UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

DISEÑO DE TAREAS MEDIADAS POR TECNOLOGÍAS DIGITALES PARA EL ESTUDIO DE ALGUNAS PROPIEDADES DE FUNCIONES CUADRÁTICAS ASOCIADAS A SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA Y ALGEBRAICA: LONGITUD DEL LADO RECTO

PRESENTADO POR:

LIGIA ANDREA NARANJO CHAVARRO

Dr. JOSÉ LEONARDO ÁNGEL BAUTISTA
DIRECTOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C, 2025

DISEÑO DE TAREAS MEDIADAS POR TECNOLOGÍAS DIGITALES PARA EL ESTUDIO DE ALGUNAS PROPIEDADES DE FUNCIONES CUADRÁTICAS ASOCIADAS A SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA Y ALGEBRAICA: LONGITUD DEL LADO RECTO

LIGIA ANDREA NARANJO CHAVARRO

TRABAJO DE GRADO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

DIRECTOR:

DR. JOSÉ LEONARDO ÁNGEL BAUTISTA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C, 2025

DEDICATORIA

A Dios todo poderoso dueño de nuestra vida.

A mi familia por su energía.

A mi mami por su humildad, fe y esperanza.

A mi doble, Karolita por su honestidad alentadora.

A mi hijo Abel por su amor y esperar lo mejor.

A Alirio por su amor incondicional y apoyo moral.

A mi tutor por su paciencia, entrega, ejemplo y enseñanza.

A mí misma por ser fuerte, persistente y resiliente.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme las oportunidades, los momentos que destino y destina siempre oportunos en esta vida, que sin duda todo lo hizo hermoso en su tiempo. Eclesiastés 3-11.

A quienes aportaron con sus conocimientos para mi formación académica

A mi madre Anita, por alentarme con su mirada, su presencia siempre un motor de esperanza y aprendizaje que siempre me acompaña.

A mi hermana Karola, por momentos de tertulia, me tranquilizaba y me permitía ver otros horizontes en las dinámicas de aprendizaje.

A mi hijo Abelito sus abrazos y plegarias al todopoderoso me alentaron a seguir en busca de aprendizajes que sin duda son ejemplo para él.

A mi compañero Alirio que en esta etapa de nuestras vidas me apoyo con sus amor y palabras de motivación quien por mucho tiempo aguanto mis desplantes.

A mi profesor José Leonardo Ángel, su entrega, dedicación , pasión por su profesión sin duda son ejemplo de vocación, así mismo por su palabras “pasito a pasito y poco a poco vamos llegando” por su paciencia y humildad. Gracias mi profe.

A mi profesora Claudia Orjuela, sus enseñanzas y ejemplos de resiliencia, me alentaron en momentos esenciales.

Mis dos colegas que marcan la diferencia e invitan a seguir en nuestra labor aprender a aprender y desde luego aprender a enseñar.

RESUMEN

Esta investigación tuvo como propósito diseñar e implementar un conjunto de tareas mediadas por tecnologías digitales orientadas al fortalecimiento de los procesos de estudio asociados a las propiedades de la función cuadrática, en particular la longitud del lado recto de la parábola, con estudiantes de grado undécimo. El estudio se desarrolló bajo un enfoque empírico-analítico retomado desde una perspectiva cualitativa, orientada en la observación rigurosa y el análisis interpretativo de las producciones realizadas por los estudiantes. Se enmarca en el modelo de experimentos de enseñanza propuesto por (Romberg, 1992)

El proceso metodológico se llevó a cabo en tres fases: diseño, implementación y análisis retrospectivo. En la fase de diseño se elaboraron cuatro tareas mediadas por el software GeoGebra, sustentadas en los elementos característicos propuestos por (Gómez , Mora, & Velasco, 2018) y en la teoría de la génesis instrumental. Posteriormente, se implementaron dos de ellas y parcialmente la tercera con tres parejas de estudiantes, lo que permitió analizar sus interacciones con los artefactos digitales y los procesos matemáticos implicados.

Los resultados evidenciaron que el uso de GeoGebra favoreció la exploración y la conjetura sobre las propiedades geométricas y algebraicas de la parábola, particularmente del lado recto, y potenció la comunicación entre los integrantes de las parejas, quienes colaboraron activamente en la toma de decisiones y en la verificación de sus construcciones. En cuanto a la argumentación, esta se manifestó de manera parcial, evidenciando avances iniciales en la explicación de relaciones entre los elementos de la construcción, aunque sin alcanzar justificaciones formales. Se concluye que las tecnologías digitales, adecuadamente mediadas por el docente, constituyen un recurso didáctico valioso para fortalecer los procesos de estudio en el aula de matemáticas.

Palabras clave: Función cuadrática, Lado recto, Diseño de tareas, Tareas digitales y Génesis Instrumental.

ABSTRACT

This study aimed to design and implement a set of tasks mediated by digital technologies, oriented toward strengthening the study processes associated with the properties of the quadratic function, particularly the length of the latus rectum of the parabola, with eleventh-grade students. The research was conducted under an empirical-analytical approach framed from a qualitative perspective, guided by rigorous observation and the interpretative analysis of the students' productions. It is grounded in the teaching experiment model proposed by Romberg (1992).

The methodological process was carried out in three phases: design, implementation, and retrospective analysis. In the design phase, four tasks mediated by GeoGebra software were developed, supported by the characteristic elements proposed by Gómez, Mora, and Velasco (2018) and by the theory of instrumental genesis. Subsequently, two of the tasks and part of a third were implemented with three pairs of students, which made it possible to analyze their interactions with the digital artefacts and the mathematical processes involved.

The results showed that the use of GeoGebra supported exploration and conjecture regarding the geometric and algebraic properties of the parabola, particularly the latus rectum, and enhanced communication among the students in each pair, who actively collaborated in decision-making and in verifying their constructions. Regarding argumentation, it appeared only partially, showing initial progress in explaining relationships between the elements of the construction, although without reaching formal justifications. It is concluded that digital technologies, when appropriately mediated by the teacher, constitute a valuable didactic resource for strengthening study processes in the mathematics classroom.

Keywords: Quadratic function, Latus rectum, Tasks design, Digital technologies and Instrumental Genesis.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

En este documento se presenta un trabajo desarrollado como tesis de grado en el programa de Maestría en Docencia de las Matemáticas, con énfasis en tecnologías, de la Universidad Pedagógica Nacional. El propósito principal del trabajo consiste en diseñar tareas mediadas por Tecnologías Digitales(TD) que permitan a los estudiantes de matemáticas, en principio, de educación básica o media, construir significados y fortalecer los procesos de estudio asociados a algunas propiedades de una función cuadrática, en relación con su representación algebraica y geométrica.

Este trabajo surge, en primer lugar, como un camino para abordar algunas dificultades y errores evidenciados en los estudiantes de grado undécimo al enfrentarse a ejercicios y problemas que implican el uso, análisis o comprensión de propiedades de una función cuadrática y, en segundo lugar, como una propuesta para introducir el uso de TD en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente, en una institución en la que actualmente no hay desarrollos investigativos o didácticos al respecto. Estas observaciones motivaron la posibilidad de diseñar una propuesta de tareas mediadas por TD que permitieran abordar el estudio de funciones cuadráticas reales desde una perspectiva analítica y reflexiva, coherente con las tendencias actuales en educación matemática.

Ahora bien, bajo la aproximación metodológica conocida como experimento de enseñanza, se desarrolló un diseño de tareas mediadas por TD para estudiar la longitud del lado recto de la representación gráfica de una función cuadrática y su relación con el coeficiente principal de la representación algebraica de tal tipo de función. Para ello se empleó un marco de referencia que aborda tanto los conceptos y procedimientos matemáticos relacionados con el objeto de estudio, como la teoría de Génesis instrumental y Orquestación instrumental. La propuesta de tareas fue implementada y posteriormente analizada a partir de un conjunto de categorías establecidas a partir del marco de referencia. Finalmente, producto del análisis se identificaron posibilidades de mejora para las tareas y su implementación y se generó una propuesta de tareas revisadas.

Puntualmente, el trabajo está organizado en términos de seis capítulos y de cuatro anexos. En el primer capítulo se presenta la formulación del problema, la justificación, los objetivos generales y los antecedentes del problema.

En el segundo capítulo se presenta la metodología la cual se fundamenta en una aproximación interpretativa, dentro de un enfoque empírico-analítico. Bajo una estrategia metodológica de experimento de enseñanza, se organiza el proceso investigativo mediante fases iterativas que integran la planificación, la experimentación y el análisis de los resultados obtenidos. El trabajo se desarrolla en tres fases, que se relacionan directamente con los siguientes capítulos del documento.

En relación con la primera fase, en el tercer capítulo se realiza la construcción del marco de referencia que sustenta el estudio de los objetos matemáticos, los elementos didácticos, la mediación tecnológica y el diseño de tareas con base en los planteamientos de Gómez P. M.(2018). Por su parte, en el cuarto capítulo, y como parte de la fase dos de la estrategia, se incluye el diseño de la propuesta de tareas, fundamentada en el marco de referencia, y un análisis a priori de las mismas. En el quinto capítulo se describen las condiciones de la implementación de la propuesta (entre ellas, el cambio forzoso de institución en el transcurso del desarrollo del trabajo), la forma de recolectar la información, la descripción de los elementos a analizar y los recursos físicos. Además, como parte de la fase tres de la estrategia, se incluye también en este capítulo el análisis de la información recolectada en el proceso de implementación.

Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de grado, organizadas en torno a tres aspectos principales: la relación entre los objetivos planteados y los desarrollos logrados, la formación profesional y los aprendizajes logrados en esta investigación, finalmente, una reflexión sobre la praxis docente relacionada con el desarrollo de este proceso investigativo y los aprendizajes derivados del proceso de diseño e implementación de las tareas mediadas por TD.

De esta manera, el documento se estructura como un proceso de estudio y reflexión que articula teoría, diseño y análisis, con el propósito de aportar a la enseñanza y aprendizaje del objeto función cuadrática mediante el uso de tecnologías digitales.

Nota aclaratoria. Teniendo en cuenta las dinámicas en el proceso de estudio realizado y la posibilidad de profundizar en el uso de artefactos para mediar los procesos de aprendizaje de algunas propiedades de la función cuadrática, más que en los cambios de registro entre representaciones, el título original del trabajo, a saber, conversión *de registros semióticos gráfico y algebraico en la solución de problemas con relación a la función cuadrática mediante el uso de TD*, fue modificado por el que actualmente identifica este documento.

CAPÍTULO 1

1. Problema

En este capítulo se describe el problema de investigación, la justificación y los objetivos del trabajo de grado. Además, se exponen algunos antecedentes teóricos que enmarcan la investigación dentro de una línea específica, determinando su pertinencia y viabilidad.

1.1 Formulación del problema

Este trabajo de investigación surge como un camino para abordar dos asuntos que, como docente de matemáticas, en la educación media, he identificado en los últimos años. Primero, la necesidad de incorporar de forma responsable el uso de Tecnologías Digitales (TD) en los procesos de formación en matemáticas y, segundo, las dificultades y errores de los estudiantes al abordar el concepto de función cuadrática real, especialmente al trabajar con sus diferentes representaciones.

En relación con el primer asunto, en el contexto educativo generado como consecuencia de la situación de pandemia COVID 19 en 2020, surgió la obligación y la necesidad de que los docentes emplearan TD para desarrollar procesos de estudio en matemáticas con los estudiantes; sin embargo, la falta de experiencia en la manipulación de herramientas digitales y la poca existencia o el desconocimiento de tareas adaptadas para este tipo de contextos creó la necesidad de explorar y diseñar dichos recursos que fortalecieran los procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular de las matemáticas escolares.

Esta nueva dinámica escolar produjo en las instituciones educativas, en especial donde se gestó esta investigación, importantes efectos en muchos de los aspectos propios del desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, como la imposibilidad por parte del maestro para cumplir por completo con el programa curricular de matemáticas en los tiempos establecidos, el bajo compromiso y responsabilidad de parte de los estudiantes en el cumplimiento de las tareas enviadas y la baja conceptualización de los objetos de estudio. Por su parte, el docente enfrentó grandes dificultades para desarrollar con éxito procesos de enseñanza más significativos debido, entre otros, a la falta de control sobre el trabajo a distancia que realiza el estudiante, así como al desconocimiento por parte docente, de estrategias para el diseño e implementación de propuestas didácticas mediadas por las TD que facilitarán la orientación, realimentación y evaluación de procesos académicos a distancia.

De otra parte, en el desarrollo del programa de matemáticas en la Institución Educativa (I.E) La Merced de Mosquera Colombia, institución en la que me desempeñe como docente de matemáticas en año 2022 se pudo observar que la comunidad educativa (estudiantes, padres y docentes) se concientizó de las dificultades educativas que trajo la pandemia y en particular de los bajos desempeños que los estudiantes tuvieron en dicha área. Además, se identificó un alto índice de deserción y de reprobación escolar por falta de recursos tecnológicos propios y por dificultades en los procesos de aprendizaje a través de los medios virtuales. Actualmente, la I.E la Merced cuenta con algunas herramientas tecnológicas digitales básicas, pero faltan herramientas de interacción con los estudiantes como plataformas, programas matemáticos especializados y, sobre todo, propuestas didácticas que fortalezcan los procesos de enseñanza que permitan mejorar los procesos de aprendizaje de estudiantes con respecto a las matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, algunos docentes del área de matemáticas de la institución identificaron la necesidad de desarrollar estrategias que posibilitaran trabajar algunos elementos de la propuesta curricular en matemáticas con TD para fortalecer ambientes y entornos de trabajo enriquecedores y eficaces, mejorando en los estudiantes el desarrollo de sus competencias matemáticas. Para el diseño e implementación de estas estrategias se observó en la institución la posibilidad de plantear propuestas educativas haciendo uso de los recursos disponibles, y tomando como objeto particular de estudio el eje temático de grado undécimo, denominado funciones cuadráticas y manejo de sus representaciones, cuya naturaleza genera algunas dificultades en los procesos de aprendizaje durante el año escolar.

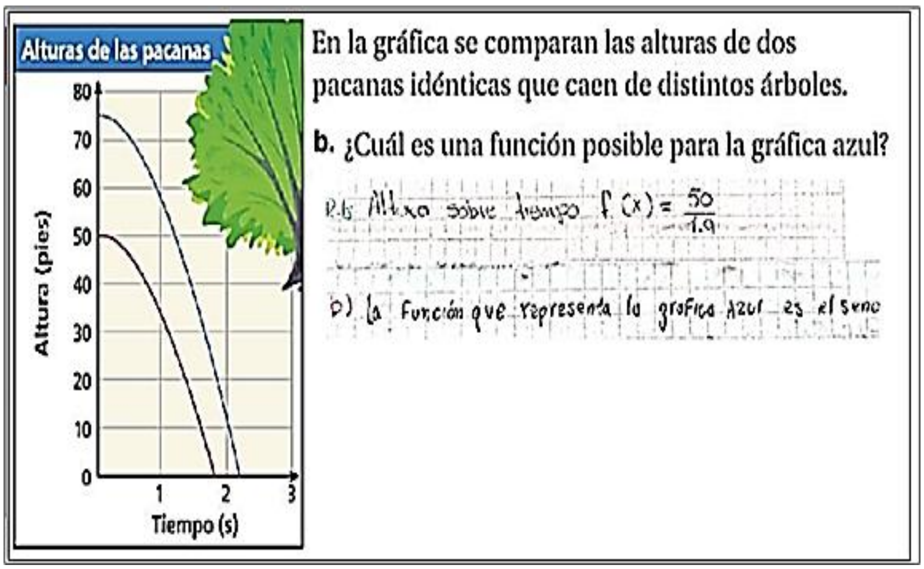
En relación con este objeto de estudio, cabe destacar que en el currículo de matemáticas de la I.E la Merced, en el documento de los estándares curriculares y en los derechos básicos de aprendizaje, el estudio de la función cuadrática comienza a desarrollarse desde grado noveno. En este nivel de formación, los estudiantes identifican qué es una función cuadrática, construyen su representación gráfica y reconocen algunas características de la función a partir de tal representación. En grado décimo los estudiantes estudian transformaciones de la función cuadrática exaltando las representaciones gráficas, además en este nivel, la función cuadrática se estudia desde las cónicas. Finalmente, en el grado undécimo la función cuadrática se estudia como un mecanismo de modelación, particularmente de situaciones físicas.

De acuerdo con lo planteado puede apreciarse que, en la propuesta curricular, el objeto, función cuadrática es estudiado a partir de diferentes perspectivas, con el propósito de desarrollar competencias para su conceptualización dentro del currículo de matemáticas. Sin embargo, las evidencias de los procesos de enseñanza y aprendizaje muestran que dicho propósito no se está logrando, ya que los estudiantes de grado undécimo presentan dificultades para entender significativamente la función cuadrática. Con el fin de diagnosticar el estado actual de estos aprendizajes, en el año 2022 se aplicó una prueba diagnóstica a 60 estudiantes de grado undécimo. Para su diseño, se seleccionaron tres situaciones del libro digital *Texas Matemáticas*, capítulo 9, *Funciones y ecuaciones cuadráticas*. La evaluación tenía como objetivo que los estudiantes identificaran la representación gráfica de una función cuadrática, determinarán su expresión algebraica a partir de la gráfica, establecieran relaciones entre ambas representaciones y aplicarán sus propiedades en la solución de problemas en contexto.

Producto del ejercicio de evaluación diagnóstica, se realizó un análisis de las respuestas dadas por algunos de los estudiantes a tres situaciones que llevó a las siguientes observaciones: en relación con la primera situación (Figura 1) se identificó que el 90% de los estudiantes no propuso una representación algebraica adecuada para la función descrita a través de su representación gráfica.

Figura 1

Gráfica de funciones cuadráticas en la caída de pacanas

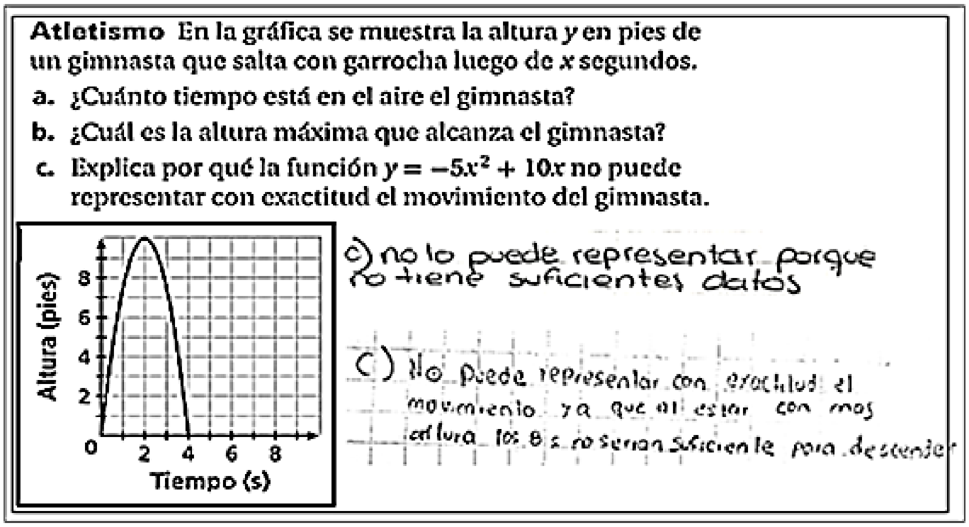


Nota. Gráfica extraída de matemáticas para Texas, capítulo 9, acompañado de la respuesta de dos estudiantes a la pregunta b.

En relación con la segunda situación (Figura 2) se observó que el 80% de los estudiantes presentó dificultades para reconocer relaciones que existen entre las diferentes representaciones de una función cuadrática y por tal motivo no generaron argumentos válidos para comunicar resultados de forma algebraica; se esperaba que el estudiante resolviera la situación planteada partiendo de, por ejemplo, hallar los ceros de la función y el vértice de la parábola asociada o reemplazar en la expresión algebraica la variable *x* con un número real que pertenezca al dominio de la función según la gráfica, para luego comparar el resultado de la función evaluada con la ordenada correspondiente en la gráfica; sin embargo, se identifica que los estudiantes desconocían cómo obtener información relevante de la función cuadrática a partir de la representación algebraica; por ejemplo, ellos no relacionaron el valor del coeficiente del término cuadrático con el tipo de concavidad de la función.

Figura 2

Gráfica de una función cuadrática en el movimiento de una gimnasta

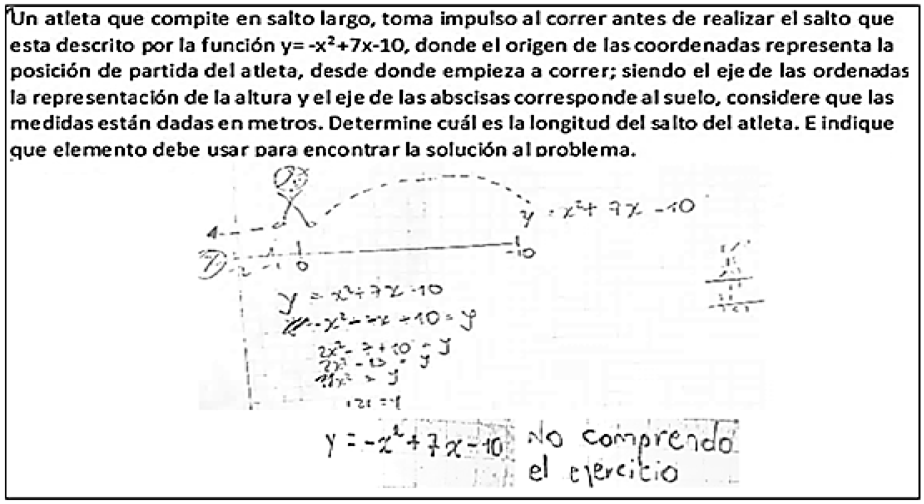


Nota. Gráfica extraída de matemáticas para Texas, capítulo 9, acompañado de la respuesta de dos estudiantes a la pregunta c.

Finalmente, en la tercera situación se planteaba un enunciado (Figura 3) que incluía la representación algebraica de una función cuadrática, se requería el análisis de la situación, la identificación de los ceros de la función y la formulación de la solución. Al respecto, se evidenció que un 10% de los estudiantes intenta representar a través de un dibujo el problema planteado; sin embargo, desconocen o no entienden los procesos necesarios para solucionar la pregunta. Así mismo el 90% tuvo dificultades al plantear la solución, ya que consideraban que el proceso consistía en simplemente en despejar la variable independiente en la expresión algebraica.

Figura 3

Situación en un contexto real: análisis de un salto en atletismo.



Por otro lado, se observa que el diseño de la pregunta planteada, por ejemplo, en la situación 1 (Figura 1) carece de un enunciado claro con respecto al movimiento de la pacana cuando cae al suelo, pues, aunque el objetivo sea trabajar con una función cuadrática, se podría abordar el problema suponiendo otro tipo de función. Así mismo, al observar la gráfica de la (Figura 1) se evidencia que la escala para el eje *x* y el eje *y* no es exacta, siendo difícil para el estudiante la interpretación de la gráfica. Así, se reconoce la urgencia e importancia de revisar las tareas que se proponen atendiendo a sus objetivos de aprendizaje y a las herramientas que se utilizan para dotar de significado a los objetos de estudio.

A partir de estudios y observaciones en el aula en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre el objeto de estudio, se plantea la necesidad de modificar las prácticas en el aula de tal forma que los estudiantes conceptualicen de mejor forma el objeto función cuadrática y, en particular, que desarrollen competencias para identificar, manejar y relacionar las representaciones algebraica y gráfica de una función cuadrática involucrando otros escenarios, como los suministrados por TD, que además de enriquecedores sean pertinentes y actuales en relación con las dinámicas interna o externa de la institución.

De acuerdo con la problemática expuesta en el marco de esta investigación, se identifica la necesidad de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en relación con el objeto de estudio mediante la implementación de TD; en este contexto, se plantea la pregunta de investigación: ¿Cómo fortalecer la construcción de significados y los procesos de estudio sobre algunas propiedades de una función cuadrática asociadas a sus representaciones algebraica y geométrica a través del diseño de tareas mediadas por TD?

1.2 Justificación

De acuerdo con las ideas expuestas en el planteamiento del problema y con los requerimientos que la sociedad actual impone sobre los procesos educativos, en los últimos años ha surgido la necesidad que los docentes, en particular, de matemáticas, reformulen sus prácticas y construyan o adopten nuevas propuestas didácticas basadas en el uso de TD. Además, Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) hace énfasis en que el uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes, ya que éstas amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen y enriquecen el currículo con el desarrollo de nuevas prácticas que lo llevan a evolucionar. En tal sentido, como parte de la justificación de este trabajo se abordan tres ideas fundamentales: la importancia y posibilidades de las TD en educación matemática; el lugar del objeto matemático en el currículo y su relación con TD, y el diseño de tareas, particularmente mediadas por TD.

Tal como propone Planchart (2002), el uso de TD contribuye al aprendizaje interactivo en donde los estudiantes exploran y adquieren experiencias significativas e insiste en que actividades de modelación y uso reflexivo de herramientas digitales fortalecen competencias matemáticas. Por su parte, Salat Figols (2013) plantea que el uso de TD cambia la naturaleza de los procesos cognitivos dentro del pensamiento matemático; además, la incursión de herramientas tecnológicas en ambientes de aprendizaje matemáticos puede mejorar los procesos de conceptualización, ampliar otros mecanismos que beneficien la producción de saberes en contextos de formación académica, generen aprendizajes significativos y fortalezcan las capacidades para resolver problemas mejorado los niveles de satisfacción en los aprendizajes de los estudiantes.

De otra parte, Claro (2010) enfatiza en su investigación que el uso de herramientas tecnológicas en las matemáticas es de gran ayuda, puesto que facilita el aprendizaje de los conceptos. De igual manera, se apoya en los autores Cox et al. (2004), quienes concluyen que el uso de estas herramientas fortalece la comprensión de conceptos, puesto que facilitan la adaptación y contextualización de los contenidos, lo que se ha denominado, aprendiendo a aprender con la tecnología aumentando la motivación, el interés, el compromiso y participación de los estudiantes. Por su parte, Velásquez N (2017), concluye que los estudiantes cambian de actitud y predisposición por aprender, al mismo tiempo que aumentan su participación, de modo que sugiere propiciar un ambiente de aprendizaje innovador, que garantice ir más allá de procedimientos rutinarios que contribuyan con ambientes para descubrir y reflexionar. En términos de Laborde (2001), aspectos que los estudiantes no han interiorizado las relaciones matemáticas que subyacen a las construcciones, particularmente dependencias geométricas a pesar de estar familiarizados con algunas TD, las acciones de los estudiantes no siempre son entendidas.

Desde otra perspectiva, Lancheros (2014) y Molina L. M. (2017) en una investigación llevada a cabo en Colombia, plantean que hay evidencias de que el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), propicia la motivación hacia la educación y argumentan que las plataformas tecnológicas en educación generan más participación por parte de los estudiantes, puesto que han mostrado un aumento en cuanto al rendimiento escolar y la adquisición de habilidades matemáticas. De modo que la tecnología puede ser una herramienta poderosa para transformar el aprendizaje de los estudiantes y ampliar el impacto de las prácticas docentes efectivas (Dede, 2014).

Además, con la TD se pretende fortalecer de forma interactiva el pensamiento variacional de manera natural y práctico al modelar y transformar un objeto matemático. Es así como el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2004), en el documento pensamiento variacional y las tecnologías computacionales, deja claro que, al abordar temas de este pensamiento, es necesario profundizar en la utilidad, el aprendizaje y modelación para entender situaciones de cambio con el propósito de analizarlas y transformarlas, en particular al abordar temas relacionados con el pensamiento variacional, como aquellos contemplados en esta investigación.

De manera particular, a raíz de las necesidades educativas expuestas por la pandemia COVID-19, el Departamento Nacional de Planeación, Documento Consejo Nacional de

Política Económica y Social-Ministerio de Tecnologías de Información y Comunicación (Consejo Nacional de Política Económica y Social – CONPES, 2020) sostiene que:

> La política establece las acciones para transformar y complementar el enfoque del programa Computadores para Educar (CPE), para estructurar, articular y ejecutar las apuestas institucionales necesarias con el fin de impulsar la innovación en las prácticas educativas a partir de las tecnologías digitales. Lo anterior para el desarrollo de competencias en estudiantes de educación preescolar, básica y media del sector oficial. Para lograr este objetivo, las acciones de esta política se enmarcan en cuatro pilares: (i) aumentar el acceso a las tecnologías digitales para la creación de espacios de aprendizaje innovadores; (ii) mejorar la conectividad a internet de las instituciones educativas oficiales; (iii) promover la apropiación de las tecnologías digitales en la comunidad educativa y (iv) fortalecer el monitoreo y la evaluación del uso, acceso e impacto de las tecnologías digitales en la educación. (2020, p 9)

En tal sentido, se reconoce la importancia de diseñar espacios de aprendizaje innovadores en los que se utilicen TD para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Al respecto, una estrategia que ha contribuido a este propósito es el proyecto (Ministerio de Educación Nacional de Colombia & Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, 2000), cuyo objetivo fue fomentar el uso de TD en diferentes instituciones educativas particularmente en los colegios oficiales. Este programa fue fundamental al permitir reducir brechas digitales y promover la modernización de los procesos de aprendizaje.

En este contexto, el impacto de estas políticas y estrategias enfocadas en mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través del uso de TD determinan un marco de referencia pertinente para iniciar una propuesta de investigación que permita fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con el objeto de estudio funciones cuadráticas en los estudiantes de grado undécimo de la I.E la Merced de Mosquera, con el propósito de brindar y aportar un camino para dar solución a la problemática identificada.

En este sentido, el marco curricular también respalda la importancia de este enfoque tal como lo indica Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006), al enfatizar que el estudio de concepto de función permite identificar patrones de variación entre variables, así como predecir y controlar el cambio. Asimismo, en los estándares curriculares y en los derechos básicos de aprendizaje establecen que los estudiantes deben adquirir aprendizajes referentes a función cuadrática, dado que forman parte del currículo de las I.E ver (Tabla 1).

Tabla 1

Derechos Básicos de Aprendizaje y Estándares de Competencia en Matemáticas sobre Funciones Cuadráticas

Derechos básicos del aprendizaje (DBA)	**Estándares básicos de competencias en matemáticas**
Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones $g(x) = a^n$ con n entero positivo o negativo.	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
Expresa una función cuadrática $y(x) = ax^2 + bx + c$ de distintas formas $y(x) = a(x+d)^2 + c$ o $y(x) = a(x-f)(x-g)$ y reconoce el significado de los parámetros a, c, d, e, f, g y su simetría en la gráfica.	Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
Reconoce características generales de las gráficas de las 8 funciones polinómicas observando regularidades.	Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
Reconoce los cambios generados en las gráficas de funciones cuando su expresión algebraica presenta variaciones.	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas.

Nota. Fuente de los DBA y estándares básicos de competencias de matemáticas.

Ahora bien, dentro de los planteamientos antes expuestos y en concordancia con (Ausubel, 2002), es indispensable que los estudiantes logren desarrollar aprendizajes significativos para comprender mejor los objetos de estudio. Al respecto Martínez Torres (2022), quien desarrolló su investigación en el año 2021 indica que, las tecnologías permiten mejorar la comprensión y asimilación de la función cuadrática alcanzando mejores aprendizajes, lo que llevaría a reconocer un objeto matemático con múltiples aplicaciones que surgen al modelar fenómenos cotidianos.

En este contexto, el uso de TD es relevante ya que no solo facilita la percepción conceptual, sino que también enriquece la forma en que los estudiantes interactúan con los objetos matemáticos. En relación con el objeto de estudio función cuadrática, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2004) en el documento pensamiento variacional y las tecnologías computacionales, destaca que las TD amplían las posibilidades de representar fenómenos de variación y facilitan la representación. Asimismo, se resalta la importancia de las TD en la enseñanza de conceptos funcionales. Planchart (2002) evidenció que la visualización y la modelación facilitan la adquisición del concepto de función al vincular lo algebraico con lo gráfico. Por su parte, Córdoba et al. (2013) mostraron que el uso de objetos de aprendizaje no garantiza mejores resultados si no existe un acompañamiento docente ni mediación pedagógica. Entre tanto, Martínez Torres (2022) identificó estrategias y recursos digitales, como videos, simuladores y metodologías activas, que fortalecen la reflexión y participación de los estudiantes.

En esta línea, el uso de TD facilita la representación simultánea y dinámica de objetos matemáticos, lo que contribuye a optimizar el tiempo disponible para la conceptualización y la resolución de problemas. Por ejemplo, Fernández (2024) señala que herramientas como GeoGebra permiten una representación más rápida y simultánea de conceptos matemáticos, contribuyendo a una mejor interpretación y eficiencia en el aprendizaje, de igual manera Méndez (2024) señala que el software GeoGebra permite trabajar de manera integrada con graficas, tablas y expresiones algebraicas lo que facilita la interpretación y el análisis durante el aprendizaje, además orienta la enseñanza del docente y el aprendizaje de los estudiantes a través de la práctica.

Un tercer aspecto clave es esta discusión es el diseño de tareas, particularmente aquellas mediadas por TD. En la actualidad las instituciones de educación cuentan con diversos recursos tecnológicos y software educativo, sin embargo, no siempre son utilizados de forma adecuada o pertinente; así, generar espacios y desarrollar planeaciones de tareas y actividades que contemplen el uso responsable y específico de las TD como parte fundamental del proceso de enseñanza podría ser beneficio para un aprendizaje matemático significativo por parte de los estudiantes, quienes, además contarían con recursos adicionales para ser autónomos, para investigar y autoevaluarse. En tal sentido De León (2015) considera que las tareas "juegan un papel complementario, por ende, es necesario asignar tareas de calidad y no de cantidad para evitar hostigar al estudiante, aburrirlo y estresarlo dentro de sus estudios" (p.2). Así que estas deben ser: adecuadas, graduadas, agradables, no agotadoras, ni rutinarias y fastidiosas, sino variadas y atractivas.

De otra parte, en el texto El ABC de la tarea docente: curriculum y enseñanza de (Gvirtz, 1998) se declara que:

> La actividad será más valiosa si le permite al alumno volver sobre su esfuerzo inicial, si le permite; rever, repensar, revisar y perfeccionar lo ya hecho, por contraposición a aquella actividad que sólo requiere completar algo ya dado, sin dar un lugar a la crítica, al error o al perfeccionamiento progresivo. (p.18).

Así mismo, Godino, Batanero, y Font (2003), consideran que las tareas matemáticas proporcionan un estímulo para que los estudiantes piensen sobre conceptos y procedimientos particulares, sus conexiones con otras ideas matemáticas y aplicaciones en contextos del mundo real. De acuerdo con esto, las tareas matemáticas pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas en el contexto de su utilidad lo que puede considerarse como el fortalecimiento de aprendizajes y capacidades matemáticas.

En ese sentido las tareas se convierten en un mecanismo didáctico para abordar contenidos matemáticos a través de actividades que constituyan verdaderas experiencias de aprendizaje. En concordancia con esta postura, los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia describen la necesidad de implementar herramientas de uso didáctico para el aprendizaje de las mismas, pues estas facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de instrumentos básicos desde un esfero, hasta el uso de software especializado, entre otros; además, dichas herramientas pueden contribuir al progreso del desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes y facilitar las prácticas docentes.

Por su parte, las TD se convierten en un instrumento con el cual las tareas (diseñadas con fines específicos) pueden ser: solucionadas, comprendidas, asimiladas, relacionadas, expresadas, observadas, analizadas y discutidas con los demás de una forma más eficiente, pertinente, dinámica, flexible y motivadora que con las clásicas herramientas como lápiz y papel; pues, ellas permiten a los estudiantes: interactuar, aplicar, comparar, deducir, generalizar, transferir, razonar, construir, producir conjeturas y argumentos enriqueciendo de esta manera el proceso de aprendizaje.

En esta línea, en el texto (Leung, 2015), se discute el papel de las herramientas (digitales, no digitales) en el diseño de las tareas y en la interacción de los estudiantes con la tarea como medio para resolverlas. Así, se ve la importancia del proceso de diseño de tareas y las múltiples variables que deben ser cuidadosamente analizadas cuando se involucra el uso de una herramienta (artefacto) con un fin didáctico en un proceso de enseñanza y aprendizaje. De igual manera, en Morales y Peña como se citan en Ortiz (2018) argumentan que el empleo de herramientas tecnológicas educativas para la enseñanza de matemáticas puede ser provechoso si están acompañadas de estrategias apropiadas, siendo necesario planificar tareas con tecnología que, de acuerdo con sus características, se adapten mejor a estrategias didácticas fomentando el pensamiento crítico.

De modo que, mediante la elaboración de esta investigación se pretende entre otros aspectos tener un acercamiento a algunos referentes teóricos que sustentan la importancia y pertinencia del uso de las TD en el estudio de la función cuadrática. Asimismo, estos referentes servirán como fundamento para el diseño de tareas mediadas por las TD en procesos de enseñanza y aprendizaje, con el propósito de contribuir al desarrollo de competencias relacionadas con el objeto de esta investigación.

1.3 Objetivos

Con base a las ideas expuestas en las secciones anteriores se configura un contexto a partir del cual se formular los siguientes objetivos cuyo logro se pretende perseguir en esta investigación.

1.3.1 Objetivo general

Diseñar tareas mediadas por tecnologías digitales que permitan construir significados y fortalecer los procesos de estudio asociados a algunas propiedades de una función cuadrática, en relación con su representación algebraica y geométrica.

1.3.2 Objetivos específicos.

1. Realizar una revisión teórica sobre el concepto de función cuadrática, enfatizando en algunas propiedades algebraico-analíticas estudiadas desde la representaciones algebraica y geométrica.
2. Diseñar un conjunto de tareas mediadas por TD que permitan a los estudiantes abordar procesos de reflexión y construcción conceptual acerca de propiedades de funciones cuadráticas.
3. Retomar algunos fundamentos teóricos con relación al uso de las TD para la implementación de estrategias didácticas en la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática.
4. Realizar una primera implementación de las tareas diseñadas para evaluar y plantear los ajustes necesarios para generar una propuesta más sólida.
5. Construir o adaptar un instrumento que permita identificar los propósitos de formación(aprendizaje) de cada tarea, los procesos abordados, las propiedades de las funciones cuadráticas objeto de estudio, y las herramientas asociadas a las representaciones.

1.4 Antecedentes

En adelante se presenta una descripción de investigaciones que de alguna manera se consideran afines a este trabajo. Su búsqueda fue delimitada por dos ideas fundamentales que permiten organizar la descripción de los antecedentes: de forma global, el diseño de tareas mediadas por tecnologías digitales en el marco del pensamiento variacional (PV) y de forma local, el uso de TD para el estudio de funciones cuadráticas, particularizando en sus representaciones.

En el marco del pensamiento variacional, Martínez Lopez y Gualdrón Pinto (2018), resaltan que las TD pueden considerarse como recursos que mejoran el desarrollo del pensamiento variacional, así como las competencias para fomentar procesos de visualización, argumentación, razonamiento, análisis, evaluación y retroalimentación entre otros, lo que permite alcanzar aprendizajes más significativos en los estudiantes. De igual manera Drijvers P (2012), sostiene que las TD contribuyen al desarrollo de formas avanzadas de pensamiento matemático, pues facilitan la visualización dinámica y el razonamiento variacional al permitir que los estudiantes exploren y construyan en tiempo real lo que permite mejores procesos de concentración, interacción y motivación.

Por otra parte, gran variedad de estudios ha abordado el papel de las TD en el fortalecimiento de procesos de pensamiento matemático. Aunque algunos de ellos se centran en el desarrollo del pensamiento variacional, sus aportes resultan pertinentes para esta investigación, en tanto evidencian el potencial de las TD como mediadoras del aprendizaje y la reflexión sobre los objetos matemáticos. De acuerdo con esto Cantoral (1998), hace referencia a una barrera que se presenta en los estudiantes para alcanzar niveles de desarrollo del pensamiento variacional, específicamente la carencia en el manejo de códigos y estructuras de lenguaje variacional, algo que podría resolverse parcialmente a través de herramientas de mediación, como lo pueden ser algunas de TD. Desde la perspectiva de Villa Ochoa y Ruiz Vahos (2010), el uso de TD, especialmente el uso de software especializado promueve la confrontación de ideas, conjeturas y razonamientos alrededor de un objeto de estudio.

De otra pate los autores enfatizan en la posibilidad de incentivar y fomentar la praxis alrededor de un objeto matemático mediante el uso de recursos digitales; Tejera (2021) y Báez et al. (2017), entienden que el desarrollo del pensamiento variacional surge como producto de la práctica y la ejecución constante de tareas, secuencias o unidades didácticas, en las que particularmente se usan TD y que, de manera progresiva, van generando nuevas ideas de tipo variacional en los estudiantes. A su vez, Fajardo (2023) plantean que una forma de fomentar y desarrollar el pensamiento variacional es mediante el diseño de intervenciones didácticas mediadas por tecnologías digitales y basadas en un enfoque constructivista que parte de las habilidades de pensamiento matemático del estudiante.

Como se ha señalado previamente, los investigadores antes mencionados destacan la importancia de abordar y problematizar el uso de TD, softwares educativos especializados, el lenguaje matemático variacional, el trabajo interactivo y el diseño de tareas, como elementos estructurales a la hora de generar intervenciones educativas que promuevan en los estudiantes el desarrollo de capacidades para aplicar y fortalecer el pensamiento variacional en la solución de problemas matemáticos.

Particularmente, en relación con la función cuadrática, un objeto de estudio dentro del pensamiento variacional, existen varias investigaciones en las que se resaltan diferentes aspectos a tener en cuenta en el estudio de tal objeto y algunos puntos de vista sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que se usan TD.

Las investigaciones consultadas se pueden organizar en tres categorías: Por un lado, están las que proponen intervenciones didácticas (dadas por tareas, secuencias didácticas, diseño de ambientes digitales, entre otros) en las que se usan TD y se aprovechan sus bondades para fortalecer procesos de la actividad matemática general (como visualización, conjeturación, argumentación) en el marco del estudio de propiedades de una función cuadrática y sus representaciones. En una segunda categoría se inscriben las investigaciones en las que se utilizan TD para estudiar procesos de modelación de situaciones con funciones cuadráticas y en utilizar información de la función para inferir asuntos de la situación. Finalmente, una tercera categoría la conforman investigaciones en las que se proponen marcos de referencia y reflexiones para que los docentes utilicen TD de una forma responsable, para estudiar asuntos relacionados con funciones cuadráticas en un ambiente educativo escolar.

De manera específica, en la primera categoría se encuentran trabajos como el de Opazo (2014), quienes proponen una situación de aprendizaje mediante el uso de TD (GeoGebra) para enseñar a los estudiantes de nivel medio superior, cómo la variación de parámetros de una función cuadrática afecta la representación gráfica. De forma puntual, ellos proponen que luego del proceso desarrollado con las TD, los estudiantes logren desarrollar competencias para poder generar un bosquejo, sin usar TD, de una función cuadrática dada a partir de su representación algebraica.

Rivera (2009) elaboró tareas que contribuyen a que sus estudiantes realizarán la conversión de diferentes representaciones de una función cuadrática con el uso de TD (Cabri-Geometre II), identificaran algunas relaciones entre una función cuadrática y el concepto de parábola, desarrollaran habilidades para construir la representación gráfica de una función cuadrática e identificaran si un conjunto de pares de números correspondía a una función cuadrática específica. En su trabajo se resaltan las actividades de traducción entre el lenguaje verbal, gráfico, tabular y algebraico y su interés por que los estudiantes descubrieran patrones, formulan hipótesis, realizarán representaciones gráficas, manipularon objetos algebraicos, resolvieran problemas, etc.

Por su parte, Quiñones Ortiz (2017) diseñó, aplicó y analizó una secuencia didáctica con la que buscaba que los estudiantes de grado noveno construyeran un concepto de función cuadrática partiendo del estudio de la articulación de diferentes representaciones de esta. En el proceso de diseño el autor empleó TD para la elaboración de la secuencia y en algunos casos para presentarla a los estudiantes a través del computador, además, el autor se centró en el análisis de las producciones en los procesos realizados por los estudiantes, planteó la construcción de tablas con posibles respuestas que podrían realizar los estudiantes en la solución de las tareas propuestas, por ejemplo, al reconocer algunas características de la función cuadrática.

Por otro lado, Flores (2014) afirma que el uso de ambientes de geometría dinámica como herramienta de enseñanza, permite a los estudiantes de primer ciclo verificar y validar sus conjeturas sobre características y propiedades de las funciones cuadráticas. En este estudio, el autor diseña secuencias de actividades que involucran la traslación horizontal y vertical de una función cuadrática. Él concluye que el uso de tecnología dinámica como GeoGebra tiene ventajas en la enseñanza, ya que permite a los estudiantes explorar propiedades matemáticas de manera interactiva y dinámica, y a los profesores validar en los estudiantes sus conocimientos matemáticos.

Asimismo, Suárez (2022) y Román (2022) resaltan la importancia de implementar TD (GeoGebra) como estrategia didáctica en la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, en particular, para mejorar el desarrollo de competencias en la solución e interpretación de problemas que involucran tales funciones. En las actividades propuestas se incluyen ejercicios para generar gráficas y problemas que llevan al estudio de ecuaciones polinómicas de segundo grado y la función cuadrática. Los investigadores determinaron que los estudiantes aprenden a identificar las características de la función cuadrática haciendo uso de comandos que tienen las TD, además concluyen que las plataformas digitales educativas han generado en la educación una transformación en las prácticas pedagógicas de los docentes brindando recursos para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, facilitando la comprensión (entender) de las características de la función cuadrática y promoviendo el desarrollo de competencias en la resolución e interpretación de problemas matemáticos.

De la Cruz (2015), enfoca su investigación en la importancia de la construcción y resignificación de la función cuadrática en una situación de movimiento a través del uso de tecnología digital (sensores de movimiento). Destacan la necesidad de integrar los ambientes numérico, gráfico y algebraico para ayudar a los estudiantes a construir argumentos y significados sobre conceptos relacionados con el crecimiento cuadrático. Se proponen el diseño de secuencias didácticas que incluyen identificar variables, representar tablas usando expresiones algebraicas, y el uso de TD para construir diferentes gráficas de la función cuadrática, permitiendo a los estudiantes visualizar cómo cambia la gráfica de la función al modificar sus parámetros.

Hernández (2013) propone ejercicios que ilustran las ventajas que ofrece el uso de TD (GeoGebra), para profundizar el estudio de funciones cuadráticas. En su diseño tiene en cuenta los conocimientos previos y potencialidades del grupo de estudiantes, a quien va dirigida la propuesta, con vistas a promover juicios y razonamientos; centra la atención en aspectos procedimentales, la utilización de conceptos esenciales y las posibilidades de obtener información por diferentes vías, entre ellas la experimentación en GeoGebra.

En la segunda categoría (procesos de modelación), se encuentra la investigación de Huapaya (2012), quien diseñó experimentos de enseñanza apoyados por TD para que los estudiantes de quinto año de bachillerato aprendieran funciones cuadráticas y su relación con aspectos de la vida real. Estos experimentos se llevaron a cabo utilizando TD como Excel, Funcionswin32 y simulaciones de modelación. El autor considera que la modelación es esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que sirve como un puente entre la experiencia cotidiana del estudiante y los conceptos matemáticos. Este estudio demostró que el uso de experimentos de enseñanza y la modelación de situaciones problema pueden facilitar el aprendizaje de las funciones cuadráticas y contribuir al desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Díaz Quezada y Flores del Rio (2022) elaboraron y aplicaron una prueba de resolución de problemas con respuesta abierta, enfocada en la función cuadrática como objeto de estudio y como herramienta de modelación en situaciones con contextos semi-reales y reales. Los autores evidencian en los estudiantes un mayor rendimiento académico en problemas rutinarios de contexto puramente matemático y de contexto fantasioso. Sin embargo, presentan dificultades en la resolución de problemas no rutinarios, es decir, aquellos en los que no se conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, así mismo cuando se les presenta la oportunidad de trabajar con la interpretación de la función cuadrática como un objeto matemático, los estudiantes suelen recurrir a procesos algebraicos y memorísticos, lo que limita su capacidad para resolver problemas de manera efectiva, puesto que, si bien los estudiantes demuestran conocimiento de aplicación de fórmulas, no logran comprender que existe un único punto máximo o mínimo de este objeto matemático, que se asocia a los fenómenos de cambio.

Finalmente, en la tercera categoría está Anato (2022), quien caracteriza algunas estrategias metodológicas utilizadas por profesores de matemáticas para la enseñanza de la función cuadrática con el uso TD. Dichas metodologías son analizadas a partir de categorías generales que evalúan aspectos relacionados con la enseñanza de la función cuadrática mediante el uso de TD, a saber: estrategias metodológicas, resultados obtenidos, dificultades que emergen, software matemático empleado, beneficios del software matemático, función cuadrática y GeoGebra. En general, dichas categorías tienen como propósito evaluar, entre otras cosas, los resultados obtenidos con el uso de dichas metodologías; reconocer las mayores dificultades manifiestas en los estudiantes en los procesos de aprendizaje; una previsión de los tipos de software usado en la enseñanza de la función cuadrática y los beneficios de tales TD para la enseñanza y aprendizaje de función cuadrática.

Martínez Torres (2022) centró su investigación en identificar qué estrategias y recursos digitales usan los docentes para la enseñanza de la función cuadrática y propuso categorías de los diferentes tipos de recursos digitales que usan los docentes para cada momento de la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática. El autor recolectó información con base en tres categorías que son: Tecnología y educación, didáctica de la matemática y motivación aprendizaje mediante las TIC; estas categorías le permitieron generar una aproximación al desarrollo de recursos didácticos mediante TD que motiven a los estudiantes hacia el aprendizaje de la función cuadrática en la educación básica superior. Además, propuso el diseño de un ambiente virtual usando la web, videos en filmora y Powtoon, actividades en Scratch, Genially para la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática. Así mismo, estos programas pueden ser considerados agentes que incentivan y estimulan la creatividad en los docentes en sus prácticas de enseñanza.

Es evidente que las investigaciones presentadas muestran la necesidad de fomentar la identificación y uso de las representaciones de funciones cuadráticas en la solución de problemas matemáticos integradas con las TD, para ampliar competencias matemáticas en los estudiantes. Además, los antecedentes mencionados anteriormente han proporcionado una base sólida para comprender el contexto y la relevancia del tema de investigación. Sin embargo, se considera que hace falta más investigación sobre la forma en que los estudiantes interactúan con las TD para lograr un aprendizaje significativo sobre funciones cuadráticas, en particular en la comprensión de relaciones entre características de tales funciones a partir de sus representaciones, como la relación entre el coeficiente principal en la expresión algebraica de la función y la noción geométrica del lado recto en la parábola asociada. Esta brecha en la literatura resalta la pertinencia del presente estudio, el cual busca diseñar tareas mediadas por TD que favorezcan la construcción activa de estos conceptos por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 2

2. Metodología

En este capítulo se detalla el marco metodológico adoptado para el desarrollo del trabajo y está estructurado de manera tal que el lector pueda identificar los enfoques y técnicas empleadas para la recolección, análisis e interpretación de los datos, así como las justificaciones detrás de estas elecciones metodológicas que tienen como objeto principal diseñar tareas mediadas por TD para que los estudiantes de grado undécimo fortalezcan o desarrollen competencias en la identificación y caracterización de propiedades algebraico-analíticas de funciones cuadráticas, a partir de sus representaciones algebraicas y geométricas.

2.1 Enfoque y aproximación investigativa

Teniendo en cuenta los propósitos de esta investigación, se adopta un enfoque metodológico de tipo *empírico-analítico* y una aproximación interpretativa como referentes que enmarcan su desarrollo. Puntualmente, el enfoque *empírico analítico* parte desde la recolección y análisis de datos cuantificables, procurando establecer relaciones causales y generalizaciones que permitan interpretar fenómenos educativos (Cohen, 2007). Esta investigación lo retoma desde una perspectiva cualitativa, orientada en observación rigurosa y al análisis interpretativo de las producciones realizadas por los estudiantes. Asimismo, se considera que el enfoque es el adecuado para abordar el diseño y análisis de tareas mediadas por TD, ya que permite medir de manera objetiva el impacto de estas herramientas en el desarrollo de competencias algebraico-analíticas en los estudiantes de grado undécimo. Según Cohen (2007), "el enfoque empírico-analítico se caracteriza por la búsqueda de relaciones causales a través de la observación sistemática y controlada de variables" (p. 53). Siendo que es un enfoque riguroso y ordenado con los datos, esta investigación lo interpreta desde la identificación de las posibles relaciones entre las acciones de los estudiantes, los artefactos y por supuesto los objetos matemáticos involucrados.

En este contexto, el uso de TD puede ser visto como una variable independiente, cuyo efecto sobre las competencias matemáticas del estudiante se puede analizar. Por su parte, la aproximación metodológica *interpretativa* permite comprender cómo los estudiantes interactúan con las tareas mediadas por TD como actividades de aprendizaje que incorporan recursos o herramientas digitales y cómo estas influyen en su proceso de aprendizaje. Esta aproximación se enfoca en la interpretación de las experiencias que el estudiante tiene a través de las cuales surgen los significados para los objetos matemáticos, brindando una visión más profunda del contexto educativo. Como señala Martínez (2012), "la metodología interpretativa busca comprender los fenómenos educativos desde la perspectiva de los sujetos involucrados, analizando sus percepciones, interpretaciones y significados" (p. 78). Es así como el modelo empírico analítico y la aproximación metodológica interpretativa propuestas en el desarrollo de esta investigación se consideran determinantes para evaluar cómo los estudiantes perciben las tareas y utilizan las TD en el aprendizaje, particularmente, de funciones cuadráticas, de los significados asociados al objeto y sus propiedades a partir del trabajo con diferentes representaciones. Al respecto, Álvarez (2010), asegura que "las tareas bien diseñadas y contextualizadas son fundamentales para el desarrollo de habilidades cognitivas y la consolidación de aprendizajes significativos" (p. 45).

2.2 Estrategia investigativa: experimento de enseñanza

Como estrategia investigativa para guiar las etapas de esta investigación, desde el diseño hasta la implementación de las tareas mediadas por TD y su respectivo ajuste, se asume la propuesta teórica denominada *Experimento de enseñanza*. Esta se considera una de las estrategias más robusta para el diseño de propuestas de aprendizaje en matemáticas, puesto que permite observar y analizar de manera sistemática cómo los estudiantes abordan las tareas propuestas, cómo se da la interacción con las TD, y cómo a partir de la implementación se puede realizar una mejora continua de las mismas. Según Cobb P. C. (2003), los experimentos de enseñanza, además, son una estrategia que contribuye al desarrollo de teorías educativas y prácticas pedagógicas basadas en evidencias empíricas. Por su parte Steffe, Thompson y Von Glasersfeld (2012) afirman que el experimento de enseñanza es una técnica diseñada para comprender el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes en un periodo de tiempo breve.

Romberg, (1992) sugiere que el diseño investigativo debe ser un proceso cíclico en el que las intervenciones educativas se desarrollen, prueben y refinen de manera continua, basándose en la evidencia empírica obtenida, aplicando este modelo se diseñarán tareas que serán iterativamente mejoradas a partir de la retroalimentación obtenida en cada ciclo, además el modelo se enfoca en la creación y evaluación de intervenciones educativas basadas en la investigación.

El experimento de enseñanza se desarrolla a través de tres fases, que se repiten de acuerdo con la cantidad de intervenciones de aula que el docente-investigador considere necesarias. Estas fases se denominan: la preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y el análisis retrospectivo del experimento. Cobb y Gravemeijer (2008) citados en Molina et. al (2011). Ver Figura 4.

A continuación, se describe en qué consiste cada fase:

1. ***Preparación del experimento***: En esta fase, se establece el diseño del experimento de enseñanza. definiendo sus objetivos, alcances y condiciones de aplicación. Se organizan los recursos necesarios y se determinan los criterios que guiarán su desarrollo. Según Cobb y Gravemeijer (2008), la preparación cuidadosa del experimento de enseñanza es fundamental para establecer un marco sólido que oriente el proceso de investigación.

2. ***Experimentación para promover el aprendizaje:*** Durante la implementación, se llevarán a cabo intervenciones en el aula donde los estudiantes interactuarán con las tareas digitales, momento en que ocurren las intervenciones en el aula, se recogen datos, se analizan y se reformulan las tareas, con el objetivo de lograr que los estudiantes construyan conocimiento frente al objeto de investigación. En esta fase se darán las intervenciones que incluye iteraciones sucesivas del ciclo de tres fases:

    1) **Diseño y formulación de hipótesis**: Se diseñarán tareas y se formularán hipótesis sobre su efectividad en promover el aprendizaje. El diseño interactivo permite

ajustar las tareas de acuerdo con las necesidades de los estudiantes y las observaciones del aula (Cobb & Gravemeijer, 2008).

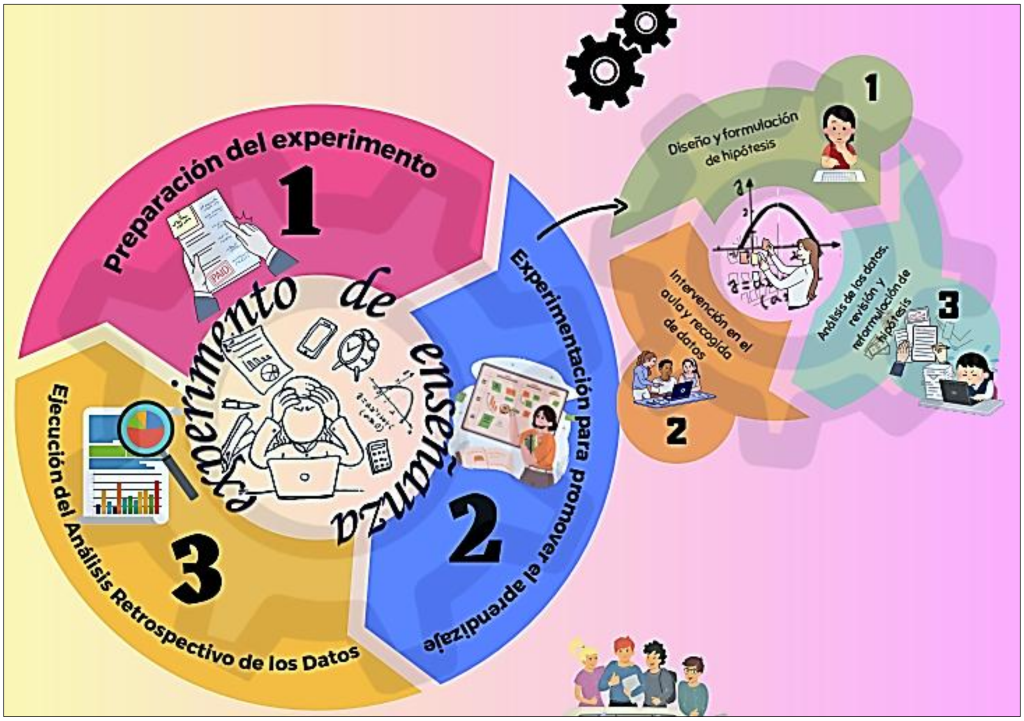
2) **Intervención en el aula y recogida de datos:** Las tareas se implementarán en el aula, y se recogerán datos a través de observaciones, cuestionarios y análisis de resultados. La intervención en el aula proporciona datos valiosos sobre la efectividad de las tareas y las hipótesis formuladas (Cobb & Gravemeijer, 2008)

3) **Análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis:** Los datos recogidos en la primera intervención en el aula se someterán a una revisión y evaluación para determinar si se cumple o no la hipótesis inicial formulada en esta fase de la investigación siendo el principal insumo para evaluar el impacto de las tareas y establecer la necesidad o no de reformular la hipótesis, modificar o mejorar la propuesta del diseño de las tareas implementadas. De acuerdo con lo planteado por Cobb y Gravemeijer (2008), el análisis permite ajustar y mejorar continuamente las hipótesis y las tareas a partir de la evidencia, basándose en datos empíricos obtenidos en una implementación.

