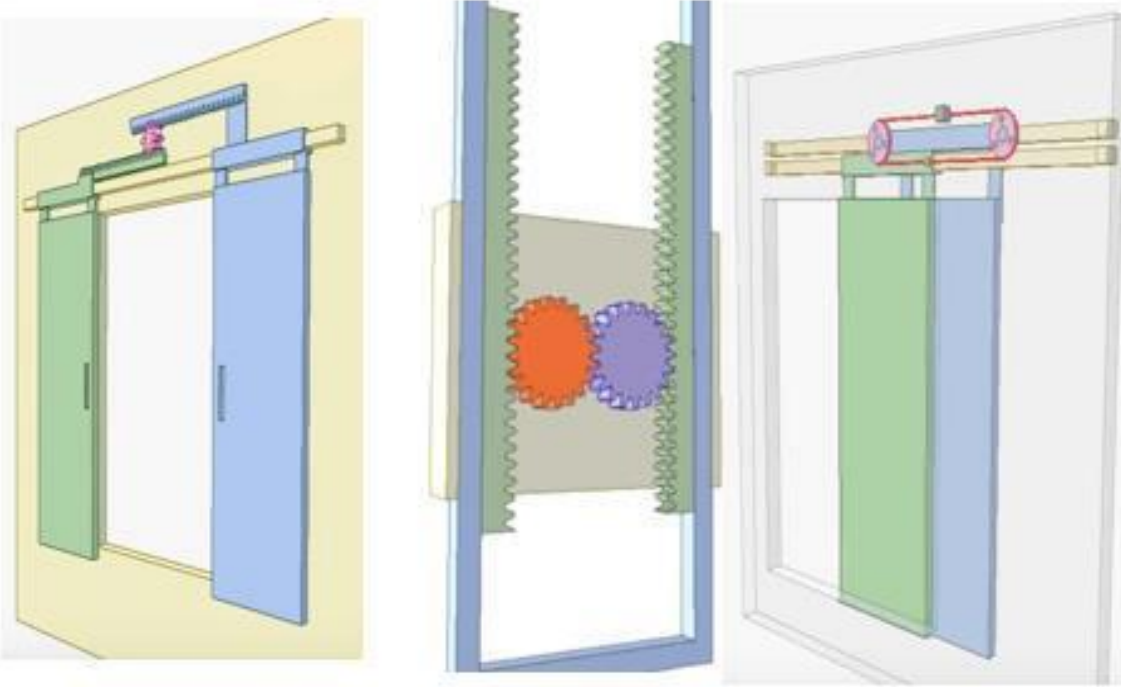

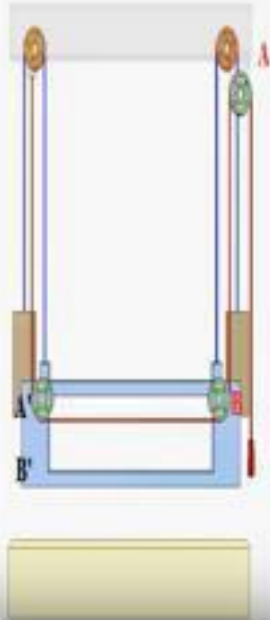
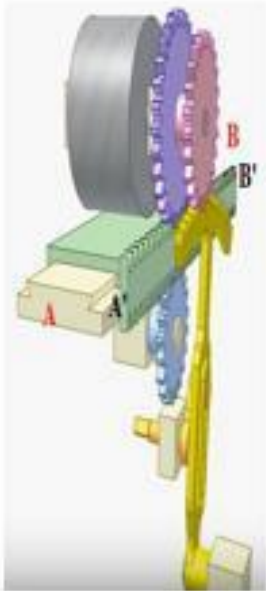

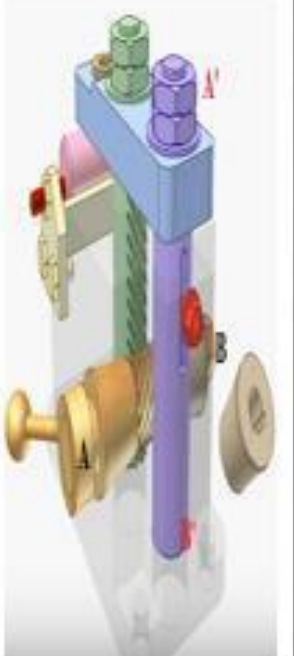
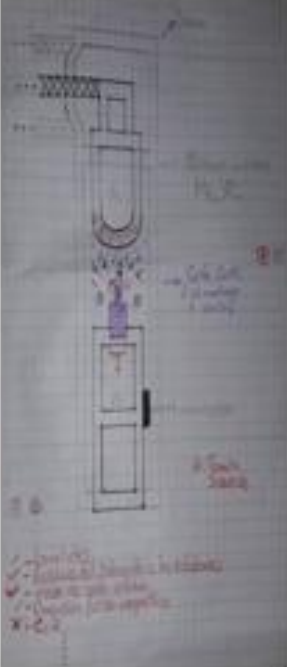
Mecanismo	Mecanismo piñón cremallera	Mecanismo de yugo Escocés	Mecanismo de avance para posicionamiento
Imagen			
Estabilidad centro de masa	4	3	2
Posicionamiento adecuado	5	4	5
Baja fricción	3	4	4
Fácil elaboración	3	2	2
Tiempo de respuesta del sistema	4	2	1
Costo	4	3	2
Masa (Kg)	4	3	2
Promedio	4	3,14	2,71

Tabla 2. 5. Matriz de ponderación de datos particulares (mecanismos continuos)

Deslizamiento sincrónico (polea-correa, piñón-cremallera)	
	
Estabilidad centro de gravedad	5
Posicionamiento adecuado	5
Baja fricción	4
Fácil elaboración	4
Tiempo de respuesta del sistema	4
Costo	4
Masa (Kg)	4
Promedio	4,29

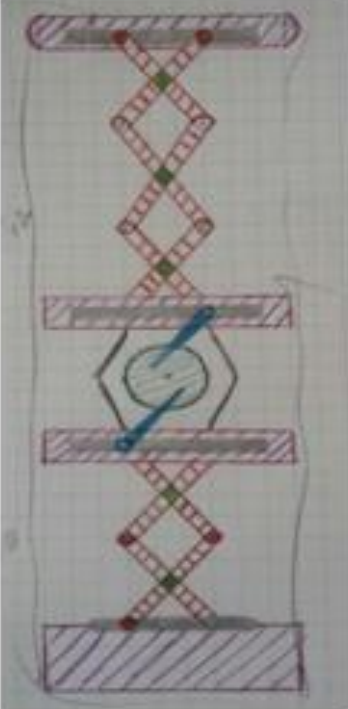
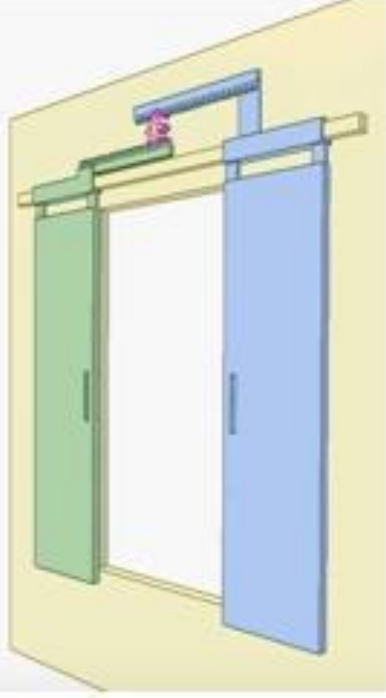
Mecanismo	Mecanismo de biela con rombos articulados	Accionamiento para prensa rotativa	Mecanismo de cambio de rotacional a traslacional
Imagen			
Estabilidad centro de gravedad	5	4	2
Posicionamiento adecuado	5	5	5
Baja fricción	5	3	3
Fácil elaboración	4	2	3
Tiempo de respuesta del sistema	4	3	3
Costo	4	2	3
Masa (kg)	5	3	2
Promedio	4,57	3,14	3,00

Mecanismo	Mecanismo de piñones	Mecanismo con tornillo-cremallera	Mecanismo por inducción magnética
Imagen			
Estabilidad centro de gravedad	4	4	1
Posicionamiento adecuado	4	4	1
Baja fricción	2	2	1
Fácil elaboración	3	3	1
Tiempo de respuesta del sistema	2	3	1
Costo	3	3	1
Masa (kg)	2	2	1
Promedio	2,86	3,00	1

Se escogieron los mecanismos de biela con rombos articulados y deslizamiento síncrono, el de polea correa, el piñón cremallera y se adiciona uno que es el mecanismo tuerca tornillo.

Se seleccionan estos diseños ya que su estabilidad de centro de masa, su adecuado posicionamiento, la baja fricción, la fácil elaboración, entre otros parámetros, obtuvieron un promedio igual o mayor a 4 que se considera que es el 80% de la evaluación de los sistemas. Sin embargo se vuelve a hacer una evaluación de matrices con los 4 mecanismos seleccionados, incluyendo la evaluación de una matriz DOFA y una de ponderación de datos particulares para cada mecanismo, esto con el fin de obtener un óptimo resultado en cuanto a la selección de un sistema que permita configurar el cambio de eslabones entre los percentiles 5 y 95.

Tabla 2.6. Matriz de evaluación de datos particulares (diseños finales)

Mecanismo	Mecanismo de Biela con rombos articulados	Deslizamiento síncrono (polea correa, piñón cremallera)
Imagen		
Estabilidad COG	4	4
Posicionamiento adecuado	4	5
Tiempo de respuesta del sistema	4	5
Baja fricción	4	4
fácil elaboración	4	4
Costo	3	4
Masa (kg)	4	4
Promedio	3,85	4,28

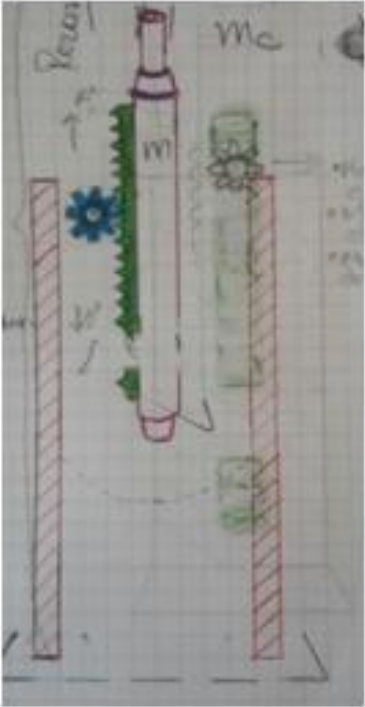
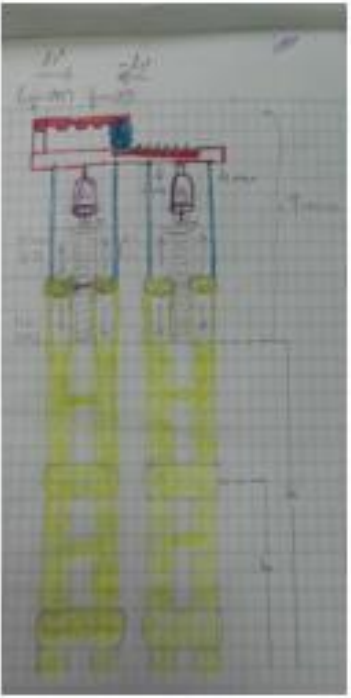
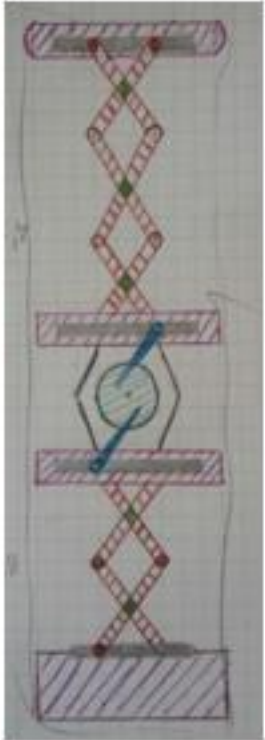
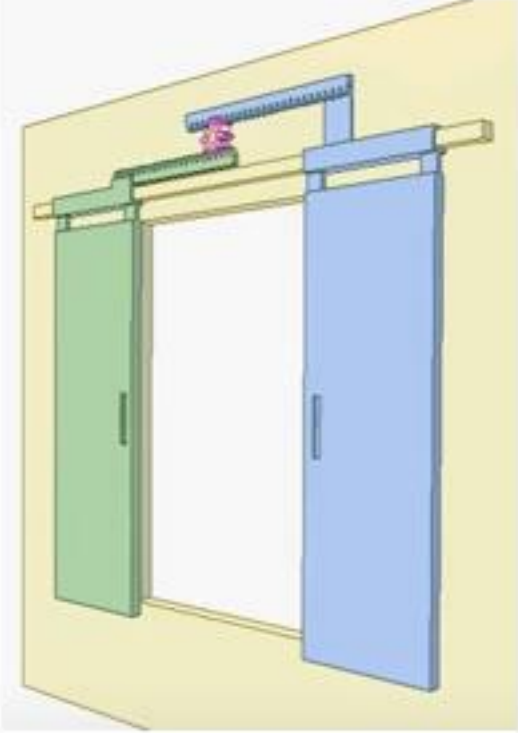
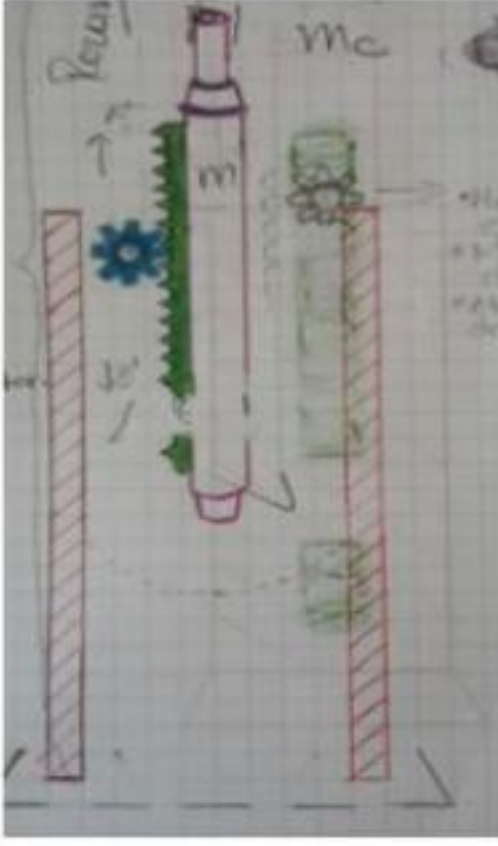
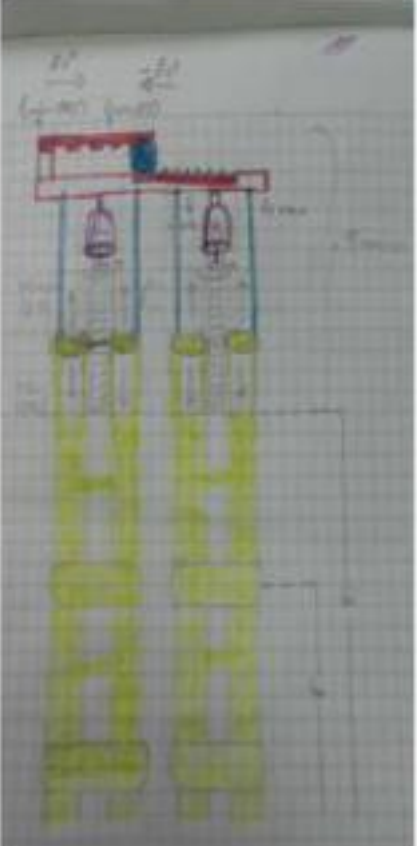
Mecanismo	Mecanismo piñón cremallera	Mecanismo tuerca tornillo
Imagen		
Estabilidad COG	5	5
Posicionamiento adecuado	5	5
Tiempo de respuesta del sistema	4	4
Baja fricción	3	2
fácil elaboración	4	5
Costo	4	4
Masa (kg)	4	3
Promedio	4,14	4

Tabla 2. 7. Matriz de Debilidades, Oportunidades, Fortalezas y Amenazas (DOFA)

Mecanismo	Mecanismo de Biela con rombos articulados	Deslizamiento sincrónico (polea correa, piñón cremallera)
Imagen		
Debilidades	Propenso a las fuerzas externas, El sistema es inestable.	Alta fricción, Complejidad al momento de establecer la cinemáticas del sistema (Alta)
Oportunidades	El sistema me permite tener un centro de gravedad estable en cualquier percentil	Me permite una elongación y compresión precisa para el cambio de percentiles en la cadera (eje horizontal)
Fortalezas	El sistema no requiere de un material específico	Es un sistema estable y que se puede elaborar con materiales económicos
Amenazas	Frente a una perturbación externa, el mecanismo se puede desestabilizar	Frente a una perturbación externa, el mecanismo se puede desestabilizar

Mecanismo	Mecanismo piñón cremallera	Mecanismo tuerca tornillo
Imagen		
Debilidades	Propenso a las fuerzas externas, El sistema es inestable.	Alta fricción, Complejidad al momento de establecer la cinemáticas del sistema (Alta)
Oportunidades	El sistema me permite tener un centro de gravedad estable en cualquier percentil	Me permite una elongación y compresión precisa para el cambio de percentiles en la cadera (eje horizontal)
Fortalezas	El sistema no requiere de un material específico	Es un sistema estable y que se puede elaborar con materiales económicos
Amenazas	Frente a una perturbación externa, el mecanismo se puede desestabilizar	Frente a una perturbación externa, el mecanismo se puede desestabilizar

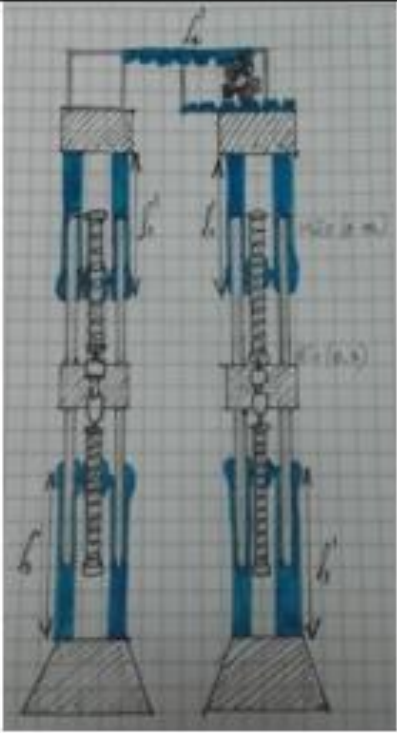
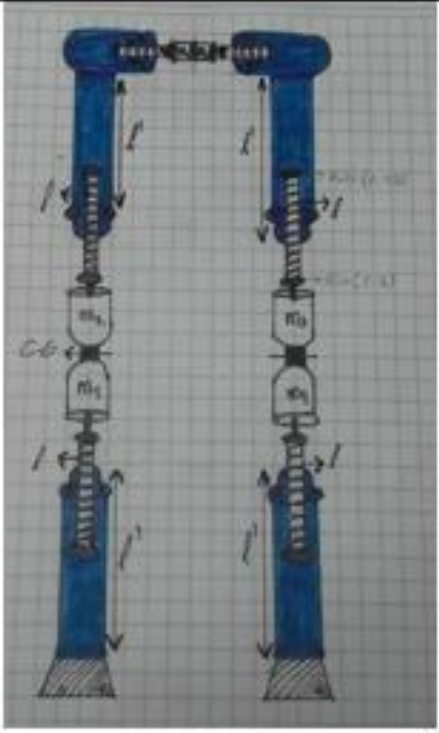
Luego del análisis comparativo y complementado con la valoración adelantada con la de las matrices de ponderación que consideran las diferentes variables y diferentes parámetros tenidos en cuenta para el proyecto se llega al mecanismo que combina los cuatro sistemas.

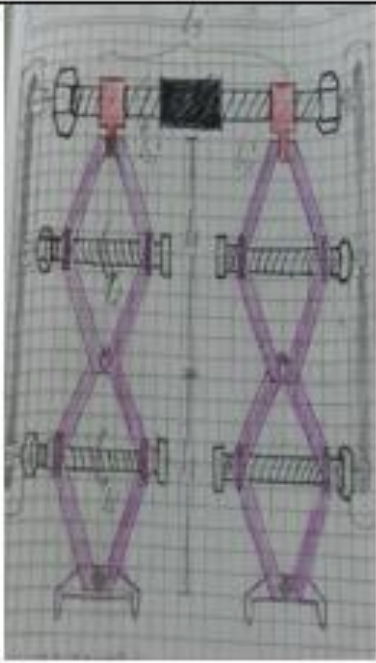
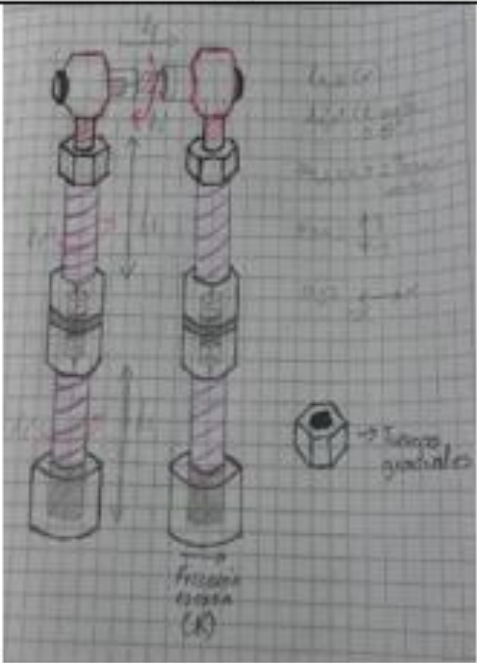
Tabla 2. 8. Matriz de ponderación de datos particulares (mecanismo tuerca tornillo)

Mecanismo	1	2
Imagen		
Estabilidad COG	5	4
Posicionamiento adecuado	5	3
Tiempo de respuesta del sistema	4	5
Baja fricción	4	3
Costo	4	4
Masa	4	4
Promedio	4,33	3,83

Mecanismo	3	4
Imagen		
Estabilidad COG	5	4
Posicionamiento adecuado	5	3
Tiempo de respuesta del sistema	2	4
Baja fricción	3	3
Costo	3	4
Masa	2	3
Promedio	3,33	3,5

Tabla 2. 9. Matriz de Debilidades, Oportunidades, Fortalezas y Amenazas (Matriz DOFA)

Mecanismo	1	2
Imagen		
Debilidades	<ul style="list-style-type: none"> - Gran peso sobre las bases de sus articulaciones - Mayor interacción de fuerzas durante el movimiento horizontal 	<ul style="list-style-type: none"> - Mecanismo poco voluminoso - Soportes dados únicamente por los tornillos
Oportunidades	<ul style="list-style-type: none"> - Equilibrio mejor dominado - Rigidez alta ante cualquier perturbación - Fricción reducida - Alta precisión 	<ul style="list-style-type: none"> - Mejor precisión de percentiles - Rigidez del sistema en estado natural (reposo) - Tiempo de respuesta óptimo
Fortalezas	<ul style="list-style-type: none"> - Barras deslizantes casi totalmente lisas - Centro de masa fijo en el eje vertical - Eslabones netamente prismáticos - Movimiento generado por motores paso a paso 	<ul style="list-style-type: none"> - Alta fricción en el deslizamiento de tuercas - Centro de gravedad fijo en el 100% del sistema - Movimiento de tornillos generado por motores paso a paso y programación de circuitos

Mecanismo	3	4
Imagen		
Debilidades	El espacio horizontal que ocupa el mecanismo es muy ancho, tiempo de respuesta	Inestabilidad en el sistema. El centro de gravedad de la cadera es variable
Oportunidades	El centro de gravedad permanece estable	El cambio de percentiles en serial, permitiendo una mejor precisión al momento de adecuarlos
Fortalezas	Es un sistema rígido. Fácil elaboración	El tiempo de respuesta del mecanismo es rápido
Amenazas	Alto consume de corriente	El sistema se puede caer con facilidad ante una fuerza externa

Luego de realizar una revisión frente a los objetivos propuestos y la ponderación de las variables y parámetros requeridos se escoge finalmente la opción 1 que es la del mecanismo

tuerca tornillo, ya que este sistema posee los mejores criterios de desempeño como la baja fricción, el tiempo de respuesta adecuado para el cambio de percentiles, ser un sistema liviano, la poca alteración del centro de gravedad, su rigidez y su posicionamiento preciso.

CAPÍTULO 3: DISEÑO MECÁNICO DEL ROBOT BÍPEDO

El modelo final del robot se determina en la fase de soporte doble (el robot está en estado inicial, las dos piernas están en el suelo), sin embargo para establecer los modelos cinemático y dinámico del mismo se tienen en cuenta dos momentos, cada uno en la fase de soporte simple (una pierna apoyada en el suelo y la otra en balanceo, respectivamente).

Para el primer modelo, el conjunto de la pierna derecha está en fase de soporte simple empezando con $r1$ y termina en $r5$ que es cuando la pierna está en balanceo, como se muestra en la figura 3.1.

3.1. CINEMÁTICA DEL ROBOT BÍPEDO

Con el fin de establecer la cinemática del robot bípedo, considerando la fundamentación teórica y teniendo presente que la cinemática se encarga de estudiar y obtener representaciones del movimiento que efectúa el robot respecto a un sistema de referencia, sin dar relevancia a las causas que generan dicha locomoción, se desarrolla un análisis cinemático que conlleva a las siguientes acciones: considerar los 9 GDL del prototipo (5 prismáticos y 4 rotacionales), representar gráficamente el sistema de coordenadas de cada uno de estos, calcular los parámetros fundamentales de este análisis (analizar los modelos directo e inverso) y finalmente, obtener su representación matemática característica. Este proceso se desarrolla comúnmente en robótica, para hallar el modelo del robot bípedo.

A continuación, se realiza el análisis cinemático de dos representaciones gráficas, que por similares que sean, no significa siempre la misma solución al problema cinemático directo,

en especial por los sistemas de referencia (puntos de apoyo) y de coordenadas de los GDL que se establecen.

3. 1. 1. Modelo Cinemático 1

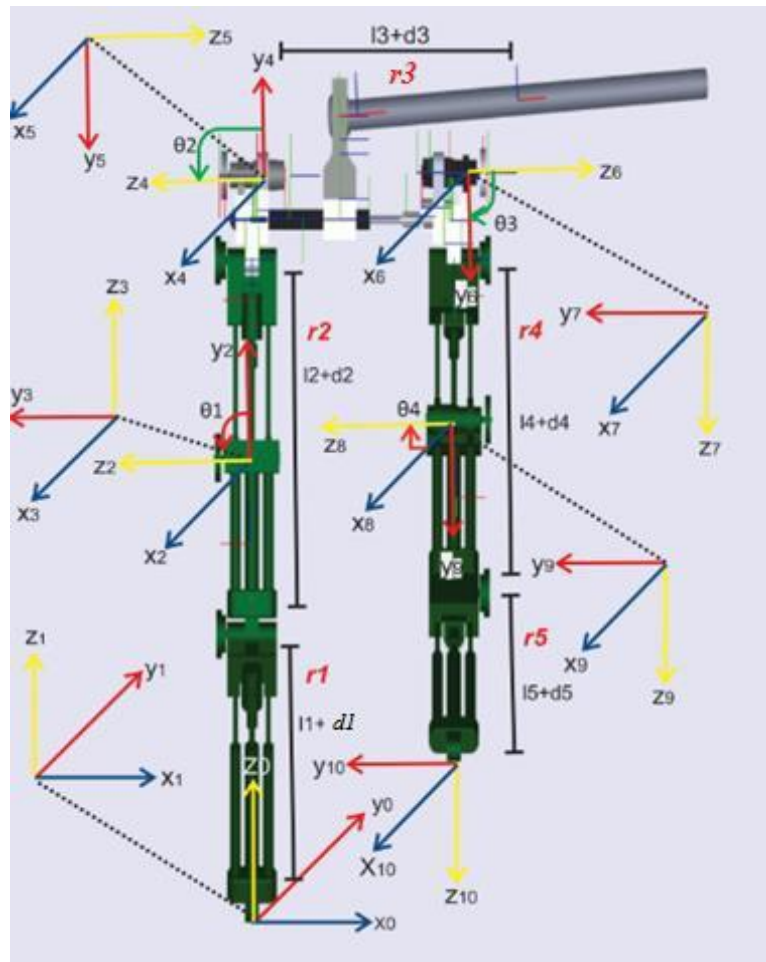


Figura 3. 1. Modelo 1, aplicación del algoritmo de Denavit – Hartenberg

3. 1. 1. 1. Cinemática Directa

La cinemática directa permite determinar la posición del efector final del robot bípodo, el cual va a ser el eslabón r_5 , que es el vertical inferior (una representación de la pantorrilla derecha del ser humano). Para tal fin hay que definir un conjunto de parámetros que representan la rotación y la traslación de las articulaciones respecto a un sistema de coordenadas ligado a los eslabones que se mueven. El cálculo de estos parámetros se refleja

en una matriz de transformación que representa el movimiento desde el eslabón e_{i-1} hasta el eslabón e_i .

Para la solución del problema cinemático directo existen diversos métodos, especialmente en los que juega un papel fundamental el álgebra lineal y la geometría. Uno de ellos es el método Denavit – Hartenberg (D – H), con los cuales se busca relacionar parámetros de distancia entre sistemas de coordenadas, formas de articulaciones y posiciones de eslabones respecto a su eje. Estos parámetros son d , α , a y θ , calculados para las articulaciones n_{i-1} y n_i y definidos entre ellos como la distancia entre las articulaciones con respecto al eje x , ángulo de giro entre ejes x , distancia entre ejes z y ángulo de giro con respecto al eje z . Para el modelo de este robot bípedo que posee 5 eslabones y 5 articulaciones (ver fig. 3. 1) se aplica la metodología del cálculo de parámetros D – H que se desarrolla en el siguiente algoritmo, contemplado en 9 pasos, a saber:

1. Numerar los elementos desde 1 hasta 10 (el elemento está definido como la ubicación del GDL), que son los enlaces móviles del robot. La base móvil se numera con 0 (eslabón 0).
2. Localizar el eje de cada articulación, que para el caso del bípedo, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
3. Ubicar los ejes z (desde z_0 hasta z_{10}) sobre los ejes de las articulaciones.
4. Definir origen S_0 del sistema de coordenadas del eje z_0 (aplicar la regla de la mano derecha).
5. Definir sistema de coordenadas de los eslabones donde x_n sea normal a z_{n-1} .
6. Establecer una tabla con los parámetros D- H (d , α , a y θ).
7. Calcular matrices de transformación homogéneas ⁻¹.
8. Con el producto de las matrices homogéneas establecer el modelo de cinemática directa para posición y orientación de sistemas de coordenadas del efector final, reflejado en un conjunto de ecuaciones de 9 incógnitas (l_1+d_1 , θ_1 , l_2+d_2 , θ_2 , l_3+d_3 , θ_3 , l_4+d_4 , θ_4 y l_5+d_5).

De acuerdo a lo establecido en los parámetros de Denavit – Hartenberg del modelo de la fig. 2. 1, se elabora la siguiente tabla:

Tabla 3. 1. Parámetros D - H para modelo 1.

Articulaciones	θ	d	a	A
1	0	0	0	0
2	$-\pi/2$	$l1+d1$	0	$\pi/2$
3	θ_1	0	0	$-\pi/2$
4	0	$l2+d2$	0	$\pi/2$
5	θ_2	0	0	Π
6	0	$l3+d3$	0	0
7	θ_3	0	0	$-\pi/2$
8	0	$l4+d4$	0	$\pi/2$
9	θ_4	0	0	$-\pi/2$
10	0	$l5+d5$	0	0

La forma general para establecer las matrices de las articulaciones es la siguiente:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\alpha S\theta & \alpha S\theta & \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ahora se procede a establecer la matriz de transformación para cada articulación:

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16),$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17),$$

$$\begin{matrix}
 \theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\
 \text{11-1}^{10} & 0 & \theta_1 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix} \quad (18),$$

$$\begin{matrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{14-1}^{10} & 0 & -1 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & & 2+2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 &
 \end{matrix} \quad (19),$$

$$\begin{matrix}
 \theta_2 & & \theta_1 & 0 & 0 \\
 \text{15-1}^{10} & & -\theta_2 & 0 & \eta \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix} \quad (20),$$

$$\begin{matrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{16-1}^{10} & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 3+3 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix} \quad (21),$$

$$\begin{matrix}
 c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & 0 \\
 \text{17-1}^{10} & 0 & -c\theta_3 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix} \quad (22),$$

$$\begin{matrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{18-1}^{10} & 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & & 4+4 \\
 0 & 0 & 0 & 1 &
 \end{matrix} \quad (23),$$

$$\begin{matrix}
 c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\
 \text{19-1}^{10} & 0 & -c\theta_4 & \eta \\
 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix} \quad (24),$$

$$\begin{matrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{19} & -1 & 1 & 0 & \theta_1 \\
 0 & 0 & 1 & & 5+5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix} \quad (25),$$

El producto entre las matrices (16) y (25) de transformación $^{-1}$ (26): $1 = 1_1^0 * 1_2^1 * 1_3^2 * 1_4^3 * 1_5^4 * 1_6^5 * 1_7^6 * 1_8^7 * 1_9^8 * 1_{10}^9$

(26)

El producto se puede desarrollar con eficiencia gracias al uso de MATLAB®¹⁰. Después, se establece un término compuesto por los elementos mostrados a continuación:

$$\begin{array}{cccc}
 & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\
 \text{---} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\
 & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\
 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \quad (27),$$

En la cual la matriz de tamaño $3(13+d3)$ (resaltada en color verde), definida por los valores de n , s y a , corresponden a la orientación en los ejes x , y z , mientras que el vector, de $3(11+d1)$ (amarillo), formado por los valores de p en los 3 ejes, representa la posición final del eslabón R_5 . Debido a la extensión de términos generado por el producto de las matrices, se opta por definir cada uno de los elementos que componen a (27), tanto la matriz de orientación $3(13+d3)$ (n , s , a para los 3 ejes), como la de posición (p en las 3 direcciones), que corresponderán a los términos establecidos en la matriz de transformación total $T1$ (26).

- $= 0;$ $= 1;$ $= 0;$ $= d3+l3;$
- $= \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1))) +$
 $\sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2))) - \cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) -$
 $\sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)));$
 $= 0; = \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2))) +$
 $\sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1))) - \cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) +$
 $\cos(\theta2) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)));$
 $= \sin(\theta1) * (d2 + l2) - (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1))$
 $+ \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2))) -$
 $\sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2)$
 $+ \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))) * (d5 + l5) + (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) +$
 $\sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2))) * (d4 + l4);$

¹⁰ Se utiliza MATLAB® de ahora en adelante para las operaciones matriciales, en especial en el análisis cinemático y dinámico.

$$(1^1_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30),$$

$$(1^2_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31),$$

$$(1^3_4)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2-1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32),$$

$$(1^4_5)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33),$$

$$(1^5_6)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34),$$

$$(1^6_7)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35),$$

$$(1^7_8)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36),$$

$$(1^8_9)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37),$$

$$(1^9_{10})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5-5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38),$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de la posición y la orientación del robot se definen en (27) y sus respectivas matrices de transformación establecidas durante la solución del problema cinemático directo, se despeja la matriz del efector final (el punto final del pie del robot) como sigue (obtenida a partir de (26)):

$${}^{11}0^9 = T^*(1^0)^{-1} * (1^2)^{-1} * (3^4)^{-1} * (4^5)^{-1} * (5^6)^{-1} * (6^7)^{-1} * (7^8)^{-1} * (8^9)^{-1} \quad (39).$$

El anterior producto genera una matriz ${}^{11}0^9$, de la cual se obtiene una submatriz definitiva de rotación $O1(3(13+d3))$, un vector de posición $P1(3(11+d1))$, y un vector que completa la estructura de esta matriz, tal y como se definió en la ecuación (28). Por producirse términos extensos, se procede a establecer la representación matricial en términos de ${}^{11}0^9$:

$${}^{11}0^9 = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 11 \\ 1^9 & -1^9 & 15 & 16 & 12^9 \text{ (rot)} \\ 18 & 17 & 18 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a la extensión del resultado de la cinemática inversa, se adjunta este en el **anexo No.**

1.

3. 1. 2. Modelo Cinemático 2

Este modelo contempla la ejecución del análisis cinemático como se realizó anteriormente. El conjunto de la pierna izquierda del robot es la que hace contacto con el suelo (fase de soporte simple) y la derecha está en estado de balanceo, empezando con r1 y terminando con r5, respectivamente.

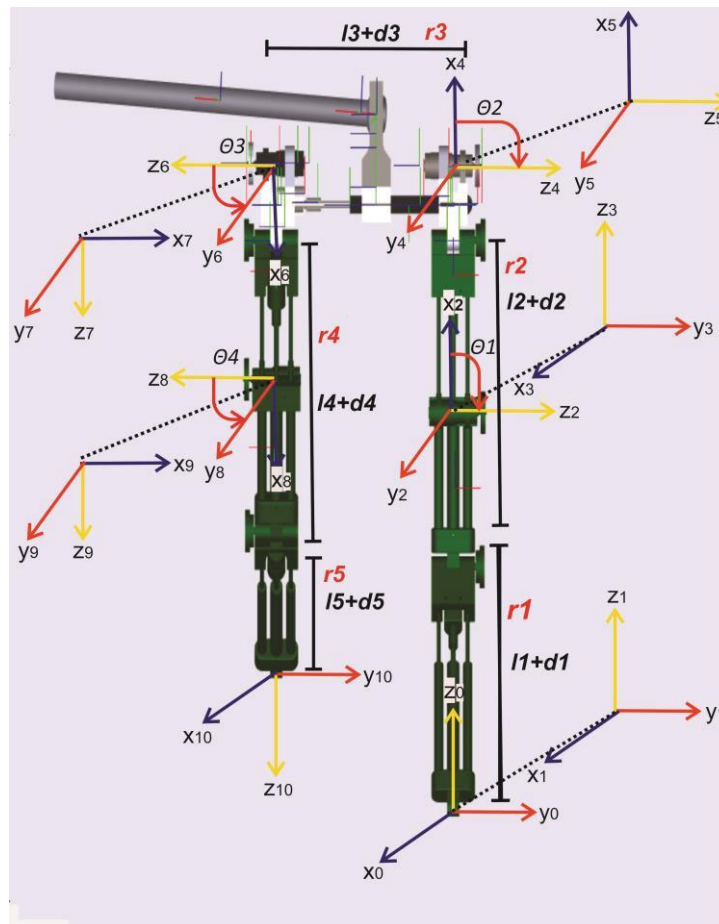


Figura. 3. 2. Modelo 2, aplicación del algoritmo de Denavit – Hartenberg

3. 1. 2. 1. Cinemática Directa

Tabla 3. 2. Parámetros D - H para modelo 2.

Articulaciones	θ	d	a	α
1	0	0	0	0
2	$-\pi/2$	$l1+d1$	0	$-\pi/2$
3	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$
4	0	$l2+d2$	0	$-\pi/2$
5	0	0	0	0
6	0	$l3+d3$	0	$-\pi$
7	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$

$$\begin{matrix} & & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2^{\theta} & & -1 & 0 & -4 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad (59)$$

$$\begin{matrix} 2^{\theta} & = & \begin{matrix} \theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (60)$$

Ahora se establece la matriz de transformación para el modelo cinemático 2:

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (61)$$

$$2 = 2^0 * 2^1 * 2^2 * 2^3 * 2^4 * 2^5 * 2^6 * 2^7 * 2^8 * 2^9 \quad (62)$$

- Con: $\theta = 0$; $\theta = -1$; $\theta = 0$; $\theta = d3+l3$;
- $\sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) - \cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) = 0$;
 $= -\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))$;
 $\sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))$; =
 $d4 * l4 * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) - (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d5 + l5) - \sin(\theta_1) * (d2 + l2)]$;
- $= \cos(\theta_4) * (\sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) - \cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))$;

$$(2_3)^{-1} = \begin{bmatrix} (2_2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$(2_4)^{-1} = \begin{bmatrix} (2_3)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$(2_5)^{-1} = \begin{bmatrix} (2_4)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$(2_6)^{-1} = \begin{bmatrix} (2_5)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$(2_7)^{-1} = \begin{bmatrix} (2_6)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$(2_8)^{-1} = \begin{bmatrix} (2_7)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

La ecuación mostrada a continuación será para definir las variables a tener en cuenta cuando se desee ubicar al robot bípedo en un valor (percentil fijo):

$$2_{10}^0 = T * (1^0)^{-1} * (2^1)^{-1} * (3^4)^{-1} * (4^5)^{-1} * (5^6)^{-1} * (6^7)^{-1} * (7^8)^{-1} * (8^9)^{-1} \quad (73)$$

Por generarse términos extensos, se procede a establecer la representación matricial en

términos de 2^9 en (74):

$$2^9 = \begin{bmatrix} 20 & 22 & 23 & 25 \\ -1 & 25 & 26 & 22 \end{bmatrix} \quad (74)$$

El resultado de la matriz de la cinemática inversa del modelo 2, se adjunta en el **anexo No. 2** ya que los términos son extensos.

Con el desarrollo de la cinemática del sistema se definen las ecuaciones del movimiento del efector final, ya que lo que distingue a la cinemática es que no hay fuerzas que hagan mover el sistema y por eso sólo se definen las matrices de transformación. Las transformaciones homogéneas son usadas para calcular los valores de las coordenadas de un determinado elemento en este caso del robot bípedo.

3. 2. DINÁMICA DEL ROBOT BÍPEDO

El objetivo principal de desarrollar la dinámica del robot bípedo es hallar los torques de los motores que se requieren para realizar el movimiento de las articulaciones prismáticas y las articulaciones rotacionales. A continuación, se halla el modelo dinámico del robot bípedo de 9 GDL por el algoritmo computacional de Lagrange-Euler.

