

TIPOS DE ARGUMENTOS QUE SE PROMUEVEN SEGÚN LA ESTRUCTURA DEL  
ENUNCIADO: COMICS ANIMADOS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Miguel Escamilla Herrera

Jennifer Peña Molina

Tesis de grado presentada como  
requisito parcial para optar por el título de  
Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Dr. Oscar Javier Molina Jaime

Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.

2024

## **DEDICATORIA**

Dedicado especialmente a mi mamá, Gloria, quien me ha apoyado y acompañado en todo el proceso para superar cada dificultad, siempre brindándome su amor y fortaleza. A mi papá, Laureano, quien me apoyó desde el primer momento que comencé a recorrer este camino hasta su último día de vida. Su ejemplo de esfuerzo y dedicación sigue guiando cada uno de mis pasos.

A mis hermanos, Lizeth y Felipe, quienes me han brindado apoyo, compañía y consejos valiosos, dándome la fuerza necesaria para seguir adelante y culminar esta etapa de mi vida. Su amor y confianza en mí han sido fundamentales para llegar hasta aquí.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mi mamá y hermanos, quienes me han apoyado, guiado y aconsejado para poder culminar este trabajo y empezar otra etapa de mi vida. Su amor y comprensión han sido fundamentales para seguir adelante

Al profesor Óscar Molina, por el apoyo incondicional para el desarrollo del trabajo desde un primer momento; por la paciencia que nos tuvo y por todas las enseñanzas que nos brindó a lo largo de este proceso, las cuales no solo contribuyeron a este proyecto, sino a nuestra formación personal y académica.

A mi Compañero y amigo Miguel Escamilla por su compromiso; desde el momento que decidimos empezar este proyecto hasta su culminación. Por cada palabra de aliento y así superar las dificultades que ocurrieron en este camino.

A mis amigos que nos ayudaron para el desarrollo de este proyecto, la compañía y el apoyo incondicional durante esta etapa. Cada uno ha aportado algo valioso durante esta experiencia.

*Jennifer Peña Molina*

## **DEDICATORIA**

A mi madre, Nubiola Herrera, quien siempre estuvo presente y me ha permitido estar donde me encuentro hoy mismo. Siempre ha tenido un amor y apoyo incondicional bajo toda circunstancia, brindándome aliento y ayuda aun en los momentos más difíciles.

A mi sobrina, Danna Ortiz, quien siempre ha sido una gran amiga; su ayuda y apoyo es incondicional, escuchando mis historias y siguiéndome el hilo en cada pequeña aventura.

A mi pareja, Alejandra Tirado, quien siempre estuvo allí para apoyarme y brindarme la mano en todo; ella nunca me permitió caer y siempre representó aquella luz que guiaba el camino.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios, por permitirme culminar mi carrera, brindarme salud y poner en mi camino a las personas que son mi vida.

A mi madre, por siempre estar para mí y brindarme ese apoyo y amor tan infinito que solo una madre podría dar; ella se convirtió en un motor que me permite estar en el lugar que me encuentro ahora mismo.

A mi profesor, Óscar Molina, por su gran apoyo, y su gran paciencia en todo momento, pues sin él, este trabajo no hubiese sido posible. También le agradezco por todas las enseñanzas que me brindó a lo largo de toda la carrera, permitiéndome mejorar personal y profesionalmente, convirtiéndose en un ejemplo a seguir como educador.

A mi pareja, por siempre estar presente en todo momento. Espero tu vida este llena de éxitos, logrando cumplir cada meta que te propongas.

A mi compañera y amiga, Jennifer Peña, por su gran amistad, ayuda y compromiso en todo momento, dándome ese aliento a seguir en cada momento de dificultad, gracias.

A mis amigos, pues fueron los encargados de convertir la Universidad en el sitio que amo y desearía estar siempre. Me brindaron una gran amistad y experiencias que jamás olvidaré, gracias.

*Miguel Escamilla Herrera*

## RESUMEN

Debido a la carencia de situaciones que fomentan la argumentación en la escuela se diseñó un recurso educativo compuesto por *comics animados* orientados a la formación de profesores de matemáticas. Con *comics animados* se recrearon situaciones de aula, ilustrando cómo diferentes tipos de enunciados de tareas y la gestión del profesor pueden influir en la producción de argumentos por parte de los estudiantes.

El recurso está compuesto por tres *comics animados*, cada uno enfocado en un tipo de argumentación: deductiva, inductiva y abductiva. En cada uno de los *comics* se presenta el trabajo de un grupo de estudiantes que, mediante una tarea propuesta por el profesor, aborda situaciones geométricas relacionadas con las mediatrices de un triángulo, explorando propiedades de equidistancia y los puntos de intersección de estas mediatrices.