3. ***Ejecución del análisis retrospectivo de los datos:*** esta última fase del diseño de experimento de enseñanza implica el análisis detallado de todos los datos recogidos durante las intervenciones incluyendo la reformulación de la implementación del diseño de tareas si fuera necesario en esta investigación. Este análisis retrospectivo ayudará a validar la hipótesis y entender en profundidad los procesos de aprendizaje. Es fundamental observar el alcance de la implementación para entender los alcances de las intervenciones y mejorar o fortalecer la teoría educativa (Cobb & Gravemeijer, 2008).

Figura 4

Fases del ciclo del experimento de enseñanza



Nota. Fuente de elaboración propia del autor con base en investigaciones de Molina et al. (2011), Cobb y Gravemeijer (2008).

En el desarrollo de cada una de las fases el docente tomará el rol de docente investigador, por lo tanto, promoverá el desarrollo de conocimiento a través de la solución de una secuencia de tareas que serán dirigidas a los estudiantes.

De acuerdo con lo anterior, en esta investigación se pone en evidencia la necesidad de generar tareas ordenadas e intencionadas, implementadas en un espacio adaptado a las condiciones del contexto en el que el estudiante ponga en práctica el uso de las TD en sus procesos de enseñanza- aprendizaje. Particularmente, en esta investigación, se realizan las siguientes actividades en cada fase, teniendo en cuenta que esta investigación fue motivada por observaciones desarrolladas en la I.E la Merced con estudiantes de grado undécimo donde se tenía planeada una implementación con los grupos 1005 y 1003 de la I.E en cuestión, debido a las dinámicas laborales, la investigada tuvo que cambiar de institución y modificar el alcance de la implementación trabajando únicamente con 6 estudiantes de grado undécimo de la I.E La Armonía. De esta forma, el ciclo de investigación enfatizará en el diseño de las tareas, el análisis de su implementación en el grupo de control con miras a mejorar la propuesta para fortalecer y caracterizar algunas propiedades (algebraico-analíticas) de funciones cuadráticas, a partir de sus representaciones algebraicas y geométricas. A continuación, se describe lo que se desarrollará en cada fase teniendo en cuenta el propósito de la investigación, el objeto matemático de estudio y la mediación lograda con TD.

1. ***Fase 1*. *Preparación del experimento:*** para el diseño de la propuesta de tareas, en primer lugar, se consolida la construcción de un marco de referencia en el que se incluye un marco matemático que permita identificar asuntos problemáticos o de interés en relación con el objeto de estudio funciones cuadráticas, se aborda la caracterización de las propiedades desde un punto de vista algebraico y geométrico en el que se evidencian procesos asociados a la caracterización de las propiedades de las funciones cuadráticas. Además, se incluye un marco didáctico en el que se referencian elementos relacionados con la relación TD y educación matemática, el diseño de tareas, elementos de la teoría de la Génesis Instrumental, para identificar los elementos que darán forma a las tareas mediadas por TD. Esto se puede observar en el Capítulo 3.

   En una segunda etapa en esta fase de diseño, con base en el marco de referencia descrito, se expone la propuesta de tareas construidas empleando TD como un mecanismo de mediación. Con base en el marco de referencia dado para la génesis instrumental y en la propuesta de tareas, se establecen los esquemas de uso que se suponen para el uso de los artefactos; elementos que serán objeto de análisis en las producciones de los estudiantes, asimismo para cada tarea se incluye la descripción de la tarea, un análisis a priori de posibles resultados y algunas conclusiones sobre el propósito de cada tarea. Esto se encuentra en el Capítulo 4.

2. ***Fase 2. Experimentación para promover el aprendizaje:*** La implementación de las tareas diseñadas seguirá un proceso organizado; que inicia con la selección de los participantes. Luego, se aplicarán las tareas en un entorno mediado por tecnologías digitales y se recopilarán datos a través de observaciones y registros de interacciones. Posteriormente, se analizarán los resultados obtenidos para identificar patrones en el uso de herramientas digitales, revisar el diseño de las propias tareas y su influencia en la construcción del conocimiento matemático del objeto de estudio.

En esta segunda fase del diseño de enseñanza se tendrá en cuenta el desarrollo de un ciclo de tres fases, específicamente se considera:

1) **El diseño y la formulación de hipótesis:** En esta fase se propone un conjunto de cuatro tareas mediadas por TD basado en el marco de referencia, enfocándose en el estudio de la propiedad de la longitud del lado recto de la representación gráfica de una función cuadrática y su relación con el coeficiente principal de la expresión algebraica correspondiente. A priori, bajo el propósito del trabajo de grado, se tiene la siguiente hipótesis que será perfilada más adelante: El diseño e implementación de tareas mediadas por TD, fortalece la construcción de significados y promueve la procesos de estudio sobre algunas propiedades de una función cuadrática asociadas a sus representaciones algebraica y geométrica.

2) **La intervención en el aula y recogida de datos:** En esta fase, se implementarán las tareas diseñadas con estudiantes de grado undécimo en un entorno mediado por TD. Durante la intervención, se registrarán las interacciones de los estudiantes con las tareas, así como sus procesos de resolución. La recopilación de datos se realizará a través de observaciones directas, transcripciones de grabaciones (audio–video), la recolección de las elaboraciones escritas desarrolladas por los estudiantes producto del desarrollo de las tareas. La información recolectada permitirá analizar cómo las tareas diseñadas se pueden adaptar o mejorar para garantizar la manipulación de los esquemas de uso de los artefactos, la construcción de significados y el uso de objetos matemáticos con relación de algunas propiedades algebraico-analíticas de la función cuadrática reconociendo el papel que desempeña el uso de TD en la matemática. En esta fase además se desarrolla un análisis a priori de la implementación de las tareas.

3) **Análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis:** realizada la propuesta de tareas diseñadas se procede al análisis de datos y la reformulación de las tareas si fuese necesario manteniendo su propósito inicial. Los datos obtenidos de la implementación de la propuesta de tareas buscarán verificar si estas cumplen los propósitos establecidos. De acuerdo con los resultados

obtenidos en el análisis se procederá a hacer los ajustes necesarios al diseño de las tareas si fuese necesario.

3. ***Fase 3. Ejecución del Análisis Retrospectivo de los Datos***: en esta última fase se realizará la revisión de todos los datos obtenidos en la implementación de la propuesta de tareas.
   El proceso se desarrollará con base en cuatro categorías, partiendo del marco de referencia, que contemplan los siguientes elementos: enunciado y propósito de la tarea, artefactos de la TD, objetos y procesos matemáticos transversales, los cuales se ampliarán en el capítulo 6. Finalmente, como producto de la implementación y la recolección de datos se realizará un análisis sobre las tareas propuestas y el uso de TD como herramienta de mediación con el propósito de mejorar las tareas para establecer los esquemas de uso de los artefactos y objetos matemáticos. Esto se detallará en el capítulo 5.

CAPÍTULO 3

3. Marco de Referencia

En este capítulo se describen algunos elementos teóricos que sirven de soporte a la presente investigación, a saber: se abordan los objetos matemáticos de estudio; la función real cuadrática a partir de una revisión de su desarrollo histórico, definición formal dentro de un conjunto de funciones reales de un variable, asimismo se describen las clases y propiedad que caracterizan a las funciones cuadráticas.

Por otro lado, se desarrollan algunos elementos didácticos esenciales en la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática en que se hace énfasis en el uso de las TD como mediadoras en estos procesos. Finalmente, se presentan los fundamentos teóricos de la orquestación y Génesis instrumental como elementos que orientan el diseño de las tareas mediadas por TD, puesto que permiten analizar cómo las interacciones de estudiantes y herramientas de las TD fortalecen las construcción de aprendizajes entorno a esta investigación.(propiedades algebraicas y geométricas de los objetos matemáticos en cuestión).

3.1 Funciones reales cuadráticas

En esta sección se presentan, primero, algunos elementos relacionados con el desarrollo histórico del objeto función cuadrática y, posteriormente, se abordará parte de su tratamiento matemático formal dentro del análisis real.

3.1.1 Desarrollo histórico del objeto real cuadrática

El desarrollo histórico se comprende a partir de la evolución misma del concepto de función, de manera que las nociones de variación y covariación entre magnitudes o variables representaron los primeros intentos al establecer relaciones de dependencia entre cantidades, esto marcó el punto de partida para la construcción del concepto y permitieron el surgimiento de formas específicas de función, entre ellas la función cuadrática.

El desarrollo de función cuadrática está asociado al desarrollo del concepto de función (ver infografía anexo 1). En tal sentido, se reconoce que en la literatura existen trabajos desarrollados alrededor de analizar la evolución histórica de este concepto. De manera particular, a nivel epistemológico, se resalta el trabajo de (Ruiz Higueras, 1994), quien presenta algunas etapas de ese origen y que resaltamos en el siguiente cuadro.

Se presenta a continuación la Tabla 2 que sintetiza las etapas del desarrollo de este objeto matemático, basada en el análisis epistemológico de Ruiz Higueras (1994) y complementada con hechos históricos relevantes.

Tabla 2

Etapas del desarrollo del objeto matemático.

Etapa	Idea principal	Hecho histórico	Ejemplos
Orígenes geométricos	Uso de curvas cónicas en problemas geométricos.	Trabajos de Apolonio sobre las cónicas y su clasificación.	Construcción de secciones cónicas a partir de la intersección de un cono con un plano.
Formalización algebraica	Expresión algebraica de las cónicas y funciones cuadráticas.	Descartes y Fermat desarrollan la geometría analítica a partir de los trabajos algebraicos de Viète .	Resolución de ecuaciones cuadráticas como: $x^2 + 5x + 6 = 0$ y su representación en el plano.
Enfoque analítico	Relación con coordenadas cartesianas y ecuaciones cuadráticas.	Galileo usa la parábola para describir la trayectoria de los proyectiles en su obra Discorsi e Dimostrazioni Matematicé (1638)	Determinación de la ecuación de la trayectoria de un proyectil disparado con cierto ángulo.
Aplicaciones modernas	Uso en física, economía y modelado computacional.	Aplicaciones en trayectorias parabólicas, optimización, antenas parabólicas y lentes ópticas	Diseño de antenas parabólicas con la ecuación de una parábola y el foco como punto de reflexión.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor con base en investigaciones de Ruiz Higueras (1994).

Asimismo, autores como Mesa y Villa (2008) concluyen que, a lo largo de la historia, el concepto de función y en específico la función cuadrática ha estado relacionado con la representación de fenómenos de variación y cambio. Sin embargo, en la construcción del concepto de función cuadrática se han presentado obstáculos que han tenido que ser superados. Algunos de estos obstáculos incluyen la concepción limitada del cuadrado como área, la falta de consideración de los números negativos, la dificultad de abstracción en las matemáticas. La historia muestra que el estudio de lo cuadrático ha sido una combinación de geometría euclidiana, cónicas y geometría analítica, centrándose en el movimiento como objeto de estudio.

Es evidente que la función cuadrática se ha considerado importante tanto en las matemáticas como en otras áreas del conocimiento. Por ejemplo, en física se utilizan para medir la energía cinética de un objeto y el comportamiento de un resorte en comparación con su posición inicial. En el ámbito de los Negocios, la Ingeniería, la Economía, la Administración de empresas, la Biología, la Arquitectura y la Medicina, entre otros, estas funciones permiten predecir ganancias y pérdidas en las empresas, describir movimientos con aceleración constante, determinar magnitudes relacionadas con distancias, velocidad y tiempo, y analizar la caída de los cuerpos debido a la fuerza de gravedad, como en el caso de un tiro parabólico. Además, son de gran utilidad para determinar valores máximos y mínimos, estudiar la variación de la población de una especie según esta función, y obtener información sin necesidad de recurrir a experimentos. En el campo de la Medicina, las funciones cuadráticas permiten interpretar y respaldar esta ciencia con datos numéricos, así como estudiar los efectos nutricionales de los organismos. Por ejemplo, el índice de masa corporal, el crecimiento y desarrollo de un individuo.

3.1.2 Función real cuadrática en las matemáticas

En esta sección se abordan algunos elementos matemáticos que permiten definir y caracterizar el objeto de estudio. Particularmente, se inicia con la definición de función real y una clasificación de tales funciones, para luego centrarse en funciones cuadráticas exaltando algunas de sus propiedades y procesos asociados a su descripción.

3.1.2.1 Definición de función real de una variable

Dados subconjuntos X e Y del conjunto de números reales (R) una función real (en una función) de una variable f de X en Y es una relación $f \subseteq X \times Y$ tal que si $(x, y), (x, z) \in f$, entonces $y = z$, es decir que a cada elemento de X le corresponde un único elemento de Y.

A partir de esta definición se observa la necesidad de establecer con claridad el conjunto de partida X, denominado el dominio de la función (denotado por D_f), el conjunto de llegada Y, denominado rango de la función (denotado por R_f) y la relación, es decir el conjunto de parejas $(x, y) \in f$ o denotado como es usual $f(x) = y$ con $x \in D_f$ y $y \in R_f$ (notación que cobra significado en tanto para cada elemento *x* del dominio sólo hay una imagen *y* del rango).

Ejemplos.

1. Sea X = {0,1,2} e Y = {7,8}, definimos la función f como la relación f = {(0,7), (1,7), (2,8)} Lo que generalmente se interpreta como $f(0) = 7, f(1) = 7, f(2) = 8$

   La relación g = {(1,2), (2,2), (3,1), (4,3)} es una función, su dominio es $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$ y su recorrido o el rango es $R_g = \{1, 2, 3\}$

2. Si $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, entonces la relación f = {(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)} es una función de X en *Y*, expresado con la formula o condición**.** $f(x) = x^2$ entonces $D_f = \{0, 1, 2, 3\}$ $R_f = \{0, 1, 4, 9\}$

   Sea M= {1,2,3,4,5} y $N = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, la relación g = {(1,-3), (2,-2), (3,-1), (4,0), (5,1)}. es una función definida por la fórmula $g(x) = x - 4$ en donde el dominio de g está formada por las posibles entradas para x, en este caso es $D_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $R_g = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

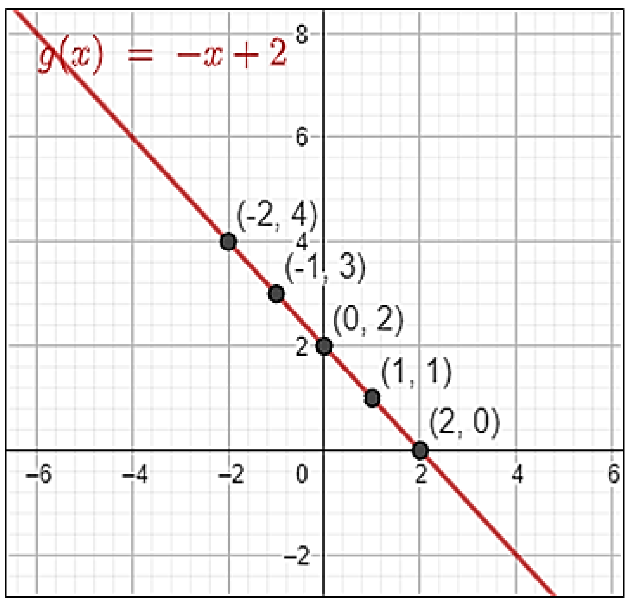
En el primer ejemplo se observa la descripción de una función a través del conjunto de parejas ordenadas que conforman la relación (lo cual se conoce como gráfica de la función); sin embargo, este no es usual o posible, sobre todo cuando se trabaja con conjuntos infinitos. En tal caso, como sucede en el segundo ejemplo, se emplean expresiones algebraicas (lo que se conoce como representación algebraica de la función) que tienen significado en una estructura algebraica determinada, como la del cuerpo de números reales. Por otro lado, se observa que para una misma expresión algebraica es posible definir diferentes funciones, ya que pueden elegirse dominios diferentes y así tener relaciones diferentes.

Por ejemplo, para $f(x) = x + 2$ En el contexto real, se pueden seleccionar diferentes dominios, como; un dominio discreto como el conjunto de números naturales, o uno continuo como el conjunto de reales en un intervalo abierto. Sin embargo, es usual que cuando se suministra una expresión algebraica en los reales, se asuma que la función que se desea definir con ella tenga como dominio el máximo conjunto de números reales sobre el que está definida tal expresión (a veces llamado dominio máximo). Finalmente, es usual que si se conoce el dominio y la fórmula que define la función, no sea necesario expresar el rango.

Una ventaja que tienen las funciones reales de una variable y que permite el uso de diferentes tipos de representación es la posibilidad de construir una representación gráfica a partir de ubicar las parejas de la función en un sistema coordenado de referencia como el cartesiano usual ver Figura 5.

Figura 5

Representación gráfica de parejas ordenadas en el plano cartesiano



Nota. Fuente de elaboración del autor.

Vale la pena resaltar que en lo anterior se han mencionado al menos tres representaciones de una función, el conjunto de parejas ordenadas (denominado gráfica), la expresión algebraica o fórmula asociada (denominada representación algebraica o analítica) y la ubicación de las parejas ordenadas en un sistema gráfico de referencia (denominada representación gráfica).

3.1.2.2 Clases de funciones

Las funciones reales de una variable pueden clasificarse de diversas maneras, dependiendo del criterio utilizado. Algunas clasificaciones se basan en el tipo de expresión algebraica que define la función si existe, otras atienden a propiedades locales como la continuidad y la concavidad, mientras que ciertas clasificaciones consideran características analíticas, como la posibilidad de representarlas mediante una serie de potencias. Sin embargo, en esta investigación se abordará la clasificación basada en el tipo de expresión utilizada en su fórmula, de modo que, esta constituye un enfoque clásico que guarda similitud con la construcción de los sistemas numéricos desde los números naturales hasta los números reales. Es importante tener claro que el dominio mencionado en cada caso corresponde al dominio de la expresión algebraica (el máximo conjunto de reales en el que está definida)

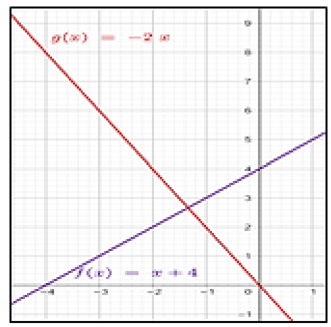
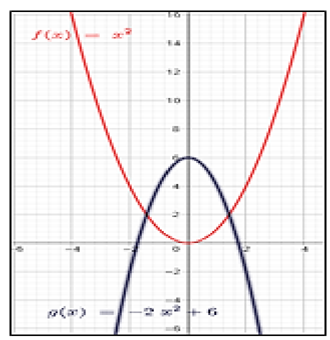
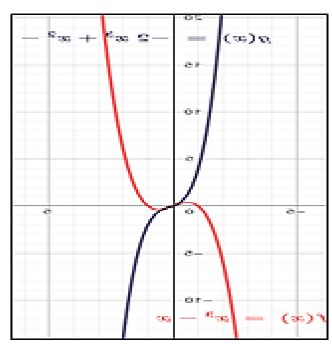
Polinómicas: Son funciones algebraicas (es decir que la relación se expresa por medio de operaciones de suma, resta, producto, cociente y raíces) que se definen a partir de un polinomio:

Una función polinómica *P con dominio X y rango Y* es la definida para todo real $x \in X$ por una fórmula de la forma $P(x) = c_0x + c_1x + \cdots + c_nx^n = \sum_{k=0}^{n} \quad c_kx^k$ con $c_0, c_1, \ldots, c_n$ números reales denominados coeficientes del polinomio, y el entero no negativo *n* es su grado (si $c_n \neq 0$). Toda función polinómica tiene como máximo dominio al conjunto de números reales y por tal razón es usual que para un polinomio determinado se hable de la función polinómica asociada como aquella que tiene dominio el conjunto de números reales; sin embargo, según lo expuesto en la sección anterior, a un polinomio dado se pueden asociar diferentes dominios y por tanto definir diferentes funciones polinómicas.

Entre las funciones polinómicas están las constantes, que están definidas a partir de polinomios de grado 0, y si, por ejemplo, el polinomio es de grado 1, 2, 3 y 4 las funciones se llaman afines, cuadráticas, cúbicas y cuarticas (o bicuadradas), respectivamente En la Tabla 3 se ilustran funciones polinómicas con dominio el conjunto de números reales.

Tabla 3

Tipos de expresiones según el grado con su representación geométrica

Grado	*Expresión algebraica*	*Nombre*	*Representación geométrica*
Cero	$f(x) = c$ para c en R	Función constante	
Uno	$f(x) = ax + b$	Función lineal si $b = 0$ y afín en otro caso	
Dos	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Funciones cuadráticas	
Tres	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Funciones cúbicas	

Nota. Fuente de elaboración del autor.

Racionales: El cociente de funciones polinómicas da paso a funciones racionales que son de la forma $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ (numerador) y $Q\ (x)$(denominador) son polinomios, pero Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio máximo de definición el conjunto $\{x \in R : Q(x) \neq 0\}$.

Ejemplo: $g(x) = \frac{x^2}{6x^2-4}$

Algebraicas: son funciones $y = f(x)$ que satisfacen una ecuación de la forma $p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y + p_0(x)y^n + p_n(x) = 0$, donde $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ son polinomios en *x*. (Spiegel, 2005)

Ejemplos: $f(x) = \sqrt{\frac{5x^4+3x^2}{2}}$, $g(x) = \frac{3x^2}{x^3+2}$

Trascendentes: Una función trascendente es aquella que no satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes sean a su vez polinomios. En otras palabras, una función trascendente es una función que trasciende al álgebra en el sentido que no puede ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas de suma, resta y extracción de raíces. En este grupo se encuentran:

Exponenciales: Una función exponencial con base $a > 0$ está definida para todo número real x por la fórmula $f(x) = a^x$ donde y $a \neq 1$. Nuevamente, el dominio máximo es el conjunto completo de reales. Además, una función exponencial natural es una función exponencial $f(x) = e^x$ con base *e*.

Ejemplo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Logarítmicas: Está definida por la expresión $f(x) = log_a x$, con $a \neq 0, 1$ y siendo a un número fijo, positivo y distinto de 1. Su dominio máximo son todos los números reales mayores que cero, puesto que en los reales un logaritmo no está definido para un número no positivo.

Ejemplo: $f(x) = log_2 x$, $g(x) = log_2(x^2 + 1)$

Trigonométricas circulares: Partiendo de una circunferencia unitaria, se definen las funciones trigonométricas circulares empleando como elementos del dominio las medidas en radianes de los ángulos subtendidos y como imágenes los números reales determinados por alguna de las razones trigonométricas básicas**.**

Por ejemplo, definimos una función $f(t) = sen\ (t)$ al asignar a cada número real *t* la ordenada *y* del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por un ángulo de medida *t* definido por el eje *x* y un rayo con origen en el punto de coordenadas (0,0) que pasa por el punto P, es decir $Sen\ (t) = y$. Las funciones coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$, de la siguiente forma*:*

$$sen(t) = y \qquad cos(t) = x \qquad tan(t) = \frac{y}{x}(x \neq 0)$$

$$csc\ (t) = \frac{1}{y}(y \neq 0) \qquad sec(\,t) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0) \qquad cot(t\,) = \frac{x}{y}(y \neq 0)$$

3.1.2.3 Función reales cuadráticas

Una función f con dominio X y rango Y con *X,Y* $\subseteq$ R, es cuadrática si para todo $x \in X, f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c\ \in\ R$ con $a \neq 0$. El gráfico de *f* está dado por el conjunto de parejas ordenadas con primera componente en *X* y segunda componente la imagen por *f* de la primera componente.

En particular estas funciones cuadráticas se conocen como polinómicas de segundo grado.

Ejemplos:

Sea A= (-1,1), B= [0,1), entonces $f(x) = x^2$ es una función cuadrática con dominio *X* y rango *Y*.

Algunas veces, al abordar una función cuadrática se registra únicamente su expresión y se describe el dominio; sin embargo, suele omitirse el rango ya que este puede determinarse a partir de procesos algebraicos sobre la expresión; es común que en ocasiones para referirse a una función cuadrática únicamente se presenta la fórmula sin definir explícitamente el dominio como se ha indicado, asumiendo así implícitamente el dominio máximo.

Ejemplos:

1. $f(x) = 2x^2 + 9x - 7, \quad -1 \leq x \leq 8$

2. $g(x) = -x^2 + x, \quad$ -1$\leq x \leq 3$

3. $h(x) = 4x^2 + 6$

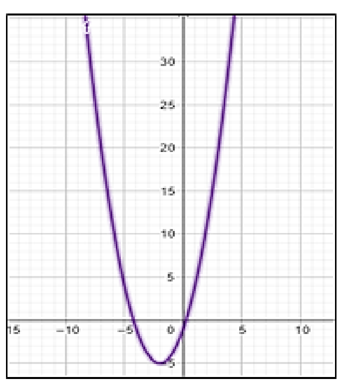
4. $j(x) = -5x^2$

En los ítems 1 y 2 del ejemplo de la expresión algebraica presentan dominio explícito, que no corresponden a todos reales. En tanto, en los ítems 3 y 4 se da la expresión algebraica y no se explícita el dominio, por lo que hablamos de tener como dominio implícito el conjunto de todos los números reales.

La representación gráfica en un sistema cartesiano usual de una función cuadrática se corresponde con la cónica llamada parábola (Figura 6) o con parte de ella (un segmento de parábola) si el dominio que se trabaja no es todo el conjunto de números reales. Este objeto geométrico se define como el conjunto de puntos de un plano cuya distancia a un punto llamado foco (fijo) es igual a la distancia a una recta llamada directriz (fija).

Figura 6

Representación gráfica de una función cuadrática

La gráfica
$Gf = \{(x, y) \in R^2 : f(x) = ax^2 + bx + c\}$
Una representación gráfica


Para encontrar el rango de una función cuadrática dada por la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, se puede hallar el vértice *(h, k)* de la parábola asociada, tener en cuenta el signo del coeficiente principal y abordar los siguientes casos: el rango de la función cuadrática será el intervalo [k, ∞) y si $a < 0$ el rango de la función cuadrática será el intervalo (-∞, k].

1. Si el dominio de la función son todos los reales, entonces el rango es [k, ∞), si a>0, o (-∞, k] si a<0.
2. Si el dominio de la función no es todo el conjunto de reales, sino un intervalo *(a, b)* Allí hay dos casos, si *h* pertenece *(a, b),* entonces el rango es [*k,* máx *(f(a), f(b)*)] o [min*(f(a), f(b), k*] y si h está fuera *(a, b),* entonces el rango es $[min\,(f(a), f(b)), \infty)]$ o [-∞, máx *(f(a), f(b))*]

   Ejemplo.

   $f(x) = 3x^2 - 2,\ R_f = [-2, \infty)$

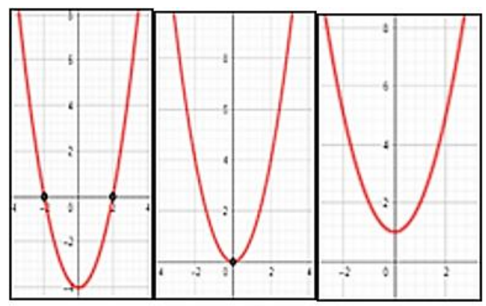
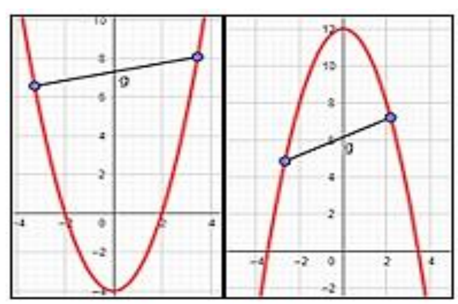
   $t(x) = -5x^2 + 1,\ R_t = (-\infty, 1]$

3.1.2.3.1 Propiedades de funciones cuadráticas

Toda propiedad de una función cuadrática (cualquier objeto matemático) tiene un significado en cada representación. Así, por ejemplo, en la Tabla 4 se presentan significados asociados a algunas propiedades de tales funciones desde una visión algebraica y una visión geométrica (trabajando en un sistema cartesiano usual). Específicamente considerando la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con dominio $A \subseteq R$

Tabla 4

Significados de propiedades de funciones cuadráticas

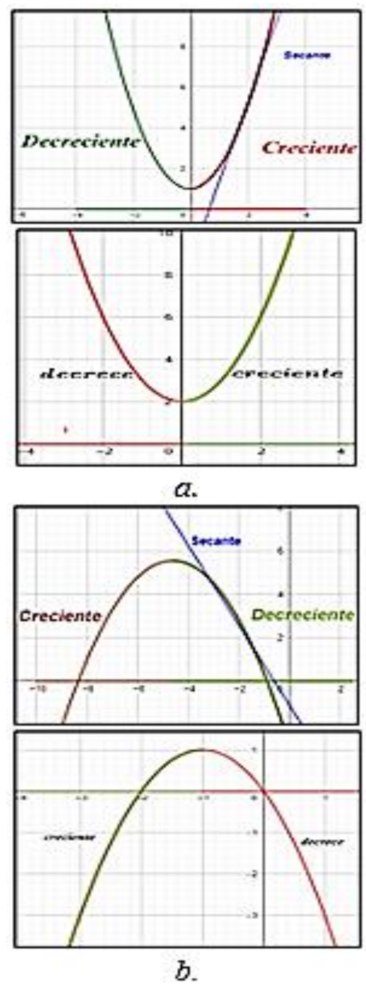
Propiedad	***Descripción algebraica***	***Descripción geométrica***
Ceros	Un número real a en A es un cero de la función $f(x)$ en A, si $f(a) = 0$ Es decir que los cero de la función $f(x)$ con dominio A son las soluciones reales en A de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Tal ecuación puede tener dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.	Los ceros de la función $f(x)$ se corresponden con las abscisas de los puntos de intersección entre la gráfica de la función y el eje x. Existen tres casos generales: La gráfica interseca al eje x en dos puntos. Figura 7.*a* La gráfica interseca al eje x en un punto. Figura 7.*b*. La gráfica no interseca al eje x. Figura 7.*c* **Figura 7** *Intercepto con el eje x*  *a.* *b.* *c.*
Concavidad	Teniendo en cuenta que una función $g(x)$ es: **- convexa** en el intervalo $[a, b]$ (o en general con un conjunto convexo), si para todo *x, y* que pertenece al intervalo se tiene que $g(tx + (1-t)y) \leq t\, g(x) + (1-t)\, g(y)$ $con\ 0 \leq t \leq 1$, y **- cóncava** en el intervalo $[a, b]$, (o en general con un conjunto convexo), si para todo *x, y* que pertenece al intervalo se tiene que $g(tx + (1-t)y) \geq t\, g(x) + (1-t)\, g(y)$ con $0 \geq t \geq 1$. Entonces, una función cuadrática es cóncava en todo su dominio A o es convexa en todo su dominio A. (suponiendo que el dominio es un conjunto convexo o unión finita de ellos). Una función cuadrática no tiene cambios de concavidad en su dominio.	Se dice que una función g es: **Convexa** Figura 8.*a* en su dominio si todo segmento cuyos extremos son dos puntos de su gráfica está por encima de la gráfica de g; y **Cóncava** en su dominio Figura 8.*b* si todo segmento cuyos extremos son dos puntos de su gráfica está por debajo de la gráfica. **Figura 8** *Tipos de concavidad*  *a.* *b.*

<table>
<tr>
<td>Monotonía</td>
<td>
Teniendo en cuenta que una función g con dominio A es:

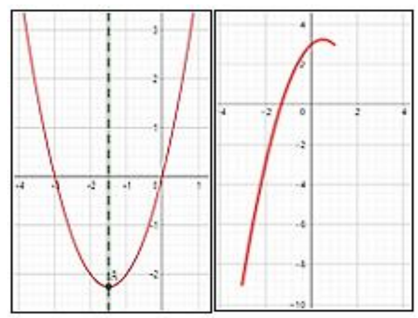
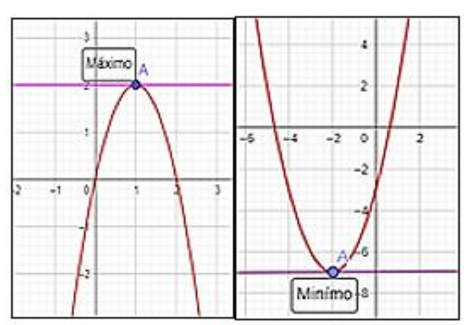
- Estrictamente decreciente (creciente) en A. Si $x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ $(g(x_1) < g(x_2)$, para todo x_1 y x_2 en A, es decir que cuando aumenta el valor de la variable independiente el valor de la dependiente disminuye (aumenta).

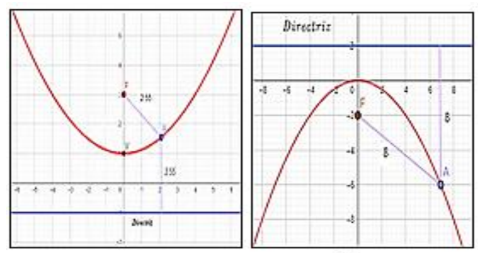
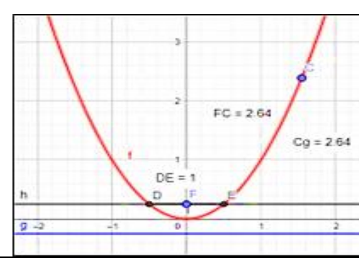
- Decreciente (creciente) en A si $x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$ $(g(x_1) \leq g(x_2))$, para todo x_1 y x_2 en A, es decir que es decreciente en A cuando al aumentar el valor de la variable independiente el valor de la dependiente no aumenta (no disminuye).

Entonces una función cuadrática f con dominio A, puede ser estrictamente decreciente, estrictamente creciente o cambiar en un único punto de la gráfica de ser estrictamente creciente a ser estrictamente decreciente o viceversa; todo depende de quién es A.
</td>
<td>
Se considera la orientación del sistema coordenado, es decir, del desplazamiento sobre el plano cartesiano desde el punto $((x_1, f(x_1))$ a $((x_2, f(x_2))$, siguiendo la orientación horizontal.
- Creciente cuando aumenta el valor de x aumenta f(x), la gráfica asciende al desplazarse de derecha a izquierda. Se produce cuando la pendiente de la recta secante entre dos puntos es positiva Figura 9.a
- Decreciente cuando aumenta el valor de x disminuye f(x) la gráfica desciende al desplazarse de izquierda a derecha. Se produce cuando la pendiente de la recta secante entre dos puntos es negativa. Figura 9.b
Figura 9

Monotonía


</td>
</tr>
</table>

Simetría	Si existe un número real h tal que para cada punto (x, y) de la gráfica de una función g el punto $(-x + h, y)$ pertenece a la gráfica, se dice que la función es simétrica con respecto a la recta $x = h$ Para el caso de la función cuadrática *f,* si *f* es simétrica bajo su dominio, entonces, *f* es simétrica con respecto a la recta $x = h$ donde h es la coordenada en x del vértice de parábola correspondiente.	La simetría de una función cuadrática se puede visualizar en su representación gráfica si existe una recta (paralela al eje y) tal que al reflejar a *f* con respecto a tal recta se obtiene la misma función. Esta recta, si existe corresponderá a la recta paralela al eje *y* que pasa por el vértice de la parábola correspondiente a la función cuadrática. En la Figura 10.*a* se muestra la representación gráfica de una función cuadrática simétrica y en la Figura 10. *b* la representación gráfica de una función cuadrática no simétrica. **Figura 10** *Representación gráfica del eje de simetría*  *a.* *b.*
Puntos óptimos	Decimos que $g(a)$ es el máximo absoluto (mínimo absoluto) de una función g en un dominio *D*, si $g(a) \geq g(x)$ $(g(a) \leq g(x))$ para todo *x* en *D*. Para el caso particular de una función cuadrática tenemos los siguientes casos: - Si el dominio *A* de *f* es todo el conjunto de números reales, entonces *f* tiene máximo o mínimo absolutos. - Si el dominio *A* de *f* es un intervalo de la forma $[a, b]$, entonces *f* tendrá un máximo y mínimo absolutos. - Si el dominio *A* de *f* es un intervalo abierto (a, b) (o un conjunto abierto), entonces *f* tendrá máximo o mínimo absoluto si la abscisa del vértice de la parábola correspondiente pertenece a *A*.	Si una recta *m* paralela al eje *x* pasa por un punto de la gráfica de *f* y el resto de la gráfica de la función está por debajo de la recta, entonces *f* tiene un máximo absoluto. Figura 11.*a* Si una recta *m* paralela al eje *x* pasa por un punto de la gráfica de *f* y el resto de la gráfica está por encima de la recta, entonces, *f* tiene mínimo absoluto. Figura 11.*b* **Figura 11** *Representación puntos óptimos*  *a* *b*

Punto y recta en el plano equidistante (foco y directriz)	Para la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con dominio A, existe un punto (a, b), llamado foco y una recta de ecuación *y=c* llamada directriz, tal que, para todo *x* en *A,* se cumple que, la distancia del punto $(x, f(x))$ al punto (a, b) es igual a la distancia de $(x, f(x))$ a la recta $y = c$, en símbolos $d\big((x, f(x)), (a, b)\big) = \lvert b - c\rvert$ es decir $\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-b)^2} = \lvert f(x) - c\rvert$ De esta ecuación se obtiene la forma canónica $(x-a)^2 = 4p(f(x) - d)$ Donde *p* es la mitad de la distancia entre el foco y la directriz.	Foco como un punto fijo y directriz como una recta fija. El foco F y la directriz d de una función cuadrática son un punto y una recta en el plano cartesiano, tal que, si se construye una circunferencia con centro en cualquier punto A de la gráfica de la función con radio AF, entonces tal circunferencia será tangente a la recta *d*. La gráfica de una función f con foco en $F = (a, b)$ y directriz $y = c$. Figura 12.*a* La gráfica de una función *f* con vértice en el origen con foco $F = (0, -2)$ y directriz $y = 2$ Figura 12.*b* **Figura 12** *Representación del foco y directriz*  *a.* *b.*
Distancia focal y Longitud del lado recto	De la ecuación canónica la distancia focal es $\lvert p\rvert$ y la longitud del lado reto es $\lvert 4p\rvert$	La distancia focal es la distancia que hay desde el foco al vértice de la parábola correspondiente. El segmento Figura 13 de la recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje, con puntos extremos de la parábola se identifica como el lado reto. **Figura 13** *Representación gráfica de distancia focal y* *longitud del lado recto* 
Continuidad	Una función g es continua en *a* si existe $g(a)$, es decir si *a* está en el dominio de g y $f(x) = f(a)$. Así, una función cuadrática *f* es continua en cada subconjunto convexo del dominio.	La representación gráfica no presenta saltos, es decir que no tiene espacios. Además, es una curva suave es decir que en cada punto de la curva hay derivada y hay recta tangente.

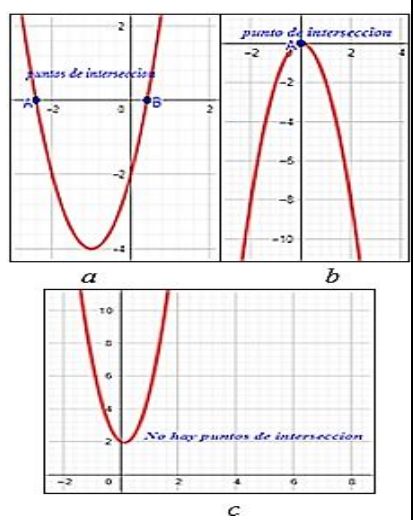
Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

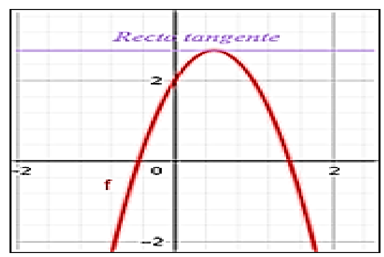
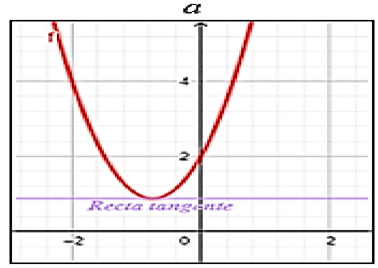
3.1.2.3.2 Procesos Asociados a la Descripción.

A continuación, se presentan de forma sintetizada algunos procesos asociados a las propiedades de la función cuadrática

Tabla 5

Procesos asociados a la descripción de funciones cuadráticas

Propiedad	Descripción algebraica	Descripción geométrica
ceros	Para encontrar los ceros de una función cuadrática *f* en su dominio *A*, es necesario resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Para ello se presentan tres métodos usuales: - **Usar la fórmula cuadrática** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Si $b^2 - 4ac > 0$, la fórmula genera dos números reales y si estos pertenecen al dominio entonces f tiene dos ceros o raíces reales distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la fórmula genera un número real y si pertenece a *A*, entonces f tiene un cero. Si $b^2 - 4ac < 0$, la función f no tiene ceros. - **Factorizar la expresión y usar Propiedad del producto cero** $AB = 0 \leftrightarrow A = 0 \ o \ B = 0$ Si $ax^2 + bx + c = 0$ Se puede expresar como el producto de dos factores de grado uno, y sus ceros pertenecen al dominio de *A*, entonces f tiene raíces reales. - **Completar el cuadrado**. De $ax^2 + bx + c$ Primero se divide el coeficiente lineal entre 2 y se eleva al cuadrado, se suma el resultado al término *c* de la expresión para obtener $\left(ax + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2 - \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right)$ posteriormente el valor que completa el cuadrado luego se agrega y se resta el término al lado derecho de la expresión original, se factoriza el trinomio cuadrado perfecto de los tres primeros términos finalmente se simplifica la expresión $(x + c)^2$en donde c representa el valor agregado.	Gráficamente, para encontrar los ceros de *f*, es suficiente con encontrar los puntos de intersección entre la función cuadrática y el eje *x*. Los ceros serán las abscisas de tales puntos. Así, Si la gráfica no corta al eje *x*, *f* no tiene ceros Figura 14 *c*. Si el vértice de la parábola correspondiente está en el eje *x*, entonces *f* tendrá un cero Figura 14 *b*. Si la parábola correspondiente corta al eje *x* en dos puntos, *f* tendrá dos ceros Figura 14 *a*. **Figura 14** *Representación geométrica de los cerros de la parábola* 

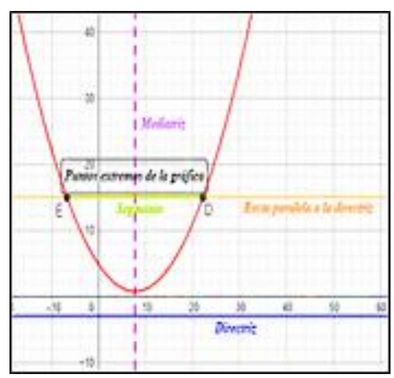
Concavidad	Para determinar la concavidad de la función f es suficiente con analizar el coeficiente de la variable cuadrática, teniendo los siguientes casos: Si $a > 0$ la función cuadrática es convexa; es decir, la función abre hacia arriba. Si $a < 0$ la función cuadrática es cóncava, es decir; la función abre hacia abajo.	Gráficamente se puede determinar la concavidad de f si existe una recta tangente tal que f está sobre la recta o bajo la recta. Entonces es **convexa,** si para toda recta tangente a la gráfica de la función los puntos de la gráfica que están en las cercanías del punto de tangencia están en el semiplano superior. Figura 15 a. Caso contrario es **cóncava,** si para toda recta tangente a la gráfica de la función los puntos de la gráfica que están en las cercanías del punto de tangencia están en el semiplano inferior. Figura 15 b. **Figura 15** *Representación geométrica de concavidad*  a  b

<table>
<tr>
<td>Monotonía</td>
<td>Se analizan los intervalos $\left(-\infty - \frac{b}{2a}\right]$; $\left[-\frac{b}{2a},\ \infty\right)$ ya que $-\frac{b}{2a}$ es la abscisa del vértice correspondiente a la parábola de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$,
si:
- Si $a < 0$ y $-\frac{b}{2a}$ pertenece al dominio de f entonces, se tendrá que la función es creciente hasta $-\frac{b}{2a}$ y será decreciente desde $-\frac{b}{2a}$
- Si $a > 0$ y $-\frac{b}{2a}$ pertenece al dominio de f entonces, se tendrá que la función es decreciente hasta $-\frac{b}{2a}$ y será creciente desde $-\frac{b}{2a}$</td>
<td>Para determinar si una función cuadrática es creciente en un intervalo, es suficiente con observar la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica en cada punto en ese intervalo. Si las pendientes son positivas en un conjunto convexo del dominio, entonces f es creciente en tal conjunto y si las pendientes son negativas en un conjunto convexo, entonces f es decreciente en tal conjunto.
También puede determinarse que la función crece si un cambio positivo en coordenadas en x se corresponde a un cambio positivo en las imágenes de las coordenadas en y; y la función decrece si un cambio positivo en coordenadas en x se corresponde a un cambio negativo en las imágenes de las coordenadas en y.</td>
</tr>
<tr>
<td>Simetría</td>
<td>Sea a y b coeficientes de una función cuadrática, estos se sustituyen en $-\frac{b}{2a}$

Si la función cuadrática es simétrica en su dominio, para encontrar la ecuación de la recta que se convierte en eje de simetría, se completa el cuadrado de la variable para determinar las coordenadas del vértice. De este modo, la recta de ecuación $x = -\frac{b}{2a}$ corresponde al eje de simetría.</td>
<td>Para construir o determinar el eje de simetría de una función cuadrática simétrica, Figura 16 es suficiente con construir una cuerda en una recta paralela a la directriz y con extremos en la gráfica y encontrar su mediatriz.
Figura 16

Representación geométrica de

simetría


</td>
</tr>
</table>

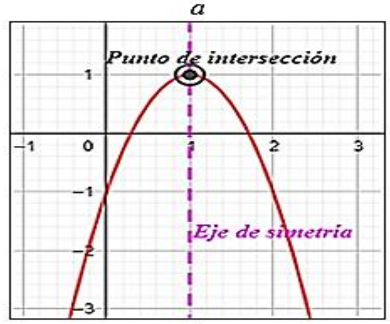
<table>
<tr>
<td>Puntos óptimos</td>
<td>Al reemplazar en $x = \left(-\frac{b}{2a}\right)$,
Si $a > 0$, el valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
Si $a < 0$, el valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Si el dominio incluye la coordenada x del vértice de la parábola correspondiente, entonces la función siempre tiene máximo o mínimo relativo.

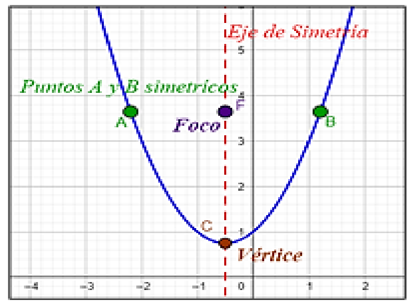
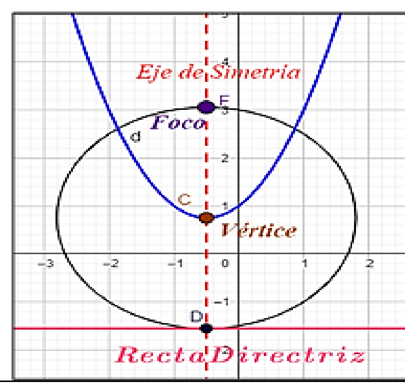
Si el dominio es un conjunto cerrado (que no incluye la coordenada x del vértice de la parábola), entonces hay que evaluar en los extremos y determinar el valor mayor y menor. Tales números serán el máximo y mínimo absolutos.

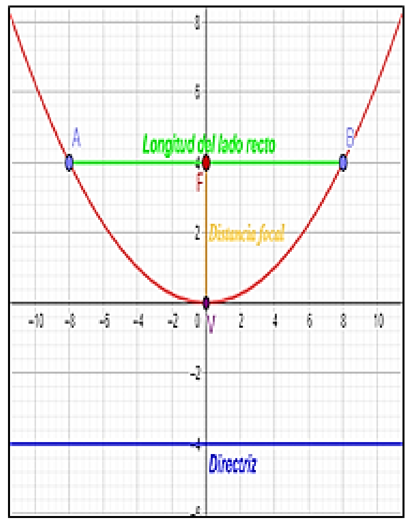
Si el dominio no es alguno de los mencionados, se requiere un análisis detallado ya que, por ejemplo, si el dominio es un intervalo abierto (que no incluye la coordenada del vértice de la parábola), entonces la función no tiene máximo o mínimo.</td>
<td>Si el vértice está en la gráfica, es decir depende del dominio; es suficiente con encontrar la intersección del eje de simetría y la parábola. Figura 17.a punto mínimo y Figura 17.b punto máximo.
Figura 17

Representación geométrica puntos óptimos

a


b</td>
</tr>
</table>

Punto y recta en el plano equidistante **Foco y directriz**	Expresando la función cuadrática en su forma canónica $(x-a)^2 = 4p(f(x)-b)$ se tiene que el foco tendrá coordenadas $(a, b+p)$ y la directriz ecuación $y = b - p$ para todo x en A, la distancia del punto $\big((x, f(x)\big)$ al punto (a, b) es igual a la distancia de $\big((x, f(x)\big)$ a la recta $y = c$, en símbolos $d\big((x, f(x)\big), (a, b)) = \lvert b - c\rvert$ Específicamente, $y = ax^2 + bx + c$ $\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ $\frac{y}{a} = (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a}) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}$ $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}$ $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$	Si un punto en la parábola es simétrico a otro punto de la misma parábola, entonces, estos puntos son simétricos con respecto al eje de simetría, por lo tanto, hay un punto medio *F* (Foco) entre los puntos simétricos y es colineal al vértice de la parábola. Ver Figura 18. **Figura 18** *Representación geométrica del foco*  Si una circunferencia con centro el vértice de una parábola con radio del vértice al Foco existe otro punto de intersección entre el eje de simetría y la circunferencia, por dicho punto pasa una recta fija llamada directriz que es perpendicular al eje de simetría (este punto es colineal a la recta Directriz) ver Figura 19. **Figura 19** *Representación geométrica recta* *directriz* 

<table>
<tr>
<td>Distancia focal y Longitud del lado recto</td>
<td>
Expresando la función f es su forma estándar $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice (a, b) se tiene que $L = |2a|$ donde L representa la longitud del lado recto. Para hallar esta longitud se iguala a cero la función f para encontrar los puntos donde la representación gráfica de la función cuadrática interseca con el eje x.
Por otro lado, utilizando la expresión canónica de la función cuadrática $(x - a)^2 = 4p(f(x) - b)$ se procede a:
- Encontrar la distancia del foco al vértice es decir la distancia focal p, para ello se procede a despejar $4p$ para obtener a p, entonces
$p = \frac{1}{4}$ cuyo valor es la distancia del foco al vértice y del vértice a la recta directriz.
- Encontrar la longitud del lado recto. Para ello se hallan los puntos extremos del segmento y se calcula la distancia, sabiendo que el foco tiene coordenadas (a, b+p) siendo b la ordenada del vértice y p la distancia focal lo que lleva al lado recto medir $4p$. También se determina hallando la intersección entre la recta $y = b + p$ y la respectiva función, para calcular la distancia de los puntos extremos del segmento y la distancia, sabemos que el foco tendrá coordenadas
$$(x - a)^2 = 4p(f(x) - b)$$
$$(x - a)^2 = 4p(b + p - b)$$
$$(x - a)^2 = 4p(p)$$
$$(x - a)^2 = 4p^2$$
$$x - a = \pm 2p$$
$$x = a \pm 2p$$
Entonces las coordenadas de los puntos extremos de lado recto serán
$A = (a - 2p, b + p)$ y
$B(a + 2p, b + p)$
Así la longitud del lado recto es:
d (A, B)=
$$\sqrt{(a + 2p - (a - 2p))^2 + (b + p - (b + p))^2}$$
$$\sqrt{(4p)^2}$$
$|(4p)|$ lado recto
</td>
<td>
Segmento o la cuerda focal que es perpendicular al eje focal, la longitud del lado recto es la distancia entre $\underline{AB}$ Si se conoce la coordenada de p entonces la intersección de la recta paralela al eje x con la parábola. Figura 20
Figura 20
Representación geométrica
distancia focal y longitud del lado
recto


</td>
</tr>
<tr>
<td>Continuidad</td>
<td colspan="2">F es continua en su dominio dado que una tal función pertenece a la familia de funciones polinomiales y todas ellas son continuas en su dominio. No hay proceso de descubrimiento algebraico o geométrico (a nivel elemental), se requiere una visión topológica en relación con nociones como abierto y entorno.</td>
</tr>
</table>

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

Lo reportado en la tabla anterior, corresponde a algunos procesos clásicos sin llegar a desmeritar la posibilidad de que existan otros.

3.2 Elementos didácticos

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin lugar a duda, se ha redireccionado teniendo en cuenta las necesidades actuales y se ha prestado más atención a la forma de enseñar por parte del docente, a las didácticas que utiliza y, por supuesto, al papel de las tareas, herramientas e instrumentos que se usan para que el aprendizaje de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes sea significativo. Es así, que surgen cuestiones como: ¿qué tipo de matemáticas debe aprender un estudiante?, ¿cómo vincular herramientas actuales (como las tecnologías digitales) para permitir un aprendizaje significativo?

En relación con la primera cuestión, diferentes investigadores como Freire (1990), Godino et al. (1994), Santos (1995) y Godino et al. (2003), han identificado una tendencia a fortalecer en el aula de clase el desarrollo de procesos asociados a las matemáticas, es decir a la necesidad de realizar actividad matemática en las clases, que lleve a los estudiantes a reflexionar sobre cómo las matemáticas son una construcción social en la que pueden participar de forma activa, más que a enfatizar en la adquisición y memorización de conceptos matemáticos atemporales, impersonales o en solamente a mecanizar algoritmos que, además, hoy en día puede realizar una máquina de manera más eficiente y eficaz. Es así, que se adopta una postura constructivista, de indagación, experimentación para el aprendizaje significativo de las matemáticas.

En tal sentido Ausubel (2002), sostiene que el aprendizaje significativo es un proceso en el cual el individuo integra y relaciona nuevos conocimientos con su estructura cognitiva ya existente. Por otro lado, destaca la importancia de generar procesos de reflexión sobre el conocimiento en los que de manera indirecta se relaciona con los procesos de visualización, conjeturación, argumentación y modelación; elementos clave en el desarrollo de los procesos matemáticos que se expondrán más adémale. Los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) reconoce estos procesos como habilidades fundamentales en el desarrollo de la alfabetización matemática y el pensamiento crítico en matemáticas, de manera que el estudiante sea competente matemáticamente, alcanzando una comprensión adecuada de los objetos matemáticos y generando herramientas para su implementación en diferentes contextos.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2003) saber matemáticas también es tener la capacidad de utilizar el lenguaje y los conceptos matemáticos, puesto que los estudiantes al confrontan sus argumentos, les contribuye a desarrollar pensamiento crítico y a construir consistentemente su aprendizaje. Del mismo modo, en el documento titulado Serie de Lineamientos Curriculares de Matemática del MED (1998) de Colombia se indica que los estudiantes deben debatir sus ideas, negociar y especular sobre posibles ejemplos y contra ejemplos que les ayude a refutar o confirmar sus ideas matemáticas.

Bajo esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas requiere de una buena preparación pedagógica por parte del docente. Fraenkel (2007) , indica que es necesario que el docente utilice una diversidad de estrategias y herramientas para la enseñanza donde involucre activamente al estudiante en su proceso de aprendizaje, teniendo como fin promover y mejorar la comprensión de los conocimientos de las matemáticas en la clase.

Por otro lado, en el mundo actual, la presencia cada vez más visible de las nuevas tecnologías en la vida de las personas genera la necesidad de adaptarlas y estudiar la forma en que estas se conviertan en herramientas e instrumentos útiles, motivadores y eficientes para el desarrollo de procesos de estudio en matemáticas. Al respecto, Barrera (2001) y Martín (2000), sostienen que las TD son herramientas que permiten generar distintas representaciones de los objetos de estudio, así como facilitar al estudiante plantear sus propias preguntas o proponer nuevos desafíos necesarios en la construcción de conocimientos matemáticos puesto que rompen con los aprendizajes basados en una educación tradicional rutinaria.

Sin embargo, es necesario reflexionar sobre la forma en que se utilizan las TD para los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ya que por un lado, para el profesor implica adaptarse a ellas para poder integrarlas en sus prácticas, diseñar ambientes, rediseñar tareas propicias para fortalecer y estimular el pensamiento y el desarrollo de procesos matemáticos; en tanto para el estudiante se generan nuevas dinámicas para explorar de formas diferentes algunas ideas, desarrollar sus habilidades en la solución de tareas, enfrentarse a desafíos en situaciones reales o semireales, y en sí aprender matemáticas.

En tal sentido, los procesos de enseñanza-aprendizaje mediados por las TD deben ser planificados teniendo en cuenta las necesidades y las características de los estudiantes, los propósitos de formación en matemáticas, la forma de concebir, estudiar y usar las matemáticas con el objetivo de fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas apropiadas para que un estudiante cuente con las herramientas para enfrentarse a problemas actuales y futuros en los que pueda usar matemáticas.

En consonancia con lo anterior, los aprendizajes que se desarrollan dentro de procesos dinámicos permiten observar y describir de forma más rápida los cambios que experimenta un objeto matemático al interactuar con él a través del uso de las TD. Sin embargo, se puede generar dependencia frente a estas herramientas, desestimar el cálculo mental y la comprensión de los conceptos matemáticos que son fundamentales. Por ejemplo, un estudiante puede olvidar el desarrollo de procesos sencillos o asumir que la manipulación de algunas representaciones es suficiente para comprender los objetos y sus relaciones. Es así como Godino, Batanero y Font (2003) priorizan la necesidad de cuestionar el tipo de tareas que los docentes deben plantear o diseñar para que los estudiantes las solucionen dependiendo de los propósitos de formación.

Particularmente, si se pretende proponer tareas mediadas por las TD, es fundamental hacer uso de teorías, estrategias y didácticas pertinentes y apropiadas, que permitan al docente orientar los procesos de enseñanza con el uso de tales herramientas, así como al estudiante, perfeccionar sus métodos, formas y mecanismos de aprender mediante su uso. Además, es importante reconocer el tipo de artefactos, herramientas e instrumentos que permitan alcanzar los objetivos propuestos, las condiciones de su uso, las limitaciones y el contexto ecológico o integrador de los procesos de estudio.

Por otro lado, entendiendo que las matemáticas están inmersas en los entornos de los estudiantes y que son útiles en diferentes situaciones, se observa la posibilidad de construir tareas relacionadas con tales entornos o situaciones para enriquecer la construcción de conceptos matemáticos. Con relación a lo anterior, en la Serie de Lineamientos Ministerio de Educación Nacional (1998), refieren la importancia de usar el contexto del estudiante como un recurso para el diseño y ejecución de tareas para el aprendizaje de las matemáticas, pues allí existen múltiples elementos y variables que pueden ser utilizados para el planteamiento de preguntas problemáticas cuyo proceso de solución genera un amplio sentido a los aprendizajes de las matemáticas.

Finalmente, los aspectos relacionados con el tipo de matemáticas que se quiere enseñar en el aula, la importancia del uso de las tecnologías digitales en dichos procesos y el uso del contexto del estudiante como generador de conocimiento, son pertinentes en relación con los propósitos de esta investigación , puesto que en conjunto, se pueden convertir en insumos para el diseño y desarrollo de didácticas para el aprendizaje de las matemáticas y en particular para el desarrollo de competencias en los estudiantes para el trabajo con funciones cuadráticas, sus propiedades y representaciones algebraicas y geométricas. A continuación, se abordarán dos aspectos relacionados al marco de referencia; la forma en qué serán utilizadas las TD y la concepción de tareas que será empleada.