El algoritmo se desarrolla en los siguientes pasos:

- **L – E 1:** Establecer sistemas de referencia:

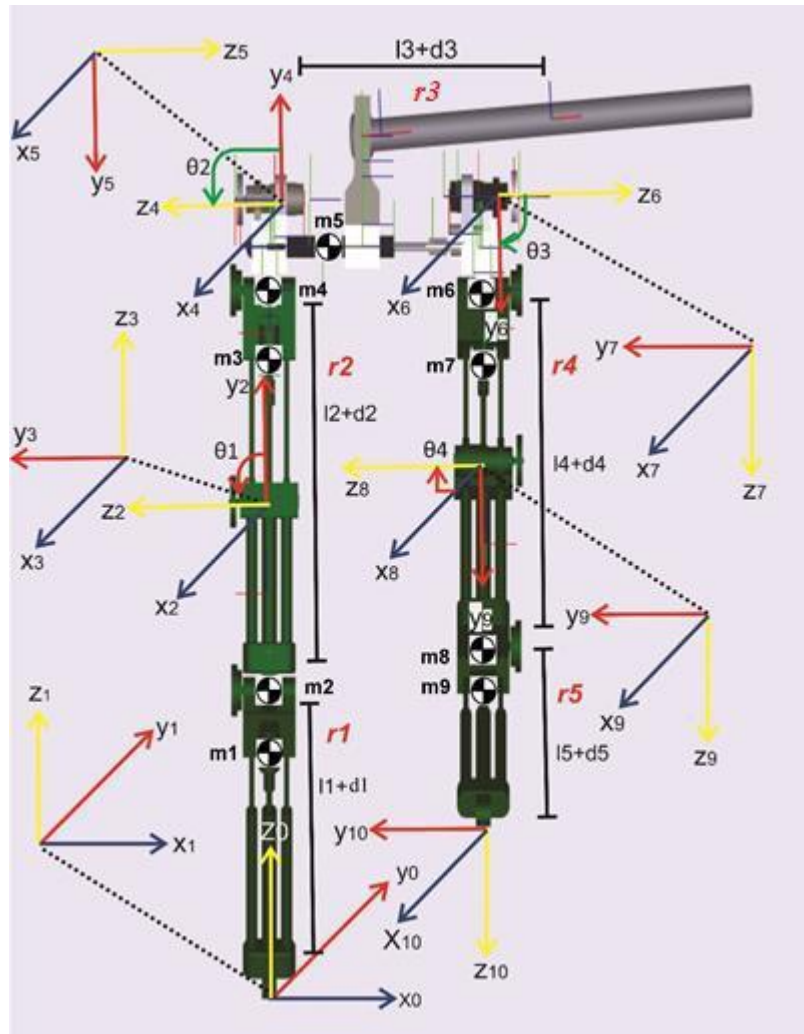


Figura 3.3. Sistema de referencia del modelo dinámico del robot bípedo

- **L – E 2:** Establecer matrices de transformación 0 para cada elemento i :
= 9, por el número de elementos, o motores presentes en la representación gráfica. En este paso se establecen los resultados de los productos que generan las matrices comprendidas entre 1^0 y 9^0 :

$$A11 = [0 \ 0 \ -1 \ 0; \ -1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0 \ l1+d1; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$A12 = [\cos(\theta_1) \ 0 \ -\sin(\theta_1) \ 0; \ \sin(\theta_1) \ 0 \ \cos(\theta_1) \ 0; \ 0 \ -1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$A23 = [1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ -1 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0 \ l2+d2; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$A34 = [\cos(\theta_2) \sin(\theta_2) 0 0; \sin(\theta_2) -\cos(\theta_2) 0 0; 0 0 -1 0; 0 0 0$$

$$1]; A45 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 l_3+d_3; 0 0 0 1];$$

$$A56 = [\cos(\theta_3) 0 -\sin(\theta_3) 0; \sin(\theta_3) 0 -\cos(\theta_3) 0; 0 -1 0 0; 0 0 0 1];$$

$$A67 = [1 0 0 0; 0 0 1 0; 0 1 0 l_4+d_4; 0 0 0 1];$$

$$A78 = [\cos(\theta_4) 0 -\sin(\theta_4) 0; \sin(\theta_4) 0 -\cos(\theta_4) 0; 0 -1 0 0; 0 0 0 1];$$

$$A89 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 l_5+d_5; 0 0 0 1];$$

Ahora se procede a hacer las multiplicaciones de las matrices A_{ij} y A_{ij}^{-1} . Los resultados de A_{ij}^{-1} hasta A_{89} se muestra en el anexo No.3.

- L – E 3:** Se obtienen las matrices U_{ij} , que son las derivadas parciales de las matrices de transformación respecto a las variables definidas. La ecuación para la obtención de estos parámetros es la siguiente:

$$U_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial \theta_j} \tag{81}$$

Tenemos en cuenta la matriz Q, que será diferente al momento de operar según el tipo de articulación:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{Rotacional),}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{Prismática).}$$

- **L – E 6:** Cálculo de matriz de inercia D: los parámetros dij respectivos del prototipo se calculan como sigue:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (m_k \cdot r_{ik}^2 \cdot \dot{\theta}_k^2) \quad (84),$$

El cálculo de la Matriz de inercia D, se agrega en el **anexo No.6**

- **L – E 7:** Se procede a obtener los parámetros hikm, con el apoyo de Matlab® nuevamente, aplicándose también para los mismos GDL.

$$h_{ikm} = \sum_{j=1}^n (m_j \cdot r_{ij} \cdot r_{kj} \cdot \dot{\theta}_j^2) \quad (85)$$

En el **anexo No. 7** se muestra el resultado de la matriz h

- **L – E 8:** Se procede a definir la matriz de fuerzas de Coriolis y centrípeta H:

$$H = [h] \quad (86)$$

$$h_{ij} = -\sum_{k=1}^n (m_k \cdot r_{ik} \cdot r_{jk} \cdot \dot{\theta}_k^2) \quad (87)$$

H= [h1; h2; h3; h4; h5; h6; h7; h8; h9];

El **anexo No. 8** muestra el resultado de la matriz de fuerzas de Coriolis y centrípeta H.

- **L – E 9:** Obtener la matriz columna de fuerzas de gravedad C:

$$C = []$$

$$= \sum (*_{-1} * *)$$

El Resultado de la matriz columna de fuerzas de gravedad C se muestra en el **anexo No. 9**.

- **L – E 10:** Ecuaciones dinámicas del robot bípedo
 $\ddot{\theta} = [\ddot{\theta}_1; \ddot{\theta}_2; \ddot{\theta}_3; \ddot{\theta}_4; \ddot{\theta}_5; \ddot{\theta}_6; \ddot{\theta}_7; \ddot{\theta}_8; \ddot{\theta}_9];$

Después de aplicar el procedimiento del modelo computacional de Lagrange-Euler, se establece la ecuación de dinámica general para determinar los torques de los motores de las articulaciones de robot, los cuales estarán determinados por los valores de masa, las longitudes de los eslabones, los movimientos articulares y sus respectivas variaciones, teniendo en cuenta además, la masa del robot que se distribuye en los módulos de las piernas derecha e izquierda, y el de la cadera.

Gracias al apoyo de Solidworks, se obtienen los valores de las masas de cada módulo del robot bípedo como se muestra en la tabla 3.3.

Tabla 3. 3. Distribución de las masas del robot bípedo

Masa total módulo derecho (kg)	Masa total cadera (kg)	Masa total módulo izquierdo (kg)	Masa total del robot bípedo (kg)
2,83897	4,19571	2,83897	9,87365

La ecuación general de dinámica que permite hallar los torques empleados para el movimiento del robot es:

$$T = D + H + C \quad (88)$$

Donde τ (torque) = D (Fuerzas dinámicas del mecanismo o sistema) * \ddot{q} (variables dinámicas presentes en el sistema) + H (matriz o vector fuerzas centrífugas y de Coriolis) + C (vector fuerzas de gravedad)

Ahora se procede a darle valores a las variables de las matrices D , H Y C . Los valores asignados de las matrices se obtienen de acuerdo a las medidas tenidas en cuenta al momento del cambio de percentiles del robot que es la longitud, la distancia que recorre d , la influencia de la gravedad, y las variables que defines las acciones del movimiento del robot, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 3.4. Asignación de valores a las variables de las matrices D , H y C .

Variable	Masa (Kg)	Variable	Longitud (m)	Variable	Distancia (m)	Variable	Gravedad (m/s ²)
m1	1,11974	l1	0.40	d1	0.14	g	9.8
m2	0,50218	l2	0.40	d2	0.14		
m3	1,62192	l3	0.40	d3	0.14		
m4	0,842223	l4	0.40	d4	0.14		
m5	4,19471	l5	0.40	d5	0.14		
m6	0,842223		0.40				
m7	1,62192		0.40				
m8	0,50218		0.40				
m9	1,11974		0.40				
Variable	Posición (°)	Variable	Velocidad angular	Variable	Aceleración angular	Variable	RPM (rad/s)
q1	0	dq1	0	d2q1	0	teta1	1.256
q2	90	dq2	90	d2q2	0,418	teta2	1.256
q3	0	dq3	0	d2q3	0	teta3	1.256
q4	90	dq4	90	d2q4	0,418	teta4	1.256
q5	0	dq5	0	d2q5	0		
q6	90	dq6	90	d2q6	0,418		
q7	0	dq7	0	d2q7	0		
q8	90	dq8	90	d2q8	0,418		
q9	0	dq9	0	d2q9	0		

Una vez se conocen los valores de las matrices de las ecuaciones de torques (88), se hallan estos para las articulaciones del sistema:

$$\text{Torque1} = 3,34 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Torque2} = 1,88 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Torque3} = 17,89 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El desarrollo para hallar los valores del Torque1, Torque2 y Torque3 con el apoyo de Matlab, se muestra en el **anexo No. 10**.

El Torque1, (articulación rodilla) el Torque 2 (articulación prismática) y el Torque 3 (articulación cadera) representan los valores de los torques que deben tener los motores para poder mover los eslabones de cada articulación.

Con el fin de disminuir el peso de los motores de las articulaciones prismáticas, al momento de hacer el cambio de percentiles el robot bípedo estará en posición horizontal, como dentro de la ecuación de torque, la matriz de columnas de fuerzas de gravedad C, es la que relaciona la componente dinámica de gravedad y en esta posición es 0, hace que el torque para las articulaciones del cambio de eslabones disminuya.

3. 3. MODELADO CAD

El modelado CAD representa las piezas que conforman cada conjunto de la estructura del robot bípedo y estará dividido en tres módulos: el módulo de la pierna derecha, el de la cadera y el módulo de la pierna izquierda (figuras 3.4, 3.5 y 3.6). Las tablas 3.3, 3.4 y 3.5, evidencian la representación de las piezas de cada módulo.

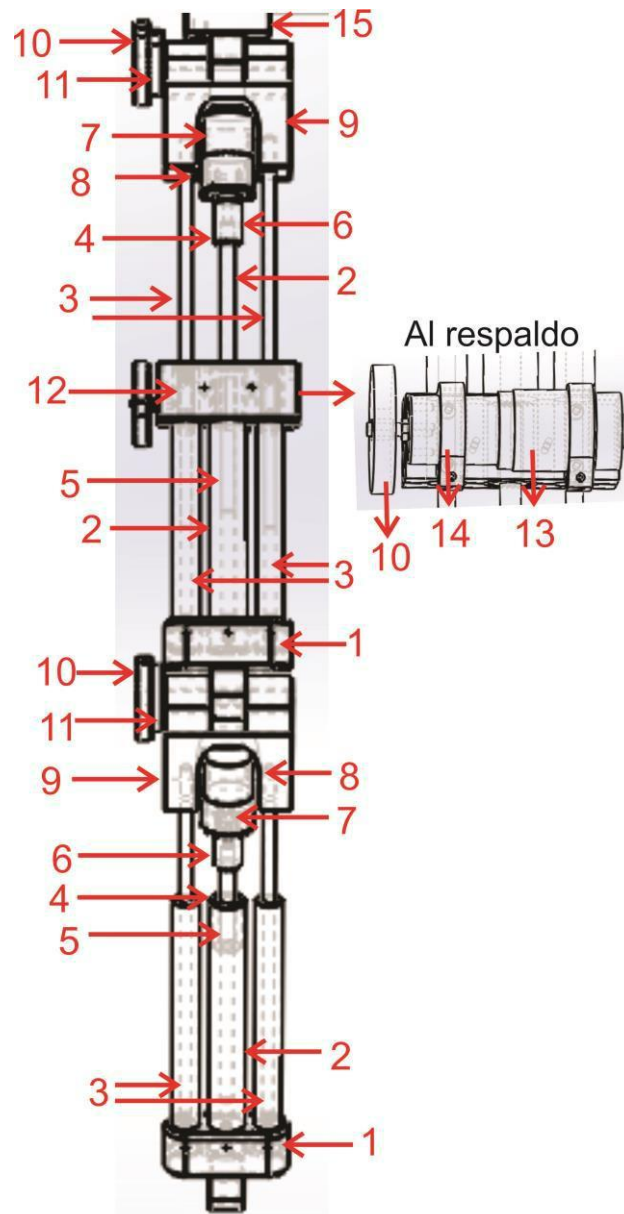
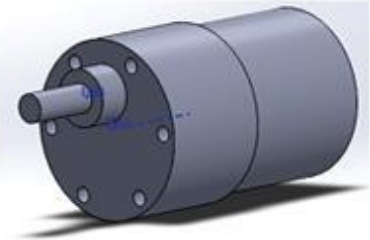
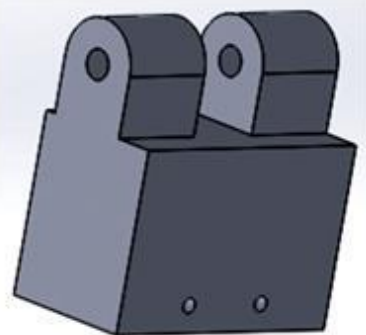


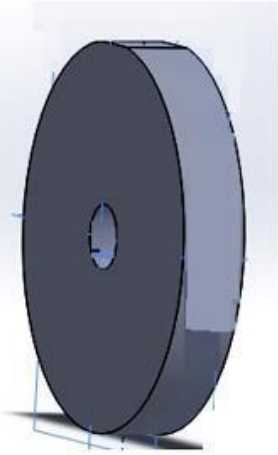

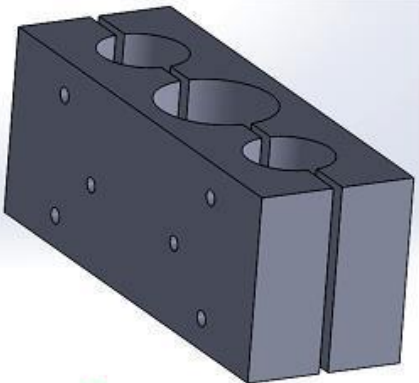
Figura 3.4. Numeración de los componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la pierna derecha

Tabla 3. 5. Componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la pierna derecha.

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="427 863 529 894">1. Base 1</p>	<p data-bbox="670 474 878 632">Sus piezas están hechas en Acrilonitrilo Butadieno Estireno (ABS).</p> <p data-bbox="670 695 878 947">El ABS es un plástico muy resistente al impacto (golpes) y se utiliza en automoción, en la industria y para el uso doméstico.</p>	<p data-bbox="904 537 1169 789">Esta es la base del módulo de la pierna derecha que conecta con las barras de soporte para el sistema tuerca tornillo. Y también la conexión entre la articulación de la rodilla</p>	<p data-bbox="1239 663 1263 695">2</p>
 <p data-bbox="435 1325 529 1356">2. Barra</p>	<p data-bbox="670 1136 878 1199">Las barras están hechas en ABS.</p>	<p data-bbox="904 1073 1169 1293">Estas barras permiten darle estabilidad al eslabón, al momento del cambio de percentiles (cuatro para el conjunto de cadera-rodilla y dos para el de rodilla-pie).</p>	<p data-bbox="1239 1136 1263 1167">6</p>
 <p data-bbox="427 1755 537 1787">3. Soporte</p>	<p data-bbox="670 1535 878 1661">El material en el que están hechos los soportes es ABS.</p>	<p data-bbox="904 1377 1169 1818">Los soporte y las barras permien darle estabilidad al sistema al momento del desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles (dos para el conjunto de cadera-rodilla y uno para el de rodilla-pie). Dentro de los soportes, están la tuerca y el tornillo como se muestra en el esquema.</p>	<p data-bbox="1239 1566 1263 1598">3</p>

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="354 808 505 842">4. Tuerca</p>	<p data-bbox="651 569 894 674">Esta pieza está hecha en acero 1010.</p>	<p data-bbox="919 422 1235 863">La tuerca es el complemento del tornillo (mecanismo tuerca tornillo) para permitir el desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles (la primera para el conjunto de cadera-rodilla y la segunda para el de rodilla-pie).</p>	<p data-bbox="1312 533 1333 567">2</p>
 <p data-bbox="378 1409 505 1442">5. Tornillo</p>	<p data-bbox="651 1150 894 1262">Tornillo de rosca cuadrada de 3/8 de paso 2.25.</p>	<p data-bbox="919 1010 1235 1409">Esta pieza es el acople de la tuerca, generando así el sistema tuerca tornillo y permitiendo el desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles (el primero para el conjunto de cadera-rodilla y el segundo para el de rodilla-pie).</p>	<p data-bbox="1312 1192 1333 1226">2</p>
 <p data-bbox="386 1850 496 1883">6. Buje</p>	<p data-bbox="651 1625 894 1843">El buje es de aluminio con tornillos prisioneros bristol de ¼ por media pulgada.</p>	<p data-bbox="919 1625 1235 1843">Es el que une el eje del motor con el eje del tornillo (uno para el conjunto de cadera-rodilla y el otro para el de rodilla-pie).</p>	<p data-bbox="1312 1625 1333 1659">2</p>

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="342 720 602 793">7. Motor para posicionamiento</p>	<p data-bbox="683 468 932 688">Lo que rodea al eje de este motoreductor DC está hecho aluminio y el resto en otros metales.</p>	<p data-bbox="954 432 1268 884">Motoreductor 100:1 37D x 57L, es el que permite a través del acople del buje y del tornillo hacer el desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles (uno para el conjunto de cadera-rodilla y el otro para el de rodilla-pie).</p>	<p data-bbox="1344 541 1369 573">2</p>
 <p data-bbox="367 1297 529 1329">8. Soporte</p>	<p data-bbox="683 1115 932 1220">Los soportes del motor están hechos en metal.</p>	<p data-bbox="954 1041 1268 1304">Sirven para fijar el motor en un área en específica (el primero para el conjunto de cadera-rodilla y el segundo para el de rodilla-pie).</p>	<p data-bbox="1344 1150 1369 1182">2</p>
 <p data-bbox="367 1759 513 1791">9. Base 2</p>	<p data-bbox="683 1528 932 1675">La base está hecha de Acrilonitrilo Butadieno Estireno.</p>	<p data-bbox="954 1486 1268 1707">Es la que permite la unión del primer eslabón con el segundo, y se encuentra centrada en el área de la rodilla.</p>	<p data-bbox="1344 1528 1369 1560">1</p>

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="362 884 553 926">10. Polea</p>	Las poleas están hechas en ABS.	Son las encargadas por medio de correas industriales de hacer el desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles (dos en el módulo de cadera-rodilla y una para el de rodilla-pie).	3
 <p data-bbox="321 1241 570 1283">11. Eje sólido</p>	Los ejes sólidos están hecho en ABS.	Su función es ensamblar las poleas, este conjunto va fijo a la base 2, permitiendo así el posicionamiento del sistema (uno en el módulo de cadera-rodilla y el otro para el de rodilla-pie).	2
 <p data-bbox="293 1843 607 1913">12. Soporte motor articulación rotacional</p>	El material de este soporte es ABS.	Permite fijar el motor del movimiento rotacional, se encuentra ubicado en el área de cadera-rodilla.	1

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="277 680 646 758">13. Motor articulación rotacional</p>	Este motor está hecho de una aleación de aluminio y otros metales.	El 12 RPM HD Premium Planetary Gear Motor w/Encoder es el encargado de permitir el movimiento rotacional a la articulación de la rodilla.	1
 <p data-bbox="342 1211 565 1247">14. Abrazadera</p>	Están hechas en ABS.	Es la encargada de sujetar el motor de la articulación de la rodilla.	1
 <p data-bbox="337 1709 613 1745">15. Base cadera</p>	Ésta base está compuesta de ABS.	Son las que conecta el módulo de la pierna derecha y el módulo de la pierna izquierda.	2

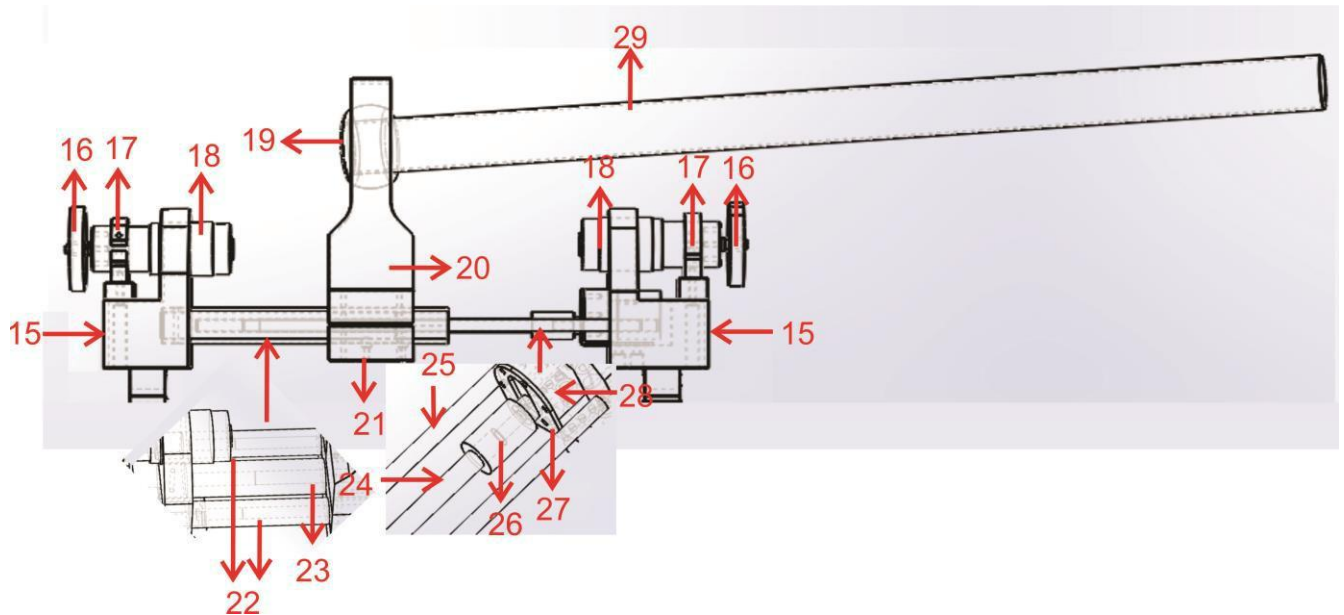
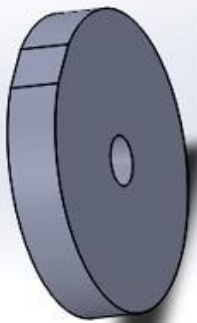





Figura 3. 5. Numeración de la estructura del módulo de la cadera

Tabla 3.6. Componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la cadera.

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p>16. Polea</p>	Las poleas están hechas en ABS.	Son las encargadas por medio de correas industriales de hacer el desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles (una en cada extremo de la cadera).	2

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="337 869 537 905">17. Abrazadera</p>	Están hechas en ABS.	Es la encargada de sujetar el motor de la articulación de la rodilla.	2
 <p data-bbox="315 1253 623 1325">18. Motor articulación rotacional</p>	Este motor está hecho de una aleación de aluminio y otros metales.	Los 12 RPM HD Premium Planetary Gear Motor w/Encoder son los encargados de permitir el movimiento rotacional a la articulación de la cadera.	2
 <p data-bbox="347 1703 532 1738">19. Rótula</p>	La rótula está hecha en ABS.	Conecta al soporte rotatorio que permite darle equilibrio al sistema (contrapeso)	1

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="277 909 634 951">20. Soporte rotatorio</p>	<p data-bbox="699 583 927 772">Esta pieza está hecha en Acrilonitrilo Butadieno Estireno.</p>	<p data-bbox="954 625 1252 737">Es el que conecta el tubo de 38 para darle equilibrio al sistema.</p>	<p data-bbox="1349 625 1370 653">1</p>
 <p data-bbox="251 1367 657 1409">21. Soporte del sistema</p>	<p data-bbox="699 1150 927 1262">El soporte del sistema está hecho en ABS.</p>	<p data-bbox="954 1108 1252 1339">Es el que conecta el área de la cadera con el contrapeso y ensambla las barras y el soporte del módulo.</p>	<p data-bbox="1349 1150 1370 1178">1</p>
 <p data-bbox="370 1885 537 1927">22. Barra</p>	<p data-bbox="699 1644 927 1717">Las barras están hechas en ABS.</p>	<p data-bbox="954 1602 1252 1833">Estas barras permiten darle estabilidad al eslabón, al momento del cambio de percentiles en el módulo de la cadera.</p>	<p data-bbox="1349 1686 1370 1713">2</p>

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="321 751 561 804">23. Soporte</p>	<p data-bbox="667 468 899 615">El material en el que están hechos los soportes es ABS.</p>	<p data-bbox="922 432 1235 768">Los soporte y las barras permien darle estabilidad al sistema al momento del desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles está ubicada en el módulo de la cadera.</p>	<p data-bbox="1336 506 1354 537">1</p>
 <p data-bbox="383 1304 505 1346">24. Eje</p>	<p data-bbox="678 1115 886 1178">El eje está hecho en ABS.</p>	<p data-bbox="922 1041 1235 1293">Este eje conecta con el buje del motor y permite ensamblar el soporte que comprende el mecanismo tuerca tornillo.</p>	<p data-bbox="1336 1073 1354 1104">1</p>
 <p data-bbox="342 1839 561 1871">25. Barrades</p>	<p data-bbox="667 1623 899 1686">Varilla calibrada de 3/8.</p>	<p data-bbox="922 1587 1235 1692">Permite desplazar los soportes del eslabón de la cadera.</p>	<p data-bbox="1336 1629 1354 1661">2</p>

Esquema	Material	Descripción	Cantidad por módulo
 <p data-bbox="386 695 505 730">26. Buje</p>	<p data-bbox="678 495 899 709">El buje es de aluminio con tornillos prisioneros bristol de ¼ por media pulgada.</p>	<p data-bbox="922 531 1205 636">Es el que une el eje del motor con el eje del tomillo.</p>	<p data-bbox="1300 569 1317 596">1</p>
 <p data-bbox="354 1098 521 1134">27. Soporte</p>	<p data-bbox="678 915 899 1020">Los soportes del motor están hechos en metal.</p>	<p data-bbox="922 915 1205 1020">Sirve para fijar el motor en el área de la cadera.</p>	<p data-bbox="1300 915 1317 942">1</p>
 <p data-bbox="354 1434 586 1503">28. Motor para posicionamiento</p>	<p data-bbox="678 1209 899 1461">Lo que rodea al eje de este motoreductor DC está hecho aluminio y el resto en otros metales.</p>	<p data-bbox="922 1209 1205 1535">Motoreductor 100:1 37D x 57L, es el que permite a través del acople del buje y del tomillo hacer el desplazamiento de los eslabones para el cambio de percentiles.</p>	<p data-bbox="1300 1318 1317 1346">1</p>
 <p data-bbox="326 1770 586 1818">29. Tubo de 38</p>	<p data-bbox="688 1717 878 1787">Este tubo está hecho en ABS.</p>	<p data-bbox="922 1644 1205 1896">Es el que permite darle equilibrio al robot bípedo y se encuentra ubicado justo en el medio del área de la cadera (contrapeso).</p>	<p data-bbox="1300 1717 1317 1745">1</p>

Debido a la simetría de las piernas del robot bípedo, se utilizan los mismos componentes electrónicos y mecánicos del módulo de la pierna derecha en el módulo de la pierna izquierda. El número de componentes que comprende todo el sistema es de 5 motores para las articulaciones prismáticas que son los que permite el cambio de percentiles de los eslabones, y 4 motores rotacionales que son los encargados de generar el movimiento en las articulaciones rotacionales; seguido de 32 piezas en el módulo de la pierna derecha y 32 en el módulo de la pierna izquierda, adicional, 19 elementos que conforman el área de la cadera, para un total de 92 piezas en todo el sistema.

CAPÍTULO 4: SELECCIÓN DE LOS COMPONENTES ELECTRÓNICOS DEL SISTEMA

En la variación de la longitud de los eslabones del robot bípedo, la selección de los componentes electrónicos juega un papel importante, porque se analizan, evalúan y seleccionan éstos para incorporar al mecanismo y para un alto desempeño en cuanto al funcionamiento del diseño, como los motores, los sensores y las tarjetas de adquisición de datos (DAQ); el ensamble de estos elementos genera, al momento de activarse, la ubicación en un punto o distancia d de dichos eslabones de acuerdo al percentil definido por el usuario, gracias a las señales generadas desde el software hacia la tarjeta NI PCI-6229, la cual transforma estos datos en un valor de entrada de voltaje hacia los actuadores. Por eso es importante hacer una selección de componentes eléctricos y electrónicos para el debido funcionamiento del prototipo seleccionado.

4.1. SENSORES

Para el posicionamiento de eslabones del robot bípedo es fundamental el uso de sensores de distancia que miden la variación de su longitud; con esto se logra establecer el rango de desplazamiento en el cual va a operar el sensor, definido entre los percentiles 5 y 95. En la tabla 4. 3. se evidencia la recopilación de las principales características de los sensores contemplados durante el proceso de selección para el posicionamiento del sistema a partir de los datos técnicos (datasheet) y las pruebas realizadas. Antes de la selección, es importante establecer el rango de medida que se debe sensar, en cuanto a distancia, con el fin de escoger un sensor que cumpla con los parámetros requeridos.

Los rangos máximos y mínimos de los percentiles entre el hombre y la mujer se muestran en la tabla 4.1., así como la distancia que debe examinar el sensor para el posicionamiento de los eslabones. Es importante aclarar que en esta tabla la medida máxima en las articulaciones de cadera – rodilla y rodilla – pie, es el del hombre, y para el ancho de la cadera, la medida máxima es la de la mujer, tal como se refleja en la tabla 4.2.

Tabla 4.1. Rango de distancia que debe tomar el sensor. (Medida máxima del hombre)

Dimensión	Máximo hombre (mm)	Mínimo mujer (mm)	Máximo hombre menos mínimo de mujer	Rango de medición requerido del sensor (mm)
Cadera-rodilla	405	285	120	120
Rodilla-pie	595	455	140	140

Tabla 4.2. Rango de distancia que debe tomar el sensor. (Medida máxima de la mujer)

Dimensión	Máximo mujer (mm)	Mínimo hombre (mm)	Máximo mujer menos mínimo hombre	Rango de medición requerido del sensor (mm)
Cadera-rodilla	405	285	120	120
Rodilla-pie	595	455	140	140

Se procede a hacer un estudio previo de sensores para seleccionar el mismo que dará cumplimiento a los parámetros requeridos para el posicionamiento correcto del cambio entre los percentiles 5 y 95 de los eslabones del robot. En este estudio se hace hincapié a los requerimientos del sensor definido por la distancia de operación, entre un rango de 0 a 140 mm, siendo este último obtenido por la diferencia entre el máximo mujer menos el mínimo del hombre; además, se hace la caracterización de ventajas y desventajas de cada sensor, y posteriormente, se determina si el sensor se adecúa a los requerimientos (ver tabla 4. 4), que cubran las distancias máximas requeridas (ver tabla 4. 3):

Tabla 4. 3. Criterios requeridos para la selección del sensor

Dimensión	Rango de operación (mm)
Cadera – rodilla	0 – 120
Rodilla – pie	0 - 140

Taba 4. 4. Caracterización de sensores

Imagen	Sensor	Ventaja	Desventaja	¿Cumple con los criterios requeridos?
	Potenciómetro Lineal	Se ubica de acuerdo a una señal de entrada	Debido a que es un sistema que funciona por contacto, a largo plazo puede generar ruido	No, debido a que en el comercio se encuentran estos potenciómetros lineales con un rango de funcionamiento de hasta 90 mm
	Sensor Infrarrojo Sharp GP2D120	Es un sensor óptico que, al no activarse por contacto, no genera desgaste.	Al momento de encapsularse para protegerlo de ruidos externos, pierde sensibilidad y disminuye su rango de funcionamiento	No, porque debido al encapsulamiento del sensor infrarrojo, el rango de medición se reduce a 80 mm
	LVDT	Es un sensor de fácil elaboración, se adecúa a los parámetros que requiera el sistema al que se implemente.	Tiene un rango de funcionamiento pequeño debido a que es inducido por un campo magnético	Debido al rango de funcionamiento mínimo, no cumple con los criterios
	Sensor Infrarrojo Sharp GP2Y0A21YK	Es un sensor óptico que, al no activarse por contacto, no genera desgaste.		Si, ya que resiste al encapsulamiento y no genera pérdida de sensibilidad

Para poder seleccionar el sensor, se requiere que este tenga un rango de medición entre 0 mm a 140 mm (medida máxima entre el hombre y la mujer).

Se evaluó cada sensor conforme al rango de medida máximo requerido para el cambio de percentiles; aunque el sensor Sharp GP2D120 cumplía con los parámetros, al momento de encapsularlo para protegerlo de ruidos externos, perdió efectividad en cuanto a la medición requerida y por eso se descartó, el potenciómetro deslizable RS6011Y1401A tiene un rango de medición de 0 mm a 90 mm, y al no cumplir con los requerimientos, se omitió, así como el sensor LVDT.

Finalmente se escoge el sensor de distancia infrarrojo GP2Y02A21YK de Sharp que utiliza señales infrarrojas para medir la distancia al objeto de 10 a 800 mm y que tiene una salida analógica, dando así cumplimiento del desplazamiento requerido. El rango de operación en el que trabaja este sensor muestra la siguiente curva de respuesta en la que se refleja la evolución del voltaje de salida respecto a la variación del desplazamiento, que se evidencia en su hoja técnica:

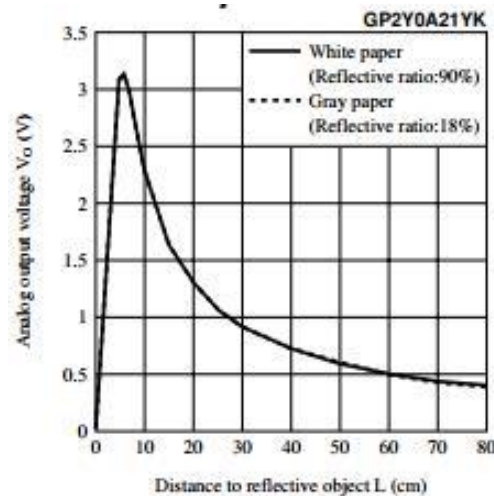


Figura. 4. 1. Voltaje análogo de salida (V_o) Vs. Distancia L realizada por el Sharp GP2Y0A21YK. Recuperado de “Sharp. General Purpose Type Distance Measuring Sensor. Fig. 5. Analog Output Voltage vs. Distance to Reflective Object”. Disponible en: <http://tdrobotica.co/download/GP2Y0A21YK.pdf>

La gráfica anterior (fig. 4. 1) da constancia de que el voltaje V_o va estabilizándose en un valor aproximado a los 0.6 V, a medida de que el desplazamiento L es mayor. Cuando L es aproximadamente 10 cm, comienza la operación del sensor, por eso se define en la hoja de

datos del fabricante el rango entre 10 y 80 cm. Sin embargo, se desea validar esta información, por lo que se procede al registro real de los datos del voltaje de salida cuando se implementa este dispositivo. La siguiente gráfica muestra los resultados de la implementación física que se realizó con el sensor, obteniendo un comportamiento similar al que se refleja en la figura 4. 4:

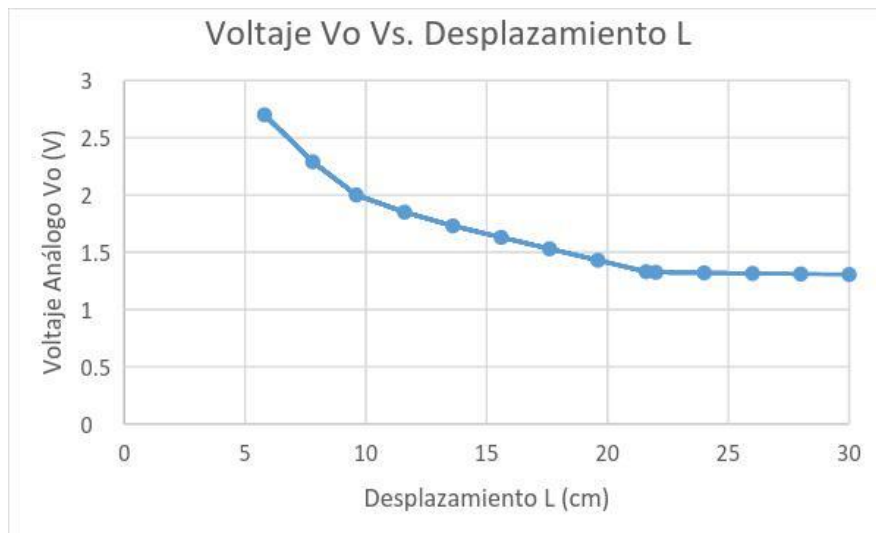


Figura. 4. 2. Gráfica de voltaje análogo de salida (V_o) vs distancia L , obtenida por la experimentación práctica del sensor Sharp GP2Y0A21YK

Utilizando Eureka versión estudiantil, que es un software para determinar ecuaciones matemáticas que describen conjuntos de datos en su forma más simple, y con base a la figura 4.2. se obtiene la siguiente ecuación:

$$= -0.001045 * x^3 + 0.04628 * x^2 - 0.7172 * x + 5.516$$

(98),

donde:

- x : voltaje de salida V_o (medido en V), y
- y : desplazamiento L (medido en cm).

Y para el control del sensor de distancia infrarrojo GP2Y02A21YK de Sharp, se tendrá en cuenta la siguiente ecuación obtenida mediante el software educativo Microsoft Mathematics versión estudiantil, que permite a los usuarios resolver problemas matemáticos y científicos.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{\frac{100000}{209} \cdot \frac{194860476496}{246491883} \cdot 2 \cdot \frac{77490975670847811584}{60758248384885689} \cdot \frac{100000}{209} \cdot \frac{194860476496}{246491883}} \\
 & \sqrt[3]{\frac{100000}{209} \cdot \frac{194860476496}{246491883} \cdot 2 \cdot \frac{77490975670847811584}{60758248384885689} \cdot \frac{100000}{209} \cdot \frac{194860476496}{246491883}} \\
 & \frac{9256}{+}
 \end{aligned}$$

(99)

Con base a la ecuación (99) se determina la siguiente curva de respuesta.

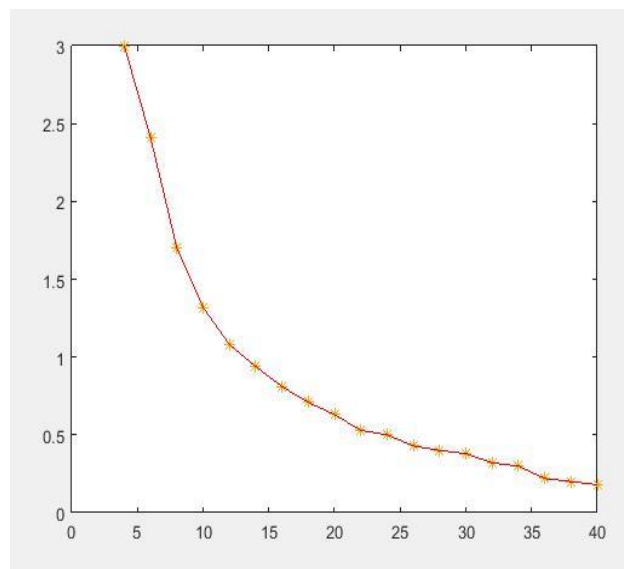


Figura 4. 3. Comportamiento del sensor con el desplazamiento como salida (eje x).

Este proceso de análisis de datos, establece la curva que relaciona la distancia en la que debe posicionarse el sensor frente al voltaje de salida. Teniendo como resultado tanto la curva final

como la ecuación en el eje x que permite el desplazamiento de los eslabones, el sensor tomará un valor de posicionamiento en específico de acuerdo al percentil que se le ingrese. Es adecuado el comportamiento del dispositivo ya que su comportamiento logarítmico permite una estabilidad de voltaje a mayor distancia recorrida, o un voltaje de operación adecuado para el manejo del sensor.

4. 2. ACTUADORES

Para el modelo diseñado es necesario utilizar dispositivos electrónicos que convierten la energía eléctrica generada por el sistema que va a controlar el desplazamiento de los eslabones del robot, principalmente (señal generada por el computador). Dicha conversión permite la activación de los procesos requeridos para lograr la variación de los percentiles establecidos, así como para brindar la capacidad al mecanismo de mover los eslabones en los planos sagital y frontal (para el caso de la implementación futura). De acuerdo a los torques hallados en el planteamiento de la dinámica del robot bípedo se seleccionan los motores de las articulaciones prismáticas y las articulaciones rotacionales.

Torque 1(articulación de la rodilla) = 3,34 N*m

Torque 2 (articulación prismática) =1,88 N*m



Torque 3(articulación de la cadera)= 17,89 N*m

Se utilizan dos clases de motores para realizar la implementación tanto del posicionamiento de los eslabones como para el movimiento rotacional de las articulaciones del robot bípedo. Para el cambio de los percentiles establecidos se tienen en cuenta el torque, expresado en Newton por metro (N*m) y la velocidad apropiada, definida en revoluciones por minuto (RPM), como características principales del motor a emplear. Además, se emplean cinco motores DC para las articulaciones prismáticas (Motoreductor 100:1 37D x 57L) y cuatro para las articulaciones rotacionales (12 RPM HD Premium Planetary Gear Motor w/Encoder).

4. 2.1. Parámetros físicos de los motores

La siguiente tabla muestra los parámetros correspondientes a los motores seleccionados para cada articulación del robot bípedo.

Tabla 4. 5. Parámetros físicos de los motores^{11 12}:

Imagen	Motor	Dimensiones	Características
	Motoreductor 100:1 37D x 57L (para posicionamiento)	Tamaño: 57 Longitud x 37 Diámetro (mm) - Peso: 200 gr. - Diámetro del eje: 6 mm	- Torque máximo a 12 V: 1,57 N*m - Velocidad sin carga del motor a 6 V: 50 rpm - Corriente máxima consumida a 6 V: 2500 mA - Velocidad sin carga del motor a 12 V: 100 rpm - Corriente sin carga del motor a 12 V: 300 mA - Corriente máxima consumida a 12 V: 5000 mA
	12 RPM HD Premium Planetary Gear Motor w/Encoder (para rotación articular)	Tamaño: 118.1 Longitud x 38 Diámetro (mm) - Peso: 380 gr - Diámetro del eje: 6 mm	Voltaje nominal. 12v. Rango de voltaje recomendado (6V- 12V) Velocidad (sin carga): 12 RPM Corriente. 20A - Torque. 57,3 N*m

4. 2. 2. Motor para el sistema de posicionamiento

Se implementa el Motoreductor 100:1 37D x 57L, debido a que el torque que se requiere para el cambio de eslabones es suficiente para la masa que se va a levantar, además de manejar

¹¹ Tdrobótica.co (2017). Motorreductor 100:1 37D x 57L/ 16 kg-cm/100 RPM. Recuperado de <http://tdrobotica.co/motoreductor-1001-37d-x-57116-kg-cm100-rpm/424.html>.

¹² Servocity.com (2017) 12 RPM HD Premium Planetary Gear Motor w/Encoder. Recuperado de <https://www.servocity.com/12-rpm-hd-premium-planetary-gear-motor-w-encoder>

una velocidad apropiada al determinar el cambio de percentiles. Este actuador es el más aproximado a los valores de torque y desplazamiento, calculados a partir de las ecuaciones de masa, e inercia en los ejes x y, respectivamente. Como El torque que se requiere para ejecutar el desplazamiento de los eslabones no es tan incidente como lo es el que controla las articulaciones rotacionales, se utiliza uno que maneje un torque característico en el que se hace una aproximación de que la masa que va a mover, es de 10kg.

4. 2. 3. Motor para las articulaciones rotacionales

Al momento de definir las características del motor de rotación, se ha de considerar cuánta masa ha de poder levantar éste cuando en el futuro ejecute su fase de caminata. Dicha rotación en las articulaciones para el movimiento en los planos sagital y frontal ha de necesitar un torque de aproximadamente 500 Kg – cm, así como una velocidad que logre el levantamiento de ese peso; esta acción requiere de un motor con un alto torque, proporcionado por una cantidad de corriente considerable, y por esto se emplea el motor 12 RPM HD Premium Planetary Gear con Encoder, con un torque de 584 Kg-cm, lo suficientemente alto para ejecutar dicha tarea. Para definir estos valores o unos aproximados, se hizo recurso de la herramienta de identificación de MATLAB®, en la cual dados los valores de torque definidos con anterioridad, permitió establecer la función de transferencia general, y a su vez, el torque mínimo de motor (reflejada en la ecuación ()). Cabe aclarar que la corriente de arranque de motor es superior a la especificada por el fabricante, llegando hasta el doble (20 mA, aproximadamente).

4.3. TARJETA DE CONTROL

Para el área del centro de operaciones del sistema en general, se requiere de una tarjeta de adquisición de datos (DAQ) que contemple varias señales de entradas y de salidas análogas y digitales, al tiempo, puesto que para el diseño del robot no basta con las que ofrece tarjetas que manejan un rango mínimo de señales, se elige la tarjeta National Instruments PCI-6229, que ofrece un rango alto de estas variables. Para el diseño del robot bípedo se emplean 5

señales de entrada análogas y 30 canales configurados como entradas-salidas digitales para el posicionamiento de los eslabones y el movimiento de las articulaciones

La figura 4.4. muestra la tarjeta de adquisición de datos que es la que está disponible en la Universidad y con la que se pretende trabajar a futuro para implementar la construcción del robot.