En el primer *comic*, se presenta una tarea que requiere del uso de definiciones y propiedades geométricas vistas previamente en clase, suscitando la producción de argumentos deductivos a partir de conocimientos teóricos; en el segundo *comic*, los estudiantes realizan exploraciones empíricas utilizando el *software* GeoGebra, induciendo patrones generales a partir de observaciones particulares, evidenciando allí la producción de argumentos inductivos; en el tercer *comic*, se aborda una tarea en la que, dada una situación deben hacer inferencias sobre un hecho, dando lugar a la producción de argumentos abductivos a partir de estas inferencias.

Para cada uno de los *comics* de este recurso, se realiza una descripción teniendo en cuenta aspectos como los tipos de enunciados, las acciones de los estudiantes y del profesor; destacando elementos que promueven la argumentación. Además, se formulan tareas de formación profesional diseñadas para educadores de profesores, destacando el uso de los *comics* como una herramienta didáctica para hacer una debida reflexión, con el fin de implementar el proceso de argumentación en el aula.

## ABSTRACT

The lack of opportunities for fostering argumentation in mathematics classrooms has led to the development of an educational resource designed to train mathematics teachers. This resource consists of animated comics that depict classroom scenarios, illustrating how different task formulations and teacher interventions can influence students' ability to construct mathematical arguments.

The resource includes three animated comics, each centered on a distinct type of argumentation: deductive, inductive, and abductive. Each comic follows a group of students as they engage with geometric problems involving the perpendicular bisectors of a triangle. Through teacher-assigned tasks, they explore equidistance properties and the intersection points of these bisectors.

In the first comic, students are presented with a task requiring the application of previously learned geometric definitions and theorems. This setting encourages the development of deductive arguments based on theoretical knowledge. The second comic portrays students engaging in empirical explorations using GeoGebra software, identifying general patterns from specific observations, thereby fostering inductive reasoning. The third comic introduces a scenario in which students must infer conclusions from given data, promoting the formation of abductive arguments.

Each animated comic is accompanied by a detailed analysis that examines task formulation, student actions, and teacher strategies, highlighting key elements that support mathematical argumentation. Additionally, professional development activities are provided for teacher educators, emphasizing the use of these comics as instructional tools to encourage reflection and effectively integrate argumentation into classroom practice.

## Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN.....	10
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	12
1.1 Justificación.....	12
1.2 Objetivos.....	13
1.2.1 Objetivo General.....	14
1.2.2 Objetivos específicos.....	14
CAPÍTULO II. MARCO CONCEPTUAL.....	15
2.1 Sobre argumento y argumentación.....	15
2.2 Tipos de argumentación y de argumento.....	16
2.3 Gestión del profesor para promover la producción de argumentos.....	19
2.4 Tareas de Aprendizaje y de Argumentación.....	21
2.5 Enunciados de tareas que promueven cada tipo de argumentación.....	22
2.6 Acciones de los estudiantes.....	26
2.7 Los comics animados como herramienta en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.....	28
2.8 Tareas de formación profesional.....	30
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA.....	32
3.1 Fases I y II:Revisión bibliográfica y construcción del marco conceptual.....	32
3.2 Fase III: Diseño de Comics.....	33
3.3 Fase IV: Descripción de los videos.....	39
3.4 Fase V: Elaboración del escrito final.....	40
CAPÍTULO IV. DESCRIPCIÓN DE LOS COMICS.....	42

4.1	Caracterización genérica de los <i>comics</i> .....	42
4.2	Descripción <i>comic</i> Argumento deductivo .....	44
4.3	Descripción <i>comic</i> Argumento inductivo .....	52
4.4	Descripción <i>comic</i> Argumento abductivo .....	59
4.5	Tareas de formación profesional .....	67
CAPÍTULO V. CONCLUSIONES .....		74
5.1	Cumplimiento de los objetivos .....	74
5.2	Aportes y aprendizajes como futuros profesores de matemáticas .....	76
5.3	Dificultades en la elaboración y proyecciones .....	77
BIBLIOGRAFÍA .....		79
ANEXO.. .....		82

## Índice de tablas

<b>Tabla 1</b> Personaje de los comics.....	38
<b>Tabla 2</b> Indicadores acciones del profesor .....	39
<b>Tabla 3</b> Indicadores acciones los estudiantes .....	40
<b>Tabla 4</b> Acción de estudiantes cómic argumentación deductivo.....	44
<b>Tabla 5</b> Acción del profesor cómic argumentación inductivo.....	47
<b>Tabla 6</b> Acciones de estudiantes cómic argumentación inductivo .....	52
<b>Tabla 7</b> Acciones del profesor cómic argumentación inductivo .....	56
<b>Tabla 8</b> Acciones de estudiantes cómic argumentación abductivo .....	59
<b>Tabla 9</b> Acciones del profesor cómic argumentación abductivo.....	64
<b>Tabla 10</b> Tareas que suscitan la producción de argumentos. ....	69
<b>Tabla 11</b> Cumplimiento de los objetivos .....	74