3.2.1 El uso de TD en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

La diversidad y potencial del uso de las TD ha sido un soporte para avances y mejoras en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, (Francesc, 2014) describe que el uso de las TD contribuye al desarrollo del conocimiento a partir de las representaciones dinámicas, dando paso a procesos de exploración a partir de tales representaciones y permitiendo un papel activo de los estudiantes en sus procesos de aprendizaje. Por su parte, Hernández J (2008) enfatiza que al integrar el uso de las TD con visiones constructivistas del conocimiento se pueden crear diferentes experiencias para que los estudiantes aprendan de formas diferentes, permitiendo la manipulación de objetos matemáticos durante su proceso de aprendizaje y generando significados para ellos.

En concordancia, Hernández Gómez et al. (2016) reconoce el uso de las TD como apoyo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, proporciona al docente y al estudiante nuevas formas para abordar el estudio de los objetos, por ejemplo, permitiendo representaciones manipulables, en 2 y 3 dimensiones, a través de programas especializados; panorama que se ha podido evidenciar desde la incorporación de programas como Logo (en 1980) al currículo escolar hasta el uso de plataformas digitales que incluyen diferentes aplicativos diseñados para trabajar con objetos matemáticos de forma individual o colaborativa. Por otro lado, el docente debe proponer actividades, tareas o ejercicios que inviten al estudiante a pensar y desarrollar su conocimiento.

Una mirada desde la teoría constructivista de Vygotsky permite comprender la importancia que puede tener el uso de las tecnologías digitales (TD) en los procesos de aprendizaje. Desde esta perspectiva, las TD favorecen la creación de nuevas conexiones y significados, posibilitando que el estudiante elabore una comprensión mental de los objetos matemáticos a partir de procesos de interacción. En esta línea Borgobello & Monjelat (2019), destacan que, al vincular los planteamientos de Vygotsky con el uso de TD, se evidencia el papel mediador de estas herramientas en la construcción del conocimiento. Igualmente, Papert y Harel (1991), enfatiza en la construcción de conocimiento a través de la participación en actividades que pueden ser motivadoras con el uso de las TD y permitiendo lo que se denomina, según Balacheff (1996) y Armella (2002) nuevos realismos matemáticos. Bajo estas nuevas realidades, las TD se pueden convertir en herramientas y ser usadas como una máquina para la enseñanza y como instrumento para prensar (Papert S. , 1980) y (Tortós, 1997)

Bajo esta visión, particularmente hay al menos tres asuntos a tratar en relación con la incorporación de TD en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; por un lado, el propósito del uso de las TD y la forma de lograr dicho propósito; el papel del profesor en relación con la forma de utilizar TD; y el papel del estudiante en relación con las TD (centrándose en la forma de interacción y los propósitos de tal interacción). Estos asuntos son abordados desde diferentes perspectivas, entre las cuales, la teoría de Orquestación Instrumental (Trouche, 2004) pone al docente como el agente orientador que planea, organiza y diseña tareas mediadas por tecnologías digitales, facilitando la interacción entre estudiantes y TD; de esta forma, las TD, vistas en principio como artefactos, se convierten en instrumentos apropiados a través de los cuales se configuran procesos de aprendizaje generadores de nuevos conocimientos, aspectos que son pilares de la teoría de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995).

A continuación, se exponen con más detalle algunos elementos de las teorías de Orquestación y Génesis Instrumental, dos teorías que permiten un marco de referencia apropiado para desarrollar el propósito de esta investigación.

3.3 Orquestación y Génesis Instrumental

Existen teorías en didáctica de las matemáticas enfocadas en estudiar el potencial del uso de las TD en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que, por un lado, sirven como marco de referencia para que el docente identifique la forma en que va a utilizar las TD, su propósito y las acciones que va a ejecutar y, por otro lado, permiten entender/planear la forma en la que los estudiantes aprenden bajo un proceso mediado por tales TD.

Drijvers et al. (2012) y Mariotti (2006) enfatizan que el aprendizaje de los estudiantes, en un proceso educativo en el aula mediado por TD, debe ser guiado por el docente a través de una Orquestación Instrumental, bajo la cual se establece y organiza tanto el rol de los estudiantes como el papel de la TD. Formalmente, *la Orquestación Instrumental* es definida por Trouche (2004), como la organización y el uso intencional y sistemático, por parte del profesor, de los diversos artefactos (v.g. TD, esquemas, algoritmos, representaciones geométricas, algebraicas y material ostensible) disponibles en un entorno de aprendizaje. Así mismo, Orozco y Cuevas Vallejo (2021) consideran que la Orquestación Instrumental se utiliza en la enseñanza para organizar y coordinar los recursos disponibles como artefactos tecnológicos con la finalidad de orientar a los estudiantes en sus aprendizajes.

Una analogía que sirve para comprender mejor el concepto de Orquestación Instrumental se da al considerar el papel del profesor como el de un director técnico que planifica, organiza y propone estrategias para que un equipo de fútbol participe y, en la medida de lo posible, gane un partido. La labor del director técnico es dirigir las estrategias que empleará para ganar cada partido, para ello planifica los esquemas y estrategias de acuerdo con la posición de cada jugador en el equipo (los artefactos) y de las cualidades de sus jugadores y las posibles dificultades al jugar con el equipo contrario. Sin embargo, cada jugador, aunque sigue esquemas de juego planeado debe poner en práctica diferentes soluciones de manera improvisada de acuerdo con su experiencia y capacidades individuales. El juego en conjunto, organizado, planificado y dirigido garantiza obtener los mejores resultados posibles.

Drijvers et al. (2010) y, Orozco y Cuevas Vallejo (2021), se establecen los elementos fundamentales para que un docente alcance los objetivos propuestos en la enseñanza de la matemática bajo una Orquestación Instrumental, a saber: la configuración didáctica, los modos de explotación y la actuación didáctica. Sí se pretende que los estudiantes construyan sus propios conocimientos bajo la guía del docente, es importante que el docente seleccione los materiales o artefactos apropiados para alcanzar los objetivos propuestos a través de un proceso de enseñanza aprendizaje y que determine las condiciones bajo las cuales los artefactos serán entregados al estudiante. Según Radford (2003), es claro que dichos elementos permiten ver las acciones del docente como una forma de actuación didáctica (actividad de hacer matemática) que involucra aspectos esperados e inesperados en los que se tiene en cuenta los aportes de los estudiantes. La Figura 21 se describen los tres elementos mencionados y algunos ejemplos de tipos de Orquestación.

Figura 21

Elementos de una Orquestación Instrumental y ejemplos de Orquestaciones

Nota. Fuente de creación propia en canva basado en Drivers et. al (2010) y Orozco y Cuevas Vallejo. (2021).

De otra parte, Rabardel (1995) reconoce que la interacción permanente, orientada y programada entre el estudiante y los artefactos, como la TD, convierte a estos en instrumentos de aprendizaje, lo cual denomina *Génesis Instrumental*. Esta interacción es generadora de cambios en los aprendizajes y desarrollo de competencias para los estudiantes, además de fortalecer sus habilidades en relación con el uso de TD, permitiendo que se enfrenten a ideas matemáticas. Asimismo, se habitúen a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas (Rodríguez & Ansola Hazday, 2010).

Bajo esta perspectiva entenderemos mediación o mecanismo de mediación con TD en educación matemática como el proceso por el medio del cual se utilizan artefactos tecnológicos bajo Orquestación Instrumental con el propósito de promover una Génesis Instrumental en relación con un objeto matemático en un contexto determinado.

En el contexto de la educación mediada por TD, los *esquemas de utilización* juegan un papel fundamental en la interacción entre el estudiante y los artefactos tecnológicos. Según Rabardel (1995), los esquemas de utilización son procedimientos esquemáticos de acciones que los individuos desarrollan al interactuar con un artefacto para alcanzar un objetivo específico. Estos esquemas no sólo guían el uso del artefacto, sino que también permiten que los estudiantes lo integren en sus procesos de aprendizaje, en este sentido, Leung et al. (2006), citados en Perry et al. (2013) coinciden en que los esquemas de utilización emergen de la interacción repetida con TD, lo que permite a los estudiantes estructurar acciones y resolver problemas de manera efectiva al adaptar las funcionalidades del artefacto a sus necesidades.

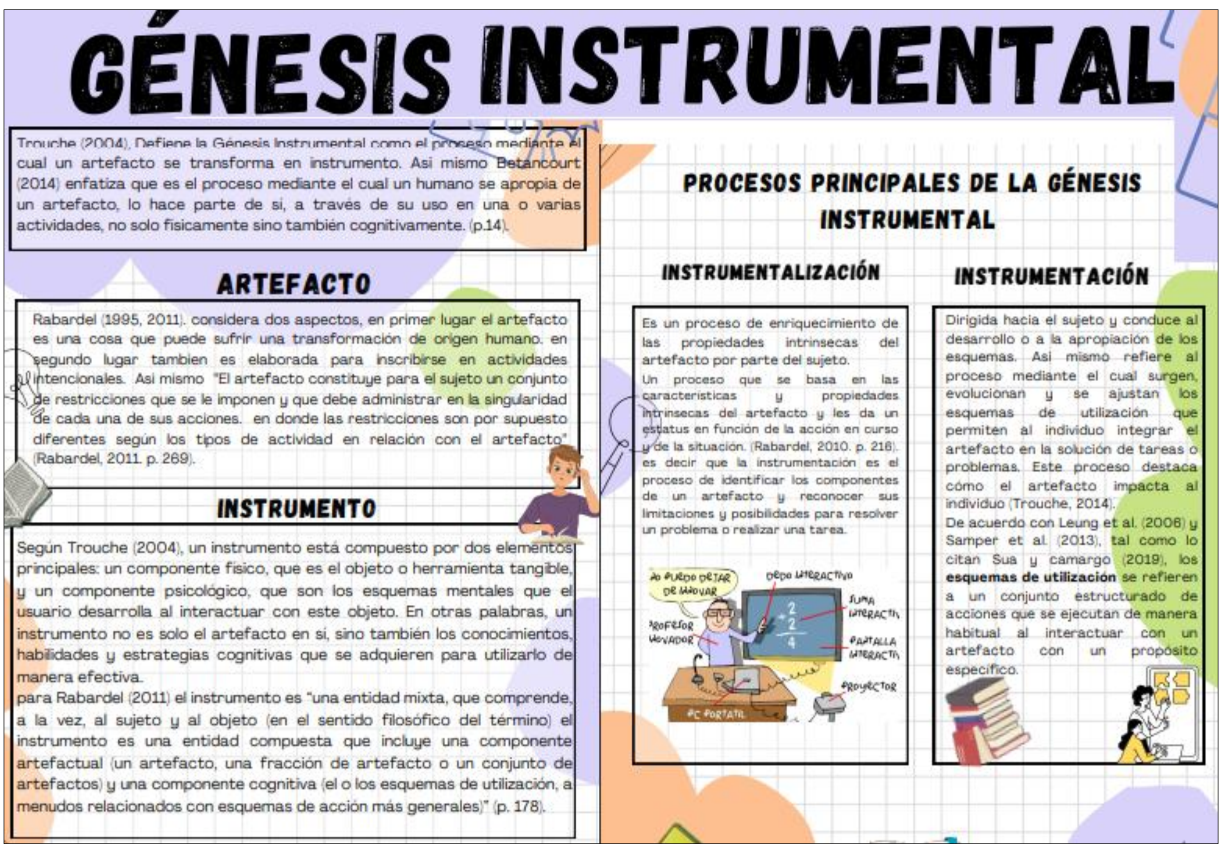
La incorporación de estos esquemas en el diseño de tareas educativas es esencial para fomentar un mayor desarrollo de procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos, ya que, como señalan Sua Flórez y Camargo Uribe (2019), estos esquemas son señales claras de la actividad matemática realizada por los estudiantes al enfrentarse a problemas con apoyo en tecnologías. Así mismo Samper et al. (2013) muestran que los esquemas de utilización se describen como parte de una actividad instrumentada de forma que estos esquemas emergen y se desarrollan a medida que los estudiantes interactúan con artefactos.

En la Génesis Instrumental dos procesos son cruciales Figura 22, la *instrumentación*, es decir, los modos implícitos de acciones y conocimientos, y la *instrumentalización*, es decir, cómo el estudiante da forma al artefacto. Sin embargo, los mismos autores enfatizan que un artefacto no es automáticamente un instrumento; primero es necesario que el estudiante desarrolle habilidades para usarlo en una forma práctica y pueda aprender a ver las circunstancias en las que puede ser útil en la solución de tareas y construcción de sus conocimientos.

Particularmente, en un proceso de génesis instrumental mediada por TD se presentan dos escenarios; en primer lugar, los estudiantes se adaptan al uso de las TD reconociendo sus elementos técnicos y sus formas de funcionamiento y, en segundo lugar, los estudiantes utilizan y adaptan las TD en beneficio de sus procesos de aprendizaje, fortaleciendo su conocimiento y mejorando la construcción de significados. Por consiguiente, bajo esta teoría la labor del docente es formular tareas que permitan el desarrollo de una Génesis Instrumental.

Figura 22

Génesis instrumental y procesos de la de la Génesis



Nota. Fuente de elaboración propia en canva con base en *Orquestación Instrumental de recursos didácticos digitales para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal* (pp. 33-63), por (Betancourt González, 2014), Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

De otra parte, es necesario diseñar estrategias didácticas, actividades y tareas que permitan explotar o aprovechar de manera eficiente cada uno de los artefactos entregados al estudiante para lograr el propósito de una Génesis Instrumental. Además, el docente de matemáticas debe realizar el ejercicio de evaluar los instrumentos o recursos usados en cada actividad, así como las estrategias didácticas propuestas para aprovechar de manera eficiente cada recurso utilizado y los escenarios en los cuales se ejecuten las actividades con el fin de proponer los ajustes necesarios para lograr el objetivo.

En el marco de esta investigación, aunque se identifica el rol del profesor y su papel en el proceso de Orquestación, se pondrá mayor atención al proceso de Génesis Instrumental a través del diseño de una secuencia de tareas con el propósito de fortalecer los aprendizajes de los estudiantes al momento de identificar y caracterizar las propiedades algebraico-analíticas de las funciones cuadráticas.

3.3.1 Génesis Instrumental en el diseño de Tareas

En el marco de la teoría de la Génesis Instrumental, las tareas deben diseñarse para guiar a los estudiantes en la transformación de las herramientas digitales en instrumentos efectivos de aprendizaje. Según Artigue M. (2004), el proceso de la Génesis Instrumental se desarrolla mediante el uso de esquemas en los que existe una relación entre los conocimientos matemáticos y los técnicos, particularmente los asociados a los artefactos siendo fundamental para el desarrollo. Además, la integración de tecnologías demanda una gestión didáctica que considere la relación entre lo técnico y lo conceptual. Por esta razón, es crucial que las tareas sean dinámicas, interesantes y atractivas para los estudiantes, fomentando su participación en la formación académica. Esto no solo beneficia su aprendizaje, sino que también promueve la autonomía y responsabilidad en el uso de TD durante su proceso educativo

Además, la Génesis Instrumental permite identificar las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes al integrar sus aprendizajes con TD, y facilita a los diseñadores de tareas considerar la evolución en el uso de estas herramientas. A medida que los estudiantes se familiarizan y adaptan a las tecnologías, el diseño de las tareas debe evolucionar junto con el aprendizaje del estudiante, ajustándose a las nuevas interacciones que se generan y ofreciendo desafíos cada vez más complejos que promuevan una integración continua de las herramientas en su actividad matemática (Artigue, 2002).

Para entender cómo la Génesis Instrumental influye en el diseño y la aplicación de tareas mediadas por TD, es necesario abordar algunos elementos clave de esta teoría. En primer lugar, la Génesis Instrumental pone de relieve las relaciones que se establecen entre tareas, artefactos y su transformación en instrumentos, así como los procesos de instrumentación e instrumentalización. Estos aspectos se integran al momento de diseñar las tareas y de ejecutar una Orquestación organizada y dirigida por el docente.

Un primer elemento por considerar son los *artefactos*, entendidos como objetos o recursos creados para facilitar la comprensión o el desarrollo de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Los artefactos constituyen los medios con los que los estudiantes interactúan con los objetos matemáticos, para que el estudiantes logre apropiarse de estos para poderlos transformar el instrumentos para pensar y desde luego actuar matemáticamente (Artigue, 2002).

los artefactos pueden incluir materiales didácticos, tecnologías digitales o cualquier elemento que medie la interacción entre el estudiante y el objeto matemático. Estos artefactos adquieren una nueva naturaleza cuando el estudiante logra apropiarse de ellos y transformarlos para cumplir con tareas específicas, convirtiéndolos en instrumentos. Esto evidencia que los artefactos son creados para facilitar la enseñanza y el aprendizaje, mientras que los instrumentos son adaptaciones o usos específicos de estos artefactos (Rabardel, 1995).

Por otro lado, es necesario garantizar procesos que aseguren la interacción de un artefacto a un instrumento. Estos procesos incluyen, por un lado, las habilidades matemáticas esenciales para desarrollar el pensamiento crítico, como la representación gráfica o simbólica, la visualización de relaciones y hechos, la formulación de hipótesis basadas en observaciones, la validación de conjeturas, y la justificación de conclusiones. Por otro lado, también son fundamentales los procesos relacionados con la instrumentalización, que incluyen la familiarización con el entorno y los artefactos, como identificar las funciones básicas y avanzadas de un programa y comprender su interfaz (Drijvers et al., 2010). Según estos autores, el proceso de instrumentalización requiere que los estudiantes se familiaricen con las herramientas y el entorno de GeoGebra, desarrollando habilidades para manipular objetos matemáticos de manera efectiva.

En la Génesis Instrumental, la interacción entre el estudiante y las TD desempeña un papel crucial en el desarrollo del proceso de aprendizaje de las matemáticas. Según Coca Santanilla y Benítez Pérez (2023) al utilizar TD, por ejemplo, GeoGebra en la enseñanza de la matemática no solo facilita la visualización y manipulación de conceptos abstractos, sino que también influye en los procesos de instrumentalización e instrumentación. La instrumentalización se refiere al proceso mediante el cual los estudiantes interiorizan y adaptan las herramientas digitales, integrándolas en su repertorio cognitivo. Trouche (2004) sugiere la existencia de tres etapas en la instrumentalización.

1. **Etapa de exploración y selección de funciones relevantes**: Se refiere al proceso en el que el estudiante identifica y elige las teclas y comandos útiles del software.
2. **Etapa de personalización**: En este nivel, el estudiante ajusta el uso del artefacto según sus necesidades.
3. **Etapa de transformación**: Aquí, el estudiante transforma el uso del artefacto para hacerlo más eficiente.

A continuación, se ejemplifican en la Tabla 6 algunos indicadores relacionados con el proceso de instrumentalización trabajados en algunas investigaciones.

Tabla 6

Algunos indicadores relacionados con el proceso de instrumentalización

Investigación	Descripción del trabajo (tarea, TD)	Indicadores de instrumentalización
Sua Flórez y Camargo Uribe (2019)	Presentan tareas de geometría dinámica, utilizando el programa GeoGebra. Específicamente se plantean problemas relacionados con el lugar geométrico de los centros de circunferencias que contienen dos puntos dados que determinan sus diámetros. Estas tareas incluyen la construcción y manipulación de circunferencias y la mediatriz de un segmento, buscando identificar patrones y propiedades geométricas a través del uso del software.	Descubrimiento de posibilidades de un comando, por ejemplo: al reconocer que el comando simetría central sirve para construir, a partir de los puntos A y B, un punto C de tal forma que B es punto medio de A y C. (Etapa de exploración)
Brausín Fandiño y Herrera Vargas (2019)	Elaboran tareas para que los estudiantes comprendan conceptos como distancia, velocidad, aceleración, y otros conceptos matemáticos y físicos a través de la interacción tecnológica, es decir, la relación que pueden establecerse entre los estudiantes y las tecnologías permitiéndoles representar gráficamente su propio movimiento corporal usando el programa Ranger que está integrado en el sensor de movimiento CBR el cual captura los datos de movimiento de los estudiantes.	La exploración de las potencialidades del artefacto ocurre cuando los estudiantes utilizan el sensor de movimiento CBR y la calculadora TI-92 PLUS para observar cómo los movimientos de su cuerpo son representados gráficamente. Inicialmente, los estudiantes exploran los comandos básicos, como alejarse o acercarse del sensor para observar cómo esto afecta la gráfica de distancia vs. tiempo. (Etapa de exploración)

Coca Santanilla y Benítez Pérez (2023)	Presentan diversas tareas orientadas en la construcción de curvas incluyendo líneas rectas, parábolas y circunferencias propone en contextos de la física el uso de software para el análisis de movimientos parabólicos con el fin de valorar y clasificar la emoción que presentaban los estudiantes al interactuar con el artefacto y el cuaderno. Una de las tareas consistió en la solución de problemas referentes a una aplicación de parábolas a la física, empleando el cuaderno y el software GeoGebra.	Identificación de acciones, como fijar puntos, arrastrar puntos, reflejo de puntos con respecto a un eje, rotación, traslación, obtención de ángulos. Por ejemplo, el estudiante puede graficar los puntos obtenidos, trazar el eje de simetría y reflejar los puntos para luego utilizar la ecuación obtenida insertándola en la vista algebraica y comprobar que se encuentra sobre un lugar geométrico. Hace cambios al ingresar una función en la vista algebraica y observa lo que pasa con el movimiento parabólico. (etapa de personalización-transformación)
Vargas Alejo y Guzmám Hernández (2012)	Problemas verbales algebraicos de tasa el cual refieren a problemas que implican una relación entre dos magnitudes que no son homogéneas. Este tipo de problemas ayuda a los estudiantes a desarrollar el pensamiento algebraico, en particular la comprensión de la variable y la incógnita dentro de una ecuación. El problema de tasa es usado para describir cómo cambia una cantidad en promedio con respecto a otra para ello involucra relaciones cuaternarias, lo que implica que se establecen conexiones entre cuatro cantidades distintas solucionadas mediante el uso de hoja electrónica en software Excel en la resolución problemas.	Los estudiantes establecen relaciones entre las celdas de diferentes columnas, creando fórmulas que vinculan los datos de una fila y luego arrastran estas fórmulas a lo largo de las columnas para replicar los cálculos. (etapa de personalización-transformación)
Drijvers, Godino, Font, y Trouche (2012)	Uso del álgebra computacional para el aprendizaje del concepto de parámetro (Drijvers,2003). Para esta tarea los estudiantes tienen una calculadora simbólica (TI-89) a su disposición, tanto en la escuela como en casa. Proponen un gráfico de las familias de curvas dadas por la expresión y $=x^2 + b$ e incluyen preguntas que centran la atención en el vértice y el tipo de curva que se obtiene; además, se pide al estudiante que determine una ecuación a partir del vértice y otros datos.	Aplican fórmulas para resolver ecuaciones de segundo grado en casos concretos (no paramétricos). Como conocimientos tecnológicos preliminares, los estudiantes son capaces de dibujar gráficos en la calculadora simbólica, resolver ecuaciones no paramétricas y realizar sustituciones numéricas en los comandos “solve”. Es importante indicar que los comandos de resolución y sustitución se pueden articular y combinar en comandos más complejos. (etapa de transformación)

Nota. Fuente de elaboración propia con base en información de las investigaciones de los autores mencionados en Tabla 6.

Por otro lado, la instrumentación se centra en cómo estos artefactos modifican las actividades matemáticas del estudiante, permitiendo nuevas formas de pensamiento y resolución de problemas, y convirtiéndolos en instrumentos. Así mismo, los esquemas de utilización se constituyen en la forma de observar la génesis instrumental, estos esquemas se refieren a un conjunto estructurado de acciones que se ejecutan de manera habitual al interactuar con un artefacto con un propósito específico. En la Tabla 7 aparecen algunos ejemplos de indicadores relacionados con procesos de instrumentación.

Tabla 7

Algunos indicadores relacionados con el proceso de instrumentación

Investigación	**Descripción del trabajo (tarea, TD)**	**Indicadores de instrumentación**
Sua Flórez y Camargo Uribe (2019)	Construcción de un triángulo equilátero mediante el uso de comandos de circunferencia, con el objetivo de desarrollar esquemas asociados a la manipulación de elementos geométricos.	Aparición de un esquema asociado a un conjunto de comandos. Por ejemplo, la construcción de un triángulo equilátero a partir de un segmento AB y dos circunferencias congruentes de radio AB con centros en A y B.
Brausin Fandiño y Herrera Vargas (2019)	Modelación de situaciones de movimiento. Permite a los estudiantes explorar relaciones matemáticas y científicas existentes entre distancia, velocidad, aceleración y tiempo. El estudiante identifica cómo debe moverse (acercarse, alejarse o permanecer en reposo) para replicar una gráfica específica que le ha sido proporcionada. Esto requiere coordinar su propio desplazamiento con la representación visual, además de utilizar de manera adecuada los artefactos necesarios para la combinación de dichas acciones físicas (movimiento corporal).	Esquema asociado al uso de la calculadora TI-92 PLUS y el sensor CBR, integrándolos en su actividad matemática, lo que les permite elaborar y comprobar conjeturas, así como modelar gráficamente fenómenos físicos como el movimiento. Para esto los estudiantes usan los comandos para transportar los datos del movimiento del programa Ranger a las calculadoras; el estudiante da cuenta que termina el proceso cuando parpadea una luz verde del CBR luego emite un sonido y la calculadora muestra un mensaje finalmente ubica el sensor en un punto fijo y se ubica a una distancia que el sensor registre el movimiento.

Coca Santanilla y Benítez Pérez (2023)	Presenta diversidad de tareas en donde se trabaja construcción de curvas como parábolas y circunferencias. Particularmente, proponen un problema de lanzamiento (simulando un movimiento parabólico) de un objeto con un ángulo dado, el estudiante debe encontrar la ecuación, altura máxima etc.	Utiliza comandos en GeoGebra para graficar puntos, los ubica directamente en la vista geométrica seleccionando de la barra de herramientas punto o los ingresa en la barra de entrada en la vista algebraica, luego utiliza el comando simetría axial para reflejar los puntos que ha colocado antes y posteriormente unir puntos para formar la gráfica de la función.
Vargas Alejo y Guzmám Hernández (2012)	Los estudiantes utilizan artefactos como fórmulas recursivas y relaciones entre celdas para encontrar soluciones que implican relaciones entre cantidades no homogéneas, como tiempo y dinero, o precio y número de artículos.	Hay un esquema de utilización cuando el estudiante emplea "la función halar" (puntero cruz negra) al seleccionar elementos de una sucesión para generar los siguientes elementos de tal sucesión (el programa identifica un patrón y reconocemos esa identificación)
Drijvers, Godino, Font y Trouche, (2012)	Para esta tarea los estudiantes tienen una calculadora simbólica (TI-89) a su disposición, tanto en la escuela como en casa. Se proponen un gráfico que presenta las familias de la funciones y=$x^2 + bx + 1$. Una de las preguntas propuestas en la tarea es determinar la ecuación de la curva que pasa por los vértices de las parábolas y dibujar algunos gráficos para su verificación.	A partir de los instrumentos utilizados en la tarea, los estudiantes intentan utilizar esquemas de sustitución para asignar valores a los parámetros establecidos en la función . Para ello deben usar el símbolo de la multiplicación entre las variables, además deben seleccionar al comando "solve" necesario para que el instrumento físico ejecute la acción para resolver la ecuación. En este ejercicio es necesario que el estudiante ejecute sintácticamente los comandos e iguale a cero la expresión algebraica e indique la incógnita a reemplazar.

Nota. Fuente de elaboración propia con base en información de las investigaciones de los autores mencionados en Tabla 7.

Este análisis subraya la importancia de diseñar tareas que no solo incorporen TD, sino que también promuevan un uso reflexivo y estratégico de estas herramientas, con el objetivo de mejorar la construcción de significados de los objetos matemáticos. Así, la inclusión de TD en el diseño de tareas no solo transforma el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también enriquece la experiencia educativa al fomentar un aprendizaje más profundo y significativo.

Existen diferentes tipos de interacciones entre los estudiantes (sujetos) y la TD, dependiendo de los propósitos de las actividades o tareas, de las TD a utilizar, entre otros aspectos; sin embargo, en general, tales interacciones se pueden organizar en cinco categorías.

- **Interacción Técnica:** Se refiere al manejo de las herramientas y comandos específicos del software. Los estudiantes deben aprender a utilizar las funcionalidades técnicas para poder manejar el software de manera efectiva en sus tareas matemáticas (Drijvers et al., 2010).
- **Interacción Conceptual:** Implica la comprensión y manipulación de conceptos matemáticos a través del uso del software. Los estudiantes utilizan la tecnología para visualizar y explorar conceptos abstractos, facilitando su comprensión (Trouche, 2004).
- **Interacción Pedagógica:** se enfoca en el uso de la tecnología en el contexto de estrategias de enseñanza y aprendizaje. Aquí se analiza cómo los docentes integran la tecnología en su metodología de enseñanza para favorecer el aprendizaje matemático (Laborde, 2001).
- **Interacción Social:** Se refiere a la colaboración y comunicación entre estudiantes utilizando la tecnología. La interacción social es fundamental para el aprendizaje colaborativo y el intercambio de ideas donde los estudiantes comparten, discuten conjeturas y además construyen conocimiento matemático con la TD (Hoyles, 2003).
- **Interacción Cognitiva:** Implica el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas mediante el uso de la tecnología. Los estudiantes se enfrentan a desafíos matemáticos que ejercitan la construcción de aprendizaje y la reflexión sobre sus procesos, además de enfrentarse a desafíos matemáticos a través del software fortalecen sus conocimientos. (Hollebrands, 2007).

Para comprender mejor las diferentes formas en que las TD influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es esencial analizar las interacciones que se generan en este contexto. Estas interacciones permiten identificar cómo, tanto los estudiantes como los docentes utilizan las herramientas tecnológicas. A través de este análisis, se puede observar cómo las tecnologías contribuyen al desarrollo de competencias técnicas, conceptuales, pedagógicas, cognitivas y sociales, enriqueciendo la enseñanza y potenciando el aprendizaje.

3.3.2 Diseño de tareas

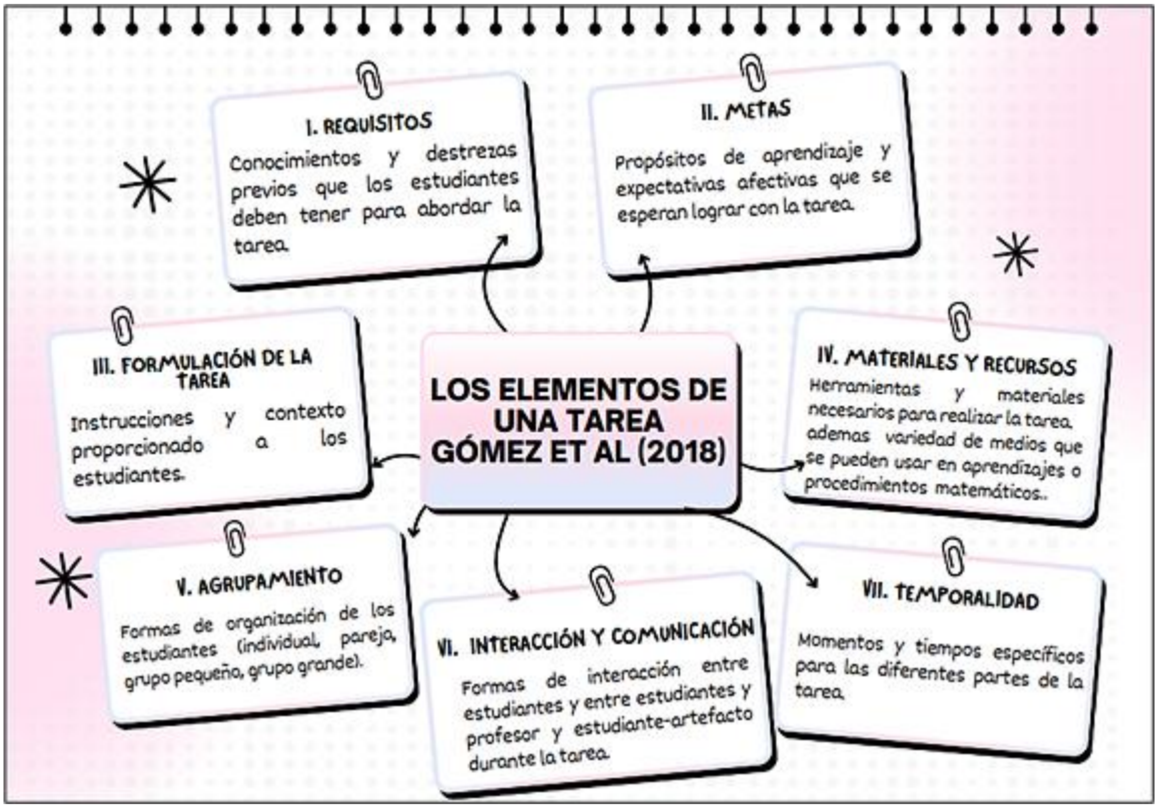
Aunque en la literatura se pueden encontrar diferentes definiciones de tarea, en esta investigación particularmente se asume el concepto basado en términos Gómez , Mora, y Velasco (2018)

Tareas: son aquellas acciones que el docente propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que logren las expectativas que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje. "Las tareas son aquellas que se utilizan para recoger información sobre la actuación de los estudiantes y establecer sus conocimientos y habilidades", (p.202).

Así, una tarea involucra un conjunto de actividades que el estudiante debe realizar para lograr un determinado objetivo de aprendizaje, partiendo de sus conocimientos y configurando nuevas formas de aprender. Además, se identifican algunos elementos (Figura 23) que son indispensables en el diseño e implementación de una tarea como son: los requisitos para su implementación, las metas de enseñanza-aprendizaje, la formulación misma de la tarea, los materiales y recursos que se emplearan, la forma de organización en el aula (agrupamiento- i.e. trabajo en equipos, individual), el tipo de interacción (entre personas, personas y artefactos) y los mecanismos de comunicación y la temporalidad. (Gómez et al., 2018)

Figura 23

Elementos de una tarea

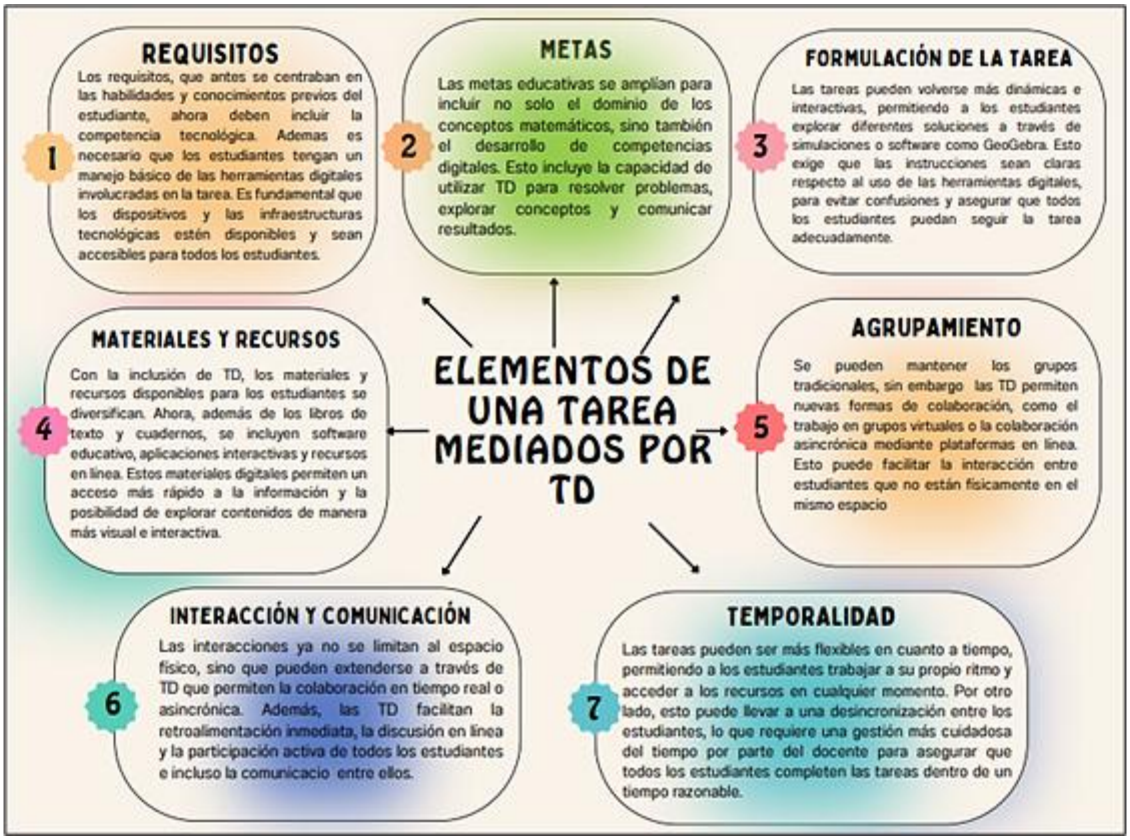


Nota. Fuente de elaboración el autor, basado en Gómez et al. (2018). Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula, capítulo 5.

En relación con el uso de TD para el desarrollo de tareas, se observa la importancia de cuestionar la forma en que se modifican los diferentes elementos que se contemplan para su diseño e implementación. Según en Gómez et al. (2018) los elementos característicos de una tarea tienen un papel crucial en la estructura y la efectividad, sin embargo, con las TD estos elementos se ven afectados, requiriendo una adaptación por parte del docente y de los estudiantes. A continuación, en la Figura 24 se muestra como cada uno de estos elementos puede verse influenciado por la presencia de las TD.

Figura 24

Influencia de las TD en los elementos de una tarea



Nota. Fuente de elaboración del autor.

Finalmente, se resalta la relevancia de diseñar tareas que permitan a los estudiantes desarrollar diferentes tipos de competencias y actitudes hacia las matemáticas, de forma tal que se generen escenarios a través de los cuales se fortalezca su formación en matemáticas. Así mismo, la Integración de las TD puede contribuir a generar cambios significativos y útiles en la enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos. Investigadores como Gómez Zermeño y Franco Gutriérrez (2018), consideran que aumenta la motivación en el aprendizaje y la participación de los estudiantes en la matemática y Ivars, Fernández, y Llinares, (2019) sostienen que el diseño de estas debe estar alineadas con los objetivos educativos además de considerar cómo los estudiantes interpretan y abordan los problemas matemáticos permitiendo orientar los procesos de aprendizaje de forma reflexiva y significativo. Entre tanto Molina el al. (2011), argumentan que una investigación de diseño se busca "analizar el aprendizaje en un contexto mediante el diseño estudio de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza" (p.76) para lograr fortalecer, mejorar y motivar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (p.75). Particularmente, en esta investigación no solo se trata de entender (por lo menos de manera parcial) cómo los estudiantes interactúan y aprenden acerca del objeto matemático en cuestión con las tareas que se diseñaran, sino también de entender cómo las tareas pueden ser mejoradas para optimizar las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, Molina et al. (2011) enfatizan la importancia de analizar el aprendizaje en su contexto, utilizando un diseño y un estudio sistemático que considere las formas particulares de aprendizaje, las estrategias empleadas y las herramientas de enseñanza, todo ello con una visión sensible a la naturaleza interconectada del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Para ser entendidos como un sistema donde cada componente afecta a los demás.

3.4 Procesos generales en el desarrollo de la matemática

En didáctica de las matemáticas, y en las matemáticas mismas, se concibe la existencia de algunos procesos generales que un estudiante de matemáticas aborda cuando se enfrenta al desarrollo de una actividad matemática. A continuación, se describen, particularmente, los procesos de visualizar, conjeturar, argumentar y comunicar, que serán considerados en el diseño de las tareas.

3.4.1 Visualizar

La visualización, entendida como uno de los procesos generales de la actividad matemática, ha sido interpretada desde diversas perspectivas. En primer lugar, Álvarez Alfonso et al. (2014) la definen como el proceso de observar objetos matemáticos para identificar sus características y las relaciones establecidas entre ellas.

En relación con este concepto, Planchart (2002) presenta las visiones de varios autores; para Zimmermann y Cunningham (1991) la visualización se refiere a la producción o uso de representaciones geométricas y gráficas de conceptos o problemas matemáticos. Dichas representaciones, elaboradas a partir de diagramas o construcciones visuales, permiten describir de manera gráfica los objetos y las situaciones matemáticas abordadas.

De acuerdo con Ministerio de Educación Nacional (1998), las representaciones constituyen un medio fundamental para entender los objetos matemáticos, pues el aprendizaje de las matemáticas requiere del uso de diferentes formas de representación que posibiliten visualizar, explorar y construir relaciones entre los objetos matemáticos. En este sentido, la visualización se concibe como una forma en la que los estudiantes construyen significados a partir de la observación, la exploración y la interacción con distintas representaciones, tales como gráficos, tablas o expresiones simbólicas en un contexto matemático determinado.

Asimismo, Álvarez et al. (2014) sostienen que la visualización se fundamenta en la observación del objeto matemático desde los esquemas cognitivos que el estudiante posee, lo que le permite identificar sus características y las relaciones que se establecen entre ellas. Estos autores enfatizan que la visualización, como parte del proceso de conjeturar, no se da de manera descontextualizada, sino que se apoya en los elementos del contexto de la tarea que orientan la construcción de la conjetura. De esta forma, la visualización se convierte en un elemento estratégico que facilita la identificación de patrones o propiedades en los objetos matemáticos y orienta la formulación de conjeturas.

3.4.2 Conjeturar

Desde la visión del MEN (1998) y reafirmado por autores como Álvarez et al. (2014), el ejercicio de conjeturar implica la formulación de afirmaciones acerca de ciertas propiedades de los objetos matemáticos como resultado de la observación, la experimentación y la exploración. Las informaciones obtenidas de dichas acciones se convierten en elementos que permiten al estudiante formular conjeturas o juicios sobre los objetos observados.

En esta misma línea, Cañadas et al. (2008) consideran que las conjeturas pueden clasificarse en cinco tipos, según el tipo de razonamiento que se manifieste en la solución de los problemas matemáticos: inductivo, deductivo, abductivo o analógico. Estos autores sostienen que toda conjetura involucra acciones y actividades matemáticas de naturaleza transversal y secuencial que se pueden visualizar a lo largo del proceso de resolución.

En términos generales, el acto de conjeturar implica la participación de la visualización mediante acciones como la identificación de patrones, relaciones, regularidades y propiedades, así como la generalización y la validación de las conjeturas elaboradas.

34.3 Argumentar

Diversos autores, como Álvarez et al. (2014), coinciden en que la argumentación es un proceso presente en todas las etapas del quehacer matemático. Tiene un carácter social, ya que depende del contexto en el que se formulan las conjeturas, y permite sustentar o refutar afirmaciones a partir de datos obtenidos de la observación de hechos o de premisas que conducen a una conclusión.

Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), la argumentación constituye un proceso mediante el cual los estudiantes validan procedimientos, justifican sus afirmaciones y comunican sus razonamientos. En consecuencia, se requiere de una educación que propicie espacios para la argumentación dentro de la actividad matemática escolar, promoviendo la confrontación de ideas y la construcción de conocimiento desde una perspectiva cognitiva, social y participativa.

De acuerdo con Álvarez et al. (2014) “en todas las fases del desarrollo de la actividad matemática, el proceso de argumentar debe estar presente con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático y propiciar habilidades o competencias argumentativas” (p.89). Estos autores también destacan que promover la argumentación en la actividad escolar favorece la capacidad de los estudiantes para generar razonamientos sólidos sobre los problemas matemáticos.

3.4.4 Comunicar

Desde la perspectiva del MEN (1998), la comunicación constituye un eje fundamental en los procesos de formación, ya que permite la expresión de ideas, la explicación de procedimientos y la argumentación de resultados mediante distintas formas de representación. En este ámbito se incluyen múltiples maneras de comunicar, tales como el uso de representaciones gráficas, símbolos, tablas y otras formas de expresión del pensamiento matemático.

En términos generales, la comunicación ofrece a los estudiantes la posibilidad de expresar sus reflexiones, confrontar ideas y construir significados de manera colectiva. Según Álvarez et al. (2014), la comunicación matemática articula los procesos de visualización, conjeturación y argumentación, posibilitando la construcción conjunta del conocimiento alrededor de las diferentes representaciones matemáticas.

En el marco de esta investigación, luego de indagar la información anterior, se entenderán los procesos matemáticos de visualización, conjeturación, argumentación y comunicación como componentes interrelacionados que orientan la construcción del conocimiento matemático durante el desarrollo de las tareas mediadas por TD. La visualización permitirá que los estudiantes exploren y reconozcan relaciones entre los elementos de la función cuadrática desde sus representaciones algebraicas y geométricas; la conjeturación se entenderá como la formulación de hipótesis derivadas de dichas exploraciones; la argumentación, como el proceso mediante el cual los estudiantes validan o refutan sus conjeturas a través de razonamientos que involucran los objetos matemáticos en el contexto establecido; y la comunicación, como el medio que posibilita la expresión, confrontación y consolidación colectiva de los significados construidos. Es así como estos procesos servirán como ejes de análisis para valorar los desarrollos elaborados por los participantes y el papel mediador de las tecnologías digitales en dicho proceso.

CAPÍTULO 4

4. Diseño de la propuesta

En el capítulo se describe la tecnología digital seleccionada que será empleada en las tareas como un mecanismo de mediación entre estudiante-conocimiento. Además, partiendo del marco de referencia, particularmente la descripción matemática y los elementos de la teoría de Génesis Instrumental, se propone un conjunto de 4 tareas en las que se ha tomado como foco de atención la noción de lado recto en la representación gráfica de una función cuadrática y su relación con los coeficientes de una ecuación cartesiana para tal función. Además, para cada tarea se describen los artefactos a utilizar y los posibles esquemas de uso que, a priori, se espera surjan en la implementación.

4.1 GeoGebra

GeoGebra es un software educativo (de código abierto y gratuito) de matemáticas dinámicas que combina geometría, álgebra, cálculo y estadística en un solo entorno interactivo. Fue diseñado para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos a través de una visualización gráfica que facilita la comprensión de relaciones y propiedades matemáticas. GeoGebra permite realizar construcciones geométricas dinámicas, manipular ecuaciones algebraicas y explorar representaciones gráficas de funciones, todo de manera simultánea y en tiempo real, así mismo permite al usuario trabajar en diferentes vistas (Figura 25). En la Tabla 8 se presenta una descripción de las vistas de la ventana de GeoGebra.

Tabla 8

Descripción de las vistas del programa de GeoGebra

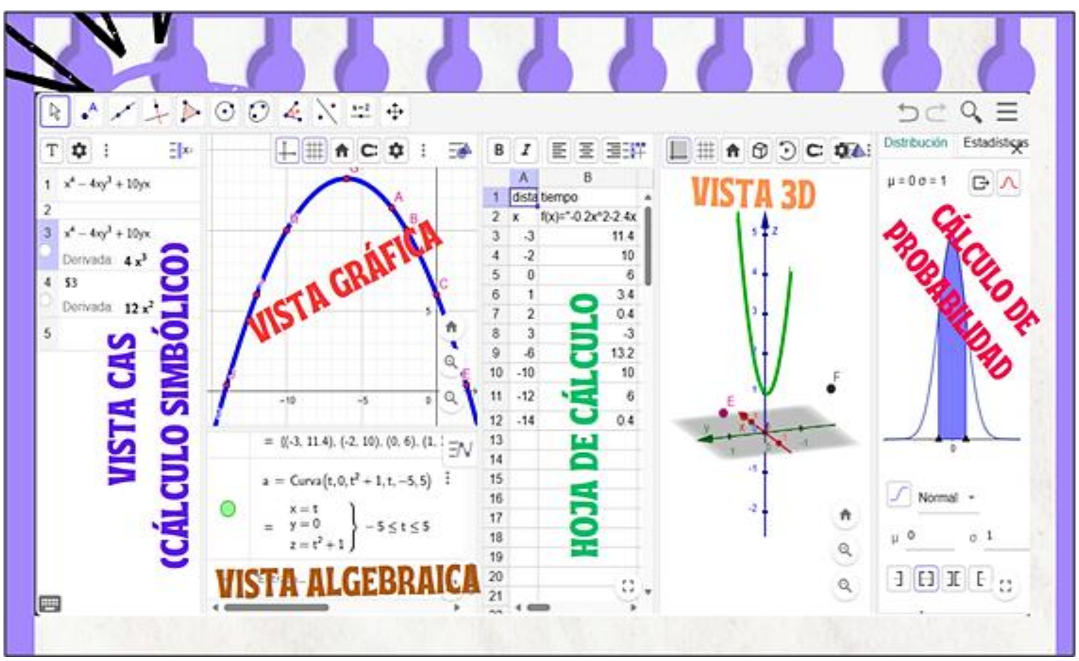
Vista	Algunas funciones	Algunos usos en la Enseñanza	Algunos usos en el Aprendizaje
Gráfica	Permite visualizar y trabajar con objetos geométricos y gráficos de funciones. Ideal para representar gráficamente funciones y analizar su comportamiento. Además, en la construcción geométrica. Proporciona herramientas para realizar construcciones geométricas precisas como bisectrices, mediatrices entre otros comandos.	Los estudiantes exploran la relación entre expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas. Permite la enseñanza de propiedades y construcciones geométricas de manera dinámica.	Facilita el entendimiento de la relación entre expresiones algebraicas y representaciones gráficas. Los estudiantes pueden visualizar cambios, variación, covariación en tiempo real. Así mismo Permite a los estudiantes explorar propiedades geométricas mediante construcciones dinámicas, promoviendo el aprendizaje activo y la comprensión profunda de los objetos matemáticos y comandos de la interfaz del programa.
Algebraica	Muestra las expresiones algebraicas correspondientes a los objetos creados en la Vista Gráfica. Las ecuaciones cambian a medida que se manipulan los gráficos.	Vincula las representaciones gráficas con las algebraicas para el desarrollo del razonamiento matemático.	Permite a los estudiantes comprender mejor cómo los gráficos afectan las ecuaciones algebraicas y viceversa, promoviendo un razonamiento profundo.
Hoja de Cálculo	Permite trabajar con datos numéricos, realizar cálculos estadísticos y crear tablas de valores. Los datos se pueden representar gráficamente.	Útil para trabajar con datos, realizar cálculos estadísticos y generar gráficas.	Los estudiantes pueden analizar datos, realizar cálculos y generar gráficos. Fomenta el análisis crítico y la interpretación de datos en estadística aplicada.
CAS (Sistema de Algebra Computacional)	Permite realizar cálculos algebraicos avanzados como derivadas, integrales, simplificación de expresiones y solución de ecuaciones de manera simbólica.	Facilita la solución de problemas avanzados de álgebra y cálculo en clases de matemáticas superiores.	Los estudiantes pueden resolver ecuaciones complejas paso a paso, mejorando sus habilidades en el manejo de expresiones simbólicas y la resolución de problemas.

3D	Permite visualizar y manipular objetos geométricos en tres dimensiones, trabajar con superficies y sólidos, y explorar representaciones tridimensionales de funciones.	Ideal para la enseñanza de conceptos de geometría tridimensional, como planos y cuerpos sólidos.	Ayuda a los estudiantes a visualizar objetos 3D desde diferentes ángulos, mejorando la interpretación de formas tridimensionales y las relaciones espaciales.
Gráfica de Probabilidad	Es una herramienta específica para el análisis de distribuciones de probabilidad y cálculo de probabilidades de eventos a través de diferentes distribuciones.	Facilita la enseñanza de conceptos de probabilidad mediante el uso de distribuciones visuales.	Los estudiantes pueden interactuar con distribuciones de probabilidad, modificarlas y observar los cambios, lo que mejora su comprensión intuitiva de la probabilidad.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor basado en el manual de GeoGebra.

Figura 25

Vistas de la Interfaz del software GeoGebra



Nota. Fuente de elaboración propia del autor, basado en el software GeoGebra.

Una de las mayores fortalezas didácticas de GeoGebra radica en la posibilidad de generar varias representaciones simultáneas de un mismo objeto en forma dinámica. Es así como desde la perspectiva de Vitabar (2016), destaca que una de las mayores fortalezas del programa radica en la posibilidad de generar representaciones simultáneas y dinámicas de un mismo objeto, lo cual facilita procesos de visualización y exploración que fortalecen la comprensión conceptual del estudiante. Además, sostiene que esto promueve una actitud más activa y reflexiva frente al conocimiento matemático. Asimismo, las implicaciones didácticas de esta característica son ampliamente beneficiosas para los estudiante, Según Coca Santanilla y Benítez Pérez (2023), el uso de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de matemáticas no solo facilita la visualización y manipulación de conceptos abstractos, sino que también influye en los procesos de instrumentalización e instrumentación**.** De esta forma, GeoGebra se constituye en una herramienta útil y accesible en las aulas de clase si se cuenta con el hardware necesario.

Tomando en cuenta el potencial que tiene el uso de GeoGebra en los procesos de estudio-aprendizaje de las matemáticas en el aula, para esta investigación se decide trabajar con dicho programa enfatizando el uso de la vista gráfica, vista algebraica y hoja de cálculo ya que, teniendo en cuenta el propósito de la investigación, se decide prestar atención no sólo al desarrollo matemático de la tarea en sí sino en la forma en que la herramienta permite a los estudiantes establecer esquemas de uso de los artefactos. En otras palabras, como parte del diseño de las tareas se atiende tanto al objeto matemático como a los artefactos que participarán en la mediación tecnológica con el objeto de estudio.

4.2 Diseño de las tareas propuestas

En el diseño de las tareas mediadas por TD, en este caso utilizando el programa GeoGebra, se tomó en cuenta que la población ha tenido poca interacción sistemática con el programa, por lo tanto, se decide utilizar una redacción que no involucre asuntos técnicos del uso del programa y permita una fluida interacción con el programa de GeoGebra. Además, las tareas se estructuraron de forma progresiva, cada una compuesta por una secuencia de subtareas, de modo que los estudiantes pudieran centrar su atención en acciones específicas con los artefactos y lograran favorecer el desarrollo de habilidades técnicas con el programa y formularan significados matemáticas a partir de la manipulación del objeto matemático en dicho programa; para ello se preparó un enunciado, que está descrito por una pregunta, una instrucción o ambas, acompañado de una construcción gráfica interactiva con la que el estudiante puede interactuar mediante el uso de diferentes artefactos (los cuales serán descritos en cada tarea).

El objetivo de la interacción con el programa es que el estudiante desarrolle cada subtarea al encontrar la solución mediante construcciones geométricas y el uso adecuado de los comandos disponibles en la interfaz de GeoGebra. Cada subtarea se diseña específicamente para favorecer, a través del uso de ciertos artefactos un proceso de Génesis Instrumental en relación con el objeto de estudio de esta investigación. Además, se busca que, tras resolver y modificar las construcciones el estudiante promueva el desarrollo de procesos de exploración, visualización, conjeturación y argumentación. Este enfoque no solo le permite al estudiante hacer uso de las herramientas disponibles, sino también desarrollar esquemas de utilización que le ayuden a entender mejor los conceptos y las construcciones implicadas. Vale la pena mencionar que estos elementos pueden ser modificados luego de su puesta en práctica, lo que permite que el diseño de la tarea sea flexible y adaptativo según las respuestas del estudiante. Esta flexibilidad asegura que el estudiante pueda explorar diferentes estrategias y construir su conocimiento de manera más dinámica.

Tomando en cuenta la complejidad del objeto matemático, es decir las diferentes representaciones existentes, propiedades y relaciones con otros objetos, para este trabajo se decidió centrar el propósito de las tareas en identificar relaciones entre el coeficiente principal en la expresión algebraica de una función cuadrática y el significado geométrico del lado recto en su representación gráfica, un asunto que usualmente no es abordado a nivel escolar. Puntualmente, se proponen cuatro tareas con propósitos específicos: la primera busca determinar el eje de simetría de la representación gráfica de la función cuadrática (parábola), la segunda identificar el lado recto y su longitud en la parábola, la tercera relacionar la longitud del lado recto con el coeficiente principal de expresión algebraica de la función cuadrática y la cuarta resolver situaciones contextualizadas para aplicar propiedades (lado recto) a través de una simulación de lanzamiento de aviones de papel en GeoGebra. De manera particular, se ha anticipado cuáles podrían ser los esquemas de uso de los artefactos a utilizar en cada caso.

A continuación, se describe cada una de las tareas. En tal descripción se incluye: materiales que se van a emplear; es decir el archivo que se va a suministrar, la formulación de la tarea, el objetivo o propósito que se persigue con las tareas, los artefactos que se utilizarán, los esquemas de uso general y un análisis preliminar de cada tarea, por otro lado, se presenta la Tabla 9, esta describe las metas que se desean alcanzar con cada tarea.

Tabla 9

Metas; propósitos de las tareas diseñadas

Visión general de las tareas	**Objetivo General**	**Número y nombre de la tarea**	**Objetivo específico**
Propiciar el estudio del objeto matemático función cuadrática en particular el lado recto, a través de la interacción con los artefactos de GeoGebra, para reflexionar y dar significado a sus propiedades algebraico-analíticas a partir de sus representaciones algebraicas y geométricas.	Desarrollar competencias tecnológicas de los estudiantes usando herramientas básicas de geogebra; manipulando y explorando los artefactos.	Tarea 0: Reconocimiento del Entorno GeoGebra.	Familiarizar a los estudiantes con el programa y herramientas básicas de GeoGebra.
	Favorecer el estudio y la construcción de significado asociados al lado recto de una función cuadrática a través de la interacción con los artefactos digitales, permitiendo a los estudiantes determinar geométricamente el eje de simetría, identificar el lado recto, relacionar su longitud con los coeficientes de la función cuadrática y aplicar estas propiedades en la interpretación y resolución de problemas .	Tarea 1: Eje De Simetría.	Determinar geométricamente el eje de simetría de la representación gráfica de una función cuadrática.
		Tarea 2: Identificar el lado recto.	Identificar el lado recto como se ha definido geométricamente.
		Tarea 3: Relación de la longitud del lado recto de la parábola con la expresión algebraica de la función cuadrática.	Relacionar la longitud del lado recto con uno de los coeficientes de la función cuadrática.
		Tarea 4: Aplicación del lado recto correspondiente a una función cuadrática: juego de aviones de papel	Utilizar características de la función cuadrática para interpretar y resolver problemas aplicados, fortaleciendo la comprensión de la relación entre la representación gráfica y algebraica.

Nota. Elaboración propia del autor.

4.2.1 Tarea 0: Reconocimiento del entorno GeoGebra

El primer momento de la implementación de las tareas tiene como objetivo principal garantizar que los estudiantes se familiaricen con algunos elementos del entorno de GeoGebra. Esta etapa es fundamental, ya que GeoGebra será la herramienta principal para el desarrollo de las demás tareas. Este reconocimiento inicial permitirá a los estudiantes comprender cómo interactuar con el software, familiarizarse con los elementos básicos como la vista gráfica y algebraica, barra de herramientas geométrica, movimiento y manipulación de objetos matemáticos con el fin de ganar confianza en el manejo de la herramienta y establecer una base sólida para las actividades posteriores. Para lograrlo, se crea un ambiente de confianza que facilite el enfoque en los aspectos matemáticos durante las actividades principales.

Puntualmente, a través de seis secciones de 60 minutos cada una se desarrollarán las siguientes actividades para guiar a los estudiantes en la exploración de las herramientas de GeoGebra.

1. *Presentación general del entorno*: El docente investigador ofrecerá una breve explicación sobre las partes generales del programa, destacando las herramientas principales y respondiendo preguntas que pueden surgir. Para orientar a los estudiantes en el uso básico de GeoGebra, se elabora una presentación en PowerPoint (Anexo 2), en la que se explican las partes de la ventana de presentación de GeoGebra, herramientas principales del entorno, su navegación básica: como moverse dentro del entorno digital y usar sus funciones principales y ejemplos iniciales para explorar sus funcionalidades. Además, se usa parte del video GeoGebra - Instalación, vista algebraica, gráfica y entrada, disponible en el canal Aprendiendo con GeoGebra (2020), el cual ofrece una explicación clara y básica del funcionamiento del software.