Figura. 4. 4. Tarjeta National Instruments PCI-6229

La National Instruments PCI-6229 es una tarjeta de adquisición de datos (DAQ) multifuncional que permite el tratamiento de señales de computadora, sean estas análogas o digitales, procesándolas y convirtiéndolas en señales eléctricas o físicas que activan un dispositivo electrónico, como el subsistema compuesto por el sensor y el motor; consta de 36 canales análogos (32 entradas y 4 salidas) y 48 canales digitales configurables como entradas o salidas, según se requiera. También posee una resolución ADC de 16 bits y trata diversas señales al tiempo, permitiendo una comunicación eficaz, cuestión que no pueden solventar otras tarjetas DAQ, y permite la ejecución de uno o varios procesos en tiempo real, gracias al manejo de Real Time.

La NI PCI-6229 se destaca en el mecanismo completo como la interfaz entre el software y el hardware, dado el procesamiento de las señales que proporciona la CPU para adquirir las señales análogas y digitales necesarias durante el proceso (ver fig. 4. 5).

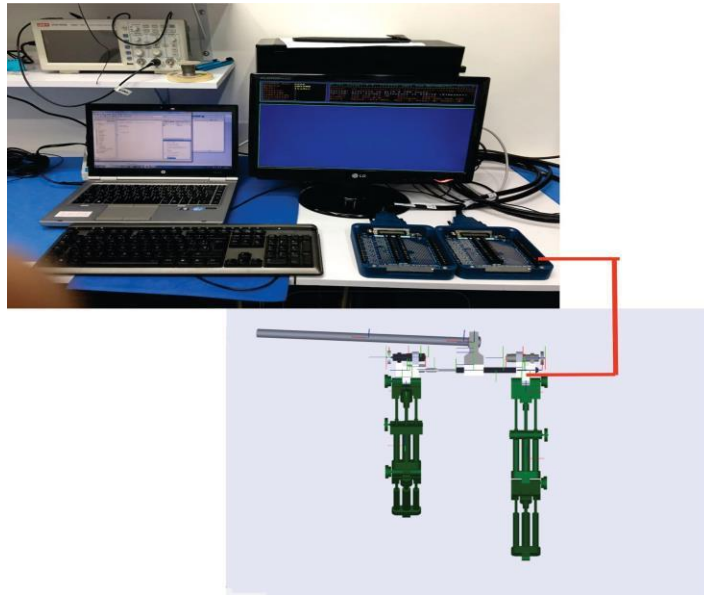


Figura. 4. 5. Comunicación completa

En la figura 4. 6. Se muestra la configuración de los canales que maneja la tarjeta.

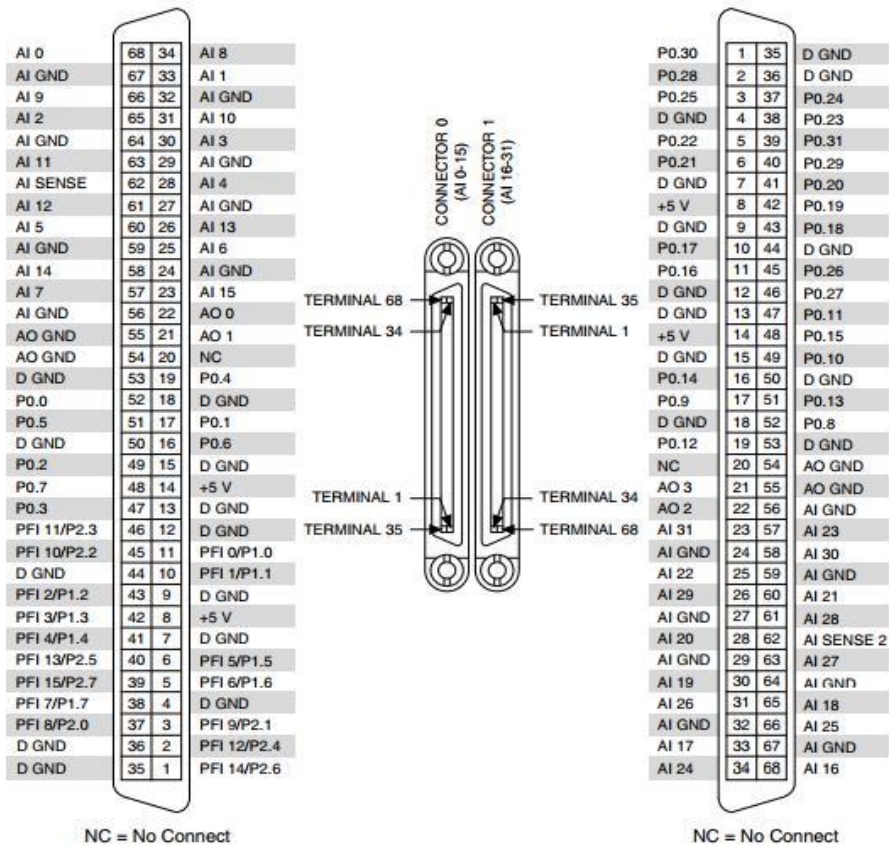



Figura. 4. 6. Configuración de canales de la National Instruments PCI-6229

4. 4. TARJETAS DE ALIMENTACIÓN

Las tarjetas de alimentación son las fuentes que proveen de energía eléctrica a los componentes electrónicos para el posterior funcionamiento del robot bípedo. En este proyecto se emplean fuentes de 12 V DC, para la activación de los actuadores, fuentes de 5 V para los sensores y además, la energía brindada por el PC de procesamiento de datos para la tarjeta National Instruments PCI – 6229. En la tabla 4. 11., se analizan con detalle las fuentes de energías utilizadas.

Tabla 4.6. Fuentes de alimentación para la activación del prototipo

Imagen	Referencia	Energía suministrada	Función	Cantidad
	Fuente dual regulable de voltaje UNI - T UTP3702S 0 – 32 V DC	12 V	Alimentación de 5 drivers L298N	3
	Tarjeta National Instruments PCI - 6229	Se establece a partir de la configuración determinada por el usuario	Generación de las salidas análogas y digitales a emplear en el prototipo	1
	Driver Puentes H L298N (se pueden conectar 2 motores DC)	5 V	Después de energizado con la fuente de 12 V, éste proporciona 5 V para la alimentación de los sensores.	3
	Driver Puentes H L298N (para articulaciones rotacionales)	12 V	Activa los 9 motores 12 RPM HD Premium Planetary Gear con encóder	2

Imagen	Referencia	Energía suministrada	Función	Cantidad
	PC LG, con procesador INTEL CORE I7, Windows 8	5 V	Alimentación de la tarjeta NI PCI – 6229, a partir del puerto serial	1

Es fundamental saber identificar con qué valor de voltaje se alimenta cada componente electrónico, esto para prevenir daños en los circuitos.


4. 5. DRIVERS

Se requiere de estos drivers para el control del sentido de giro y del PWM tanto para los motores que se emplean para el sistema de posicionamiento (articulaciones prismáticas) como los que manejan las articulaciones rotacionales, con un voltaje y corriente determinada de acuerdo a los parámetros de los motores a utilizar.

4. 5. 1. Módulo Driver L298N (para las articulaciones prismáticas)

Este dispositivo permite controlar funciones del motor como el PWM y el sentido de giro. Es de fácil acceso y manejo para el usuario. A continuación se muestran los parámetros de funcionamiento:

Tabla 4. 7. Características de Módulo Driver L298N

Especificaciones	Imagen
-Doble puente H -Chip L298N -Voltaje lógico: 5V -Voltage de operación: 5V-35V -Corriente control: 0mA-36mA -Máxima corriente de operación: 2A(por motor) -Temperatura de operación: -20 to +135 C -Máxima portencia: 25W	

La figura 4.7 muestra los pines del puente H L298.

Un puente H es un circuito electrónico que permite el giro en ambos sentidos, avance y retroceso a un motor eléctrico DC, son utilizados en el área de la robótica y como convertidores de potencia.

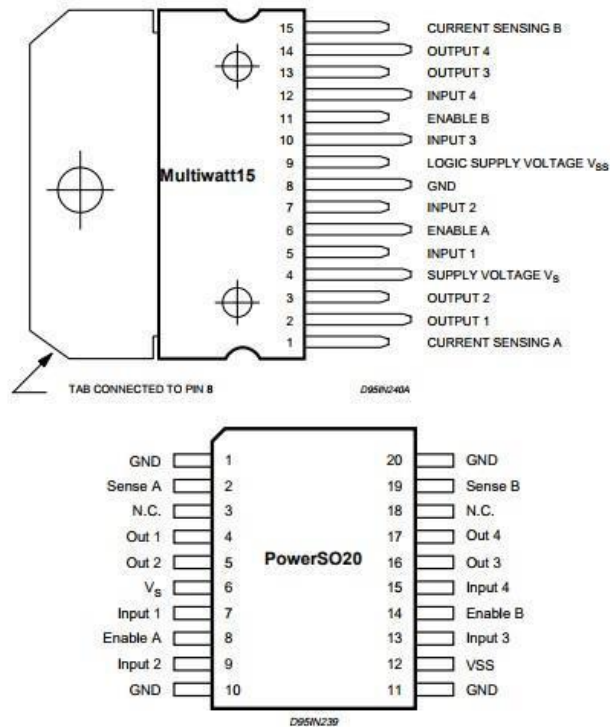


Figura.4. 7. Pines puente H L298

La figura 4.8. muestra el circuito del puente H que se emplea para controlar el sentido de giro de un motor de corriente continua y sirve para controlar motores de mediana potencia.

El sentido de giro del motor DC depende de los niveles de voltaje llamados avance y retroceso, y sólo uno de ellos puede estar a nivel alto para activar los transistores correspondientes y permitir su giro.

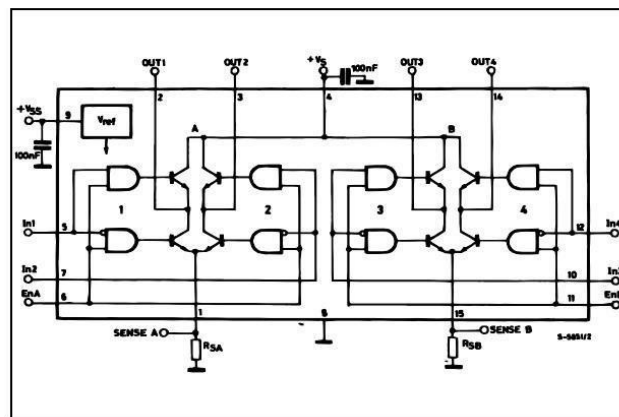


Figura.4. 8. Pines del módulo H 1298P¹³

4. 5. 2. Módulo Driver L298N (para las articulaciones rotacionales)

A diferencia del driver que se utiliza para el control de giro de los motores para las articulaciones prismáticas, éste módulo, permite una corriente más alta para el uso de los motores que se utilizarán para las articulaciones rotacionales.

¹³tdrobótica.co (2017) Block Diagram (Full-Bridge) – L298P. Recuperado de https://www.sparkfun.com/datasheets/Robotics/L298_H_Bridge.pdf

Tabla 4. 8. Características de Módulo Driver L298N

Especificaciones	Imagen
-Doble puente H -Voltaje de operación: hasta 50V -Corriente máxima: 2A por canal o 4A máximo (con fuente de voltaje externa) -Sensado de corriente: 1.65V/A	

4.6. ESQUEMA DE CONEXIÓN

El siguiente esquema muestra la conexión de los actuadores, los sensores y los drivers conectados a la tarjeta de adquisición de datos National Instruments PC-6229 (variables NI1 y NI2), que en conjunto permite la activación tanto de las articulaciones rotacionales como la de las articulaciones prismáticas. Las variables s1, s2, s2, s4 y s5, hacen referencia a los sensores que van conectados a las articulaciones prismáticas para efectuar el cambio de percentiles en los eslabones; los motores m1, m2, m3, m4 y m5 son los de las articulaciones prismáticas con sus respectivos drivers para controlar el sentido de giro d1, d2, d3, d4 y d5; y m6, m7, m8 y m9 son los motores para las articulaciones rotacionales, con los drivers que le permite el controlar el sentido de giro d6 y d7.

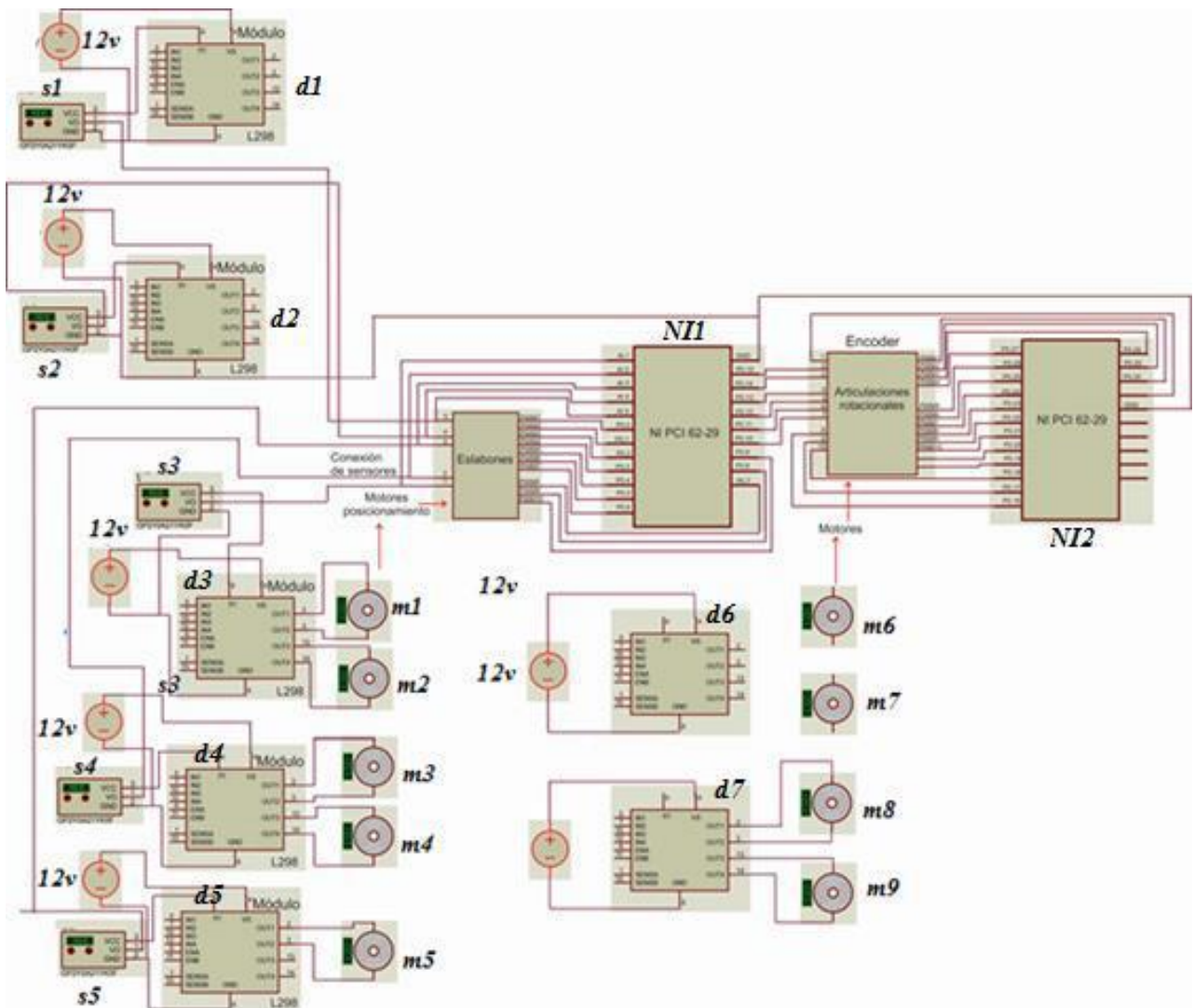


Figura. 4.9. Esquema de conexión general del sistema

4.7. MODELO DE LA PLANTA (ROBOT BÍPEDO)

El análisis desarrollado en el inciso 3. 2, permitió obtener el modelo dinámico del robot bípido, con el que se pudo obtener las ecuaciones de los torques que deben emplear los motores para activar el mecanismo que variará los eslabones de acuerdo a un percentil determinado por el usuario. La representación dinámica se expresa en la ecuación (81):

$$= \ddot{+} \quad +$$

En las cuales las matrices C (de gravedad), y H (fuerzas centrípetas y de Coriolis) dependen de q y \dot{q} , respectivamente. El cálculo de las fuerzas del mecanismo () considera la eficiencia de torque, y mucho más si en el actuador si existen fuerzas perturbadoras o de rozamiento, por lo que la ecuación a tener en cuenta para determinar un valor mayormente definido es la siguiente:

$$\tau = \dots \quad (82)$$

La no linealidad de la ecuación (81) permite obtener el modelo directo para representar la trayectoria planeada para el recorrido de los percentiles de los eslabones, pero al conocer la efectividad del torque que necesita el motor para tal fin (definido en (82)), se propone el desarrollo del modelo a partir de las variables de estado. Para comenzar, se definen como dichas variables, las posiciones y velocidades que desarrolle cada una de las articulaciones; en este proyecto se establecen las longitudes y distancias de las articulaciones prismáticas, y los giros de las articulaciones rotacionales, así como las variaciones de estas. El vector de estado se establece como sigue:

$$[\]$$

donde $q = [q_1; q_2; q_3; q_4; q_5; q_6; q_7; q_8; q_9]$;

$\dot{q} = [dq_1; dq_2; dq_3; dq_4; dq_5; dq_6; dq_7; dq_8; dq_9]$;
 $d = [d2q_1; d2q_2; d2q_3; d2q_4; d2q_5; d2q_6; d2q_7; d2q_8; d2q_9]$;

Los resultados de las matrices D, H y C, se muestran en los anexos No.6, No 8 y No. 9, respectivamente.

Si las fuerzas centrífugas y de gravedad implicadas en el movimiento del mecanismo se establecen como un término adicional N ($N = H + C$), entonces la ecuación (80) se plantea como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \tag{83}$$

Determinando \dot{x} como la variación de la velocidad ejercida por las articulaciones en el dominio del tiempo, y empleando para esto las variables de estado definidas:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{84}$$

Para obtener una representación mejor desarrollada de las variables de estado, se aplican estas en términos de entradas y salidas (las que alimentará y generará el sistema):

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{85}$$

Donde I es la matriz identidad y $\dot{x} = -1 \begin{bmatrix} - & - \end{bmatrix}$, y sobre esta excitación del sistema cae la no linealidad, por ende, se obtiene una representación lineal en términos del desplazamiento generado por los motores y las velocidades de dicho movimiento, se deduce que: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz cuadrada $2n \times 2n$, y $B = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$, vector de $2n \times n$.

Modelando el estado característico $\dot{x} = +$ de (85), se obtiene el siguiente diagrama de bloques:

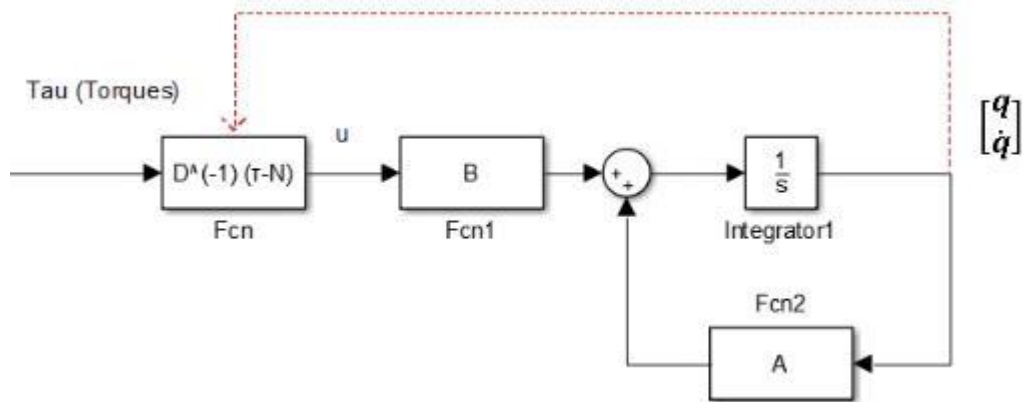


Figura 4. 10. Diagrama de bloques de la dinámica de un robot en el espacio de estados

En síntesis, el análisis de los componentes electrónicos que harán activar el sistema diseñado, incorpora elementos del análisis antropométrico definidos en las dimensiones de trabajo, y más aún, estableciendo el valor máximo de la cadera – rodilla, rodilla – pie o ancho de cadera; Se hace la evaluación del sensor que cumpla con el rango percentil definido en 140 mm, en el cual el sensor Sharp GP2Y02A21YK es la mejor opción para trabajar la distancia de operación requerida. Posteriormente, se hace un estudio de los motores, de tal forma que se adquieran los que cumplan con el criterio establecido en la ecuación de dinámica, es decir, que maneje los torques calculados en la sección 3. 3. Además, se definen los componentes de activación de los sensores y actuadores, junto con la tarjeta de adquisición de datos (DAQ) National Instruments PCI – 6229, para establecer el sistema de conexión y de control como se definen en las figuras 4. 9 y 4. 10.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5. 1. Conclusiones

- Luego de la búsqueda de información y la presentación de alternativas viables para el diseño se encontró en la valoración y análisis que el sistema tuerca tornillo es recomendable por cuanto a las características físicas que incluyen la baja fricción, la variación casi nula del centro de gravedad, el tiempo de respuesta adecuado para la variación de sus longitudes, la rigidez que le brinda al sistema, la eficiencia en el posicionamiento y además es un mecanismo liviano.
- Debido al análisis de los estados de la marcha bípeda, se desarrollan dos modelos cinemáticos para el robot bípedo mediante los parámetros de Denavit-Hartenberg: el primer modelo es el momento en el que el robot tiene el pie derecho en fase de soporte simple (contacto con el suelo) y el izquierdo está en estado de balanceo, y el segundo, cuando el pie izquierdo está en fase de soporte simple y el pie derecho está en balanceo; cuando ocurre la transición del primer modelo al segundo, las 2 piernas hacen un contacto simultáneo con el suelo; definiendo así los modelos correspondientes al robot de 9 GDL, 5 prismáticos que son los encargados del posicionamiento de los eslabones y 4 rotacionales que permitirán la marcha del robot.
- El desarrollo del modelo dinámico del robot bípedo por el método algorítmico de Lagrange – Euler permitió hallar la ecuación de torque en donde se establecen la matriz de inercia D , la aceleración angular $\ddot{\theta}$, la matriz de fuerzas de Coriolis y centrípeta H y C como columnas de fuerzas de gravedad, obteniendo así los valores de los torques requeridos tanto para las articulaciones prismáticas como para las articulaciones rotacionales, con el fin de facilitar la selección de los motores cuyos torques tuvieran una aproximación a los hallados en la ecuación final del modelo dinámico para el robot bípedo de 9 GDL.
- Se seleccionan los componentes electrónicos para el funcionamiento adecuado del robot bípedo como los sensores infrarrojos lineales que se encargan de operar dentro del rango de variación de los percentiles requeridos, los motores aptos para mover las

masas de las articulaciones prismáticas y rotacionales, además de los módulos drivers que permiten el control de sentido de giro de los motores y la tarjeta de adquisición de datos que controla las señales digitales y análogas del sistema; con estos elementos seleccionados se logra llevar a cabo la futura construcción del robot bípedo para un funcionamiento óptimo.

- La realización de este Trabajo de Grado habrá la posibilidad de gestionar espacios en los cuales se fomente la enseñanza de la robótica no sólo en el ámbito universitario, sino en cualquier otro espacio académico.
- Este proyecto es novedoso ya que se trabaja una configuración antropométrica dada por la variación de los percentiles de los eslabones del robot; esto no se evidencia en los prototipos bípedos que tratan un solo tipo de antropometría.

5. 2. Recomendaciones

- Se espera que sea de alguna consideración importante a tener presente en el trabajo desarrollado construir el prototipo de robot bípedo para evidenciar el cambio de percentiles en los eslabones de rodilla-pie, cadera-rodilla y módulo de cadera.
- En el presente diseño no se contempla el sistema de control para el cambio de percentiles, razón por la cual se debe adelantar el diseño correspondiente.
- Es también recomendable un proceso de identificación con pruebas en tiempo real, en el cual se puedan registrar señales medibles de los motores con el que se desarrollará la identificación de sistemas, para poder efectuar un proceso con diferentes métodos de solución.

Bibliografía

- [1] Da, X., Harib, O., Hartley, R., & Griffin, B. (2016). From 2D Design of Underactuated Bipedal Gaits to 3D Implementation: Walking With Speed Tracking. *IEEE Access*, 3469-3477.
- [2] Galloway, K., Sreenath, K., Ames, A. D., & Grizzle, J. W. (2015). Torque Saturation in Bipedal Robotic Walking Through Control Lyapunov Function-Based Quadratic Programs. *IEEE Access*, 323-332.
- [3] He, B., Wang, Z., Shen, R., & Hu, S. (2014). Real-time Walking Pattern Generation for a Biped Robot with Hybrid CPG-ZMP Algorithm. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-10.
- [4] Lee, H., & Neville, H. (2015). Time-Varying Ankle Mechanical Impedance During Human Locomotion. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 755-764.
- [5] Vázquez, J. A., & Velasco-Villa, M. (2013). Design and Real-Time Control of a 4-DOF Biped Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-11.
- [6] Wang, L., Liu, F., Xu, S., Wang, Z., Cheng, S., & Zhang, J. (2010). Design, Modeling and Control of a Biped Line-Walking Robot. *International Advanced Robotic Systems*, 39-47.
- [7] Sreejith, C. & Sreeshma, K. (2012). Design and Experimental Implementation of Bipedal Robot. *International Journal of Advanced Computer Research*, Vol. 2. No. 3, 33-39.
- [8] Nirmala, Tanaya, P. I. & Sinaga, M. (2015). A Study on Bipedal and Mobile Robot Behavior Through Modeling and Simulation. *CommIT (Communication and Information Technology) Journal*, Vol 9, No 1. 1-10.
- [9] Shih, C., Lee, W. & Wu, C. (2012). Planning and Control of Stable Walking for a 3D Bipedal Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 9, 1-10.
- [10] Wee, T. C. (2014). Mechanical design and optimal control of humanoid robot (TPinokio). *The Journal of Engineering*. 1-12.

- [11] Kwon, S. & Park, J. (2012). Kinesiology-Based Robot Foot Design for Human-Like Wlaking. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-10.
- [12] Aloulou, A. & Boubaker, O. (2010). Control of a Step Walking Combined to Arms Swimming for a Three Dimensional Humanoid Prototype. *Journal of Computer Science* 6, Vol. 8, 886-895.
- [13] López Guillén, M. E. Identificación de sistemas, aplicación al modelado de un motor de continua. *Universidad de Alcalá, España. Departamento de Electrónica*. Recuperado de <http://www.depeca.uah.es/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema6.pdf>
- [14] Barrientos, A. *Fundamentos de Robótica*. Mc. Graw Hill, segunda edición. 2007.
- [15] Pérez Cisneros, M., Cuevas Jiménez, E., y Zaldívar Navarro, D. *Fundamentos de Robótica con Matlab y Simulink*. Alfaomega, primera edición. México. 2015.
- [16] Saha, S. K. *Introducción a la Robótica*. Mc. Graw Hill. primera edición. 2008.
- De León Gómez, V. Pámanes, J. y Santibañez, V. (2015). Evaluación experimental del caminado en tiempo real de un robot bípedo de 5 g.d.l. con marcha basada en movimientos cicloidales.

[11]

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial. 12(1),^[12] 40

- [17] Vázquez, J. A. y Velasco-Villa, M. (2013). Experimental Estimation of Slipping in the Supporting Point of a Biped Robot. *Journal of Applied Research and Technology*, 11(1), 348-359.
- [18] Peca, M., Sojka, M. y Hanzálek, Z. (2007). SPEJBL– The Biped Walking Robot. *Czech Technical University in Prague*, 1(1), 63-70.
- [19] Aguilar, D. y Vivas, A. Modelado y control de un robot bípedo de nueve grados de libertad.

Universidad del Cauca, Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, 1(1), 1-6.

- [20] González Mejía, S. Ramírez Scarpetta, J. M. y Avella Rodríguez, E. J. (2015). Técnicas de control para el balance de un robot bípedo: un estado del arte. *Tecnura*, 19(43), 133-156.

- [21] Méndez Rodríguez, C. y Ordoñez Córdoba, J. A. (2014). Modelado de un bípedo junto a un mecanismo robótico exoesqueleto. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, 1(23), 67-73.
- [22] Barrero Parra, A. M., Quiroga Páez, D. F. y Suárez Ramírez, L. (2009). Estudio y desarrollo de una estrategia para controlar la estabilidad de una plataforma bípeda con proporciones antropométricas, e implementación de un prototipo capaz de caminar en un proyecto plano PeDro. (Trabajo de pregrado) Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- [23] Vega Bustamante, M. M. (2008). Diseño, construcción e implementación de sistemas de medidas de fuerzas de reacción en robots bípedos. (trabajo de pregrado). Universidad Simón Bolívar, Sertenejas.
- [24] Sánchez Alonso, R. E., González Barbosa, J. J., Castillo Castañeda, E. y García Murillo, M. A. (2016). Análisis cinemático de un Novedoso Robot Paralelo Reconfigurable. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 1(13), 247-257.
- [25] Da, X., Harib, O., Hartley, R., & Griffin, B. (2016). From 2D Design of Underactuated Bipedal Gaits to 3D Implementation: Walking With Speed Tracking. *IEEE Access*, 3469-3477.
- [26] Galloway, K., Sreenath, K., Ames, A. D., & Grizzle, J. W. (2015). Torque Saturation in Bipedal Robotic Walking Through Control Lyapunov Function-Based Quadratic Programs.
- [27] He, B., Wang, Z., Shen, R., & Hu, S. (2014). Real-time Walking Pattern Generation for a Biped Robot with Hybrid CPG-ZMP Algorithm. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-10.
- [28] Lee, H., & Neville, H. (2015). Time-Varying Ankle Mechanical Impedance During Human Locomotion. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 755-764.
- [29] Vázquez, J. A., & Velasco-Villa, M. (2013). Design and Real-Time Control of a 4-DOF Biped Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-11.
- [30] Wang, L., Liu, F., Xu, S., Wang, Z., Cheng, S., & Zhang, J. (2010). Design, Modeling and Control of a Biped Line-Walking Robot. *International Advanced Robotic Systems*, 39-47.

- [31] Sreejith, C. & Sreeshma, K. (2012). Design and Experimental Implementation of Bipedal Robot. *International Journal of Advanced Computer Research*, Vol. 2. No. 3, 33-39.
- [32] Nirmala, Tanaya, P. I. & Sinaga, M. (2015). A Study on Bipedal and Mobile Robot Behavior Through Modeling and Simulation. *CommIT (Communication and Information Technology) Journal*, Vol 9, No 1. 1-10.
- [33] Shih, C., Lee, W. & Wu, C. (2012). Planning and Control of Stable Walking for a 3D Bipedal Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 9, 1-10.
- [34] Wee, T. C. (2014). Mechanical design and optimal control of humanoid robot (TPinokio). *The Journal of Engineering*. 1-12.
- [35] Kwon, S. & Park, J. (2012). Kinesiology-Based Robot Foot Design for Human-Like Walking. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1-10.
- [36] Aloulou, A. & Boubaker, O. (2010). Control of a Step Walking Combined to Arms Swimming for a Three Dimensional Humanoid Prototype. *Journal of Computer Science* 6, Vol. 8, 886-895.
- [37] Arcos Legarda, W. J. (2013). Control autónomo de un exoesqueleto de marcha para pacientes con discapacidad motora. *Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Máster en Ingeniería y Automatización Industrial*.
- [38] Saha, S. K. Introducción a la Robótica. Mc. Graw Hill. primera edición. 2008.
- [39] López Guillén, M. E. Identificación de sistemas, aplicación al modelado de un motor de continua. *Universidad de Alcalá, España. Departamento de Electrónica*. Recuperado de <http://www.depeca.uah.es/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema6.pdf>
- [40] Martínez Bueno, Á. (2011). Identificación experimental de sistemas. *Universidad de Alicante, GITE - IEA*.
- [41] Rodríguez Ramírez, D. & Bordóns Alba, C. (2005). Apuntes de Ingeniería de Control.

Luego se procede a igualar la columna de A_{110}^9 , obtenida a partir de los parámetros D – H, con el vector de posición P1 (3(11+d1)), obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & \bullet (l3 + d3) - (l1 + d1) - (l4 + d4) * \left(\frac{\cos(\theta1) * \cos(\theta3)}{(\cos(\theta3)^2 - \sin(\theta3)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)} + \right. \\
 & \left. \frac{\cos(\theta1) * \sin(\theta3)}{(\cos(\theta3)^2 - \sin(\theta3)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)} - \frac{(l2 + d2) * \cos(\theta1)}{\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2} \right) \\
 & = 0 \qquad (41), \\
 & \bullet (l4 + d4) * ((\sin(\theta3) * (\sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) \\
 & + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) \\
 & + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / (\cos(\theta1)^2 + \\
 & \sin(\theta1)^2) + (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 & \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)))) - \\
 & \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 & \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / ((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2))) / (\cos(\theta3)^2 - \\
 & \sin(\theta3)^2) - (\cos(\theta3) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 & \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)))) - \\
 & \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 & \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / ((\cos(\theta3)^2 - \sin(\theta3)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2))) + \\
 & (l2 + d2) * \sin(\theta1) - (l5 + d5) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \\
 & \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 & \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))) + \\
 & (l4 + d4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 & \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - ((l2 + d2) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 & \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)))) - \\
 & \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 & \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) \\
 & + ((l3 + d3) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \\
 & \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) -
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_1) + \sin(\theta_3) (\cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_1))}{\cos(\theta_1)^2} = 0, \quad (42),$$

- $$\begin{aligned} & (l_1+d_1) + (l_2+d_2) \cos(\theta_1) - \\ & (l_4+d_4) * ((\sin(\theta_3) * (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) - (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2))) / (\cos(\theta_3)^2 - \sin(\theta_3)^2) + (\cos(\theta_3) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / ((\cos(\theta_3)^2 - \sin(\theta_3)^2) * (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2)) - (l_5+d_5) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) + (l_4+d_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + (l_2+d_2) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + ((l_3+d_3) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) = 0 \quad (43), \end{aligned}$$

Se analiza, además, lo que se puede remplazar obteniendo las siguientes igualdades:

$$l_1 + d_1 = l_5 + d_5 \quad (44),$$

$$\theta_1 = \theta_5 \quad (46), y$$

$$l_2 + d_2 = l_4 + d_4 \quad (45),$$

$$\theta_2 = \theta_4 \quad (47).$$

Remplazando (44), (45), (46) y (47) en (41), (42) y (43), se obtienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas, que resuelven el problema cinemático inverso:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad (l1 + d1) &= (l3 + d3) - (l4 + d4) * \left(\frac{\cos(\theta1) * \cos(\theta3)}{(\cos(\theta3)^2 - \sin(\theta3)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin(\theta1) * \sin(\theta1)}{(l2 + d2) * \cos(\theta1)} \right) - \frac{(l2 + d2) * \cos(\theta1)}{\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2} + \\
 &\quad (48), \\
 \bullet \quad (l2 + d2) &= \frac{1 / ((\sin(\theta3) * ((\sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 &\quad \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1))) - \\
 &\quad \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 &\quad \sin(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) + \\
 &\quad (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1))) + \\
 &\quad \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 &\quad \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / ((\cos(\theta1)^2 + \\
 &\quad \sin(\theta1)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)) / (\cos(\theta3)^2 - \sin(\theta3)^2) - \\
 &\quad (\cos(\theta3) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1))) + \\
 &\quad \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 &\quad \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / ((\cos(\theta3)^2 - \\
 &\quad \sin(\theta3)^2) * (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)) + (l2 + d2) * \sin(\theta1) - \\
 &\quad (l5 + d5) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1))) + \\
 &\quad \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 &\quad \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))) + \\
 &\quad (l4 + d4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \\
 &\quad \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - ((l2 + d2) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 &\quad \cos(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1))) - \\
 &\quad \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta1) - \sin(\theta1) * \sin(\theta1)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \\
 &\quad \cos(\theta1) * \sin(\theta1)))))) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) + \\
 &\quad ((l3 + d3) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta1) + \cos(\theta1) * \sin(\theta1))) +
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)))}{\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2} \quad (49),$$

$$\bullet \frac{2(l_1+d_1) + (l_2+d_2) * \cos(\theta_1) - (l_2+d_2) * ((\sin(\theta_3) * ((\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) - (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2))}{(\cos(\theta_3) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / ((\cos(\theta_3)^2 - \sin(\theta_3)^2) * (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2)) - (l_5+d_5) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))) + (l_4+d_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - ((l_2+d_2) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + ((l_3+d_3) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_1)))))) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) = 0 \quad (50).$$

	θ_{21}	θ_{22}	θ_{23}	P_{21}
A_{21}	$-\rho_1$	ρ_1	ρ_1	r_{11}
A_{22}	ρ_1	ρ_1	ρ_1	r_{12}
A_{23}	0	0	0	1

$$P_{21} = d_3 - d_1 - l_1 + l_3 - (d_4 + l_4) * ((\cos(\theta_1) * \cos(\theta_3)) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2)) + (\cos(\theta_2) * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_3)) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2))) - (\cos(\theta_1) * (d_2 + l_2)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + (\cos(\theta_1) * (d_3 + l_3)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2)$$

$$P_{22} = (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) * (d_4 + l_4) - (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d_5 + l_5) - \sin(\theta_1) * (d_2 + l_2) + ((\sin(\theta_3) * ((\sin(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)))))) / (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) + (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2))) / (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2) - (\cos(\theta_3) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2)) * (d_4 + l_4) - (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d_2 + l_2)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d_3 + l_3)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2)$$

$$\begin{aligned}
P_{23} = & d1 + l1 + \cos(\theta1)*(d2 + l2) + (\cos(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) \\
& + \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \cos(\theta2)*\sin(\theta1))) - \sin(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2)*\sin(\theta1)) - \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)))*(d5 + l5) - \\
& (\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) + \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2)*\sin(\theta1)))*(d4 + l4) + ((\sin(\theta3)*((\sin(\theta2)*(\cos(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2)*\sin(\theta1)) - \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2))) + \\
& \sin(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) + \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2)*\sin(\theta1)))))/(\cos(\theta2)^2 + \sin(\theta2)^2) - \\
& (\cos(\theta1)*\cos(\theta2)*(\cos(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) + \\
& \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \cos(\theta2)*\sin(\theta1))) - \sin(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2)*\sin(\theta1)) - \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)))))/((\cos(\theta1)^2 + \\
& \sin(\theta1)^2)*(\cos(\theta2)^2 + \sin(\theta2)^2)))/(\cos(\theta3)^2 + \sin(\theta3)^2) + \\
& (\cos(\theta3)*\sin(\theta1)*(\cos(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) + \\
& \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \cos(\theta2)*\sin(\theta1))) - \sin(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2)*\sin(\theta1)) - \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)))))/((\cos(\theta1)^2 + \\
& \sin(\theta1)^2)*(\cos(\theta3)^2 + \sin(\theta3)^2)))*(d4 + l4) + \\
& (\sin(\theta1)*(\cos(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) + \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) \\
& + \cos(\theta2)*\sin(\theta1))) - \sin(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \cos(\theta2)*\sin(\theta1)) - \\
& \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2))))*(d2 + l2))/(\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) - \\
& (\sin(\theta1)*(\cos(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2)) + \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) \\
& + \cos(\theta2)*\sin(\theta1))) - \sin(\theta4)*(\cos(\theta3)*(\cos(\theta1)*\sin(\theta2) + \cos(\theta2)*\sin(\theta1)) - \\
& \sin(\theta3)*(\cos(\theta1)*\cos(\theta2) - \sin(\theta1)*\sin(\theta2))))*(d3 + l3))/(\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)
\end{aligned}$$

De nuevo se procede a hacer igualación de vectores, en este caso será el vector de posición $P_{2(3 \times 1)}$, el más relevante, obteniendo las siguientes ecuaciones:

- $$\begin{aligned}
& d3 - d1 - l1 + l3 - (d4 + l4)*((\cos(\theta1)*\cos(\theta3))/((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)*(\cos(\theta3)^2 + \\
& \sin(\theta3)^2)) + (\cos(\theta2)*\sin(\theta1)*\sin(\theta3))/((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)*(\cos(\theta2)^2 + \\
& \sin(\theta2)^2)*(\cos(\theta3)^2 + \sin(\theta3)^2))) - (\cos(\theta1)*(d2 + l2))/(\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) \\
& + (\cos(\theta1)*(d3 + l3))/(\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) = 0 \quad (75);
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
& (\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)))*(d_4 + l_4) - (\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) \\
& - \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)))*(d_5 + l_5) - \\
& \sin(\theta_1)*(d_2 + l_2) + ((\sin(\theta_3)*((\sin(\theta_2)*(\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1))) - \\
& \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)))))/(\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) + \\
& (\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2)*(\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \\
& \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)))))/((\cos(\theta_1)^2 + \\
& \sin(\theta_1)^2)*(\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2))/(\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2) - \\
& (\cos(\theta_3)*\sin(\theta_1)*(\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \\
& \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)))))/((\cos(\theta_1)^2 + \\
& \sin(\theta_1)^2)*(\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2))*(d_4 + l_4) - \\
& (\sin(\theta_1)*(\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \\
& \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)))*(d_2 + \\
& l_2))/(\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + (\sin(\theta_1)*(\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \\
& \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)))*(d_3 + l_3))/(\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) = 0 \quad (76);
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
& d_1 + l_1 + \cos(\theta_1)*(d_2 + l_2) + (\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) \\
& + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1))) - \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)))*(d_5 + l_5) - \\
& (\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)))*(d_4 + l_4) + ((\sin(\theta_3)*((\sin(\theta_2)*(\cos(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2)*\sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2))) + \\
& \sin(\theta_4)*(\cos(\theta_3)*(\cos(\theta_1)*\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)*\sin(\theta_2)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))))) / (\cos(\theta_2)^2 + \\
& \sin(\theta_2)^2) - (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))) - \\
& \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)))))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2)) / (\cos(\theta_3)^2 \\
& + \sin(\theta_3)^2) + (\cos(\theta_3) \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))) - \\
& \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)))))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2)) * (d_4 + l_4) + \\
& (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)))) * (d_2 + \\
& l_2)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) - (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))) - \\
& \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)))) * (d_3 + l_3)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) = l_5 + d_5 \quad (77).
\end{aligned}$$

Como se realizó anteriormente, se remplazan (44), (45), (46) y (47) en (75), (77), y se vuelven a obtener 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