2. *Exploración guiada*: se proponen tres tareas específicas en las cuales los estudiantes realizarán actividades prácticas como: insertar puntos en el plano cartesiano, moverlos y visualizar sus coordenadas en la vista algebraica; usar deslizadores para modificar valores numéricos y observar los cambios en tiempo real de una variable dependiente; representar funciones básicas en la vista algebraica como; $f(x) = ax +$

b o $f(x) = ax$ y analizar sus gráficas en la vista geométrica; agregar y modificar objetos geométricos (líneas y segmentos) y ajustar sus propiedades (color, estilo de línea, etiquetas) observando relaciones de dependencia a partir del dinamismo.

Materiales y recursos: Computadores con el programa de Geogebra previamente instalado, televisor, video proyector, presentación en PowerPoint, video GeoGebra- Instalación, vista algebraica, gráfica y entrada, disponible en el canal Aprendiendo con GeoGebra (2020) y guía impresa con la tarea propuesta.

1. **Abrir GeoGebra**:

Haga clic en el ícono de GeoGebra ubicado en la barra de tareas del escritorio del computador. Una vez abierto el programa, localice la herramienta *Punto* en la barra de herramientas (se activa cuando aparece en un recuadro azul). Cree cuatro puntos en cualquier espacio de la vista geométrica. Arrastre el punto *B* describa lo que pasa. (el estudiante indicara que el punto *B* se puede desplazarse por todo la vista geométrica) Construya una *recta* que pase por dos de los puntos creados y luego cree un punto *T* sobre la recta. Mueva el punto *T* y compare su movimiento con el del punto D. ¿Existen alguna dependencia en estos movimientos? ¿Cuáles?

2. **Uso del deslizador:**

Seleccione la herramienta *Deslizador* en la vista algebraica y modifique su primera componente por la letra *a*. Mueva el deslizador y describa lo que ocurre con el punto *D*. Repita el procedimiento para otro deslizador y cambie la segunda componente del punto *C*, finalmente describa los cambios observados.

3. **Creación de un nuevo documento y representación de una función**:

En la parte superior derecha, seleccione el menú de tres líneas y cree un nuevo documento. Asigne un título y guarde el archivo. En la barra de entrada de la vista algebraica (identificada por el símbolo +), escriba una función lineal dada por la expresión $f(x) = 2x + 3$. Cree un deslizador con nombre a e intervalos de su preferencia y modifique la función $f(x)$ reemplazando el número 2 por la letra a. Mueva el deslizador y describa lo observado. Cree otro deslizador para reemplazar el número 3 de la función $f(x)$. Observe cómo cambia la representación gráfica de la función $f(x)$,al cambiar el valor en los deslizadores y escriba algunas observaciones. Finalice realizando una recta paralela a la función creada modificando el color y grosor.

Para cerrar la actividad se propone a los estudiantes algunas preguntas reflexivas como las siguientes: ¿qué herramientas de GeoGebra les parecieron más fáciles de usar? ¿Si tuviera más tiempo le gustaría practicar nuevamente con GeoGebra? ¿qué herramienta o funcionalidad de geogebra necesita comprender mejor? ¿Qué aprendió hoy sobre cómo construir y manipular gráficos en GeoGebra? ¿Cómo podría explicar a un compañero lo aprendido sobre GeoGebra?

Este primer acercamiento al entorno de GeoGebra permitirá a los estudiantes desarrollar habilidades esenciales para manejar la herramienta de manera autónoma y comprender cómo sus funcionalidades facilitan la representación y exploración de conceptos matemáticos. Con esta base se da inicio al desarrollo de las siguientes tareas.

4.2.2 Tarea 1: Eje De Simetría

Materiales y recursos: Se suministra un archivo en formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 1.T-APPLET. En él se presenta la vista gráfica con: deslizadores, la representación gráfica de la función cuadrática (parábola), puntos en objeto, casilla control para secuenciar las subtareas.

Formulación de la tarea: A continuación, se presenta la representación gráfica (Figura 26) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, que corresponde a una parábola. Dados los puntos A y B de la parábola que son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola que aún no conocemos realice las siguientes actividades:

Subtarea 1.1: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico al punto C con respecto al eje de simetría de los puntos A y B (es decir, de la parábola). Describa los pasos desarrollados para la construcción elaborada e indique qué comandos (nombre) utilizó en tal construcción.

Subtarea 1.2: Teniendo en cuenta la subtarea anterior construya el eje de simetría de la parábola.

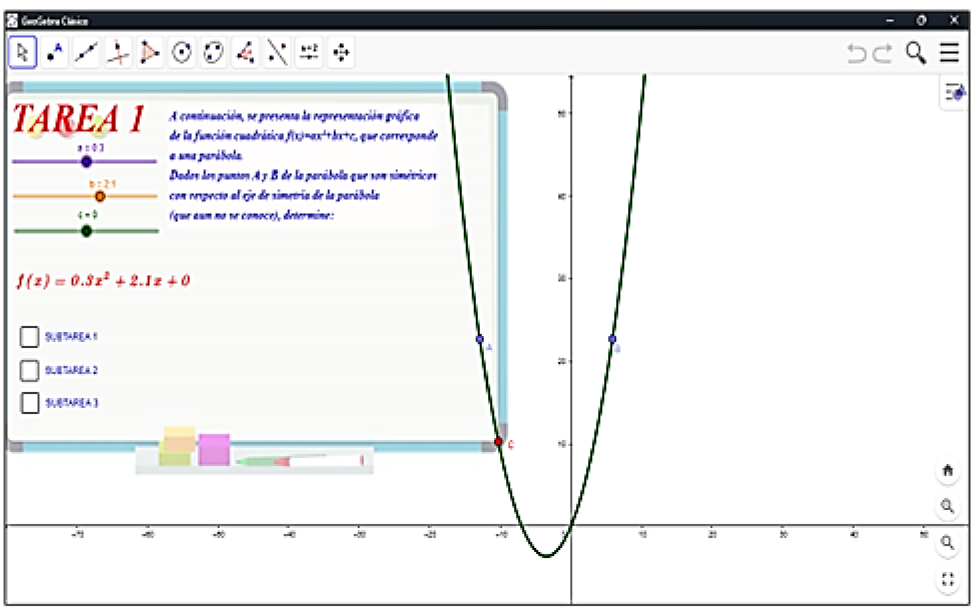
Describa el proceso desarrollado si hay más de una forma de construir el eje de simetría.

Subtarea 1.3: Cambie el valor de los coeficientes de la función cuadrática (moviendo los deslizadores) y determine si la construcción anterior sigue siendo válida.

Luego de experimentar y charlar con su compañero de trabajo presenten un argumento que valide la construcción.

Figura 26

Diagrama de la Tarea 1



Nota. Fuente de elaboración propia del autor. La versión de la Tarea 1 se puede observar en el anexo 3.

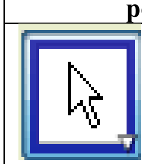
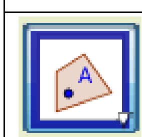
Meta: *Determinar geométricamente el eje de simetría de la representación gráfica de una función cuadrática dada.* Así mismo esta tarea está compuesta por tres subtareas. Se pretende que el estudiante logre identificar que dos puntos sobre tal parábola son simétricos si están en una recta paralela al eje de las abscisas (x). Para ello, en la representación dada aparecen dos puntos, A y B, que son simétricos (con respecto al eje de simetría no suministrado) sin importar la ubicación de tales puntos en la parábola; así el estudiante puede explorar la situación moviendo el punto A y considerar la pregunta ¿qué pasa con los puntos A y B al mover el Punto A?

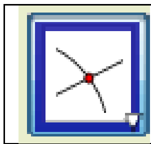
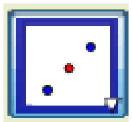
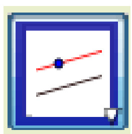
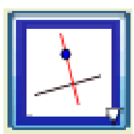
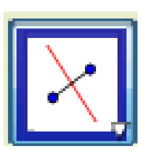
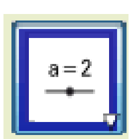
Ello conduce a que los estudiantes observen invariantes y puedan conjeturar que para encontrar o construir un punto D en la parábola suministrada (con eje de simetría paralelo al eje y) simétrico al punto C tengan que construir la recta paralela al eje x o perpendicular al eje y que pase por el punto D. Finalmente comprender que para construir el eje de simetría de la representación gráfica de la función cuadrática dada los puntos simétricos A y B o los puntos simétricos C y D serán usados como referencia para construir dicho eje. Por otro lado, al interactuar con los deslizadores le permite observar cómo el eje de simetría se mantiene constante mientras que la representación cambia de posición o de amplitud.

A continuación, se presenta la Tabla 10 que resume los artefactos que se espera use el estudiante y los posibles esquemas de utilización a nivel general en la solución de las tareas.

Tabla 10

Artefactos y algunos esquemas de uso general en GeoGebra

Artefactos a utilizar por el estudiante		**Esquemas de usos general**
	Artefacto de desplazamiento: Mueve (Arrastra o selecciona objeto)	(MU-1) Mueve. - Opción 1. Selecciona el objeto y como resultado arrastrar el objeto cambiando su posición. - Opción 2. Selecciona objeto, al arrastrar, se define un cambio de las propiedades de una longitud.
	Artefacto de puntos: Punto en objeto (selecciona un objeto o su contorno)	(PO-2) Punto en objeto. - Opción 1. Selecciona un objeto de la construcción, se define un punto restringido al lugar geométrico (no puede moverse fuera del contorno manteniendo una dependencia con el objeto).
	Artefacto de puntos: Intersección (selecciona intersección o dos	(IC-3) Intersección - Opción 1. Señala una posible intersección entre dos objetos y como resultado, si existe tal intersección, se define el punto de intersección.

	objetos sucesivamente)	- Opción 2. Seleccionan dos objetos (curvas) y se obtiene el conjunto de puntos de intersección.
	Artefacto de puntos: Medio o Centro (selecciona dos puntos, un segmentó, una circunferencia o cónica)	(MC-3) Medio o Centro. - Opción 1. Seleccionan dos puntos de la construcción y como resultado, se define el punto medio. - Opción 2. Se seleccionan un objeto (segmento) y se obtiene el punto medio.
	Artefacto de lugares especiales: Paralela punto y dirección (segmento, recta, semirrecta o vector)	(PL-4) Paralela. - Opción 1. Seleccionan un objeto (punto) de la construcción y señala un objeto (recta) de la construcción que define la dirección de la Paralela. Como resultado, se genera la paralela. - Opción 2. Seleccionan un objeto (punto) de la construcción y señala un objeto (segmento) de la construcción que define la dirección de la Paralela. Como resultado, se genera la paralela.
	Artefacto de lugares especiales: Perpendicular (punto y segmento, vector, recta o semirrecta)	(PP-5) Perpendicular - Opción 1. Seleccionan un objeto (punto) de la construcción por donde pasará la recta perpendicular y selecciona un objeto (recta). Como resultado, se genera la recta perpendicular. - Opción 2. Seleccionan un objeto (segmento) de la construcción por donde pasará la recta perpendicular y selecciona un objeto (punto). Como resultado, se genera la recta perpendicular.
	Artefacto de lugares especiales: Mediatriz (dos puntos o un segmento).	(MT-6) Mediatriz - Opción 1. Seleccionan dos objetos (puntos) de la construcción por donde pasará la Mediatriz. Como resultado, se genera la recta Mediatriz (o perpendicular) que pasa por el punto medio de los dos puntos seleccionados. - Opción 2. Seleccionan un objeto (segmento) de la construcción. Como resultado, se genera la recta Mediatriz (o perpendicular) al segmento que pasa por su punto medio.
	Artefacto de interacción: Deslizador (selecciona posición)	(DP-7) Deslizador - Opción 1. Seleccionan el punto deslizador en la construcción dada. Como resultado le permite ajustar valores (o parámetros) en tiempo real mientras mueve el punto a lo largo de la barra del deslizador.
	Artefacto de herramientas generales: Aproximar (clic/tocar para ampliar o rueda del ratón)	(AP-8) Aproximar - Opción 1. Selecciona cualquier objeto de la construcción. Luego, usa el clic izquierdo para seleccionar el área donde deseas ampliar la vista. - Opción 2. Al hacer clic, GeoGebra centrará la vista en el objeto seleccionado y ampliará el área, permitiendo un enfoque más detallado en esa parte de la gráfica. - Opción 3. Si utiliza el ratón, gira la rueda del ratón hacia adelante para acercar la vista o hacia atrás para alejarla. Al hacer esto, la vista de la gráfica se ajustará en tiempo real,

		permitiendo observar detalles más cercanos o tener una visión más detallada de la construcción.
	Artefacto de herramientas generales: alejar(clic/tocar para reducir o rueda del ratón)	(AJ-9) Alejar - Opción 1. Selecciona cualquier objeto de la construcción. Luego, usa el clic izquierdo para seleccionar el área que desea alejar la vista. - Opción 2. Al hacer clic, GeoGebra centrará la vista en el objeto seleccionado y reducirá el área, permitiendo un enfoque más completo de la construcción. - Opción 3. Si utiliza el ratón, gira la rueda del ratón hacia atrás para alejar la vista de la construcción. Al hacer esto, la vista de la gráfica se ajustará en tiempo real, permitiendo observar detalles más alejados o tener una visión más general de la construcción.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

Desde el punto de vista de la interacción con la TD (ver Tabla 11), es decir desde el uso de los artefactos, se espera que se den los siguientes posibles esquemas de utilización en el contexto de la tarea 1.

Tabla 11

Algunos esquemas de utilización en el contexto de la Tarea 1 desde la interacción con TD (GeoGebra)

Artefacto	**Posible esquema de utilización en el contexto de la tarea**
Mueve (Arrastra o selecciona objeto)	Dados los puntos C y D sobre la parábola, selecciona la herramienta nombrada ***Mueve***, arrastrar el punto C sobre la parábola, se genera un movimiento de los puntos C y D permitiendo evidenciar dependencia entre ellos.
Punto en objeto (selecciona un objeto o su contorno)	Selecciona ***punto en objeto*** y da clic sobre la parábola para construir un punto restringido al lugar geométrico.
Intersección (selecciona intersección o dos objetos sucesivamente)	Dado una parábola y una recta *l* que pasa por un punto C de la parábola, seleccionar la herramienta nombrada ***Intersección***, da clic en la parábola y en la recta *l,* se genera el punto de intersección D entre la parábola y la recta *l* que pasa por C (si C no es el vértice).
Medio o Centro (selecciona dos puntos, un segmentó, una circunferencia o cónica)	Dados los puntos C y D sobre la parábola selecciona la herramienta M***edio o Centro***, da clic en C y D puntos de la parábola, se genera un punto F (punto medio) entre C y D.
Recta paralela punto y dirección (segmento, recta, semirrecta o vector)	Dado un punto C y una recta *l* en el plano, al seleccionar la herramienta nombrada ***Paralela***, dar clic en el punto C y en la recta *l*, se genera una recta paralela a *l* que pasa por C.

Recta Perpendicular (punto y segmento, vector, recta o semirrecta)	Dado un punto C y una recta *l* en el plano, al seleccionar la herramienta nombrada ***Perpendicular***, da clic en el punto C y en la recta *l*, se genera una recta perpendicular a *l* que pasa por C.
Mediatriz por (dos puntos o un segmento).	Dados los puntos C y D restringidos al lugar geométrico sobre la parábola, seleccionar la herramienta nombrada ***Mediatriz***, dar clic en los puntos C y D, se genera la mediatriz que pasa por F (punto medio de C y D).
Deslizador (selecciona posición)	Selecciona el ***Deslizador*** para modificar los valores de los coeficientes a, b, y c de la función cuadrática dada. Para observar cómo el eje de simetría se mantiene constante mientras que se transforma la parábola.
Aproximar (clic/tocar para ampliar o rueda del ratón)	Dado la representación gráfica, selecciona la herramienta ***Aproximar*** de la barra de herramientas ubicada en la parte superior de la interfaz de GeoGebra. Da clic en la vista gráfica, se genera el acercamiento de la construcción.
Alejar (clic/tocar para reducir o rueda del ratón)	Dado la representación gráfica, selecciona la herramienta ***Alejar*** de la barra de herramientas ubicada en la parte superior del interfaz de GeoGebra. Da clic en la vista gráfica, se genera el alejamiento de la construcción.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

4.2.2.1 Análisis de posibles esquemas de usos asociados a los artefactos: Tarea 1

La *subtarea 1.1*, tiene como objetivo, primero que el estudiante identifique en qué condiciones dos puntos dados de la parábola son simétricos (a partir de moverlos e identificar propiedades invariantes) y utilice esas observaciones para construir el punto simétrico de otro punto dado C empleando, por ejemplo, del grupo lugares especiales el artefacto recta *Paralela o Perpendicular* y del grupo puntos *punto de Intersección*. Además, se busca que el estudiante valide su construcción al seleccionar del grupo movimiento el artefacto *Mueve,* determinando si al mover el punto C, el supuesto punto simétrico mantiene las relaciones de dependencia. Para ello se prevén los siguientes escenarios:

1. El estudiante emplea el artefacto recta *Paralela*: Para construir una recta paralela al eje *x* por el punto C, determina la intersección con la parábola y selecciona el artefacto *Mueve* para validar que el punto D sea simétrico a C. Se prevé que antes del escenario mencionado el estudiante mueva los puntos dados para identificar la relación que existe entre ellos; construya una recta que pasa por ellos e identifique que es paralela al eje *x*.

2. El estudiante utiliza el artefacto recta *Perpendicular* para construir una recta perpendicular al eje *y* por el punto C, determina la intersección con la parábola y selecciona el artefacto *Mueve* para validar que el punto D sea simétrico a C.
3. Selecciona el artefacto *Punto en Objeto* para ubicar el punto D en la misma dirección (sobre una misma línea) del punto C y selecciona el artefacto *Mueve* para validar que el punto D sea simétrico a C.

La *subtarea 1*.2, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo puntos el artefacto Medio *o Centro*, del grupo lugares especiales *Mediatriz*, recta para *Paralela* o *Perpendicular* para construir el eje de simetría de la parábola, asimismo, que explore cómo cada artefacto contribuye a la precisión, es decir, la capacidad de los estudiantes para construir el eje de simetría en el lugar correcto. De manera exacta y percepción del eje de simetría. Particularmente se espera que el estudiante plantee una conjetura en relación con la forma de identificar o definir el eje de simetría de la parábola dada. Para ello se prevén los siguientes escenarios:

1. Selecciona el artefacto punto *Medio o Centro*, para los puntos C y D, en el punto que aparece da clic derecho del ratón sobre el punto, selecciona Renombrar y digita la letra F para nombrar al punto, luego construye la *Paralela* al eje *y* que pasa por el punto F. Una forma de confirmar que tal recta perpendicular al eje *x* es el eje de simetría de la parábola dada. Es que el estudiante selecciona *Mueve* para verificar que el punto F pertenece a la recta paralela al eje *y,* siendo el punto C simétrico al punto D. Es decir que todos los puntos de la parábola equidistan la recta paralela al eje *y* o perpendicular al eje *x* en ambos lados.
2. Construye el punto Medio F entre C y D; para ello, selecciona punto *Medio o Centro* da clic en los puntos C y D, nombra al nuevo punto con la letra F, luego construye una recta perpendicular al eje *x* que pasa por el punto F, selecciona *Mueve* para verificar que el punto F pertenece a la recta perpendicular al eje *x* que pasa por los puntos C y D.

3. Selecciona el artefacto *Mediatriz*, da clic en los puntos C y D o en A y B, selecciona *Medio o Centro*, da clic en los puntos C y D o en A y B, nombra el nuevo punto con la letra F lo que permite observar que el eje de simetría de la parábola pasa por el punto medio F de los puntos simétricos C y D y sería una forma de confirmar que tal recta perpendicular al eje x es el eje de simetría de la parábola dada.

La *subtarea 1*.3, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo interacción el artefacto *Deslizador*, para visualizar y validar cómo los cambios en los coeficientes de la función cuadrática afectan la posición y amplitud de la parábola, pero no el significado del eje de simetría y su construcción. Para ello se prevén los siguientes escenarios:

1. Cliclea en el punto del *Deslizador* y con las flechas direccionales del teclado *Mueve* el punto a a izquierda o derecha, para cambiar los valores de los coeficientes de la expresión algebraica de la función cuadrática y ver la modificación que presenta la representación gráfica (parábola) de esta forma puede proponer conjeturas.

2. Selecciona el punto del *Deslizador* con el ratón, da clic izquierdo del mismo para arrastrar el punto del *Deslizador* a izquierda o derecha y modificar la construcción, para visualizar lo ocurrido y proponer conjeturas.

En esta tarea se pueden presentar las siguientes conjeturas:

- Sí arrastró el punto a del deslizador que es el coeficiente a la parábola se hace más ancha (abre) o se estrecha (cierra) más pero el eje de simetría sigue en el mismo lugar.
- Si arrastro el punto b del deslizador que es coeficiente b de la expresión algebraica de la función cuadrática, el eje de simetría sí cambia porque afecta la posición del vértice de la representación gráfica de la función cuadrática (parábola)
- Si arrastro el punto c del deslizador del coeficiente c de la expresión algebraica de la función cuadrática no afecta el eje de simetría ya que solo mueve la parábola hacia arriba o hacia abajo.
- La construcción del eje de simetría sólo es válida si no se modifica el punto b del Deslizador que es el coeficiente b de la expresión algebraica de la función cuadrática,

porque es el único que afecta su posición los cambios de los puntos a y c de los deslizadores que son de los coeficientes *a* y *c* de la expresión algebraica de la función cuadrática no alteran el eje de simetría de la construcción (parábola).

Se puede presentar que, en cada subtarea de ser necesario, el estudiante haga uso de los artefactos *Aproximar* o *Alejar* de la siguiente manera:

1. Haga clic izquierdo del ratón en el artefacto alejar o aproximar que se encuentran en vista gráfica para ver la construcción.
2. Mueva la rueda del ratón hacia adelante para aproximar o mueva la rueda del ratón hacia atrás para alejar la construcción

Como conclusión, se espera a nivel conceptual que el estudiante llegue a identificar que el eje de simetría es una recta, para este caso, perpendicular al eje *x* (o paralela al eje *y*) tal que identifique que dos puntos sobre la representación de la función cuadrática dada (con dominio los reales y eje de simetría paralelo al eje *y*) son simétricos si están en una recta paralela al eje *x,* y que una forma de construir el eje de simetría consiste en tomar dos puntos en la parábola que estén en la misma ordenada y luego construir su Mediatriz que pasa por el punto medio de los puntos simétricos AB.

4.2.3 Tarea 2: Identificar el lado recto

Materiales y recursos: Se suministra un archivo en formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 2.T-APPLET. En él se presenta en la vista gráfica un deslizador, puntos en objeto, recta paralela al eje *x,* la recta perpendicular al eje *x* (eje de simetría), representación gráfica de la función cuadrática (parábola), Casillas de control.

Formulación de la tarea: Considere la representación gráfica (como se muestra en la Figura 27) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde b y c particularmente son cero, su eje de simetría, puntos A y B simétricos en tal representación, una recta *k* paralela al eje *x* y los puntos F, V, y C, realice las siguientes actividades.

*Subtarea 2.*1: Determine si la longitud de alguna cuerda AB es el doble de la longitud del segmento AC. Si existe tal cuerda ¿Quién es el punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetría? Escriba las conjeturas que tenga en relación con la respuesta a esta pregunta.

*Subtarea 2.*2: Tenga en cuenta la subtarea anterior. Fije el punto A (en el que la cuerda cumple la condición de la tarea anterior). Luego construya un punto S en la parábola. Determine: ¿Cuál es la distancia del punto F (punto medio entre A y B) al punto S?, ¿Cuál es la distancia del punto S a la recta paralela al eje *x* nombrada *k?* y ¿Qué ocurre al mover el punto S?. Para ayudar a responder tales preguntas, complete la Tabla 12 y proponga una conjetura del experimento.

Tabla 12

Registro de distancias para formular una conjetura

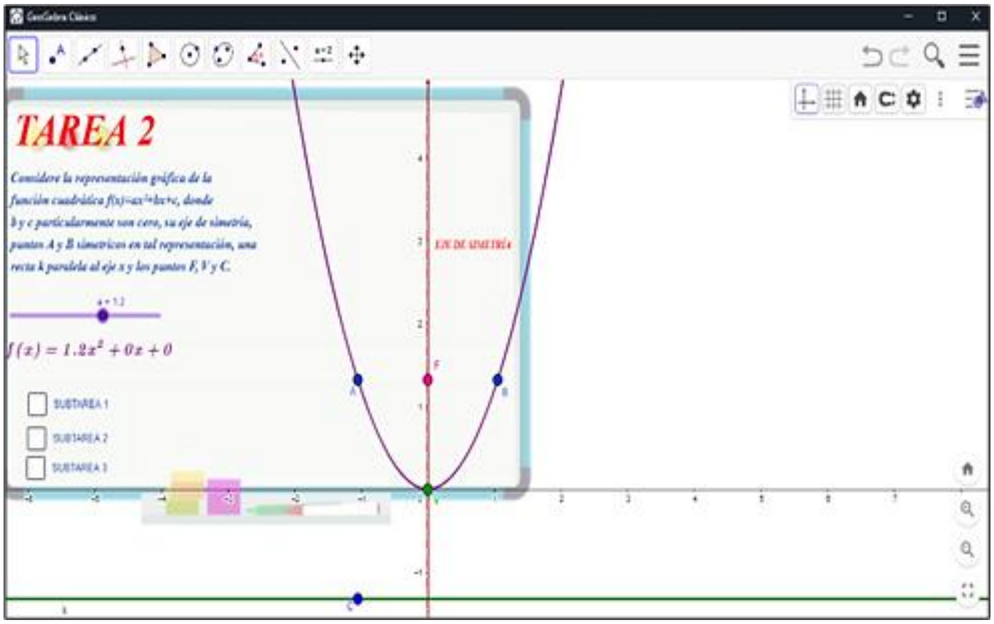
Coordenadas del punto S	**Medida de *FS***	**Distancia de S a la recta *k***
(0.59, 0,41)		
(-1,1.2)		
(0,0)		
(2, 4.8)		

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

*Subtarea 2.*3: Si fija el punto S (se fija también la recta k) y mueve el punto A. ¿Qué hallazgos visualiza? Ahora, si deja fijo el punto A como en subtarea 2.2 y cambia el coeficiente *a* de la expresión algebraica de la función cuadrática. ¿Qué ocurre? ¿Quién es la recta *k* fija en relación con la parábola? Indique qué acciones realiza en el applet, qué comandos utiliza y proponga una conjetura del experimento.

Figura 27

Diagrama de la Tarea 2



Nota. Fuente de elaboración propia del autor. La versión de la Tarea 2 se puede observar en el anexo 3.

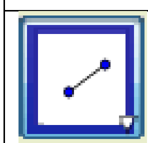
Meta: *la meta de esta tarea consiste en que, dada la representación gráfica de una función cuadrática, el estudiante identifique el lado recto de la parábola como se ha definido geométricamente* (Como una cuerda de la parábola tal que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría de la parábola dada). En esta tarea, se exploran las propiedades geométricas de una parábola dada por la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes de los términos grado 1 y grado 0 (representados por b y c) son iguales a cero. La construcción inicial incluye elementos clave como los puntos simétricos A y B respecto al eje de simetría, el vértice V, el punto medio F de la cuerda AB, un punto adicional C, y una recta *k* que es paralela al eje *x* (en este caso a la directriz de la parábola). Estos elementos proporcionan una base para analizar las distancias de AB y AC y la configuración geométrica del lado recto de la parábola, es decir, cómo se sitúa y se representa el lado recto.

A través de tres subtareas, se invita al estudiante a calcular distancias clave entre los puntos construidos foco y la recta *k*, determinar la cuerda AB que pasa por el foco F y a observar cómo cambian las configuraciones geométricas al variar la posición de los puntos A y S en la parábola o el valor del coeficiente *a* de la expresión algebraica de la función cuadrática. De esta manera genera un escenario que permite al estudiante la observación de patrones, promoviendo así un enfoque activo y exploratorio que lo lleva identificar el lado recto de la parábola como un segmento con una longitud especial y a comprender su relación (por lo menos de dependencia) con la representación algebraica de la función cuadrática.

A continuación, se presenta la Tabla 13 que resume los artefactos que se espera use el estudiante en la solución de la tarea 2, junto con una descripción de los esquemas generales de uso. También se prevé que el estudiante emplee algunos artefactos descritos en la Tabla 10, como Mueve (MU-1), punto en objeto (PO-2), aproximar (AP-8) y alejar (AJ-9).

Tabla 13

Artefactos y algunos esquemas de uso general parte dos en GeoGebra

Artefactos a utilizar por el estudiante		**Esquemas de usos general**
	Artefacto de recta: Segmento (selecciona dos puntos o posiciones)	(SG-10) Segmento - Opción 1. Selecciona dos objetos (puntos en objeto) de la construcción, generando un segmento.
 	Artefacto de medición: Distancia o longitud (selecciona dos puntos, un segmento, polígono o circunferencia)	(DL-11) Distancia o Longitud - Opción 1. Selecciona dos objetos (puntos en objeto) de la construcción. Permitiendo la observación de la distancia que hay entre los puntos seleccionados. - Opción 2. Selecciona un objeto (segmento) de la construcción, da clic en el segmento, obteniendo como resultado una longitud del segmento.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

También en el marco del desarrollo de la tarea 2 se espera que se utilicen artefactos descritos en la Tabla 11 con los posibles esquemas de utilización en contexto con la Tarea 2 y los artefactos con los esquemas de utilización como Mueve, punto en objeto, aproximar y alejar descritos en el contexto de la tarea en la Tabla 14.

Tabla 14

Algunos esquemas de utilización, parte dos en el contexto de la tarea desde la interacción con TD (GeoGebra)

Artefacto	Posible esquema de utilización en el contexto de la tarea
Segmento (selecciona dos puntos o posiciones)	Dados los puntos A y B sobre la parábola selecciona la herramienta Segmento, da clic en A y B, se genera el segmento AB Realiza el mismo proceso para generar el segmento AC.
Distancia o longitud selecciona dos puntos, un segmento, polígono o circunferencia)	Dados los puntos A y B sobre la parábola selecciona la herramienta Distancia o Longitud, da clic en A y luego en B, se genera la medida de la cuerda AB. Dados los puntos A y B sobre la parábola selecciona la herramienta Distancia o Longitud, da clic en el segmento AB y se genera la medida de la cuerda AB.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

4.2.3.1 Análisis de posibles esquemas de usos asociados a los artefactos: Tarea 2

La *subtarea* 2.1, tiene como objetivo que el estudiante utilice, del grupo movimiento los artefactos *Mueve,* del grupo dirección, el artefacto *Segmento y* del grupo medición los artefactos *Distancia o Longitud*, de esta forma se genera y calcula la medida de la cuerda AB y del segmento AC para establecer, a partir del arrastre, cuándo se cumple que la longitud de la cuerda AB es el doble del segmento AC, para ello se anticipan los siguientes escenarios que pueden darse en la exploración hecha por el estudiante.

1. Selecciona el artefacto segmento, da clic en el punto A y da clic en B, luego hace lo mismo con los puntos A y C, Acto seguido selecciona el artefacto Distancia o Longitud y da clic en el segmento AB y después en el segmento AC. Finalmente selecciona el artefacto Mueve y arrastra el punto A hasta encontrar que las distancias cumplan que AB sea el doble de AC.

2. Selecciona el artefacto segmento, da clic en el punto A y luego en B, luego hace lo mismo con los puntos A y C. Acto seguido selecciona el artefacto Distancia o Longitud y da clic en el punto A y después da clic en B y hace el mismo proceso para AC. Finalmente selecciona el artefacto Mueve y arrastra el punto A para encontrar una cuerda que cumpla que AB sea el doble de AC.

3. Selecciona Distancia y Longitud, da clic en el punto A y luego da clic en el punto B, hace el mismo proceso para los puntos A y C, Finalmente selecciona el artefacto Mueve y arrastra el punto A hasta encontrar una cuerda que cumpla que AB sea el doble de AC.

La *subtarea* 2.2, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo puntos el artefacto *punto en objeto,* del grupo medición, *Distancia o Longitud y* del grupo movimiento *Mueve*, de esta forma calcular las longitudes SF y del punto S a la recta paralela al eje x nombrada k, así mismo de lo que puede ocurrir con las longitudes de la cuerda AB y el segmento AC a partir de mover el punto S. Para esto se anticipan los siguientes escenarios que puede llegar a realizar el estudiante.

1. Selecciona el artefacto *punto en objeto* da clic derecho sobre la parábola, genera el punto luego renombrar el punto, para ello da clic derecho sobre el punto, selecciona renombrar y digita la letra S, seguido selecciona el artefacto *Distancia o Longitud* da clic sobre los puntos S y F luego hace el mismo proceso con el punto S y la recta k, para determinar las medidas. Finalmente selecciona el artefacto *Mueve* y arrastra el punto S sobre la parábola, de esta forma explora y visualiza las longitudes para indicar que cualquier cuerda FS tiene la misma longitud de cualquier segmento de S a la recta k (en este caso la directriz). Es decir que las longitudes de los segmentos FS (del punto S al foco F) y Sk (para este caso la distancia perpendicular del punto S a la recta k mediatriz) son iguales independientemente de la posición del punto S al arrastrarlo sobre la parábola.

2. Determina la cuerda AB, para ello selecciona el artefacto *Segmento*, da clic en los puntos A y B seguido selecciona el artefacto *Distancia y Longitud*, da clic en los puntos A y B, realice el mismo proceso para el punto F y la recta k. y calcula la

longitud del segmento F*k*. Finalmente selecciona el artefacto *Mueve* para arrastrar el punto S sobre la parábola, de esta forma explora y visualiza las longitudes.

3. Determina la cuerda AB, para ello selecciona el artefacto *Segmento* da clic en los puntos A y B seguido selecciona el artefacto *Distancia o Longitud*, da clic en el segmento AB calculando la medida de la cuerda AB, realiza el mismo proceso para el punto F y la recta *k.* y calcula la longitud del segmento F*k.* Finalmente selecciona el artefacto *Mueve* para arrastrar el punto S sobre la parábola, de esta forma explora y visualiza las longitudes.

La *subtarea* 2.3, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo mueve, el artefacto *Mueve*, de esta forma explora las longitudes SF y del punto S a la recta paralela al eje *x* nombrada *k*, así mismo de lo que puede ocurrir con las longitudes de la cuerda AB y el segmento AC a partir de mover el punto A. Para esto se anticipan los siguientes escenarios que puede llegar a realizar el estudiante.

1. Da clic derecho del ratón sobre el punto S selecciona propiedades, luego habilita la casilla objeto fijo, seguido hace clic derecho del ratón sobre el punto A para deshabilitar la opción objeto fijo. Finalmente arrastra el punto A sobre la parábola. Con la observación del experimento determina que las longitudes FS y S a la recta *k* (perpendicular al eje de simetría) son distintas para cualquier punto S, posteriormente, fija nuevamente el punto A y selecciona el punto del deslizador para mover y cambiar el coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática, para ello arrastra con el ratón el punto a del deslizador, o mueve con las flechas direccionales del teclado, para observar las longitudes de la cuerda AB, y la relación de esta con FS y Sk.

En esta tarea es posible que el estudiante proponga una de las siguientes conjeturas:

- Si se mueve el punto S la longitud de la cuerda AB cambia, pero el segmento AC se ajusta de forma proporcional pero no en todos los casos.

- El lado recto siempre es el segmento que cruza un punto importante (foco) y va hacia los lados de la parábola y su posición no cambia, aunque mueva los puntos A y S, además es perpendicular al eje de simetría.

- Aunque se cambie el valor del coeficiente a de la expresión algebraica de la función cuadrática y cambie la longitud del segmento AB este siempre pasa por un punto especial llamado foco (F).
- Si se mueve el punto S cambia las posiciones de los segmentos FS y Sk, pero las longitudes de estas se mantienen igual.
- Para todos los puntos sobre la parábola se cumple que FS = Sk porque todos los puntos S de la parábola están en la misma distancia del foco (F) y de la recta k que se llama directriz.

Como conclusión, se espera institucionalizar a nivel conceptual que el estudiante debe identificar el lado recto como un segmento definido geométricamente, cuyo cálculo y relación con otros elementos de la parábola se mantiene constante, independientemente del cambio del arrastre del punto a del deslizador que es el coeficiente *a* de la función cuadrática. Además, el estudiante experimentó experimentalmente que cualquier punto sobre la parábola cumple con la propiedad de equidistancia respecto al foco y la directriz.

4.2.4 Tarea 3: Relación de la longitud del lado recto de la parábola con la expresión algebraica de la función cuadrática

Materiales y recursos: En la Figura 28, Se subministra un archivo en formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 3.T-APPLET. En él se presenta en la vista gráfica tres deslizadores, la representación gráfica de la función cuadrática (parábola), con la construcción del segmento AB lado recto, eje de simetría, vértice(V) y foco (F), representación algebraica de la función cuadrática y casillas de control.

Formulación de la tarea: Dada la construcción geométrica del lado recto de una representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, una parábola, realice las siguientes tareas:

*Subtarea 3.*1: Calcule la longitud del lado recto AB, luego observe la longitud y cambie cada uno de los valores de los coeficientes de la expresión algebraica de la función cuadrática *a,b*, y *c*. ¿De qué coeficientes depende la longitud del lado recto? Proponga una conjetura en relación con la dependencia de la longitud del lado recto y algún coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática. Complete las Tablas 15 y por parejas de estudiantes redacten por separado cómo varía la longitud del lado recto al modificar cada coeficiente. Además, tome algunas capturas de pantalla que evidencien los cambios en la longitud del lado recto al modificar los coeficientes.

Tabla 15

Registro de la variación de la longitud del lado recto al modificar los coeficientes de la expresión cuadrática.

a	*b*	Medida del lado recto
2	5	
2	-2	
2	1	
2	-3	

a	*c*	Medida del lado recto
-4	0	
-4	1.5	
-4	-2.5	
-4	4	

a	*b*	*c*	Medida del lado recto
2	5	-1	
-3	-1	-2	
4.5	3.5	-0.5	

Nota: fuente de elaboración propia del autor.

*Subtarea 3.*2: Completando la Tabla 16 en la vista hoja de cálculo o la que aparece a continuación proponga una conjetura aritmética en relación con el valor del coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática del que depende el lado recto y su longitud. Incluya tres números más en la tabla, redacte con su compañero una conclusión sobre qué coeficiente afecta la longitud del lado recto.

Tabla 16

Variación de la longitud del lado recto según el valor de un coeficiente de la expresión cuadrática

Valor del coeficiente del que depende	Medida del lado recto
	1
0.5	
	4

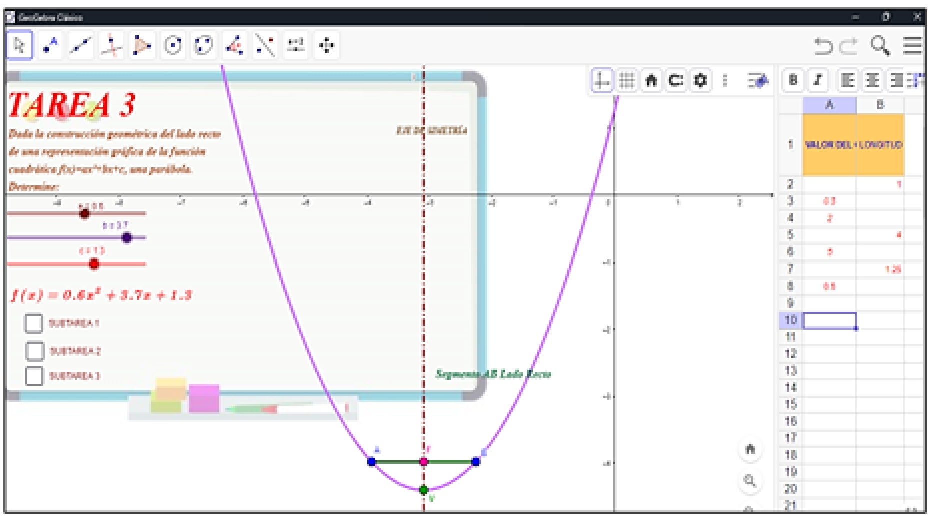
5	
	1.25
0.6	

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

Subtarea 3.3: Proponga una conjetura entre la relación de la longitud del lado recto del coeficiente *a* y la distancia del foco (F) al vértice (V) de la parábola. Compare con otra pareja la propuesta de su escrito, e indiquen si hay puntos de opinión en común

Figura 28.

Diagrama de la tarea 3 en GeoGebra



Nota. Fuente de elaboración propia del autor. La versión de la Tarea 3 se puede observar en el anexo 2.

Meta: *El propósito de esta tarea consiste en que, dada la representación gráfica de una función cuadrática, relacionar la longitud del lado recto con uno de los coeficientes de la función cuadrática.* Se da inicialmente la construcción de la representación gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y el segmento AB y una tabla en la vista hoja de cálculo, de modo que el estudiante observe los invariantes de los coeficientes a través de la manipulación de los valores de los coeficientes en la expresión algebraica de la función cuadrática, la representación gráfica de la parábola y la longitud del lado recto fomentado en el estudiante la formulación de conjeturas y razonamientos basados en el análisis de los datos observados en una tabla, así como en el cálculo y comparación de distancias relevantes en la parábola, como la del foco al vértice, permitiendo a estudiantes fortalecer su pensamiento crítico y aritmético sobre la dependencia de la longitud del lado recto en relación con los coeficientes de la función cuadrática, promoviendo así una comprensión más profunda de las propiedades algebraico-geométricas de la representación gráfica de la función cuadrática (parábola).

Se espera que el estudiante haga uso de los artefactos *Distancia o Longitud* (DL-11)*,* *Deslizador* (DP-7) y *Mueve* (MU-1) y junto con los esquemas de uso general descritos en las Tablas 11 y 14, así mismo de los esquemas de uso en el contexto de la tarea descritos en las Tablas 12 y 15.

4.2.4.1 Análisis de posibles esquemas de usos asociados a los artefactos: Tarea 3

La *subtarea* 3.1, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo Medición, el artefacto *Distancia o Longitud,* del grupo Interacción, *Deslizador* y del grupo Movimiento el artefacto *Mueve*, de esta forma calcula la medida de la cuerda, a partir del arrastre de los Deslizadores de la expresión algebraica de la función cuadrática y observar en la representación gráfica (parábola) lo que ocurre con los objetos y a partir ello proponer un conjetura en relación al coeficiente del cual depende la longitud del lado recto. Para ello se anticipan los siguientes escenarios que pueden darse en la exploración hecha por el estudiante.

1. Selecciona *Distancia o Longitud* da clic en el segmento AB para determinar la longitud del lado recto, luego selecciona los puntos *a, b* y *c* de los deslizadores de la expresión algebraica de la función cuadrática los arrastra con el ratón de manera que realiza cambios en los valores de *a, b* y *c* por separado para ver los invariantes y determinar si hay alguna influencia en el lado recto, así mismo experimenta como estos cambios afectan la longitud del lado recto.
2. Selecciona el artefacto *Distancia o Longitud* da clic en el punto A y después en el punto B, luego selecciona los puntos *a, b* y *c* de los deslizadores de la expresión algebraica de la función cuadrática para ello ubica la flecha en los puntos de los

deslizadores y con las teclas direccionales del teclado mueve a izquierda o derecha el punto del deslizador de manera que realice cambios en los valores de *a, b* y *c* por separado para ver los invariantes y determinar si hay alguna influencia en la longitud del lado recto.

Finalmente propone una conjetura, por ejemplo:

- La longitud del lado recto AB depende únicamente del coeficiente *a* puesto que a medida que aumenta el coeficiente *a* la longitud del lado disminuye.
- El coeficiente *b* no tiene impacto directo en la longitud del lado recto AB puesto que solo afecta la posición del Vértice de la parábola.
- El coeficiente *c* no tiene impacto directo en la longitud del lado recto puesto que solo afecta la posición horizontal (izquierda o derecha) del Vértice de la parábola. De modo que solo determina la intersección de la parábola con el eje *y,* además este modifica la posición de la parábola sin alterar el lado recto AB y su longitud.

La *subtarea* 3.2, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo Interacción el artefacto *Deslizador* y grupo Movimiento *Mueve,* además manipular la hoja vista de cálculo en GeoGebra, de esta forma generar en los estudiantes habilidades para explorar, comparar y analizar relaciones algebraicas y geométricas en la función cuadrática, además de formular conjeturas a partir de la manipulación de los coeficientes de la expresión algebraica, la representación gráfica de la función cuadrática dada y análisis a través de tabla de datos en hoja de cálculo. De tal forma que permita a estudiantes proponer hipótesis fundamentadas sobre cómo los coeficientes afectan la representación gráfica de la parábola y su expresión algebraica dada, de modo que, realice razonamiento inductivo al interpretar los datos generados en la hoja de cálculo. Así mismo, el estudiante registra los valores del coeficiente *a*, la longitud del lado recto (L). Para ello se espera que los estudiantes realicen los siguientes escenarios:

1. Seleccione el punto a del deslizador del coeficiente *a* y lo arrastre hasta donde le indica la información de la tabla que se encuentra en vista hoja de cálculo. Observa la Longitud del lado recto AB, luego escribe la longitud en la tabla, posteriormente realiza el mismo proceso hasta conseguir la distancia del lado recto indicada en la

tabla, de esta forma mira el valor del coeficiente a. El proceso descrito le permite al estudiante proponer una de las posibles siguientes conjeturas:

- Cuando el coeficiente *a* tiene un valor numérico grande la longitud del lado recto AB se hace más pequeña y cuando el coeficiente *a* tiene un valor numérico pequeño la longitud del lado recto AB se hace más grande. De modo que el tamaño del lado recto cambia dependiendo del coeficiente de la variable de segundo grado, pero al revés.
- Existe una relación inversa entre coeficiente *a* y la longitud del lado recto (L). Representado como: $L = \frac{1}{|a|}$
- La longitud del lado recto AB es inversamente proporcional al valor absoluto del coeficiente *a.*

La *subtarea* 3.3, El objetivo de esta tarea consiste en que el estudiante utilice del grupo Medición *Distancia o Longitud,* de esta forma identifique patrones, registre datos, y proponga conjeturas fundamentadas sobre la dependencia geométrica y algebraica permitiéndole fortalecer el razonamiento inductivo y el desarrollo de competencias TD con el uso de GeoGebra aplicadas en tareas matemáticas particularmente la longitud del lado recto de la representación gráfica (parábola) de la función cuadrática dada, para ello los estudiantes analizan la relación entre la longitud del lado recto de la parábola, el coeficiente *a* de la expresión algebraica de la función cuadrática, y la distancia entre el foco (F) y el vértice (V). de manera que los estudiantes explorarán cómo la variación del coeficiente *a* afecta tanto la forma de la parábola como la longitud del lado recto y la distancia FV. Se anticipa que los estudiantes realicen los siguientes escenarios:

a. Selecciona el artefacto *Distancia o Longitud* para calcular la distancia entre el foco y el vértice, da clic en el punto F, luego V y con la Distancia o longitud del lado recto determinada anteriormente le ayuda a visualizar los cambios que presenta la construcción de la parábola dada, por ejemplo, observa cómo cambia la forma de la parábola, la longitud del lado recto y la posición del foco (F) con respecto al vértice (V). permitiéndole proponer conjeturas como:

- La distancia de FV (del foco al vértice) se relaciona con la longitud de AB (lado recto) puesto que cuando el punto F (foco) está más lejos del punto V (vértice) el segmento AB (lado recto) es más grande.
- Cuando el valor del coeficiente *a* es más grande el punto F (foco) está más cerca del punto V (vértice).
- El segmento AB (lado recto) es cuatro veces la distancia entre los puntos F y V (el foco y el vértice)

Como conclusión, se espera que el estudiante no solo identifica cómo el coeficiente *a* afecta la longitud del lado recto, sino también cómo *a* controla la distancia entre el foco y el vértice, conectando estas propiedades de la representación gráfica con la expresión algebraica de la función cuadrática. Además, que establezca que la longitud del lado recto de la representación geometría de una función cuadrática dada es el inverso del coeficiente principal de la expresión algebraica de la función cuadrática.

4.2.5 Tarea 4: Aplicación del lado recto correspondiente a una función cuadrática: juego de aviones de papel

Materiales y recursos: Se suministra un archivo en formato GeoGebra file (.ggb) titulado como: 4.T-APPLET. En él se presenta la simulación de una situación sobre el lanzamiento de un avión que incluye deslizadores y cuadros de entrada. Ver Figura 29.

Formulación de la tarea: Lea la situación problema e interactúe con el simulador Juego de aviones de papel.

En el colegio se realiza una competencia sobre el vuelo de aviones de papel diseñados por el estudiante de undécimo. Por ejemplo, Abel lanza su avión desde un punto inicial y una altura considerable para su estatura y el recorrido que define el avión es un segmento (porción) de parábola, como lo muestra la simulación. Solucione las siguientes tareas.

Subtarea 4.1: Si la función que modela el recorrido del avión es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine el valor independiente cuando el avión de papel cae al suelo. ¿Cuál es el dominio de esta función cuadrática? Para ello:

a. Abra el archivo en GeoGebra Titulado como: 4.T-APPLET.
b. Ubique los controles de animación, luego de play, cuente hasta 7 en la mente y pause la simulación. Con el ratón del computador seleccione el borrador, realiza la misma operación tres veces. Describa lo que se observa en la simulación.
c. Ubique los deslizadores en los siguientes valores: y0= 1.5; v0=7.8; α=72° y de play a la animación. ¿Qué representa cada deslizador?

NOTA: Para responder las preguntas puede usar puntos sobre un objeto, moverlo, ver sus coordenadas entre otras cosas. Además, las tareas que siguen se trabajarán con los valores de los deslizadores indicados anteriormente.

Subtarea 4.2: ¿Cómo puede determinar el valor del coeficiente cuadrático? Describa el proceso y argumente su respuesta. Puede activar las casillas de verificación y usar los objetos que aparecen.

Subtarea 4.3: Conociendo el valor del coeficiente *a* y *c* dado por las subtareas anteriores, ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el recorrido del vuelo del avión de papel?

Ayuda: puede usar otros puntos de la gráfica y la ecuación que ha generado.

Describa los procesos que utilizó para determinar la expresión algebraica del lanzamiento del avión de papel.

Figura 29

Diagrama de la tarea 4 en GeoGebra

Nota. Fuente de elaboración propia del autor. La versión de la Tarea 4 se puede observar en el anexo 3.

Meta: *Utilizar características de una función cuadrática para interpretar y resolver problemas aplicados, fortaleciendo la comprensión de la relación entre la representación gráfica y algebraica*. Se muestra la simulación de una situación planteada y una guía impresa (Anexo 3) en la que el estudiante encontrará las tareas a realizar y las indicaciones para interactuar con la simulación. Se promueve el desarrollo de procesos de experimentación y visualización que permitan un aprendizaje significativo y el reconocimiento de los objetos matemáticos en situaciones comunes en su vivir, así mismo, la formulación de conjeturas y la apropiación de los artefactos que puede usar del programa GeoGebra. Específicamente, se espera el uso de los artefactos *Distancia o Longitud* (DL-11), *Deslizador* (DP-7) y *Mueve* (MU-1) y junto a los esquemas de uso general descritos en las Tablas 11 a 14.

4.2.5.1 Análisis de posibles esquemas de usos asociados a los artefactos: Tarea 4

La *subtarea* 4.1, tiene como objetivo que el estudiante se familiarice con los controles de la simulación y utilice de los grupos de la barra de herramientas los artefactos P*unto sobre objeto, Deslizador* y *Mueve* para determinar el valor independiente de la expresión algebraica correspondiente al segmento de parábola generado en la animación y su dominio. Además, el estudiante identificará que el valor independiente se determinará a partir del valor de y_0 que corresponde con el corte con el eje *y,* de esta forma podrá describir. Asimismo, identificando el corte con el eje x podrá describir el dominio.

De modo que se anticipan los siguientes escenarios que pueden darse en la exploración hecha por el estudiante.

1. Selecciona de elementos geométricos recorrido para visualizar de mejor forma el lanzamiento del avión de papel. Selecciona *punto* para ubicarlo en el suelo (eje x) luego selecciona *Distancia o Longitud,* de esta forma selecciona los puntos del suelo y punto del avión para obtener el valor independiente, para hallar el dominio selecciona *intersección* entre la representación geométrica generada por el lanzamiento del avión, para obtener el punto cae el avión, selecciona la coordenada obtenida para observar el valor de x donde $y = 0$
2. Activa de los elementos geométricos recorrido para visualizar de mejor forma el lanzamiento del avión de papel, da clic en el punto del avión para observar las coordenadas, si $x = 0$ en esta coordenada el valor de y es el término independiente. Determina el dominio de la representación geométrica obtenida al lanzar el avión y describe los pasos realizados anteriormente.

La *subtarea* 4.2, tiene como objetivo que el estudiante utilice del grupo medición el artefacto *Distancia o Longitud, asimismo usar las casillas de verificación y los objetos que aparecen en la simulación.* Para ello se pueden dar los siguientes escenarios;

1. Activa de los elementos geométricos la casilla de verificación del lado recto, observa el lado recto y utiliza el artefacto *Distancia o Longitud* para determinar la longitud del lado recto. De esta manera encuentra la relación que hay entre la medida del lado

recto y el coeficiente *a* de la expresión algebraica y hace uso de la fórmula del lado recto

$L = \frac{1}{|a|}$ y la despeja con respecto *a*. por ejemplo si la longitud del lado recto es 3,34:

$$3{,}45 = \frac{1}{|a|}$$
$$3{,}45|a| = 1$$
$$|a| = \frac{1}{3{,}45}$$
$$|a| = 0.289$$
$$a = 0.289$$

2. Activa de los cuadros de control, el recorrido seguido del eje de simetría selecciona *intercesión,* da clic en la representación geométrica de la parábola y en el eje de simetría para encontrar el punto de intersección y observa las coordenadas del vértice, luego selecciona *punto en objeto,* dar clic en la parábola y selecciona el punto con botón derecho del ratón para observar las coordenadas del punto, finalmente realiza procesos algebraicos para encontrar el valor de *a.*

La *subtarea* 4.3, El objetivo de esta tarea consiste en que el estudiante genere diferentes estrategias para la construcción de la expresión algebraica que Modela el recorrido del avión de papel, utilizando artefactos, esquemas de uso general, las Tablas 13 y 16 y los esquemas de utilización desde la interacción con TD GeoGebra en el contexto de la tarea descritos en las Tablas 14 y 17.

Para determinar los puntos clave de la trayectoria. Por ejemplo, el punto de inicio y el vértice en la representación geométrica generada por el lanzamiento del avión (parábola), puede hallar los coeficientes de la parábola que se ha generado del recorrido y de forma algebraica reemplazar el valor del coeficiente *a* en la ecuación del eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$ luego despejar con respecto *b* para obtener el valor el coeficiente de dicho coeficiente. Por ejemplo,

$$x = -\frac{b}{2(0.289)}$$

$$1.82 = -\frac{b}{2(0.289)}$$
$$b = -2(0.289)(1.82)$$
$$b = -2(0.289)(1.82)$$
$$b = -1.084$$

Como conclusión se espera que al término de estas tareas los estudiantes no sólo entiendan la representación geométrica de una función cuadrática, sino que también el manejo de expresiones algebraicas involucradas en dicha representación.

CAPÍTULO 5

5. Implementación y análisis de la propuesta

5.1. Descripción de la implementación

El propósito principal de la implementación de la propuesta es revisar, mejorar y adaptar las tareas diseñadas con el fin de fortalecer el estudio de propiedades algebraico-analíticas de funciones cuadráticas. Esta etapa permite observar directamente cómo los estudiantes abordan las tareas mediadas por TD, identificando posibles ajustes en su redacción, el nivel de dificultad de las preguntas, la claridad en las instrucciones, la pertinencia de los artefactos utilizados y posibles interacciones que surjan entre los artefactos y los estudiantes. A partir de esta implementación, se obtiene por un lado información valiosa que permite la reestructuración de las tareas, de manera que estas sean más efectivas y significativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto de estudio y por otro evidencias de los esquemas de uso de los artefactos utilizados por los estudiantes.

Específicamente, en este capítulo se presenta una descripción de la muestra, del cronograma de implementación de las actividades, de los recursos a utilizar, de las herramientas para la recolección de los datos, de las características observables que guiaran el análisis de los datos y un análisis de la información recolectada.

5.2. Muestra y criterios de la selección

La muestra de participantes de esta fase de la investigación está conformada por seis estudiantes de grado undécimo de la I.E la Armonía, quienes trabajan en parejas atendiendo a la disposición de equipos tecnológicos en la institución y la dinámica que se espera que surja en la implementación de las actividades. El grupo fue seleccionado de manera intencional, de acuerdo con el perfil de cada estudiante y algunas recomendaciones de los directivos y docentes de dichos estudiantes en relación con el grado de compromiso y el interés por el aprendizaje de las matemáticas. Además, para la participación de los estudiantes se contó con la autorización de los padres, a quienes se informó por medio de una carta personal, y del rector de la institución. Los estudiantes seleccionados son cuatro mujeres y dos hombres cuyas edades están entre los 16 y 18 años, edad acorde con la edad promedio para estudiantes de educación media; sus desempeños académicos en general son los esperados, según el concepto de algunos docentes de la institución que les orientan clase, son responsables con sus tareas y trabajos asignados en diferentes asignaturas. Además, el grupo seleccionado cuenta con conocimientos y competencias básicas en matemáticas necesarios para abordar las actividades, como el reconocimiento del concepto de función, función polinómica, dominio y rango de una función, la manipulación (a nivel inicial) de representaciones tanto algebraicas como gráficas de funciones.

5.3. Cronograma de actividades

La implementación se planeó para ser desarrollada en ocho sesiones de 60 minutos, distribuidas en diferentes días de acuerdo con la disponibilidad de los espacios físicos. En la Tabla 17. Se presentan puntualmente la distribución de las actividades y el propósito principal de cada una.

Tabla 17

Cronograma de la intervención

Número y día intervención	Hora	Actividad	Propósito
1. miércoles 2 abril.	1:00 pm	Presentación plenaria (empleando un archivo en Power Point) del software GeoGebra según lo dispuesto en la	Desarrollar competencias tecnológicas de los estudiantes usando herramientas básicas de

		Tarea 0: reconocimiento del entorno GeoGebra	geogebra; manipulando y explorando algunos de los artefactos que serán empleados en el desarrollo de las tareas.
2. jueves 3 abril.	11:15am	Presentación y desarrollo de la Tarea 1: Eje De Simetría. Subtarea 1.1 construcción de punto simétricos Subtarea 1.2 construcción eje de simetría de la parábola Discusión e institucionalización de los resultados construidos esperados.	Determinar geométricamente el eje de simetría de la representación gráfica de una función cuadrática
3. jueves 3 abril.	1:00 pm	Desarrollo de la Subtarea 1.3 Validación de la construcción realizada. Discusión e institucionalización de los resultados construidos esperados.	
4. viernes 4 abril	7:00am	Presentación y desarrollo de la Tarea 2: Identificar el lado recto. Subtarea 2.1 construcción de una cuerda AB que sea el doble del segmento del punto A a la recta *k.* Discusión e institucionalización de los resultados construidos.	Identificar el lado recto como se ha definido geométricamente.
5. lunes 7 abril	8:50 am	Desarrollo de: Subtarea 2.2 Construcción de punto S sobre la parábola y cálculo de longitud SF, y Sk. Comparación de las longitudes al mover un punto. Subtarea 2.3. explorar longitudes SF y del punto S a la recta paralela al eje *x* nombrada *k*, así mismo de lo que puede ocurrir con las longitudes de la cuerda AB y el segmento AC a partir de mover el punto A Discusión e institucionalización de los resultados construidos esperados	
6. lunes 7 abril	1:00 pm	Presentación y desarrollo de la Tarea 3: Relación de la longitud del lado recto de la parábola con la expresión algebraica de la función cuadrática. Subtarea 3.1. Uso *Distancia o Longitud, Deslizador* y *Mueve*, para calcular la medida de la cuerda para establecer, a partir del arrastre de los Deslizadores de la expresión algebraica de la función cuadrática y observar en la representación gráfica (parábola) tal que conjeture cual o cuales coeficientes es del que depende la longitud del lado recto	Relacionar la longitud del lado recto con uno de los coeficientes de la función cuadrática.
7. martes 8 abril	7:00 am	Subtarea 3.2 completar tabla variación de la longitud del lado recto según el valor de un coeficiente	

		de la expresión cuadrática proponga una conjetura aritmética en relación con el valor del coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática del que depende el lado recto y su longitud Busca que el estudiante utilice del grupo Interacción el artefacto *Deslizador* y *grupo* Movimiento *Mueve,* además manipular la hoja vista de cálculo en GeoGebra, de esta forma generar en los estudiantes habilidades para explorar, comparar y analizar relaciones algebraicas y geométricas en la función cuadrática Subtarea 3.3, El objetivo de esta tarea consiste en que el estudiante utilice del grupo Medición Distancia *o Longitud,* de esta forma identifique patrones, registre datos, y proponga conjeturas fundamentadas sobre la dependencia geométrica y algebraica permitiéndole fortalecer el razonamiento inductivo y el desarrollo de competencias TD con el uso de GeoGebra aplicadas en tareas matemáticas particularmente la longitud del lado recto de la parábola.	
8. miércoles 9 abril	1:00 pm	Presentación de la Tarea 4. De presenta un problema de contexto en contexto y un simulador de este. Subtarea 4.1 utilizar simulador para dar respuesta al enunciado que es describir lo observado Subtarea 4.2 comprender el valor del término cuadrático Subtarea 4.3 describir el valor del coeficiente *a* y *c* dado por las subtareas anteriores, ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el recorrido del vuelo del avión de papel? El cual busca que, el estudiante genere diferentes estrategias para la construcción de la expresión algebraica que Modela el recorrido del avión de papel, utilizando artefactos, esquemas de uso general.	Utilizar características de una función cuadrática para interpretar y resolver problemas aplicados, fortaleciendo la comprensión de la relación entre la representación gráfica y algebraica.

Nota. Fuente de elaboración propia, este cronograma puede ajustarse en función del ritmo de trabajo de los estudiantes y de las necesidades que surjan durante el proceso. La intervención

5 y 6 por dinámicas de la institución no se ejecutaron, razón por la cual se corrieron para ser abordaron en las siguientes intervenciones, lo que causo que no se alcanzó a implementar las cuatro tareas propuestas como se tenía previsto particularmente las subtarea 3.2 y 3.3 de la tarea 3 y todo la tarea 4.

5.4 Recursos físicos para la implementación

La implementación se llevará a cabo en dos espacios de la I.E la Armonía: la biblioteca y el salón de reuniones de robótica, los cuales cuentan con un ambiente adecuado para el trabajo académico; iluminación, ventilación y acceso a energía eléctrica. Para el desarrollo de las tareas se dispone de tres computadores portátiles con el software GeoGebra previamente instalado, lo cual permitirá que los estudiantes trabajen en parejas, fomentando la colaboración y la discusión matemática entre ellos.

Las tareas diseñadas en esta implementación fueron planeadas y elaboradas de acuerdo con los propósitos de la investigación y serán entregadas a cada pareja de estudiantes en el formato de guías impresas (Anexo 2), cada una de las cuales presenta entre otros aspectos: la descripción de la tarea, imagen del diseño de las tareas en GeoGebra, algunas preguntas orientadoras que permitan o faciliten la interpretación, ejecución y análisis de las tareas por parte de los estudiantes. Además, dichas guías cuentan con espacios para escribir algunos productos de su intervención como la reflexión, el registro de datos, posibles respuestas, formulación de hipótesis, conjeturas y conclusiones.

La presentación del programa GeoGebra incluye una breve explicación del programa y la interacción inicial a través en la Tarea 0 por parte del estudiante, donde se familiarizan con las herramientas básicas necesarias de dicho programa para el desarrollo de las actividades; asimismo, se incorporó un recurso audiovisual destinado a facilitar la familiarización de los estudiantes con el entorno GeoGebra. Para ello, se sugirió el video GeoGebra - Instalación, vista algebraica, gráfica y entrada, disponible en el canal Aprendiendo con GeoGebra (2020), https://www.youtube.com/watch?v=mV1kYL8n2lI y curso básico de geogebra disponible en el canal Math Vitae (2021), https://www.youtube.com/watch?v=YCmVu1kagIY. Los cuales ofrecen una explicación clara y básica del funcionamiento del software. Los videos fueron incluidos como recurso complementario para los estudiantes y también descargados para su proyección durante la sesión, con fines educativos.

5.4.1 Herramientas para la recolección de información

En aras de obtener información pertinente que permita analizar las tareas mediadas con TD y la forma en que los estudiantes las asumen y desarrollan se han seleccionado herramientas de recolección de información cualitativa. Estas herramientas permiten capturar tanto las producciones de los estudiantes como aspectos observables durante la implementación de las tareas.

En primer lugar, se recolectarán las producciones escritas generadas por los estudiantes durante la resolución de las tareas, ya que permiten analizar de manera directa los procedimientos, argumentaciones y estrategias que son empleadas; en segundo lugar, a través de XBOX game bar, se realizará la grabación de parte del desarrollo de las tareas logrado por una pareja de estudiantes seleccionada al azar, con el propósito de registrar interacciones, el uso de los artefactos que ofrece GeoGebra, y algunos de los esquemas de utilización que emergen en el transcurso de la actividad. Finalmente, se llevará un diario de campo, en el que se documentaran las observaciones relevantes sobre el desarrollo de las tareas, las preguntas formuladas por los estudiantes, los comportamientos emergentes, y aspectos relacionados con el uso de las TD. Este instrumento permitirá identificar elementos significativos que no siempre se evidencian en las producciones escritas o grabaciones, brindando una perspectiva más completa del contexto de implementación.

5.5 Descripción de los elementos a analizar

Con el fin de organizar y analizar la información recolectada en relación con la implementación de la propuesta de tareas mediadas por TD, en la Tabla 19 se establecen los criterios que orientarán la observación e interpretación de las producciones y actuaciones de los estudiantes. Puntualmente, se establece una escala de indicadores en relación con cuatro categorías principales, a saber: *enunciado y propósito de la tarea, artefactos de la TD, objetos matemáticos y procesos matemáticos transversales*, Tabla 18.

A partir de la primera categoría se espera evaluar si el lenguaje utilizado en el enunciado de cada tarea es claro y pertinente (según los conocimientos tanto matemáticos como tecnológicos de los estudiantes), si la instrucción y pregunta de la tarea lleva a que los estudiantes aborden el desarrollo de la tarea según lo previsto en la fase de diseño y si el propósito de cada tarea es entendido. Por su parte, la segunda categoría busca establecer si los artefactos y esquemas de uso empleados en el desarrollo de la tarea se corresponden con los propuestos en el análisis a priori de cada tarea o si se utilizan otros artefactos y se generan esquemas de uso correspondientes. La tercera categoría tiene como propósito identificar si los objetos matemáticos involucrados en el desarrollo de las tareas son reconocidos, si su relación con el objeto de estudio principal es identificada y si se generan argumentos para el uso de tales objetos. Finalmente, con la última categoría se pretende establecer en qué nivel las tareas propuestas promueven el desarrollo de procesos transversales como visualizar, conjeturar. argumentar y comunicar.

Tabla 18. *Categorías para el análisis de las tareas implementadas*

Categoría	Subcategoría	Nivel	Indicador
1. Enunciado y propósito de la tarea	a. El lenguaje utilizado en la tarea es claro y pertinente para que el estudiante realice lo solicitado.	1	Los enunciados de la tarea no son claros tanto por la existencia de términos matemáticos no conocidos por ellos como por el uso de términos relacionados con los artefactos.
		2	Se observa que los enunciados de la tarea son parcialmente entendidos por el estudiante; sin embargo, requiere de apoyo de su par o docente en la interpretación de términos (matemáticos) del enunciado.
		3	Se evidencia que los enunciados de tarea son claros para el estudiante.
	b. Se asimila la instrucción propuesta en la tarea; los enunciados de las subtareas son claros para los estudiantes.	1	El estudiante entiende que debe abrir el programa, pero no sabe qué hacer con él.
		2	El estudiante entiende parcialmente las instrucciones: logra abrir el programa y explorar algunos elementos, pero necesita apoyo constante para avanzar en el desarrollo de la tarea.
		3	El estudiante logra entender completamente las instrucciones de la tarea y desarrollarla, supeditado a que el docente suministre definiciones o nociones de objetos matemáticos nombrados en la tarea.
		4	El estudiante entiende claramente la instrucción: abre el programa, identifica lo que se espera hacer y realiza la tarea de forma autónoma, siguiendo los pasos indicados.

	c. El estudiante identifica un propósito en la tarea.	1	El estudiante no entiende el propósito de la tarea ni de la subtarea, puesto que no logra establecer un sentido para las actividades que realiza.
		2	El estudiante entiende el propósito de las subtareas, pero no le es claro el propósito general de la tarea: no reconoce cómo las subtareas se articulan entre sí para alcanzar el propósito global de la tarea.
		3	El estudiante entiende el propósito de la tarea y de las subtareas, puesto que establece relaciones entre estas que le permiten reconocer el propósito general de la tarea.
2. Artefactos de la TD	a. Los artefactos que fueron utilizados en el desarrollo de cada subtarea se condicen con los propuestos en el análisis a priori.	1	No emplean artefactos de GeoGebra para el desarrollo de la tarea.
		2	Se usan artefactos de GeoGebra diferentes a los previstos en el análisis a priori de la tarea.
		3	Se emplean algunos de los artefactos de GeoGebra previstos en el análisis a priori de la tarea.
	b. Se evidencia los esquemas de uso de los artefactos por el estudiante en la tarea, basado en las subcategoría expuestas en el análisis a priori de las tareas (ver capítulo 5 Tablas 11 y 14)	1	El estudiante presenta dificultades para manejar esquemas de uso de los artefactos en la solución de la tarea.
		2	El estudiante emplea esquemas de utilización de los artefactos diferentes a los planteados en el análisis a priori de la tarea.
		3	El estudiante emplea los esquemas de uso de los artefactos planteados en el análisis a priori de la tarea, lo que demuestra que entiende la utilidad de los artefactos en la tarea a solucionar.
	c. Se evidencia que los esquemas de uso de los artefactos fueron apropiados en el desarrollo de la tarea.	1	El estudiante muestra el uso de esquemas para solucionar la tarea, pero con dificultad para comprender lo que ha realizado.
		2	El estudiante propone otros esquemas de utilización como una herramienta de exploración para dar solución a la tarea.
		3	El estudiante soluciona la tarea de manera apropiada, evidenciando esquemas de uso de acuerdo con los artefactos a utilizar.
		4	Los resultados obtenidos por el estudiante son coherentes con los objetivos y las instrucciones establecidos en la tarea, lo que indica que los esquemas de uso previstos fueron empleados para alcanzar los objetivos esperados.
3. Objeto matemático	a. En las tareas se utilizan los objetos matemáticos previstos relacionados.	1	El estudiante emplea objetos matemáticos, pero no son claramente definidos por el estudiante ni se observa relación entre ellos.
		2	El estudiante utiliza objetos matemáticos diferentes a los previstos.
		3	El estudiante utiliza los objetos matemáticos previstos en el desarrollo de la tarea de modo que establece algunas relaciones entre estos.
	b. La tarea promueve la representación de objetos matemáticos	1	Emplea elementos propios de una representación.
		2	Reconoce elementos que configuran la representación (bien sea geométrica o simbólico-algebraica) de una función cuadrática.
		3	Establece relaciones entre las representaciones geométrica y simbólico-algebraica de una función cuadrática.

4. Procesos matemáticos transversales	a. El enunciado e instrucciones de la tarea promueven el desarrollo de procesos de experimentación por parte del estudiante.	1	El enunciado y las instrucciones orientan al estudiante a realizar un proceso guiado de experimentación con los artefactos durante el desarrollo de la tarea.
		2	El enunciado y las instrucciones de la tarea promueven que el estudiante explore diferentes estrategias de uso de los artefactos en el desarrollo de la tarea.
		3	El enunciado y las instrucciones permiten que el estudiante realice procesos de exploración tanto con el propósito de descubrir relaciones entre los objetos como con el propósito de validar sus observaciones.
	b. La tarea fomenta la construcción de conjeturas por parte del estudiante.	1	El estudiante no propone conjeturas, sobre las observaciones y construcciones que realiza en el desarrollo de la tarea.
		2	El estudiante propone, bajo un proceso guiado del profesor, sus conjeturas sobre las relaciones que se dan entre los objetos matemáticos o los esquemas de uso de los artefactos.
		3	Siguiendo las instrucciones de la tarea, el estudiante propone de forma autónoma sus conjeturas frente a lo que ha realizado o hallado.
	c. La tarea lleva a que el estudiante argumente sus producciones.	1	El estudiante soluciona la tarea, pero no ofrece explicación verbal ni por escrito de lo que observa o logro de los objetivos.
		2	El estudiante hace una corta explicación de lo que observa basado en la experimentación, pero sin referirse a relaciones entre conceptos matemáticos o al uso explícito de artefactos en GeoGebra.
		3	El estudiante suministra argumentos (matemáticos o basados en los esquemas de uso de los artefactos) acerca de los resultados matemáticos obtenidos.
	d. La tarea potencia la comunicación entre pares	1	El estudiante resuelve individualmente la tarea sin comunicarse con su par.
		2	El estudiante intercambia estrategias o respuestas con su par, pero no profundiza en la explicación matemática.
		3	El estudiante intercambia ideas y genera construcciones conceptuales colectivas, para resolver la tarea o plantear una mejor estrategia que dé solución a la tarea.

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

5.6 Análisis de los datos recolectados

Se exalta que el análisis de los datos recolectados, en particular, está orientado a determinar cómo puede mejorarse el diseño de las tareas para lograr los propósitos establecidos con el uso de TD, identificando fortalezas y debilidades en relación con el propósito específico de cada tarea, los artefactos propuesto para su desarrollo, así como los esquemas de uso de tales artefactos.

La información recolectada, es decir la transcripción de la grabación realizada y las producciones (tareas) de los estudiantes que serán objeto de análisis en esta sección se pueden consultar en la carpeta en drive a través del enlace:

https://drive.google.com/drive/folders/1HDZPYvTP8TXCpFNsUtmYPFoM6aEbgnE6?usp=sharing

Puntualmente a continuación se desarrolla el análisis de las tareas implementadas atendiendo a las categorías (Tabla 18) propuestas en este capítulo. Además, se aclara que, en las transcripciones, ya sean escritos y comentarios verbales las palabras de los estudiantes se presentan en cursiva y entre comillas para facilitar su identificación, así mismo con el propósito de organizar de mejor forma la descripción del análisis. A continuación, se relacionan en la Tabla 19 las parejas que participaron en la implementación con su alcance (a nivel de subtareas desarrolladas) en el avance de las tareas:

Tabla 19

Subtareas desarrolladas por los estudiantes

<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tarea 1</th><th>Tarea 2</th><th>Tarea 3</th><th>Tarea 4</th></tr>
<tr><td>Pareja 1: conformada por los estudiantes que identificamos con los nombres Ana y Karola</td><td>Desarrolló las tres subtareas.</td><td>Desarrolló las tres subtareas.</td><td>Desarrolló de una subtareas.</td><td rowspan="3">No alcanzaron a desarrollar esta tarea.</td></tr>
<tr><td>Pareja 2: Identificados con los nombres Silvia y José.</td><td>Desarrolló dos subtareas.</td><td>Desarrolló dos subtareas.</td><td rowspan="2">No alcanzaron a desarrollar esta tarea.</td></tr>
<tr><td>Pareja 3: Identificados con los nombres Abel y Belly.</td><td>Desarrolló las tres subtareas.</td><td>Desarrolló las tres subtareas.</td></tr>
</table>

5.6.1 Análisis Tarea 1: Eje de simetría.

En el desarrollo de la Tarea 1 se observó que no todas las parejas de estudiantes lograron culminar las tres subtareas en el tiempo establecido en el cronograma, debido a diferentes razones; por un lado, no todas las parejas empezaron a abordar las subtareas al mismo tiempo, una pareja no asistió a parte de la implementación y para las parejas que sí asistieron a todas las sesiones. Se observaron dinámicas sociales que llevaron a que se dispersaran en el desarrollo de la Tarea 1 y sus subtareas.

Finalmente, a los estudiantes les tomó un tiempo 2 horas de 60 minutos para el desarrollo de la Tarea 1, distribuido de la siguiente forma: 45 minutos para la subtarea 1.1 y 1 hora con 15 minutos para las subtareas 1.2 y 1.3. En la dinámica de la implementación y observación del desarrollo de la Tarea 1 se evidenció que la pareja 2 no logró desarrollar la subtarea 1.3 y las parejas 1 y 3 lograron desarrollar todas las subtareas correspondientes.

Categoría 1. Enunciado y propósito de la tarea.

En el desarrollo de esta tarea se observa que todos los estudiantes entienden de manera parcial los enunciados propuestos, requiriendo en algunos casos la orientación del docente para una correcta interpretación. Por ejemplo, en la interacción con los estudiantes, se identificó que algunos de ellos cuestionaron el significado del concepto de eje de simetría, como se evidencia en el Fragmento 1 de la transcripción de la grabación realizada al trabajo de la pareja 3 en relación con la subtarea 1.2 de la Tarea 1.

Fragmento 1

Transcripción de la grabación pareja 3: Abel y Belly, Subtarea 1.2 de la Tarea 1 (3:05-6:21).

Abel: ¿Este es un eje de simetría? [pregunta a la profe] *¡Ahora no!*

Profe: ¿Qué?

Abel: Ósea el punto medio,

Belly: ¿el punto?

Profe: ¿Me dejas ver? ¿Me lo señalas?

Abel: Sí.

Profe: Me estás preguntando que si el punto...

Abel: el punto E es el eje de simetría.

Profe: No, porque antes me dijeron que era un punto, ¿qué? Tú lo dijiste ahorita.

Abel: ¿El medio?

Belly: El punto medio.

Profe: Es un punto medio. No es un eje de simetría, pero sí les va a servir para hacer la construcción del eje de simetría.

Abel: Ok.

Profe: vale.

Abel y Belly: listo.

Belly: Aún no se conoce el eje de simetría, aún no se conoce el término.

Profe: ¿Sabemos qué es el eje de simetría?

Belly: No Señora.

Abel: Ni idea.

Profe: ¿No se imaginan qué quiere decir o que es?

Abel: Pues de pronto es la base, ¿no?

Belly: Un punto en partida de... No sé.

Abel: Es que suena como a bases.

Profe: Cuando escuchan el término eje de simetría, ¿te suena como a una base? y en este caso, por ejemplo. ¿Cuál sería la base según tu versión?

Abel: Punto. acá.

Profe: ¿Dónde?

Abel: Acá. [señala el punto mínimo de la parábola].

Profe: Entonces, ¿ese sería el eje de simetría?

Abel: No sé. Sí.

Profe: ¿Tú qué opinas? [preguntándole a Belly] o tienes de pronto otra idea.

Belly: Pues a mí eje me suena como... No sé, como un punto de partida. ósea, donde se parten como dos. ósea, ahí sería simetría. Pues, de dónde salen las dos partes

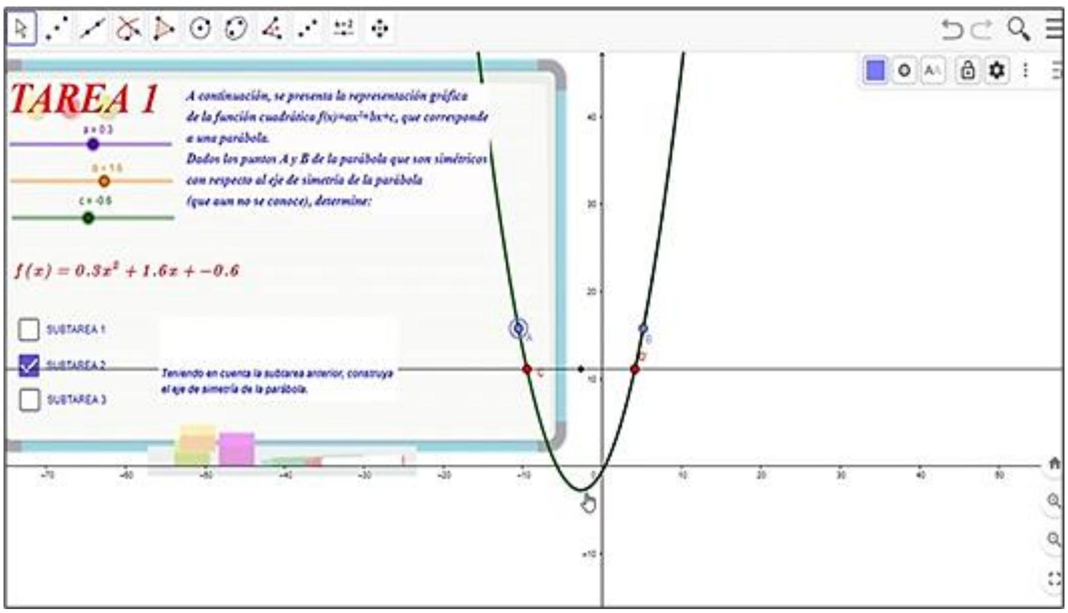
Profe: Bueno, dos partes, ¿esas dos partes como son?

Belly: ósea, igual como que siento que es como la mitad. y esto sería la simetría.

Se observa en esta parte de la transcripción que los estudiantes relacionan el eje de simetría con el vértice de la parábola (lo que ellos aluden como base) y con el punto medio de una cuerda de la parábola ortogonal al eje de simetría (punto medio entre dos puntos simétricos), cuando se dice: *ese punto es el eje de simetría* (Figura 30); por ende, el docente tuvo que intervenir para aclarar la definición de punto medio de un segmento e indicar que eso no es el eje de simetría buscado. Esto evidencia que los estudiantes reconocen que tales puntos tienen relación con el eje de simetría, pero no identifican que estos puntos hacen parte de tal eje y mucho menos que el eje es una recta. De este modo surgió la necesidad de suministrar una definición de tales conceptos y ello permitió el desarrollo de la tarea.

Figura 30

Interpretación errónea del vértice como eje de simetría de la parábola durante la exploración gráfica



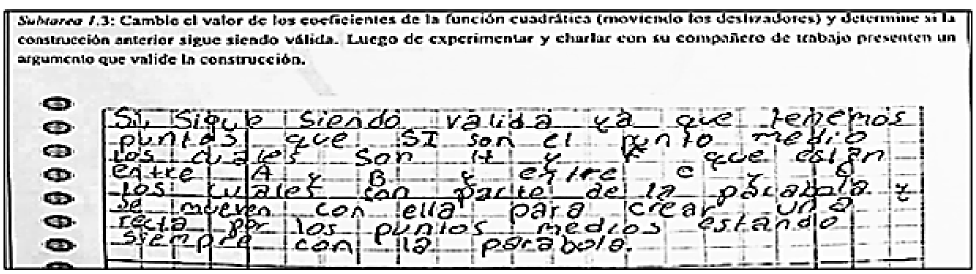
Nota. Respuesta de pareja 3: Abel y Belly a la subtarea 1.2 de la Tarea 1. Momento en el que Abel señala el punto vértice de la parábola y lo identifica como la *base*, sugiriendo que este representa el eje de simetría.

Finalmente, en relación con los propósitos de la tarea, los estudiantes entienden el propósito de la subtarea 1.1 puesto que logran, particularmente, identificar la necesidad de establecer condiciones para que dos puntos de la parábola sean simétricos con respecto a su eje, exploran diversas herramientas geométricas en GeoGebra y responden adecuadamente a preguntas orientadoras del investigador como: ¿qué relación tienen los puntos A y B?, aludiendo a que los puntos se mueven simultáneamente y concluyendo que son simétricos.

Así mismo, aunque en las producciones escritas presentadas por los estudiantes en la subtarea 1.3, (Figura 31), no se evidencia una formalización completa del concepto de eje de simetría, sí se evidencian ideas que apuntan al reconocimiento de su carácter invariante. Como el hecho de que el punto medio entre dos puntos simétricos de una parábola está en el eje o que el eje de simetría es único para una parábola determinada, lo que indica que comienzan a articular la idea central de la tarea, aunque aún con expresiones informales o intuitivas. Estas respuestas sugieren que el propósito general de la tarea empieza a emerger en los estudiantes.

Figura 31

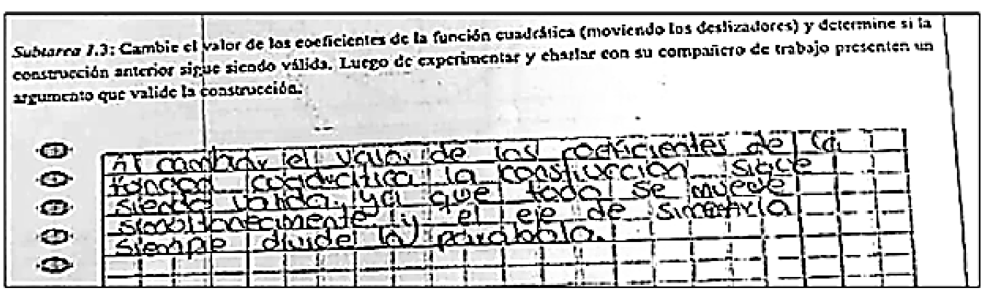
Solución escritas presentada en la subtarea 1.3 de la Tarea 1



Subtarea 1.3: Cambie el valor de los coeficientes de la función cuadrática (moviendo los deslizadores) y determine si la construcción anterior sigue siendo válida. Luego de experimentar y charlar con su compañero de trabajo presenten un argumento que valide la construcción.

Si, sigue siendo valida ya que tenemos puntos que SI son el punto medio los cuales son A y B que estan entre A y B y entre los cuales son parte de la parabola y se mueven con ella para crear una recta por los puntos medios estando siempre con la parabola.

a



Subtarea 1.3: Cambie el valor de los coeficientes de la función cuadrática (moviendo los deslizadores) y determine si la construcción anterior sigue siendo válida. Luego de experimentar y charlar con su compañero de trabajo presenten un argumento que valide la construcción.

Al cambiar el valor de los coeficientes de la función cuadrática la construcción sigue siendo válida, ya que todo se mueve simultáneamente y el eje de simetría siempre divide la parábola.

b

Nota: Figura 31a. Respuesta de la pareja 1; Ana y Karola y Figura 31.b pareja 3; Abel y Belly.

A manera de síntesis, se presenta en la Tabla 20 la categoría 1 y los niveles obtenidos durante la implementación de la Tarea 1 por cada pareja de estudiantes.

Tabla 20

Niveles de desempeño de las parejas en relación con el enunciado y propósito de la Tarea 1

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
1. Enunciado y propósito de la tarea.	a. El lenguaje utilizado en la tarea es claro y pertinente para que el estudiante realice lo solicitado.	1			
		2	X	X	X
		3			
	b. Se asimila la instrucción propuesta en la tarea; los enunciados de las subtareas son claros para los estudiantes.	1			
		2	X	X	X
		3			
		4			
	c. El estudiante identifica un propósito en la tarea.	1			
		2	X	X	X
		3			

Nota. Fuente de elaboración propia del autor en base a los datos obtenidos por las parejas de estudiantes.

A partir de las observaciones sobre la categoría 1 para la Tarea 1, se concluye que el inconveniente fundamental en relación con su implementación subyace en el significado que tienen los estudiantes de "*eje de simetría para una parábola*". Para ello, se sugiere estar atentos a acompañar la exploración de los estudiantes y se propone mejorar la descripción de la subtarea 1.1, incluyendo explícitamente instrucciones y preguntas que pueden contribuir a guiar la construcción del objeto matemático deseado y a organizar sus ideas de forma escrita. Además, al finalizar toda la Tarea 1, se sugiere al docente intervenir realizando preguntas que hagan visible el propósito de esta tarea, tales como: ¿cómo define el eje de simetría de una parábola?, ¿en todas las representaciones gráficas de la función cuadrática el eje de simetría es único? Justifique por qué, ¿El procedimiento para construir el eje de simetría de la parábola cambia cuando se modifican los coeficientes de la función cuadrática, o siempre se realiza de la misma manera? Explique. ¿habrá excepciones en que la parábola no tenga eje de simetría? Explique su respuesta.

Además, se propone en la subtarea 1.3 de la Tarea 1: complementar con preguntas que orienten la reflexión sobre el significado y características del eje de simetría abordadas desde el uso del programa, Algunas preguntas son: ¿por qué en la construcción elaborada para obtener puntos simétricos de una parábola no cambia al modificar los coeficientes de la función?, ¿de qué otra forma podría caracterizarse (construirse) el eje de simetría para una parábola?

Al finalizar el análisis de la Tarea 1 considerando todas las categorías establecidas, se indicarán explícitamente los cambios que se generan en la tarea, a raíz de las observaciones y del análisis realizado de la implementación de la primera versión.

Categoría 2. Artefactos de la TD.

En esta categoría se evalúa el uso de artefactos en el desarrollo de la tarea y de los esquemas de utilización empleados. Al respecto, se evidenció que las tres parejas de estudiantes emplearon algunos de los artefactos del programa GeoGebra que fueron previstos en el análisis a priori de la tarea. La Tabla 21 presenta los artefactos considerados en el análisis a priori para cada una de las subtareas de la Tarea 1. Particularmente, en la subtarea 1.1 de la Tarea 1, los estudiantes debían construir un punto D simétrico al punto C en la parábola (con respecto al eje de simetría), utilizando herramientas como recta *Paralela* o *Perpendicular*, punto de *Intersección* y *Mueve*. El análisis a priori de los saberes en esta subtarea suponía que los estudiantes identificarían la dependencia entre el punto C y D, empleando el movimiento del punto C, y luego validarían la construcción del punto D.

Tabla 21

Artefactos considerados en el análisis a priori para cada una de las subtareas de la Tarea 1.

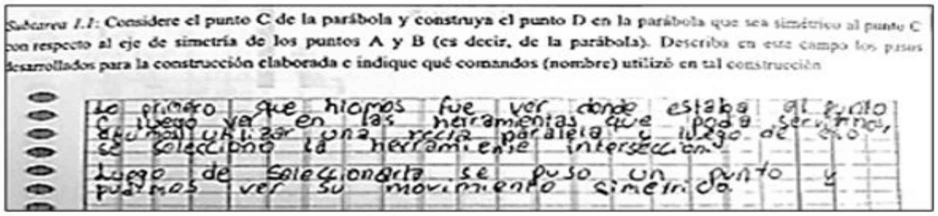
Tarea 1	
Subtarea	**Artefactos empleados previstos**
1.1	Lugares especiales: Paralela. Movimiento: Mover. Punto: Intersección. Generales: Alejar y Acercar.
1.2	Lugares especiales: Paralela, Perpendicular Movimiento: Mover. Punto: Medio o Centro. Generales: Alejar y Acercar
1.3	Interacción: Deslizadores.

Durante la implementación de la subtarea 1.1 de la Tarea 1, los estudiantes utilizaron diversos artefactos de GeoGebra para construir un punto simétrico al punto C en la parábola. Inicialmente, exploraron sin éxito las herramientas de los grupos Transformación, Puntos *punto en objeto* y Lugares especiales *paralela*, sin comprender plenamente su esquema de uso. Ante esta dificultad, el docente intervino y orientó a los estudiantes hacia el uso del artefacto Mueve para arrastrar el punto A, lo que les permitió reconocer la relación de dependencia entre los puntos simétricos A y B previamente construidos. En ese sentido Abel y Belly manifiestan al docente que *los puntos se mueven simultáneamente*. Frente a esto el docente pregunta *¿Y eso qué quiere decir?* de manera que responden diciendo que son *Simétricos puesto que uno depende del movimiento del otro*.

Posteriormente, al notar que el artefacto Punto usado en la construcción de punto D por sí solo no generaba dependencia al punto C, decidieron usar el artefacto Paralela para construir una recta que pasara por el punto C y definir la posible posición del punto D; aunque aún no son del todo conscientes que al seleccionar el eje x están definiendo la dirección de dicha recta, se percatan de que esta construcción les indica la ubicación donde podría construirse el punto D de manera simétrica. En ese proceso, eligieron el artefacto *Intersección* para ubicar dicho punto y verificaron su comportamiento con el artefacto *Mueve*, al arrastrar el punto C y comprobar su dependencia con el punto D. Esta reflexión quedó evidenciada en sus registros escritos (Figura 32), donde se describe el uso de comandos como *Paralela* e *Intersección* para construir un punto simétrico.

Figura 32

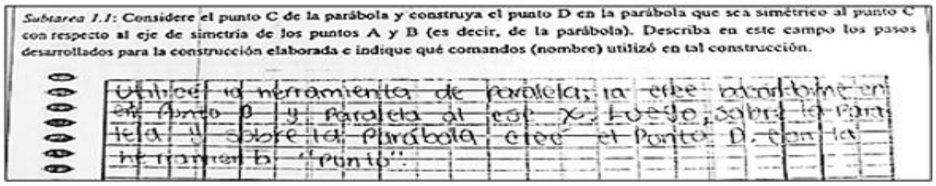
Registros de estudiantes al describir los artefactos que usaron de GeoGebra para construir un punto simétrico al punto C en la parábola


Subtarea 1.1: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico al punto C con respecto al eje de simetría de los puntos A y B (es decir, de la parábola). Describa en este campo los pasos desarrollados para la construcción elaborada e indique qué comandos (nombre) utilizó en tal construcción

Lo primero que hicimos fue ver donde estaba el punto C luego ver en las herramientas que podíamos utilizar una recta paralela y luego de eso se seleccionó la herramienta intersección

Luego de seleccionarla se puso un punto y pudimos ver su movimiento simétrico

a


Subtarea 1.1: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico al punto C con respecto al eje de simetría de los puntos A y B (es decir, de la parábola). Describa en este campo los pasos desarrollados para la construcción elaborada e indique qué comandos (nombre) utilizó en tal construcción.

Utilicé la herramienta de paralela, la cree pasando en el punto B y paralela al eje x. Luego, sobre la paralela y sobre la parábola creé el punto D, con la herramienta "punto".

b

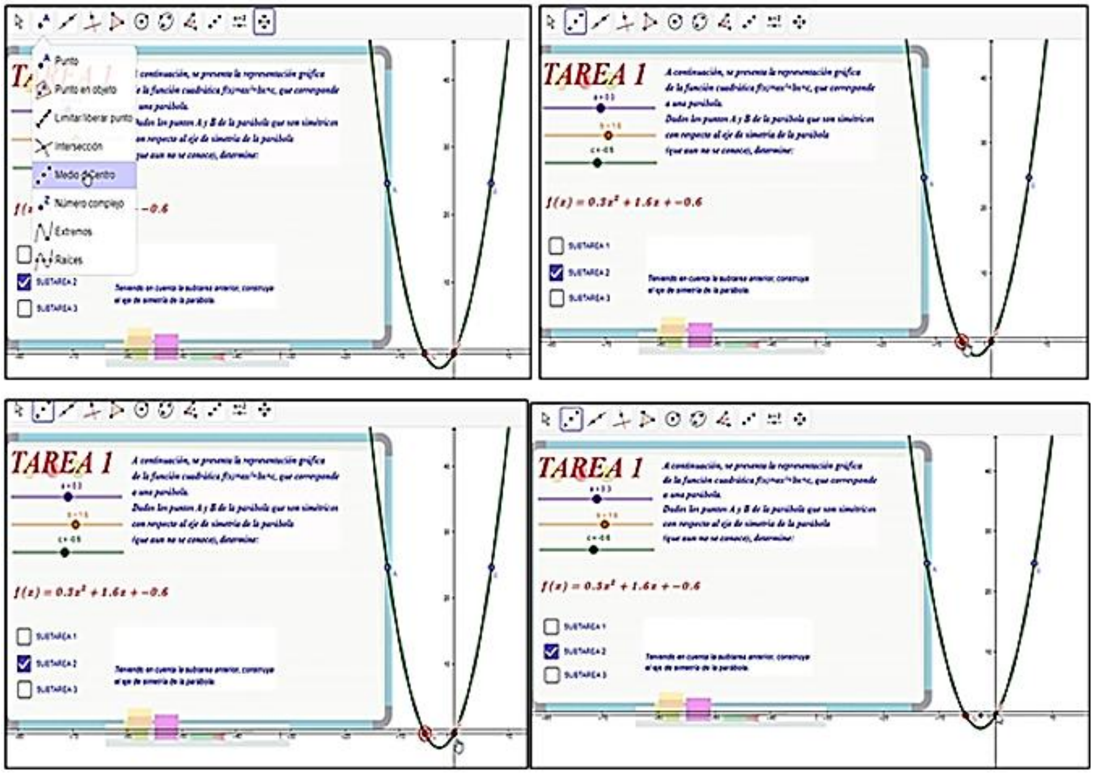
Nota. Artefactos que usaron para el desarrollo de la subtarea 1.1. 32 a pareja 1: Ana y Karola y 32 b pareja 2: Silvia y José.

En la subtarea 1.2 se requería que las parejas de estudiantes establecieran el eje de simetría de la parábola mediante la aplicación de conceptos geométricos fundamentales en tal construcción haciendo uso de las herramientas *Medio o Centro, Mediatriz, Paralela o Perpendicular*; además, se esperaba que formularán argumentos que fundamentarán el procedimiento para determinar el eje de simetría en una parábola. Lo cual se observó que los estudiantes lograron identificar el uso del punto medio y la perpendicular como una estrategia de construcción para obtener el eje de simetría de la parábola.

En relación con esta subtarea, la pareja 3 seleccionó la herramienta Bisectriz; sin embargo, Abel preguntó *¿qué es la bisectriz?* Luego de leer el cuadro de diálogo que suministra la ayuda en GeoGebra y ver la expresión *Tres puntos (lateral, vértices, lateral antihorario) o dos rectas* deciden abandonarla y en su lugar Abel eligió del menú de puntos la herramienta *Medio o* Centro y seleccionando los puntos C y D, obtiene el punto medio entre los puntos simétricos C y D (Figura 33).

Figura 33

Selección de artefactos en GeoGebra y construcción de un punto medio entre puntos simétricos C y D



Nota. Construcción realizada en la subtarea 1.2 por la pareja 3: Abel y Belly.

En relación con los esquemas de uso de los artefactos, se aprecia como la mayoría de los estudiantes comprenden la importancia de su uso en la solución de la tarea planteada, como se evidencia en el Fragmento 2 de la grabación realizada al trabajo de la pareja 3:

Fragmento 2

Transcripción de la grabación pareja 3: Abel y Belly, Subtarea 1.2 de la Tarea 1 (6:52-8:33).

Profe: Les ayudo, porque Belly, dice que la simetría es como dos partes.

Profe: El eje de simetría es una recta.

Profe: Esa recta, ¿qué hace?

Belly: Divide en dos partes

Profe: Pero ¿en qué partes?

Abel y Belly: En partes iguales.

Profe: Y para eso sí, también necesitan lo que tú decías antes.

Belly: El punto medio.

Profe: Sí, perfecto. Entonces hay que construir el eje de simetría.

Abel y Belly: Ok.

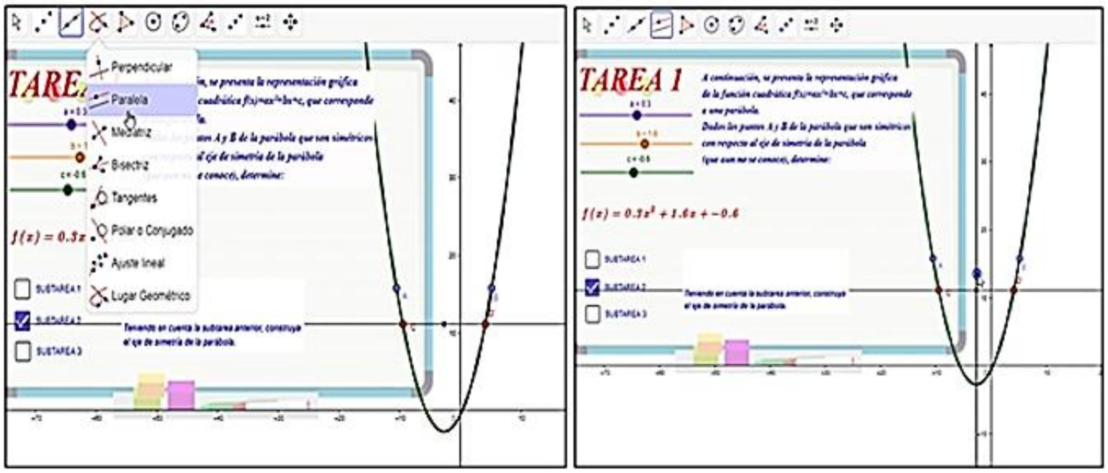
Se observó que Belly verbalizó la noción de simetría como *dos partes* cuyas partes deben ser *iguales*. Como apoyo, se identificó la intervención del investigador quien asoció explícitamente esa idea con lo obtenido en la construcción: *el eje de simetría (de una parábola) es una recta* que *divide en dos partes iguales (a la parábola)*, sin señalar de manera directa qué característica posee dicha recta; asimismo, propició que Abel y Belly recordarán la necesidad de determinar punto medio del segmento AB. En este intercambio de ideas particularmente no solo se evidenció un avance en la conceptualización del concepto (eje de simetría), sino que también se vislumbró un acercamiento a un esquema de uso esperado, que fue emplear la herramienta Medio o Centro para generar el punto medio de un segmento, en el que tal punto hará parte del eje de simetría y servirá para su construcción.

A continuación, las tres parejas de estudiantes seleccionaron la herramienta *Recta* del grupo de lugares por ejemplo la pareja 3 ensayó su uso, identificando que la construcción de recta puede cambiar de sentido, de manera que Abel comentó: *¿Está derecho o no? ¿Y por qué no está? ¿Qué es esto?,* esto evidenció que para los estudiantes es importante la orientación de la recta en la construcción geométrica del eje de simetría de la parábola, razón por la cual decidieron con Belly experimentar con otras herramientas del programa GeoGebra.

Por ejemplo, Belly sugirió a su compañero realizar la construcción con la herramienta Paralela que reconoció útil en la construcción y verbalizando la expresión *más fácil para que te quede* (Figura 34). Abel cuestionó su pertinencia aludiendo no*, pero paralela no. ¿Por qué Paralela?* Ante la insistencia de Belly, decidieron utilizarla seleccionando el eje y, luego cliclean en el punto medio entre C y D, hallando así una primera solución para la construcción geométrica del eje de simetría de la parábola dada. Dicha construcción permitió a Abel entender que la herramienta generó el eje de simetría de la parábola, e indicó: *ok funciona*. Así, la elección de la herramienta mostró la activación de un esquema de uso previsto en el análisis a priori, discutiendo y tomando decisiones instrumentales basadas en el objetivo de construir el eje de simetría.

Figura 34

Entorno GeoGebra que ilustró el uso del artefacto Paralela en la construcción del eje de simetría de la parábola a partir de los puntos simétricos C y D



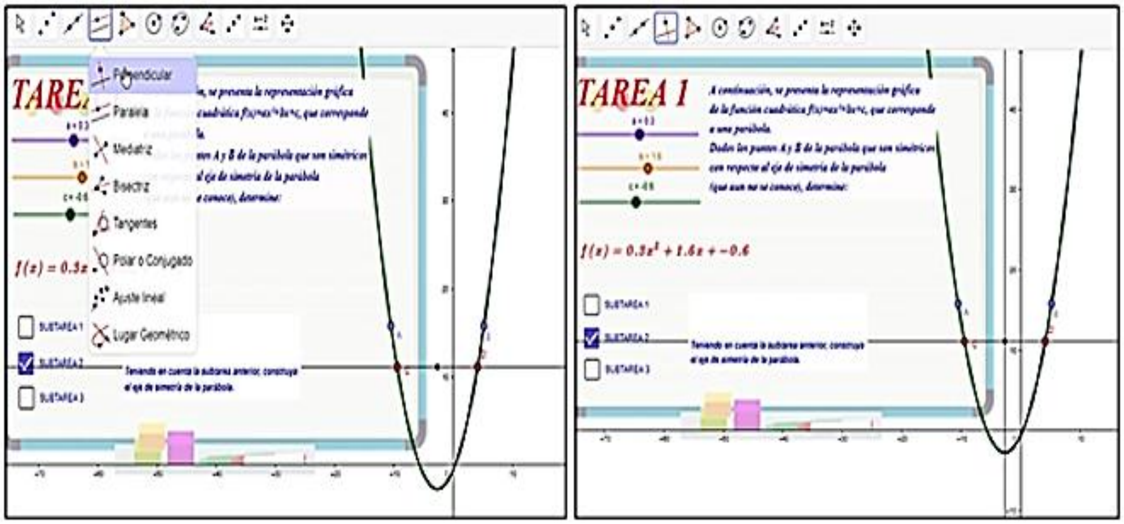
Nota. Uso del Artefacto propuesto por Belly para la construcción del eje de simetría en una parábola.

La pareja 3, además, hizo uso de la herramienta *Perpendicular* (Figura 35) propuesto por Abel, puesto que consideró que puede ser útil en la solución de la subtarea 1.1, de modo que seleccionaron de la barra de herramienta del grupo de lugares la herramienta *Perpendicular*, y seleccionó el punto medio entre C y D, finalmente cliqueo la recta que pasa por los puntos simétricos C y D, percatándose con su compañera de la existencia de otra forma para construir el eje de simetría de la parábola. Esto permitió que Abel manifestara la expresión *Es lo mismo, también aparece el eje de simetría.* De esta manera Belly se convence de la elección del artefacto frente a lo que observó. Expresando las palabras *ok, si sirve*.

En ese sentido, al identificar que diferentes artefactos conducen a construcciones que generan el eje de simetría de la parábola, los estudiantes no sólo aplicaron correctamente el esquema de uso, sino que también evidenciaron criterios al comparar y justificar la elección de la herramienta.

Figura 35

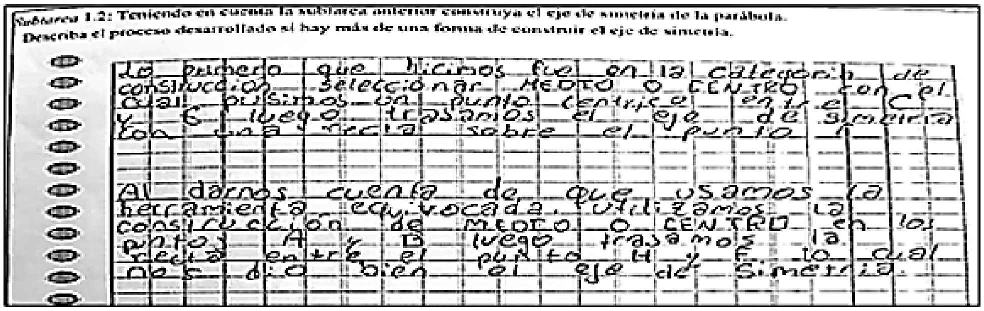
Entorno GeoGebra que ilustra el uso de la herramienta Perpendicular para construir el eje de simetría de la parábola a partir de los puntos simétricos C y D



Nota. Artefacto propuesto por Abel para la construcción del eje de simetría en una parábola. Igualmente, se presentan partes de las producciones escritas (Figura 36) de las parejas 1, 2 y 3 estas describen la elección y los esquemas involucrados al momento de usar los artefactos que se mencionan en el análisis a priori.

Figura 36

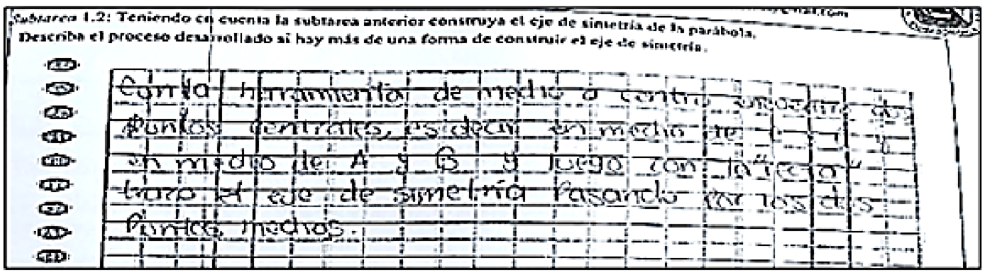
Producciones escritas de los estudiantes durante la construcción del eje de simetría requerido en la Subtarea 1.2


Subtarea 1.2: Teniendo en cuenta la subtarea anterior construya el eje de simetría de la parábola.
Describa el proceso desarrollado si hay más de una forma de construir el eje de simetría.

Lo primero que hicimos fue en la categoría de construcción seleccionar MEDIO O CENTRO con el cual pusimos un punto central entre C y E luego trazamos el eje de simetría con una recta sobre el punto.

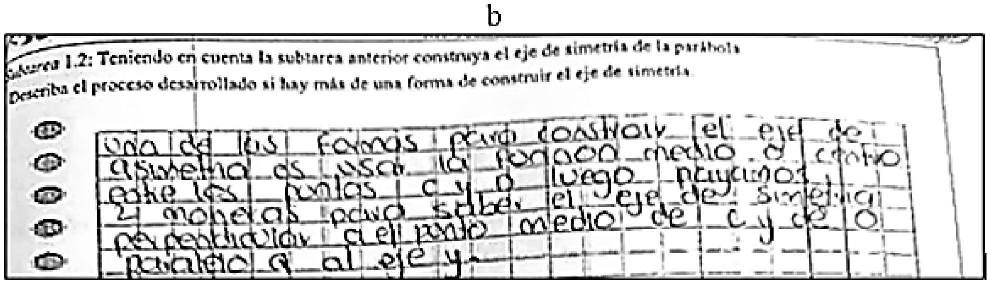
Al darnos cuenta de que usamos la herramienta equivocada, utilizamos la construcción de MEDIO O CENTRO en los puntos A y B luego trazamos la recta entre el punto H y F lo cual nos dio bien el eje de simetría.

a


Subtarea 1.2: Teniendo en cuenta la subtarea anterior construya el eje de simetría de la parábola.
Describa el proceso desarrollado si hay más de una forma de construir el eje de simetría.

Con la herramienta de medio o centro creamos dos puntos centrales, es decir en medio de [illegible] y en medio de A y B y luego con la recta trazo el eje de simetría pasando por los dos puntos medios.

b


Subtarea 1.2: Teniendo en cuenta la subtarea anterior construya el eje de simetría de la parábola
Describa el proceso desarrollado si hay más de una forma de construir el eje de simetría

Una de las formas para construir el eje de simetría es usar la función medio o centro entre los puntos C y D luego rayamos 2 maneras para saber el eje de simetría por perpendicular a el punto medio de C y de D paralela al eje y.

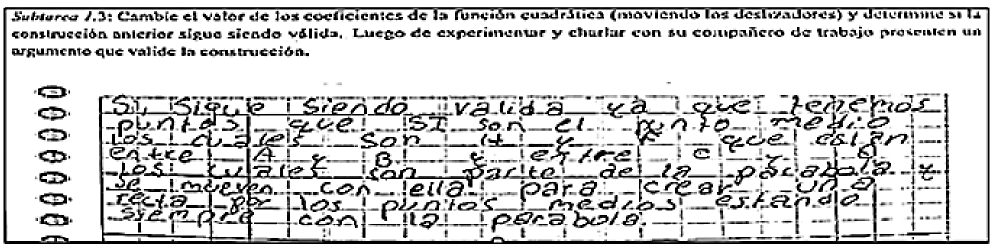
Nota. Producciones escritas en respuesta de la subtarea 1.2 de la Tarea 1. 36 a. Pareja 1: Ana y Karola. 36b. Pareja 2: Silvia y José. 36 c. Pareja 3: Abel y Belly.

En la subtarea 1.3, cuyo objetivo consiste en que el estudiante utilice el artefacto *Deslizador* para visualizar y validar cómo los cambios en los coeficientes de la función cuadrática afectan de alguna forma la representación gráfica de esta como por ejemplo, la posición y amplitud de la parábola, los estudiantes identificaron diferencias entre los coeficientes al observar que la parábola cambiaba de posición al mover los deslizadores, esto les permitió responder la pregunta: *¿La construcción del eje de simetría realizada por ustedes es válida?* (Figura 37). Ante esto, la pareja 3 argumenta diciendo; *Sí, porque siempre se mantiene en la mitad dividiendo la parábola*. Afirmación que reveló la manipulación de la herramienta Deslizador por parte de los estudiantes.

Asimismo, al experimentar con los deslizadores, los estudiantes observaron en tiempo real que la construcción del eje de simetría era consistente, dicha observación sugiere que los estudiantes lograron un reconocimiento de tipo geométrico, facilitando el aprendizaje del concepto y entendiendo el uso de los Deslizadores en esta subtarea.

Figura 37

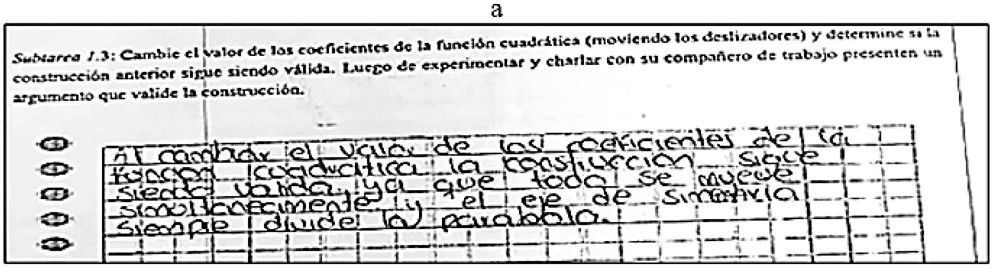
Producciones escritas subtarea 1.3 presentando los argumentos para la validación del eje del eje de simetría en una parábola



Subtarea 1.3: Cambie el valor de los coeficientes de la función cuadrática (moviendo los deslizadores) y determine si la construcción anterior sigue siendo válida. Luego de experimentar y charlar con su compañero de trabajo presenten un argumento que valide la construcción.

Si, sigue siendo valida ya que tenemos puntos que si son el punto medio los cuales son C y E que estan entre A y B y entre C y D los cuales son parte de la parabola y se mueven con ella para crear una recta por los puntos medios estando siempre con la parabola.

a



Subtarea 1.3: Cambie el valor de los coeficientes de la función cuadrática (moviendo los deslizadores) y determine si la construcción anterior sigue siendo válida. Luego de experimentar y charlar con su compañero de trabajo presenten un argumento que valide la construcción.

Al cambiar el valor de los coeficientes de la función cuadrática la construcción sigue siendo valida, ya que toda se mueve simultaneamente y el eje de simetria siempre divide la parabola.

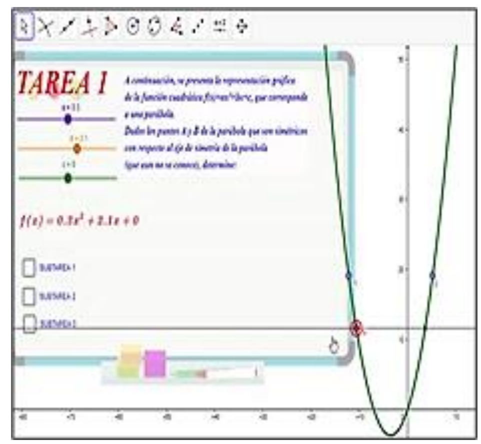
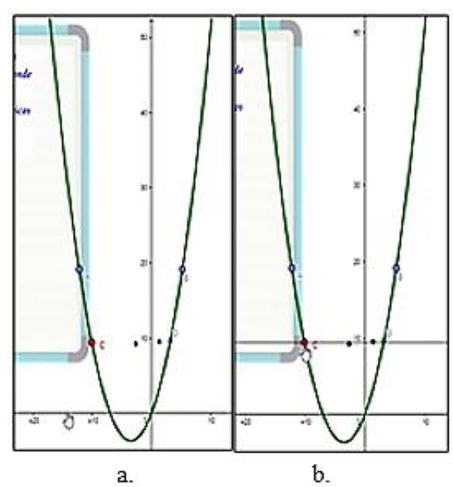
b

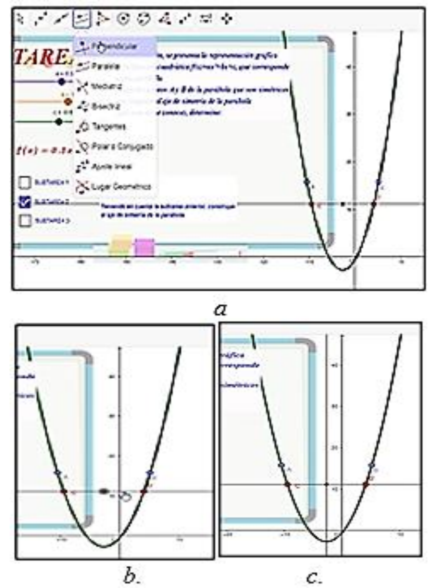
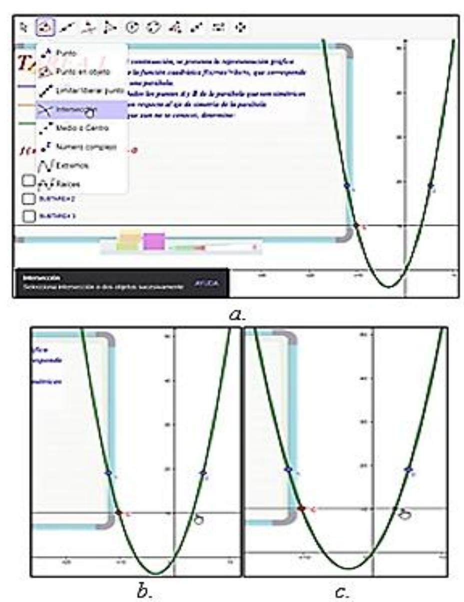
Nota. Respuestas escritas por los estudiantes. 37 a. Pareja 1: Ana y Karola. 37 b. Pareja 3: Abel y Belly.

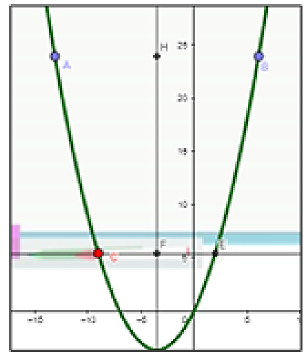
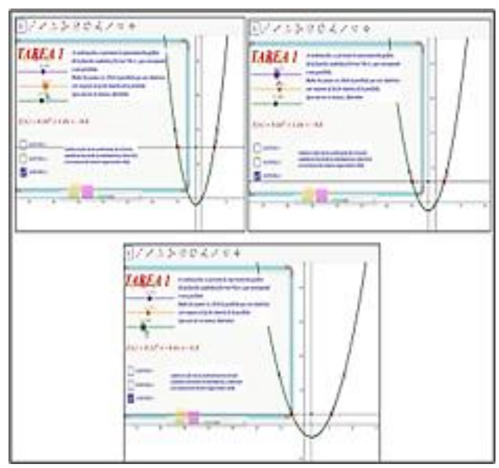
Los artefactos usados en esta subtarea, particularmente los *Deslizadores,* permitieron a los estudiantes visualizar cómo la parábola se modificaba al trabajar sobre sus coeficientes sin afectar la construcción del eje de simetría, llevando a las parejas de estudiantes a comenzar a relacionar características de la representación algebraica y de la gráfica. A manera de síntesis, en la Tabla 22 se indican los artefactos y los esquemas de uso de los artefactos de GeoGebra logrados por los estudiantes durante la implementación de la Tarea 1.