- $$\begin{aligned}
(l_1 + d_1) = & \tan^{-1} [(\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2))) * (d_4 + l_4) - \\
& (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)))] * (d_5 + l_5) - \sin(\theta_1) * (d_2 + l_2) + \\
& ((\sin(\theta_3) * ((\sin(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)))))) / (\cos(\theta_2)^2 + \\
& \sin(\theta_2)^2) + (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2))) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2)) / (\cos(\theta_3)^2 \\
& + \sin(\theta_3)^2) - (\cos(\theta_3) * \sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \\
& \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2)) * (d_4 + l_4) - \\
& (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d_2 + \\
& l_2) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + (\sin(\theta_1) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \\
& \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d_3 + l_3)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) / [d_3 - d_1 - l_1 + l_3 - (d_4 \\
& + l_4) * ((\cos(\theta_1) * \cos(\theta_3)) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2)) + \\
& (\cos(\theta_2) * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_3)) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_2)^2 + \\
& \sin(\theta_2)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2))] - (\cos(\theta_1) * (d_2 + l_2)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) \\
& + (\cos(\theta_1) * (d_3 + l_3)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2)] \quad (78),
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
& (l_2 + d_2) = (l_4 + d_4) = \tan^{-1} [[(d_3 - d_1 - l_1 + l_3 - (d_4 + \\
& l_4) * ((\cos(\theta_1) * \cos(\theta_3)) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2)) \\
& + (\cos(\theta_2) * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_3)) / ((\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) * (\cos(\theta_2)^2 + \\
& \sin(\theta_2)^2) * (\cos(\theta_3)^2 + \sin(\theta_3)^2))] - (\cos(\theta_1) * (d_2 + l_2)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) \\
& + (\cos(\theta_1) * (d_3 + l_3)) / (\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2)]^2 + ((\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \\
& \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) * (d_4 + l_4) - \\
& (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) \\
& - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2))) + \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)))) * (d_5 + l_5) - \sin(\theta_1) * (d_2 + l_2) + \\
& ((\sin(\theta_3) * ((\sin(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)) + \\
& \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1))) - \sin(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) \\
& + \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1)) - \sin(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2)))))) / (\cos(\theta_2)^2 + \\
& \sin(\theta_2)^2) + (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) * (\cos(\theta_4) * (\cos(\theta_3) * (\cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (d4 + l4) * ((\cos(\theta1) * \cos(\theta3)) / ((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) * (\cos(\theta3)^2 + \sin(\theta3)^2))) \\
& + (\cos(\theta2) * \sin(\theta1) * \sin(\theta3)) / ((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) * (\cos(\theta2)^2 + \\
& \sin(\theta2)^2) * (\cos(\theta3)^2 + \sin(\theta3)^2))) - (\cos(\theta1) * (d2 + l2)) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) \\
& + (\cos(\theta1) * (d3 + l3)) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)^2 + ((\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) \\
& + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2))) * (d4 + l4) - \\
& (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) \\
& - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)))) + \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \\
& \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))) * (d5 + l5) - \sin(\theta1) * (d2 + l2) + \\
& ((\sin(\theta3) * ((\sin(\theta2) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \\
& \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))) - \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) \\
& + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)))))) / (\cos(\theta2)^2 + \\
& \sin(\theta2)^2) + (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)))) + \\
& \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))))) / ((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) * (\cos(\theta2)^2 + \sin(\theta2)^2))) / (\cos(\theta3)^2 \\
& + \sin(\theta3)^2) - (\cos(\theta3) * \sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)))) + \\
& \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))))) / ((\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) * (\cos(\theta3)^2 + \sin(\theta3)^2))) * (d4 + l4) - \\
& (\sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \\
& \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)))) + \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \\
& \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))) * (d2 + \\
& l2)) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2) + (\sin(\theta1) * (\cos(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) + \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta1)) - \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)))) + \\
& \sin(\theta4) * (\cos(\theta3) * (\cos(\theta1) * \cos(\theta2) - \sin(\theta1) * \sin(\theta2)) + \sin(\theta3) * (\cos(\theta1) * \sin(\theta2) \\
& + \cos(\theta2) * \sin(\theta1)))) * (d3 + l3)) / (\cos(\theta1)^2 + \sin(\theta1)^2)^2 \Big]^{(1/2)} \quad (80)
\end{aligned}$$

Anexo No.3. Resultados de las matrices $_{1^0}$ hasta $_{0^9}$.

$$A01 = [0 \ 0 \ -1 \ 0; -1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ l1+d1; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$A02=A01*A12;$$

$$A02 =$$

$$[0, 1, 0, 0]$$

$$[-\cos(\text{teta1}), 0, \sin(\text{teta1}), 0]$$

$$[\sin(\text{teta1}), 0, \cos(\text{teta1}), l1 + d1]$$

$$[0, 0, 0, 1]$$

$$A03=A01*A12*A23;$$

$$A03 =$$

$$[0, 0, -1, 0]$$

$$[-\cos(\text{teta1}), \sin(\text{teta1}), 0, \sin(\text{teta1})*(l2 + d2)]$$

$$[\sin(\text{teta1}), \cos(\text{teta1}), 0, l1 + d1 + \cos(\text{teta1})*(l2 + d2)]$$

$$[0, 0, 0, 1]$$

$$A04=A01*A12*A23*A34;$$

$$A04 =$$

$$[0, 0, 1, 0]$$

$$[\sin(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) - \cos(\text{teta1})*\cos(\text{teta2}), -\cos(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) - \cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta1}), \\ 0, \sin(\text{teta1})*(l2 + d2)]$$

$$[\cos(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta1}), \sin(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) - \cos(\text{teta1})*\cos(\text{teta2}), \\ 0, l1 + d1 + \cos(\text{teta1})*(l2 + d2)]$$

$$[0, 0, 0, 1]$$

$$A05=A01*A12*A23*A34*A45;$$

$$A05 =$$

$$[0, 0, 1, l3 + d3]$$

$$[\sin(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) - \cos(\text{teta1})*\cos(\text{teta2}), -\cos(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) - \cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta1}), \\ 0, \sin(\text{teta1})*(l2 + d2)]$$

$$[\cos(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta1}), \sin(\text{teta1})*\sin(\text{teta2}) - \cos(\text{teta1})*\cos(\text{teta2}), \\ 0, l1 + d1 + \cos(\text{teta1})*(l2 + d2)]$$

[0, 0, 0, 1]

$$A06=A01*A12*A23*A34*A45*A56;$$

A06 =

[0, -1, 0, l3 + d3]

[- cos(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)) -
sin(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)), 0,
cos(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)) + sin(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2)
- sin(teta1)*sin(teta2)), sin(teta1)*(L2 + d2)]

[cos(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)) -
sin(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)), 0,
cos(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)) - sin(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2)
+ cos(teta2)*sin(teta1)), l1 + d1 + cos(teta1)*(l2 + d2)]

[0, 0, 0, 1]

$$A07=A01*A12*A23*A34*A45*A56*A67;$$

A07 =

[0, 0, -1, l3 + d3]

[- cos(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)) -
sin(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)), cos(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) +
cos(teta2)*sin(teta1)) + sin(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)), 0,
sin(teta1)*(L2 + d2) + (L4 + d4)*(cos(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1))
+ sin(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)))] [

cos(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)) - sin(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2)
- sin(teta1)*sin(teta2)), cos(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) - sin(teta1)*sin(teta2)) -
sin(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)), 0, l1 + d1
+ cos(teta1)*(L2 + d2) + (L4 + d4)*(cos(teta3)*(cos(teta1)*cos(teta2) -
sin(teta1)*sin(teta2)) - sin(teta3)*(cos(teta1)*sin(teta2) + cos(teta2)*sin(teta1)))]

[0, 0, 0, 1]

$$A08=A01*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78;$$

$$A08 =$$

$$[0, 1, 0, l3 + d3]$$

$$\begin{aligned} & [\sin(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1})) + \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}))) - \\ & \cos(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2})) + \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1}))), 0, \\ & \sin(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2})) + \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1}))) - \\ & \cos(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1})) + \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}))), \sin(\text{teta1}) * (l2 + d2) + (L4 + \\ & d4) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1})) + \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2})))] \\ & [\cos(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1})) - \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}))) + \\ & \sin(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2})) - \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1}))), 0, - \\ & \cos(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2})) - \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1}))) - \\ & \sin(\text{teta4}) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1})) - \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}))), l1 + d1 + \cos(\text{teta1}) * (l2 + d2) + \\ & (L4 + d4) * (\cos(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \cos(\text{teta2}) - \sin(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2})) - \\ & \sin(\text{teta3}) * (\cos(\text{teta1}) * \sin(\text{teta2}) + \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta1})))] [0, 0, 0, 1] \end{aligned}$$

$$A09=A01*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;$$

$$A09 =$$

$$[0, 1, 0, L3 + d3]$$

Anexo No.4. Resultados de las matrices

$$U_{11}=1*QP*A_{01};$$

$$U_{12}=0; U_{13}=0; U_{14}=0; U_{15}=0; U_{16}=0; U_{17}=0; U_{18}=0; U_{19}=0;$$

$$U_{21}=1*QP*A_{02};$$

$$U_{22}=A_{01}*QR*A_{12};$$

$$U_{23}=0; U_{24}=0; U_{25}=0; U_{26}=0; U_{27}=0; U_{28}=0; U_{29}=0;$$

$$U_{31}=1*QP*A_{03};$$

$$U_{32}=A_{01}*QR*A_{12}*A_{23};$$

$$U_{33}=A_{02}*QP*A_{23};$$

$$U_{34}=0; U_{35}=0; U_{36}=0; U_{37}=0; U_{38}=0; U_{39}=0;$$

$$U_{41}=1*QP*A_{04};$$

$$U_{42}=A_{01}*QR*A_{12}*A_{23}*A_{34};$$

$$U_{43}=A_{02}*QP*A_{23}*A_{34};$$

$$U_{44}=A_{03}*QR*A_{34};$$

$$U_{45}=0; U_{46}=0; U_{47}=0; U_{48}=0; U_{49}=0;$$

$$U_{51}=1*QP*A_{05};$$

$$U_{52}=A_{01}*QR*A_{12}*A_{23}*A_{34}*A_{45};$$

$$U_{53}=A_{02}*QP*A_{23}*A_{34}*A_{45};$$

$$U_{54}=A_{03}*QR*A_{34}*A_{45};$$

$$U_{55}=A_{04}*QP*A_{45};$$

$$U_{56}=0; U_{57}=0; U_{58}=0; U_{59}=0;$$

$$U_{61}=1*QP*A_{06};$$

$$U_{62}=A_{01}*QR*A_{12}*A_{23}*A_{34}*A_{45}*A_{56};$$

$U63=A02*QP*A23*A34*A45*A56;$

$U64=A03*QR*A34*A45*A56;$

$U65=A04*QP*A45*A56;$

$U66=A05*QR*A56;$

$U67=0; U68=0; U69=0;$

$U71=1*QP*A07;$

$U72=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67;$

$U73=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67;$

$U74=A03*QR*A34*A45*A56*A67;$

$U75=A04*QP*A45*A56*A67;$

$U76=A05*QR*A56*A67;$

$U77=A06*QP*A67;$

$U78=0; U79=0;$

$U81=1*QP*A08;$

$U82=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78;$

$U83=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78;$

$U84=A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78;$

$U85=A04*QP*A45*A56*A67*A78;$

$U86=A05*QR*A56*A67*A78;$

$U87=A06*QP*A67*A78;$

$U88=A07*QR*A78;$

$U89=0;$

$U91=1*QP*A09;$

$U92=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;$

$U93=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;$

$U94=A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;$

$U95=A04*QP*A45*A56*A67*A78*A89;$

$$U96=A05*QR*A56*A67*A78*A89;$$

$$U97=A06*QP*A67*A78*A89;$$

$$U98=A07*QR*A78*A89;$$

$$U99=A08*QP*A89;$$

Anexo No. 5. Resultados de la matriz U_{ijk} .

$$U111=1*QP*1*QP*A01;$$

$$U112=0; U113=0; U114=0; U115=0; U116=0; U117=0; U118=0; U119=0; U121=0;$$

$$U122=0; U123=0; U124=0; U125=0; U126=0; U127=0; U128=0; U129=0; U131=0;$$

$$U132=0; U133=0; U134=0; U135=0; U136=0; U137=0; U138=0; U139=0; U141=0;$$

$$U142=0; U143=0; U144=0; U145=0; U146=0; U147=0; U148=0; U149=0; U151=0;$$

$$U152=0; U153=0; U154=0; U155=0; U156=0; U157=0; U158=0; U159=0; U161=0;$$

$$U162=0; U163=0; U164=0; U165=0; U166=0; U167=0; U168=0; U169=0; U171=0;$$

$$U172=0; U173=0; U174=0; U175=0; U176=0; U177=0; U178=0; U179=0; U181=0;$$

$$U182=0; U183=0; U184=0; U185=0; U186=0; U187=0; U188=0; U189=0; U191=0;$$

$$U192=0; U193=0; U194=0; U195=0; U196=0; U197=0; U198=0; U199=0;$$

$$U211=1*QP*1*QP*A02;$$

$$U212=1*QP*A01*QR*A12;$$

$$U213=0; U214=0; U215=0; U216=0; U217=0; U218=0; U219=0;$$

$$U221=1*QP*A01*QR*A12;$$

$$U222=A01*QR*1*QR*A12;$$

$$U223=0; U224=0; U225=0; U226=0; U227=0; U228=0; U229=0;$$

$$U231=0; U232=0; U233=0; U234=0; U235=0; U236=0; U237=0; U238=0; U239=0;$$

$$U241=0; U242=0; U243=0; U244=0; U245=0; U246=0; U247=0; U248=0; U249=0;$$

$$U251=0; U252=0; U253=0; U254=0; U255=0; U256=0; U257=0; U258=0; U259=0;$$

$$U261=0; U262=0; U263=0; U264=0; U265=0; U266=0; U267=0; U268=0; U269=0;$$

$$U271=0; U272=0; U273=0; U274=0; U275=0; U276=0; U277=0; U278=0; U279=0;$$

U281=0; U282=0; U283=0; U284=0; U285=0; U286=0; U287=0; U288=0; U289=0;
 U291=0; U292=0; U293=0; U294=0; U295=0; U296=0; U297=0; U298=0; U299=0;

U311=1*QP*1*QP*A03;

U312=1*QP*A01*QR*A12*A23;

U313=1*QP*A02*QP*A23;

U314=0; U315=0; U316=0; U317=0; U318=0; U319=0;

U321=1*QP*A01*QR*A12*A23;

U322=A01*QR*1*QR*A12*A23;

U323=A01*QR*A12*QP*A23;

U324=0; U325=0; U326=0; U327=0; U328=0; U329=0;

U331=1*QP*A02*QP*A23;

U332=A01*QR*A12*QP*A23;

U333=A02*QP*1*QP*A23;

U334=0; U335=0; U336=0; U337=0; U338=0; U339=0;

U341=0; U342=0; U343=0; U344=0; U345=0; U346=0; U347=0; U348=0; U349=0;

U351=0; U352=0; U353=0; U354=0; U355=0; U356=0; U357=0; U358=0; U359=0;

U361=0; U362=0; U363=0; U364=0; U365=0; U366=0; U367=0; U368=0; U369=0;

U371=0; U372=0; U373=0; U374=0; U375=0; U376=0; U377=0; U378=0; U379=0;

U381=0; U382=0; U383=0; U384=0; U385=0; U386=0; U387=0; U388=0; U389=0;

U391=0; U392=0; U393=0; U394=0; U395=0; U396=0; U397=0; U398=0; U399=0;

U411=1*QP*1*QP*A04;

U412=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34;

U413=1*QP*A02*QP*A23*A34;

U414=1*QP*A03*QR*A34;

U415=0; U416=0; U417=0; U418=0; U419=0;

U421=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34;

U422=A01*QR*1*QR*A12*A23*A34;

U423=A01*QR*A12*QP*A23*A34;

$U424=A01*QR*A12*A23*QR*A34;$
 $U425=0; U426=0; U427=0; U428=0; U429=0;$
 $U431=1*QP*A02*QP*A23*A34;$
 $U432=A01*QR*A12*QP*A23*A34;$
 $U433=A02*QP*1*QP*A23*A34;$
 $U434=A02*QP*A23*QR*A34;$
 $U435=0; U436=0; U437=0; U438=0; U439=0;$
 $U441=1*QP*A03*QR*A34;$
 $U442=A01*QR*A12*A23*QR*A34;$
 $U443=A02*QP*A23*QR*A34;$
 $U444=A03*QR*1*QR*A34;$
 $U445=0; U446=0; U447=0; U448=0; U449=0;$
 $U451=0; U452=0; U453=0; U454=0; U455=0; U456=0; U457=0; U458=0; U459=0;$
 $U461=0; U462=0; U463=0; U464=0; U465=0; U466=0; U467=0; U468=0; U469=0;$
 $U471=0; U472=0; U473=0; U474=0; U475=0; U476=0; U477=0; U478=0; U479=0;$
 $U481=0; U482=0; U483=0; U484=0; U485=0; U486=0; U487=0; U488=0; U489=0;$
 $U491=0; U492=0; U493=0; U494=0; U495=0; U496=0; U497=0; U498=0; U499=0;$

 $U511=1*QP*1*QP*A05;$
 $U512=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45;$
 $U513=1*QP*A02*QR*A23*A34*A45;$
 $U514=1*QP*A03*QR*A34*A45;$
 $U515=1*QP*A04*QR*A45;$
 $U516=0; U517=0; U518=0; U519=0;$
 $U521=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45;$
 $U522=A01*QR*1*QR*A12*A23*A34*A45;$
 $U523=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45;$
 $U524=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45;$
 $U525=A01*QR*A12*A23*A34*QR*A45;$
 $U526=0; U527=0; U528=0; U529=0;$

U531=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45;
 U532=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45;
 U533=A02*QP*1*QP*A23*A34*A45;
 U534=A02*QP*A23*QR*A34*A45;
 U535=A02*QP*A23*A34*QP*A45;
 U541=1*QP*A03*QR*A34*A45;
 U542=A01*QR*A03*QR*A34*A45;
 U543=A02*QP*A12*A23*QR*A34*A45;
 U544=A03*QR*1*QR*A34*A45;
 U545=A03*QR*A34*QP*A45;
 U546=0; U547=0; U548=0; U549=0;
 U551=1*QP*A04*QP*A45;
 U552=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45;
 U553=A02*QP*A23*A34*QP*A45;
 U554=A03*QR*A34*QP*A45;
 U555=A04*QP*1*QP*A45;
 U556=0; U557=0; U558=0; U559=0;
 U561=0; U562=0; U563=0; U564=0; U565=0; U566=0; U567=0; U568=0; U569=0;
 U571=0; U572=0; U573=0; U574=0; U575=0; U576=0; U577=0; U578=0; U579=0;
 U581=0; U582=0; U583=0; U584=0; U585=0; U586=0; U587=0; U588=0; U589=0;
 U591=0; U592=0; U593=0; U594=0; U595=0; U596=0; U597=0; U598=0; U599=0;

U611=1*QP*1*QP*A06;
 U612=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56;
 U613=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56;
 U614=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56;
 U615=1*QP*A04*QP*A45*A56;
 U616=1*QP*A05*QR*A56; U617=0; U618=0;
 U619=0;
 U621=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56;

$U_{622}=A_{01} * QR * 1 * QR * A_{12} * A_{23} * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{623}=A_{01} * QR * A_{12} * QR * A_{23} * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{624}=A_{01} * QR * A_{12} * A_{23} * QR * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{625}=A_{01} * QR * A_{12} * A_{23} * A_{34} * QR * A_{45} * A_{56};$
 $U_{626}=A_{01} * QR * A_{12} * A_{23} * A_{34} * A_{45} * QR * A_{56};$
 $U_{627}=0; U_{628}=0; U_{629}=0;$
 $U_{631}=1 * QP * A_{02} * QP * A_{23} * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{632}=A_{01} * QR * A_{12} * QP * A_{23} * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{633}=A_{02} * QP * 1 * QP * A_{23} * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{634}=A_{02} * QP * A_{23} * QR * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{635}=A_{02} * QP * A_{23} * A_{34} * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{636}=A_{02} * QP * A_{23} * A_{34} * A_{45} * QR * A_{56}; U_{637}=0;$
 $U_{638}=0; U_{639}=0;$
 $U_{641}=1 * QP * A_{03} * QR * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{642}=A_{01} * QR * A_{12} * A_{23} * QR * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{643}=A_{02} * QP * A_{23} * QR * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{644}=A_{03} * QR * 1 * QR * A_{34} * A_{45} * A_{56};$
 $U_{645}=A_{03} * QR * A_{34} * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{646}=A_{03} * QR * A_{34} * A_{45} * QR * A_{56}; U_{647}=0;$
 $U_{648}=0; U_{649}=0; U_{651}=1 * QP * A_{04} * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{652}=A_{01} * QR * A_{12} * A_{23} * A_{34} * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{653}=A_{02} * QP * A_{23} * A_{34} * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{654}=A_{03} * QR * A_{34} * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{655}=A_{04} * QP * 1 * QP * A_{45} * A_{56};$
 $U_{656}=A_{04} * QP * A_{45} * QR * A_{56}; U_{657}=0; U_{658}=0;$
 $U_{659}=0; U_{661}=1 * QP * A_{05} * QR * A_{56};$
 $U_{662}=A_{01} * QR * A_{12} * A_{23} * A_{34} * A_{45} * QR * A_{56};$
 $U_{663}=A_{02} * QP * A_{23} * A_{34} * A_{45} * QR * A_{56};$

U664=A03*QR*A34*A45*QR*A56;

U665=A04*QP*A45*QR*A56;

U666=A05*QR*1*QR*A56;

U667=0; U668=0; U669=0;

U671=0; U672=0; U673=0; U674=0; U675=0; U676=0; U677=0; U678=0; U679=0;

U681=0; U682=0; U683=0; U684=0; U685=0; U686=0; U687=0; U688=0; U689=0;

U691=0; U692=0; U693=0; U694=0; U695=0; U696=0; U697=0; U698=0; U699=0;

U711=1*QP*1*QP*A07;

U712=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67;

U713=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67;

U714=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56*A67;

U715=1*QP*A04*QP*A45*A56*A67;

U716=1*QP*A05*QR*A56*A67;

U717=1*QP*A06*QP*A67;

U718=0; U719=0;

U721=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67;

U722=A01*QR*1*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67;

U723=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45*A56*A67;

U724=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45*A56*A67;

U725=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45*A56*A67;

U726=A01*QR*A12*A23*A34*A45*QR*A56*A67;

U727=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*QP*A67;

U728=0; U729=0;

U731=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67;

U732=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45*A56*A67;

U733=A02*QP*1*QP*A23*A34*A45*A56*A67;

U734=A02*QP*A23*QR*A34*A45*A56*A67;

U735=A02*QP*A23*A34*QP*A45*A56*A67;

U736=A02*QP*A23*A34*A45*QR*A56*A67;

U737=A02*QP*A23*A34*A45*A56*QP*A67;
 U738=0; U739=0;
 U741=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56*A67;
 U742=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45*A56*A67;
 U743=A02*QP*A12*A23*A34*QR*A34*A45*A56*A67;
 U744=A03*QR*1*QR*A34*A45*A56*A67;
 U745=A03*QR*A34*QR*A45*A56*A67;
 U746=A03*QR*A34*A45*QR*A56*A67;
 U747=A03*QR*A34*A45*A56*QR*A67;
 U748=0; U749=0;
 U751=1*QP*A04*QP*A45*A56*A67;
 U752=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45*A56*A67;
 U753=A02*QP*A23*A34*QP*A45*A56*A67;
 U754=A03*QR*A34*QP*A45*A56*A67;
 U755=A04*QP*1*QP*A45*A56*A67;
 U756=A04*QP*A45*QR*A56*A67;
 U757=A04*QP*A45*A56*QP*A67;
 U758=0; U759=0;
 U761=1*QP*A05*QR*A56*A67;
 U762=A01*QR*A12*A23*A34*A45*QR*A56*A67;
 U763=A02*QP*A23*A34*A45*QR*A56*A67;
 U764=A03*A34*A45*QR*A56*A67;
 U765=A04*QP*A45*QR*A56*A67;
 U766=A05*QR*1*QR*A56*A67;
 U767=A05*QR*A56*QP*A67;
 U768=0; U769=0;
 U771=1*QP*A06*QP*A67;
 U772=A01*QP*A12*A23*A34*A45*A56*QP*A67;
 U773=A02*QP*A23*A34*A45*A56*QP*A67;
 U774=A03*QP*A34*A45*A56*QP*A67;

U775=A04*QP*A45*A56*QP*A67;

U776=A05*QP*A56*QP*A67;

U777=A06*QP*1*QP*A67;

U781=0; U782=0; U783=0; U784=0; U785=0; U786=0; U787=0; U788=0; U789=0;

U791=0; U792=0; U793=0; U794=0; U795=0; U796=0; U797=0; U798=0; U799=0;

U811=1*QP*1*QP*A08;

U812=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U813=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U814=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78;

U815=1*QP*A04*QP*A45*A56*A67*A78;

U816=1*QP*A05*QR*A56*A67*A78;

U817=1*QP*A06*QP*A67*A78;

U818=1*QP*A07*QR*A78;

U819=0;

U821=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U822=A01*QR*1*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U823=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U824=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78;

U825=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78;

U826=A01*QR*A12*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78;

U827=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78;

U828=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78;

U829=0;

U831=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U832=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U833=A02*QP*1*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78;

U834=A02*QP*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78;

U835=A02*QP*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78;

U836=A02*QP*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78;

U837=A02*QP*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78;
 U838=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78;
 U839=0;
 U841=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78;
 U842=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78;
 U843=A02*QP*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78;
 U844=A03*QR*1*QR*A34*A45*A56*A67*A78;
 U845=A03*QR*A34*QP*A45*A56*A67*A78;
 U846=A03*QR*A34*A45*QR*A56*A67*A78;
 U847=A03*QR*A34*A45*A56*QP*A67*A78;
 U848=A03*QR*A34*A45*A56*A67*QR*A78;
 U849=0;
 U851=1*QP*A04*QP*A45*A56*A67*A78;
 U852=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78;
 U853=A02*QP*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78;
 U854=A03*QR*A34*QP*A45*A56*A67*A78;
 U855=A04*QP*1*QP*A45*A56*A67*A78;
 U856=A04*QP*A45*QR*A56*A67*A78;
 U857=A04*QP*A45*A56*QP*A67*A78;
 U858=A04*QP*A45*A56*A67*QR*A78;
 U859=0;
 U861=1*QP*A05*QR*A56*A67*A78;
 U862=A01*QR*A12*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78;
 U863=A02*QP*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78;
 U864=A03*QR*A34*A45*QR*A56*A67*A78;
 U865=A04*QP*A45*QR*A56*A67*A78;
 U866=A05*QR*1*QR*A56*A67*A78;
 U867=A05*QR*A56*QP*A67*A78;
 U868=A05*QR*A56*A67*QR*A78;
 U869=0;

U871=1*QP*A06*QP*A67*A78;
 U872=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78;
 U873=A02*QP*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78;
 U874=A03*QR*A34*A45*A56*QP*A67*A78;
 U875=A04*QP*A45*A56*QP*A67*A78;
 U876=A05*QR*A56*QP*A67*A78;
 U877=A06*QP*1*QP*A67*A78;
 U878=A06*QP*A67*QR*A78;
 U879=0;
 U881=1*QP*A07*QR*A78;
 U882=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78;
 U883=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78;
 U884=A03*QR*A34*A45*A56*A67*QR*A78;
 U885=A04*QP*A45*A56*A67*QR*A78;
 U886=A05*QR*A56*A67*QR*A78;
 U887=A06*QP*A56*A67*QR*A78;
 U888=A07*QR*1*QR*A78;
 U889=0;
 U891=0; U892=0; U893=0; U894=0; U895=0; U896=0; U897=0; U898=0; U899=0;

U911=1*QP*1*QP*A09;
 U912=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U913=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U914=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U915=1*QP*A04*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U916=1*QP*A05*QR*A56*A67*A78*A89;
 U917=1*QP*A06*QP*A67*A78*A89;
 U918=1*QP*A07*QR*A78*A89;
 U919=1*QP*A08*QP*A89;
 U921=1*QP*A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;

U922=A01*QR*1*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U923=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U924=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U925=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U926=A01*QR*A12*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
 U927=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
 U928=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
 U929=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*QP*A89;
 U931=1*QP*A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U932=A01*QR*A12*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U933=A02*QP*1*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U934=A02*QP*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U935=A02*QP*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U936=A02*QP*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
 U937=A02*QP*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
 U938=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
 U939=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*QP*A89;
 U941=1*QP*A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U942=A01*QR*A12*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U943=A02*QP*A23*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U944=A03*QR*1*QR*A34*A45*A56*A67*A78*A89;
 U945=A03*QR*A34*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U946=A03*QR*A34*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
 U947=A03*QR*A34*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
 U948=A03*QR*A34*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
 U949=A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78*QP*A89;
 U951=1*QP*A04*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U952=A01*QR*A12*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U953=A02*QP*A23*A34*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
 U954=A03*QR*A34*QP*A45*A56*A67*A78*A89;

U955=A04*QP*1*QP*A45*A56*A67*A78*A89;
U956=A04*QP*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
U957=A04*QP*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
U958=A04*QP*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
U959=A04*QP*A45*A56*A67*A78*QR*A89;
U961=1*QP*A05*QR*A56*A67*A78*A89;
U962=A01*QR*A12*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
U963=A02*QP*A23*A34*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
U964=A03*QR*A34*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
U965=A04*QP*A45*QR*A56*A67*A78*A89;
U966=A05*QR*1*QR*A56*A67*A78*A89;
U967=A05*QR*A56*QP*A67*A78*A89;
U968=A05*QR*A56*A67*QR*A78*A89;
U969=A05*QR*A56*A67*A78*QP*A89;
U971=1*QP*A06*QP*A67*A78*A89;
U972=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
U973=A02*QP*A23*A34*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
U974=A03*QR*A34*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
U975=A04*QP*A45*A56*QP*A67*A78*A89;
U976=A05*QR*A56*QP*A67*A78*A89;
U977=A06*QP*1*QP*A67*A78*A89;
U978=A06*QP*A67*QR*A78*A89;
U979=A06*QP*A67*A78*QP*A89;
U981=1*QP*A07*QR*A78;
U982=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
U983=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
U984=A03*QR*A34*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
U985=A04*QP*A45*A56*A67*QR*A78*A89;
U986=A05*QR*A56*A67*QR*A78*A89;
U987=A06*QP*A56*A67*QR*A78*A89;

$U988=A07*QR*1*QR*A78*A89;$
 $U989=A07*QR*A78*QP*A89;$
 $U991=1*QP*A07*QP*A78;$
 $U992=A01*QR*A12*A23*A34*A45*A56*A67*A78*QP*A89;$
 $U993=A02*QP*A23*A34*A45*A56*A67*A78*QP*A89;$
 $U994=A03*QR*A34*A45*A56*A67*A78*QP*A89;$
 $U995=A04*QP*A45*A56*A67*A78*QP*A89;$
 $U996=A05*QR*A56*A67*A78*QP*A89;$
 $U997=A06*QP*A56*A67*A78*QP*A89;$
 $U998=A07*QR*A78*QP*A89;$
 $U999=A08*QP*1*QP*A89;$

Anexo No. 6. Cálculo de la matriz de inercia D.

$d11=simplifica (trace (U11*J1*U11.) + trace (U21*J2*U21.) + trace (U31*J3*U31.)$
 $+ trace (U41*J4*U41.) + trace (U51*J5*U51.) + trace (U61*J6*U61.) + trace$
 $(U71*J7*U71.) + trace (U81*J8*U81.) + trace (U91*J9*U91.));$
 $d12=simplify (trace(U22*J2*U21.) + trace(U32*J3*U31.) + trace (U42*J4*U41.) + trace$
 $(U52*J5*U51.) + trace (U62*J6*U61.) + trace (U72*J7*U71.) + trace (U82*J8*U81.) +$
 $Trace (U92*J9*U91.));$
 $d13=simplify (trace (U33*J3*U31.) + trace (U43*J4*U41.) + trace (U53*J5*U51.) +$
 $trace (U63*J6*U61.) + trace (U73*J7*U71.) + trace (U83*J8*U81.) + trace$
 $(U93*J9*U91.));$
 $d14=simplify (trace (U44*J4*U41.) + trace (U54*J5*U51.) + trace (U64*J6*U61.) +$
 $trace (U74*J7*U71.) + trace (U84*J8*U81.) + trace(U94*J9*U91.));$ $d15=simplify($
 $trace(U55*J5*U51.) + trace(U65*J6*U61.) + trace(U75*J7*U71.) +$
 $trace(U85*J8*U81.) + trace(U95*J9*U91.));$
 $d16=simplify(trace(U66*J6*U61.) + trace(U76*J7*U71.) + trace(U86*J8*U81.)$
 $+ trace(U96*J9*U91.));$

d17=simplify(trace(U77*J7*U71.') + trace(U87*J8*U81.') + trace(U97*J9*U91.')
); d18=simplify(trace(U88*J8*U81.') + trace(U98*J9*U91.')); d19=simplify(
trace(U99*J9*U91.'));

d21=simplify(trace(U21*J2*U22.') + trace(U31*J3*U32.') + trace(U41*J4*U42.') +
trace(U51*J5*U52.') + trace(U61*J6*U62.') + trace(U71*J7*U72.') +
trace(U81*J8*U82.') + trace(U91*J9*U92.'));

d22=simplify(trace(U22*J2*U22.') + trace(U32*J3*U32.') + trace(U42*J4*U42.') +
trace(U52*J5*U52.') + trace(U62*J6*U62.') + trace(U72*J7*U72.') +
trace(U82*J8*U82.') + trace(U92*J9*U92.'));

d23=simplify(trace(U33*J3*U32.') + trace(U43*J4*U42.') + trace(U53*J5*U52.') +
trace(U63*J6*U62.') + trace(U73*J7*U72.') + trace(U83*J8*U82.') +
trace(U93*J9*U92.'));

d24=simplify(trace(U44*J4*U42.') + trace(U54*J5*U52.') + trace(U64*J6*U62.')
+ trace(U74*J7*U72.') + trace(U84*J8*U82.') + trace(U94*J9*U92.'));

d25=simplify(trace(U55*J5*U52.') + trace(U65*J6*U62.') + trace(U75*J7*U72.')
+ trace(U85*J8*U82.') + trace(U95*J9*U92.'));

d26=simplify(trace(U66*J6*U62.') + trace(U76*J7*U72.') + trace(U86*J8*U82.')
+ trace(U96*J9*U92.'));

d27=simplify(trace(U77*J7*U72.') + trace(U87*J8*U82.') + trace(U97*J9*U92.')
); d28=simplify(trace(U88*J8*U82.') + trace(U98*J9*U92.')); d29=simplify(
trace(U99*J9*U92.'));

d31=simplify(trace(U31*J3*U33.') + trace(U41*J4*U43.') + trace(U51*J5*U53.') +
trace(U61*J6*U63.') + trace(U71*J7*U73.') + trace(U81*J8*U83.') +
trace(U91*J9*U93.'));

d32=simplify(trace(U32*J3*U33.') + trace(U42*J4*U43.') + trace(U52*J5*U53.') +
trace(U62*J6*U63.') + trace(U72*J7*U73.') + trace(U82*J8*U83.') +
trace(U92*J9*U93.'));

d33=simplify(trace(U33*J3*U33.') + trace(U43*J4*U43.') + trace(U53*J5*U53.') +
trace(U63*J6*U63.') + trace(U73*J7*U73.') + trace(U83*J8*U83.') +
trace(U93*J9*U93.'));

d34=simplify(trace(U44*J4*U44.') + trace(U54*J5*U54.') + trace(U64*J6*U64.') +
trace(U74*J7*U74.') + trace(U84*J8*U84.') + trace(U94*J9*U94.'));

d35=simplify(trace(U55*J5*U55.') + trace(U65*J6*U65.') + trace(U75*J7*U75.') +
trace(U85*J8*U85.') + trace(U95*J9*U95.'));

d36=simplify(trace(U66*J6*U66.') + trace(U76*J7*U76.') + trace(U86*J8*U86.') +
trace(U96*J9*U96.'));

d37=simplify(trace(U77*J7*U77.') + trace(U87*J8*U87.') + trace(U97*J9*U97.')
); d38=simplify(trace(U88*J8*U88.') + trace(U98*J9*U98.')); d39=simplify(
trace(U99*J9*U99.'));

d41=simplify(trace(U41*J4*U41.') + trace(U51*J5*U51.') + trace(U61*J6*U61.')
+ trace(U71*J7*U71.') + trace(U81*J8*U81.') + trace(U91*J9*U91.'));

d42=simplify(trace(U42*J4*U42.') + trace(U52*J5*U52.') + trace(U62*J6*U62.')
+ trace(U72*J7*U72.') + trace(U82*J8*U82.') + trace(U92*J9*U92.'));

d43=simplify(trace(U43*J4*U43.') + trace(U53*J5*U53.') + trace(U63*J6*U63.')
+ trace(U73*J7*U73.') + trace(U83*J8*U83.') + trace(U93*J9*U93.'));

d44=simplify(trace(U44*J4*U44.') + trace(U54*J5*U54.') + trace(U64*J6*U64.')
+ trace(U74*J7*U74.') + trace(U84*J8*U84.') + trace(U94*J9*U94.'));

d45=simplify(trace(U55*J5*U55.') + trace(U65*J6*U65.') + trace(U75*J7*U75.')
+ trace(U85*J8*U85.') + trace(U95*J9*U95.'));

d46=simplify(trace(U66*J6*U66.') + trace(U76*J7*U76.') + trace(U86*J8*U86.')
+ trace(U96*J9*U96.'));

d47=simplify(trace(U77*J7*U77.') + trace(U87*J8*U87.') + trace(U97*J9*U97.')
); d48=simplify(trace(U88*J8*U88.') + trace(U98*J9*U98.')); d49=simplify(
trace(U99*J9*U99.'));

d51=simplify(trace(U51*J5*U55.') + trace(U61*J6*U65.') + trace(U71*J7*U75.') + trace(U81*J8*U85.') + trace(U91*J9*U95.'));

d52=simplify(trace(U52*J5*U55.') + trace(U62*J6*U65.') + trace(U72*J7*U75.') + trace(U82*J8*U85.') + trace(U92*J9*U95.'));

d53=simplify(trace(U53*J5*U55.') + trace(U63*J6*U65.') + trace(U73*J7*U75.') + trace(U83*J8*U85.') + trace(U93*J9*U95.'));

d54=simplify(trace(U54*J5*U55.') + trace(U64*J6*U65.') + trace(U74*J7*U75.') + trace(U84*J8*U85.') + trace(U94*J9*U95.'));

d55=simplify(trace(U55*J5*U55.') + trace(U65*J6*U65.') + trace(U75*J7*U75.') + trace(U85*J8*U85.') + trace(U95*J9*U95.'));

d56=simplify(trace(U66*J6*U65.') + trace(U76*J7*U75.') + trace(U86*J8*U85.') + trace(U96*J9*U95.'));

d57=simplify(trace(U77*J7*U75.') + trace(U87*J8*U85.') + trace(U97*J9*U95.')); d58=simplify(trace(U88*J8*U85.') + trace(U98*J9*U95.')); d59=simplify(trace(U99*J9*U95.'));

d61=simplify(trace(U61*J6*U66.') + trace(U71*J7*U76.') + trace(U81*J8*U86.') + trace(U91*J9*U96.'));

d62=simplify(trace(U62*J6*U66.') + trace(U72*J7*U76.') + trace(U82*J8*U86.') + trace(U92*J9*U96.'));

d63=simplify(trace(U63*J6*U66.') + trace(U73*J7*U76.') + trace(U83*J8*U86.') + trace(U93*J9*U96.'));

d64=simplify(trace(U64*J6*U66.') + trace(U74*J7*U76.') + trace(U84*J8*U86.') + trace(U94*J9*U96.'));

d65=simplify(trace(U65*J6*U66.') + trace(U75*J7*U76.') + trace(U85*J8*U86.') + trace(U95*J9*U96.'));

d66=simplify(trace(U66*J6*U66.') + trace(U76*J7*U76.') + trace(U86*J8*U86.') + trace(U96*J9*U96.'));

d67=simplify(trace(U77*J7*U76.') + trace(U87*J8*U86.') + trace(U97*J9*U96.'));

d68=simplify(trace(U88*J8*U86.') + trace(U98*J9*U96.'));

d69=simplify(trace(U99*J9*U96.'));

d71=simplify(trace(U71*J7*U77.') + trace(U81*J8*U87.') + trace(U91*J9*U97.'));

d72=simplify(trace(U72*J7*U77.') + trace(U82*J8*U87.') + trace(U92*J9*U97.'));

d73=simplify(trace(U73*J7*U77.') + trace(U83*J8*U87.') + trace(U93*J9*U97.'));

d74=simplify(trace(U74*J7*U77.') + trace(U84*J8*U87.') + trace(U94*J9*U97.'));

d75=simplify(trace(U75*J7*U77.') + trace(U85*J8*U87.') + trace(U95*J9*U97.'));

d76=simplify(trace(U76*J7*U77.') + trace(U86*J8*U87.') + trace(U96*J9*U97.'));

d77=simplify(trace(U77*J7*U77.') + trace(U87*J8*U87.') + trace(U97*J9*U97.'));

d78=simplify(trace(U88*J8*U87.') + trace(U98*J9*U97.')); d79=simplify(
trace(U99*J9*U97.'));

d81=simplify(trace(U81*J8*U88.') + trace(U91*J9*U98.'));

d82=simplify(trace(U82*J8*U88.') + trace(U92*J9*U98.'));

d83=simplify(trace(U83*J8*U88.') + trace(U93*J9*U98.'));

d84=simplify(trace(U84*J8*U88.') + trace(U94*J9*U98.'));

d85=simplify(trace(U85*J8*U88.') + trace(U95*J9*U98.'));

d86=simplify(trace(U86*J8*U88.') + trace(U96*J9*U98.'));

d87=simplify(trace(U87*J8*U88.') + trace(U97*J9*U98.'));

d88=simplify(trace(U88*J8*U88.') + trace(U98*J9*U98.'));

d89=simplify(trace(U99*J9*U98.'));

d91=simplify(trace(U91*J9*U99.'));

d92=simplify(trace(U92*J9*U99.'));

d93=simplify(trace(U93*J9*U99.'));

d94=simplify(trace(U94*J9*U99.'));

d95=simplify(trace(U95*J9*U99.'));

d96=simplify(trace(U95*J9*U99.'));

d97=simplify(trace(U97*J9*U99.'));

d98=simplify(trace(U98*J9*U99.'));

d99=simplify(trace(U99*J9*U99.'));

D = [m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6 + m7 + m8 + m9, m9*(d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - m8*(sin(teta1)*(d2 + l2) + sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m9*(sin(teta1)*(d2 + l2) - (d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))) + sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m7*(sin(teta1)*(d2 + l2) + sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m3*sin(teta1)*(d2 + l2) - m4*sin(teta1)*(d2 + l2) - m5*sin(teta1)*(d2 + l2) - m6*sin(teta1)*(d2 + l2), cos(teta1)*(m3 + m4 + m5 + m6 + m7 + m8 + m9), m9*((d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m7*sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) - m8*sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) + m9*(d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))), 0, m7*sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) - m9*((d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) + m8*sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) - m9*(d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))), cos(teta1 + teta2 + teta3)*(m7 + m8 + m9), -2*m9*(d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*sin(teta4) - sin(teta1 + teta2 - teta3)*cos(teta4)), -m9*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))]

[m9*(d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - m8*(sin(teta1)*(d2 + l2) + sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m9*(sin(teta1)*(d2 + l2) - (d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) - cos(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))) + sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m7*(sin(teta1)*(d2 + l2) + sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m3*sin(teta1)*(d2 + l2) - m4*sin(teta1)*(d2 + l2) - m5*sin(teta1)*(d2 + l2) - m6*sin(teta1)*(d2 + l2), d2^2*m3 + d2^2*m4 + d2^2*m5 + d2^2*m6 + d2^2*m7 + d2^2*m8 + d2^2*m9 + d4^2*m7 + d4^2*m8 + d4^2*m9 + 4*d5^2*m9 + l2^2*m3 + l2^2*m4 + l2^2*m5 + l2^2*m6 + l2^2*m7 + l2^2*m8 + l2^2*m9 + l4^2*m7 + l4^2*m8 + l4^2*m9 + 4*l5^2*m9 - 2*l5^2*m9*cos(2*teta3 - 2*teta4) + 2*l5^2*m9*cos(2*teta3 + 2*teta4) + 2*d2*l2*m3 + 2*d2*l2*m4 + 2*d2*l2*m5 + 2*d2*l2*m6 + 2*d2*l2*m7 + 2*d2*l2*m8 + 2*d2*l2*m9 + 2*d4*l4*m7 + 2*d4*l4*m8 + 2*d4*l4*m9 + 8*d5*l5*m9 -

$$\begin{aligned}
& 2*d5^2*m9*cos(2*teta3 - 2*teta4) + 2*d5^2*m9*cos(2*teta3 + 2*teta4) + \\
& 2*d4*15*m9*cos(2*teta3 - teta4) + 2*d5*14*m9*cos(2*teta3 - teta4) - \\
& 4*d5*15*m9*cos(2*teta3 - 2*teta4) + 4*d5*15*m9*cos(2*teta3 + 2*teta4) + \\
& 2*14*15*m9*cos(2*teta3 - teta4) - 2*d2*d5*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + \\
& 2*d2*d5*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - 2*d2*d5*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - \\
& 2*d2*15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + 2*d2*15*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& 2*d2*15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - 2*d5*12*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + \\
& 2*d5*12*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - 2*d5*12*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - \\
& 2*12*15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + 2*12*15*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& 2*12*15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) + 2*d2*d4*m7*cos(teta2 + teta3) + \\
& 2*d2*d4*m8*cos(teta2 + teta3) + 2*d2*d4*m9*cos(teta2 + teta3) + 2*d2*14*m7*cos(teta2 \\
& + teta3) + 2*d4*12*m7*cos(teta2 + teta3) + 2*d2*14*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& 2*d4*12*m8*cos(teta2 + teta3) + 2*d2*14*m9*cos(teta2 + teta3) + 2*d4*12*m9*cos(teta2 \\
& + teta3) + 2*12*14*m7*cos(teta2 + teta3) + 2*12*14*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& 2*12*14*m9*cos(teta2 + teta3) - 4*d4*d5*m9*cos(teta4) - 4*d4*15*m9*cos(teta4) - \\
& 4*d5*14*m9*cos(teta4) - 4*14*15*m9*cos(teta4) - 2*d4*d5*m9*cos(2*teta3 + teta4) - \\
& 2*d4*15*m9*cos(2*teta3 + teta4) - 2*d5*14*m9*cos(2*teta3 + teta4) - \\
& 2*14*15*m9*cos(2*teta3 + teta4) - 2*d2*d5*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) - \\
& 2*d2*15*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) - 2*d5*12*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) - \\
& 2*12*15*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) + 2*d4*d5*m9*cos(2*teta3 - teta4), \\
& d5*m9*sin(teta2 + teta3 + teta4) + 15*m9*sin(teta2 + teta3 + teta4) d4*14*m8 + \\
& 2*d4*14*m9 + 8*d5*15*m9 - 2*d5^2*m9*cos(2*teta3 - 2*teta4) + \\
& 2*d5^2*m9*cos(2*teta3 + 2*teta4) + 2*d4*15*m9*cos(2*teta3 - teta4) + \\
& 2*d5*14*m9*cos(2*teta3 - teta4) - 4*d5*15*m9*cos(2*teta3 - 2*teta4) + \\
& 4*d5*15*m9*cos(2*teta3 + 2*teta4) + 2*14*15*m9*cos(2*teta3 - teta4) - \\
& d2*d5*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + d2*d5*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& d2*d5*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - d2*15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + \\
& d2*15*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - d2*15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - \\
& d5*12*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + d5*12*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& d5*12*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - 12*15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12*15*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 12*15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + \\
& d2*d4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*d4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*d4*m9*\cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + d2*14*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*12*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*14*m8*\cos(\text{teta2} \\
& + \text{teta3}) + d4*12*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*14*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d4*12*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12*14*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12*14*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) \\
& + 12*14*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) - 4*d4*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 4*d4*15*m9*\cos(\text{teta4}) - \\
& 4*d5*14*m9*\cos(\text{teta4}) - 4*14*15*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*d4*d5*m9*\cos(2*\text{teta3} + \text{teta4}) \\
& - 2*d4*15*m9*\cos(2*\text{teta3} + \text{teta4}) - 2*d5*14*m9*\cos(2*\text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 2*14*15*m9*\cos(2*\text{teta3} + \text{teta4}) - d2*d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d2*15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*12*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 12*15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + 2*d4*d5*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}), \quad 0, \\
& 2*15^2*m9*\cos(2*\text{teta3} - 2*\text{teta4}) - d4^2*m8 - d4^2*m9 - 4*d5^2*m9 - 14^2*m7 - \\
& 14^2*m8 - 14^2*m9 - 4*15^2*m9 - d4^2*m7 - 2*15^2*m9*\cos(2*\text{teta3} + 2*\text{teta4}) - \\
& 2*d4*14*m7 - 2*d4*14*m8 - 2*d4*14*m9 - 8*d5*15*m9 + 2*d5^2*m9*\cos(2*\text{teta3} - \\
& 2*\text{teta4}) - 2*d5^2*m9*\cos(2*\text{teta3} + 2*\text{teta4}) - 2*d4*15*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}) - \\
& 2*d5*14*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}) + 4*d5*15*m9*\cos(2*\text{teta3} - 2*\text{teta4}) - \\
& 4*d5*15*m9*\cos(2*\text{teta3} + 2*\text{teta4}) - 2*14*15*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& d2*d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d2*d5*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& d2*d5*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d2*15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - \\
& d2*15*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + d2*15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + \\
& d5*12*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*12*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& d5*12*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + 12*15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - \\
& 12*15*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + 12*15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - \\
& d2*d4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) - d2*d4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) - d2*d4*m9*\cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) - d2*14*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) - d4*12*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) - d2*14*m8*\cos(\text{teta2} \\
& + \text{teta3}) + d2*15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*12*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& 12*15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - 2*d4*d5*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}), \\
& d5*m9*\sin(2*\text{teta3} - \text{teta4}) - 15*m9*\sin(2*\text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\sin(2*\text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& 15*m9*\sin(2*\text{teta3} - \text{teta4}) + d2*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d2*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}), -2*m9*(d5 + 15)*(2*d5 + 2*15 - 4*15*\cos(\text{teta3})^2 - \\
& d4*\cos(\text{teta4}) - 14*\cos(\text{teta4}) - 4*d5*\cos(\text{teta3})^2 + 2*d4*\cos(\text{teta3})^2*\cos(\text{teta4}) + \\
& 2*14*\cos(\text{teta3})^2*\cos(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + \\
& 12*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& d2*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 12*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 12*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 12*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})), -m9*(d4*\sin(\text{teta4}) + 14*\sin(\text{teta4}) - \\
& 2*d4*\cos(\text{teta3})^2*\sin(\text{teta4}) - 2*14*\cos(\text{teta3})^2*\sin(\text{teta4}) - \\
& d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& d2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2}) - 12*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 12*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + 12*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2}) - \\
& d2*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - 12*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}))] [\cos(\text{teta1})*(m3 + \\
& m4 + m5 + m6 + m7 + m8 + m9), d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} - \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - \\
& d4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - \\
& 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}), m3 + m4 + m5 + m6 + m7 + m8 + \\
& m9, d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\sin(\text{teta2} \\
& + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + \\
& 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} \\
& + \text{teta4}) - d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - d4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - \\
& 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}), 0, \\
& d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - \\
& 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} \\
& + \text{teta4}) + d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) \\
& + 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}), \cos(\text{teta2} \\
& + \text{teta3})*(m7 + m8 + m9), -2*m9*\cos(\text{teta1})*(d5 + 15)*(cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\cos(\text{teta4})) - 2*m9*\sin(\text{teta1})*(d5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})), \\
& m9 * \cos(\text{teta2}) * \sin(\text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) - m9 * \cos(\text{teta2}) * \cos(\text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \\
& m9 * \cos(\text{teta3}) * \sin(\text{teta2}) * \sin(\text{teta4}) + m9 * \cos(\text{teta4}) * \sin(\text{teta2}) * \sin(\text{teta3})] \\
& [m9 * ((d5 + 15) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) \\
& - \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (d4 + 14)) - m7 * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (d4 + 14) - \\
& m8 * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (d4 + 14) + m9 * (d5 + 15) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})), d4^2 * m7 + d4^2 * m8 + d4^2 * m9 + \\
& 4 * d5^2 * m9 + 14^2 * m7 + 14^2 * m8 + 14^2 * m9 + 4 * 15^2 * m9 - 2 * 15^2 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - \\
& 2 * \text{teta4}) + 2 * 15^2 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + 2 * \text{teta4}) + 2 * d4 * 14 * m7 + 2 * d4 * 14 * m8 + 2 * d4 * 14 * m9 \\
& + 8 * d5 * 15 * m9 - 2 * d5^2 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - 2 * \text{teta4}) + 2 * d5^2 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + 2 * \text{teta4}) + \\
& 2 * d4 * 15 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - \text{teta4}) + 2 * d5 * 14 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - \text{teta4}) - \\
& 4 * d5 * 15 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - 2 * \text{teta4}) + 4 * d5 * 15 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + 2 * \text{teta4}) + \\
& 2 * 14 * 15 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - \text{teta4}) - d2 * d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& d2 * d5 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - d2 * d5 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - \\
& d2 * 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + d2 * 15 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d2 * 15 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - d5 * 12 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& d5 * 12 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * 12 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - \\
& 12 * 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 12 * 15 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 12 * 15 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d2 * d4 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2 * d4 * m8 * \cos(\text{teta2} \\
& + \text{teta3}) + d2 * d4 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2 * 14 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d4 * 12 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2 * 14 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * 12 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) \\
& + d2 * 14 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * 12 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12 * 14 * m7 * \cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + 12 * 14 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12 * 14 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) - \\
& 4 * d4 * d5 * m9 * \cos(\text{teta4}) - 4 * d4 * 15 * m9 * \cos(\text{teta4}) - 4 * d5 * 14 * m9 * \cos(\text{teta4}) - \\
& 4 * 14 * 15 * m9 * \cos(\text{teta4}) - 2 * d4 * d5 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + \text{teta4}) - 2 * d4 * 15 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + \\
& \text{teta4}) - 2 * d5 * 14 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + \text{teta4}) - 2 * 14 * 15 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d2 * d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d2 * 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5 * 12 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - 12 * 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& 2 * d4 * d5 * m9 * \cos(2 * \text{teta3} - \text{teta4}) d5 * m9 * \sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + 15 * m9 * \sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) + d5 * m9 * \sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5 * m9 * \sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} \\
& + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - d4*m8*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) - d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - l4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - l4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - \\
& l4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}), d4^2*m7 + d4^2*m8 + d4^2*m9 + 4*d5^2*m9 + l4^2*m7 + \\
& l4^2*m8 + l4^2*m9 + 4*15^2*m9 + 2*d4*l4*m7 + 2*d4*l4*m8 + 2*d4*l4*m9 + \\
& 8*d5*15*m9 - 4*d4*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 4*d4*15*m9*\cos(\text{teta4}) - 4*d5*14*m9*\cos(\text{teta4}) \\
& - 4*14*15*m9*\cos(\text{teta4}) - 16*d5^2*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& 16*15^2*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 8*d4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 8*d4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 8*d5*14*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 8*14*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& 32*d5*15*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}), 0, 4*d4*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - \\
& d4^2*m8 - d4^2*m9 - 4*d5^2*m9 - l4^2*m7 - l4^2*m8 - l4^2*m9 - 4*15^2*m9 - \\
& 2*d4*l4*m7 - 2*d4*l4*m8 - 2*d4*l4*m9 - 8*d5*15*m9 - d4^2*m7 + \\
& 4*d4*15*m9*\cos(\text{teta4}) + 4*d5*14*m9*\cos(\text{teta4}) + 4*14*15*m9*\cos(\text{teta4}) + \\
& 16*d5^2*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 16*15^2*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& 8*d4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& 8*d4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& 8*d5*14*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - 8*14*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) \\
& +), 2*m9*\cos(2*\text{teta3})*(d5 + 15)*(2*d5 + 2*15 - d4*\cos(\text{teta4}) - l4*\cos(\text{teta4})), \\
& m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4})*(d4 + \\
& l4)]32*d5*15*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}), \\
& - 2*m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4})*(d5 + 15)];
\end{aligned}$$

$$[0, 0, 0, 0, m5 + m6 + m7 + m8 + m9, 0, 0, 0, 0];$$

$$\begin{aligned}
& [m7*\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3})*(d4 + l4) - m9*((d5 + 15)*(\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3})*\cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3})*(d4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l4)) + m8*\sin(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) - m9*(d5 + l5)*(sin(teta1 + teta2 + \\
& teta3)*\cos(teta4) - \cos(teta1 + teta2 - teta3)*\sin(teta4)), 2*15^2*m9*\cos(2*teta3 - 2*teta4) - \\
& d4^2*m8 - d4^2*m9 - 4*d5^2*m9 - l4^2*m7 - l4^2*m8 - l4^2*m9 - 4*15^2*m9 - \\
& d4^2*m7 - 2*15^2*m9*\cos(2*teta3 + 2*teta4) - 2*d4*l4*m7 - 2*d4*l4*m8 - 2*d4*l4*m9 - \\
& 8*d5*15*m9 + 2*d5^2*m9*\cos(2*teta3 - 2*teta4) - 2*d5^2*m9*\cos(2*teta3 + 2*teta4) - \\
& 2*d4*15*m9*\cos(2*teta3 - teta4) - 2*d5*14*m9*\cos(2*teta3 - teta4) + \\
& 4*d5*15*m9*\cos(2*teta3 - 2*teta4) - 4*d5*15*m9*\cos(2*teta3 + 2*teta4) - \\
& 2*l4*15*m9*\cos(2*teta3 - teta4) + d2*d5*m9*\cos(teta2 + teta3 - teta4) - \\
& d2*d5*m9*\cos(teta2 - teta3 + teta4) + d2*d5*m9*\cos(teta3 - teta2 + teta4) + \\
& d2*15*m9*\cos(teta2 + teta3 - teta4) - d2*15*m9*\cos(teta2 - teta3 + teta4) + \\
& d2*15*m9*\cos(teta3 - teta2 + teta4) + d5*12*m9*\cos(teta2 + teta3 - teta4) - \\
& d5*12*m9*\cos(teta2 - teta3 + teta4) + d5*12*m9*\cos(teta3 - teta2 + teta4) + \\
& l2*15*m9*\cos(teta2 + teta3 - teta4) - l2*15*m9*\cos(teta2 - teta3 + teta4) + \\
& l2*15*m9*\cos(teta3 - teta2 + teta4) - d2*d4*m7*\cos(teta2 + teta3) - d2*d4*m8*\cos(teta2 + \\
& teta3) - d2*d4*m9*\cos(teta2 + teta3) - d2*14*m7*\cos(teta2 + teta3) - d4*12*m7*\cos(teta2 \\
& + teta3) - d2*14*m8*\cos(teta2 + teta3) - d4*12*m8*\cos(teta2 + teta3) - d2*14*m9*\cos(teta2 \\
& + teta3) - d4*12*m9*\cos(teta2 + teta3) - l2*14*m7*\cos(teta2 + teta3) - l2*14*m8*\cos(teta2 \\
& + teta3) - l2*14*m9*\cos(teta2 + teta3) + 4*d4*d5*m9*\cos(teta4) + 4*d4*15*m9*\cos(teta4) \\
& + 4*d5*14*m9*\cos(teta4) + 4*14*15*m9*\cos(teta4) + 2*d4*d5*m9*\cos(2*teta3 + teta4) + \\
& 2*d4*15*m9*\cos(2*teta3 + teta4) + 2*d5*14*m9*\cos(2*teta3 + teta4) + \\
& 2*14*15*m9*\cos(2*teta3 + teta4) + d2*d5*m9*\cos(teta2 + teta3 + teta4) + \\
& d2*15*m9*\cos(teta2 + teta3 + teta4) + d5*12*m9*\cos(teta2 + teta3 + teta4) + \\
& l2*15*m9*\cos(teta2 + teta3 + teta4) - 2*d4*d5*m9*\cos(2*teta3 - teta4), d5*m9*\sin(teta2 \\
& - teta3 + teta4) - 15*m9*\sin(teta2 + teta3 + teta4) - d5*m9*\sin(teta2 + teta3 - teta4) - \\
& d5*m9*\sin(teta2 + teta3 + teta4) + d5*m9*\sin(teta3 - teta2 + teta4) - 15*m9*\sin(teta2 + \\
& teta3 - teta4) + 15*m9*\sin(teta2 - teta3 + teta4) + 15*m9*\sin(teta3 - teta2 + teta4) + \\
& d4*m7*\sin(teta2 + teta3) + d4*m8*\sin(teta2 + teta3) + d4*m9*\sin(teta2 + teta3) + \\
& l4*m7*\sin(teta2 + teta3) + l4*m8*\sin(teta2 + teta3) + l4*m9*\sin(teta2 + teta3), \\
& 4*d4*d5*m9*\cos(teta4) - d4^2*m8 - d4^2*m9 - 4*d5^2*m9 - l4^2*m7 - l4^2*m8 - \\
& l4^2*m9 - 4*15^2*m9 - 2*d4*14*m7 - 2*d4*14*m8 - 2*d4*14*m9 - 8*d5*15*m9 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d4^2*m7 + 4*d4*15*m9*\cos(teta4) + 4*d5*14*m9*\cos(teta4) + 4*14*15*m9*\cos(teta4) + \\
& 16*d5^2*m9*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)*\sin(teta4) + \\
& 16*15^2*m9*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)*\sin(teta4) - \\
& 8*d4*d5*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) - \\
& 8*d4*15*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) - \\
& 8*d5*14*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) - 8*14*15*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) \\
& + 32*d5*15*m9*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)*\sin(teta4), 0, d4^2*m7 + d4^2*m8 + \\
& d4^2*m9 + 4*d5^2*m9 + 14^2*m7 + 14^2*m8 + 14^2*m9 + 4*15^2*m9 + 2*d4*14*m7 + \\
& 2*d4*14*m8 + 2*d4*14*m9 + 8*d5*15*m9 - 4*d4*d5*m9*\cos(teta4) - \\
& 4*d4*15*m9*\cos(teta4) - 4*d5*14*m9*\cos(teta4) - 4*14*15*m9*\cos(teta4) - \\
& 16*d5^2*m9*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)*\sin(teta4) - \\
& 16*15^2*m9*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)*\sin(teta4) + \\
& 8*d4*d5*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) + \\
& 8*d4*15*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) + \\
& 8*d5*14*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) + \\
& 8*14*15*m9*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4) - \\
& 32*d5*15*m9*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)*\sin(teta4), \\
& 2*m9*\cos(2*teta3)*\sin(teta4)*(d5 + 15), -2*m9*\cos(2*teta3)*(d5 + 15)*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*\cos(teta4) - 14*\cos(teta4)), -m9*\cos(2*teta3)*\sin(teta4)*(d4 + 14)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\cos(teta1 + teta2 + teta3)*(m7 + m8 + m9), d5*m9*\sin(2*teta3 - teta4) - \\
& 15*m9*\sin(2*teta3 + teta4) - d5*m9*\sin(2*teta3 + teta4) + 15*m9*\sin(2*teta3 - teta4) + \\
& d2*m7*\sin(teta2 + teta3) + d2*m8*\sin(teta2 + teta3) + d2*m9*\sin(teta2 + teta3) + \\
& 12*m7*\sin(teta2 + teta3) + 12*m8*\sin(teta2 + teta3) + 12*m9*\sin(teta2 + teta3), \cos(teta2 + \\
& teta3)*(m7 + m8 + m9), -2*m9*\cos(2*teta3)*\sin(teta4)*(d5 + 15), 0, \\
& 2*m9*\cos(2*teta3)*\sin(teta4)*(d5 + 15), m7 + m8 + m9, -2*m9*(d5 + 15)*(\sin(teta4) + \\
& 2*\cos(teta3)*\cos(teta4)*\sin(teta3)), -m9*(\cos(teta4) - 2*\cos(teta3)*\sin(teta3)*\sin(teta4))] \\
& [-2*m9*(d5 + 15)*(\cos(teta1 + teta2 + teta3)*\sin(teta4) - \sin(teta1 + teta2 - \\
& teta3)*\cos(teta4)), -2*m9*(d5 + 15)*(2*d5 + 2*15 - 4*15*\cos(teta3)^2 - d4*\cos(teta4) - \\
& 14*\cos(teta4) - 4*d5*\cos(teta3)^2 + 2*d4*\cos(teta3)^2*\cos(teta4) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*l4*\cos(\text{teta3})^2*\cos(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + \\
& l2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& d2*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3}) + \\
& l2*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + l2*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + \\
& l2*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})), - 2*m9*\cos(\text{teta1})*(d5 + l5)*(\cos(\text{teta1} + \text{teta2} \\
& + \text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\cos(\text{teta4})) - 2*m9*\sin(\text{teta1})*(d5 + \\
& l5)*(\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\cos(\text{teta4})), \\
& 2*m9*\cos(2*\text{teta3})*(d5 + l5)*(2*d5 + 2*l5 - d4*\cos(\text{teta4}) - l4*\cos(\text{teta4})), 0, - \\
& 2*m9*\cos(2*\text{teta3})*(d5 + l5)*(2*d5 + 2*l5 - d4*\cos(\text{teta4}) - l4*\cos(\text{teta4})), -2*m9*(d5 + \\
& l5)*(\sin(\text{teta4}) + 2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})), 4*m9*(d5 + \\
& l5)^2*(4*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 1), \\
& 2*m9*\cos(2*\text{teta4})*\sin(2*\text{teta3})*(d5 + l5)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-m9*(\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\sin(\text{teta4})), - \\
& m9*(d4*\sin(\text{teta4}) + l4*\sin(\text{teta4}) - 2*d4*\cos(\text{teta3})^2*\sin(\text{teta4}) - \\
& 2*l4*\cos(\text{teta3})^2*\sin(\text{teta4}) - d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + d2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2}) - \\
& l2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + l2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& l2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2}) - d2*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& l2*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})), m9*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& m9*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) - m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + \\
& m9*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3}), m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4})*(d4 + l4), 0, - \\
& m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4})*(d4 + l4), -m9*(\cos(\text{teta4}) - \\
& 2*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})), 2*m9*\cos(2*\text{teta4})*\sin(2*\text{teta3})*(d5 + l5), m9 - \\
& 4*m9*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})]
\end{aligned}$$

h111=simplify(trace(U111*J1*U11.') + trace(U211*J2*U21.') + trace(U311*J3*U31.')
+ trace(U411*J4*U41.') + trace(U511*J5*U51.') + trace(U611*J6*U61.') +
trace(U711*J7*U71.') + trace(U811*J8*U81.') + trace(U911*J9*U91.'));

h112=simplify(trace(U212*J2*U21.') + trace(U312*J3*U31.') + trace(U412*J4*U41.')
+ trace(U512*J5*U51.') + trace(U612*J6*U61.') + trace(U712*J7*U71.') +
trace(U812*J8*U81.') + trace(U912*J9*U91.'));

h113=simplify(trace(U313*J3*U31.') + trace(U413*J4*U41.') + trace(U513*J5*U51.')
+ trace(U613*J6*U61.') + trace(U713*J7*U71.') + trace(U813*J8*U81.') +
trace(U913*J9*U91.'));

h114=simplify(trace(U414*J4*U41.') + trace(U514*J5*U51.') + trace(U614*J6*U61.') +
trace(U714*J7*U71.') + trace(U814*J8*U81.') + trace(U914*J9*U91.'));

h115=simplify(trace(U515*J5*U51.') + trace(U615*J6*U61.') + trace(U715*J7*U71.') +
trace(U815*J8*U81.') + trace(U915*J9*U91.'));

h116=simplify(trace(U616*J6*U61.') + trace(U716*J7*U71.') + trace(U816*J8*U81.') +
trace(U916*J9*U91.'));

h117=simplify(trace(U717*J7*U71.') + trace(U817*J8*U81.') + trace(U917*J9*U91.')
); h118=simplify(trace(U818*J8*U81.') + trace(U918*J9*U91.')); h119=simplify(
trace(U919*J9*U91.'));

h121=simplify(trace(U221*J2*U21.') + trace(U321*J3*U31.') + trace(U421*J4*U41.')
+ trace(U521*J5*U51.') + trace(U621*J6*U61.') + trace(U721*J7*U71.') +
trace(U821*J8*U81.') + trace(U921*J9*U91.'));

h122=simplify(trace(U222*J2*U21.') + trace(U322*J3*U31.') + trace(U422*J4*U41.') +
trace(U522*J5*U51.') + trace(U622*J6*U61.') + trace(U722*J7*U71.') +
trace(U822*J8*U81.') + trace(U922*J9*U91.'));

h123=simplify(trace(U323*J3*U31.') + trace(U423*J4*U41.') + trace(U523*J5*U51.')
+ trace(U623*J6*U61.') + trace(U723*J7*U71.') + trace(U823*J8*U81.') +
trace(U923*J9*U91.'));

h124=simplify(trace(U424*J4*U41.') + trace(U524*J5*U51.') + trace(U624*J6*U61.')
+ trace(U724*J7*U71.') + trace(U824*J8*U81.') + trace(U924*J9*U91.'));

h125=simplify(trace(U525*J5*U51.') + trace(U625*J6*U61.') + trace(U725*J7*U71.') + trace(U825*J8*U81.') + trace(U925*J9*U91.'));

h126=simplify(trace(U626*J6*U61.') + trace(U726*J7*U71.') + trace(U826*J8*U81.') + trace(U926*J9*U91.'));

h127=simplify(trace(U727*J7*U71.') + trace(U827*J8*U81.') + trace(U927*J9*U91.')); h128=simplify(trace(U828*J8*U81.') + trace(U928*J9*U91.')); h129=simplify(trace(U929*J9*U91.'));

h131=simplify(trace(U331*J3*U31.') + trace(U431*J4*U41.') + trace(U531*J5*U51.') + trace(U631*J6*U61.') + trace(U731*J7*U71.') + trace(U831*J8*U81.') + trace(U931*J9*U91.'));

h132=simplify(trace(U332*J3*U31.') + trace(U432*J4*U41.') + trace(U532*J5*U51.') + trace(U632*J6*U61.') + trace(U732*J7*U71.') + trace(U832*J8*U81.') + trace(U932*J9*U91.'));

h133=simplify(trace(U333*J3*U31.') + trace(U433*J4*U41.') + trace(U533*J5*U51.') + trace(U633*J6*U61.') + trace(U733*J7*U71.') + trace(U833*J8*U81.') + trace(U933*J9*U91.'));

h134=simplify(trace(U434*J4*U41.') + trace(U534*J5*U51.') + trace(U634*J6*U61.') + trace(U734*J7*U71.') + trace(U834*J8*U81.') + trace(U934*J9*U91.'));

h135=simplify(trace(U535*J5*U51.') + trace(U635*J6*U61.') + trace(U735*J7*U71.') + trace(U835*J8*U81.') + trace(U935*J9*U91.'));

h136=simplify(trace(U636*J6*U61.') + trace(U736*J7*U71.') + trace(U836*J8*U81.') + trace(U936*J9*U91.'));

h137=simplify(trace(U737*J7*U71.') + trace(U837*J8*U81.') + trace(U937*J9*U91.')); h138=simplify(trace(U838*J8*U81.') + trace(U938*J9*U91.')); h139=simplify(trace(U939*J9*U91.'));

h141=simplify(trace(U441*J4*U41.') + trace(U541*J5*U51.') + trace(U641*J6*U61.') + trace(U741*J7*U71.') + trace(U841*J8*U81.') + trace(U941*J9*U91.'));

h142=simplify(trace(U442*J4*U41.') + trace(U542*J5*U51.') + trace(U642*J6*U61.') + trace(U742*J7*U71.') + trace(U842*J8*U81.') + trace(U942*J9*U91.'));

h143=simplify(trace(U443*J4*U41.') + trace(U543*J5*U51.') + trace(U643*J6*U61.') + trace(U743*J7*U71.') + trace(U843*J8*U81.') + trace(U943*J9*U91.'));

h144=simplify(trace(U444*J4*U41.') + trace(U544*J5*U51.') + trace(U644*J6*U61.') + trace(U744*J7*U71.') + trace(U844*J8*U81.') + trace(U944*J9*U91.'));

h145=simplify(trace(U545*J5*U51.') + trace(U645*J6*U61.') + trace(U745*J7*U71.') + trace(U845*J8*U81.') + trace(U945*J9*U91.'));

h146=simplify(trace(U646*J6*U61.') + trace(U746*J7*U71.') + trace(U846*J8*U81.') + trace(U946*J9*U91.'));

h147=simplify(trace(U747*J7*U71.') + trace(U847*J8*U81.') + trace(U947*J9*U91.'));

h148=simplify(trace(U848*J8*U81.') + trace(U948*J9*U91.')); h149=simplify(trace(U949*J9*U91.'));

h151=simplify(trace(U551*J5*U51.') + trace(U651*J6*U61.') + trace(U751*J7*U71.') + trace(U851*J8*U81.') + trace(U951*J9*U91.'));

h152=simplify(trace(U552*J5*U51.') + trace(U652*J6*U61.') + trace(U752*J7*U71.') + trace(U852*J8*U81.') + trace(U952*J9*U91.'));

h153=simplify(trace(U553*J5*U51.') + trace(U653*J6*U61.') + trace(U753*J7*U71.') + trace(U853*J8*U81.') + trace(U953*J9*U91.'));

h154=simplify(trace(U554*J5*U51.') + trace(U654*J6*U61.') + trace(U754*J7*U71.') + trace(U854*J8*U81.') + trace(U954*J9*U91.'));

h155=simplify(trace(U555*J5*U51.') + trace(U655*J6*U61.') + trace(U755*J7*U71.') + trace(U855*J8*U81.') + trace(U955*J9*U91.'));

h156=simplify(trace(U656*J6*U61.') + trace(U756*J7*U71.') + trace(U856*J8*U81.') + trace(U956*J9*U91.'));

h157=simplify(trace(U757*J7*U71.') + trace(U857*J8*U81.') + trace(U957*J9*U91.'));

h158=simplify(trace(U858*J8*U81.') + trace(U958*J9*U91.')); h159=simplify(trace(U959*J9*U91.'));

h161=simplify(trace(U661*J6*U61.') + trace(U761*J7*U71.') + trace(U861*J8*U81.') + trace(U961*J9*U91.'));

h162=simplify(trace(U662*J6*U61.') + trace(U762*J7*U71.') + trace(U862*J8*U81.') + trace(U962*J9*U91.'));

h163=simplify(trace(U663*J6*U61.') + trace(U763*J7*U71.') + trace(U863*J8*U81.') + trace(U963*J9*U91.'));

h164=simplify(trace(U664*J6*U61.') + trace(U764*J7*U71.') + trace(U864*J8*U81.') + trace(U964*J9*U91.'));

h165=simplify(trace(U665*J6*U61.') + trace(U765*J7*U71.') + trace(U865*J8*U81.') + trace(U965*J9*U91.'));

h166=simplify(trace(U666*J6*U61.') + trace(U766*J7*U71.') + trace(U866*J8*U81.') + trace(U966*J9*U91.'));

h167=simplify(trace(U767*J7*U71.') + trace(U867*J8*U81.') + trace(U967*J9*U91.')); h168=simplify(trace(U868*J8*U81.') + trace(U968*J9*U91.')); h169=simplify(trace(U969*J9*U91.'));

h171=simplify(trace(U771*J7*U71.') + trace(U871*J8*U81.') + trace(U971*J9*U91.'));

h172=simplify(trace(U772*J7*U71.') + trace(U872*J8*U81.') + trace(U972*J9*U91.'));

h173=simplify(trace(U773*J7*U71.') + trace(U873*J8*U81.') + trace(U973*J9*U91.'));

h174=simplify(trace(U774*J7*U71.') + trace(U874*J8*U81.') + trace(U974*J9*U91.'));

h175=simplify(trace(U775*J7*U71.') + trace(U875*J8*U81.') + trace(U975*J9*U91.'));

h176=simplify(trace(U776*J7*U71.') + trace(U876*J8*U81.') + trace(U976*J9*U91.'));

h177=simplify(trace(U777*J7*U71.') + trace(U877*J8*U81.') + trace(U977*J9*U91.'));

h178=simplify(trace(U878*J8*U81.') + trace(U978*J9*U91.')); h179=simplify(trace(U979*J9*U91.'));

h181=simplify(trace(U881*J8*U81.') + trace(U981*J9*U91.'));

h182=simplify(trace(U882*J8*U81.') + trace(U982*J9*U91.'));

h183=simplify(trace(U883*J8*U81.') + trace(U983*J9*U91.'));

h184=simplify(trace(U884*J8*U81.') + trace(U984*J9*U91.'));

$h185 = \text{simplify}(\text{trace}(U885 * J8 * U81.) + \text{trace}(U985 * J9 * U91.))$;
 $h186 = \text{simplify}(\text{trace}(U886 * J8 * U81.) + \text{trace}(U986 * J9 * U91.))$;
 $h187 = \text{simplify}(\text{trace}(U887 * J8 * U81.) + \text{trace}(U987 * J9 * U91.))$;
 $h188 = \text{simplify}(\text{trace}(U888 * J8 * U81.) + \text{trace}(U988 * J9 * U91.))$;
 $h189 = \text{simplify}(\text{trace}(U989 * J9 * U91.))$;

$h191 = \text{simplify}(\text{trace}(U991 * J9 * U91.))$;
 $h192 = \text{simplify}(\text{trace}(U992 * J9 * U91.))$;
 $h193 = \text{simplify}(\text{trace}(U993 * J9 * U91.))$;
 $h194 = \text{simplify}(\text{trace}(U994 * J9 * U91.))$;
 $h195 = \text{simplify}(\text{trace}(U995 * J9 * U91.))$;
 $h196 = \text{simplify}(\text{trace}(U996 * J9 * U91.))$;
 $h197 = \text{simplify}(\text{trace}(U997 * J9 * U91.))$;
 $h198 = \text{simplify}(\text{trace}(U998 * J9 * U91.))$;
 $h199 = \text{simplify}(\text{trace}(U999 * J9 * U91.))$;

$h211 = \text{simplify}(\text{trace}(U211 * J2 * U22.) + \text{trace}(U311 * J3 * U32.) + \text{trace}(U411 * J4 * U42.)$
 $+ \text{trace}(U511 * J5 * U52.) + \text{trace}(U611 * J6 * U62.) + \text{trace}(U711 * J7 * U72.) +$
 $\text{trace}(U811 * J8 * U82.) + \text{trace}(U911 * J9 * U92.))$;

$h212 = \text{simplify}(\text{trace}(U212 * J2 * U22.) + \text{trace}(U312 * J3 * U32.) + \text{trace}(U412 * J4 * U42.)$
 $+ \text{trace}(U512 * J5 * U52.) + \text{trace}(U612 * J6 * U62.) + \text{trace}(U712 * J7 * U72.) +$
 $\text{trace}(U812 * J8 * U82.) + \text{trace}(U912 * J9 * U92.))$;

$h213 = \text{simplify}(\text{trace}(U313 * J3 * U32.) + \text{trace}(U413 * J4 * U42.) + \text{trace}(U513 * J5 * U52.) +$
 $\text{trace}(U613 * J6 * U62.) + \text{trace}(U713 * J7 * U72.) + \text{trace}(U813 * J8 * U82.) +$
 $\text{trace}(U913 * J9 * U92.))$;

$h214 = \text{simplify}(\text{trace}(U414 * J4 * U42.) + \text{trace}(U514 * J5 * U52.) + \text{trace}(U614 * J6 * U62.)$
 $+ \text{trace}(U714 * J7 * U72.) + \text{trace}(U814 * J8 * U82.) + \text{trace}(U914 * J9 * U92.))$;

$h215 = \text{simplify}(\text{trace}(U515 * J5 * U52.) + \text{trace}(U615 * J6 * U62.) + \text{trace}(U715 * J7 * U72.)$
 $+ \text{trace}(U815 * J8 * U82.) + \text{trace}(U915 * J9 * U92.))$;

h216=simplify(trace(U616*J6*U62.') + trace(U716*J7*U72.') + trace(U816*J8*U82.')
+ trace(U916*J9*U92.'));

h217=simplify(trace(U717*J7*U72.') + trace(U817*J8*U82.') + trace(U917*J9*U92.')
); h218=simplify(trace(U818*J8*U82.') + trace(U918*J9*U92.')); h219=simplify(
trace(U919*J9*U92.'));

h221=simplify(trace(U221*J2*U22.') + trace(U321*J3*U32.') + trace(U421*J4*U42.') +
trace(U521*J5*U52.') + trace(U621*J6*U62.') + trace(U721*J7*U72.') +
trace(U821*J8*U82.') + trace(U921*J9*U92.'));

h222=simplify(trace(U222*J2*U22.') + trace(U322*J3*U32.') + trace(U422*J4*U42.')
+ trace(U522*J5*U52.') + trace(U622*J6*U62.') + trace(U722*J7*U72.') +
trace(U822*J8*U82.') + trace(U922*J9*U92.'));

h223=simplify(trace(U323*J3*U32.') + trace(U423*J4*U42.') + trace(U523*J5*U52.')
+ trace(U623*J6*U62.') + trace(U723*J7*U72.') + trace(U823*J8*U82.') +
trace(U923*J9*U92.'));

h224=simplify(trace(U424*J4*U42.') + trace(U524*J5*U52.') + trace(U624*J6*U62.') +
trace(U724*J7*U72.') + trace(U824*J8*U82.') + trace(U924*J9*U92.'));

h225=simplify(trace(U525*J5*U52.') + trace(U625*J6*U62.') + trace(U725*J7*U72.') +
trace(U825*J8*U82.') + trace(U925*J9*U92.'));

h226=simplify(trace(U626*J6*U62.') + trace(U726*J7*U72.') + trace(U826*J8*U82.')
+ trace(U926*J9*U92.'));

h227=simplify(trace(U727*J7*U72.') + trace(U827*J8*U82.') + trace(U927*J9*U92.')
); h228=simplify(trace(U828*J8*U82.') + trace(U928*J9*U92.')); h229=simplify(
trace(U929*J9*U92.'));

h231=simplify(trace(U331*J3*U32.') + trace(U431*J4*U42.') + trace(U531*J5*U52.')
+ trace(U631*J6*U62.') + trace(U731*J7*U72.') + trace(U831*J8*U82.') +
trace(U931*J9*U92.'));

h232=simplify(trace(U332*J3*U32.') + trace(U432*J4*U42.') + trace(U532*J5*U52.') +
trace(U632*J6*U62.') + trace(U732*J7*U72.') + trace(U832*J8*U82.') +
trace(U932*J9*U92.'));

h233=simplify(trace(U333*J3*U32.') + trace(U433*J4*U42.') + trace(U533*J5*U52.')
+ trace(U633*J6*U62.') + trace(U733*J7*U72.') + trace(U833*J8*U82.') +
trace(U933*J9*U92.'));

h234=simplify(trace(U434*J4*U42.') + trace(U534*J5*U52.') + trace(U634*J6*U62.') +
trace(U734*J7*U72.') + trace(U834*J8*U82.') + trace(U934*J9*U92.'));

h235=simplify(trace(U535*J5*U52.') + trace(U635*J6*U62.') + trace(U735*J7*U72.') +
trace(U835*J8*U82.') + trace(U935*J9*U92.'));

h236=simplify(trace(U636*J6*U62.') + trace(U736*J7*U72.') + trace(U836*J8*U82.')
+ trace(U936*J9*U92.'));

h237=simplify(trace(U737*J7*U72.') + trace(U837*J8*U82.') + trace(U937*J9*U92.')
); h238=simplify(trace(U838*J8*U82.') + trace(U938*J9*U92.')); h239=simplify(
trace(U939*J9*U92.'));

h241=simplify(trace(U441*J4*U42.') + trace(U541*J5*U52.') + trace(U641*J6*U62.') +
trace(U741*J7*U72.') + trace(U841*J8*U82.') + trace(U941*J9*U92.'));

h242=simplify(trace(U442*J4*U42.') + trace(U542*J5*U52.') + trace(U642*J6*U62.') +
trace(U742*J7*U72.') + trace(U842*J8*U82.') + trace(U942*J9*U92.'));

h243=simplify(trace(U443*J4*U42.') + trace(U543*J5*U52.') + trace(U643*J6*U62.') +
trace(U743*J7*U72.') + trace(U843*J8*U82.') + trace(U943*J9*U92.'));

h244=simplify(trace(U444*J4*U42.') + trace(U544*J5*U52.') + trace(U644*J6*U62.') +
trace(U744*J7*U72.') + trace(U844*J8*U82.') + trace(U944*J9*U92.'));

h245=simplify(trace(U545*J5*U52.') + trace(U645*J6*U62.') + trace(U745*J7*U72.') +
trace(U845*J8*U82.') + trace(U945*J9*U92.'));

h246=simplify(trace(U646*J6*U62.') + trace(U746*J7*U72.') + trace(U846*J8*U82.')
+ trace(U946*J9*U92.'));

h247=simplify(trace(U747*J7*U72.') + trace(U847*J8*U82.') + trace(U947*J9*U92.'));

h248=simplify(trace(U848*J8*U82.') + trace(U948*J9*U92.'));

h249=simplify(trace(U949*J9*U92.));

h251=simplify(trace(U551*J5*U52.) + trace(U651*J6*U62.) + trace(U751*J7*U72.)
+ trace(U851*J8*U82.) + trace(U951*J9*U92.));

h252=simplify(trace(U552*J5*U52.) + trace(U652*J6*U62.) + trace(U752*J7*U72.)
+ trace(U852*J8*U82.) + trace(U952*J9*U92.));

h253=simplify(trace(U553*J5*U52.) + trace(U653*J6*U62.) + trace(U753*J7*U72.) +
trace(U853*J8*U82.) + trace(U953*J9*U92.));

h254=simplify(trace(U554*J5*U52.) + trace(U654*J6*U62.) + trace(U754*J7*U72.)
+ trace(U854*J8*U82.) + trace(U954*J9*U92.));

h255=simplify(trace(U555*J5*U52.) + trace(U655*J6*U62.) + trace(U755*J7*U72.) +
trace(U855*J8*U82.) + trace(U955*J9*U92.));

h256=simplify(trace(U656*J6*U62.) + trace(U756*J7*U72.) + trace(U856*J8*U82.)
+ trace(U956*J9*U92.));

h257=simplify(trace(U757*J7*U72.) + trace(U857*J8*U82.) + trace(U957*J9*U92.)
); h258=simplify(trace(U858*J8*U82.) + trace(U958*J9*U92.)); h259=simplify(
trace(U959*J9*U92.));

h261=simplify(trace(U661*J6*U62.) + trace(U761*J7*U72.) + trace(U861*J8*U82.)
+ trace(U961*J9*U92.));

h262=simplify(trace(U662*J6*U62.) + trace(U762*J7*U72.) + trace(U862*J8*U82.) +
trace(U962*J9*U92.));

h263=simplify(trace(U663*J6*U62.) + trace(U763*J7*U72.) + trace(U863*J8*U82.)
+ trace(U963*J9*U92.));

h264=simplify(trace(U664*J6*U62.) + trace(U764*J7*U72.) + trace(U864*J8*U82.)
+ trace(U964*J9*U92.));

h265=simplify(trace(U665*J6*U62.) + trace(U765*J7*U72.) + trace(U865*J8*U82.)
+ trace(U965*J9*U92.));

h266=simplify(trace(U666*J6*U62.) + trace(U766*J7*U72.) + trace(U866*J8*U82.)
+ trace(U966*J9*U92.));

h267=simplify(trace(U767*J7*U72.) + trace(U867*J8*U82.) + trace(U967*J9*U92.));
 h268=simplify(trace(U868*J8*U82.) + trace(U968*J9*U92.)); h269=simplify(
 trace(U969*J9*U92.));

h271=simplify(trace(U771*J7*U72.) + trace(U871*J8*U82.) + trace(U971*J9*U92.));

h272=simplify(trace(U772*J7*U72.) + trace(U872*J8*U82.) + trace(U972*J9*U92.));

h273=simplify(trace(U773*J7*U72.) + trace(U873*J8*U82.) + trace(U973*J9*U92.));

h274=simplify(trace(U774*J7*U72.) + trace(U874*J8*U82.) + trace(U974*J9*U92.));

h275=simplify(trace(U775*J7*U72.) + trace(U875*J8*U82.) + trace(U975*J9*U92.));

h276=simplify(trace(U776*J7*U72.) + trace(U876*J8*U82.) + trace(U976*J9*U92.));

h277=simplify(trace(U777*J7*U72.) + trace(U877*J8*U82.) + trace(U977*J9*U92.));

h278=simplify(trace(U878*J8*U82.) + tr

h281=simplify(trace(U881*J8*U82.) + trace(U981*J9*U92.));