Tabla 22

Artefactos y Esquemas de uso logrados en la Tarea 1

Artefactos	Esquemas de uso logrados	Evidencia
De movimiento o desplazamiento como: Mueve	Los estudiantes entienden que la herramienta (MU-1) les permite arrastrar los objetos ya sean de la construcción dada o de las construcciones que han realizado en la tarea (Figura 38). Así, manipulan el artefacto (MU-1) opción 1. Asimismo, entienden que pueden usar la herramienta para verificar las construcciones que han realizado.	**Figura 38** *Uso del artefacto Mueve por la Pareja 3*  *Nota*. Captura de la grabación de la Tarea 1, donde la pareja 3 Abel y Belly utilizan el artefacto *Mueve* en GeoGebra, para verificar si el punto D es simétrico al punto C dado en la parábola.
De lugares especiales como: Paralela y Perpendicular	Emplean (PL-4) con el propósito de construir un elemento que les ayudará a determinar el punto D simétrico al punto dado en la parábola respecto al eje de simetría. El esquema de uso logrado, opción 1 del artefacto (PL-4), por ejemplo, se identifica en el minuto (21:28-22:10) cuando seleccionan el eje *x* (Figura 39. A) y luego el punto C en parábola (Figura 39.b), de modo que obtienen una recta paralela al eje *x* que pasa por el punto C. Entendiendo que requieren dos objetos un punto y una recta para generar una Paralela por un punto a una recta.	**Figura 39** *Uso del artefacto Paralela por Pareja 3*  *Nota*. Captura de la grabación subtarea 1.1 Tarea 1 interacción de la pareja 3 con GeoGebra.

	Seleccionan el artefacto (PP-5) y llevan a cabo la opción 1, entienden que deben elegir el punto medio entre los puntos C y D (Figura 40.a) y seguido seleccionar la recta que pasa por dichos puntos simétricos (Figura 40.b) Finalmente, observan que se ha generado una recta perpendicular a la recta seleccionada es decir a la que pasa por los punto C y D (Figura 40.c)	**Figura 40** *Uso del artefacto perpendicular*  *Nota*. Captura de la grabación de la subtarea 1.2 de la Tarea 1 pareja 3.
De puntos como: Intersección y Medio o Centro	Los estudiantes eligen (IC-3) (Figura 41.a), y ejecutan el esquema de uso opción 1, con la intención de hallar una ubicación precisa entre dos objetos (Figura 41. b). Así, al seleccionar la recta paralela al eje x que pasa por el punto C y la parábola se genera el punto de intersección, a saber, el punto D (Figura 41.c). En ese sentido, los estudiantes entienden que el punto no se ubica libremente en esta tarea puesto que depende de dos elementos geométricos seleccionados.	**Figura 41** *Uso del artefacto intersección*  *Nota*. Capturas de la grabación de la subtarea 1.1 de la Tarea 1 pareja 3.

	Los estudiantes asimilaron que el artefacto (MC-3) les proporciona una herramienta para determinar un punto medio entre dos puntos. Parte de la evidencia de esta observación que está en el desarrollo de la de la subtarea 1.2 de la Tarea 1 la pareja 1 (Ana y Karola) escribe, "*colocamos un punto céntrico entre los puntos C y E* al mismo tiempo que *entre los puntos A y B"* (Figura 42). En ese sentido se corresponde con la opción 1 de MC-3 en el que al seleccionar dos puntos automáticamente construye un punto entre estos.	**Figura 42** *Uso del artefacto Medio o Centro*  *Nota*. Captura del desarrollo de la subtarea 1.2 Tarea 1 de la pareja 1: Ana y Karola
De interacción como: Deslizadores	Los estudiantes experimentan que al seleccionar (DP-7) opción 1, se arrastra el punto de los deslizadores de la subtarea 1.3 y visualizan que en la construcción realizada hay objetos que cambian como lo indica Belly *"Porque es que, mira, si tú mueves este, se cambia…"* refiriéndose al coeficiente C y percatándose que en la expresión algebraica cambia su valor numérico, Argumentando que, *"no tiene nada que ver ya que el eje de simetría sigue dividiendo la parábola en dos partes iguales manteniéndose en el centro de la parábola"*. Figura 43.	**Figura 43** *Uso del artefacto deslizador en GeoGebra que ilustran la manipulación de los deslizadores en la subtarea 1.3 Tarea 1*  *Nota*. Captura de la pareja 3: Abel y Belly particularmente al experimentar el uso de los Deslizadores posterior en la construcción del eje de simetría de la parábola.

Nota. Elaborado a partir del análisis de las grabaciones y producciones escritas obtenidas durante la implementación de la Tarea 1, diseñada por la autora.

A continuación, se presenta la relación de los niveles alcanzados por las parejas, en cuanto el uso de los artefactos durante el desarrollo de la Tarea 1. La Tabla 23 permite evidenciar los artefactos usados, los esquemas de uso de implementos y su apropiación por parte de las parejas de estudiantes.

Tabla 23

Niveles de desempeño de las parejas en relación con artefactos de la TD de la Tarea 1

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
2. Artefactos de la TD	a. Los artefactos que fueron utilizados en el desarrollo de cada subtarea se condicen con los propuestos en el análisis a priori	1			
		2			
		3	X	X	X
	b. Se evidencia los esquemas de uso de los artefactos por el estudiante en la tarea, basado en las subcategoría expuestas en el análisis a priori de las tareas (ver capítulo 5 Tablas 11 y 14)	1			
		2	X	X	X
		3			
	c. Se evidencia que los esquemas de uso de los artefactos fueron apropiados en el desarrollo de la tarea	1			
		2	X	X	
		3			
		4			X

Nota: Fuente de elaboración propia del autor en base a los datos obtenidos por las parejas de estudiantes.

A partir de las observaciones realizadas en la categoría 2 para la Tarea 1, se concluye el principal inconveniente en el manejo de los artefactos durante la implementación de la tarea fue la limitada familiaridad de los estudiantes con las herramientas de GeoGebra. Esto a pesar de que se realizó una sesión destinada a esta actividad, con una duración de 60 minutos, en la que se permitió a los estudiantes explorar libremente dichas herramientas; sin embargo, se evidenció que este tiempo fue insuficiente para lograr un dominio básico que les permitiera utilizarlas con fluidez en el desarrollo de la Tarea 1.

Esta situación generó demoras en la identificación, selección e interpretación de las funciones de cada herramienta, lo que afectó el ritmo de resolución de la Tarea 1. En este sentido, se considera clave el acompañamiento del docente con explicaciones más detalladas sobre el funcionamiento de los artefactos que ofrece Geogebra para tal fin, así como la resolución conjunta de algunos ejemplos que sirvan como modelo. Este tipo de guía permitiría a los estudiantes entender mejor el uso de cada herramienta y reducir el tiempo destinado a su exploración en futuras tareas. También favorecería la formulación de preguntas en tiempo real por parte de los estudiantes, lo cual enriquecería el proceso de apropiación instrumental y fortalecería su desempeño en contextos similares.

En relación con el diseño de la Tarea 1, se propone complementar la Subtarea 1.3 incluyendo preguntas que inviten al estudiante a realizar una actividad intencionada con los artefactos de GeoGebra que permitan dar solución a la tarea. En este sentido, se plantea indagar si, al modificar los valores de los coeficientes de la función cuadrática, se mantiene el eje de simetría en la nueva parábola. Para tal fin, se sugiere orientar la actividad mediante la manipulación de los deslizadores de los coeficientes *a, b* y *c*, de modo que los estudiantes describan con detalle los cambios observados. Asimismo, se propone incluir una tabla en la que las parejas registren los resultados obtenidos al mover los deslizadores, considerando al menos cuatro casos. (Tabla 24).

Tabla 24

Verificación de la solidez de la construcción del eje de simetría ante variaciones en los coeficientes

Coeficientes			**Preguntas**	
a	b	c	¿la recta construida en la tarea anterior es eje de simetría de esta nueva parábola?	¿C y D continúan siendo puntos simétricos de la parábola?

Nota. elaboración propia del autor.

Finalmente, después de leer las respuestas consignadas en la tabla, explique:

A partir de las respuestas dadas, considera que el proceso de construcción del eje de simetría de una parábola cambia si se modifican los coeficientes de la función. ¿Cómo definimos el eje de simetría de una parábola?

Categoría 3. Objeto matemático de la Tarea 1

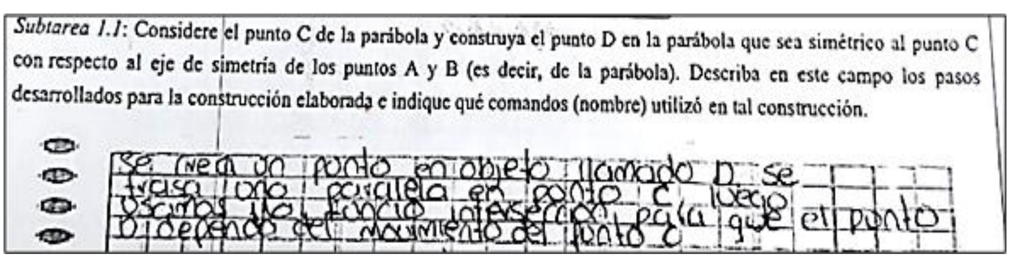
En esta categoría se manejan dos aspectos; el uso de los objetos matemáticos previstos en las tareas y su relación, y la representación de dichos objetos. En tal sentido, este análisis busca identificar el uso de los artefactos y observar si la tarea contribuye a construir o desarrollar conceptos involucrados.

Por ejemplo, durante la implementación de la subtarea 1.1 de la Tarea 1, se evidenció el uso de objetos matemáticos que fueron utilizados en el desarrollo de esta como: recta paralela, punto medio, perpendicular y punto de intersección entre curvas. Esto es evidente, por ejemplo, cuando la pareja 3 muestra los objetos matemáticos que emplean en la construcción del punto D para que sea simétrico al punto C; sin embargo, no son plenamente conscientes de la definición de los conceptos matemáticos involucrados al solucionar la subtarea.

Aun así, queda en claro que la tarea permite a los estudiantes entender que la recta paralela es un objeto geométrico empleado en la construcción del punto D para que sea simétrico al punto C, en tal sentido, en la Figura 44 se describen los comandos utilizados en el desarrollo de esta, así mismo durante la implementación de esta tarea las parejas de estudiantes reconocieron una relación de dependencia geométrica entre dos puntos, pues verbalizaron que hay existencia de *"dependencia entre los puntos C y D a través de la posición del punto D y la recta paralela al eje x que pasa por el punto C".* En tal sentido dicha relación moviliza el eje de simetría puesto que el punto D es ubicado de forma simétrica respecto al punto C.

Figura 44

Movilización de objetos matemáticos para establecer simetría en la parábola



Subtarea 1.1: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico al punto C con respecto al eje de simetría de los puntos A y B (es decir, de la parábola). Describa en este campo los pasos desarrollados para la construcción elaborada e indique qué comandos (nombre) utilizó en tal construcción.

Se crea un punto en objeto llamado D se
traza una paralela en punto C luego
usamos la función intersección para que el punto
D dependa del movimiento del punto C

Nota. Evidencias escritas de la pareja 3, Abel y Belly de la subtarea 1.1 Tarea 1

Debe tenerse en cuenta que debido al contexto de aplicación para el desarrollo de la subtarea se parte del hecho de que los estudiantes conocen algunas de sus propiedades de la parábola. Sin embargo, en el desarrollo de la tarea se observó que, la tarea favoreció al estudiante, realizar construcciones, fortalecer la noción de puntos simétricos en una recta con respecto a un punto dado y la noción de eje de simetría de una parábola (puntos simétricos de la parábola con respecto a una recta).

Como fortaleza, se observó que algunas parejas de estudiantes identificaron a través de la construcción y la manipulación de los deslizadores que los puntos C y D (simétricos) se desplazaban manteniendo su ubicación respecto al eje de simetría de la parábola, esto permitió a los estudiante reconocer de forma visual la idea de simetría en este objeto matemático. No obstante, también se observó el uso de algunos objetos sin cuestionar por qué su uso. Por ejemplo, la pareja 1 construye una recta que coincide con el eje x sin reconocer que se trataba de una recta paralela

Durante la solución de la subtarea 1.2 las parejas de estudiantes identificaron correctamente el punto medio entre C y D como un elemento relevante para la construcción del eje de simetría, aunque Abel lo confunde con el eje de simetría. Esto muestra un proceso de aproximación conceptual. Por otro lado, Belly luego de realizar la construcción y observarla indica verbalmente *me suena como un punto de partida… donde se parten como dos.* Esto puede ser un proceso de apropiación semántica del concepto de Simetría, dejando en evidencia que la tarea permite identificar el uso de objetos matemáticos que en su momento fueron (teóricamente) vistos por los estudiantes.

Por otro lado, las subtareas 1.1 y 1.2 permitieron a las parejas de estudiantes observar y construir representaciones geométricas de objetos matemáticos, como se puede evidenciar en las imágenes de la Tabla 22, donde se visualizan las construcciones elaboradas en el desarrollo de estas subtareas. La subtarea 1.3 destaca dos representaciones, la geométrica y la algebraica, y, a partir de estas, los estudiantes ven relaciones que se generan entre ellas. Sin embargo, interesa observar si esta tarea permitió a los estudiantes establecer propiedades de la parábola a partir de la geometría. Por ejemplo, las parejas de estudiantes utilizan el punto medio y la perpendicularidad como objetos geométricos para construir el eje de simetría de la parábola. Sus propiedades permitieron a los estudiantes dar cuenta que el eje de simetría debe pasar por el punto medio del segmento determinado por los puntos simétricos C y D y, además, ser perpendicular a este.

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes comenzaron a interpretar que el eje de simetría divide la parábola en dos partes iguales y que debe pasar por el punto medio del segmento determinado por los puntos simétricos C y D. Este reconocimiento convirtió al punto medio en un referente clave para construir el eje de simetría. La intervención del docente resultó oportuna para reforzar esta idea, ya que permitió profundizar en el significado de objetos matemáticos como el punto medio y el eje de simetría. Un ejemplo de ello se evidenció cuando la pareja 3 expresó: *"Medio o centro. Medio de dos puntos. Este (C) y este(D). Listo, ahora sí. Tenemos ya ese punto"*, verbalización que refleja no solo el uso del punto medio como procedimiento, sino también entender su importancia dentro de la estructura simétrica de la parábola.

A continuación, la Tabla 25 presenta el nivel alcanzado por las parejas en relación con los objetos matemáticos trabajados durante la Tarea 1.

Tabla 25

Niveles de desempeño de las parejas en relación con los objetos matemáticos de la Tarea 1

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
3. Objetos matemáticos	a. En las tareas se utilizan los objetos matemáticos previstos relacionados	1	X	X	
		2			
		3			X
	b. La tarea promueve la representación de objetos matemáticos	1			
		2			
		3	X	X	X

Nota. Fuente de elaboración propia del autor en base a los datos obtenidos por las parejas de estudiantes.

Aunque el diseño de la tarea permitió a los estudiantes reconocer propiedades geométricas de una parábola durante la construcción del eje de simetría, se sugiere en el diseño de Tarea incorporar instrucciones puntuales que lleven al estudiante a identificar el objeto usado y a describir sus características dentro de la tarea. Por ejemplo, cuando los estudiantes estén utilizando el punto medio se solicitará que responda de forma escrita ¿Qué sucede con el punto D cuando se mueve el punto C? Moviendo el punto C complete la Tabla 26, indicando las coordenadas para por lo menos cuatro puntos. ¿Existe alguna coordenada en común?, Puede encontrar alguna relación entre las coordenadas en x del punto medio y las coordenadas x de los puntos C y D. ¿de qué otra forma podría caracterizarse (definirse) el eje de simetría para una parábola?

Asimismo, con el fin de fortalecer y centrar la atención del estudiante, para identificar las propiedades geométricas en donde los estudiantes vinculen el procedimiento geométrico con las propiedades teóricas de la parábola, se realizará la pregunta: ¿Por qué el eje de simetría siempre para por el punto medio? y ¿Qué comando de GeoGebra considera indispensable para esta construcción y por qué?

Tabla 26

Relación entre puntos simétricos y el punto medio como referencia para el eje de simetría

Punto C		**Punto D**		**Punto medio**	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***

A partir de la Tabla 26 los estudiantes responderán las preguntas 1,2 y 3:

Mire cada fila para responder las preguntas 1 y 2.

1. Observe en cada fila el punto C, D y el punto medio. ¿Existe alguna coordenada en común?.
2. Puede encontrar alguna relación entre las coordenadas en x del punto medio y las coordenadas x de los puntos C y D.
3. Después de observar sobre la columna titulada punto medio y reflexionar las diferentes posiciones del punto C, ¿hay algo en común para la columna punto medio?.

Además, se recomienda que en el diseño o en la implementación de la subtarea 1.2 se incluyan definiciones particularmente como eje, paralela, perpendicular y simetría, con el propósito de favorecer una interpretación más clara de los elementos matemáticos involucrados.

En la subtarea 1.3 se sugiere dejar un espacio en donde los estudiantes puedan escribir sus argumentos sobre lo que observan. En paralelo, también se sugiere incluir preguntas como: ¿Cómo se relaciona el cambio del coeficiente b con el eje de simetría? ¿Qué les ocurre a los puntos simétricos C y D cuando se modifica ese coeficiente?

Por otro lado, se sugiere al docente que durante su intervención realice preguntas que refuercen el lenguaje técnico, por ejemplo, ¿Al trazar la recta por el punto C paralela al eje *x* pasa por algún otro punto en la parábola? ¿Qué relación tiene ese punto con la recta, la curva y el punto C?

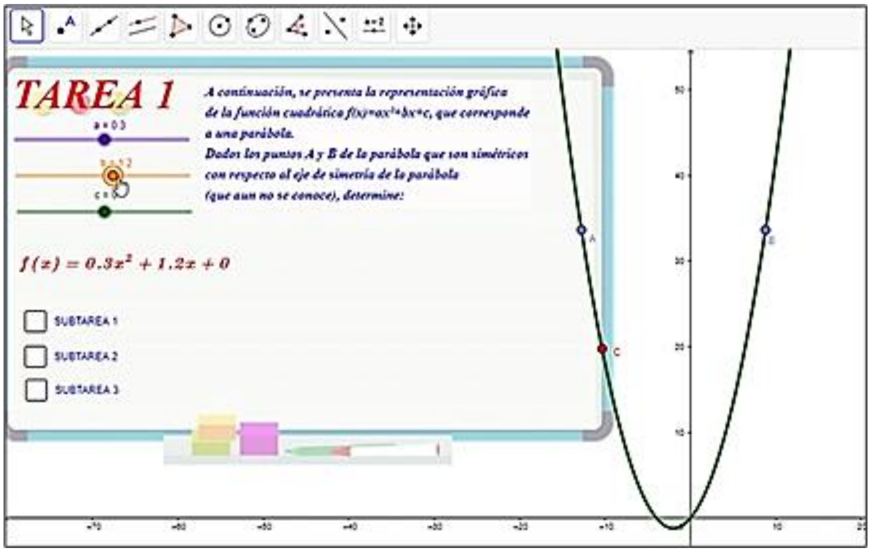
Categoría 4 Procesos matemáticos transversales de la Tarea 1

Principalmente, con esta categoría se busca identificar si el diseño de las subtareas implementadas promueve que los estudiantes desarrollen procesos exploración, conjeturación y argumentación. Se deja en claro que este análisis no se centra en valorar el desempeño de los estudiantes, sino en identificar si las características del diseño de la Tarea 1 están en relación con la ejecución de los procesos planteados. En ese sentido se describe el análisis correspondiente a partir de los registros obtenidos de los estudiantes.

Durante el desarrollo de la subtarea 1.1 de la Tarea 1, para la construcción de un punto simétrico al punto C dado sobre la parábola, la pareja 3 realizó un proceso de exploración en GeoGebra que implicó probar distintas herramientas y observar los objetos que cada una de ellas podía generar. En este proceso identificaron que no todas las herramientas eran útiles para el propósito de la tarea, lo que los llevó a discriminar las propiedades que fueron las opciones más adecuadas y las que no aportaban en la construcción de la subtarea 1.1. Por ejemplo, exploraron el uso del deslizador asociado al coeficiente *b,* pero fue descartado al comprobar que solo modificaba (generaba un movimiento) de la parábola en lugar de generar un punto simétrico al punto C, Situación que Abel verbaliza a su compañera *ok no*. Figura 45.

Figura 45

Selección del deslizador asociado al coeficiente c de la función cuadrática exploración por la pareja 3

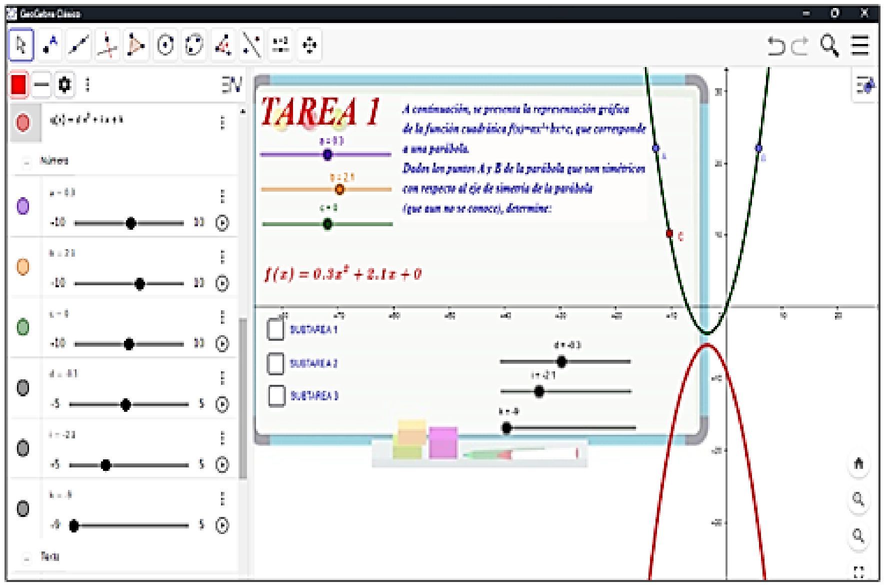


Nota. Captura tomada de la grabación en la implementación de la subtarea 1.1 de la Tarea 1 a la pareja 3, momento de exploración de las propiedades de la herramienta Deslizador.

De manera similar, aunque la construcción realizada por la pareja 1 no corresponde al eje de simetría de la parábola solicitado en la subtarea 1.2, se evidenció un proceso de exploración activa e insistente a través del uso de GeoGebra. Esta pareja al manipular los deslizadores (arrastrar) construyó una nueva parábola (roja) Figura 46 y la interpretaron erróneamente como eje de simetría. A pesar de ello, esta acción evidencia que los estudiantes exploran con las herramientas de GeoGebra, en tal sentido la tarea fomentó la exploración.

Figura 46

Primera construcción de eje de simetría propuesta por la pareja 1



Nota. Imagen elaborada por el autor con base en la observación directa del trabajo de los estudiantes, particularmente la pareja 1 (Ana y Karola), ya que no se logró capturar la construcción por parte de estos durante la implementación.

El enunciado y las instrucciones de la tarea llevaron a los estudiantes a explorar de dos maneras distintas. Por un lado, se enfocaron en identificar las herramientas de GeoGebra que podían usar para resolver la actividad, como los deslizadores y la construcción del punto medio. Por otro lado, se centraron en las características de los objetos matemáticos involucrados, especialmente la parábola, el eje de simetría y los puntos simétricos.

En la subtarea 1.3, la conexión entre estas dos formas de exploración se hizo evidente inicialmente cuando, al preguntarles si sabían qué era el eje de simetría, ellos respondieron *no, ni idea*, lo cual los llevó a manipular distintas herramientas como una estrategia para avanzar en la construcción del eje de simetría y también manipularon los deslizadores para observar y analizar cómo los coeficientes a, b y c afectaban la construcción realizada o la parábola. Esto llevó a las parejas a deducir que el eje de simetría debía pasar por el punto medio del segmento formado por dos puntos simétricos de la parábola y ser perpendicular a un segmento (o eje x) o paralela al eje y. Esta conexión fue clave para que surgieran artefactos adecuados y se desarrollarán esquemas de uso. De modo que la exploración se constituyó en una oportunidad para relacionar las posibilidades de los artefactos digitales con las propiedades matemáticas necesarias para la construcción solicitada.

Continuando en la Tarea 1 se presentó la construcción de conjeturas luego de que las parejas de estudiantes realizaron la solución de las subtareas, por ejemplo, la pajera 3 verbalizó *al arrastrar el deslizador c, la imagen se movió sobre el eje se simetría, el eje no cambió, sigue dividiendo la parábola en dos partes.* Esto muestra que Belly entiende el efecto del coeficiente c en la representación gráfica de la función cuadrática de modo que a través del uso del arrastre del deslizador validan lo que han construido. Aunque no se presentó la formulación de la conjetura como se planteó en el análisis a priori, si hay evidencia que la tarea permite a los estudiantes proponer conjeturas a través de la experimentación, construcción y visualización que realizan en el desarrollo de esta.

Por otro lado, la tarea propició que las parejas desarrollaran procesos de argumentación entorno a sus construcciones, mediante la interacción con herramientas de GeoGebra. Un ejemplo de ello se evidenció en la subtarea 1.3, cuando los estudiantes modificaron (arrastraron) los deslizadores de la función cuadrática propuesta. Esta acción les facilitó verificar sus construcciones, formular afirmaciones, también fortaleció su capacidad para justificar con base en propiedades geométricas observadas. En tal sentido, las parejas de estudiantes identificaron que al modificar los coeficientes de la función cuadrática la construcción de eje de simetría se mantenía válida en todos los casos, llevándolos a reconocer que el eje de simetría tiene la propiedad de dividir a la representación gráfica de la función cuadrática (parábola) en dos partes equivalentes.

De igual manera luego de interactuar con el applet los estudiantes no solo describen los pasos, si no que intentan justificar la recta perpendicular como parte del procedimiento para construir el eje de simetría. En tal sentido, la pareja 3 manifestó Lo *construimos utilizando la función perpendicular al punto medio entre C y D.* La selección de dicha herramienta fue justificada con el argumento de que la recta perpendicular, construida en el punto medio de los puntos simétricos C y D, garantiza que estos se encuentren a la misma distancia de la recta. Lo que Belly refuerza al verbalizar que la recta pasa por el punto medio de C y D.

Durante la ejecución y desarrollo de las subtareas 1.1, 1.2 y 1.3 de la Tarea 1, se evidenció diálogo constante entre los estudiantes de la misma pareja, caracterizado por el intercambio de ideas, estrategias y propuestas para dar solución a la tarea. Incluso se corregían o se respaldaban recíprocamente. En relación con esto, en el Fragmento 3 de la transcripción de la grabación correspondiente de la subtarea 1.2, se observa un intercambio verbal entre los estudiantes Abel y Belly que llevó a realizar una construcción en conjunto al observar y cuestionar lo que habían realizado.

Fragmento 3

Abel: Ahí ya se muestra la simetría. Oye, si te das cuenta, es de otro color. Figura 47.

Belly: ¿Qué?

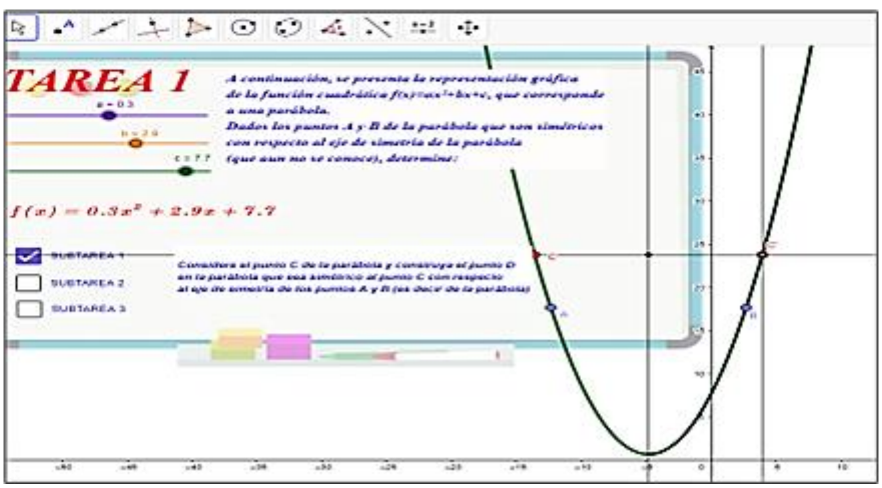
Abel: Mira, es verde y negro. Es donde se parte,

Belly: Si. Claro, mira. Un espejo, prácticamente.

Nota: Este diálogo muestra cómo los estudiantes se escuchan mutuamente y construyen una interpretación en conjunto sobre lo observado.

Figura 47

Colores como apoyo visual en la construcción del significado de simetría



Nota. Esta imagen muestra el entorno en GeoGebra que dio lugar a la construcción y observación realizada por la pareja 3 Abel y Belly durante la implementación y desarrollo de la subtarea 1.2, cuando reconocieron que la parábola se dividía visualmente en dos colores *verde y negro*, lo que asociaron con el eje de simetría al describirlo como un *espejo, prácticamente*.

De esta manera, los intercambios entre los estudiantes no solo evidencian interacciones comunicativas, también muestran procesos de experimentación, formulación de conjeturas, y argumentación en el desarrollo de las subtareas de la tarea. A continuación, en la Tabla 28, se presentan los resultados obtenidos de las respuestas de las parejas de estudiantes con relación en el análisis de la categoría 4

Tabla 27

Niveles de desempeño de las parejas en relación con procesos matemáticos transversales de la Tarea 1

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
4. Procesos matemáticos transversales	a. El enunciado e instrucciones de la tarea promueven el desarrollo de procesos de experimentación por parte del estudiante.	1			
		2		X	
		3	X		X
	b. La tarea fomenta la construcción de conjeturas por parte del estudiante.	1			
		2	X	X	X
		3			
	c. La tarea lleva a que el estudiante argumente sus producciones.	1			
		2	X	X	X
		3			
	d. La tarea potencia la comunicación entre pares.	1			
		2			
		3	X	X	X

De acuerdo con lo anterior se evidencio que la Tarea 1 *eje de simetría*, logra activar las subcategorías mencionadas en la categoría 4, aunque las parejas presentaron diferentes niveles de desempeño. Las instrucciones fortalecieron la experimentación con los artefactos, y la comunicación entre pares llevando así, en algunos casos, a la construcción de conjeturas.

Considerando los resultados, se debe fortalecer la argumentación, razón por la cual deben incluirse preguntas que lleven a ello como: para la subtarea 1.1 incorporar en el diseño, ¿Cómo saben que el punto D construido por ustedes es un punto simétrico, escriba específicamente su argumento? En la subtarea 1.3 ¿Cómo puede justificar que la línea que acaba de construir representa el eje de simetría? ¿Qué cambió observa en la expresión algebraica de la función cuadrática y cómo afecta la construcción del eje de simetría de la parábola realizado por usted? ¿Qué propiedad geométrica se puede cumplir?

Se recomienda que al finalizar la subtarea 1.2 el docente pregunte a las parejas ¿Qué pasa si usan el artefacto Mediatriz para la construcción del eje de simetría? ¿coincide con su construcción anterior? Argumente su respuesta.

Luego del análisis de la Tarea 1: *eje de simetría,* a continuación, se resumen las sugerencias que surgieron en relación con dos aspectos útiles para mejorar tanto el diseño como la implementación de la Tarea. Puntualmente, en la Tabla 28 se organiza esta información según cada subtarea, resaltando los aspectos que necesitaron apoyo o ajustes. Estas recomendaciones no solo buscan hacer más claras las instrucciones, sino también promover un uso más adecuado de los artefactos digitales y de los objetos matemáticos involucrados, para que los estudiantes puedan avanzar de manera más autónoma y coherente en la resolución de la tarea. La versión final de la Tarea 1 se puede observar en el anexo 4.

Tabla 28

Sugerencias finales luego del análisis de la implementación de la Tarea 1

Sugerencias finales Tarea 1		
Subtarea	**Intervención del Docente**	**En el Diseño la Tarea 1 incluir**
1.1	Al finalizar esta subtarea, el docente puede sugerir a los estudiantes que compartan de forma oral cuál consideran que fue el propósito de la actividad y algunas ideas sobre lo que han aprendido en su desarrollo.	Se propone mejorar la descripción de la tarea, incluyendo explícitamente instrucciones y preguntas que pueden contribuir a guiar la construcción del objeto matemático deseado y a organizar sus ideas de forma escrita. Así, el nuevo enunciado es: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico a C con respecto al eje de simetría de la parábola. Para ello, mueva el punto A, identifique cómo cambia B, y con base en sus observaciones describa el proceso de construcción del punto D. Escriba los pasos de su construcción y los comandos que utilizó en cada paso. Responda las preguntas: 1. ¿Qué significa que el punto D sea simétrico al punto C? 2. ¿Cómo sabe que el punto D construido por usted es un punto de la parábola simétrico a C?, escriba su argumento.

<table>
<tr>
<td>1.2</td>
<td>El docente puede, en principio, promover una lluvia de ideas y una corta discusión con los estudiantes para conocer las ideas que ellos tienen en relación con los objetos recta paralela, recta perpendicular y eje de simetría de una parábola, para luego institucionalizar las definiciones clásicas de tales objetos y tal vez algunas propiedades esenciales.

Si los estudiantes no usaron la herramienta Mediatriz, al finalizar el desarrollo de la subtarea, el docente puede instar a las parejas a utilizarla para reconocer sus características y relacionar las construcciones logradas.</td>
<td>Partiendo del análisis realizado a la implementación de la tarea 2 se ve pertinente incluir algunas preguntas que guíen al estudiante a reconocer que una característica fundamental del eje de simetría de una parábola consiste en que, dados dos puntos simétricos, su punto medio está en el eje de simetría, por lo que la recta formada por todos estos puntos medios determina el eje de simetría. Así, se propone que la nueva subtarea quede expresada como:
Teniendo en cuenta la subtarea anterior, responda las siguientes preguntas y con base en ellas construya el eje de simetría de la parábola dada describiendo los pasos realizados:
1. ¿Qué sucede con el punto D cuando se mueve el punto C?
2. Moviendo el punto C complete la Tabla, indicando las coordenadas para por lo menos cuatro puntos.
<table>
<tr><th colspan="2">Punto C</th><th colspan="2">Punto D</th><th colspan="2">Punto medio</th></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>x</td><td>y</td><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
3. Con base en la tabla anterior observe en cada fila el punto C, D y el punto medio. Responda: ¿existe alguna coordenada en común?
4. Puede encontrar alguna relación entre las coordenadas en x del punto medio y las coordenadas x de los puntos C y D.
5. Después de observar las diferentes posiciones del punto C, observe la columna titulada Punto Medio. ¿Hay algo en común en esta columna?

Con base en lo observado en los ítems anteriores,
6. ¿De qué otra forma podría caracterizarse (definirse) el eje de simetría para una parábola?
7. Describa el proceso desarrollado por usted para construir el eje de simetría. Si hay más de una forma de construir el eje de simetría, descríbalo.</td>
</tr>
<tr>
<td>1.3</td>
<td>A través de algunas preguntas el docente puede ayudar a centrar el propósito de la construcción y algunas características de los objetos que participan en la construcción. Por ejemplo:
¿Al trazar la recta por el punto C paralela al eje x pasa por algún otro punto en la parábola?,
¿Qué relación tiene ese punto con la recta, la curva y el punto C?

Además, durante la implementación de la tarea, el docente puede sugerir a los</td>
<td>Con el objetivo de explicitar de mejor forma el propósito de la tarea, en particular de validar el proceso de construcción del eje de simetría de una parábola y ver su independencia de los coeficientes de la función, se propone la siguiente modificación de la tarea:

Partiendo de la construcción lograda en la subtarea anterior, si se modifica el valor de los coeficientes de la función ¿se sigue obteniendo el eje de simetría de la nueva parábola?</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>estudiantes que analicen diferentes casos para modificar los coeficientes de la función y apreciar que la construcción es robusta.

Al finalizar todo la Tarea 1 el docente determinará si es necesario: realizar las siguientes preguntas:

¿cómo define el eje de simetría de una parábola?, ¿en todas las representaciones gráficas de la función cuadrática el eje de simetría es único? Justifique por qué, ¿El procedimiento para construir el eje de simetría de la parábola cambia cuando se modifican los coeficientes de la función cuadrática, o siempre se realiza de la misma manera? Explique. ¿habrá excepciones en que la parábola no tenga eje de simetría? Explique su respuesta.</td>
<td>Para responder mueva los deslizadores y complete la siguiente tabla incluyendo por lo menos cuatro casos:

<table>
<tr><th colspan="3">Coeficientes</th><th colspan="2">Preguntas</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>¿la recta construida en la tarea anterior es eje de simetría de esta nueva parábola?</td><td>¿C y D continúan siendo puntos simétricos de la parábola?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

A partir de las respuestas dadas, considera que el proceso de construcción del eje de simetría de una parábola cambia si se modifican los coeficientes de la función. ¿Cómo definimos el eje de simetría de una parábola?</td>
</tr>
</table>

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

5.6.2 Análisis Tarea 2: Identificar el lado recto

En el desarrollo de la Tarea 2 se observó que no todas las parejas de estudiantes lograron ultimar las tres subtareas propuestas dentro del tiempo preestablecido, en parte debido a que no todas iniciaron su desarrollo al mismo tiempo. De manera similar a lo ocurrido con la Tarea 1, la pareja 1 no participó en la implementación de la Tarea 2, a saber, lo correspondiente a la subtarea 2.3. Por su parte, las parejas 1 y 3 asistieron a la totalidad de las sesiones e hicieron un uso adecuado de algunas de las herramientas empleadas en el desarrollo de las subtareas de la Tarea 1. En cuanto al tiempo destinado al desarrollo de la Tarea 2, se observó que la pareja 1 tomó aproximadamente 120 minutos para completarla mientras que a la pareja 3 le tomó 180 minutos.

Categoría 1. Enunciado y propósito de la Tarea.2

Inicialmente los estudiantes presentaron dificultad en la interpretación del término *cuerda* del el enunciado de la subtarea 2.1, sin embargo, después de la intervención del investigador los estudiantes logran identificar la representación geométrica y por ende desarrollar la tarea.

Por ejemplo, en las verbalizaciones de la pareja 3 indicó: *Entonces una recta. Supongo, es muy larga. Entonces es un segmento AB. Sí.*

Asimismo, en la subtarea 2.2 la palabra fijar generó confusión. La pareja 2 preguntó: *¿Qué es fijar?* mientras que la pareja 3 manifestó en la transcripción de la grabación: *No sé, si cómo tenerlo en cuenta o fijarlo en la parábola,* esto muestra que el término no fue entendido con claridad y que además no están familiarizados con su significado dentro de un contexto geométrico. Ante esta duda, recurrieron al investigador para solicitar aclaración, una vez aclarados los términos, las parejas de estudiantes continuaron con la solución de las subtareas.

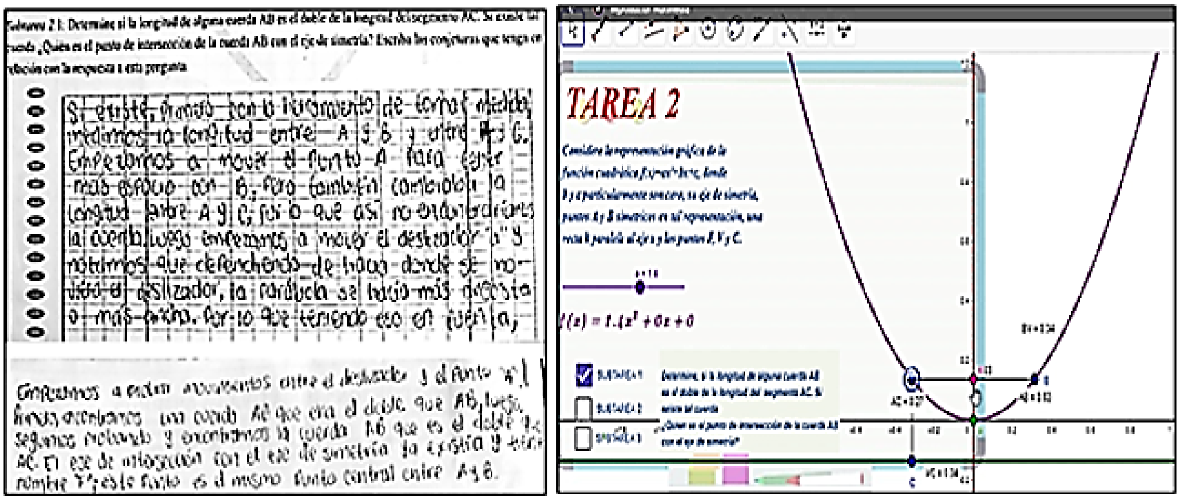
Por otro lado, se observó que el enunciado de la subtarea 2.3 presentó una estructura más densa al incluir términos técnicos como *coeficiente*, *expresión algebraica*, varias instrucciones y preguntas en una sola consigna, lo que condujo a la necesidad de realizar un acompañamiento constante por parte del docente para orientar el desarrollo de la tarea, resolver inquietudes sobre el significado de los términos y aclarar las instrucciones o comunicar de forma diferente las preguntas. Aun así, las parejas de estudiantes lograron desarrollar la tarea, probablemente debido a la práctica adquirida con el tipo de trabajo y el lenguaje empleado en subtareas anteriores.

En términos del propósito de la subtarea 2.1 se observó que dos de las parejas (la 2 y la 3) solucionaron la subtarea para una parábola en particular. En tal sentido, La pareja 2 encontró la cuerda solicitada al modificar el valor del coeficiente *a,* como los puntos dados de manera que fueron acomodados para que se cumpliera la condición indicada, sin embargo, no reconoció que se trata de una propiedad válida para cualquier parábola (Figura 48 a). Por su parte, la pareja 3 caracterizó la cuerda AB al realizar mediciones y comparaciones entre longitudes de AB y AC. En sus registros escritos expresaron frases como: *es el doble* o *casi el doble* entre los segmentos y la cuerda; incluso señalaron: *No, porque la condición que piden ahí es que AB sea el doble de AC y no es el doble, le falta poquito para que sea el doble* (Figura 48 b).

Estas producciones muestran que, aunque ambas parejas avanzaron en la identificación y discusión de la cuerda, el propósito encontrar su existencia para toda parábola no se alcanzó, lo que evidencia la necesidad de reformular el enunciado de la subtarea para enfatizar la atención en dicha característica.

Figura 48

Respuestas de las parejas sobre identificación de una cuerda donde AB=2BC



a b

Nota. Figura 48 a, pareja 2 y figura 48 b se observa como el deslizador afecta la forma de la parábola, mostrando relaciones geométricas, puesto que notan que al mover el deslizador *a* observaron variaciones en la apertura de la parábola.

En la subtarea 2.2, la pareja 1 completó la tabla con las medidas requeridas (Figura 49), señaló que *al mover el punto S a través de la parábola, se van cambiando las distancias; (aumenta y disminuye) de manera en que tienen la misma distancia con F y la recta k,* Esto evidenció que la pareja 1 reconociera la relación de igualdad entre ambas distancia al cambiar la coordenada del punto S. Por su parte la parte las parejas 2 y 3 aunque no establecieron una igualdad entre dichas medidas, si indicaron respectivamente lo siguiente: *al parecer las medidas de FS son siempre mayores a Sk* y *entre más lejano estaba el punto (S) del (0) mayor es la diferencia entre la medida de FS y Sk.* Con base en las respuestas, se observa que el propósito de la subtarea 2.2 que es identificar cada punto (S) de la parábola equidista del punto (*F*) y de la recta (*k*) no se logra. Probablemente por la dependencia que existía entre el propósito de la subtarea 2.2 y el logro de la subtarea 2.1, es decir que, aquellos grupos que no lograron construir la cuerda especial de la subtarea 2.1 no lograrían establecer las relaciones que se quería identificar.

Figura 49

Solución de la tabla: Mediciones y observación de la relación entre FS y Sk

Subtarea 2.2: Tenga en cuenta la subtarea anterior. Fije el punto A (en el que la cuerda cumple la condición de la tarea anterior). Luego construya un punto S en la parábola. Determine: Cuál es la distancia del punto F (punto medio entre A y B) al punto S, Cuál es la distancia del punto S a la recta paralela al eje x nombrada k y Qué ocurre al mover el punto S. Para ayudar a responder tales preguntas, complete la siguiente tabla y proponga una conjetura del experimento.

Coordenadas del punto S	Medida de $\overline{FS}$	Distancia de S a la recta k
(0.59, 0.41)	1.01	1.01
(-1,+1.2)	1.41	1.41
(0,0)	0.21	0.21
(2, 4.8)	5.01	5.01

Al mover el punto S a través de la parábola, se van cambiando las distancias (aumenta y disminuye) de manera en que tienen la misma distancia con F y la recta k

Nota. Respuesta escrita de la pareja 1.

Así mismo, en relación con propósito de la subtarea 2.3 se observó (Figura 50) que las parejas 1 y 3 lograron explicitar la reconfirmación esperada: que las distancias SF y Sk, observadas como iguales en la subtarea anterior (2.2), dejan de serlo al modificar el coeficiente *a*. Por ejemplo, la pareja 1, reconoció que al modificar el coeficiente *a* de la función cuadrática (parábola) cambia, pero no mencionan si se mantiene la igualdad entre las medidas de SF y Sk.

Figura 50

Evidencias escritas pareja 1 y 3 de la subtarea 2.3

Subtarea 2.3: Si fija el punto S (se fija también la recta k) y mueve el punto A. ¿Qué hallazgos visualiza? Ahora si deja fijo el punto A como en subtarea 1 y cambia el coeficiente *a* de la expresión algebraica de la función cuadrática. ¿Qué ocurre? ¿Quién es la recta *k* fija en relación con la parábola? Indique que acciones realiza en el applet que comandos utiliza y proponga una conjetura del experimento.

Al fijar el punto S, y mover el punto A se modifican las distancias ya que el punto A mueve también la recta, entonces se mueven todos menos el punto S y su medida debido a que él está fijo

Al cambiar el coeficiente a en la función cuadrática con el deslizador la parábola se mueve según sus límites, tanto positiva como negativa

La recta k en relación con la parábola se puede nombrar como una paralela al eje x

Se utilizó la herramienta de distancia, objeto fijo y en la parte algebraica cambiamos el coeficiente de la función cuadrática

50 a

Subtarea 2.3: Si fija el punto S (se fija también la recta k) y mueve el punto A. ¿Qué hallazgos visualiza? Ahora si deja fijo el punto A como en subtarea 1 y cambia el coeficiente *a* de la expresión algebraica de la función cuadrática. ¿Qué ocurre? ¿Quién es la recta *k* fija en relación con la parábola? Indique que acciones realiza en el applet que comandos utiliza y proponga una conjetura del experimento.

Al fijar estos puntos (S) y la recta k y mover el punto (A). El punto (S) no se mueve sin embargo la recta (k) al estar fija y mover el punto (A) esta sigue su movimiento.

al estar el punto A fijo y cambiar el coeficiente a cada uno de los demás puntos se mueven ya que dependen de (A) y al A está fijo ellos también. además al mover el deslizador la distancia entre (A,B) y (A,C) cambian porque la parábola se amplía

La recta (k) es la directriz de la parábola.

• longitud entre (A,B) y (A,C) • objeto fijo
• Deslizador (A)

50 b

Nota. Figura 50 a pareja 1 y 50 b pareja 3.

Considerando las observaciones en relación con la categoría 1, enunciado y propósito de la Tarea 2, es evidente que la pajera 1 mostró mayor autonomía en el seguimiento de instrucciones y mejor manejo del lenguaje técnico, a pesar de que no siempre articula sus acciones con el propósito de la tarea de fondo. Por otro lado, la pareja 2, y la pareja 3 comprenden parcialmente las instrucciones, pero muestran más dudas frente al lenguaje matemático y no llegan a identificar con claridad el objetivo general de la tarea. En consecuencia, es necesario fortalecer en el diseño de misma las conexiones explícitas con la noción de lado recto.

A manera de síntesis, se presenta en la Tabla 29 la categoría 1 y los niveles obtenidos por las parejas de estudiantes durante la implementación de la Tarea 2.

Tabla 29

Niveles de desempeño de las parejas en relación con el enunciado y propósito de la Tarea 2

<table>
<tr><th>Categoría</th><th>Subcategoría</th><th>Nivel</th><th>Pareja 1</th><th>Pareja 2</th><th>Pareja 3</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1. Enunciado y propósito de la tarea.</td><td rowspan="3">a. El lenguaje utilizado en la tarea es claro y pertinente para que el estudiante realice lo solicitado.</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b. Se asimila la instrucción propuesta en la tarea; los enunciados de las subtareas son claros para los estudiantes.</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>3</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">c. El estudiante identifica un propósito en la tarea.</td><td>1</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>2</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Nota. Fuente de elaboración propia del autor en base a los datos obtenidos por las parejas de estudiantes.

A partir del análisis realizado se determinó la necesidad, primero, de reformular el enunciado de la subtarea 2.1 para que sea explícito que debe buscarse una cuerda con las condiciones dadas para cualquier parábola y no para una en específico y, en segundo lugar, de cambiar el término cuerda por una caracterización explícita de tal segmento. Puntualmente, se propone que el enunciado de tal subtarea sea ahora:

> Con la representación gráfica de la función cuadrática dada, construya un segmento con extremos A y B en la parábola tal que su medida sea el doble del segmento AC. ¿Cuáles son las medidas del segmento AB? y Luego, haga nuevamente esta construcción cambiando el coeficiente a, por lo menos cuatro veces y registre en la Tabla 30 las medidas que tienen los segmentos AB y AC ¿Cuál es el punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetría?

Tabla 30

Registros al modificar el coeficiente a subtarea 2.1

Coeficiente *a*	**Medida de** AB	**Medida** AC

Nota. elaboración del autor.

Con la tabla diligenciada por parte del estudiante, el docente puede intervenir generando las siguientes preguntas al grupo de estudiantes para escuchar sus respuestas, de tal modo que cada pareja de estudiantes tenga la oportunidad de proponer una conjetura a partir del experimento realizado:

¿Qué observa en la relación entre los segmentos AB y AC al cambiar el coeficiente a?

¿Se mantiene la condición para cualquier valor de a?

¿Qué papel juega el coeficiente a? ¿Cambia en algo la existencia de la cuerda?

Para evitar la dependencia entre las subtareas, para la Subtarea 2.2, se propone modificar la construcción que se suministra dejando visible y fija la cuerda AB que cumple con la condición establecida en la subtareas 2.1 para cada parábola (e.d. con la medida igual al doble de la medida del segmento AC), de modo que los estudiantes no puedan modificarla pero que, si dependa de los coeficientes que definen la función cuadrática, Además, se propone, incluir, el siguiente enunciado:

Partiendo del applet de la Tarea 2 en su estado original. Construya un punto S en la parábola, muévalo a lugares diferentes y complete la Tabla 31.

Tabla 31

Registro de coordenadas para el punto S, subtarea 2.2

Coordenadas del punto *S*		**Medida de *FS***	**Medida de *S* a la recta *k***
X	***Y***		

Nota. elaboración del autor.

Con la información de la tabla, responda. ¿Qué ocurre al mover el punto S?
¿Qué relación hay entre FS y S*k*?. ¿Qué cambia y qué permanece igual?
¿Qué elemento de la parábola parece conservarse cuando mueve el punto S?
¿Qué importancia tiene el punto F en la parábola?
Proponga una conjetura del experimento.

En relación con la Subtarea 2.3, se propone agregar la Tabla 32 de tal forma que sirva de apoyo para orientar más directamente a los estudiantes hacia la verificación de esta propiedad en cuestión, evitando que se queden únicamente en descripciones de movimiento sin llegar al propósito de comprobación.

Tabla 32

Registro de apoyo para verificación de propiedades subtarea 32

Coeficiente *a*	**Medida de AB**	**Medida AC**	**Medida de FS**	**Medida de S a la recta *k***

Nota. elaboración del autor.

Ahora bien, en términos de sugerencias para el docente es necesario realizar una pausa para revisar e intervenir con el fin de institucionalizar lo alcanzado en la subtarea 2.1, especialmente la caracterización de la existencia de la cuerda (para cada parábola hay una cuerda). Además de explicitar de manera formal la definición del término *cuerda*. Esto con el propósito de lograr que los estudiantes entiendan su definición como objeto matemático (en términos geométricos) por último finalizada la subtarea 2.3 es fundamental que el docente introduzca el nombre de dicha cuerda en el contexto de los elementos de una parábola, de tal manera que los estudiantes se familiaricen con el termino lado recto.

Categoría 2. Artefactos de la TD de la Tarea 2.

A partir de la implementación y desarrollo de la Tarea 2 se evidencio correspondencia entre el análisis a priori y la ejecución, puesto que la tres parejas de estudiantes, utilizaron algunos artefactos previstos inicialmente. La Tabla 33 muestra los artefactos involucrados en el desarrollo de cada subtarea. Además, este análisis permite comprender cómo los estudiantes interactuaron con dichos artefactos durante el desarrollo de la Tarea 2.

Tabla 33

Artefactos considerados en el análisis a priori para cada una de las subtareas de la Tarea 2

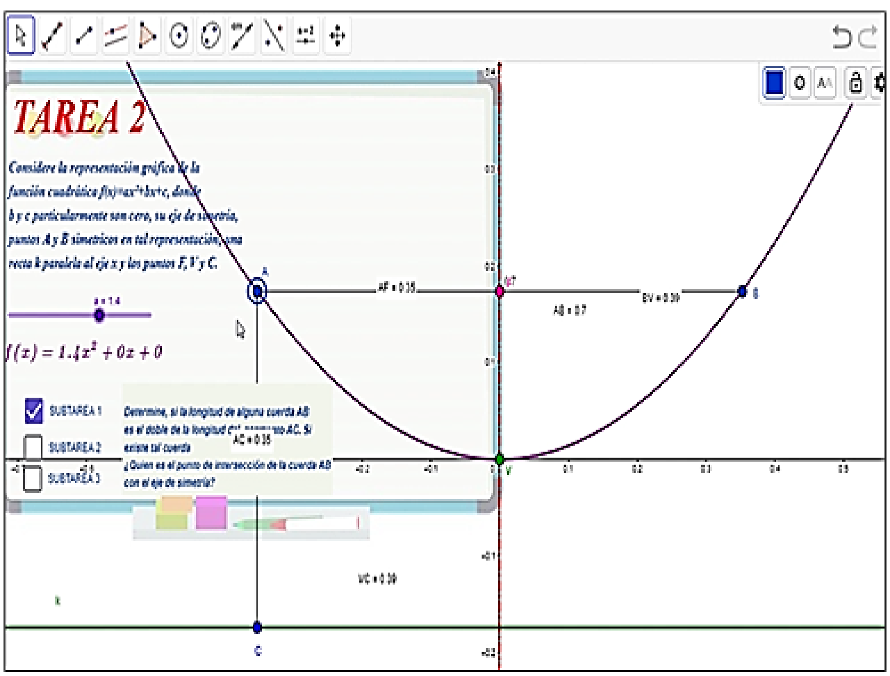
Tarea 2	
Subtarea	**Artefactos empleados previstos**
2.1	Direcciones: Segmento. Movimiento: Mueve. Medición: Distancia o longitud Generales: Alejar y Acercar.
2.2	Puntos: Punto en Objeto Movimiento: Mueve Medición: Distancia o longitud Generales: Alejar y Acercar
2.3	Movimiento: Mueve Interacción: Deslizadores. Generales: Alejar y Acercar

De manera general, los estudiantes realizaron registros escritos y verbales en los que se observó el uso de distintas herramientas de GeoGebra en la solución de las subtareas, tales como: medición de segmentos, la manipulación de puntos mediante la construcción, el arrastre de objetos geométricos, el uso de deslizadores, alejar y acercar objetos; siendo estas necesarias para realizar las construcciones, mover objetos, comparar medidas y establecer relaciones.

Puntualmente, la pareja 1 en la subtarea 2.1, empleó el artefacto *Distancia o Longitud* (DL-11) para establecer la conjetura *"la longitud de la cuerda AB es el doble del segmento AC con una diferencia mínima".* Esto se evidencia al observar que dicha pajera seleccionó los puntos *A* y *B* para calcular la medida del segmento que determinan y utilizando el artefacto *Mueve* (MU-1) con el punto *A* se modificó la construcción hasta cumplir la condición establecida, es decir para comparar las longitudes entre los segmentos *AF*, *AC* y *AB*. Asimismo, la pareja 3 a través del movimiento del punto *A* y del arrastre del deslizador *a* encontró la cuerda solicitada. (Figura 51). Adicionalmente, se observó el uso de *Aproximar* (AP-8) y *Alejar* (AJ-9), artefactos que sin dudas facilitó a las parejas 1, 2 y 3 la observación de los objetos.

Figura 51

Descubrimiento del doble de AC mediante manipulación del Deslizador a y Punto A en GeoGebra

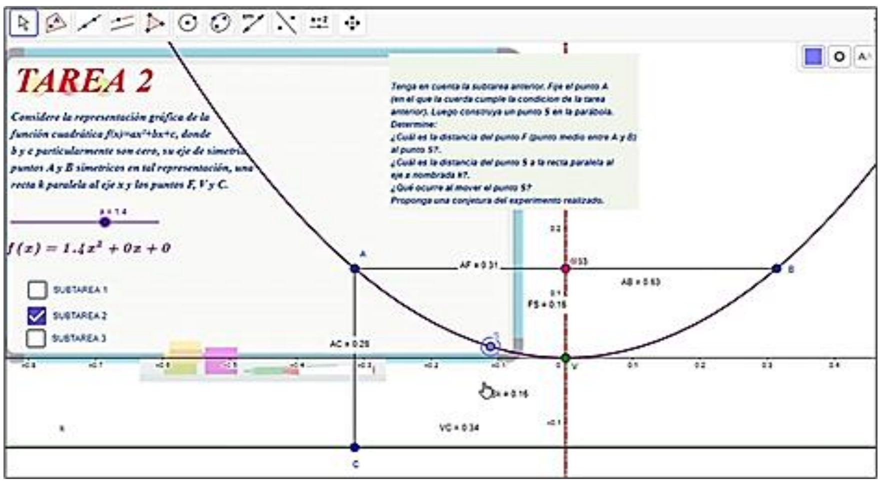


Nota. acción realizada durante la implementación de la subtarea 2.1 por la pareja 3.

Por otro lado, en la subtarea 2.2 se evidenció que todos los estudiantes, a partir de la construcción dada en el applet, ubicaron un punto S en la parábola. Para esto hicieron uso de la herramienta *Punto en objeto* (PO-2), esto les permitió establecer la dependencia del punto S respecto a la curva (parábola); luego de que las parejas seleccionaran el artefacto (*MU-1*) observaron que al arrastrar el punto S sobre la parábola les permitía generar dependencia del punto respecto a la parábola dada (Figura 52).

Figura 52

Construcción dinámica del punto S en la parábola

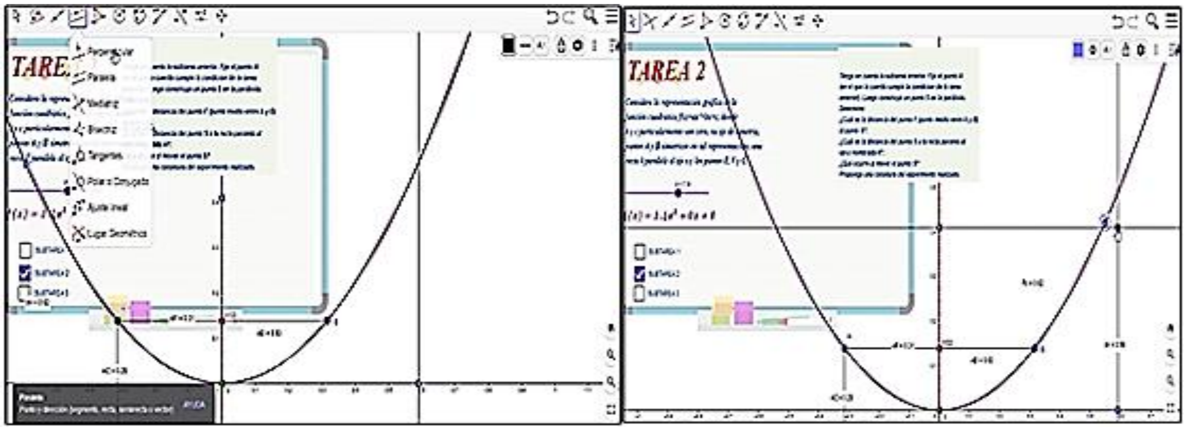


Nota. Activación de la herramienta Mueve para arrastrar el punto S sobre la parábola por parte de la pareja 3.