h282=simplify(trace(U882*J8*U82.) + trace(U982*J9*U92.));

h283=simplify(trace(U883*J8*U82.) + trace(U983*J9*U92.));

h284=simplify(trace(U884*J8*U82.) + trace(U984*J9*U92.));

h285=simplify(trace(U885*J8*U82.) + trace(U985*J9*U92.));

h286=simplify(trace(U886*J8*U82.) + trace(U986*J9*U92.));

h287=simplify(trace(U887*J8*U82.) + trace(U987*J9*U92.));

h288=simplify(trace(U888*J8*U82.) + trace(U988*J9*U92.));

h289=simplify(trace(U989*J9*U92.));

h291=simplify(trace(U991*J9*U92.));

h292=simplify(trace(U992*J9*U92.));

h293=simplify(trace(U993*J9*U92.));

h294=simplify(trace(U994*J9*U92.));

h295=simplify(trace(U995*J9*U92.));

h296=simplify(trace(U996*J9*U92.));

h297=simplify(trace(U997*J9*U92.));

h298=simplify(trace(U998*J9*U92.));

h299=simplify(trace(U999*J9*U92.));

h311=simplify(trace(U311*J3*U33.) + trace(U411*J4*U43.) + trace(U511*J5*U53.)
+ trace(U611*J6*U63.) + trace(U711*J7*U73.) + trace(U811*J8*U83.) +
trace(U911*J9*U93.));

h312=simplify(trace(U312*J3*U33.) + trace(U412*J4*U43.) + trace(U512*J5*U53.)
+ trace(U612*J6*U63.) + trace(U712*J7*U73.) + trace(U812*J8*U83.) +
trace(U912*J9*U93.));

h313=simplify(trace(U313*J3*U33.) + trace(U413*J4*U43.) + trace(U513*J5*U53.)
+ trace(U613*J6*U63.) + trace(U713*J7*U73.) + trace(U813*J8*U83.) +
trace(U913*J9*U93.));

h314=simplify(trace(U414*J4*U43.) + trace(U514*J5*U53.) + trace(U614*J6*U63.) +
trace(U714*J7*U73.) + trace(U814*J8*U83.) + trace(U914*J9*U93.));

h315=simplify(trace(U515*J5*U53.) + trace(U615*J6*U63.) + trace(U715*J7*U73.) +
trace(U815*J8*U83.) + trace(U915*J9*U93.));

h316=simplify(trace(U616*J6*U63.) + trace(U716*J7*U73.) + trace(U816*J8*U83.) +
trace(U916*J9*U93.));

h317=simplify(trace(U717*J7*U73.) + trace(U817*J8*U83.) + trace(U917*J9*U93.)
); h318=simplify(trace(U818*J8*U83.) + trace(U918*J9*U93.)); h319=simplify(
trace(U919*J9*U93.));

h321=simplify(trace(U321*J3*U33.) + trace(U421*J4*U43.) + trace(U521*J5*U53.) +
trace(U621*J6*U63.) + trace(U721*J7*U73.) + trace(U821*J8*U83.) +
trace(U921*J9*U93.));

h322=simplify(trace(U322*J3*U33.) + trace(U422*J4*U43.) + trace(U522*J5*U53.)
+ trace(U622*J6*U63.) + trace(U722*J7*U73.) + trace(U822*J8*U83.) +
trace(U922*J9*U93.));

h323=simplify(trace(U323*J3*U33.') + trace(U423*J4*U43.') + trace(U523*J5*U53.')
+ trace(U623*J6*U63.') + trace(U723*J7*U73.') + trace(U823*J8*U83.') +
trace(U923*J9*U93.'));

h324=simplify(trace(U424*J4*U43.') + trace(U524*J5*U53.') + trace(U624*J6*U63.')
+ trace(U724*J7*U73.') + trace(U824*J8*U83.') + trace(U924*J9*U93.'));

h325=simplify(trace(U525*J5*U53.') + trace(U625*J6*U63.') + trace(U725*J7*U73.')
+ trace(U825*J8*U83.') + trace(U925*J9*U93.'));

h326=simplify(trace(U626*J6*U63.') + trace(U726*J7*U73.') + trace(U826*J8*U83.')
+ trace(U926*J9*U93.'));

h327=simplify(trace(U727*J7*U73.') + trace(U827*J8*U83.') + trace(U927*J9*U93.')
); h328=simplify(trace(U828*J8*U83.') + trace(U928*J9*U93.')); h329=simplify(
trace(U929*J9*U93.'));

h331=simplify(trace(U331*J3*U33.') + trace(U431*J4*U43.') + trace(U531*J5*U53.')
+ trace(U631*J6*U63.') + trace(U731*J7*U73.') + trace(U831*J8*U83.') +
trace(U931*J9*U93.'));

h332=simplify(trace(U332*J3*U33.') + trace(U432*J4*U43.') + trace(U532*J5*U53.')
+ trace(U632*J6*U63.') + trace(U732*J7*U73.') + trace(U832*J8*U83.') +
trace(U932*J9*U93.'));

h333=simplify(trace(U333*J3*U33.') + trace(U433*J4*U43.') + trace(U533*J5*U53.') +
trace(U633*J6*U63.') + trace(U733*J7*U73.') + trace(U833*J8*U83.') +
trace(U933*J9*U93.'));

h334=simplify(trace(U434*J4*U43.') + trace(U534*J5*U53.') + trace(U634*J6*U63.') +
trace(U734*J7*U73.') + trace(U834*J8*U83.') + trace(U934*J9*U93.'));

h335=simplify(trace(U535*J5*U53.') + trace(U635*J6*U63.') + trace(U735*J7*U73.') +
trace(U835*J8*U83.') + trace(U935*J9*U93.'));

h336=simplify(trace(U636*J6*U63.') + trace(U736*J7*U73.') + trace(U836*J8*U83.')
+ trace(U936*J9*U93.'));

h337=simplify(trace(U737*J7*U73.') + trace(U837*J8*U83.') + trace(U937*J9*U93.'));

h338=simplify(trace(U838*J8*U83.') + trace(U938*J9*U93.'));

h339=simplify(trace(U939*J9*U93.'));

h341=simplify(trace(U441*J4*U43.') + trace(U541*J5*U53.') + trace(U641*J6*U63.') +
trace(U741*J7*U73.') + trace(U841*J8*U83.') + trace(U941*J9*U93.'));

h342=simplify(trace(U442*J4*U43.') + trace(U542*J5*U53.') + trace(U642*J6*U63.') +
trace(U742*J7*U73.') + trace(U842*J8*U83.') + trace(U942*J9*U93.'));

h343=simplify(trace(U443*J4*U43.') + trace(U543*J5*U53.') + trace(U643*J6*U63.') +
trace(U743*J7*U73.') + trace(U843*J8*U83.') + trace(U943*J9*U93.'));

h344=simplify(trace(U444*J4*U43.') + trace(U544*J5*U53.') + trace(U644*J6*U63.') +
trace(U744*J7*U73.') + trace(U844*J8*U83.') + trace(U944*J9*U93.'));

h345=simplify(trace(U545*J5*U53.') + trace(U645*J6*U63.') + trace(U745*J7*U73.') +
trace(U845*J8*U83.') + trace(U945*J9*U93.'));

h346=simplify(trace(U646*J6*U63.') + trace(U746*J7*U73.') + trace(U846*J8*U83.')
+ trace(U946*J9*U93.'));

h347=simplify(trace(U747*J7*U73.') + trace(U847*J8*U83.') + trace(U947*J9*U93.')
); h348=simplify(trace(U848*J8*U83.') + trace(U948*J9*U93.')); h349=simplify(
trace(U949*J9*U93.'));

h351=simplify(trace(U551*J5*U53.') + trace(U651*J6*U63.') + trace(U751*J7*U73.') +
trace(U851*J8*U83.') + trace(U951*J9*U93.'));

h352=simplify(trace(U552*J5*U53.') + trace(U652*J6*U63.') + trace(U752*J7*U73.')
+ trace(U852*J8*U83.') + trace(U952*J9*U93.'));

h353=simplify(trace(U553*J5*U53.') + trace(U653*J6*U63.') + trace(U753*J7*U73.') +
trace(U853*J8*U83.') + trace(U953*J9*U93.'));

h354=simplify(trace(U554*J5*U53.') + trace(U654*J6*U63.') + trace(U754*J7*U73.')
+ trace(U854*J8*U83.') + trace(U954*J9*U93.'));

h355=simplify(trace(U555*J5*U53.') + trace(U655*J6*U63.') + trace(U755*J7*U73.') +
trace(U855*J8*U83.') + trace(U955*J9*U93.'));

h356=simplify(trace(U656*J6*U63.') + trace(U756*J7*U73.') + trace(U856*J8*U83.')
+ trace(U956*J9*U93.'));

h357=simplify(trace(U757*J7*U73.') + trace(U857*J8*U83.') + trace(U957*J9*U93.')); h358=simplify(trace(U858*J8*U83.') + trace(U958*J9*U93.')); h359=simplify(trace(U959*J9*U93.'));

h361=simplify(trace(U661*J6*U63.') + trace(U761*J7*U73.') + trace(U861*J8*U83.') + trace(U961*J9*U93.'));

h362=simplify(trace(U662*J6*U63.') + trace(U762*J7*U73.') + trace(U862*J8*U83.') + trace(U962*J9*U93.'));

h363=simplify(trace(U663*J6*U63.') + trace(U763*J7*U73.') + trace(U863*J8*U83.') + trace(U963*J9*U93.'));

h364=simplify(trace(U664*J6*U63.') + trace(U764*J7*U73.') + trace(U864*J8*U83.') + trace(U964*J9*U93.'));

h365=simplify(trace(U665*J6*U63.') + trace(U765*J7*U73.') + trace(U865*J8*U83.') + trace(U965*J9*U93.'));

h366=simplify(trace(U666*J6*U63.') + trace(U766*J7*U73.') + trace(U866*J8*U83.') + trace(U966*J9*U93.'));

h367=simplify(trace(U767*J7*U73.') + trace(U867*J8*U83.') + trace(U967*J9*U93.')); h368=simplify(trace(U868*J8*U83.') + trace(U968*J9*U93.')); h369=simplify(trace(U969*J9*U93.'));

h371=simplify(trace(U771*J7*U73.') + trace(U871*J8*U83.') + trace(U971*J9*U93.'));

h372=simplify(trace(U772*J7*U73.') + trace(U872*J8*U83.') + trace(U972*J9*U93.'));

h373=simplify(trace(U773*J7*U73.') + trace(U873*J8*U83.') + trace(U973*J9*U93.'));

h374=simplify(trace(U774*J7*U73.') + trace(U874*J8*U83.') + trace(U974*J9*U93.'));

h375=simplify(trace(U775*J7*U73.') + trace(U875*J8*U83.') + trace(U975*J9*U93.'));

h376=simplify(trace(U776*J7*U73.') + trace(U876*J8*U83.') + trace(U976*J9*U93.'));

h377=simplify(trace(U777*J7*U73.') + trace(U877*J8*U83.') + trace(U977*J9*U93.'));

h378=simplify(trace(U878*J8*U83.') + trace(U978*J9*U93.')); h379=simplify(trace(U979*J9*U93.'));

$h381 = \text{simplify}(\text{trace}(U881 * J8 * U83.) + \text{trace}(U981 * J9 * U93.))$;
 $h382 = \text{simplify}(\text{trace}(U882 * J8 * U83.) + \text{trace}(U982 * J9 * U93.))$;
 $h383 = \text{simplify}(\text{trace}(U883 * J8 * U83.) + \text{trace}(U983 * J9 * U93.))$;
 $h384 = \text{simplify}(\text{trace}(U884 * J8 * U83.) + \text{trace}(U984 * J9 * U93.))$;
 $h385 = \text{simplify}(\text{trace}(U885 * J8 * U83.) + \text{trace}(U985 * J9 * U93.))$;
 $h386 = \text{simplify}(\text{trace}(U886 * J8 * U83.) + \text{trace}(U986 * J9 * U93.))$;
 $h387 = \text{simplify}(\text{trace}(U887 * J8 * U83.) + \text{trace}(U987 * J9 * U93.))$;
 $h388 = \text{simplify}(\text{trace}(U888 * J8 * U83.) + \text{trace}(U988 * J9 * U93.))$;
 $h389 = \text{simplify}(\text{trace}(U989 * J9 * U93.))$;

$h391 = \text{simplify}(\text{trace}(U991 * J9 * U93.))$;
 $h392 = \text{simplify}(\text{trace}(U992 * J9 * U93.))$;
 $h393 = \text{simplify}(\text{trace}(U993 * J9 * U93.))$;
 $h394 = \text{simplify}(\text{trace}(U994 * J9 * U93.))$;
 $h395 = \text{simplify}(\text{trace}(U995 * J9 * U93.))$;
 $h396 = \text{simplify}(\text{trace}(U996 * J9 * U93.))$;
 $h397 = \text{simplify}(\text{trace}(U997 * J9 * U93.))$;
 $h398 = \text{simplify}(\text{trace}(U998 * J9 * U93.))$;
 $h399 = \text{simplify}(\text{trace}(U999 * J9 * U93.))$;

$h411 = \text{simplify}(\text{trace}(U411 * J4 * U44.) + \text{trace}(U511 * J5 * U54.) + \text{trace}(U611 * J6 * U64.) +$
 $\text{trace}(U711 * J7 * U74.) + \text{trace}(U811 * J8 * U84.) + \text{trace}(U911 * J9 * U94.))$;
 $h412 = \text{simplify}(\text{trace}(U412 * J4 * U44.) + \text{trace}(U512 * J5 * U54.) + \text{trace}(U612 * J6 * U64.) +$
 $\text{trace}(U712 * J7 * U74.) + \text{trace}(U812 * J8 * U84.) + \text{trace}(U912 * J9 * U94.))$;
 $h413 = \text{simplify}(\text{trace}(U413 * J4 * U44.) + \text{trace}(U513 * J5 * U54.) + \text{trace}(U613 * J6 * U64.) +$
 $\text{trace}(U713 * J7 * U74.) + \text{trace}(U813 * J8 * U84.) + \text{trace}(U913 * J9 * U94.))$;
 $h414 = \text{simplify}(\text{trace}(U414 * J4 * U44.) + \text{trace}(U514 * J5 * U54.) + \text{trace}(U614 * J6 * U64.) +$
 $\text{trace}(U714 * J7 * U74.) + \text{trace}(U814 * J8 * U84.) + \text{trace}(U914 * J9 * U94.))$;
 $h415 = \text{simplify}(\text{trace}(U515 * J5 * U54.) + \text{trace}(U615 * J6 * U64.) + \text{trace}(U715 * J7 * U74.) +$
 $\text{trace}(U815 * J8 * U84.) + \text{trace}(U915 * J9 * U94.))$;

h416=simplify(trace(U616*J6*U64.') + trace(U716*J7*U74.') + trace(U816*J8*U84.') + trace(U916*J9*U94.'));

h417=simplify(trace(U717*J7*U74.') + trace(U817*J8*U84.') + trace(U917*J9*U94.')); h418=simplify(trace(U818*J8*U84.') + trace(U918*J9*U94.')); h419=simplify(trace(U919*J9*U94.'));

h421=simplify(trace(U421*J4*U44.') + trace(U521*J5*U54.') + trace(U621*J6*U64.') + trace(U721*J7*U72.') + trace(U821*J8*U84.') + trace(U921*J9*U94.'));

h422=simplify(trace(U422*J4*U44.') + trace(U522*J5*U54.') + trace(U622*J6*U64.') + trace(U722*J7*U72.') + trace(U822*J8*U84.') + trace(U922*J9*U94.'));

h423=simplify(trace(U423*J4*U44.') + trace(U523*J5*U54.') + trace(U623*J6*U64.') + trace(U723*J7*U72.') + trace(U823*J8*U84.') + trace(U923*J9*U94.'));

h424=simplify(trace(U424*J4*U44.') + trace(U524*J5*U54.') + trace(U624*J6*U64.') + trace(U724*J7*U72.') + trace(U824*J8*U84.') + trace(U924*J9*U94.'));

h425=simplify(trace(U525*J5*U54.') + trace(U625*J6*U64.') + trace(U725*J7*U74.') + trace(U825*J8*U82.') + trace(U925*J9*U94.'));

h426=simplify(trace(U626*J6*U64.') + trace(U726*J7*U74.') + trace(U826*J8*U84.') + trace(U926*J9*U92.'));

h427=simplify(trace(U727*J7*U74.') + trace(U827*J8*U84.') + trace(U927*J9*U94.')); h428=simplify(trace(U828*J8*U84.') + trace(U928*J9*U94.')); h429=simplify(trace(U929*J9*U94.'));

h431=simplify(trace(U431*J4*U44.') + trace(U531*J5*U54.') + trace(U631*J6*U64.') + trace(U731*J7*U74.') + trace(U831*J8*U84.') + trace(U931*J9*U94.'));

h432=simplify(trace(U432*J4*U44.') + trace(U532*J5*U54.') + trace(U632*J6*U64.') + trace(U732*J7*U74.') + trace(U832*J8*U84.') + trace(U932*J9*U94.'));

h433=simplify(trace(U433*J4*U44.') + trace(U533*J5*U54.') + trace(U633*J6*U64.') + trace(U733*J7*U74.') + trace(U833*J8*U84.') + trace(U933*J9*U94.'));

h434=simplify(trace(U434*J4*U44.') + trace(U534*J5*U54.') + trace(U634*J6*U64.') + trace(U734*J7*U74.') + trace(U834*J8*U84.') + trace(U934*J9*U94.'));

h435=simplify(trace(U535*J5*U54.') + trace(U635*J6*U64.') + trace(U735*J7*U74.')
+ trace(U835*J8*U84.') + trace(U935*J9*U94.'));

h436=simplify(trace(U636*J6*U64.') + trace(U736*J7*U74.') + trace(U836*J8*U84.') +
trace(U936*J9*U94.'));

h437=simplify(trace(U737*J7*U74.') + trace(U837*J8*U84.') + trace(U937*J9*U94.')
); h438=simplify(trace(U838*J8*U84.') + trace(U938*J9*U94.')); h439=simplify(
trace(U939*J9*U94.'));

h441=simplify(trace(U441*J4*U44.') + trace(U541*J5*U54.') + trace(U641*J6*U64.') +
trace(U741*J7*U74.') + trace(U841*J8*U84.') + trace(U941*J9*U94.'));

h442=simplify(trace(U442*J4*U44.') + trace(U542*J5*U54.') + trace(U642*J6*U64.') +
trace(U742*J7*U74.') + trace(U842*J8*U84.') + trace(U942*J9*U94.'));

h443=simplify(trace(U443*J4*U44.') + trace(U543*J5*U54.') + trace(U643*J6*U64.') +
trace(U743*J7*U74.') + trace(U843*J8*U84.') + trace(U943*J9*U94.'));

h444=simplify(trace(U444*J4*U44.') + trace(U544*J5*U54.') + trace(U644*J6*U64.') +
trace(U744*J7*U74.') + trace(U844*J8*U84.') + trace(U944*J9*U94.'));

h445=simplify(trace(U545*J5*U54.') + trace(U645*J6*U64.') + trace(U745*J7*U74.') +
trace(U845*J8*U84.') + trace(U945*J9*U94.'));

h446=simplify(trace(U646*J6*U64.') + trace(U746*J7*U74.') + trace(U846*J8*U84.')
+ trace(U946*J9*U94.'));

h447=simplify(trace(U747*J7*U74.') + trace(U847*J8*U84.') + trace(U947*J9*U94.')
); h448=simplify(trace(U848*J8*U84.') + trace(U948*J9*U94.')); h449=simplify(
trace(U949*J9*U94.'));

h451=simplify(trace(U551*J5*U54.') + trace(U651*J6*U64.') + trace(U751*J7*U74.')
+ trace(U851*J8*U84.') + trace(U951*J9*U94.'));

h452=simplify(trace(U552*J5*U54.') + trace(U652*J6*U64.') + trace(U752*J7*U74.') +
trace(U852*J8*U84.') + trace(U952*J9*U94.'));

h453=simplify(trace(U553*J5*U54.') + trace(U653*J6*U64.') + trace(U753*J7*U74.')
+ trace(U853*J8*U84.') + trace(U953*J9*U94.'));

$h_{454} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{554} * J_5 * U_{54}.) + \text{trace}(U_{654} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{754} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{854} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{954} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{455} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{555} * J_5 * U_{54}.) + \text{trace}(U_{655} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{755} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{855} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{955} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{456} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{656} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{756} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{856} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{956} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{457} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{757} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{857} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{957} * J_9 * U_{94}.));$
 $h_{458} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{858} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{958} * J_9 * U_{94}.));$
 $h_{459} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{959} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{461} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{661} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{761} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{861} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{961} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{462} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{662} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{762} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{862} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{962} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{463} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{663} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{763} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{863} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{963} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{464} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{664} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{764} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{864} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{964} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{465} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{665} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{765} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{865} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{965} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{466} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{666} * J_6 * U_{64}.) + \text{trace}(U_{766} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{866} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{966} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{467} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{767} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{867} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{967} * J_9 * U_{94}.));$
 $h_{468} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{868} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{968} * J_9 * U_{94}.));$
 $h_{469} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{969} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{471} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{771} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{871} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{971} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{472} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{772} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{872} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{972} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{473} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{773} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{873} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{973} * J_9 * U_{94}.));$

$h_{474} = \text{simplify}(\text{trace}(U_{774} * J_7 * U_{74}.) + \text{trace}(U_{874} * J_8 * U_{84}.) + \text{trace}(U_{974} * J_9 * U_{94}.));$

$h475 = \text{simplify}(\text{trace}(U775 * J7 * U74.) + \text{trace}(U875 * J8 * U84.) + \text{trace}(U975 * J9 * U94.)$
 $); h476 = \text{simplify}(\text{trace}(U776 * J7 * U74.) + \text{trace}(U876 * J8 * U84.) +$
 $\text{trace}(U976 * J9 * U94.)); h477 = \text{simplify}(\text{trace}(U777 * J7 * U74.) + \text{trace}(U877 * J8 * U84.)$
 $+ \text{trace}(U977 * J9 * U94.)); h478 = \text{simplify}(\text{trace}(U878 * J8 * U84.) +$
 $\text{trace}(U978 * J9 * U94.)); h479 = \text{simplify}(\text{trace}(U979 * J9 * U94.));$

$h481 = \text{simplify}(\text{trace}(U881 * J8 * U84.) + \text{trace}(U981 * J9 * U94.));$
 $h482 = \text{simplify}(\text{trace}(U882 * J8 * U84.) + \text{trace}(U982 * J9 * U94.));$
 $h483 = \text{simplify}(\text{trace}(U883 * J8 * U84.) + \text{trace}(U983 * J9 * U94.));$
 $h484 = \text{simplify}(\text{trace}(U884 * J8 * U84.) + \text{trace}(U984 * J9 * U94.));$
 $h485 = \text{simplify}(\text{trace}(U885 * J8 * U84.) + \text{trace}(U985 * J9 * U94.));$
 $h486 = \text{simplify}(\text{trace}(U886 * J8 * U84.) + \text{trace}(U986 * J9 * U94.));$
 $h487 = \text{simplify}(\text{trace}(U887 * J8 * U84.) + \text{trace}(U987 * J9 * U94.));$
 $h488 = \text{simplify}(\text{trace}(U888 * J8 * U84.) + \text{trace}(U988 * J9 * U94.));$
 $h489 = \text{simplify}(\text{trace}(U989 * J9 * U94.));$

$h491 = \text{simplify}(\text{trace}(U991 * J9 * U94.));$
 $h492 = \text{simplify}(\text{trace}(U992 * J9 * U94.));$
 $h493 = \text{simplify}(\text{trace}(U993 * J9 * U94.));$
 $h494 = \text{simplify}(\text{trace}(U994 * J9 * U94.));$
 $h495 = \text{simplify}(\text{trace}(U995 * J9 * U94.));$
 $h496 = \text{simplify}(\text{trace}(U996 * J9 * U94.));$
 $h497 = \text{simplify}(\text{trace}(U997 * J9 * U94.));$
 $h498 = \text{simplify}(\text{trace}(U998 * J9 * U94.));$
 $h499 = \text{simplify}(\text{trace}(U999 * J9 * U94.));$

$h511 = \text{simplify}(\text{trace}(U511 * J5 * U55.) + \text{trace}(U611 * J6 * U65.) + \text{trace}(U711 * J7 * U75.)$
 $+ \text{trace}(U811 * J8 * U85.) + \text{trace}(U911 * J9 * U95.));$

h531=simplify(trace(U531*J5*U55.') + trace(U631*J6*U65.') + trace(U731*J7*U75.') + trace(U831*J8*U85.') + trace(U931*J9*U95.'));

h532=simplify(trace(U532*J5*U55.') + trace(U632*J6*U65.') + trace(U732*J7*U75.') + trace(U832*J8*U85.') + trace(U932*J9*U95.'));

h533=simplify(trace(U533*J5*U55.') + trace(U633*J6*U65.') + trace(U733*J7*U75.') + trace(U833*J8*U85.') + trace(U933*J9*U95.'));

h534=simplify(trace(U534*J5*U55.') + trace(U634*J6*U65.') + trace(U734*J7*U75.') + trace(U834*J8*U85.') + trace(U934*J9*U95.'));

h535=simplify(trace(U535*J5*U55.') + trace(U635*J6*U65.') + trace(U735*J7*U75.') + trace(U835*J8*U85.') + trace(U935*J9*U95.'));

h536=simplify(trace(U636*J6*U65.') + trace(U736*J7*U75.') + trace(U836*J8*U85.') + trace(U936*J9*U95.'));

h537=simplify(trace(U737*J7*U75.') + trace(U837*J8*U85.') + trace(U937*J9*U95.')); h538=simplify(trace(U838*J8*U85.') + trace(U938*J9*U95.')); h539=simplify(trace(U939*J9*U95.'));

h541=simplify(trace(U541*J5*U55.') + trace(U641*J6*U65.') + trace(U741*J7*U75.') + trace(U841*J8*U85.') + trace(U941*J9*U95.'));

h542=simplify(trace(U542*J5*U55.') + trace(U642*J6*U65.') + trace(U742*J7*U75.') + trace(U842*J8*U85.') + trace(U942*J9*U95.'));

h543=simplify(trace(U543*J5*U55.') + trace(U643*J6*U65.') + trace(U743*J7*U75.') + trace(U843*J8*U85.') + trace(U943*J9*U95.'));

h544=simplify(trace(U544*J5*U55.') + trace(U644*J6*U65.') + trace(U744*J7*U75.') + trace(U844*J8*U85.') + trace(U944*J9*U95.'));

h545=simplify(trace(U545*J5*U55.') + trace(U645*J6*U65.') + trace(U745*J7*U75.') + trace(U845*J8*U85.') + trace(U945*J9*U95.'));

h546=simplify(trace(U646*J6*U65.') + trace(U746*J7*U75.') + trace(U846*J8*U85.') + trace(U946*J9*U95.'));

h547=simplify(trace(U747*J7*U75.') + trace(U847*J8*U85.') + trace(U947*J9*U95.'));

h548=simplify(trace(U848*J8*U85.') + trace(U948*J9*U95.'));

h549=simplify(trace(U949*J9*U95.'));

h551=simplify(trace(U551*J5*U55.') + trace(U651*J6*U65.') + trace(U751*J7*U75.')
+ trace(U851*J8*U85.') + trace(U951*J9*U95.'));

h552=simplify(trace(U552*J5*U55.') + trace(U652*J6*U65.') + trace(U752*J7*U75.') +
trace(U852*J8*U85.') + trace(U952*J9*U95.'));

h553=simplify(trace(U553*J5*U55.') + trace(U653*J6*U65.') + trace(U753*J7*U75.')
+ trace(U853*J8*U85.') + trace(U953*J9*U95.'));

h554=simplify(trace(U554*J5*U55.') + trace(U654*J6*U65.') + trace(U754*J7*U75.') +
trace(U854*J8*U85.') + trace(U954*J9*U95.'));

h555=simplify(trace(U555*J5*U55.') + trace(U655*J6*U65.') + trace(U755*J7*U75.')
+ trace(U855*J8*U85.') + trace(U955*J9*U95.'));

h556=simplify(trace(U656*J6*U65.') + trace(U756*J7*U75.') + trace(U856*J8*U85.') +
trace(U956*J9*U95.'));

h557=simplify(trace(U757*J7*U75.') + trace(U857*J8*U85.') + trace(U957*J9*U95.')
); h558=simplify(trace(U858*J8*U85.') + trace(U958*J9*U95.')); h559=simplify(
trace(U959*J9*U95.'));

h561=simplify(trace(U661*J6*U65.') + trace(U761*J7*U75.') + trace(U861*J8*U85.') +
trace(U961*J9*U95.'));

h562=simplify(trace(U662*J6*U65.') + trace(U762*J7*U75.') + trace(U862*J8*U85.')
+ trace(U962*J9*U95.'));

h563=simplify(trace(U663*J6*U65.') + trace(U763*J7*U75.') + trace(U863*J8*U85.') +
trace(U963*J9*U95.'));

h564=simplify(trace(U664*J6*U65.') + trace(U764*J7*U75.') + trace(U864*J8*U85.')
+ trace(U964*J9*U95.'));

h565=simplify(trace(U665*J6*U65.') + trace(U765*J7*U75.') + trace(U865*J8*U85.')
+ trace(U965*J9*U95.'));

h566=simplify(trace(U666*J6*U65.') + trace(U766*J7*U75.') + trace(U866*J8*U85.')
+ trace(U966*J9*U95.'));

h567=simplify(trace(U767*J7*U75.') + trace(U867*J8*U85.') + trace(U967*J9*U95.'));
 h568=simplify(trace(U868*J8*U85.') + trace(U968*J9*U95.')); h569=simplify(
 trace(U969*J9*U95.'));

h571=simplify(trace(U771*J7*U75.') + trace(U871*J8*U85.') + trace(U971*J9*U945.'));
 h572=simplify(trace(U772*J7*U75.') + trace(U872*J8*U85.') + trace(U972*J9*U95.'));
 h573=simplify(trace(U773*J7*U75.') + trace(U873*J8*U85.') + trace(U973*J9*U95.'));
 h574=simplify(trace(U774*J7*U75.') + trace(U874*J8*U85.') + trace(U974*J9*U95.'));
 h575=simplify(trace(U775*J7*U75.') + trace(U875*J8*U85.') + trace(U975*J9*U95.'));
 h576=simplify(trace(U776*J7*U75.') + trace(U876*J8*U85.') + trace(U976*J9*U95.'));
 h577=simplify(trace(U777*J7*U75.') + trace(U877*J8*U85.') + trace(U977*J9*U95.'));
 h578=simplify(trace(U878*J8*U85.') + trace(U978*J9*U95.')); h579=simplify(
 trace(U979*J9*U95.'));

h581=simplify(trace(U881*J8*U85.') + trace(U981*J9*U95.'));
 h582=simplify(trace(U882*J8*U85.') + trace(U982*J9*U95.'));
 h583=simplify(trace(U883*J8*U85.') + trace(U983*J9*U95.'));
 h584=simplify(trace(U884*J8*U85.') + trace(U984*J9*U95.'));
 h585=simplify(trace(U885*J8*U85.') + trace(U985*J9*U95.'));
 h586=simplify(trace(U886*J8*U85.') + trace(U986*J9*U95.'));
 h587=simplify(trace(U887*J8*U85.') + trace(U987*J9*U95.'));
 h588=simplify(trace(U888*J8*U85.') + trace(U988*J9*U95.'));
 h589=simplify(trace(U989*J9*U95.'));

h591=simplify(trace(U991*J9*U95.'));
 h592=simplify(trace(U992*J9*U95.'));
 h593=simplify(trace(U993*J9*U95.'));
 h594=simplify(trace(U994*J9*U95.'));
 h595=simplify(trace(U995*J9*U95.'));
 h596=simplify(trace(U996*J9*U95.'));

h597=simplify(trace(U997*J9*U95.));

h598=simplify(trace(U998*J9*U95.));

h599=simplify(trace(U999*J9*U95.));

h611=simplify(trace(U611*J6*U66.) + trace(U711*J7*U76.) + trace(U811*J8*U86.)
+ trace(U911*J9*U96.));

h612=simplify(trace(U612*J6*U66.) + trace(U712*J7*U76.) + trace(U812*J8*U86.) +
trace(U912*J9*U96.));

h613=simplify(trace(U613*J6*U66.) + trace(U713*J7*U76.) + trace(U813*J8*U86.)
+ trace(U913*J9*U96.));

h614=simplify(trace(U614*J6*U66.) + trace(U714*J7*U76.) + trace(U814*J8*U86.) +
trace(U914*J9*U96.));

h615=simplify(trace(U615*J6*U66.) + trace(U715*J7*U76.) + trace(U815*J8*U86.)
+ trace(U915*J9*U96.));

h616=simplify(trace(U616*J6*U66.) + trace(U716*J7*U76.) + trace(U816*J8*U86.)
+ trace(U916*J9*U96.));

h617=simplify(trace(U717*J7*U76.) + trace(U817*J8*U86.) + trace(U917*J9*U96.)
); h618=simplify(trace(U818*J8*U86.) + trace(U918*J9*U96.)); h619=simplify(
trace(U919*J9*U96.));

h621=simplify(trace(U621*J6*U66.) + trace(U721*J7*U76.) + trace(U821*J8*U86.) +
trace(U921*J9*U96.));

h622=simplify(trace(U622*J6*U66.) + trace(U722*J7*U76.) + trace(U822*J8*U86.)
+ trace(U922*J9*U96.));

h623=simplify(trace(U623*J6*U66.) + trace(U723*J7*U76.) + trace(U823*J8*U86.)
+ trace(U923*J9*U96.));

h624=simplify(trace(U624*J6*U66.) + trace(U724*J7*U76.) + trace(U824*J8*U86.) +
trace(U924*J9*U96.));

h625=simplify(trace(U625*J6*U66.) + trace(U725*J7*U76.) + trace(U825*J8*U86.)
+ trace(U925*J9*U96.));

$h626 = \text{simplify}(\text{trace}(U626*J6*U66.) + \text{trace}(U726*J7*U76.) + \text{trace}(U826*J8*U86.) + \text{trace}(U926*J9*U96.))$);

$h627 = \text{simplify}(\text{trace}(U727*J7*U76.) + \text{trace}(U827*J8*U86.) + \text{trace}(U927*J9*U96.))$); $h628 = \text{simplify}(\text{trace}(U828*J8*U86.) + \text{trace}(U928*J9*U96.))$); $h629 = \text{simplify}(\text{trace}(U929*J9*U96.))$);

$h631 = \text{simplify}(\text{trace}(U631*J6*U66.) + \text{trace}(U731*J7*U76.) + \text{trace}(U831*J8*U86.) + \text{trace}(U931*J9*U96.))$);

$h632 = \text{simplify}(\text{trace}(U632*J6*U66.) + \text{trace}(U732*J7*U76.) + \text{trace}(U832*J8*U86.) + \text{trace}(U932*J9*U96.))$);

$h633 = \text{simplify}(\text{trace}(U633*J6*U66.) + \text{trace}(U733*J7*U76.) + \text{trace}(U833*J8*U86.) + \text{trace}(U933*J9*U96.))$);

$h634 = \text{simplify}(\text{trace}(U634*J6*U66.) + \text{trace}(U734*J7*U76.) + \text{trace}(U834*J8*U86.) + \text{trace}(U934*J9*U96.))$);

$h635 = \text{simplify}(\text{trace}(U635*J6*U66.) + \text{trace}(U735*J7*U76.) + \text{trace}(U835*J8*U86.) + \text{trace}(U935*J9*U96.))$);

$h636 = \text{simplify}(\text{trace}(U636*J6*U66.) + \text{trace}(U736*J7*U76.) + \text{trace}(U836*J8*U86.) + \text{trace}(U936*J9*U96.))$);

$h637 = \text{simplify}(\text{trace}(U737*J7*U76.) + \text{trace}(U837*J8*U86.) + \text{trace}(U937*J9*U96.))$); $h638 = \text{simplify}(\text{trace}(U838*J8*U86.) + \text{trace}(U938*J9*U96.))$); $h639 = \text{simplify}(\text{trace}(U939*J9*U96.))$);

$h641 = \text{simplify}(\text{trace}(U641*J6*U66.) + \text{trace}(U741*J7*U76.) + \text{trace}(U841*J8*U86.) + \text{trace}(U941*J9*U96.))$);

$h642 = \text{simplify}(\text{trace}(U642*J6*U66.) + \text{trace}(U742*J7*U76.) + \text{trace}(U842*J8*U86.) + \text{trace}(U942*J9*U96.))$);

$h643 = \text{simplify}(\text{trace}(U643*J6*U66.) + \text{trace}(U743*J7*U76.) + \text{trace}(U843*J8*U86.) + \text{trace}(U943*J9*U96.))$);

$h644 = \text{simplify}(\text{trace}(U644*J6*U66.) + \text{trace}(U744*J7*U76.) + \text{trace}(U844*J8*U86.) + \text{trace}(U944*J9*U96.))$);

h645=simplify(trace(U645*J6*U66.') + trace(U745*J7*U76.') + trace(U845*J8*U86.') + trace(U945*J9*U96.'));

h646=simplify(trace(U646*J6*U66.') + trace(U746*J7*U76.') + trace(U846*J8*U86.') + trace(U946*J9*U96.'));

h647=simplify(trace(U747*J7*U76.') + trace(U847*J8*U86.') + trace(U947*J9*U96.')); h648=simplify(trace(U848*J8*U86.') + trace(U948*J9*U96.')); h649=simplify(trace(U949*J9*U96.'));

h651=simplify(trace(U651*J6*U66.') + trace(U751*J7*U76.') + trace(U851*J8*U86.') + trace(U951*J9*U96.'));

h652=simplify(trace(U652*J6*U66.') + trace(U752*J7*U76.') + trace(U852*J8*U86.') + trace(U952*J9*U96.'));

h653=simplify(trace(U653*J6*U66.') + trace(U753*J7*U76.') + trace(U853*J8*U86.') + trace(U953*J9*U96.'));

h654=simplify(trace(U654*J6*U66.') + trace(U754*J7*U76.') + trace(U854*J8*U86.') + trace(U954*J9*U96.'));

h655=simplify(trace(U655*J6*U66.') + trace(U755*J7*U76.') + trace(U855*J8*U86.') + trace(U955*J9*U96.'));

h656=simplify(trace(U656*J6*U66.') + trace(U756*J7*U76.') + trace(U856*J8*U86.') + trace(U956*J9*U96.'));

h657=simplify(trace(U757*J7*U76.') + trace(U857*J8*U86.') + trace(U957*J9*U96.')); h658=simplify(trace(U858*J8*U86.') + trace(U958*J9*U96.')); h659=simplify(trace(U959*J9*U96.'));

h661=simplify(trace(U661*J6*U66.') + trace(U761*J7*U76.') + trace(U861*J8*U86.') + trace(U961*J9*U96.'));

h662=simplify(trace(U662*J6*U66.') + trace(U762*J7*U76.') + trace(U862*J8*U86.') + trace(U962*J9*U96.'));

h663=simplify(trace(U663*J6*U66.') + trace(U763*J7*U76.') + trace(U863*J8*U86.') + trace(U963*J9*U96.'));

h664=simplify(trace(U664*J6*U66.') + trace(U764*J7*U76.') + trace(U864*J8*U86.')
+ trace(U964*J9*U96.'));

h665=simplify(trace(U665*J6*U66.') + trace(U765*J7*U76.') + trace(U865*J8*U86.')
+ trace(U965*J9*U96.'));

h666=simplify(trace(U666*J6*U66.') + trace(U766*J7*U76.') + trace(U866*J8*U86.') +
trace(U966*J9*U96.'));

h667=simplify(trace(U767*J7*U76.') + trace(U867*J8*U86.') + trace(U967*J9*U96.')
); h668=simplify(trace(U868*J8*U86.') + trace(U968*J9*U96.')); h669=simplify(
trace(U969*J9*U96.'));

h671=simplify(trace(U771*J7*U76.') + trace(U871*J8*U86.') + trace(U971*J9*U96.'));

h672=simplify(trace(U772*J7*U76.') + trace(U872*J8*U86.') + trace(U972*J9*U96.'));

h673=simplify(trace(U773*J7*U76.') + trace(U873*J8*U86.') + trace(U973*J9*U96.'));

h674=simplify(trace(U774*J7*U76.') + trace(U874*J8*U86.') + trace(U974*J9*U96.'));

h675=simplify(trace(U775*J7*U76.') + trace(U875*J8*U86.') + trace(U975*J9*U96.'));

h676=simplify(trace(U776*J7*U76.') + trace(U876*J8*U86.') + trace(U976*J9*U96.'));

h677=simplify(trace(U777*J7*U76.') + trace(U877*J8*U86.') + trace(U977*J9*U96.'));

h678=simplify(trace(U878*J8*U86.') + trace(U978*J9*U96.')); h679=simplify(
trace(U979*J9*U96.'));

h681=simplify(trace(U881*J8*U86.') + trace(U981*J9*U96.'));

h682=simplify(trace(U882*J8*U86.') + trace(U982*J9*U96.'));

h683=simplify(trace(U883*J8*U86.') + trace(U983*J9*U96.'));

h684=simplify(trace(U884*J8*U86.') + trace(U984*J9*U96.'));

h685=simplify(trace(U885*J8*U86.') + trace(U985*J9*U96.'));

h686=simplify(trace(U886*J8*U86.') + trace(U986*J9*U96.'));

h687=simplify(trace(U887*J8*U86.') + trace(U987*J9*U96.'));

h688=simplify(trace(U888*J8*U86.') + trace(U988*J9*U96.'));

h689=simplify(trace(U989*J9*U96.'));

$h761 = \text{simplify}(\text{trace}(U761 * J7 * U77.) + \text{trace}(U861 * J8 * U87.) + \text{trace}(U961 * J9 * U97.))$;
 $h762 = \text{simplify}(\text{trace}(U762 * J7 * U77.) + \text{trace}(U862 * J8 * U87.) + \text{trace}(U962 * J9 * U97.))$;
 $h763 = \text{simplify}(\text{trace}(U763 * J7 * U77.) + \text{trace}(U863 * J8 * U87.) + \text{trace}(U963 * J9 * U97.))$;
 $h764 = \text{simplify}(\text{trace}(U764 * J7 * U77.) + \text{trace}(U864 * J8 * U87.) + \text{trace}(U964 * J9 * U97.))$;
 $h765 = \text{simplify}(\text{trace}(U765 * J7 * U77.) + \text{trace}(U865 * J8 * U87.) + \text{trace}(U965 * J9 * U97.))$;
 $h766 = \text{simplify}(\text{trace}(U766 * J7 * U77.) + \text{trace}(U866 * J8 * U87.) + \text{trace}(U966 * J9 * U97.))$;
 $h767 = \text{simplify}(\text{trace}(U767 * J7 * U77.) + \text{trace}(U867 * J8 * U87.) + \text{trace}(U967 * J9 * U97.))$;
 $h768 = \text{simplify}(\text{trace}(U868 * J8 * U87.) + \text{trace}(U968 * J9 * U97.))$; $h769 = \text{simplify}(\text{trace}(U969 * J9 * U97.))$;

$h771 = \text{simplify}(\text{trace}(U771 * J7 * U77.) + \text{trace}(U871 * J8 * U87.) + \text{trace}(U971 * J9 * U97.))$;
 $h772 = \text{simplify}(\text{trace}(U772 * J7 * U77.) + \text{trace}(U872 * J8 * U87.) + \text{trace}(U972 * J9 * U97.))$;
 $h773 = \text{simplify}(\text{trace}(U773 * J7 * U77.) + \text{trace}(U873 * J8 * U87.) + \text{trace}(U973 * J9 * U97.))$;
 $h774 = \text{simplify}(\text{trace}(U774 * J7 * U77.) + \text{trace}(U874 * J8 * U87.) + \text{trace}(U974 * J9 * U97.))$;
 $h775 = \text{simplify}(\text{trace}(U775 * J7 * U77.) + \text{trace}(U875 * J8 * U87.) + \text{trace}(U975 * J9 * U97.))$;
 $h776 = \text{simplify}(\text{trace}(U776 * J7 * U77.) + \text{trace}(U876 * J8 * U87.) + \text{trace}(U976 * J9 * U97.))$;
 $h777 = \text{simplify}(\text{trace}(U777 * J7 * U77.) + \text{trace}(U877 * J8 * U87.) + \text{trace}(U977 * J9 * U97.))$;
 $h778 = \text{simplify}(\text{trace}(U878 * J8 * U87.) + \text{trace}(U978 * J9 * U97.))$; $h779 = \text{simplify}(\text{trace}(U979 * J9 * U97.))$;