Sin embargo, pese a que hubo una construcción adecuada del punto S, las parejas de estudiantes presentaron dificultad para encontrar las coordenadas indicadas en la tabla propuesta; en tal sentido la pareja 3 uso los artefactos como: *Paralela* e *Intersección* (Figura 53) con el fin de determinar las coordenadas del punto *S* (construyendo las rectas que pasan por S y son paralelas a los ejes y determinando las coordenadas de los puntos de intersección de las nuevas rectas con los ejes).

Figura 53

Uso de otros artefactos para determinar los valores de la coordenada del punto S



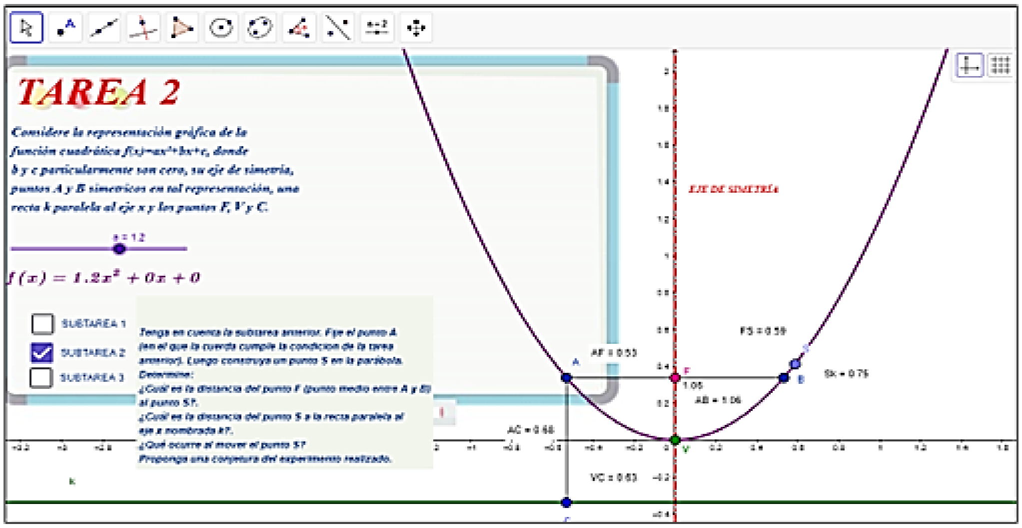
Nota. Capturas de la grabación de la solución planteada por parte de la pajera 3 en la subtarea 2.2.

Además, el investigador observó que la pareja 1 activa la vista algebraica para digitar las coordenadas del punto *S.* Al preguntar a la pareja por qué lo hace, expresaron, *como no podemos ver la coordenada en el punto S, pues la digitamos y ahí si la vemos.*

Por otro lado, los estudiantes observaron la variación de las medidas solicitadas, las cuales fueron calculadas mediante la selección y activación del artefacto *Distancia o longitud* (DL-11). Esto permitió determinar tanto la medida del segmento FS como la distancia del punto S a la recta k. En particular, la pareja 3 utilizó la herramienta seleccionando inicialmente los puntos A y B; sin embargo, al hacerlo activaron de manera implícita el segmento AB, lo que generó una medida adicional (Figura 54). Ante este resultado inesperado, expresaron: *¿qué es esto? Tiene la misma medida que AB*, evidenciando así la falta de reconocimiento del funcionamiento completo del artefacto.

Figura 54

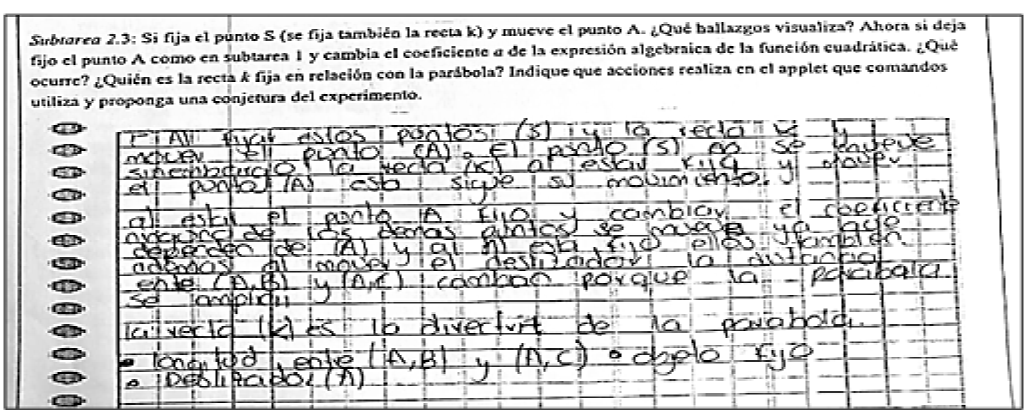
Medición con el artefacto Distancia o longitud y aparición de un valor adicional



Asimismo, en la subtarea 2.3, las parejas 1 y 3 emplearon los artefactos *Mueve (MU-1)* y, *Deslizador (DP-7)* como quedó consignado en sus respuestas escritas durante la intervención. En tal sentido, la pareja 1 expresó que: *al fijar el punto S y mover el punto A, se modifican las distancias ya que el punto A mueve también la recta k, y se mueve todo menos el punto S*, mientras que la pareja 3 manifestó, …*al mover el deslizador las distancia entre AB y AC cambió porque que, la parábola se amplía*…(Figura 55) de acuerdo con esto, se observó que las parejas entendieron que para ver otros valores basta con arrastrar el Deslizador, esta acción les permitió percatarse del cambio de la parábola.

Figura 55

Uso del deslizador a como mediador para evidenciar el cambio de la representación gráfica (parábola y el coeficiente de la función cuadrática)



Nota. Respuesta de la pareja 3.

A continuación, se presenta la relación de los niveles alcanzados por las parejas, en cuanto el uso de los artefactos durante el desarrollo de la Tarea 2. La Tabla 34 evidencia los artefactos usados, los esquemas de uso de implementados y su apropiación por parte de las parejas de estudiantes.

Tabla 34.

Niveles de desempeño de las parejas en relación con artefactos de la TD de la Tarea 2

Categoría	**Subcategoría**	**Nivel**	**Pareja 1**	**Pareja 2**	**Pareja 3**
2. Artefactos de la TD	a. Los artefactos que fueron utilizados en el desarrollo de cada subtarea se condicen con los propuestos en el análisis a priori	1			
		2	X		X
		3	X	X	X
	b. Se evidencia los esquemas de uso de los artefactos por el estudiante en la tarea, basado en las subcategorías expuestas en el análisis a priori de las tareas (ver capítulo 5 Tablas 11 y 14)	1			
		2	X	X	X
		3			
	c. Se evidencia que los esquemas de uso de los artefactos fueron apropiados en el desarrollo de la tarea	1			
		2	X	X	
		3			X
		4			

Nota. La selección de dos niveles en esta categoría se refiere al uso de los artefactos previstos y los no previstos en la Tarea 2.

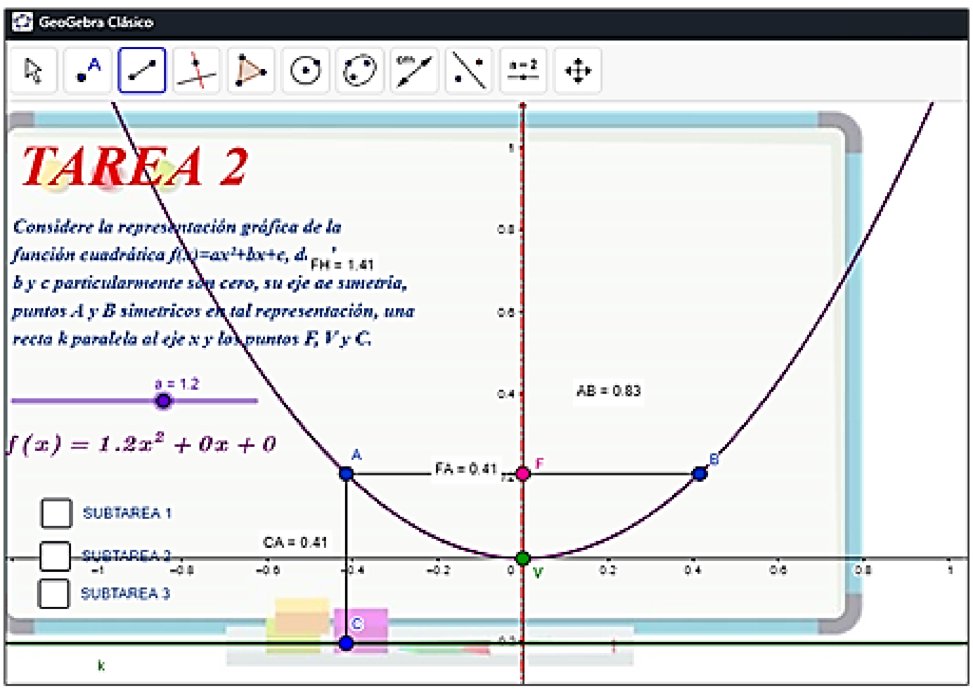
De acuerdo con las observaciones en este análisis, se considera que las modificaciones propuestas en el análisis de la categoría 1: *Enunciado y propósito*, también se reconocen como relevantes para subsanar algunos de los problemas evidenciados en el análisis de esta categoría (e. d. *Artefactos de la TD)*; además esto permitirá precisar con mayor claridad el uso de los artefactos previstos en el diseño. No obstante, se deja claro que en la implementación los estudiantes sí utilizaron los artefactos establecidos, aunque se requiere fortalecer y profundizar aún más sus usos, sobre todo teniendo en cuenta que los estudiantes han tenido pocas sesiones en la que manejen tales artefactos.

Categoría 3. Objetos matemáticos de la Tarea 2

En los objetos matemáticos involucrados para el desarrollo de esta Tarea 2 se incluyen puntos, segmentos, longitud de un segmento, distancia entre puntos, distancia entre un punto y una recta (paralela al eje x) y eje de simetría de la parábola. Para el caso de la subtarea 2.1. la pareja 1, centró su atención en la comparación de la longitud de los segmentos AF y AC, señalando que ambos tienen la mitad de la longitud de la cuerda AB (Figura 56). De esta manera, lograron establecer una relación entre los segmentos, lo que permitió la validación de la condición solicitada en la subtarea.

Figura 56

Captura de la solución de la subtarea 2.1 de la Tarea 2 por parte de la pareja 1

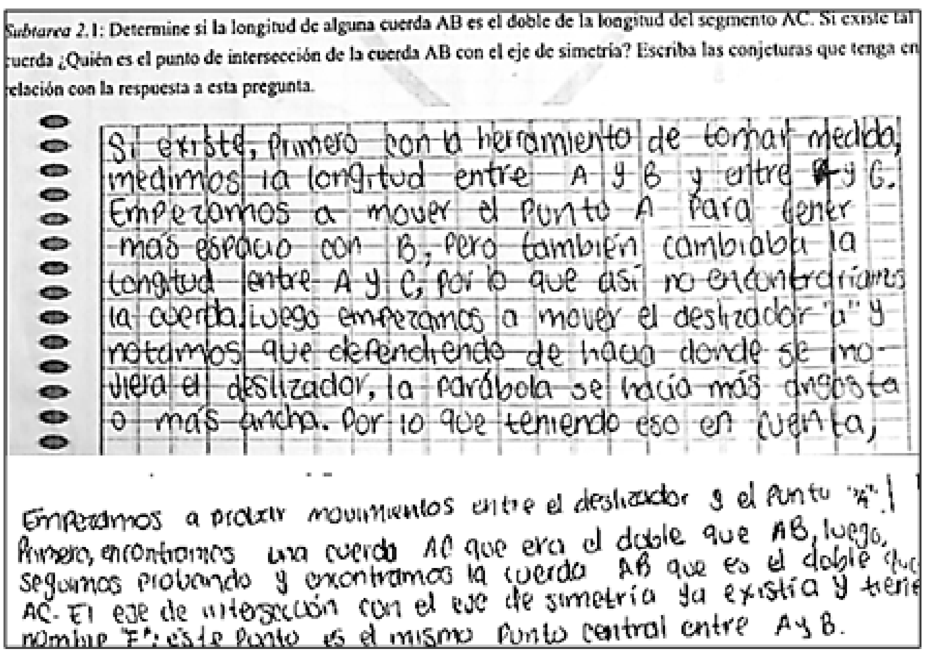


Nota. Muestra de las medidas obtenidas en busca de la condición *AB* = 2 *AC*. Se evidencia en la gráfica de la parábola las longitudes de los segmento AC, AF y AB bajo las construcciones previas de los segmentos realizados por la pareja 1 con el uso de la herramienta *Segmento* para representar la cuerda y el Movimiento del punto A ubicándolo en la posición donde se cumpla la condición *AB* = 2 *AC*.

Por su parte la pareja 2 en lugar de calcular la longitud de los segmentos a comparar, eligieron calcular la distancia entre los puntos que determinan tales segmentos. Además, observaron que al mover el punto A, la distancia entre A y C y entre A y B cambiaba, lo que les generó dificultad para resolver la tarea. Sin embargo, ellos decidieron cambiar los coeficientes de la función cuadrática, modificando así la parábola dada originalmente, y señalando en sus escritos que ésta se *hacía más angosta o ancha,* (Figura 57) lo cual les sirvió para identificar una nueva parábola en la cual los segmentos AB y AC tuvieran la relación establecida en la subtarea. Esto indica que ellos no lograron reconocer que para cada función cuadrática (y parábola) existen los segmentos con la relación en cuestión.

Figura 57

Evidencias escritas de términos matemáticos usados en la subtarea 2.1 por la pareja 2


Subtarea 2.1: Determine si la longitud de alguna cuerda AB es el doble de la longitud del segmento AC. Si existe tal cuerda ¿Quién es el punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetría? Escriba las conjeturas que tenga en relación con la respuesta a esta pregunta.

Si existe, primero con la herramiento de tomar medida, medimos la longitud entre A y B y entre A y C. Empezamos a mover el punto A para tener más espacio con B, pero también cambiaba la longitud entre A y C, por lo que así no encontraríamos la cuerda. Luego empezamos a mover el deslizador "a" y notamos que dependiendo de hacia donde se moviera el deslizador, la parábola se hacía más angosta o más ancha. Por lo que teniendo eso en cuenta,

Empezamos a producir movimientos entre el deslizador y el punto "A". Primero, encontramos una cuerda AC que era el doble que AB, luego, seguimos probando y encontramos la cuerda AB que es el doble que AC. El eje de intersección con el eje de simetría ya existía y tiene nombre "F": este punto es el mismo punto central entre A y B.

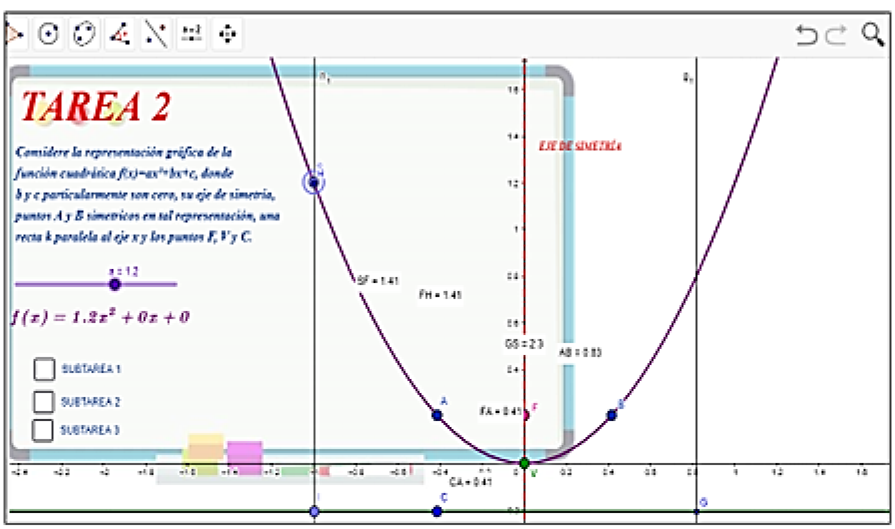
Lo expuesto anteriormente permite observar que los estudiantes conocen y utilizan los objetos distancia entre puntos y longitud de un segmento en el desarrollo de la actividad y que basan sus conclusiones en la relación (de igualdad, orden o parte de) que existen entre las medidas calculadas. Por otro lado, las parejas 2 y 3, destacaron el papel que desempeña el punto *F* como punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetría de la parábola, reconociendo su ubicación dentro de la construcción geométrica. Particularmente la pareja 2 lo describió como *el mismo punto central entre A y B*. (ver Figura 57).

Por otro lado, en esta subtarea se pidió calcular la distancia del punto S a la recta *k*, lo cual fue solventado por dos de las parejas al construir el punto de intersección entre *k* y una recta paralela al eje *y* que pase por S, (Figura 58); esto genera el interrogante de si ellos conocen que para calcular la distancia de un punto a una recta cualquiera es necesario construir la recta perpendicular por el punto a la recta dada, o si por la existencia del plano cartesiano o la posición de la recta *k*, reconocen que tal construcción se puede lograr empleando rectas paralelas (lo que permite observar que si una recta *l* es paralela a otra *m* y que *m* es perpendicular a una recta *n*, entonces l es perpendicular a *n*). La tercera pareja por su parte encontró la distancia de S a *k*, empleando el artefacto distancia y señalando los dos objetos.

Como conclusión del desarrollo de la tarea, la pareja 1, reconoció que en las distintas posiciones en que este el punto S en la parábola, la distancia entre S y F es igual a la distancia entre S y *k*: *al mover el punto S a través de la parábola se van cambiando las distancias, aumentando y disminuyendo de manera en que tienen la misma distancia con F y la recta k*, Por el contrario ,las parejas 2 y 3 aunque trabajaron con los mismos objetos matemáticos, no llegaron a la misma conclusión[1].

Figura 58

Construcción de la distancias Sk mediante el uso de rectas auxiliares



[1] Debe recordarse que en la subtarea 2.2 se empleó la construcción que lograron en la subtarea 2.1 y las parejas 2 y 3 no llegaron a culminar con éxito tal subtarea.

Nota. Construcción de la pareja 1.

En la subtarea 2.3 se observó que los estudiantes (correspondientes a las dos parejas que llegaron hasta acá) identifican que existe una relación entre el coeficiente a de la expresión algebraica que define la función cuadrática y su respectiva representación geométrica (e.d. la parábola). Por ejemplo, la pareja 1 reconoció que la variación del coeficiente *a* incide en los cambios de la parábola, aludiendo en sus respuestas escritas que: *al cambiar el coeficiente a en la función cuadrática con el deslizador la parábola se mueve según sus límites, tanto positiva como negativa*, (ver Figura 55 a). En tanto la pareja 3 fué un poco más allá tratando de caracterizar el cambio que se da en la representación gráfica al incluir términos como "amplitud de la parábola" específicamente ellos dijeron que: *Ósea, tendrías que cambiar como el deslizador (…) pero ahí se cambiaría la amplitud de la parábola.* Además, tal pareja en sus respuestas escritas indicó que: *la distancias entre AB y AC cambia por que la parábola se amplía*, (ver Figura 55).

A continuación, la Tabla 35 presenta el nivel alcanzado por las parejas en relación con los objetos matemáticos trabajados durante la Tarea 2.

Tabla 35

Niveles de desempeño de las parejas con relación a los Objetos matemáticos de la Tarea 2

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
3. Objetos matemáticos	a. En las tareas se utilizan los objetos matemáticos previstos relacionados	1			
		2			
		3	X	X	X
	b. La tarea promueve la representación de objetos matemáticos	1		X	
		2	X		
		3			X

A partir del análisis realizado en esta categoría, y de los cambios propuestos en el análisis de la categoría *enunciado y propósito*, se propone, además, que el docente, realice una intervención en la implementación, para institucionalizar dos cosas, en primer lugar, que la cuerda AB que pasa por el punto F (que puede llamarse foco), perpendicular al eje de simetría, se llama lado recto y segundo, establecer que esta cuerda es la única que cumple la condición de que su longitud es el doble de la longitud del segmento AC. Esto con el fin de dar el término formal al objeto matemático, el cual las parejas de estudiantes exploraron en esta subtarea, pero desconocen su nombre.

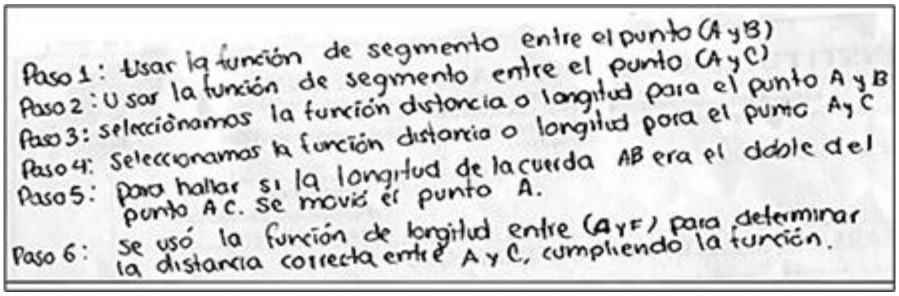
*Categoría 4. Procesos matemáticos transversales de la Tarea 2***.**

El propósito del análisis de la Tarea 2 en relación con esta categoría, tal como se realizó para la Tarea 1, consiste en observar cómo los enunciados, instrucciones y el desarrollo de la Tarea 2 permitieron espacios de exploración de los objetos matemáticos, siendo esto un elemento clave para que las parejas de estudiantes avanzaran en el desarrollo de las subtareas, contribuyendo a la formulación de conjeturas y, en algunos casos, a la producción de argumentos.

En la subtarea 2.1 se observó que las parejas de estudiantes describieron en sus respuestas escritas las experimentaciones que lograron realizar durante la exploración con los artefactos y el uso de objetos matemáticos para determinar la existencia de una cuerda con las condiciones dadas. Esta descripción sé dio a través de la narración de los pasos que fueron realizando en la solución de la tarea (Figura 59). Particularmente, la pareja 1 basó su exploración en el uso del deslizador y la manipulación de segmentos en Geogebra para encontrar las condiciones bajo las cuales AB=2AC. Entre tanto la pareja 2 se percató de la apertura de la parábola al experimentar con el deslizador, esto le permitió a la pareja establecer un vínculo entre el parámetro y la forma de la curva (parábola). Además, en la transcripción de la grabación de la pareja 3, se identificaron algunos elementos que configuran su proceso de exploración: *el uso de la recta es para que los puntos quedarán centrados* [refiriéndose a la posición de los puntos] ... *también usamos el segmento.*(Para la construcción de AB)*, con la herramienta de distancia o longitud* (Para hallar la medida de AB y AC).

Figura 59

Pasos realizados de la exploración en GeoGebra en la solución de la subtarea 2.1

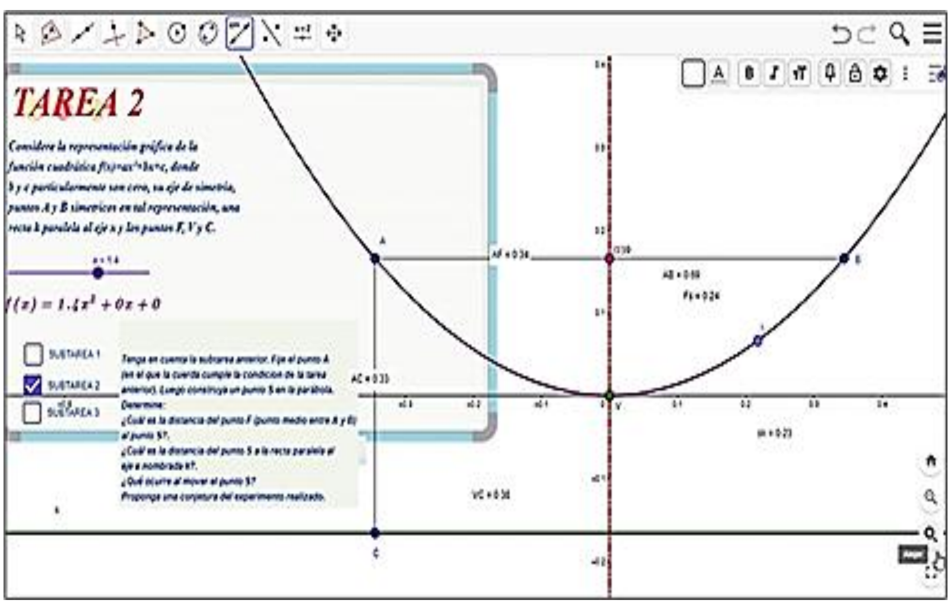

Paso 1: Usar la función de segmento entre el punto (A y B)
Paso 2: Usar la función de segmento entre el punto (A y C)
Paso 3: seleccionamos la función distancia o longitud para el punto A y B
Paso 4: Seleccionamos la función distancia o longitud para el punto A y C
Paso 5: para hallar si la longitud de la cuerda AB era el doble del punto A C. Se movió el punto A.
Paso 6: se usó la función de longitud entre (A y F) para determinar la distancia correcta entre A y C, cumpliendo la función.

Nota. Respuesta escrita durante el desarrollo de la subtarea 2.1 planteado por la pareja 3.

Además, se evidencio que la pareja 3 en la subtarea 2.2 se enfocan en analizar y compara las longitudes al organizarlas en la tabla presentada en esta subtarea, esto permitió a la pareja observar el comportamiento de las longitudes FS y S*k,* en este proceso la pareja 3 manifestó: *necesitamos que S se mueva. ¿cómo hacemos que S se mueva?,* por lo cual se identificó el uso del artefacto Distancia o Longitud fuese un instrumento que permitió a la pareja 3 la exploración matemática de las distancias, al verbalizar valores como *FS= 0.24 y Sk= 0,23*, señalaron *muy cercanos, casi iguales*, (Figura 60). Esto favoreció la exploración matemática de las longitudes dentro de la construcción.

Figura 60

Comparación de las distancias FS y Sk



Nota. Mediciones encontradas de SF y S*k* en la solución de la subtarea 2.2 de la pareja 3.

En el desarrollo de la subtarea 2.3 las parejas 1 y 3 realizaron una exploración matemática al utilizar la herramienta mueve para analizar las variaciones de las longitudes de los segmentos SF, Sk, AB y AC al modificar la posición del punto A. Por ejemplo, la pareja 1 identificó dependencias geométricas entre los elementos de la construcción señalando en su respuesta escrita: *al mover el punto A se mueve la resta k.* Esto evidenció que la pareja en cuestión observó que la posición del punto A afecta otros objetos de la construcción. Entre tanto la pareja 3 , al variar el coeficiente *a* identificó el cambio de las longitudes de los segmento atribuyéndolo también a la apertura de la parábola aludiendo que: *la distancia de AB y AC cambia por que la parábola se amplía.*

En términos de las conjeturas, en la subtarea 2.1 la pareja 1, después de mover el Punto A sobre la parábola y observar lo ocurrido, formuló una conjetura sobre las longitudes obtenidas, en su respuesta escrita expresó, *la media de AF es la misma de AC, siendo ambas la mitad de la longitud AB*. Por su parte la pareja 2 identificó la relación entre el movimiento del deslizador *a* y la apertura de la parábola, aludiendo que, *notamos que dependiendo de hacia dónde se moviera el deslizador, la parábola se hacía más angosta o ancha*. Finalmente, la pareja 3 afirmó que, *el punto F está en el centro*, lo cual indicó que el punto cumplía la función de un punto medio de un segmento entre AB Además las tres parejas concluyen que el punto F es la intersección del eje de simetría de la parábola y al segmento AB.

En la subtarea 2.2 la pareja 1 expresó en su respuesta escrita que, *Al mover el punto S a través de la parábola se van cambiando las distancias (aumentan y disminuyen)de manera en que tienen la misma distancia con F y la recta k*. mientras que la pareja 3, a partir de la observación de la tabla diligenciada por ellos mismos, indicó que entre *más lejano este el punto S del (0) mayor es la diferencia entre la medidas de FS y Sk*.

En la subtarea 2.3, luego de fijar el punto S y mover el punto A, la pareja 1 manifestó la siguiente relación de dependencia entre los objetos dados en el applet de GeoGebra: *se modifican las distancias, ya que el punto A mueve también la recta k entonces se mueven todos menos el punto S y su medida debido a que el S esta fijo.* De acuerdo con lo anterior, en el desarrollo de cada una de las subtareas las diferentes parejas generaron como producto de su trabajo enunciados que permiten caracterizar algunas relaciones (v.g. de igualdad de medida, de dependencia) entre los objetos matemáticos representados en la construcción dada; además, se evidenciaron que como un primer mecanismo de argumentación se realizan verificaciones experimentales (de varios casos) al mover objetos o cambiar valores.

Continuando con la argumentación, en la subtarea 2.1 se evidenció que la pareja 1 experimentó con los artefactos *mueve* y *Distancia o Longitud.* Los estudiantes primero selecciona el punto A y el punto B, posteriormente punto A y el punto C. Esto les permitió obtener las longitudes de los segmentos AB y AC, aludiendo: *son casi iguales* [refiriendo que la parte decimal es distinta] asimismo al visualizar las longitudes AF y AC son iguales concluyen que las longitudes de dichos segmentos representan la mitad del segmento AB.

De acuerdo con lo anterior se observó que la pareja 1 generó conjetura a partir del uso y manipulación de los artefactos, sin embargo, en sus respuestas escritas no hay evidencia de argumentos con el uso de los objetos matemáticos para verificar sus conjeturas.

Por otro lado, la pareja 2 Argumentó por qué su primera estrategia falló: *Empezamos a mover el Punto A para tener más espacio con B, pero también cambiaba la longitud entre A y C , por lo que así no encontraríamos la cuerda.* Esto evidenció que la pareja 2 argumento que al mover el punto A no es suficiente porque les impidió fijar la condición de la subtarea y deciden cambiar moviendo el deslizador *a*, esto evidenció una búsqueda activa de otro parámetro que pueda influir en las longitudes. Asimismo, se observó que dicha argumentación no trasciende al objeto matemático no hay evidencia del uso de propiedades geométricas.

De igual manera, en la subtarea 2.2 la pareja 1, argumento que*, al mover el punto S las distancias de los segmentos varían, pero se mantiene la igualdad*, es decir que la pareja justifico la afirmación con el arrastre del punto S en la parábola y generando varios casos que llevaron a la verificación de lo dicho. Por su parte en la subtarea 2.3, la pareja 3 justificó la observación que realizó al fijar el punto A y mover el coeficiente *a,* señalando que, *ninguno de los demás puntos se mueve porque dependen de A*.

Finalmente, durante el desarrollo de cada subtarea, se evidenció que se potenció la comunicación entre pares. Por ejemplo, la subtarea 2.2 favoreció la comunicación entre los integrantes de la pareja 3, pues uno de los estudiantes asumió un rol orientador, dando instrucciones sobre cómo manipular el punto S en GeoGebra aludiendo a: *y si seleccionas S y le das clic izquierdo… propiedades… ahí aparecen las coordenadas*, *atrás*, mientras que el otro formuló preguntas y expresó sus dudas *¿Cuál seleccionó?, ¿Cómo hace atrás?*, *pero no deja cambiar la coordenada*. Este intercambio de información reflejó un proceso de colaboración en el que las intervenciones de los integrantes se complementaron, puesto que no solo se promovió la manipulación del entorno digital, sino también la necesidad de generar explicaciones mutuamente de los procedimientos; en ese sentido se generó un espacio de comunicación en el que el avance dependía del aporte de cada uno.

Asimismo, en la subtarea 2.3 los integrantes de la pareja 2 compartieron sus ideas respecto a la elección de las herramientas en GeoGebra, en su interacción se observó cómo decidieron activar la vista algebraica de GeoGebra para visualizar las coordenadas del punto S, mientras el otro integrante le señaló que si la escriben es más fácil. En esto se observó que la pareja 2 mantuvo la comunicación para la toma de decisiones sobre la herramienta para poder completar la tabla propuesta en esta subtarea.

De acuerdo con el análisis en esta categoría, la Tabla 36 presenta los niveles en que se encuentran las parejas.

Tabla 36

Niveles de desempeño de las parejas con relación a los Procesos matemáticos transversales de la Tarea 2

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
4. Procesos matemáticos transversales	a. El enunciado e instrucciones de la tarea promueven el desarrollo de procesos de experimentación por parte del estudiante.	1			
		2			
		3	X	X	X
	b. La tarea fomenta la construcción de conjeturas por parte del estudiante.	1			
		2			
		3	X	X	X
	c. La tarea lleva a que el estudiante argumente sus producciones.	1	X		X
		2		X	X
		3			
		1			

	d. La tarea potencia la comunicación entre pares.	2			
		3	X	X	X

De acuerdo con lo anterior se evidencio que la Tarea 2: *Identificar el lado recto*, logró activar las subcategorías mencionadas en esta categoría 4, aunque las parejas presentaron diferentes niveles de desempeño. Las instrucciones y el desarrollo de la tarea promovieron la experimentación a través del uso de los artefactos, además la comunicación entre los integrantes de las parejas logró en algunos casos construcción de conjeturas superficiales mientras que la verificación de casos (ideas) permito a las pareja dar forma a sus opiniones, sin embargo, no argumentaron sus conjeturas. puesto que no se emplean características específicas de las representaciones de los objetos para generar justificaciones a las observaciones hechas.

Luego del análisis de la Tarea*,* a continuación, se resumen las sugerencias que surgieron en relación con dos aspectos útiles para mejorar tanto el diseño como la implementación de la Tarea. Puntualmente, en la Tabla 37 se organiza esta información según cada subtarea, resaltando los aspectos que necesitaron apoyo o ajustes. Estas recomendaciones no solo buscan hacer más claras las instrucciones, sino también promover un uso más adecuado de los artefactos digitales y de los objetos matemáticos involucrados, para que los estudiantes puedan avanzar de manera más autónoma y coherente en la solución de la tarea. La versión final de la Tarea 2 se puede observar en el anexo 4.

Tabla 37

Sugerencias finales luego del análisis de la implementación de la Tarea 2

Sugerencias finales Tarea 2		
Subtarea	**Intervención del Docente**	**En el Diseño la Tarea 2 incluir**
2.1	Al observar que la tabla esté diligenciada por las parejas, preguntar a cada pareja: ¿Qué observa en la relación entre los segmentos AB y AC al cambiar el coeficiente a? ¿Se mantiene la condición para cualquier valor de a? ¿Qué papel juega el coeficiente a? ¿Cambia en algo la existencia de la cuerda?	Se propone reformular el enunciado incluyendo explícitamente que debe buscarse una cuerda con las condiciones dadas para cualquier parábola y no para una en específico y cambiar el término cuerda por una caracterización explícita de tal segmento. Así que el nuevo enunciado es: Con la representación gráfica de la función cuadrática dada, construya un segmento con extremos A y B en la parábola tal que su medida sea el doble del segmento AC. ¿Cuáles son las

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Escuchar la conjetura propuesta por las parejas a partir del experimento realizado

Revisar e intervenir con el fin de institucionalizar lo alcanzado; la caracterización de la existencia de la cuerda (para cada parábola hay una cuerda). Además de explicitar de manera formal la definición del término cuerda. Esto con el propósito de lograr que los estudiantes entiendan su definición como objeto matemático (en términos geométricos)

El docente dará el cierre de la subtarea con una conclusión general del experimento involucrando las herramientas de GeoGebra y los objetos matemáticos.</td>
<td>medidas del segmento AB? y Luego, haga nuevamente esta construcción cambiando el coeficiente a, por lo menos cuatro veces y registre en la Tabla las medidas que tienen los segmentos AB y AC ¿Quién es el punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetría?

<table>
<tr><th>Coeficiente a</th><th>Medida de AB</th><th>Medida AC</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.2</td>
<td>Para tratar de que no se queden únicamente con la verificación de casos, es importante que el docente invite a los estudiantes a argumentar sus conjeturas apoyándose de conceptos matemáticos que han trabajado durante su formación académica en la matemática. Es decir, lograr que los estudiantes indiquen cómo pueden confirmar, verificar o argumentar que su conjetura es verdadera empleando las propiedades de los objetos</td>
<td>Mejorar la construcción suministrada en el Applet dejando visible y fija la cuerda AB que cumple con la condición establecida en la subtarea 2.1, de modo que los estudiantes no puedan modificarla pero que sí dependa de los coeficientes que definen la función cuadrática. En el enunciado se incluirá lo siguiente:

Partiendo del applet de la Tarea 2 en su estado original, construya un punto S en la parábola, muévalo a lugares diferentes y complete la Tabla

<table>
<tr><th colspan="2">Coordenadas del punto S</th><th rowspan="2">Medida de FS</th><th rowspan="2">Medida de S a la recta k</th></tr>
<tr><th>X</th><th>Y</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Con la información de la tabla, responda:
¿Qué ocurre al mover el punto S?
¿Qué relación hay entre FS y Sk?.
¿Qué cambia y qué permanece igual?
¿Qué elemento de la parábola parece conservarse cuando mueve el punto S?
¿Qué importancia tiene el punto F en la parábola?
Proponga una conjetura del experimento.</td>
</tr>
<tr>
<td>2.3</td>
<td>Al finalizar esta subtarea, el docente debe institucionalizar, que la cuerda AC que pasa por el punto F (que puede llamarse foco), perpendicular al eje de simetría, se llama lado recto y segundo, establecer que esta cuerda es la única que cumple la condición de que su longitud es el doble de la longitud del segmento AC.</td>
<td>Incluir Tabla, para orientar a los estudiantes en la verificación de la propiedad en cuestión.</td>
</tr>
</table>

<table><tr><td></td><td></td><td><table><tr><th>Coeficiente a</th><th>Medida de AB</th><th>Medida AC</th><th>Medida de FS</th><th>Medida de S a la recta k</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr></table>

Nota. Fuente de elaboración propia del autor.

5.6.3 Análisis Tarea 3: Relación de la longitud del lado recto de la parábola con la expresión algebraica de la función cuadrática

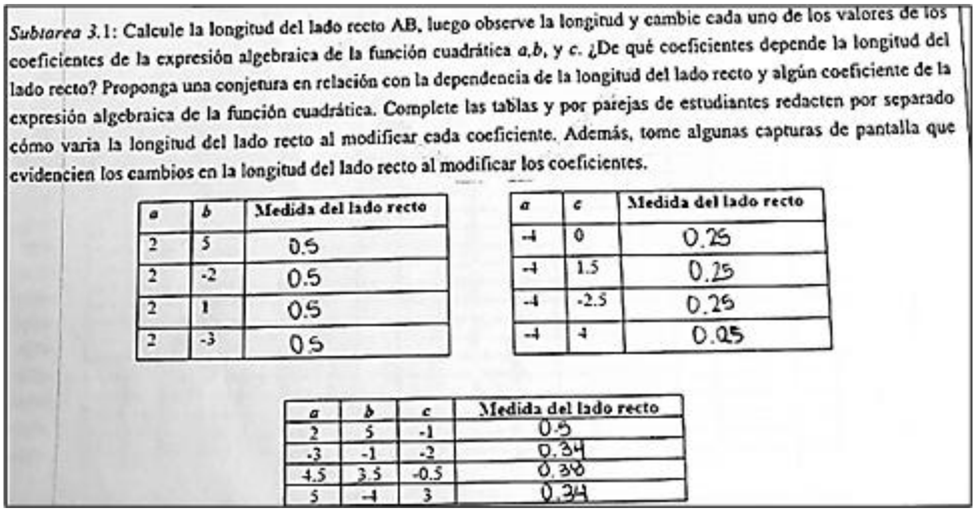
En el desarrollo de la Tarea 3, específicamente en la subtarea 3.1, solo la pareja 1 logró avanzar en su resolución, mientras que las otras dos parejas no alcanzaron a abordarla debido a los diferentes ritmos de solución de las tareas anteriores y a dinámicas externas, como la falta de puntualidad en su llegada a los espacios de implementación, condicionada por el cumplimiento de su horario de clase. Es importante señalar que la pareja 1 fue la única que, desde el inicio de la implementación, logró dar respuesta a las tareas de manera consistente y organizada, lo cual explica porque alcanzaron a abordar parcialmente la subtarea 3.1. Particularmente a la pareja le tomó 45 minutos el desarrollo de esta subtarea.

Categoría 1. Enunciado y propósito de la Tarea 3

El enunciado de la subtarea 3.1 permitió a los estudiantes identificar las acciones a realizar como: calcular la longitud del lado recto AB, observar cómo variaba esta longitud al modificar los coeficientes de la función cuadrática y registrar los resultados en tablas, (Figura 61). La pareja 1 entendió el propósito de la subtarea al señalar en su respuesta escrita: *se concluyó que el lado recto depende de punto A*, lo que evidenció un intento por relacionar la representación geométrica con la expresión algebraica de la función cuadrática y por supuesto la dependencia de la longitud del lado recto con respecto a los coeficientes de la expresión algebraica.

Figura 61

Distancias obtenidas sobre la longitud del lado recto



Subtarea 3.1: Calcule la longitud del lado recto AB, luego observe la longitud y cambie cada uno de los valores de los coeficientes de la expresión algebraica de la función cuadrática *a,b,* y *c*. ¿De qué coeficientes depende la longitud del lado recto? Proponga una conjetura en relación con la dependencia de la longitud del lado recto y algún coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática. Complete las tablas y por parejas de estudiantes redacten por separado cómo varia la longitud del lado recto al modificar cada coeficiente. Además, tome algunas capturas de pantalla que evidencien los cambios en la longitud del lado recto al modificar los coeficientes.

a	*b*	Medida del lado recto
2	5	0.5
2	-2	0.5
2	1	0.5
2	-3	0.5

a	*c*	Medida del lado recto
-4	0	0.25
-4	1.5	0.25
-4	-2.5	0.25
-4	4	0.05

a	*b*	*c*	Medida del lado recto
2	5	-1	0.5
-3	-1	-2	0.34
4.5	3.5	-0.5	0.38
5	-4	3	0.34

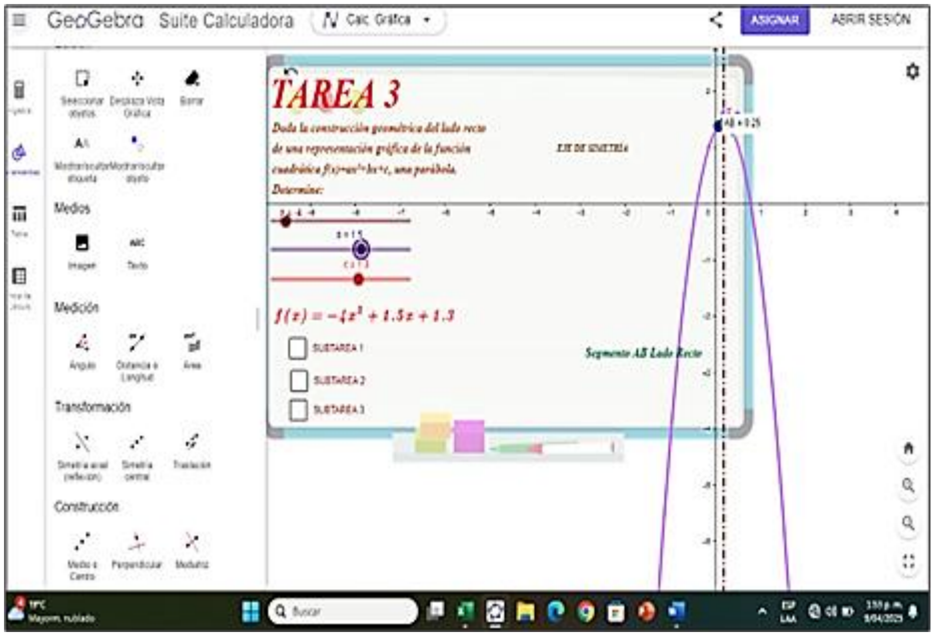
Nota. solución escrita durante la implementación de la tarea por la pareja 1 en la subtarea 3.1 de la Tarea 3.

Categoría 2. Artefactos de la TD de la Tarea 3.

En el desarrollo de la subtarea 1 se utilizaron los artefactos previstos en el análisis a priori, particularmente el *Deslizador* para modificar los valores de los coeficientes *a, b* y *c*, así como la herramienta de distancia o longitud para calcular la longitud del lado recto. Se observó que la pareja 1 empleó estos artefactos mediante esquemas de uso apropiados; por ejemplo, para determinar la medida del lado recto seleccionaron los puntos A y B y así obtuvieron la longitud del segmento, además manipularon los deslizadores *a, b* y *c* para observar cómo estos cambios afectaban el valor de tal longitud (Figura 62), registrando sus observaciones en las tablas propuestas en esta subtarea. En tal sentido, se pudo determinar que el uso de los artefactos facilitó la exploración de la variación de la longitud del lado recto, en coherencia con los objetivos de la subtarea.

Figura 62

Representación dinámica del lado recto de la parábola con la modificación de coeficientes



Nota. Captura tomada de la manipulación de los deslizadores por la pareja 1 durante la implementación de la subtarea 3.1 de la Tarea 3.

Categoría 3. Objetos matemáticos de la Tarea 3.

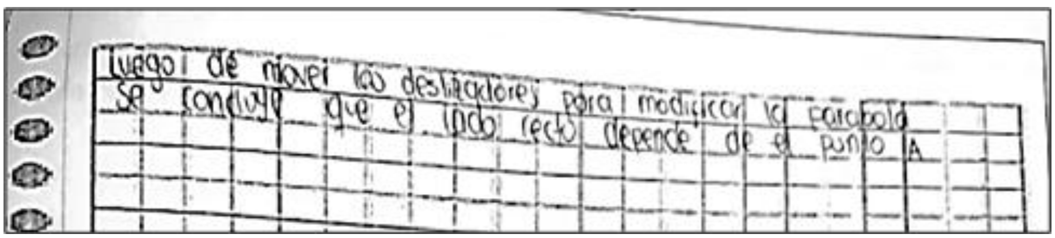
Los objetos matemáticos abordados fueron el lado recto de la parábola y su longitud y los coeficientes de la función cuadrática (*a, b*, y *c*). La pareja 1 estudió estos objetos al relacionar la variación de la longitud del lado recto con el cambio en los valores de los coeficientes, especialmente el coeficiente *a*. En su respuesta escrita consignaron que el *lado recto depende del punto A,* lo que mostró un intento por establecer una relación entre la representación geométrica (lado recto en la parábola) y la representación algebraica de la función cuadrática.

Categoría 4. Procesos matemáticos transversales de la Tarea 3.

El enunciado de la subtarea 3.1 promovió la experimentación ya que los estudiantes modificaron los valores de los coeficientes y observaron la variación de la longitud del lado recto. Además, elaboraron una breve conjetura al afirmar *que el lado recto dependía del punto A* (Figura 63). Aunque esta conjetura no fue del todo precisa puesto que al preguntarles que señalaran el punto A en el applet, la pareja se percató que el punto A no lo movieron para nada y responden: *no perdón es el coeficiente a.* Por otro lado, también el investigador al observar la solución de la pareja en cuestión escuchó que los integrantes verbalizaban que la parábola también presentaba cambios al modificar los coeficientes con los deslizadores. En cuanto a la argumentación, los estudiantes dieron una explicación básica basada en la manipulación del deslizador, sin profundizar en la justificación algebraica. Finalmente, se evidenció la comunicación entre los integrantes, pues completaron de manera conjunta las tablas y la respuesta escrita.

Figura 63

Registro escrito de la pareja 1: dependencia de la longitud del lado recto al modificar los coeficientes



A continuación, se presenta la relación de los niveles alcanzados por la pareja 1, en el desarrollo de esta subtarea 3.1.

Tabla 38

Niveles de desempeño de la pareja 1 en relación con las categorías de análisis para la subtarea 3.1

Categoría	Subcategoría	Nivel	Pareja 1
1. Enunciado y propósito de la tarea (ver Tabla 10)	a. El lenguaje utilizado en la tarea es claro y pertinente para que el estudiante realice lo solicitado.	1	
		2	
		3	X
	b. Se asimila la instrucción propuesta en la tarea; los enunciados de las subtareas son claros para los estudiantes.	1	
		2	
		3	
		4	X
	c. El estudiante identifica un propósito en la tarea.	1	
		2	
		3	X
	a. Los artefactos que fueron utilizados en el desarrollo de cada subtarea se condicen con los propuestos en el análisis a priori.	1	
		2	

2. Artefactos de la TD		3	X
	b. Se evidencia los esquemas de uso de los artefactos por el estudiante en la tarea, basado en las subcategoría expuestas en el análisis a priori de las tareas (ver capítulo 5 Tablas 11 y 14)	1	
		2	
		3	X
	c. Se evidencia que los esquemas de uso de los artefactos fueron apropiados en el desarrollo de la tarea.	1	
		2	
		3	X
		4	
3. Objeto matemático	a. En las tareas se utilizan los objetos matemáticos previstos relacionados.	1	
		2	
		3	X
	b. La tarea promueve la representación de objetos matemáticos	1	
		2	
		3	X
4. Procesos matemáticos transversales	a. El enunciado e instrucciones de la tarea promueven el desarrollo de procesos de experimentación por parte del estudiante.	1	
		2	
		3	X
	b. La tarea fomenta la construcción de conjeturas por parte del estudiante.	1	
		2	
		3	X
	c. La tarea lleva que el estudiante argumente sus producciones.	1	X
		2	
		3	
	d. La tarea potencia la comunicación entre pares	1	
		2	
		3	X

A partir del análisis realizado al desarrollo de la subtarea 1 de la Tarea 3 por parte de la pareja 1, no se evidencia la necesidad de algún cambio en la descripción de tal subtarea; sin embargo, si se genera la sugerencia al docente de promover, a la hora de su implementación, la construcción de argumentos que permitan identificar de mejor forma la relación de dependencia establecida.

Finalmente, recalcamos que no se pudo implementar la tarea 4 por las dinámicas institucionales y como producto de la implementación de las dos primeras tareas y la subtarea 3.1 de la tarea 3, del análisis realizado se genera una propuesta revisada y modificada de las tareas. Esta versión final se puede observar en el anexo 4.

CAPÍTULO 6

6. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de grado, organizadas en torno a tres aspectos principales. En primer lugar, la relación entre los objetivos planteados y los desarrollos logrados en cada una de las fases del proceso de investigación; en segundo lugar, la formación profesional y los aprendizajes logrados a lo largo del desarrollo del trabajo de grado y, en tercer lugar, una reflexión sobre (la importancia/ganancias) la praxis docente relacionada con el desarrollo de este proceso investigativo y los aprendizajes derivados del proceso de diseño e implementación de las tareas mediadas por TD.

Teniendo en cuenta que el objetivo general de este trabajo de grado consistía en diseñar tareas mediadas por tecnologías digitales que permitan construir significados y fortalecer los procesos de estudio asociados a algunas propiedades de una función cuadrática, en relación con su representación algebraica y geométrica, a partir de las etapas descritas en la estrategia investigativa adoptada se realizaron las siguientes tareas:

En primer lugar, se construyó un marco de referencia matemático en el cual se describió parte de la teoría en la que se enmarcan las funciones cuadráticas reales, se estudiaron significados de algunas propiedades de tal objeto asociadas a su representación geométrica y algebraica y se presentaron procedimientos necesarios para identificar tales propiedades. A partir de la revisión teórica que llevó a la construcción de este marco de referencia, se pudo evidenciar la complejidad del objeto de estudio y la riqueza inmersa tanto en los significados como en los procedimientos, hecho que llevó a tomar la decisión de elegir enfocar el diseño de las tareas en la conceptualización de una de las propiedades estudiadas, a saber, el lado recto (desde su representación geométrica) y el coeficiente principal (desde su representación algebraica). Este desarrollo permite observar que el primer objetivo se alcanzó.

En segundo lugar, también como parte del marco de referencia del trabajo y como un camino para el logro del objetivo específico tres, se identificaron elementos teóricos dentro del campo de la didáctica de las matemáticas que permitieran guiar el proceso de diseño de las tareas producto de este trabajo. Puntualmente, se abordó la teoría de Génesis Instrumental y Orquestación Instrumental como un mecanismo para establecer el papel de las tecnologías digitales en las tareas y especificar la diferencia entre artefacto e instrumento así como caracterizar el significado de esquemas de uso de los artefactos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes; esto permitió a su vez observar la importancia de realizar diseños responsables que atiendan los objetivos de enseñanza y las posibilidades del uso de las TD. Además, se seleccionó un referente teórico en relación con la noción de tarea y tarea mediada por tecnologías digitales y se caracterizaron los elementos esenciales que deben estar presentes en cada una de estas tareas.

A partir del marco de referencia descrito, se generó la propuesta de tareas mediadas por tecnologías digitales para abordar las propiedades mencionadas del objeto de estudio. Para el diseño de esta propuesta se eligió el entorno de trabajo del software GeoGebra, debido a las posibilidades que tiene para el manejo de diferentes tipos de representación y las conexiones que permite entre ellas, así se estudiaron algunas de sus herramientas que se seleccionaron como artefactos para ser empleados en el desarrollo de las tareas. Posteriormente, teniendo como propósito matemático el estudio de la relación entre la longitud del lado recto y el coeficiente principal de una función cuadrática, se realizó una deconstrucción de los objetos matemáticos (secundarios) necesarios para el estudio y se generó una secuencia de tareas, que promueve el análisis parcial de tales objetos a través de subtareas puntuales, que invitaban a los estudiantes a realizar procesos de exploración, visualización, conjeturación y comunicación a través del manejo de diferentes artefactos dispuestos en applets generados específicamente para cada tarea.

Esta forma de diseñar las tareas fue buena porque permitió avanzar paso a paso en la construcción de significados para los objetos estudiados y generó un camino para llegar, en la última tarea, a abordar el estudio de la propiedad elegida. Se resalta que este diseño se constituyó un acierto ya que al reflejar una estructura organizada, rigurosa y coherente con cada uno de los propósitos matemáticos permitió establecer relación entre estos y las bondades del software GeoGebra, aprovechando su carácter dinámico para vincular aspectos algebraicos y geométricos en el estudio de la función cuadrática. Entre tanto la estructura secuencial y progresiva de las tareas favoreció un avance ordenado hacia la construcción conceptual, generando condiciones para la reflexión y el análisis de las propiedades de los objetos involucrados. Es de resaltar que este tipo de diseño ofrece un potencial formativo que permite a estudiantes explorar, visualizar, validar y proponer conjeturas, generando procesos de descubrimiento en relación con los objetos matemáticos.

Además, el diseño favoreció la posibilidad de avanzar de manera progresiva hacia el logro de los propósitos planteados, puesto que el proceso partió de la identificación del objeto matemático, el cual se dividió en subtareas que orientaron en gran parte la organización interna entre las subtareas y el propósito general de las mismas. Esta organización permitió definir un camino claro al fortalecer la articulación entre las subtareas, de esta forma se da el cumplimiento al segundo objetivo específico, al evidenciar el diseño intencionado y fundamentado de las tareas para orientar el estudio.

Aunado a lo anterior, y como parte del logro del objetivo específico 5, los marcos de referencia abordados permitieron establecer la construcción de categorías para realizar el análisis de los datos recolectados en el proceso de implementación atendiendo a aspectos como enunciado y propósito, artefactos de la TD, objetos matemáticos y procesos transversales. Además, como parte de la primera fase de la estrategia investigativa, se establecieron las condiciones de la implementación, y los recursos necesarios. Al respecto, vale la pena resaltar que, debido a las dinámicas laborales, aunque la propuesta fue inicialmente pensada para ser implementada en la institución educativa la Merced tuvo que implementarse en la institución educativa la Armonía con solo 6 estudiantes de grado undécimo.

En relación con la segunda fase, se organizaron parejas de trabajo, esto facilitó la distribución y optimización de los recursos disponibles, promoviendo la colaboración e intercambio de ideas y estrategias para dar solución a las tareas. La distribución por parejas permitió a los integrantes tomar diferentes roles en el desarrollo de las tareas potenciando la exploración y el manejo del software. Sin embargo, se presentaron algunas dificultades vinculadas al uso de los artefactos de GeoGebra debido a la poca familiarización de los estudiantes con el entorno digital que afectaron los tiempos previstos para la solución de cada, razón por la cual no se implementaron todas las tareas propuestas.

Se presentaron inconvenientes técnicos que afectaron parcialmente la recolección de información particularmente con las grabaciones de algunas secciones, puesto que no alcanzaron la calidad esperada, el sonido se vio afectado por ruidos externos al aula de implementación, lo que dificultó parcialmente la transcripción de algunos fragmentos de las interacciones. A pesar de estos inconvenientes, se logró recuperar la información de la grabación con las observaciones directas realizadas por el investigador durante el proceso.

Finalmente, en términos de la fase 3 y el objetivo 4, en el análisis de la implementación se evidenció que las parejas de estudiantes emplearon activamente los artefactos de GeoGebra a través de la exploración, construcciones, movimiento de puntos, cálculo de distancia, arrastre de deslizadores, entre otros; sin embargo, algunas parejas presentaron dificultades para entender las propiedades de tales herramientas, pese a que previamente se realizó una familiarización con el software. Esto refleja que para futuras intervenciones de forma más detallada se debe realizar una familiarización más amplia del entorno del software GeoGebra con los estudiantes. No obstante, se destaca que a medida que avanzaron en el desarrollo de las tareas, las parejas de estudiantes lograron utilizar en algunos de los casos los artefactos previstos en la subtareas percatándose de algunas propiedades de los artefactos útiles para el desarrollo de las tareas.

Los estudiantes lograron identificar parcialmente que la longitud del lado recto se constituye en una característica geométrica de la parábola a partir de la observación de puntos simétricos, cuerda, segmentos, rectas y la igualdad entre distancias, aunque sin generar una definición formal, en parte debido a que este término era completamente desconocido para ellos. Sin embargo, establecieron relaciones entre los coeficientes de la expresión algebraica con la representación geométrica (parábola), reconociendo que las variaciones de los coeficientes modificaban la parábola. Particularmente entendieron que el coeficiente principal a modifica la apertura y dirección de esta.

En la implementación de las tres tareas propuestas se identificó que la secuencia de las subtareas promovió que las parejas de estudiantes avanzaran paulatinamente en la construcción de significados sobre algunos elementos geométricos de la parábola, aunque se evidenciaron algunas dificultades relacionadas con la interpretación de los enunciados, debido en parte al manejo de términos técnicos y al desconocimiento de algunos artefactos del software, hecho que llevó a la necesidad de ajustar términos y consignas para mejorar el diseño de la tareas; además, se observó la pertinencia que el docente enfatice en aspectos teórico-conceptuales que garanticen la aprensión de la relación de términos y conceptos inherentes a la tareas.

Durante la implementación se observó, además, que las herramientas de GeoGebra, como el deslizador, mover, alejar y acercar, fueron empleadas activamente por las tres parejas de estudiantes en el desarrollo de las subtareas. El uso de estas herramientas facilitó la identificación de las condiciones establecidas en cada subtarea y favoreció la visualización de los objetos matemáticos lo que permitió a los estudiantes verificar sus construcciones y reconocer relaciones geométricas.

En términos generales, el análisis de la implementación permitió reconocer aciertos importantes del diseño, como el potencial de las tecnologías digitales para promover la exploración y construcción de significados sobre los objetos matemáticos, mostrando así que la hipótesis planteada en la fase dos de la estrategia investigativa se ratifica; también, se reconocieron dificultades propias del proceso de adaptación al uso de GeoGebra, a la interpretación de los enunciados y a los tecnicismos empleados en algunas preguntas. Estas observaciones resultaron fundamentales para mejorar las tareas con miras a consolidar una propuesta más sólida para el fortalecimiento de los procesos de estudio entorno a algunas propiedades de la parábola y su relación con función cuadrática. Como resultado, se revisó y mejoró el diseño de las tareas, modificando parte del lenguaje, incluyendo preguntas guía y tablas como una forma de favorecer la identificación de los objetos matemáticos y sus relaciones a partir del uso de los applets en GeoGebra.