$h781 = \text{simplify}(\text{trace}(U881 * J8 * U87.) + \text{trace}(U981 * J9 * U97.))$;
 $h782 = \text{simplify}(\text{trace}(U882 * J8 * U87.) + \text{trace}(U982 * J9 * U97.))$;
 $h783 = \text{simplify}(\text{trace}(U883 * J8 * U87.) + \text{trace}(U983 * J9 * U97.))$;
 $h784 = \text{simplify}(\text{trace}(U884 * J8 * U87.) + \text{trace}(U984 * J9 * U97.))$;
 $h785 = \text{simplify}(\text{trace}(U885 * J8 * U87.) + \text{trace}(U985 * J9 * U97.))$;
 $h786 = \text{simplify}(\text{trace}(U886 * J8 * U87.) + \text{trace}(U986 * J9 * U97.))$;
 $h787 = \text{simplify}(\text{trace}(U887 * J8 * U87.) + \text{trace}(U987 * J9 * U97.))$;
 $h788 = \text{simplify}(\text{trace}(U888 * J8 * U87.) + \text{trace}(U988 * J9 * U97.))$;
 $h789 = \text{simplify}(\text{trace}(U989 * J9 * U97.))$;

$h791 = \text{simplify}(\text{trace}(U991 * J9 * U97.))$;
 $h792 = \text{simplify}(\text{trace}(U992 * J9 * U97.))$;
 $h793 = \text{simplify}(\text{trace}(U993 * J9 * U97.))$;
 $h794 = \text{simplify}(\text{trace}(U994 * J9 * U97.))$;
 $h795 = \text{simplify}(\text{trace}(U995 * J9 * U97.))$;
 $h796 = \text{simplify}(\text{trace}(U996 * J9 * U97.))$;
 $h797 = \text{simplify}(\text{trace}(U997 * J9 * U97.))$;
 $h798 = \text{simplify}(\text{trace}(U998 * J9 * U97.))$;
 $h799 = \text{simplify}(\text{trace}(U999 * J9 * U97.))$;

$h811 = \text{simplify}(\text{trace}(U811 * J8 * U88.) + \text{trace}(U911 * J9 * U98.))$;
 $h812 = \text{simplify}(\text{trace}(U812 * J8 * U88.) + \text{trace}(U912 * J9 * U98.))$;
 $h813 = \text{simplify}(\text{trace}(U813 * J8 * U88.) + \text{trace}(U913 * J9 * U98.))$;
 $h814 = \text{simplify}(\text{trace}(U814 * J8 * U88.) + \text{trace}(U914 * J9 * U98.))$;
 $h815 = \text{simplify}(\text{trace}(U815 * J8 * U88.) + \text{trace}(U915 * J9 * U98.))$;
 $h816 = \text{simplify}(\text{trace}(U816 * J8 * U88.) + \text{trace}(U916 * J9 * U98.))$;
 $h817 = \text{simplify}(\text{trace}(U817 * J8 * U88.) + \text{trace}(U917 * J9 * U98.))$;
 $h818 = \text{simplify}(\text{trace}(U818 * J8 * U88.) + \text{trace}(U918 * J9 * U98.))$;
 $h819 = \text{simplify}(\text{trace}(U919 * J9 * U98.))$;

$h821 = \text{simplify}(\text{trace}(U821 * J8 * U88.) + \text{trace}(U921 * J9 * U98.))$;
 $h822 = \text{simplify}(\text{trace}(U822 * J8 * U88.) + \text{trace}(U922 * J9 * U98.))$;
 $h823 = \text{simplify}(\text{trace}(U823 * J8 * U88.) + \text{trace}(U923 * J9 * U98.))$;
 $h824 = \text{simplify}(\text{trace}(U824 * J8 * U88.) + \text{trace}(U924 * J9 * U98.))$;
 $h825 = \text{simplify}(\text{trace}(U825 * J8 * U88.) + \text{trace}(U925 * J9 * U98.))$;
 $h826 = \text{simplify}(\text{trace}(U826 * J8 * U88.) + \text{trace}(U926 * J9 * U98.))$;
 $h827 = \text{simplify}(\text{trace}(U827 * J8 * U88.) + \text{trace}(U927 * J9 * U98.))$;
 $h828 = \text{simplify}(\text{trace}(U828 * J8 * U88.) + \text{trace}(U928 * J9 * U98.))$;
 $h829 = \text{simplify}(\text{trace}(U929 * J9 * U98.))$;

$h831 = \text{simplify}(\text{trace}(U831 * J8 * U88.) + \text{trace}(U931 * J9 * U98.))$;
 $h832 = \text{simplify}(\text{trace}(U832 * J8 * U88.) + \text{trace}(U932 * J9 * U98.))$;
 $h833 = \text{simplify}(\text{trace}(U833 * J8 * U88.) + \text{trace}(U933 * J9 * U98.))$;
 $h834 = \text{simplify}(\text{trace}(U834 * J8 * U88.) + \text{trace}(U934 * J9 * U98.))$;
 $h835 = \text{simplify}(\text{trace}(U835 * J8 * U88.) + \text{trace}(U935 * J9 * U98.))$;
 $h836 = \text{simplify}(\text{trace}(U836 * J8 * U88.) + \text{trace}(U936 * J9 * U98.))$;
 $h837 = \text{simplify}(\text{trace}(U837 * J8 * U88.) + \text{trace}(U937 * J9 * U98.))$;
 $h838 = \text{simplify}(\text{trace}(U838 * J8 * U88.) + \text{trace}(U938 * J9 * U98.))$;
 $h839 = \text{simplify}(\text{trace}(U939 * J9 * U98.))$;

$h841 = \text{simplify}(\text{trace}(U841 * J8 * U88.) + \text{trace}(U941 * J9 * U98.))$;
 $h842 = \text{simplify}(\text{trace}(U842 * J8 * U88.) + \text{trace}(U942 * J9 * U98.))$;
 $h843 = \text{simplify}(\text{trace}(U843 * J8 * U88.) + \text{trace}(U943 * J9 * U98.))$;
 $h844 = \text{simplify}(\text{trace}(U844 * J8 * U88.) + \text{trace}(U944 * J9 * U98.))$;
 $h845 = \text{simplify}(\text{trace}(U845 * J8 * U88.) + \text{trace}(U945 * J9 * U98.))$;
 $h846 = \text{simplify}(\text{trace}(U846 * J8 * U88.) + \text{trace}(U946 * J9 * U98.))$;
 $h847 = \text{simplify}(\text{trace}(U847 * J8 * U88.) + \text{trace}(U947 * J9 * U98.))$;
 $h848 = \text{simplify}(\text{trace}(U848 * J8 * U88.) + \text{trace}(U948 * J9 * U98.))$;
 $h849 = \text{simplify}(\text{trace}(U949 * J9 * U98.))$;

$h851 = \text{simplify}(\text{trace}(U851 * J8 * U88.) + \text{trace}(U951 * J9 * U98.))$;
 $h852 = \text{simplify}(\text{trace}(U852 * J8 * U88.) + \text{trace}(U952 * J9 * U98.))$;
 $h853 = \text{simplify}(\text{trace}(U853 * J8 * U88.) + \text{trace}(U953 * J9 * U98.))$;
 $h854 = \text{simplify}(\text{trace}(U854 * J8 * U88.) + \text{trace}(U954 * J9 * U98.))$;
 $h855 = \text{simplify}(\text{trace}(U855 * J8 * U88.) + \text{trace}(U955 * J9 * U98.))$;
 $h856 = \text{simplify}(\text{trace}(U856 * J8 * U88.) + \text{trace}(U956 * J9 * U98.))$;
 $h857 = \text{simplify}(\text{trace}(U857 * J8 * U88.) + \text{trace}(U957 * J9 * U98.))$;
 $h858 = \text{simplify}(\text{trace}(U858 * J8 * U88.) + \text{trace}(U958 * J9 * U98.))$;
 $h859 = \text{simplify}(\text{trace}(U959 * J9 * U98.))$;

$h861 = \text{simplify}(\text{trace}(U861 * J8 * U88.) + \text{trace}(U961 * J9 * U98.))$;
 $h862 = \text{simplify}(\text{trace}(U862 * J8 * U88.) + \text{trace}(U962 * J9 * U98.))$;
 $h863 = \text{simplify}(\text{trace}(U863 * J8 * U88.) + \text{trace}(U963 * J9 * U98.))$;
 $h864 = \text{simplify}(\text{trace}(U864 * J8 * U88.) + \text{trace}(U964 * J9 * U98.))$;
 $h865 = \text{simplify}(\text{trace}(U865 * J8 * U88.) + \text{trace}(U965 * J9 * U98.))$;
 $h866 = \text{simplify}(\text{trace}(U866 * J8 * U88.) + \text{trace}(U966 * J9 * U98.))$;
 $h867 = \text{simplify}(\text{trace}(U867 * J8 * U88.) + \text{trace}(U967 * J9 * U98.))$;
 $h868 = \text{simplify}(\text{trace}(U868 * J8 * U88.) + \text{trace}(U968 * J9 * U98.))$;
 $h869 = \text{simplify}(\text{trace}(U969 * J9 * U98.))$;

$h871 = \text{simplify}(\text{trace}(U871 * J8 * U88.) + \text{trace}(U971 * J9 * U98.))$;
 $h872 = \text{simplify}(\text{trace}(U872 * J8 * U88.) + \text{trace}(U972 * J9 * U98.))$;
 $h873 = \text{simplify}(\text{trace}(U873 * J8 * U88.) + \text{trace}(U973 * J9 * U98.))$;
 $h874 = \text{simplify}(\text{trace}(U874 * J8 * U88.) + \text{trace}(U974 * J9 * U98.))$;
 $h875 = \text{simplify}(\text{trace}(U875 * J8 * U88.) + \text{trace}(U975 * J9 * U98.))$;
 $h876 = \text{simplify}(\text{trace}(U876 * J8 * U88.) + \text{trace}(U976 * J9 * U98.))$;
 $h877 = \text{simplify}(\text{trace}(U877 * J8 * U88.) + \text{trace}(U977 * J9 * U98.))$;
 $h878 = \text{simplify}(\text{trace}(U878 * J8 * U88.) + \text{trace}(U978 * J9 * U98.))$;
 $h879 = \text{simplify}(\text{trace}(U979 * J9 * U98.))$;

$h881 = \text{simplify}(\text{trace}(U881 * J8 * U88.) + \text{trace}(U981 * J9 * U98.))$;
 $h882 = \text{simplify}(\text{trace}(U882 * J8 * U88.) + \text{trace}(U982 * J9 * U98.))$;
 $h883 = \text{simplify}(\text{trace}(U883 * J8 * U88.) + \text{trace}(U983 * J9 * U98.))$;
 $h884 = \text{simplify}(\text{trace}(U884 * J8 * U88.) + \text{trace}(U984 * J9 * U98.))$;
 $h885 = \text{simplify}(\text{trace}(U885 * J8 * U88.) + \text{trace}(U985 * J9 * U98.))$;
 $h886 = \text{simplify}(\text{trace}(U886 * J8 * U88.) + \text{trace}(U986 * J9 * U98.))$;
 $h887 = \text{simplify}(\text{trace}(U887 * J8 * U88.) + \text{trace}(U987 * J9 * U98.))$;
 $h888 = \text{simplify}(\text{trace}(U888 * J8 * U88.) + \text{trace}(U988 * J9 * U98.))$;
 $h889 = \text{simplify}(\text{trace}(U989 * J9 * U98.))$;

h891=simplify(trace(U981*J9*U98.));
h892=simplify(trace(U982*J9*U98.));
h893=simplify(trace(U983*J9*U98.));
h894=simplify(trace(U984*J9*U98.));
h895=simplify(trace(U985*J9*U98.));
h896=simplify(trace(U986*J9*U98.));
h897=simplify(trace(U987*J9*U98.));
h898=simplify(trace(U988*J9*U98.));
h899=simplify(trace(U989*J9*U98.));

h911=simplify(trace(U911*J9*U99.));
h912=simplify(trace(U912*J9*U99.));
h913=simplify(trace(U913*J9*U99.));
h914=simplify(trace(U914*J9*U99.));
h915=simplify(trace(U915*J9*U99.));
h916=simplify(trace(U916*J9*U99.));
h917=simplify(trace(U917*J9*U99.));
h918=simplify(trace(U918*J9*U99.));
h919=simplify(trace(U919*J9*U99.));

h921=simplify(trace(U921*J9*U99.));
h922=simplify(trace(U922*J9*U99.));
h923=simplify(trace(U923*J9*U99.));
h924=simplify(trace(U924*J9*U99.));
h925=simplify(trace(U925*J9*U99.));
h926=simplify(trace(U926*J9*U99.));
h927=simplify(trace(U927*J9*U99.));
h928=simplify(trace(U928*J9*U99.));
h929=simplify(trace(U929*J9*U99.));

h931=simplify(trace(U931*J9*U99.'));
h932=simplify(trace(U932*J9*U99.'));
h933=simplify(trace(U933*J9*U99.'));
h934=simplify(trace(U934*J9*U99.'));
h935=simplify(trace(U935*J9*U99.'));
h936=simplify(trace(U936*J9*U99.'));
h937=simplify(trace(U937*J9*U99.'));
h938=simplify(trace(U938*J9*U99.'));
h939=simplify(trace(U939*J9*U99.'));

h941=simplify(trace(U941*J9*U99.'));
h942=simplify(trace(U942*J9*U99.'));
h943=simplify(trace(U943*J9*U99.'));
h944=simplify(trace(U944*J9*U99.'));
h945=simplify(trace(U945*J9*U99.'));
h946=simplify(trace(U946*J9*U99.'));
h947=simplify(trace(U947*J9*U99.'));
h948=simplify(trace(U948*J9*U99.'));
h949=simplify(trace(U949*J9*U99.'));

h951=simplify(trace(U951*J9*U99.'));
h952=simplify(trace(U952*J9*U99.'));
h953=simplify(trace(U953*J9*U99.'));
h954=simplify(trace(U954*J9*U99.'));
h955=simplify(trace(U955*J9*U99.'));
h956=simplify(trace(U956*J9*U99.'));
h957=simplify(trace(U957*J9*U99.'));
h958=simplify(trace(U958*J9*U99.'));
h959=simplify(trace(U959*J9*U99.'));

h961=simplify(trace(U961*J9*U99.'));
h962=simplify(trace(U962*J9*U99.'));
h963=simplify(trace(U963*J9*U99.'));
h964=simplify(trace(U964*J9*U99.'));
h965=simplify(trace(U965*J9*U99.'));
h966=simplify(trace(U966*J9*U99.'));
h967=simplify(trace(U967*J9*U99.'));
h968=simplify(trace(U968*J9*U99.'));
h969=simplify(trace(U969*J9*U99.'));

h971=simplify(trace(U971*J9*U99.'));
h972=simplify(trace(U972*J9*U99.'));
h973=simplify(trace(U973*J9*U99.'));
h974=simplify(trace(U974*J9*U99.'));
h975=simplify(trace(U975*J9*U99.'));
h976=simplify(trace(U976*J9*U99.'));
h977=simplify(trace(U977*J9*U99.'));
h978=simplify(trace(U978*J9*U99.'));
h979=simplify(trace(U979*J9*U99.'));

h981=simplify(trace(U981*J9*U99.'));
h982=simplify(trace(U982*J9*U99.'));
h983=simplify(trace(U983*J9*U99.'));
h984=simplify(trace(U984*J9*U99.'));
h985=simplify(trace(U985*J9*U99.'));
h986=simplify(trace(U986*J9*U99.'));
h987=simplify(trace(U987*J9*U99.'));
h988=simplify(trace(U988*J9*U99.'));
h989=simplify(trace(U989*J9*U99.'));

$h991 = \text{simplify}(\text{trace}(U991 * J9 * U99.))$;
 $h992 = \text{simplify}(\text{trace}(U992 * J9 * U99.))$;
 $h993 = \text{simplify}(\text{trace}(U993 * J9 * U99.))$;
 $h994 = \text{simplify}(\text{trace}(U994 * J9 * U99.))$;
 $h995 = \text{simplify}(\text{trace}(U995 * J9 * U99.))$;
 $h996 = \text{simplify}(\text{trace}(U996 * J9 * U99.))$;
 $h997 = \text{simplify}(\text{trace}(U997 * J9 * U99.))$;
 $h998 = \text{simplify}(\text{trace}(U998 * J9 * U99.))$;
 $h999 = \text{simplify}(\text{trace}(U999 * J9 * U99.))$;

Anexo no. 8. Resultado de la matriz de fuerzas de Coriolis y centrípeta H.

$h1 = \text{simplify}(h111 * dq1 * dq1 + h112 * dq1 * dq2 + h113 * dq1 * dq3 + h114 * dq1 * dq4 * h115 * dq1 * dq5 + h116 * dq1 * dq6 + h117 * dq1 * dq7 + h118 * dq1 * dq8 + h119 * dq1 * dq9 + h121 * dq2 * dq1 + h122 * dq2 * dq2 + h123 * dq2 * dq3 + h124 * dq2 * dq4 * h125 * dq2 * dq5 + h126 * dq2 * dq6 + h127 * dq2 * dq7 + h128 * dq2 * dq8 + h129 * dq2 * dq9 + h131 * dq3 * dq1 + h132 * dq3 * dq2 + h133 * dq3 * dq3 + h134 * dq3 * dq4 * h135 * dq3 * dq5 + h136 * dq3 * dq6 + h137 * dq3 * dq7 + h138 * dq3 * dq8 + h139 * dq3 * dq9 + h141 * dq4 * dq1 + h142 * dq4 * dq2 + h143 * dq4 * dq3 + h144 * dq4 * dq4 * h145 * dq4 * dq5 + h146 * dq4 * dq6 + h147 * dq4 * dq7 + h148 * dq4 * dq8 + h149 * dq4 * dq9 + h151 * dq5 * dq1 + h152 * dq5 * dq2 + h153 * dq5 * dq3 + h154 * dq5 * dq4 * h155 * dq5 * dq5 + h156 * dq5 * dq6 + h157 * dq5 * dq7 + h158 * dq5 * dq8 + h159 * dq5 * dq9 + h161 * dq6 * dq1 + h162 * dq6 * dq2 + h163 * dq6 * dq3 + h164 * dq6 * dq4 * h165 * dq6 * dq5 + h166 * dq6 * dq6 + h167 * dq6 * dq7 + h168 * dq6 * dq8 + h169 * dq6 * dq9 + h171 * dq7 * dq1 + h172 * dq7 * dq2 + h173 * dq7 * dq3 + h174 * dq7 * dq4 * h175 * dq7 * dq5 + h176 * dq7 * dq6 + h177 * dq7 * dq7 + h178 * dq7 * dq8 + h179 * dq7 * dq9 + h181 * dq8 * dq1 + h182 * dq8 * dq2 + h183 * dq8 * dq3 + h184 * dq8 * dq4 * h185 * dq8 * dq5 + h186 * dq8 * dq6 + h187 * dq1 * dq7 + h188 * dq8 * dq8 + h189 * dq8 * dq9 + h191 * dq9 * dq1 + h192 * dq9 * dq2 + h193 * dq9 * dq3 + h194 * dq9 * dq4 * h195 * dq9 * dq5 + h196 * dq9 * dq6 + h197 * dq9 * dq7 + h198 * dq9 * dq8 + h199 * dq9 * dq9)$;

$h2 = \text{simplify}(\text{$

$h211 * dq1 * dq1 + h212 * dq1 * dq2 + h213 * dq1 * dq3 + h214 * dq1 * dq4 * h215 * dq1 * dq5 + h216 * dq1$

*dq6+h217*dq1*dq7+h218*dq1*dq8+h219*dq1*dq9+h221*dq2*dq1+h222*dq2*dq2+h223*dq2*dq3+h224*dq2*dq4+h225*dq2*dq5+h226*dq2*dq6+h227*dq2*dq7+h228*dq2*dq8+h229*dq2*dq9+h231*dq3*dq1+h232*dq3*dq2+h233*dq3*dq3+h234*dq3*dq4+h235*dq3*dq5+h236*dq3*dq6+h237*dq3*dq7+h238*dq3*dq8+h239*dq3*dq9+h241*dq4*dq1+h242*dq4*dq2+h243*dq4*dq3+h244*dq4*dq4+h245*dq4*dq5+h246*dq4*dq6+h247*dq4*dq7+h248*dq4*dq8+h249*dq4*dq9+h251*dq5*dq1+h252*dq5*dq2+h253*dq5*dq3+h254*dq5*dq4+h255*dq5*dq5+h256*dq5*dq6+h257*dq5*dq7+h258*dq5*dq8+h259*dq5*dq9+h261*dq6*dq1+h262*dq6*dq2+h263*dq6*dq3+h264*dq6*dq4+h265*dq6*dq5+h266*dq6*dq6+h267*dq6*dq7+h268*dq6*dq8+h269*dq6*dq9+h271*dq7*dq1+h272*dq7*dq2+h273*dq7*dq3+h274*dq7*dq4+h275*dq7*dq5+h276*dq7*dq6+h277*dq7*dq7+h278*dq7*dq8+h279*dq7*dq9+h281*dq8*dq1+h282*dq8*dq2+h283*dq8*dq3+h284*dq8*dq4+h285*dq8*dq5+h286*dq8*dq6+h287*dq1*dq7+h288*dq8*dq8+h289*dq8*dq9+h291*dq9*dq1+h292*dq9*dq2+h293*dq9*dq3+h294*dq9*dq4+h295*dq9*dq5+h296*dq9*dq6+h297*dq9*dq7+h298*dq9*dq8+h299*dq9*dq9);

h3=simplify(

h311*dq1*dq1+h312*dq1*dq2+h313*dq1*dq3+h314*dq1*dq4+h315*dq1*dq5+h316*dq1*dq6+h317*dq1*dq7+h318*dq1*dq8+h319*dq1*dq9+h321*dq2*dq1+h322*dq2*dq2+h323*dq2*dq3+h324*dq2*dq4+h325*dq2*dq5+h326*dq2*dq6+h327*dq2*dq7+h328*dq2*dq8+h329*dq2*dq9+h331*dq3*dq1+h332*dq3*dq2+h333*dq3*dq3+h334*dq3*dq4+h335*dq3*dq5+h336*dq3*dq6+h337*dq3*dq7+h338*dq3*dq8+h339*dq3*dq9+h341*dq4*dq1+h342*dq4*dq2+h343*dq4*dq3+h344*dq4*dq4+h345*dq4*dq5+h346*dq4*dq6+h347*dq4*dq7+h348*dq4*dq8+h349*dq4*dq9+h351*dq5*dq1+h352*dq5*dq2+h353*dq5*dq3+h354*dq5*dq4+h355*dq5*dq5+h356*dq5*dq6+h357*dq5*dq7+h358*dq5*dq8+h359*dq5*dq9+h361*dq6*dq1+h362*dq6*dq2+h363*dq6*dq3+h364*dq6*dq4+h365*dq6*dq5+h366*dq6*dq6+h367*dq6*dq7+h368*dq6*dq8+h369*dq6*dq9+h371*dq7*dq1+h372*dq7*dq2+h373*dq7*dq3+h374*dq7*dq4+h375*dq7*dq5+h376*dq7*dq6+h377*dq7*dq7+h378*dq7*dq8+h379*dq7*dq9+h381*dq8*dq1+h382*dq8*dq2+h383*dq8*dq3+h384*dq8*dq4+h385*dq8*dq5+h386*dq8*dq6+h387*dq1*dq7+h388*dq8*dq8+h389*dq8*dq9+h391*dq9*d

$q_1+h392*dq_9*dq_2+h393*dq_9*dq_3+h394*dq_9*dq_4+h395*dq_9*dq_5+h396*dq_9*dq_6+h397*dq_9*dq_7+h398*dq_9*dq_8+h399*dq_9*dq_9$);

h4=simplify(

$h411*dq_1*dq_1+h412*dq_1*dq_2+h413*dq_1*dq_3+h414*dq_1*dq_4+h415*dq_1*dq_5+h416*dq_1*dq_6+h417*dq_1*dq_7+h418*dq_1*dq_8+h419*dq_1*dq_9+h421*dq_2*dq_1+h422*dq_2*dq_2+h423*dq_2*dq_3+h424*dq_2*dq_4+h425*dq_2*dq_5+h426*dq_2*dq_6+h427*dq_2*dq_7+h428*dq_2*dq_8+h429*dq_2*dq_9+h431*dq_3*dq_1+h432*dq_3*dq_2+h433*dq_3*dq_3+h434*dq_3*dq_4+h435*dq_3*dq_5+h436*dq_3*dq_6+h437*dq_3*dq_7+h438*dq_3*dq_8+h439*dq_3*dq_9+h441*dq_4*dq_1+h442*dq_4*dq_2+h443*dq_4*dq_3+h444*dq_4*dq_4+h445*dq_4*dq_5+h446*dq_4*dq_6+h447*dq_4*dq_7+h448*dq_4*dq_8+h449*dq_4*dq_9+h451*dq_5*dq_1+h452*dq_5*dq_2+h453*dq_5*dq_3+h454*dq_5*dq_4+h455*dq_5*dq_5+h456*dq_5*dq_6+h457*dq_5*dq_7+h458*dq_5*dq_8+h459*dq_5*dq_9+h461*dq_6*dq_1+h462*dq_6*dq_2+h463*dq_6*dq_3+h464*dq_6*dq_4+h465*dq_6*dq_5+h466*dq_6*dq_6+h467*dq_6*dq_7+h468*dq_6*dq_8+h469*dq_6*dq_9+h471*dq_7*dq_1+h472*dq_7*dq_2+h473*dq_7*dq_3+h474*dq_7*dq_4+h475*dq_7*dq_5+h476*dq_7*dq_6+h477*dq_7*dq_7+h478*dq_7*dq_8+h479*dq_7*dq_9+h481*dq_8*dq_1+h482*dq_8*dq_2+h483*dq_8*dq_3+h484*dq_8*dq_4+h485*dq_8*dq_5+h486*dq_8*dq_6+h487*dq_8*dq_7+h488*dq_8*dq_8+h489*dq_8*dq_9+h491*dq_9*dq_1+h492*dq_9*dq_2+h493*dq_9*dq_3+h494*dq_9*dq_4+h495*dq_9*dq_5+h496*dq_9*dq_6+h497*dq_9*dq_7+h498*dq_9*dq_8+h499*dq_9*dq_9$);

h5=simplify(

$h511*dq_1*dq_1+h512*dq_1*dq_2+h513*dq_1*dq_3+h514*dq_1*dq_4+h515*dq_1*dq_5+h516*dq_1*dq_6+h517*dq_1*dq_7+h518*dq_1*dq_8+h519*dq_1*dq_9+h521*dq_2*dq_1+h522*dq_2*dq_2+h523*dq_2*dq_3+h524*dq_2*dq_4+h525*dq_2*dq_5+h526*dq_2*dq_6+h527*dq_2*dq_7+h528*dq_2*dq_8+h529*dq_2*dq_9+h531*dq_3*dq_1+h532*dq_3*dq_2+h533*dq_3*dq_3+h534*dq_3*dq_4+h535*dq_3*dq_5+h536*dq_3*dq_6+h537*dq_3*dq_7+h538*dq_3*dq_8+h539*dq_3*dq_9+h541*dq_4*dq_1+h542*dq_4*dq_2+h543*dq_4*dq_3+h544*dq_4*dq_4+h545*dq_4*dq_5+h546*dq_4*dq_6+h547*dq_4*dq_7+h548*dq_4*dq_8+h549*dq_4*dq_9+h551*dq_5*dq_1+h552*dq_5*dq_2+h553*dq_5*dq_3+h554*dq_5*dq_4+h555*dq_5*dq_5+h556*dq_5*dq_6+h557*dq_5*dq_7+h558*dq_5*dq_8+h559*dq_5*dq_9+h561*dq_6*dq_1+h562*dq_6*dq_2+h563*dq_6*dq_3+h564*dq_6*dq_4+h565*dq_6*dq_5+h566*dq_6*dq_6+h567*dq_6*dq_7+h568*dq_6*dq_8+h569*dq_6*dq_9+h571*dq_7*dq_1+h572*dq_7*dq_2$

+h573*dq7*dq3+h574*dq7*dq4*h575*dq7*dq5+h576*dq7*dq6+h577*dq7*dq7+h578*dq7*dq8+h579*dq7*dq9+h581*dq8*dq1+h582*dq8*dq2+h583*dq8*dq3+h584*dq8*dq4+h585*dq8*dq5+h586*dq8*dq6+h587*dq1*dq7+h588*dq8*dq8+h589*dq8*dq9+h591*dq9*dq1+h592*dq9*dq2+h593*dq9*dq3+h594*dq9*dq4+h595*dq9*dq5+h596*dq9*dq6+h597*dq9*dq7+h598*dq9*dq8+h599*dq9*dq9);

h6=simplify(

h611*dq1*dq1+h612*dq1*dq2+h613*dq1*dq3+h614*dq1*dq4*h615*dq1*dq5+h616*dq1*dq6+h617*dq1*dq7+h618*dq1*dq8+h619*dq1*dq9+h621*dq2*dq1+h622*dq2*dq2+h623*dq2*dq3+h624*dq2*dq4*h625*dq2*dq5+h626*dq2*dq6+h627*dq2*dq7+h628*dq2*dq8+h629*dq2*dq9+h631*dq3*dq1+h632*dq3*dq2+h633*dq3*dq3+h634*dq3*dq4*h635*dq3*dq5+h636*dq3*dq6+h637*dq3*dq7+h638*dq3*dq8+h639*dq3*dq9+h641*dq4*dq1+h642*dq4*dq2+h643*dq4*dq3+h644*dq4*dq4*h645*dq4*dq5+h646*dq4*dq6+h647*dq4*dq7+h648*dq4*dq8+h649*dq4*dq9+h651*dq5*dq1+h652*dq5*dq2+h653*dq5*dq3+h654*dq5*dq4*h655*dq5*dq5+h656*dq5*dq6+h657*dq5*dq7+h658*dq5*dq8+h659*dq5*dq9+h661*dq6*dq1+h662*dq6*dq2+h663*dq6*dq3+h664*dq6*dq4*h665*dq6*dq5+h666*dq6*dq6+h667*dq6*dq7+h668*dq6*dq8+h669*dq6*dq9+h671*dq7*dq1+h672*dq7*dq2+h673*dq7*dq3+h674*dq7*dq4*h675*dq7*dq5+h676*dq7*dq6+h677*dq7*dq7+h678*dq7*dq8+h679*dq7*dq9+h681*dq8*dq1+h682*dq8*dq2+h683*dq8*dq3+h684*dq8*dq4+h685*dq8*dq5+h686*dq8*dq6+h687*dq1*dq7+h688*dq8*dq8+h689*dq8*dq9+h691*dq9*dq1+h692*dq9*dq2+h693*dq9*dq3+h694*dq9*dq4+h695*dq9*dq5+h696*dq9*dq6+h697*dq9*dq7+h698*dq9*dq8+h699*dq9*dq9);

h7=simplify(

h711*dq1*dq1+h712*dq1*dq2+h713*dq1*dq3+h714*dq1*dq4*h715*dq1*dq5+h716*dq1*dq6+h717*dq1*dq7+h718*dq1*dq8+h719*dq1*dq9+h721*dq2*dq1+h722*dq2*dq2+h723*dq2*dq3+h724*dq2*dq4*h725*dq2*dq5+h726*dq2*dq6+h727*dq2*dq7+h728*dq2*dq8+h729*dq2*dq9+h731*dq3*dq1+h732*dq3*dq2+h733*dq3*dq3+h734*dq3*dq4*h735*dq3*dq5+h736*dq3*dq6+h737*dq3*dq7+h738*dq3*dq8+h739*dq3*dq9+h741*dq4*dq1+h742*dq4*dq2+h743*dq4*dq3+h744*dq4*dq4*h745*dq4*dq5+h746*dq4*dq6+h747*dq4*dq7+h748*dq4*dq8+h749*dq4*dq9+h751*dq5*dq1+h752*dq5*dq2+h753*dq5*dq3+h

754*dq5*dq4*h755*dq5*dq5+h756*dq5*dq6+h757*dq5*dq7+h758*dq5*dq8+h759*dq5*dq9+h761*dq6*dq1+h762*dq6*dq2+h763*dq6*dq3+h764*dq6*dq4*h765*dq6*dq5+h766*dq6*dq6+h767*dq6*dq7+h768*dq6*dq8+h769*dq6*dq9+h771*dq7*dq1+h772*dq7*dq2+h773*dq7*dq3+h774*dq7*dq4*h775*dq7*dq5+h776*dq7*dq6+h777*dq7*dq7+h778*dq7*dq8+h779*dq7*dq9+h781*dq8*dq1+h782*dq8*dq2+h783*dq8*dq3+h784*dq8*dq4*h785*dq8*dq5+h786*dq8*dq6+h787*dq1*dq7+h788*dq8*dq8+h789*dq8*dq9+h791*dq9*dq1+h792*dq9*dq2+h793*dq9*dq3+h794*dq9*dq4*h795*dq9*dq5+h796*dq9*dq6+h797*dq9*dq7+h798*dq9*dq8+h799*dq9*dq9);

h8=simplify(

h811*dq1*dq1+h812*dq1*dq2+h813*dq1*dq3+h814*dq1*dq4*h815*dq1*dq5+h816*dq1*dq6+h817*dq1*dq7+h818*dq1*dq8+h819*dq1*dq9+h821*dq2*dq1+h822*dq2*dq2+h823*dq2*dq3+h824*dq2*dq4*h825*dq2*dq5+h826*dq2*dq6+h827*dq2*dq7+h828*dq2*dq8+h829*dq2*dq9+h831*dq3*dq1+h832*dq3*dq2+h833*dq3*dq3+h834*dq3*dq4*h835*dq3*dq5+h836*dq3*dq6+h837*dq3*dq7+h838*dq3*dq8+h839*dq3*dq9+h841*dq4*dq1+h842*dq4*dq2+h843*dq4*dq3+h844*dq4*dq4*h845*dq4*dq5+h846*dq4*dq6+h847*dq4*dq7+h848*dq4*dq8+h849*dq4*dq9+h851*dq5*dq1+h852*dq5*dq2+h853*dq5*dq3+h854*dq5*dq4*h855*dq5*dq5+h856*dq5*dq6+h857*dq5*dq7+h858*dq5*dq8+h859*dq5*dq9+h861*dq6*dq1+h862*dq6*dq2+h863*dq6*dq3+h864*dq6*dq4*h865*dq6*dq5+h866*dq6*dq6+h867*dq6*dq7+h868*dq6*dq8+h869*dq6*dq9+h871*dq7*dq1+h872*dq7*dq2+h873*dq7*dq3+h874*dq7*dq4*h875*dq7*dq5+h876*dq7*dq6+h877*dq7*dq7+h878*dq7*dq8+h879*dq7*dq9+h881*dq8*dq1+h882*dq8*dq2+h883*dq8*dq3+h884*dq8*dq4*h885*dq8*dq5+h886*dq8*dq6+h887*dq1*dq7+h888*dq8*dq8+h889*dq8*dq9+h891*dq9*dq1+h892*dq9*dq2+h893*dq9*dq3+h894*dq9*dq4*h895*dq9*dq5+h896*dq9*dq6+h897*dq9*dq7+h898*dq9*dq8+h899*dq9*dq9);

h9=simplify(

h911*dq1*dq1+h912*dq1*dq2+h913*dq1*dq3+h914*dq1*dq4*h915*dq1*dq5+h916*dq1*dq6+h917*dq1*dq7+h918*dq1*dq8+h919*dq1*dq9+h921*dq2*dq1+h922*dq2*dq2+h923*dq2*dq3+h924*dq2*dq4*h925*dq2*dq5+h926*dq2*dq6+h927*dq2*dq7+h928*dq2*dq8+h929*dq2*dq9+h931*dq3*dq1+h932*dq3*dq2+h933*dq3*dq3+h934*dq3*dq4*h935*

$dq3*dq5+h936*dq3*dq6+h937*dq3*dq7+h938*dq3*dq8+h939*dq3*dq9+h941*dq4*dq1$
 $+h942*dq4*dq2+h943*dq4*dq3+h944*dq4*dq4+h945*dq4*dq5+h946*dq4*dq6+h947*dq$
 $4*dq7+h948*dq4*dq8+h949*dq4*dq9+h951*dq5*dq1+h952*dq5*dq2+h953*dq5*dq3+h$
 $954*dq5*dq4+h955*dq5*dq5+h956*dq5*dq6+h957*dq5*dq7+h958*dq5*dq8+h959*dq5*$
 $dq9+h961*dq6*dq1+h962*dq6*dq2+h963*dq6*dq3+h964*dq6*dq4+h965*dq6*dq5+h966$
 $*dq6*dq6+h967*dq6*dq7+h968*dq6*dq8+h969*dq6*dq9+h971*dq7*dq1+h972*dq7*dq2$
 $+h973*dq7*dq3+h974*dq7*dq4+h975*dq7*dq5+h976*dq7*dq6+h977*dq7*dq7+h978*dq$
 $7*dq8+h979*dq7*dq9+h981*dq8*dq1+h982*dq8*dq2+h983*dq8*dq3+h984*dq8*dq4+h9$
 $85*dq8*dq5+h986*dq8*dq6+h987*dq1*dq7+h988*dq8*dq8+h989*dq8*dq9+h991*dq9*d$
 $q1+h992*dq9*dq2+h993*dq9*dq3+h994*dq9*dq4+h995*dq9*dq5+h996*dq9*dq6+h997*$
 $dq9*dq7+h998*dq9*dq8+h999*dq9*dq9);$

$H= H = [dq6^2*(m9*((d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 -$
 $teta3)*sin(teta4)) - cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m7*cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4$
 $+ l4) - m8*cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) + m9*(d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 +$
 $teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))) - dq2^2*(m7*(cos(teta1)*(d2 + l2)$
 $+ cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) + m8*(cos(teta1)*(d2 + l2) + cos(teta1 + teta2 +$
 $teta3)*(d4 + l4)) + m9*(cos(teta1)*(d2 + l2) - (d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 +$
 $teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) + cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 +$
 $l4)) - m9*(d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 -$
 $teta3)*sin(teta4)) + m3*cos(teta1)*(d2 + l2) + m4*cos(teta1)*(d2 + l2) +$
 $m5*cos(teta1)*(d2 + l2) + m6*cos(teta1)*(d2 + l2)) + dq2*dq4*(m9*((d5 + l5)*(cos(teta1$
 $+ teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - cos(teta1 + teta2 +$
 $teta3)*(d4 + l4)) - m7*cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) - m8*cos(teta1 + teta2 +$
 $teta3)*(d4 + l4) + m9*(d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 -$
 $teta3)*sin(teta4))) - 2*dq2*dq6*(m9*((d5 + l5)*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) +$
 $sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4)) - m7*cos(teta1 +$
 $teta2 + teta3)*(d4 + l4) - m8*cos(teta1 + teta2 + teta3)*(d4 + l4) + m9*(d5 + l5)*(cos(teta1$
 $+ teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4))) - dq4*dq6*(m9*((d5 +$
 $l5)*(cos(teta1 + teta2 + teta3)*cos(teta4) + sin(teta1 + teta2 - teta3)*sin(teta4)) - cos(teta1$

$$\begin{aligned}
& + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4})) - \text{m7} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4}) - \text{m8} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} \\
& + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4}) + \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} \\
& - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}))) + 2 * \text{dq6} * \text{dq9} * (\text{m9} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) - \text{m9} * \sin(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) + 2 * \text{dq8} * \text{dq9} * (\text{m9} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \\
& \text{m9} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) - \text{dq2} * \text{dq3} * (\text{m3} * \sin(\text{teta1}) + \text{m4} * \sin(\text{teta1}) + \\
& \text{m5} * \sin(\text{teta1}) + \text{m7} * \sin(\text{teta1}) + \text{m8} * \sin(\text{teta1}) + \text{m9} * \sin(\text{teta1}) + \text{m6} * \cos(\text{teta1}) * (\text{d3} + \text{l3})) \\
& - \text{dq4} * \text{dq7} * (\text{m8} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) + \text{m9} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) + \text{m7} * \cos(\text{teta1} + \\
& \text{teta2} - \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4})) + 2 * \text{dq2} * \text{dq9} * \text{m9} * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) + \text{dq4} * \text{dq9} * \text{m9} * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) + 2 * \text{dq8}^2 * \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) \\
& + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) - \text{dq2} * \text{dq3} * \sin(\text{teta1}) * (\text{m3} + \text{m4} + \text{m5} + \text{m6} + \text{m7} + \\
& \text{m8} + \text{m9}) - \text{dq2} * \text{dq7} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{m8} + \text{m9}) + \text{dq6} * \text{dq7} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3}) * (\text{m8} + \text{m9}) - \text{dq2} * \text{dq7} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{m7} + \text{m8} + \text{m9}) + \\
& \text{dq6} * \text{dq7} * \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{m7} + \text{m8} + \text{m9}) + 4 * \text{dq2} * \text{dq8} * \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\sin(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) + 2 * \text{dq4} * \text{dq8} * \text{m9} * (\text{d5} \\
& + \text{l5}) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) - \\
& 4 * \text{dq6} * \text{dq8} * \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \\
& \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) + \text{dq4}^3 * \text{dq5} * \text{m7} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4}) * (\text{m9} * ((\text{d5} + \\
& \text{l5}) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) - \cos(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4})) - \text{m7} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4}) - \text{m8} * \cos(\text{teta1} + \text{teta2} \\
& + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4}) + \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \\
& \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}))) \text{dq8}^2 * (2 * \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) * (\cos(\text{teta1}) * (\text{d2} + \text{l2}) - (\text{d5} + \text{l5}) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \\
& \text{l4})) - 2 * \text{m9} * (\text{d5} + \text{l5}) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \\
& \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) * (\sin(\text{teta1}) * (\text{d2} + \text{l2}) - (\text{d5} + \text{l5}) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \\
& \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * (\text{d4} + \text{l4}))) + \\
& \text{dq2} * \text{dq3} * (\text{d2} * \text{m3} + \text{d2} * \text{m4} + \text{d2} * \text{m5} + \text{d2} * \text{m7} + \text{d2} * \text{m8} + \text{d2} * \text{m9} + \text{l2} * \text{m3} + \text{l2} * \text{m4} + \\
& \text{l2} * \text{m5} + \text{l2} * \text{m7} + \text{l2} * \text{m8} + \text{l2} * \text{m9} - \text{d5} * \text{m9} * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \text{l5} * \text{m9} * \cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - \text{d5} * \text{m9} * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + \text{d5} * \text{m9} * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d5*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - 15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + 15*m9*cos(teta2 - \\
& teta3 + teta4) - 15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m7*cos(teta2 + teta3) + \\
& d4*m8*cos(teta2 + teta3) + d4*m9*cos(teta2 + teta3) + l4*m7*cos(teta2 + teta3) + \\
& l4*m8*cos(teta2 + teta3) + l4*m9*cos(teta2 + teta3)) + dq4*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + \\
& l4*m8 + l4*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) - d5*m9*cos(2*teta3 + teta4) \\
& - 15*m9*cos(2*teta3 + teta4) + d5*m9*cos(2*teta3 - teta4) + 15*m9*cos(2*teta3 - teta4) + \\
& d4^2*m7*sin(2*teta3) + d2*m8*cos(teta2 + teta3) + d2*m9*cos(teta2 + teta3) + \\
& l4^2*m7*sin(2*teta3) + l2*m8*cos(teta2 + teta3) + l2*m9*cos(teta2 + teta3) - \\
& d2*d4*m7*sin(teta2 - teta3) - d2*14*m7*sin(teta2 - teta3) - d4*12*m7*sin(teta2 - teta3) - \\
& l2*14*m7*sin(teta2 - teta3) + 2*d4*14*m7*sin(2*teta3)) + dq2*dq3*(d2*m3 + d2*m4 + \\
& d2*m5 + d2*m6 + d2*m7 + d2*m8 + d2*m9 + l2*m3 + l2*m4 + l2*m5 + l2*m6 + l2*m7 \\
& + l2*m8 + l2*m9 - d5*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) - 15*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) - \\
& d5*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + d5*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - d5*m9*cos(teta3 - \\
& teta2 + teta4) - 15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + 15*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& 15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m7*cos(teta2 + teta3) + d4*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& d4*m9*cos(teta2 + teta3) + l4*m7*cos(teta2 + teta3) + l4*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& l4*m9*cos(teta2 + teta3)) + dq2*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + l4*m8 + l4*m9 - \\
& 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) - d5*m9*cos(2*teta3 + teta4) - \\
& 15*m9*cos(2*teta3 + teta4) + d5*m9*cos(2*teta3 - teta4) + 15*m9*cos(2*teta3 - teta4) + \\
& d2*m8*cos(teta2 + teta3) + d2*m9*cos(teta2 + teta3) + l2*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& l2*m9*cos(teta2 + teta3)) - dq6*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + l4*m8 + l4*m9 - \\
& 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) - d5*m9*cos(2*teta3 + teta4) - \\
& 15*m9*cos(2*teta3 + teta4) + d5*m9*cos(2*teta3 - teta4) + 15*m9*cos(2*teta3 - teta4) + \\
& d2*m8*cos(teta2 + teta3) + d2*m9*cos(teta2 + teta3) + l2*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& l2*m9*cos(teta2 + teta3)) - dq6^2*(d2 + l2)*(d5*m9*sin(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& 15*m9*sin(teta2 + teta3 + teta4) - d5*m9*sin(teta2 + teta3 - teta4) - d5*m9*sin(teta2 + \\
& teta3 + teta4) + d5*m9*sin(teta3 - teta2 + teta4) - 15*m9*sin(teta2 + teta3 - teta4) + \\
& 15*m9*sin(teta2 - teta3 + teta4) + 15*m9*sin(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m7*sin(teta2 + \\
& teta3) + d4*m8*sin(teta2 + teta3) + d4*m9*sin(teta2 + teta3) + l4*m7*sin(teta2 + teta3) + \\
& l4*m8*sin(teta2 + teta3) + l4*m9*sin(teta2 + teta3)) - 2*dq2*dq8*(2*m9*(d5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - 2*dq8*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 - \\
& 4*15*\cos(\text{teta3})^2 - d4*\cos(\text{teta4}) - 14*\cos(\text{teta4}) - 4*d5*\cos(\text{teta3})^2 + \\
& 2*d4*\cos(\text{teta3})^2*\cos(\text{teta4}) + 2*14*\cos(\text{teta3})^2*\cos(\text{teta4}) + \\
& d2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + 12*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + \\
& d2*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + d2*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + \\
& d2*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3}) + 12*\cos(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 12*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta4}) + 12*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})) - dq2*dq4*(d2 + \\
& 12)*(d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} \\
& + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - \\
& 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} \\
& + \text{teta4}) + d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) \\
& + 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})) + \\
& 2*dq2*dq6*(d2 + 12)*(d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\sin(\text{teta3} - \\
& \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})) + dq4*dq6*(d2 + 12)*(d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + d4*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})) - dq4^3*dq5*m7*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3})*(d2 + 12)^2*(d4 + 14)*(d5*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \\
& \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) + \\
& d5*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} \\
& + \text{teta4}) + 15*m9*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m8*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + d4*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14*m8*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 14*m9*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})) dq8^2*(2*m9*\cos(\text{teta1})*(d5 + 15)*(cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\sin(\text{teta4})) + 2*m9*\sin(\text{teta1})*(d5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}) - \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \sin(\text{teta4})) - \\
& dq2^2 * (d2 * m3 + d2 * m4 + d2 * m5 + d2 * m6 + d2 * m7 + d2 * m8 + d2 * m9 + 12 * m3 + 12 * m4 \\
& + 12 * m5 + 12 * m6 + 12 * m7 + 12 * m8 + 12 * m9 - d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + d5 * m9 * \cos(\text{teta2} - \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& 15 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4 * m7 * \cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + d4 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 14 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3})) - dq6^2 * (d5 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \\
& \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - \\
& d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} - \text{teta4}) + 15 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + \\
& d4 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 14 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3})) - \\
& dq4 * dq7 * (m8 * \sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + m9 * \sin(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * m7 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3}) + \\
& 14 * m7 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3})) + 2 * dq2 * dq8 * (2 * m9 * \cos(\text{teta1}) * (d5 + 15) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \\
& \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) - 2 * m9 * \sin(\text{teta1}) * (d5 + \\
& 15) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) - \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}))) + \\
& dq4 * dq8 * (2 * m9 * \cos(\text{teta1}) * (d5 + 15) * (\sin(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} \\
& - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) - 2 * m9 * \sin(\text{teta1}) * (d5 + 15) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) - \\
& \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}))) - 2 * dq6 * dq8 * (2 * m9 * \cos(\text{teta1}) * (d5 + 15) * (\sin(\text{teta1} \\
& + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4})) - 2 * m9 * \sin(\text{teta1}) * (d5 + \\
& 15) * (\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3}) * \sin(\text{teta4}) - \sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3}) * \cos(\text{teta4}))) - \\
& dq2 * dq4 * (d5 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta3} - \\
& \text{teta2} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 15 * m9 * \cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) \\
& + d4 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 14 * m7 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14 * m8 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 14 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3})) + \\
& 2 * dq2 * dq6 * (d5 * m9 * \cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5 * m9 * \cos(\text{teta3} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& l4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3})) + dq4*dq6*(d5*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} \\
& + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\cos(\text{teta2} - \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& l4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3})) - dq2*dq7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})*(m8 + \\
& m9) + dq6*dq7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})*(m8 + m9) - dq2*dq7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})*(m7 + m8 + \\
& m9) + dq6*dq7*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})*(m7 + m8 + m9) - dq2*dq3*m6*(d3 + l3) - \\
& 2*dq2*dq9*m9*(\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})) - \\
& dq4*dq9*m9*(\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})) + \\
& 2*dq6*dq9*m9*(\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})) + \\
& 2*dq8*dq9*m9*(\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& \cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2})) - \\
& dq4^3*dq5*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3})*(d4 + l4)*(d5*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& 15*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\cos(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + d4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& l4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3})) \\
& dq2*dq3*(d2*m7 + l2*m7 - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \\
& \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + d5*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\cos(\text{teta2} - \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& d4*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d4*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + l4*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 14*m8*cos(teta2 + teta3) + 14*m9*cos(teta2 + teta3)) + dq2*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + \\
& 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) + \\
& 4*d5*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + 4*15*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4)) - \\
& dq6*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) \\
& + 4*d5*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) \\
& + 4*15*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4)) + dq2*dq7*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + \\
& 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) + \\
& 4*d5*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + 4*15*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4)) - \\
& dq6*dq7*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - \\
& 2*15*m9*cos(teta4) + 4*d5*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 4*15*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4)) + dq2*dq3*(d5*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& 15*m9*cos(teta2 + teta3 + teta4) - d5*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) - d5*m9*cos(teta2 + \\
& teta3 + teta4) - d5*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) - 15*m9*cos(teta2 + teta3 - teta4) + \\
& 15*m9*cos(teta2 - teta3 + teta4) - 15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m7*cos(teta2 + \\
& teta3) + d4*m8*cos(teta2 + teta3) + d4*m9*cos(teta2 + teta3) + 14*m7*cos(teta2 + teta3) + \\
& 14*m8*cos(teta2 + teta3) + 14*m9*cos(teta2 + teta3)) + dq4*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + \\
& 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) + d4^2*m7*sin(2*teta3) + \\
& 14^2*m7*sin(2*teta3) + 2*d4*14*m7*sin(2*teta3) + \\
& 4*d5*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + 4*15*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4)) + \\
& dq2^2*(d2 + 12)*(d5*m9*sin(teta2 - teta3 + teta4) - 15*m9*sin(teta2 + teta3 + teta4) - \\
& d5*m9*sin(teta2 + teta3 - teta4) - d5*m9*sin(teta2 + teta3 + teta4) + d5*m9*sin(teta3 - \\
& teta2 + teta4) - 15*m9*sin(teta2 + teta3 - teta4) + 15*m9*sin(teta2 - teta3 + teta4) + \\
& 15*m9*sin(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m8*sin(teta2 + teta3) + d4*m9*sin(teta2 + teta3) + \\
& 14*m8*sin(teta2 + teta3) + 14*m9*sin(teta2 + teta3)) + 2*dq2*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*cos(teta4) - 14*cos(teta4) + 2*d4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)) + dq4*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*cos(teta4) - 14*cos(teta4) + 2*d4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)) - 2*dq6*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d4*\cos(\text{teta4}) - 14*\cos(\text{teta4}) + 2*d4*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 2*14*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - 8*d5*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& 8*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) + dq2*dq6*m9*(d2 + 12)*(d5*\sin(\text{teta2} - \\
& \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + d5*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*\sin(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) + 15*\sin(\text{teta3} - \text{teta2} + \text{teta4}) + d4*\sin(\text{teta2} + \\
& \text{teta3}) + 14*\sin(\text{teta2} + \text{teta3}) - d5*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*\sin(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4})) - \\
& 4*dq2*dq8*m9*(d5 + 15)*(2*d5*\sin(2*\text{teta3}) + 2*15*\sin(2*\text{teta3}) + d4*\sin(\text{teta4}) + \\
& 14*\sin(\text{teta4}) + 2*d4*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 2*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - 8*d5*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3})) - 2*dq4*dq8*m9*(d5 + 15)*(2*d5*\sin(2*\text{teta3}) + \\
& 2*15*\sin(2*\text{teta3}) + d4*\sin(\text{teta4}) + 14*\sin(\text{teta4}) + 2*d4*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 2*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - 8*d5*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3})) + 4*dq6*dq8*m9*(d5 + 15)*(2*d5*\sin(2*\text{teta3}) + \\
& 2*15*\sin(2*\text{teta3}) + d4*\sin(\text{teta4}) + 14*\sin(\text{teta4}) + 2*d4*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 2*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - 8*d5*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3})) + 2*dq8*dq9*m9*\cos(2*\text{teta3})*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*\cos(\text{teta4}) - 14*\cos(\text{teta4})) - 2*dq8^2*m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4})*(d4 + 14)*(d5 + 15) \\
& 0 \\
& dq6*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) \\
& + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - \\
& dq2*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) \\
& + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - \\
& dq2*dq7*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - \\
& 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) + dq6*dq7*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 \\
& + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) + \\
& 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - \\
& 2*dq2*dq3*(d5*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - \\
& d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} + \text{teta4}) - d5*m9*\cos(\text{teta3} - \\
& \text{teta2} + \text{teta4}) - 15*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\cos(\text{teta2} - \text{teta3} + \text{teta4}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15*m9*cos(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m7*cos(teta2 + teta3) + d4*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& d4*m9*cos(teta2 + teta3) + l4*m7*cos(teta2 + teta3) + l4*m8*cos(teta2 + teta3) + \\
& l4*m9*cos(teta2 + teta3)) - dq2^2*(d2 + l2)*(d5*m9*sin(teta2 - teta3 + teta4) - \\
& 15*m9*sin(teta2 + teta3 + teta4) - d5*m9*sin(teta2 + teta3 - teta4) - d5*m9*sin(teta2 + \\
& teta3 + teta4) + d5*m9*sin(teta3 - teta2 + teta4) - 15*m9*sin(teta2 + teta3 - teta4) + \\
& 15*m9*sin(teta2 - teta3 + teta4) + 15*m9*sin(teta3 - teta2 + teta4) + d4*m7*sin(teta2 + \\
& teta3) + d4*m8*sin(teta2 + teta3) + d4*m9*sin(teta2 + teta3) + l4*m7*sin(teta2 + teta3) + \\
& l4*m8*sin(teta2 + teta3) + l4*m9*sin(teta2 + teta3)) - dq4*dq7*(d4*m8 + d4*m9 + l4*m8 \\
& + l4*m9 - 2*d5*m9*cos(teta4) - 2*15*m9*cos(teta4) + d4^2*m7*sin(2*teta3) + \\
& l4^2*m7*sin(2*teta3) + 2*d4*l4*m7*sin(2*teta3) + \\
& 4*d5*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + 4*15*m9*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4)) - \\
& 2*dq2*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 - d4*cos(teta4) - l4*cos(teta4) + \\
& 2*d4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + 2*l4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)) - dq4*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*cos(teta4) - l4*cos(teta4) + 2*d4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*l4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)) + 2*dq6*dq9*m9*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*cos(teta4) - l4*cos(teta4) + 2*d4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*l4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)) + 4*dq2*dq8*m9*(d5 + \\
& 15)*(2*d5*sin(2*teta3) + 2*15*sin(2*teta3) + d4*sin(teta4) + l4*sin(teta4) + \\
& 2*d4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3) + 2*l4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3) - \\
& 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3) - 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3)) + \\
& 2*dq4*dq8*m9*(d5 + 15)*(2*d5*sin(2*teta3) + 2*15*sin(2*teta3) + d4*sin(teta4) + \\
& l4*sin(teta4) + 2*d4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3) + \\
& 2*l4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3) - 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3) - \\
& 8*15*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3)) - 4*dq6*dq8*m9*(d5 + 15)*(2*d5*sin(2*teta3) + \\
& 2*15*sin(2*teta3) + d4*sin(teta4) + l4*sin(teta4) + 2*d4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3) + \\
& 2*l4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3) - 8*d5*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3})) - 2*dq8*dq9*m9*\cos(2*\text{teta3})*(2*d5 + 2*15 - \\
& d4*\cos(\text{teta4}) - 14*\cos(\text{teta4})) + 2*dq8^2*m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4})*(d4 + 14)*(d5 + 15) \\
& 2*dq2*dq6*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - \\
& 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - dq2^2*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + \\
& 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) - d5*m9*\cos(2*\text{teta3} + \text{teta4}) \\
& - 15*m9*\cos(2*\text{teta3} + \text{teta4}) + d5*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}) + 15*m9*\cos(2*\text{teta3} - \text{teta4}) + \\
& d2*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + d2*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + \\
& 12*m7*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12*m8*\cos(\text{teta2} + \text{teta3}) + 12*m9*\cos(\text{teta2} + \text{teta3})) - \\
& dq2*dq4*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - \\
& 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - dq6^2*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + \\
& 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) + \\
& 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) + \\
& dq4*dq6*(d4*m7 + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - \\
& 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) + 2*dq2*dq3*\sin(\text{teta2} + \text{teta3})*(m7 + m8 + \\
& m9) - 2*dq8*dq9*m9*(\sin(\text{teta4}) + 2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})) + 2*dq8^2*m9*(d5 \\
& + 15)*(\cos(\text{teta4}) - 2*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - dq4^3*dq5*m7*(d4 + 14)*(d4*m7 \\
& + d4*m8 + d4*m9 + 14*m7 + 14*m8 + 14*m9 - 2*d5*m9*\cos(\text{teta4}) - 2*15*m9*\cos(\text{teta4}) \\
& + 4*d5*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + 4*15*m9*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4})) - \\
& 2*dq2*dq9*m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - dq4*dq9*m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 2*dq6*dq9*m9*\cos(2*\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - dq4*dq7*m7*\cos(2*\text{teta3})*(d4 + 14) + \\
& 4*dq2*dq8*m9*\cos(2*\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*(d5 + 15) + 2*m9*(d5 + 15)*(dq8*dq9 + dq9^2 + \\
& dq2*dq9*\cos(2*\text{teta3}) + dq4*dq9*\cos(2*\text{teta3}) - dq6*dq9*\cos(2*\text{teta3}) + \\
& d4*dq2^2*\sin(\text{teta4}) + d4*dq6^2*\sin(\text{teta4}) + dq2^2*14*\sin(\text{teta4}) + dq6^2*14*\sin(\text{teta4}) + \\
& 2*d5*dq2^2*\sin(2*\text{teta3}) + 2*d5*dq6^2*\sin(2*\text{teta3}) + 2*dq2^2*15*\sin(2*\text{teta3}) + \\
& 2*dq6^2*15*\sin(2*\text{teta3}) - 2*d5*dq8^2*\cos(2*\text{teta4})*\sin(2*\text{teta3}) - \\
& 2*dq8^2*15*\cos(2*\text{teta4})*\sin(2*\text{teta3}) - 2*dq2*dq7*\cos(2*\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) - \\
& dq4*dq7*\cos(2*\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) + 2*dq6*dq7*\cos(2*\text{teta3})*\cos(\text{teta4}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d4*dq2*dq4*\sin(\text{teta4}) - 2*d4*dq2*dq6*\sin(\text{teta4}) - d4*dq4*dq6*\sin(\text{teta4}) + \\
& dq2*dq4*14*\sin(\text{teta4}) - 2*dq2*dq6*14*\sin(\text{teta4}) - dq4*dq6*14*\sin(\text{teta4}) + \\
& 2*d5*dq2*dq4*\sin(2*\text{teta3}) - 4*d5*dq2*dq6*\sin(2*\text{teta3}) - 2*d5*dq4*dq6*\sin(2*\text{teta3}) + \\
& 2*dq2*dq4*15*\sin(2*\text{teta3}) - 4*dq2*dq6*15*\sin(2*\text{teta3}) - 2*dq4*dq6*15*\sin(2*\text{teta3}) - \\
& 2*d5*dq8*dq9*\cos(2*\text{teta4})*\sin(2*\text{teta3}) - 2*dq8*dq9*15*\cos(2*\text{teta4})*\sin(2*\text{teta3}) + \\
& 2*dq2*dq3*\cos(\text{teta1} + \text{teta2} + \text{teta3})*\sin(\text{teta1})*\sin(\text{teta4}) - 2*dq2*dq3*\sin(\text{teta1} + \text{teta2} \\
& + \text{teta3})*\cos(\text{teta1})*\sin(\text{teta4}) + d2*dq2^2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& d2*dq2^2*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - d2*dq2^2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2}) + \\
& 2*d4*dq2^2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 2*d4*dq6^2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + dq2^2*12*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) \\
& + dq2^2*12*\cos(\text{teta2})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - dq2^2*12*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta2}) + \\
& 2*dq2^2*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 2*dq6^2*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - d2*dq2^2*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - \\
& dq2^2*12*\sin(\text{teta2})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) - 2*dq2*dq3*\cos(\text{teta1} + \text{teta2} - \\
& \text{teta3})*\cos(\text{teta1})*\cos(\text{teta4}) - 2*dq2*dq3*\sin(\text{teta1} + \text{teta2} - \text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta1}) - \\
& 8*d5*dq2^2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*d5*dq6^2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*dq2^2*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*dq6^2*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) + \\
& 4*dq9^2*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3})*\sin(\text{teta4}) + \\
& 2*d4*dq2*dq4*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \\
& 4*d4*dq2*dq6*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \\
& 2*d4*dq4*dq6*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) + \\
& 2*dq2*dq4*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \\
& 4*dq2*dq6*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \\
& 2*dq4*dq6*14*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*d5*dq2*dq4*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) + \\
& 16*d5*dq2*dq6*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) + \\
& 8*d5*dq4*dq6*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) - \\
& 8*dq2*dq4*15*\cos(\text{teta3})*\cos(\text{teta4})^2*\sin(\text{teta3}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16*dq2*dq6*15*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3) + \\
& 8*dq4*dq6*15*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3) + \\
& 4*dq8*dq9*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)) \\
& 2*dq4*dq8*m9*cos(2*teta3)*cos(teta4)*(d5 + 15) - \\
& 4*dq6*dq8*m9*cos(2*teta3)*cos(teta4)*(d5 + 15) -m9*(2*d5*dq2^2 + 2*d5*dq6^2 + \\
& 2*d5*dq8^2 + 2*dq2^2*15 + 2*dq6^2*15 + 2*dq8^2*15 + 2*dq2*dq7*sin(teta4) + \\
& dq4*dq7*sin(teta4) - 2*dq6*dq7*sin(teta4) - d4*dq2^2*cos(teta4) - d4*dq6^2*cos(teta4) - \\
& dq2^2*14*cos(teta4) - dq6^2*14*cos(teta4) + 2*dq8*dq9*sin(2*teta3) + 2*d5*dq2*dq4 - \\
& 4*d5*dq2*dq6 - 4*d5*dq2*dq8 - 2*d5*dq4*dq6 - 2*d5*dq4*dq8 + 4*d5*dq6*dq8 + \\
& 2*dq2*dq4*15 - 4*dq2*dq6*15 - 4*dq2*dq8*15 - 2*dq4*dq6*15 - 2*dq4*dq8*15 + \\
& 4*dq6*dq8*15 - 4*dq2*dq7*cos(teta3)^2*sin(teta4) - 2*dq4*dq7*cos(teta3)^2*sin(teta4) + \\
& 4*dq6*dq7*cos(teta3)^2*sin(teta4) - d4*dq2*dq4*cos(teta4) + 2*d4*dq2*dq6*cos(teta4) + \\
& d4*dq4*dq6*cos(teta4) - dq2*dq4*14*cos(teta4) + 2*dq2*dq6*14*cos(teta4) + \\
& dq4*dq6*14*cos(teta4) + 8*d5*dq2*dq8*cos(teta3)^2 + 4*d5*dq4*dq8*cos(teta3)^2 - \\
& 8*d5*dq6*dq8*cos(teta3)^2 + 8*dq2*dq8*15*cos(teta3)^2 + 4*dq4*dq8*15*cos(teta3)^2 - \\
& 8*dq6*dq8*15*cos(teta3)^2 - d2*dq2^2*cos(teta2)*cos(teta3)*cos(teta4) - \\
& dq2^2*12*cos(teta2)*cos(teta3)*cos(teta4) - 8*dq8*dq9*cos(teta3)*cos(teta4)^2*sin(teta3) \\
& + d2*dq2^2*cos(teta2)*sin(teta3)*sin(teta4) - d2*dq2^2*cos(teta3)*sin(teta2)*sin(teta4) + \\
& d2*dq2^2*cos(teta4)*sin(teta2)*sin(teta3) + 2*d4*dq2^2*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*d4*dq6^2*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + dq2^2*12*cos(teta2)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& dq2^2*12*cos(teta3)*sin(teta2)*sin(teta4) + dq2^2*12*cos(teta4)*sin(teta2)*sin(teta3) + \\
& 2*dq2^2*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + 2*dq6^2*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) \\
& - 2*dq2*dq3*cos(teta2)*cos(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*dq2*dq3*cos(teta2)*cos(teta4)*sin(teta3) + 2*dq2*dq3*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta2) \\
& - 2*dq2*dq3*sin(teta2)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*d5*dq2^2*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*d5*dq6^2*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*d5*dq8^2*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*dq2^2*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*dq6^2*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8*dq8^2*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*d4*dq2*dq4*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 4*d4*dq2*dq6*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 2*d4*dq4*dq6*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 2*dq2*dq4*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 4*dq2*dq6*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 2*dq4*dq6*14*cos(teta3)*sin(teta3)*sin(teta4) - \\
& 8*d5*dq2*dq4*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 16*d5*dq2*dq6*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) \\
& + 8*d5*dq4*dq6*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) \\
& - 8*dq2*dq4*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 16*dq2*dq6*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4) + \\
& 8*dq4*dq6*15*cos(teta3)*cos(teta4)*sin(teta3)*sin(teta4)
\end{aligned}$$

Anexo no. 9. Resultado de la matriz columna de fuerzas de gravedad C.

$$g=[9.81 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$r11=[0 \ 0 \ d1 \ 1];$$

$$r22=[0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$r33=[0 \ 0 \ d2 \ 1];$$

$$r44=[0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$r55=[0 \ 0 \ d3 \ 1];$$

$$r66=[0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$r77=[0 \ 0 \ d4 \ 1];$$

$$r88=[0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$r99=[0 \ 0 \ d5 \ 1];$$

c1=simplify(-m1*g*U11*r11.' -m2*g*U21*r22.' -m3*g*U31*r33.' -m4*g*U41*r44.' -
m5*g*U51*r55.' -m6*g*U61*r66.' -m7*g*U71*r77.' -m8*g*U81*r88.' -m9*g*U91*r99.'
);

c2=simplify(-m1*g*U12*r11.' -m2*g*U22*r22.' -m3*g*U32*r33.' -m4*g*U42*r44.' -
m5*g*U52*r55.' -m6*g*U62*r66.' -m7*g*U72*r77.' -m8*g*U82*r88.' -m9*g*U92*r99.'
);

c3=simplify(-m1*g*U13*r11.' -m2*g*U23*r22.' -m3*g*U33*r33.' -m4*g*U43*r44.' -
m5*g*U53*r55.' -m6*g*U63*r66.' -m7*g*U73*r77.' -m8*g*U83*r88.' -m9*g*U93*r99.'
);

c4=simplify(-m1*g*U14*r11.' -m2*g*U24*r22.' -m3*g*U34*r33.' -m4*g*U44*r44.' -
m5*g*U54*r55.' -m6*g*U64*r66.' -m7*g*U74*r77.' -m8*g*U84*r88.' -m9*g*U94*r99.'
);

c5=simplify(-m1*g*U15*r11.' -m2*g*U25*r22.' -m3*g*U35*r33.' -m4*g*U45*r44.' -
m5*g*U55*r55.' -m6*g*U65*r66.' -m7*g*U75*r77.' -m8*g*U85*r88.' -m9*g*U95*r99.'
);

c6= simplify(-m1*g*U16*r11.' -m2*g*U26*r22.' -m3*g*U36*r33.' -m4*g*U46*r44.' -
m5*g*U56*r55.' -m6*g*U66*r66.' -m7*g*U76*r77.' -m8*g*U86*r88.' -m9*g*U96*r99.'
);

c7= simplify(-m1*g*U17*r11.' -m2*g*U27*r22.' -m3*g*U37*r33.' -m4*g*U47*r44.' -
m5*g*U57*r55.' -m6*g*U67*r66.' -m7*g*U77*r77.' -m8*g*U87*r88.' -m9*g*U97*r99.'
);

c8= simplify(-m1*g*U18*r11.' -m2*g*U28*r22.' -m3*g*U38*r33.' -m4*g*U48*r44.' -
m5*g*U58*r55.' -m6*g*U68*r66.' -m7*g*U78*r77.' -m8*g*U88*r88.' -m9*g*U98*r99.'
);

c9= simplify(-m1*g*U19*r11.' -m2*g*U29*r22.' -m3*g*U39*r33.' -m4*g*U49*r44.' -
m5*g*U59*r55.' -m6*g*U69*r66.' -m7*g*U79*r77.' -m8*g*U89*r88.' -m9*g*U99*r99.'
);

C= [c1; c2; c3; c4; c5; c6; c7; c8; c9];

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 - (981*m5)/100 - (981*m6)/100 - (981*m7)/100 - (981*m8)/100 - \\
 (981*m9)/100 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

Anexo No. 10. Desarrollo en Matlab para hallar los valores de los torques 1,2 y 3.

```
p11=subs(D,[m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 l2 l4 l5 d2 d4 d5 teta1 teta2 teta3
teta4],[1.11974 0.50218 1.62192 0.842223 4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974
0.40 0.40 0.40 0.14 0.14 0.14 1.256 1.256 1.256 1.256]);
```

```
pq1=subs(Q,[d2q1 d2q2 d2q3 d2q4 d2q5 d2q6 d2q7 d2q8 d2q9],[0 0 0 0 0 0 0 0 0]);
```

```
p12=subs(H,[teta1 teta2 teta3 teta4 m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 l1 l2 l3 l4 l5 d1 d2 d3
d4 d5 dq2 dq3 dq4 dq5 dq6 dq7 dq8 dq9],[1.256 1.256 1.256 1.256 1.11974 0.50218 1.62192
0.842223 4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974 0.14 0.14 0.14 0.14 0.14 0.40 0.40
0.40 0.40 0.40 90 0 0 0 0 0 0 0 0]);
```

```
p13=subs(C,[m5 m6 m7 m8 m9],[4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974]);
```

```
torque1=p11*pq1+p12+p13;
```

```
double(torque1);
```

Torque1= 3,34 N*m

```
p21=subs(D,[m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 l1 l4 l5 d1 d4 d5 teta1 teta2 teta3
teta4],[1.11974 0.50218 1.62192 0.842223 4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974
0.40 0.40 0.40 0.14 0.14 0.14 1.256 1.256 1.256 1.256]);
```

```
pq2=subs(Q,[d2q1 d2q2 d2q3 d2q4 d2q5 d2q6 d2q7 d2q8 d2q9],[0 0 0 0 0 0 0 0 0]);
```

```
p22=subs(H,[teta1 teta2 teta3 teta4 m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 l1 l2 l3 l4 l5 d1 d2 d3
d4 d5 dq2 dq3 dq4 dq5 dq6 dq7 dq8 dq9],[1.256 1.256 1.256 1.256 1.11974 0.50218 1.62192
0.842223 4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974 0.14 0.14 0.14 0.14 0.14 0.40 0.40
0.40 0.40 0.40 0 0 90 0 0 0 0]);
```

```
p23=subs(C,[m5 m6 m7 m8 m9],[4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974]);
```

```
torque2=p21*pq2+p22+p23;
```

```
double(torque2);
```

torque2=1,88 N*m

```
p31=subs(D,[m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 l1 l2 l4 l5 d2 d4 d5 teta1 teta2 teta3
teta4],[1.11974 0.50218 1.62192 0.842223 4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974
0.40 0.40 0.40 0.40 0.14 0.14 0.14 1.256 1.256 1.256 1.256]);
```

```
pq3=subs(Q,[d2q1 d2q2 d2q3 d2q4 d2q5 d2q6 d2q7 d2q8 d2q9],[0 0 0 0 0 0 0 0 0]);
```

```
p32=subs(H,[teta1 teta2 teta3 teta4 m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 l1 l2 l3 l4 l5 d1 d2 d3
d4 d5 dq2 dq3 dq4 dq5 dq6 dq7 dq8 dq9],[1.256 1.256 1.256 1.256 1.11974 0.50218 1.62192
0.842223 4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974 0.14 0.14 0.14 0.14 0.14 0.40 0.40
0.40 0.40 0.40 0 0 0 90 0 0 0]);
```

```
p33=subs(C,[m5 m6 m7 m8 m9],[4.19471 0.842223 1.62192 0.50218 1.11974]);
```

```
torque3=p31*pq3+p32+p33;
```

```
double(torque3);
```

torque3= 17,89 N*m

Anexo No. 11. Cinemática

○ Cinemática Directa

La cinemática directa resuelve la cuestión de definir la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toman como referencia [22]. Este tipo de solución determina la geometría y ubicación espacial de los eslabones del robot

cuando se conocen sus variables articulares y busca definir la configuración del final del extremo. Se conocen los ángulos de movimiento y los valores del desplazamiento sobre las articulaciones si son prismáticas o rotacionales. Su obtención, que genera una descripción analítica del movimiento del robot, se establece por la solución de la cinemática directa dada por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 x &= f_x(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\
 y &= f_y(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\
 z &= f_z(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\
 \alpha &= f_\alpha(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\
 \beta &= f_\beta(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\
 \gamma &= f_\gamma(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Se logra esta representación de la orientación y la posición si se han seleccionado las coordenadas cartesianas y ángulos de Euler. Para completar el cálculo de la cinemática directa se tienen en cuenta los siguientes pasos:

- a) Adjuntar un sistema de coordenadas a cada uno de los eslabones $n+1$ del robot, donde el sistema 1 se adjunta al sistema de coordenadas fijo y el sistema $n+1$ al efector final.
- b) Definir parámetros D-H:
 - Eje z, debe coincidir con el eje de rotación,
 - θ_i , ángulo articular (x_{i-1} al eje x_i) (horizontal),
 - α_i , ángulo de torsión del eslabón,
 - d_i , longitud articular o distancia entre los orígenes (vertical) y
 - a_i , longitud del eslabón.
- Escribir las matrices de transformación homogénea (producto de las representaciones de cada elemento del robot):

$$T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \quad (4)$$

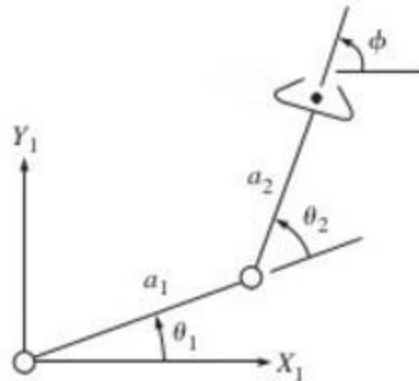


Figura 1. 5. Cinemática directa de un robot planar de dos eslabones.

La cinemática directa no es muy utilizada ya que lo que se programa comúnmente son las variables articulares, que es lo que realmente se desea controlar. Por ello, se procede a efectuar la cinemática inversa.

○ Cinemática Inversa

La cinemática inversa busca determinar el valor de los ángulos y/o el desplazamiento de las articulaciones sabiendo la posición del final del extremo o efector. Se calcula, por este modelo, las variables articulares cuando son conocidas la ubicación y orientación de los eslabones. Hay que establecer la dirección de desplazamiento del extremo de la articulación respecto a un sistema de referencia, para después efectuar el análisis de velocidad y aceleración necesaria para el control del movimiento de los actuadores de manera uniforme. El resultado que se espera no arroja una ecuación lineal, es decir, con la cinemática inversa, se espera generar ecuaciones no lineales en la mayoría de los casos, las soluciones son infinitas o son nulas, si no se acoplan a la arquitectura del controlador.

El objetivo principal de la solución al problema cinemático inverso ([22], [24]) es encontrar los valores que deben adaptar las coordenadas articulares del robot $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, para

que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial; establecer esta propuesta depende de la configuración del mecanismo, pero se adecúa mejor encontrar una solución cerrada, es decir, una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (5)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ (Número de grados de libertad)

Esta solución permite establecer restricciones que permitan adecuar una solución entre todas las posibles, que se constituyen a partir de diferentes n-uplas $[q_1, \dots, q_n]^T$.

Algunos sistemas poseen cinemáticas relativamente sencillas de analizar y calcular, que facilitan la solución de su cinemática inversa, en cierta medida. Esto es, teniendo en cuenta los primeros grados de libertad; si su estructura es planar (los primeros elementos quedan contenidos en un plano), se puede solucionar el problema. También se da la circunstancia de que los últimos grados de libertad, que se encargan de orientar el extremo del robot, corresponden a giros sobre ejes que cortan en un punto, facilitando el cálculo de la n-upla $[q_1, \dots, q_n]^T$, que corresponden a la posición y orientación deseadas. De forma práctica, el movimiento del sistema se puede expresar con longitudes y valores angulares definidos en metros y radianes, respectivamente, para facilitar el diseño y análisis de sistemas de control. Se tienen en cuenta dos métodos para solucionar la cinemática inversa:

- Solución de la cinemática inversa por métodos geométricos

Se trata de establecer un número suficiente de relaciones geométricas que implican el desarrollo de las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos. Se aplica en robot de pocos grados de libertad, o en el caso de ser una cadena de múltiples articulaciones y eslabones, se consideran los primeros grados de libertad, dedicados a ubicar el extremo.

- Solución de la cinemática inversa a partir de la transformación homogénea

Se puede solucionar la cinemática inversa a partir de conocimiento de su modelo directo, es decir, si se establecen las relaciones como conocidas de la posición y la orientación del extremo del mecanismo, en función de sus coordenadas articulares, obtener por manejo de dichas relaciones la solución inversa. No obstante, es una opción que no es trivial: el enfoque algebraico a la solución explícita conlleva a la búsqueda de los ángulos de las articulaciones por medio de la transformación algebraica de las ecuaciones T y P [22], donde

$$T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \text{ y}$$

$$p = a_1 + Q_1 a_2 + \dots + Q_{1\dots 1} {}^{n-1} a_n \quad (6)$$

Anexo No. 12. Dinámica

- Dinámica Directa Vs. Dinámica Inversa

Una dicotomía presente en la dinámica es el cálculo de los valores de las variables de desplazamiento, velocidad y aceleración, a partir de un vector τ empleado en cada articulación que contiene las fuerzas y los torques, frente a la obtención de dicho vector conociendo las magnitudes de las variables. A esto último se le denomina el cálculo de la Dinámica Inversa y son de mayor viabilidad para determinar la trayectoria requerida para resolver un problema en particular [24]. Entonces, la dinámica desarrollada en mayor medida es la directa, es decir, a partir de la aplicación de τ se establecen los desplazamientos, velocidades y medidas de las articulaciones. A continuación, se harán mención los modelos dinámicos y la obtención de la dinámica directa de un sistema.

- Modelos dinámicos

Son representaciones que evalúan, bien sean sobre el dominio del tiempo, o a partir de la aplicación de fuerzas, el movimiento de las coordenadas articulares de un mecanismo.

Estos modelos son:

- Modelo dinámico directo: analiza la evolución temporal de las coordenadas articulares del sistema en función de las fuerzas y pares que intervienen. Representa los pares de torsión o la fuerza de los actuadores que son necesarios para generar la trayectoria deseada del robot o parte de él.
- Modelo dinámico inverso: representa el conjunto de fuerzas y pares que intervienen en función de sus coordenadas articulares y sus derivadas. Este modelo encuentra la respuesta del eslabón de un robot respecto a algunos pares de torsión o fuerzas en las articulaciones. Como necesidad de este modelo, debe registrarse el movimiento resultante del robot para considerarlo exitoso.
 - Solución de la dinámica del robot

Hay varias formas de obtener la dinámica de un mecanismo robótico [22, 23], pero las más esenciales son:

- Formulación Lagrange-Euler: es el uso de matrices de transformación homogénea, o de matrices ${}^{i-1}A_i$, que relacionan un sistema de coordenadas de referencia del elemento i con el sistema del elemento $i-1$.
- Ecuaciones de movimiento de Lagrange: plantean el movimiento a partir de la eliminación de las fuerzas de restricción de las ecuaciones de dinámica si las coordenadas generalizadas se eligen en forma independiente, pero sólo es de utilidad en la simulación. Para el diseño de han de usar multiplicadores de Lagrange para recuperar las fuerzas de restricción eliminadas.
- Por mera aplicación de leyes de Newton y Euler: para movimientos lineales y rotacionales, respectivamente.

Anexo No. 13. Proceso de identificación.

- Métodos de identificación

Existen diversos métodos de identificación de sistemas que dependen de la estructura y el tipo de análisis que se desea realizar, por ejemplo, en tiempo real o intuitivamente. Se definen estos métodos de la siguiente forma:

- A partir del tipo de modelo obtenido:

- Métodos no paramétricos: esencialmente son intuitivos, y se caracterizan por permitir ajustar al modelo una cantidad determinada de la información de la planta que se estudia, como el análisis de respuesta en frecuencia, análisis espectral, etc. Un modelado no paramétrico se puede representar, como en el caso de un sistema no lineal, de la siguiente forma:

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + e(t) \quad (8)$$

$$G(q^{-1}) u(t) = \sum g(k)q^{-k} \quad (9),$$

donde q^{-1} es el retardo del sistema y $u(t)$, $y(t)$ y $e(t)$ son la entrada, la salida y el conjunto de perturbaciones presente, respectivamente.

- Métodos paramétricos: se tiene un conjunto de parámetros que hay que ajustar en relación a los datos obtenidos experimentalmente, como el orden y los coeficientes de los polinomios de una función de transferencia ($G(s)$, $H(z)$, etc.). Un modelo paramétrico es de mayor utilidad en sistemas discretos, y en éstos se expresa como sigue:

$$s(t) = \eta(t) + w(t) \quad (10),$$

en el cual $s(t)$ es la salida medible del sistema, $\eta(t)$ es el modelamiento de la salida respecto a la entrada y $w(t)$ es la representación del modelo de la salida debida a las perturbaciones. Para los modelos paramétricos, hay estructuras que se ajustan a la ecuación 3 (ver fig. 1. 2), ya que se toman variables del modelo discreto (son muy útiles si las perturbaciones interfieren significativamente en el registro de los datos):

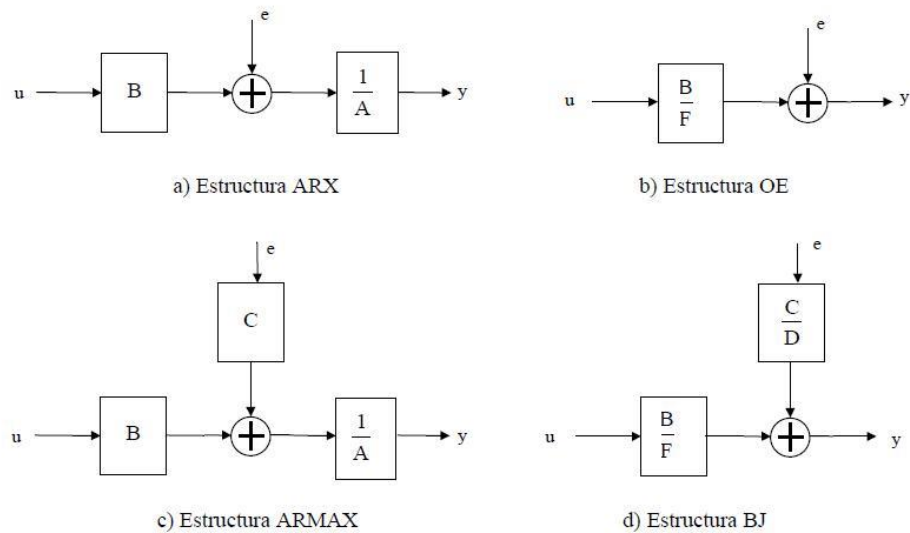


Figura 1. 7. Diagramas de bloques para sistemas paramétricos

- A partir de su estimación:

- Caja blanca: es obtenido a partir del análisis de las leyes físicas implícitas en el funcionamiento del sistema.
- Caja negra: se obtiene una estructura matemática con una serie de parámetros libres, a los que se les da el valor de los datos obtenidos en los experimentos.
- Caja gris: Parte del modelo se obtiene mediante leyes físicas, y la otra parte se obtiene por experimentación. Es un modelo intermedio a los dos anteriormente mencionados.

- A partir de su aplicación:

- Método identificación en línea: se efectúan mediciones en tiempo real. Es apropiado en el caso de realizar una estrategia de control adaptivo, o cuando el proceso varía su dinámica con el tiempo.
- Método identificación fuera de línea: se realizan medidas sobre el experimento y se ajustan al modelo. Se suelen obtener modelos más preciso y más fiables por convergencia de parámetros.

- Elección de un criterio

La elección de criterios que permitan realizar una identificación óptima es un proceso de estimación que expresa la calidad del modelo obtenido. Un modelo obtenido por elección de un criterio tiene la forma:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N g(e(k)) \quad (11),$$

Los elementos fundamentales son: θ , que es el vector de parámetros que se trata de ajustar; $e(k)$, el error de estimación para la medida k , y $g(\cdot)$, que es una función usualmente cuadrática (como las de segundo orden que generan respuestas amortiguadas). Esta función aplica para un número N de observaciones o medidas realizadas. La estimación realizada resuelve el problema de optimización del sistema en el cual el mejor modelo es el que hace mínimo el criterio; para tener en cuenta, el modelo obtenido depende de la amplitud y la frecuencia de la señal de entrada.

- Propiedades

- Excitación persistente: la identificación correcta de un sistema debe poner de manifiesto toda su dinámica, esto significa excitarlo de manera persistente. Es decir, a un sistema de orden n se le ejerce control mediante una señal persistentemente excitadora de orden n . Esta propiedad demuestra su cumplimiento si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{1}{2} \quad (12),$$

donde $A(z^{-1})$ es un polinomio de grado inferior a N.

- Convergencia e identificabilidad: un sistema es identificable si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\theta) = \theta_0 \quad (13)$$

y la salida del modelo estimado es posible:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k) = 0 \quad (14)$$