Es fundamental que la intervención del docente se oriente hacia la institucionalización de los resultados, guiando de manera intencional los procesos de estudio y promoviendo la construcción colectiva de significados matemáticos. Esta orientación didáctica permite atender de forma directa las dificultades evidenciadas durante la implementación y proyectar mejoras que fortalezcan el alcance de los objetivos en futuras aplicaciones del diseño. Asimismo, el pleno desarrollo de los procesos de estudio y la formalización de los significados matemáticos requieren continuar ajustando el diseño de las tareas y profundizando en la mediación docente y la comprensión del papel de las TD de modo que los logros alcanzados puedan consolidarse en experiencias de aprendizaje más estructuradas y duraderas.

Por otro lado, en términos de la formación profesional y aprendizajes logrados en el desarrollo de este trabajo se reconocen ganancias en relación con el conocimiento matemático escolar, el conocimiento didáctico, particularmente sobre el diseño de tareas mediadas por TD, y con la importancia de contar con una visión metodológica que guíe un proyecto de investigación.

En primera instancia, la construcción (reconstrucción) de significados asociados a propiedades de las funciones cuadráticas y el estudio de los procedimientos que permitieran abordar tales propiedades, llevó a cuestionar a la autora acerca de sus conocimientos matemáticos del objeto en cuestión y a la necesidad de profundizar en el desarrollo conceptual de las matemáticas inmersas, particularmente, con miras a tener una visión más completa y estructurada de los objetos y procedimientos y así poder generar una intervención más enfocada y pertinente en relación con las estrategias para su abordaje en el aula.

En segundo lugar, y al ser la primera investigación formal desarrollada por la autora, se logró un reconocimiento de la importancia de establecer una estrategia metodológica que guiará el desarrollo de la investigación a partir, por ejemplo, del uso de los marcos de referencia para diseñar las tareas y para elegir y utilizar los artefactos, de la construcción de categorías de análisis y su uso para organizar el análisis de la información recolectada, de la necesidad de planear la implementación y de seleccionar la forma de recolectar la información y de analizarla. Particularmente, la formulación de las categorías para el análisis de las tareas representó un desafío significativo en el desarrollo de la investigación, debido a la ausencia (o desconocimiento de la autora) de modelos que se ajustaran a los propósitos de la investigación, proceso que requirió un una profunda reflexión sobre los aspectos que podrían ser analizados en cada tarea y de los criterios de análisis que garantizaran coherencia y pertinencia.

Aunado a lo anterior, el trabajo favoreció el desarrollo de habilidades por parte del investigador en el manejo de las herramientas para el diseño de las tareas, entendidas como un medio para fortalecer los procesos de estudio de objetos matemáticos y promover procesos de aprendizaje novedosos y poco rutinarios. Asimismo, contribuyó al desarrollo de criterios para seleccionar, adaptar y orientar el uso de TD en la enseñanza de la matemática, destacando la articulación entre los objetos matemáticos, los artefactos y las mismas TD, como apoyo en una construcción más didáctica y significativa de esta disciplina. Se resalta, por un lado, la identificación de parte del potencial que conlleva el uso de las TD como un mecanismo de mediación en el aula, pero a su vez, la necesidad de hacer un uso responsable, planeado y con propósitos de aprendizaje claros de estas TD.

Finalmente, se observa que el análisis de la implementación de las tareas lleva a que las reacciones, interacciones y respuestas de los estudiantes sean fundamentales para identificar los aciertos del diseño y, cuando es necesario, de los aspectos que deben ajustarse o adaptarse según sus alcances formativos. Así, este análisis resalta la importancia de que el docente oriente su práctica hacia el fortalecimiento, especialmente, de los procesos analíticos y geométricos propuestos, apoyándose en las tecnologías digitales, entendidas no como simples recursos temáticos, sino como verdaderos mediadores del aprendizaje.

En relación con la reflexión sobre la praxis docente generada como consecuencia del desarrollo de este trabajo, se observa que la investigación desarrollada se constituyó en un proceso de análisis, transformación y fortalecimiento en la práctica pedagógica de la autora tanto en su papel docente como en su rol como investigadora. El diseño y la implementación de las tareas mediadas por tecnologías digitales permitieron repensar las estrategias de enseñanza, no sólo en relación con el objeto de estudio de este trabajo sino en relación con las matemáticas escolares que se pueden abordar en el aula, destacando la necesidad de planificar tareas que promuevan la interacción entre las diferentes representaciones de un objeto y lo tecnológico de tal forma que se favorezca, más allá del estudio de conceptos y definiciones, la posibilidad de abordar procesos generales de una forma activa y que genere nuevas visiones sobre las matemáticas mismas en los estudiantes.

El desarrollo de este trabajo, además, permitió reconocer que el uso de tecnologías digitales requiere del docente un análisis profundo y una reflexión sobre su rol, por ejemplo, para pasar de impartir solo conocimiento a convertirse en un orientador de procesos que conlleven a la experimentación en el campo de las matemáticas. Esto refuerza la idea de que la tecnología, más que sustituir la enseñanza del docente, la transforma en un espacio colaborativo de construcción de significados para el estudiantes y para el docente. Particularmente, esta experiencia permitió evidenciar el potencial didáctico del software GeoGebra para promover la observación de relaciones entre coeficientes, puntos, segmentos, rectas, y longitudes en la representación algebraica y geométrica de una función cuadrática.

En suma, la investigación realizada en el marco del programa de maestría en educación matemática se considera un paso importante en el desarrollo profesional de la autora, dado que a lo largo de cada etapa del proceso investigativo fue posible explorar diversas metodologías, propuestas didácticas y un marco teórico que enriquecen y contribuyen a su fortalecimiento como docente de matemáticas. Asimismo, la investigación se constituyó en una oportunidad para fortalecer competencias investigativas y didácticas, reconociendo y descubriendo la importancia de objetos matemáticos que interactúan entorno a la función cuadrática, otorgándoles mayor importancia y pertinencia en la labor docente.

Finalmente, el proceso de diseño, implementación y análisis de las tareas mediadas por tecnologías digitales permitió evidenciar el valor de la interacción entre lo algebraico y lo geométrico como medio para favorecer la comprensión de las propiedades de la función cuadrática. Además, este estudio aporta elementos que pueden orientar futuras investigaciones centradas en el uso de tecnologías para promover procesos matemáticos y geométricos más profundos, consolidando una mirada reflexiva y crítica sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos mediados digitalmente.

De igual modo, se recomienda ampliar el uso de distintos artefactos tecnológicos y considerar contextos reales o semireales que permitan vincular las funciones cuadráticas con situaciones cotidianas o interdisciplinarias. Estos nuevos enfoques podrían fortalecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes y aportar a la consolidación de propuestas didácticas más integrales que favorezcan la formación matemática mediada por TD permitiendo un aprendizaje más significativo.

7. Referentes Bibliográficos

Álvarez Alfonso, I., Ángel Bautista, L., Carranza Vargas, E., & Soler Alvarez, M. (2014). Actividades matemáticas: Conjeturar y argumentar. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85*, págs. 75-90.

Álvarez, M. (2010). *El diseño de tareas matemáticas como instrumento de enseñanza y aprendizaje.* Universidad de Granada, Granada, España.

Anato, J. (2022). *Estrategias metodológicas utilizadas por docentes de matemáticas para la enseñanza de la función cuadrática con el uso de tecnologías digitales.* Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Obtenido de https://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/18020

Armella, L. M. (2002). Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Tecnologías Digitales en el Aula de Matemáticas. *Instrumentos matemáticos computacionales*, (págs. 81-86). México D. F., México.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, págs. 245–274.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educacion Matemática, 16*(3), págs. 5-18. doi:https://doi.org/10.24844/EM1603.01

Ausubel, D. P. (2002). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* (2. edición, Ed.) México D.F.: Trillas.

Báez , A. M., Martínez , L. Y., Pérez , O. L., & Pérez, R. (2017). Propuesta de Tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería. *Formacion Universitaria, 10*(3), págs. 93-105. doi:doi: 10.4067/S0718-50062017000300010

Balacheff, N. &. (1996). International handbook of mathematical education. En A. J. Bishop, & A. J. Bishop (Ed.), *Computer-based learning environments in mathematics* (págs. 469–501). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Barrera, F. A. (2001). *Tecnología educativa y su incidencia en los procesos de aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Betancourt González, Y. (2014). *Procesos de instrumentación e instrumentalización en el uso de software de geometría dinámica: Un estudio con futuros profesores de matemáticas.* [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. Obtenido de https://funes.uniandes.edu.co/11489/

Borgobello, A., & Monjelat, N. G. (2019). Vygotsky en la sociedad digital: Análisis de literatura científica actual. *Perspectivas Metodológicas, 19*(23). doi:http://dx.doi.org/10.18294/pm.2019.2200

Brausin Fandiño, D., & Herrera Vargas, L. (2019). *La mediación instrumental y el cuerpo: Una aproximación al pensamiento variacional.* Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12209/11529

Cantoral, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Épsilon, 14*(3), págs. 353–369.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 26*(3), págs. 431-444. Obtenido de https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3753

Claro, M. (2010). *La incorporación de tecnologías digitales en educación: modelos de identificación de buenas prácticas.* Santiago de Chile: Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). Obtenido de https://repositorio.cepal.org/handle/11362/3798

Cobb, P. C. (2003). Design experiments in educational research. *32*, págs. 9–13. Obtenido de https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Edits.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (págs. 123-146). Springer.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2016). Design research from the learning design perspective. En 3. edición (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (págs. 481–503). Nueva York, EE. UU.: English, L. D., & Kirshner, D.

Coca Santanilla, A., & Benítez Pérez, A. (2023). Análisis de la instrumentalización e instrumentación que genera el uso de GeoGebra en la enseñanza tradicional de matemáticas. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 14*(27). Recuperado el 14, de https://doi.org/10.23913/ride.v14i27.1633

Cohen, L. M. (2007). *Research methods in education (o Métodos de investigación educativa si usas la versión traducida).* (C. López, Trad.) Londres: Routledge (o Morata, si usas la versión traducida).

Consejo Nacional de Política Económica y Social – CONPES. (2020). *Política nacional para impulsar la innovación en las prácticas educativas a través de las tecnologías digitales.* Bogotá: Departamento Nacional de Planeación (DNP). Obtenido de https://colaboracion.dnp.gov.co/CDT/Conpes/Econ%C3%B3micos/3988.pdf

Córdoba, C. A. (2013). *El impacto de los objetos de aprendizaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación básica secundaria.* Tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Universidad de Antioquia. Obtenido de https://hdl.handle.net/10495/5317

Cox, M. P. (2003). *What factors support or prevent teachers from using ICT in their classrooms?* Londres: British Educational Communications and Technology Agency (BECTA). Obtenido de https://dera.ioe.ac.uk/1603/1/becta_2003_teachersictreport.pdf

Cox, M., Abbott, C., Webb, M., Blakeley, B., Beauchamp, T., & Rhodes, V. (2004). *A review of the research literature relating to ICT and attainment.* British Educational Communications and Technology Agency (Becta). Obtenido de https://dera.ioe.ac.uk/1603/1/becta_2003_teachersictreport.pdf

De la Cruz Urbina, F. (2015). *Resignificación de la función cuadrática a partir de la modelación-graficación de fenómenos de movimiento.* Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas México. Obtenido de https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1144342/Cruz2015La.pdf?utm_source

De León, W. E. (2015). *Tareas escolares y la intervención de los padres de familia*. Universidad Rafael Landívar, Guatemala. Obtenido de http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2015/05/09/De-Leon-Wilson.pdf

Dede, C. (2014). *The role of digital technologies in deeper learning.* Jobs for the Future. Obtenido de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED561254.pdf?utm_source

Díaz Quezada, V., & Flores del Rio, G. (2022). Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. *Estudios Pedagógicos, 48*(2), págs. 9-34. Obtenido de https://doi.org/10.4067/S0718-07052022000200009

Drijvers, P. (2012). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). (S. J. Cho, Ed.) 135-152.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon,, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, págs. 213–234. Obtenido de https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Drijvers, P., Godino, J., Font, V., & Trouche, L. (2012). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, págs. 23–49. doi:DOI 10.1007/s10649-012-9416-8

Educational Technology. (2017). *Technology as a powerful tool for transforming learning*. Educational Technology Publications. Obtenido de https://educationaltechnology.net/technology-as-a-powerful-tool-for-transforming-learning/

Fajardo, J. G. (2023). El pensamiento variacional y el uso de tecnologías digitales en el aula de matemáticas. *Revista Educación Matemática, 35*(2), págs. 55–70. Obtenido de https://doi.org/10.24844/EM3502.03

Fernández, L. (2024). *GeoGebra como herramienta para la enseñanza de las funciones matemáticas en educación media.* Tesis de maestría, Universidad de la Amazonia, Florencia, Colombia. Obtenido de https://hdl.handle.net/20.500.12799/15034

Flores, A. (2014). *El uso de ambientes de geometría dinámica para la enseñanza de conceptos geométricos en educación básica.* Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Obtenido de https://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/3452

Fraenkel, J. R. (2007). *How to design and evaluate research in education.* Nueva York, EE. UU.: McGraw-Hill.

Francesc, X. (2014). La integración de tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas: representaciones y aprendizaje activo. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 13*(2), págs. 77-92.

Freire, P. (1990). *La naturaleza política de la educación: cultura, poder y liberación.* México D. F.: Siglo XXI Editores.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (1994). *Significado y comprensión de los objetos matemáticos.* Granada, España: Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Universidad de Granada. Obtenido de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Gómez , P., Mora, M., & Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En E. P. (Ed.) (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: Conceptos y técnicas curriculares* (págs. 197-264). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Obtenido de https://funes.uniandes.edu.co/11906/

Gómez Zermeño, M., & Franco Gutriérrez, H. (2018). THE USE OF EDUCATIONAL PLATFORMS AS TEACHING RESOURCE IN MATHEMATICS. *Journal of technology and science education, 8*(1), págs. 63-71.

Gómez, P. &. (2010). Diseño e implementación de tareas para la enseñanza de las matemáticas con el uso de tecnologías digitales. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, págs. 13-27.

Gómez, P. M. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Gvirtz, S. &. (1998). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza* (Vol. 1). Buenos Aires: Aique.

Hernández Gómez, E., Briones Penalver, A. J., Serdeira Azevedo, P., & Medina Vidal, F. (2016). GeoGebra y TIC en matemáticas de enseñanza secundaria. *9*, págs. 212-215. Obtenido de http://hdl.handle.net/10317/5924

Hernández, J. (2008). Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas: una mirada constructivista. *Revista Educación Matemática, 20*(3), págs. 65-84.

Hernández, J. (2013). *El uso de GeoGebra en la enseñanza de las funciones cuadráticas en educación media superior.* Tesis de maestría, Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, La Habana, Cuba. Obtenido de http://repositorio.ucp.edu.cu/handle/20.500.12345/284

Hollebrands, K. F. (2007). The role of dynamic geometry software in high school geometry instruction. *School Science and Mathematics*, págs. 440-446.

Hoyles, C. &. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Mathematical Thinking and Learning*, págs. 313–330. Obtenido de https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1515595/1/Hoyles2003What.pdf

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5.º de secundaria.* Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Obtenido de https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/120879

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Principles in the design of tasks to support pre-service teachers' noticing enhancement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(6), págs. 585-609. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/334706771_PRINCIPLES_IN_THE_DESIGN_OF_TASKS_TO_SUPPORT_PRE-_SERVICE_TEACHERS'_NOTICING_ENHANCEMENT

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Géomètre. *IInternational Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), págs. 283–317. Obtenido de https://doi.org/10.1023/A:1013309728825

Lancheros, L. A. (2014). *Las TIC como estrategia motivacional en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación básica secundaria.* Tesis de maestría, Tesis de maestría, Chía, Colombia. Obtenido de https://intellectum.unisabana.edu.co/handle/10818/10350

Leung, A. &.-F. (2015). Diseño de tareas matemáticas: el rol de las herramientas. En *Diseño de tareas en educación matemática: un estudio del ICMI 22* (págs. 191–225). Springer International Publishing. Obtenido de https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_9

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in mathematics education. En A. Gutiérrez, & P. Boero (Edits.), *Handbook of Research on the Psychology of* (págs. 173-203). Sense Publishers.

Martín, E. (2000). La tecnología y la enseñanza de las matemáticas: reflexiones y propuestas. *Revista Iberoamericana de Educación, 22*(2), págs. 45-58.

Martínez Lopez, L. G., & Gualdrón Pinto, E. (2018). Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno. *Revista Investigación, Desarrollo e Innovación*, págs. 91-102. Obtenido de https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n1.2018.8156

Martínez Torres, M. G. (2022). *Recursos digitales para la enseñanza de la función cuadrática en la educación básica superior.* Tesis de maestría, Universidad Tecnológica Indoamérica, Quito, Ecuador. Obtenido de https://hdl.handle.net/20.500.14809/2846

Martínez, M. (2012). *La investigación cualitativa etnográfica en educación.* México D.F.: Trillas.

Méndez, J. A.-S. (2024). Uso de GeoGebra para la enseñanza de las ecuaciones lineales. *Revista Educación y Tecnología*(Especial).

Mesa , Y., & Villa, J. (2008). *Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática.* Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares: Matemáticas.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia & Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. (2000). *Programa Computadores para Educar: Estrategia nacional para la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación en la educación.* Bogotá: MEN–MinTIC. Obtenido de https://www.computadoresparaeducar.gov.co

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales: una perspectiva del pensamiento matemático en la educación básica y media.* Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81033_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: Guía No. 7*. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-81033_archivo_pdf.pdf

Molina González, M., Castro Martinez, E., Molina González, J. L., & Castro Martínez, E. (2011). un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Revista de investigación y experiencias didácticas, 29*(1), págs. 75-88. doi:https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Molina, L. M. (2017). *Las TIC como herramienta de motivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación media.* Tesis de maestría, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Obtenido de http://repository.ut.edu.co/handle/001/2158

Opazo, C. G. (2014). GeoGebra como herramienta de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas. *Revista Paradigma, 35*(2), págs. 114–133.

Orozco, S. J., & Cuevas Vallejo, C. A. (2021). Una orquestación instrumental para un curso en línea a nivel universitario. *Apertura (Guadalajara, Jal.), 13*(2), págs. 22-37. Obtenido de https://doi.org/10.32870/ap.v13n2.2086

Ortiz, V. Y. (2018). Exelearning. En 1. Papert, *Logo Philosophy and Implementation (Papert, 1999)* (págs. argumentan que el empleo de herramientas tecnológicas educativas para la enseñanza de matemáticas puede ser provechoso si están acompañadas de estrategias apropiadas, siendo necesario planificar tareas con tecnol). Cambridge: Logo Computer Systems Inc. Obtenido de http://www.microworlds.com/company/philosophy.pdf

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Basic Books.

Papert, S., & Harel, I. (1991). *Situating constructionism.* Ablex Publishing.

Perry, P., Samper , C., Molina , Ó., Camargo , L., Echeverry, A., Fernandez, F., . . . Samiento , B. (2013). Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular. En P. S. Perry, *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística* (págs. 13-92). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. doi:10.13140/2.1.3396.4480

Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en el concepto de función.* Tesis doctoral, Cuernavaca, México. Obtenido de http://www.worldcat.org/title/visualizacion-y-modelacion-en-la-adquisicion-del-concepto-de-funcion/oclc/279173232

Quiñones Ortiz, W. H. (2017). *Una mirada didáctica a los procesos de articulación de los registros gráfico-cartesiano y simbólico-algebraico: el caso de la función cuadrática.* Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Obtenido de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/60232

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, págs. 37–70. Obtenido de https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Rivera, C. (2009). *La conversión de representaciones semióticas de la función cuadrática a través del uso de Cabri-Géomètre II.* Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Rodríguez, E. C., & Ansola Hazday, E. (2010). El currículo de matemática con tecnología en carreras de ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(1).

Román, M. &. (2022). *El uso de GeoGebra en la enseñanza de la función cuadrática para el fortalecimiento de competencias matemáticas.* Tesis de maestría, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Obtenido de https://ciencia.lasalle.edu.co/maest_educacion/301

Romberg, T. A. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. En D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 49–64). Nueva York, EE. UU: Macmillan.

Ruiz Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Salat Figols, R. S. (2013). La enseñanza de las matemáticas y la tecnología. *Innovación educativa (México, DF), 13*(62), págs. 61–74. Obtenido de https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-26732013000200005&script=sci_arttext&utm_source=chatgpt.com

Santos, M. A. (1995). *Teoría y práctica de la educación.* Madrid, España: Akal.

Spiegel, M. R. (2005). *Cálculo superior.* McGraw-Hill.

Steffe, L. P., Thompson, P. W., & Von Glasersfeld. (2012). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. c. education. Springer. Obtenido de https://doi.org/10.1007/978-94-009-2183-6_10

Sua Flórez, C., & Camargo Uribe, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: dúo para resolver problemas. *Educación Matemática, 31*(1), págs. 1-37. Obtenido de https://doi.org/10.24844/EM3101.01

Suárez, L. M. (2022). *GeoGebra como estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas.* Bogotá, Colombia.

Tejera, J. (2021). *La enseñanza de las funciones cuadráticas mediada por tecnologías digitales: una propuesta desde el pensamiento variacional.* Tesis de maestría, Universidad de la Amazonia, Florencia, Colombia. Obtenido de https://hdl.handle.net/20.500.12799/14567

Tortós, E. F. (1997). Computadoras y educación. *Reflexiones, 64*(1), pág. 4.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interaction in a computer-based learning environment (CBLE): Guiding students' process command through instrumental orchestrations. *9*, págs. 281-307. Obtenido de http://www.academia.edu/attachments/3693391/download_file

Vargas Alejo, V., & Guzmám Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, págs. 89-107. Obtenido de https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285685

Velásquez, C. L. (2017). Influencia de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la motivación y el aprendizaje de los estudiantes. *Revista Educación y Tecnología, 12*(2), págs. 45–58. Obtenido de https://revistaeducacionytecnologia.cl/article/view/2017

Villa Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, M. (2010). Pensamiento variacional: seres humanos con GeoGebra en la visualización de noción variacional. *Educación Matemática Pesquisa, 12*(3), págs. 514-528.

Vitabar, F. (2016). Geogebra: un extrano en el aula. *Uno revista de didactica de las matemáticas*(71), págs. 7-12.

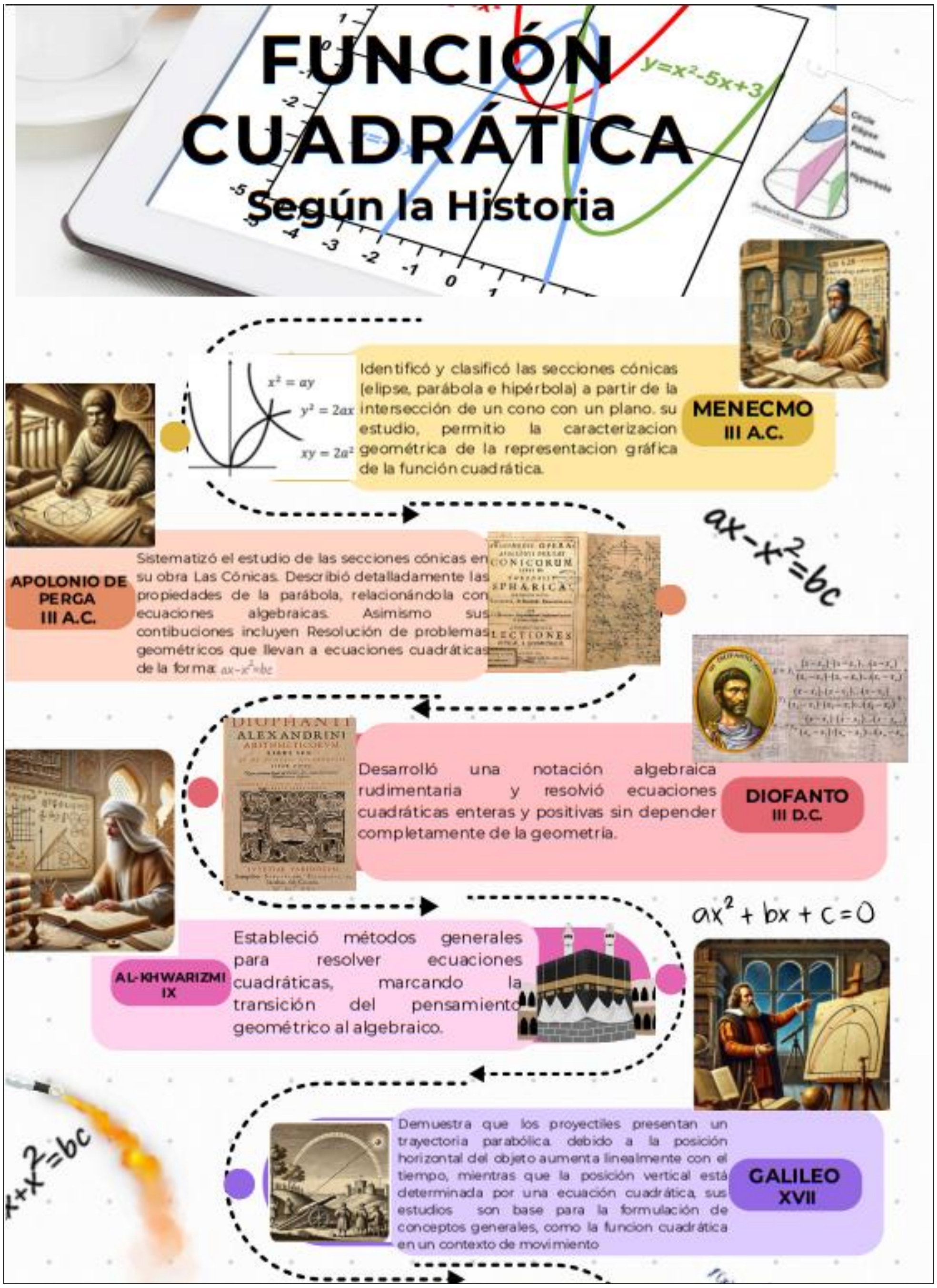
What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? (2003). *Mathematical Thinking and Learning*, págs. 313-330. Obtenido de What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? (PDF)

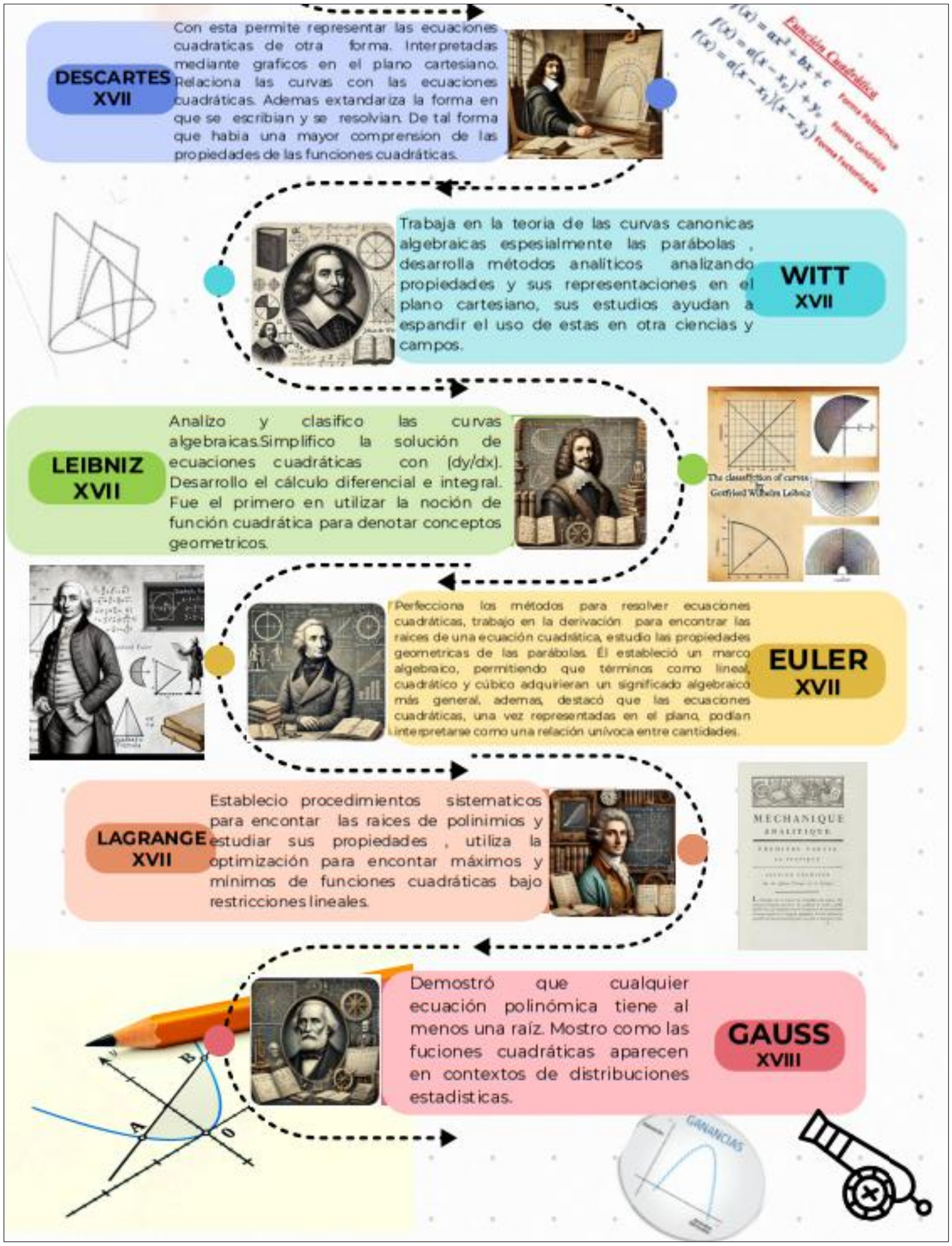
Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.

8. Anexos

Anexo 1.

Infografía : Función cuadrática según la historia





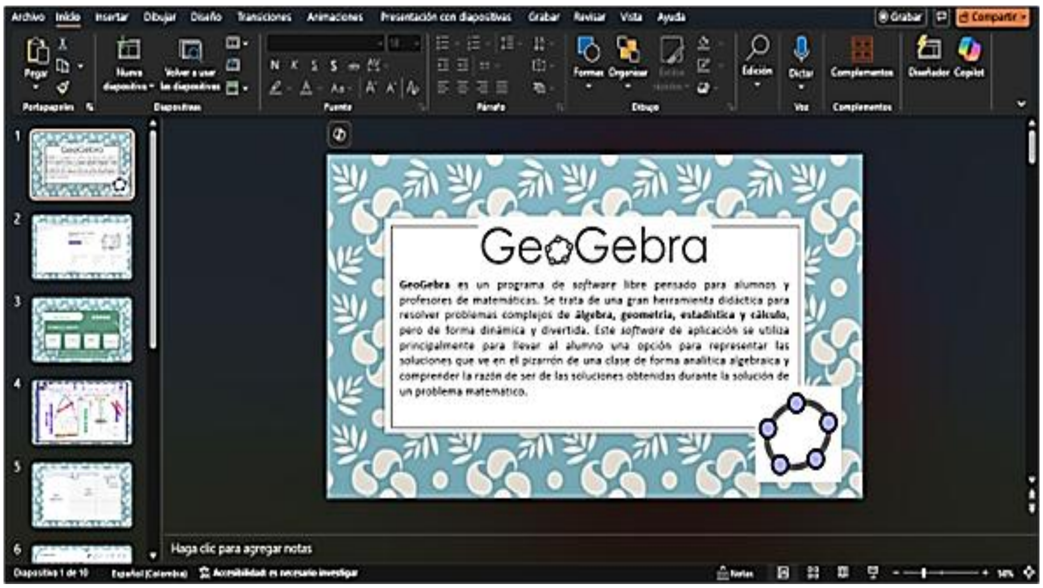
Nota. Fuente de elaboración propia en canva basado en Mesa y Villa (2008).

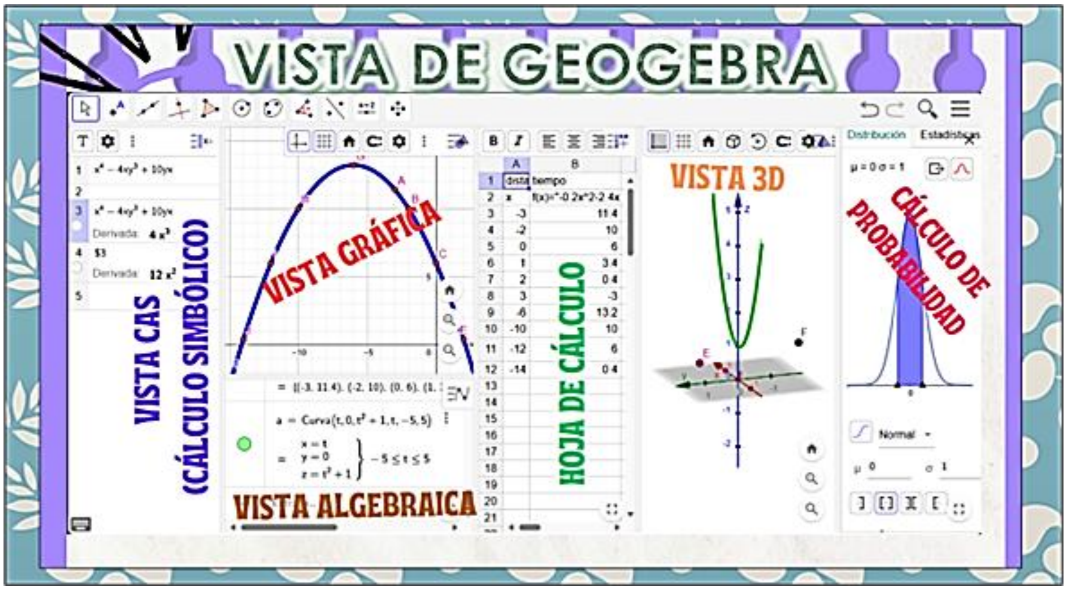
Anexo 2.

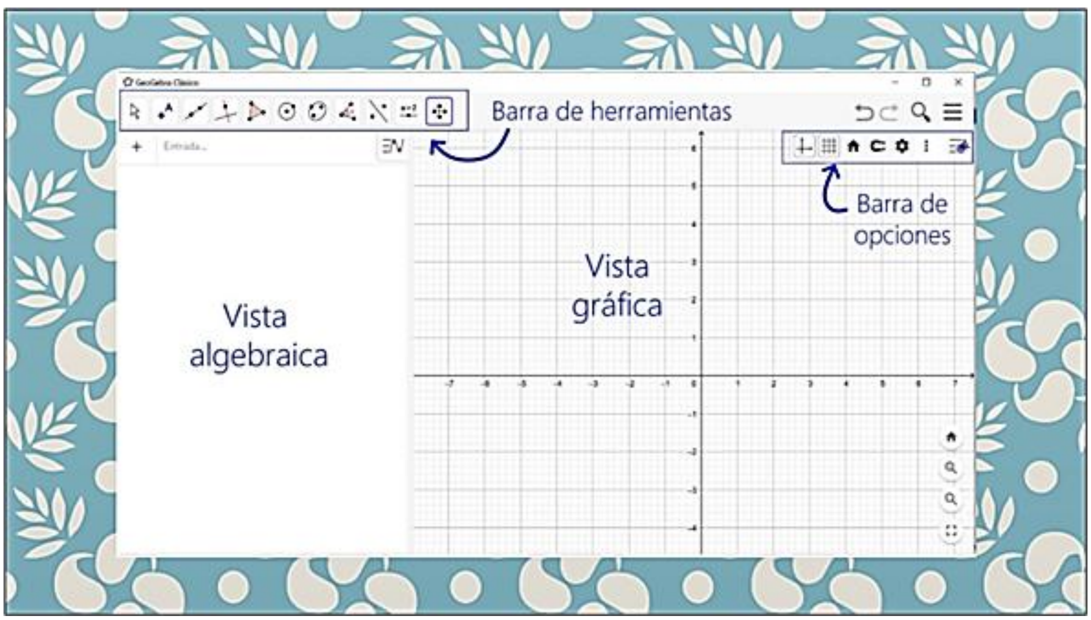
Presentación: Familiarización introducción al entorno GeoGebra.

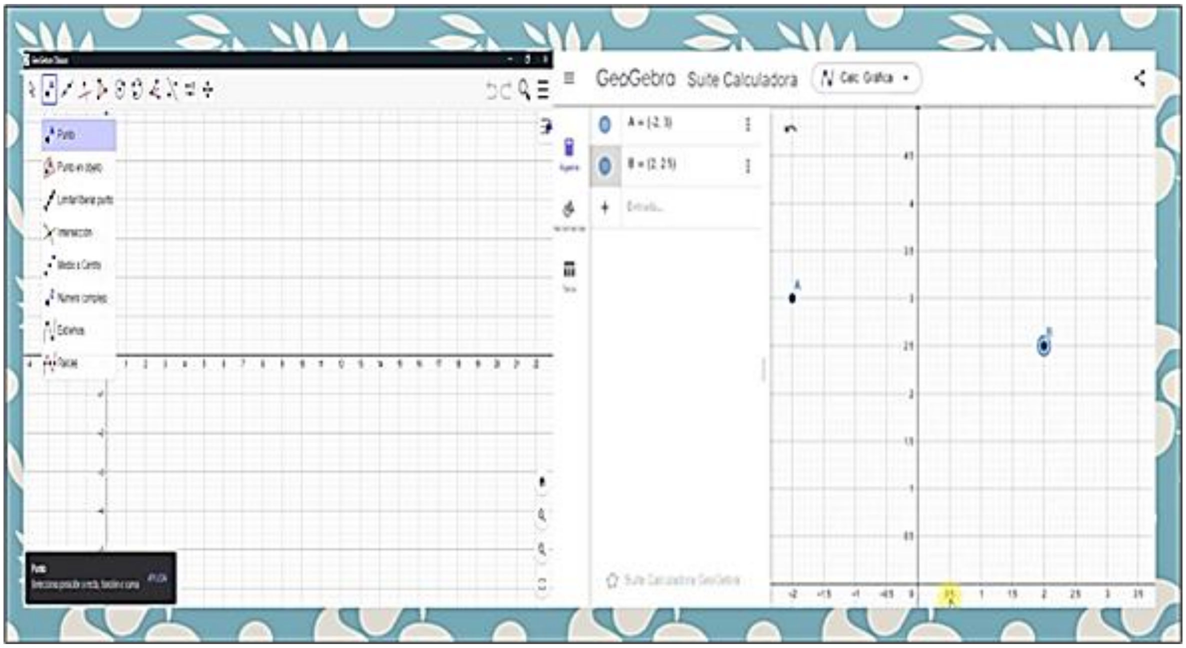
Esta presentación está diseñada para guiar a estudiantes en la navegación básica del programa GeoGebra. En ella se presenta la definición del programa, ventajas, partes de la ventana, se explican las funciones principales del entorno, se presentan las vistas de forma general y realizando una explicación más detallada de la vista algebraica, gráfica y barra de entrada, el uso de herramientas interactivas, y ejemplos sencillos

A continuación, se incluyen capturas de las diapositivas más relevantes.




VISTA DE GEOGEBRA
VISTA CAS (CÁLCULO SIMBÓLICO)
VISTA GRÁFICA
VISTA ALGEBRAICA
HOJA DE CÁLCULO
VISTA 3D
CÁLCULO DE PROBABILIDAD


Barra de herramientas
Barra de opciones
Vista gráfica
Vista algebraica



Nota: fuente de elaboración propia (con ayuda del manual de GeoGebra) como recurso de apoyo para la fase de implementación de las tareas.

Anexo 3

Tareas Propuestas

INSTITUCION EDUCATIVA LA ARMONIA

Resolución Número 473 del 04 de junio del 2015 - Código DANE IE LA ARMONIA 125473001028 – Código DANE Sede FRANCISCO DE PAULA SANTANDER 225473000069

E-mail: iearmoniamosquera@gmail.com - secrearmonia@gmail.com - pagaduriaielaarmonia@gmail.com

NIT 900.900.742-3

Matemáticas
Funciones cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 1: EJE DE SIMETRIA

Nombre:____________________ Fecha:______

OBJETIVO: *Determinar geométricamente el eje de simetría de la representación gráfica de una función cuadrática dada.*

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: **1.T-APPLET**. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: A continuación, se presenta la representación gráfica (Figura 1) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, que corresponde a una parábola. Dados los puntos A y B de la parábola que son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola que aún no conocemos, realice las siguientes actividades:

Figura 1. D*iagrama de la tarea 1*

Subtarea 1.1: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico al punto C con respecto al eje de simetría de los puntos A y B (es decir, de la parábola). Describa en este campo los pasos desarrollados para la construcción elaborada e indique qué comandos (nombre) utilizó en tal construcción.

Calle 23 # 20ª -93 Mosquera Vereda Siete Trojes / Mosquera Cundinamarca Celular: 350 - 4434983

E-mail: iearmoniamosquera@gmail.com - secrearmonia@gmail.com - pagaduriaielaarmonia@gmail.com
NIT 900.900.742-3

Subtarea 1.2: Teniendo en cuenta la subtarea anterior construya el eje de simetría de la parábola.

Describa el proceso desarrollado si hay más de una forma de construir el eje de simetría.

Subtarea 1.3: Cambie el valor de los coeficientes de la función cuadrática (moviendo los deslizadores) y determine si la construcción anterior sigue siendo válida. Luego de experimentar y charlar con su compañero de trabajo presenten un argumento que valide la construcción.

INSTITUCION EDUCATIVA LA ARMONIA
Resolución Número 473 del 04 de junio del 2015 - Código DANE IE LA ARMONIA 125473001028 –
Código DANE Sede FRANCISCO DE PAULA SANTANDER 225473000069
E-mail: iearmoniamosquera@gmail.com - secrearmonia@gmail.com - pagaduriaielaarmonia@gmail.com
NIT 900.900.742-3

Matemáticas
Funciones Cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 2. IDENTIFICAR EL LADO RECTO

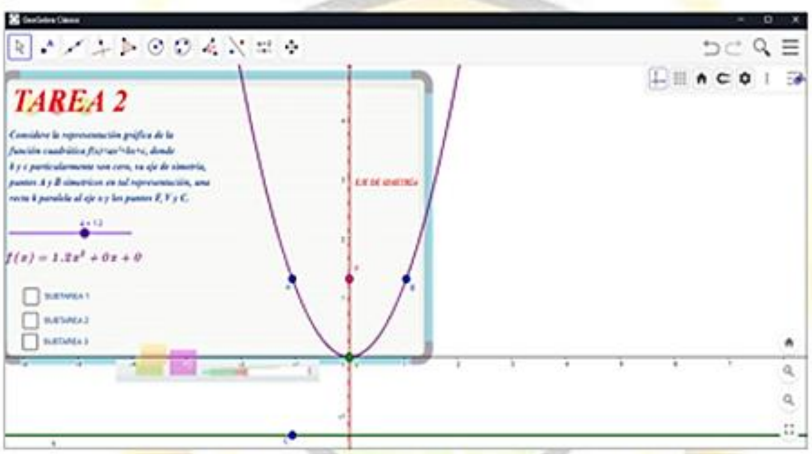
Nombre:______________________________ Fecha:__________

OBJETIVO: *identificar el lado recto como se ha definido geométricamente.*

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 2.T-APPLET. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: Considere la representación gráfica (como se muestra en la Figura 1) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde b y c particularmente son cero, su eje de simetría, puntos A y B simétricos en tal representación, una recta k paralela al eje x y los puntos F, V, y C, realice las siguientes actividades.

Figura 1. *Diagrama de la tarea 2*



Subtarea 2.1: Determine si la longitud de alguna cuerda AB es el doble de la longitud del segmento AC. Si existe tal cuerda ¿Quién es el punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetría? Escriba las conjeturas que tenga en relación con la respuesta a esta pregunta.

Calle 23 # 20ª -93 Mosquera Vereda Siete Trojes / Mosquera Cundinamarca Celular: 350 - 4434983

Subtarea 2.2: Tenga en cuenta la subtarea anterior. Fije el punto A (en el que la cuerda cumple la condición de la tarea anterior). Luego construya un punto S en la parábola. Determine: Cuál es la distancia del punto F (punto medio entre A y B) al punto S, Cuál es la distancia del punto S a la recta paralela al eje *x* nombrada *k* y Qué ocurre al mover el punto S. Para ayudar a responder tales preguntas, complete la siguiente tabla y proponga una conjetura del experimento.

Coordenadas del punto S	Medida de $\overline{FS}$	Distancia de S a la recta *k*
(0.59, 0.41)		
(-1,-1.2)		
(0,0)		
(2, 4.8)		

Subtarea 2.3: Si fija el punto S (se fija también la recta k) y mueve el punto A. ¿Qué hallazgos visualiza? Ahora si deja fijo el punto A como en subtarea 1 y cambia el coeficiente a de la expresión algebraica de la función cuadrática. ¿Qué ocurre? ¿Quién es la recta k fija en relación con la parábola? Indique que acciones realiza en el applet que comandos utiliza y proponga una conjetura del experimento.

Matemáticas
Funciones Cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 3: RELACIÓN DE LA LONGITUD DEL LADO RECTO DE LA PARÁBOLA CON LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

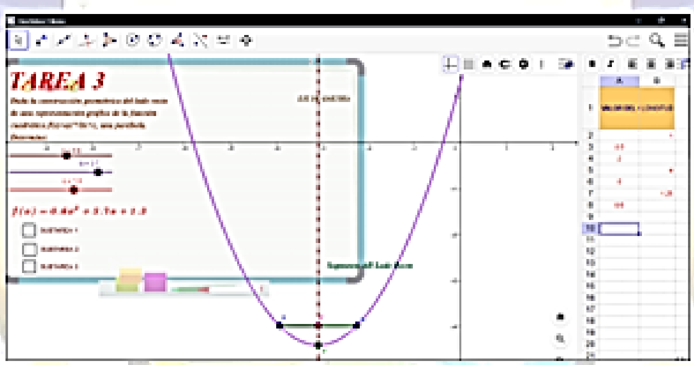
Nombre:______________________________ Fecha:________

OBJETIVO: *Relacionar la longitud del lado recto con uno de los coeficientes de la función cuadrática.*

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 3.T-APPLET. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: Dada la construcción geométrica ver Figura 1 del lado recto de una representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, una parábola, realice las siguientes tareas:

Figura 1. *Diagrama de la tarea 3*



Subtarea 3.1: Calcule la longitud del lado recto AB, luego observe la longitud y cambie cada uno de los valores de los coeficientes de la expresión algebraica de la función cuadrática *a*,*b*, y *c*. ¿De qué coeficientes depende la longitud del lado recto? Proponga una conjetura en relación con la dependencia de la longitud del lado recto y algún coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática. Complete las tablas y por parejas de estudiantes redacten por separado cómo varia la longitud del lado recto al modificar cada coeficiente. Además, tome algunas capturas de pantalla que evidencien los cambios en la longitud del lado recto al modificar los coeficientes.

a	*b*	Medida del lado recto
2	5	
2	-2	
2	1	
2	-3	

a	*c*	Medida del lado recto
-4	0	
-4	1.5	
-4	-2.5	
-4	4	

a	*b*	*c*	Medida del lado recto
2	5	-1	
-3	-1	-2	
4.5	3.5	-0.5	
5	-4	3	

Subtarea 3.2: Completando la tabla en la vista hoja de cálculo o la que aparece a continuación proponga una conjetura aritmética en relación con el valor del coeficiente de la expresión algebraica de la función cuadrática del que depende el lado recto y su longitud. Incluya tres números más en la tabla, redacte con su compañero una conclusión sobre qué coeficiente afecta la longitud del lado recto.

Valor del coeficiente del que depende	*Medida del lado recto*
	1
0.5	
	4
5	
	1.25
0.6	

Subtarea 3.3: Proponga una conjetura entre la relación de la longitud del lado recto del coeficiente a y la distancia del foco (F) al vértice (V) de la parábola. Compare con otra pareja la propuesta de su escrito, e indiquen si hay puntos de opinión en común y escríbalos aquí.

Matemáticas
Funciones Cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 4: APLICACIÓN DEL LADO RECTO CORRESPONDIENTE A UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA: JUEGO DE AVIONES DE PAPEL

Nombre:______________________________ Fecha:______

OBJETIVO: *Utilizar características de una función cuadrática para interpretar y resolver problemas aplicados, fortaleciendo la comprensión de la relación entre la representación gráfica y algebraica.*

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 4T-APPLET. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: : Lea la situación problema e interactúe con el simulador Juego de aviones de papel. Ver Figura 1.

En el colegio se realiza una competencia sobre el vuelo de aviones de papel diseñados por los estudiantes de undécimo. Por ejemplo, Abel lanza su avión desde un punto inicial y una altura considerable para su estatura y el recorrido que define el avión es un segmento (porción) de parábola, como lo muestra la simulación. Solucione las siguientes tareas:

Figura 1. *Diagrama de la tarea 4*

Subtarea 4.1: **Si la función que modela la recorrido del avión es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine el valor independiente cuando el avión de papel cae al suelo. ¿Cuál es el dominio de esta función cuadrática? Para ello:**

a. **Abra el archivo en GeoGebra Titulado como: 4.T-APPLET.**
b. **Ubique los controles de animación, luego de play, cuente hasta 7 en la mente y pause la simulación. Con el ratón del computador seleccione el borrador para borrar el rastro del punto, realiza la misma operación tres veces. Describa lo que se observa en la simulación.**
c. **Ubique los deslizadores en los siguientes valores: y0= 1.5; v0=7.8; α=72° y de play a la animación. ¿Qué representa cada deslizador?**

NOTA: Para responder las preguntas puede usar puntos sobre objeto, moverlo, ver sus coordenadas entre otras cosas. Además, las tareas que siguen se trabajaran con los valores de los deslizadores indicados anteriormente.

INSTITUCION EDUCATIVA LA ARMONIA

Resolución Número 473 del 04 de junio del 2015 - Código DANE IE LA ARMONIA 125473001028 – Código DANE Sede FRANCISCO DE PAULA SANTANDER 225473000069

E-mail: iearmoniamosquera@gmail.com - secrearmonia@gmail.com - pagaduriaielaarmonia@gmail.com

NIT 900.900.742-3

Subtarea 4.2: ¿Cómo puede determinar el valor del coeficiente cuadrático? Describa el proceso y argumente su respuesta. Puede activar las casillas de verificación y usar los objetos que aparecen.

Subtarea 4.3: Conociendo el valor de los coeficiente *a* y *c* dado por las subtareas anteriores, ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el recorrido del vuelo del avión de papel? Ayuda: puede usar otros puntos de la gráfica y la ecuación que ha generado. Describa los procesos que utilizo para determinar la expresión algebraica del lanzamiento del avión de papel.

Calle 23 # 20ª -93 Mosquera Vereda Siete Trojes / Mosquera Cundinamarca Celular: 350 - 4434983

Anexo 4

Versión final de las Tareas

INSTITUCION EDUCATIVA LA ARMONIA

Resolución Número 473 del 04 de junio del 2015 - Código DANE IE LA ARMONIA 125473001028 -
Código DANE Sede FRANCISCO DE PAULA SANTANDER 225473000069
E-mail: iearmoniamosquera@gmail.com - secrearmonia@gmail.com - pagaduriaielaarmonia@gmail.com
NIT 900.900.742-3

Matemáticas
Funciones cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 1: EJE DE SIMETRIA

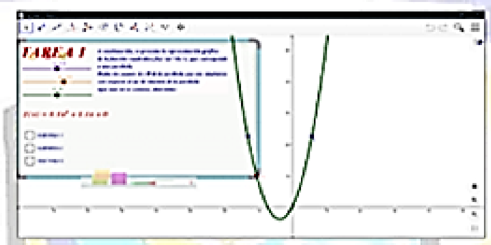
Nombre:____ **Fecha:**_______

OBJETIVO: ***Determinar geométricamente el eje de simetría de la representación gráfica de una función cuadrática dada.***

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: **1.T-APPLET**. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: A continuación, se presenta la representación gráfica (Figura 1) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, que corresponde a una parábola. Dados los puntos A y B de la parábola que son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola que aún no conocemos, realice las siguientes actividades:

Figura 1. *Diagrama de la tarea 1*



Subtarea 1.1: Considere el punto C de la parábola y construya el punto D en la parábola que sea simétrico a C con respecto al eje de simetría de la parábola. Para ello, mueva el punto A, identifique cómo cambia B, y con base en sus observaciones describa el proceso de construcción del punto D. Escriba los pasos de su construcción y los comandos que utilizó en cada paso.

Responda las preguntas:

1. ¿Qué significa que el punto D sea simétrico al punto C?
2. ¿Cómo sabe que el punto D construido por usted es un punto de la parábola simétrico a C?, escriba su argumento.

Calle 23 # 20ª -93 Mosquera Vereda Siete Trojes / Mosquera Cundinamarca Celular: 350 - 4434983

***Subtarea* 1.2:** Teniendo en cuenta la subtarea anterior, responda las siguientes preguntas y con base en ellas construya el eje de simetría de la parábola dada describiendo los pasos realizados:

1. ¿Qué sucede con el punto D cuando se mueve el punto C?
2. Moviendo el punto C complete la Tabla, indicando las coordenadas para por lo menos cuatro puntos.

Punto C		Punto D		Punto medio	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*

Con base en tabla anterior observe en cada fila el punto C, D y el punto medio. Responda:

3.¿existe alguna coordenada en común?.

4. Puede encontrar alguna relación entre las coordenadas en *x* del punto medio y las coordenadas *x* de los puntos C y D.

Después de observar las diferentes posiciones del punto C, observe la columna titulada Punto Medio

5. ¿hay algo en común en esta columna?

Con base en lo observado en los ítems anteriores,

6 ¿de qué otra forma podría caracterizarse (definirse) el eje de simetría para una parábola?

Describa el proceso desarrollado por usted para construir el eje de simetría. Si hay más de una forma de construir el eje de simetría, descríbalo.

Subtarea 1.3: Partiendo de la construcción lograda en la subtarea anterior, si se modifica el valor de los coeficientes de la función cuadrática ¿se sigue obteniendo el eje de simetría de la nueva parábola?

Para responder mueva los deslizadores y complete la siguiente tabla incluyendo por lo menos cuatro casos:

Coeficientes			Preguntas	
a	b	c	¿la recta construida en la tarea anterior es eje de simetría de esta nueva parábola?	¿C y D continúan siendo puntos simétricos de la parábola?

A partir de las respuestas dadas en tabla, considera que **el proceso de construcción** del eje de simetría de una parábola cambia si se modifican los coeficientes de la función. ¿Cómo definimos el eje de simetría de una parábola?

Matemáticas
Funciones Cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 2. IDENTIFICAR EL LADO RECTO

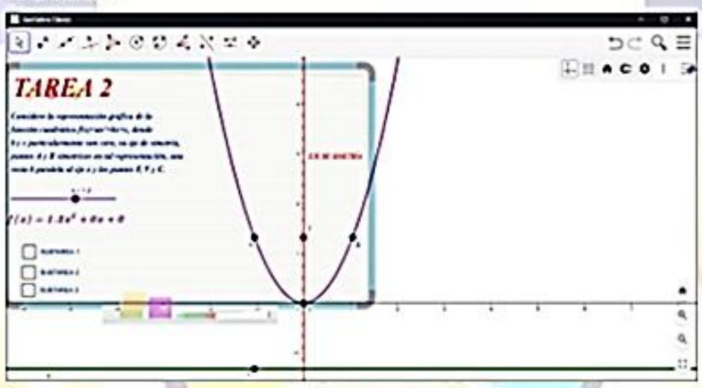
Nombre:_________________________________ Fecha:__________

OBJETIVO: *identificar el lado recto como se ha definido geométricamente.*

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 2.T-APPLET. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: Considere la representación gráfica (como se muestra en la Figura 1) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde b y c particularmente son cero, su eje de simetría, puntos A y B simétricos en tal representación, una recta k paralela al eje x y los puntos F, V, y C, realice las siguientes actividades.

Figura 1. *Diagrama de la tarea 2*



Subtarea 2.1: Con la representación gráfica de la función cuadrática dada, construya un segmento con extremos A y B en la parábola tal que su medida sea el doble del segmento AC. ¿cuáles son las medidas del segmento AB? y Luego, haga nuevamente esta construcción cambiando el coeficiente a, por lo menos cuatro veces y registre en la Tabla 1 las medidas que tienen los segmentos AB y AC ¿Quién es el punto de intersección de la cuerda AB con el eje de simetria?

Coeficiente a	Medida de AB	Medida AC

Subtarea 2.2: Partiendo del applet de la Tarea 2 en su estado original, construya un punto S en la parábola, muévalo a lugares diferentes y complete la Tabla.

Coordenadas del punto *S*		Medida de *FS*	Medida de *S* a la recta *k*
X	*Y*		

Con la información de la tabla, responda:

a. ¿Qué ocurre al mover el punto S?
b. ¿Qué relación hay entre FS y *Sk*?.
c. ¿Qué cambia y qué permanece igual?
d. ¿Qué elemento de la parábola parece conservarse cuando mueve el punto S?
e. ¿Qué importancia tiene el punto F en la parábola?
f. Proponga una conjetura del experimento.

Subtarea 2.3: Si fija el punto S y mueve el punto A. ¿Qué hallazgos visualiza? Ahora si fija el punto A como en subtarea 2.1 y cambia el coeficiente *a* de la expresión algebraica de la función cuadrática. Al menos 4 veces ¿Qué ocurre? Complete la Tabla. ¿Quién es la recta k fija en relación con la parábola? Indique que acciones realiza en el applet que comandos utiliza y proponga una conjetura del experimento.

Coeficiente *a*	Medida de *AB*	Medida *AC*	Medida de *FS*	Medida de S a la recta *k*

Indique que acciones realiza en el applet que comandos utiliza.
proponga una conjetura del experimento.

Matemáticas
Funciones Cuadráticas
Andrea Naranjo

TAREA 4: APLICACIÓN DEL LADO RECTO CORRESPONDIENTE A UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA: JUEGO DE AVIONES DE PAPEL

Nombre:______________________________ Fecha:_______

OBJETIVO: *Utilizar características de una función cuadrática para interpretar y resolver problemas aplicados, fortaleciendo la comprensión de la relación entre la representación gráfica y algebraica.*

Abra la carpeta de nombre Tareas y de clic en el archivo de formato GeoGebra file (.ggb) Titulado como: 4T-APPLET. Seguido lea y solucione.

FORMULACION DE LA TAREA: : Lea la situación problema e interactúe con el simulador Juego de aviones de papel. Ver Figura 1.

En el colegio se realiza una competencia sobre el vuelo de aviones de papel diseñados por los estudiantes de undécimo. Por ejemplo, Abel lanza su avión desde un punto inicial y una altura considerable para su estatura y el recorrido que define el avión es un segmento (porción) de parábola, como lo muestra la simulación. Solucione las siguientes tareas:

Figura 1. *Diagrama de la tarea 4*

Subtarea 4.1: Si la función que modela la recorrido del avión es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine el valor independiente cuando el avión de papel cae al suelo. ¿Cuál es el dominio de esta función cuadrática? Para ello:

a. Abra el archivo en GeoGebra Titulado como: 4.T-APPLET.
b. Ubique los controles de animación, luego de play, cuente hasta 7 en la mente y pause la simulación. Con el ratón del computador seleccione el borrador para borrar el rastro del punto, realiza la misma operación tres veces. Describa lo que se observa en la simulación.
c. Ubique los deslizadores en los siguientes valores: y0= 1.5; v0=7.8; α=72° y de play a la animación. ¿Qué representa cada deslizador?

NOTA: Para responder las preguntas puede usar puntos sobre objeto, moverlo, ver sus coordenadas entre otras cosas. Además, las tareas que siguen se trabajaran con los valores de los deslizadores indicados anteriormente.

Subtarea 4.2: ¿Cómo puede determinar el valor del coeficiente del término cuadrático? Describa el proceso y argumente su respuesta. Puede activar las casillas de verificación y usar los objetos que aparecen.

Subtarea 4.3: Conociendo el valor de los coeficiente *a* y *c* dado por las subtareas anteriores, ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el recorrido del vuelo del avión de papel? Ayuda: puede usar otros puntos de la gráfica y la ecuación que ha generado. Describa los procesos que utilizo para determinar la expresión algebraica del lanzamiento del avión de papel.