## Índice de figuras

<b>Figura 1</b> Esquema básico de argumento.....	16
<b>Figura 2</b> Esquema de argumento inductivo.....	17
<b>Figura 3</b> Esquema argumento deductivo.....	18
<b>Figura 4</b> Esquema de argumentación abductiva teórica.....	18
<b>Figura 5</b> Esquema de argumentación abductiva creativa.....	19
<b>Figura 6</b> Esquema de enunciado que promueve un argumento inductivo.....	23
<b>Figura 7</b> Esquema de enunciado que promueve un argumento deductivo.....	24
<b>Figura 8</b> Esquema de enunciado que promueve un argumento abductivo.....	25
<b>Figura 9</b> Adobe illustrator.....	35
<b>Figura 10</b> Adobe after effects.....	35
<b>Figura 11</b> Adobe photoshop.....	36
<b>Figura 12</b> Adobe premiere.....	36
<b>Figura 13</b> GeoGebra.....	37
<b>Figura 14</b> Escenario de clase.....	39
<b>Figura 15</b> Escenario de clase.....	42
<b>Figura 16</b> Representación gráfica por parte del profesor.....	43

# INTRODUCCIÓN

La implementación de tareas que promuevan la argumentación matemática en la escuela favorece el aprendizaje, la comunicación de ideas, la construcción de conocimiento, el desarrollo de autonomía y pensamiento crítico (Yackel y Cobb, 2006; Reuter, 2023; Mariotti, 2006). A pesar de su importancia, existe una notable falta de estrategias en la formación de profesores para diseñar tareas que promuevan la argumentación y, por ende, una necesidad por formar a los profesores en diversos aspectos sobre este tema (Alfaro et al.; 2020, Ayalon, 2019; Boero et al., 2018; De Sa Ibraim y Justi, 2016 y Zohar, 2007). Entre otras cosas, aspectos que se podría considerar en esos procesos de formación podrían ser los siguientes: diferenciar la argumentación de otros tipos de razonamiento valiéndose, por ejemplo, de la estructura funcional de un argumento (Ayalon y Nama, 2023; McNeill y Knight, 2013) lo que permite diseñar, proponer, gestionar y evaluar, de manera informada, tareas matemáticas que promuevan la argumentación y la explicitación de argumentos por parte de los estudiantes (Ayalon y Nama, 2023; Baker, 2009).

Para contribuir a solventar esa falencia, se diseñaron tres *comics animados*, dirigidos especialmente para la formación de profesores de matemáticas, que simulan un ambiente de aula en el que el profesor propone tareas de geometría que promueven argumentación y los grupos de estudiantes despliegan la producción de argumentos (de diferente tipo –inductivo, abductivo y deductivo–) a propósito de esas tareas. Así podríamos ofrecer a los formadores de profesores una herramienta que pueda ser medio para ilustrar cómo diferentes tipos de enunciados y algunos aspectos de la gestión del profesor pueden potenciar la actividad argumentativa en el aula. Los videos, además de ilustrar asuntos como los citados, muestran ejemplos de esa actividad de los estudiantes.

Los enlaces a estos *comics* animados son los siguientes:

- Argumentación deductiva: <https://youtu.be/H1MLaBX3Vwc>
- Argumentación inductiva: <https://youtu.be/WGjF-aYyrRE>
- Argumentación abductiva: <https://youtu.be/vdvrUWNX1fU>

Para el desarrollo del documento se plantearon cinco capítulos: en el primero, se presenta el planteamiento del problema, teniendo en cuenta antecedentes teóricos que justifican la necesidad del recurso propuesto y se establecen los objetivos del estudio orientados hacia la creación y propósito del recurso didáctico. En el segundo, se presentan los referentes conceptuales que fundamentaron el diseño de los *comics*; en ese sentido, se expone una postura sobre argumentación matemática y los tipos de argumentos, así como la estructura del diseño de tareas de aprendizaje que fomenten la argumentación en el aula. Además, presentamos ideas que fundamentan el uso de los *comics animados* como herramienta en la

formación de profesores. En el tercer capítulo se exponen las cinco fases que se tuvieron en cuenta para la ejecución del proyecto, cada una con su descripción. Posteriormente, en el cuarto capítulo se presenta la descripción de cada uno de los *comics animados*; en ella, presentamos el propósito de cada uno, teniendo en cuenta los conceptos fundamentales descritos en el segundo capítulo, y sugerencias de tareas de formación profesional que hagan uso de los videos (acompañadas de sus propósitos y posibles sugerencias de gestión). Por último, en el quinto capítulo, se exponen las conclusiones del proyecto realizado, orientadas por tres aspectos: cumplimiento de objetivos, dificultades y horizonte del desarrollo del trabajo, y aprendizajes de diferente índole, que este nos dejó.

Un detalle importante por destacar es frente a las respuestas dadas por los estudiantes, pues estas se toman de situaciones reales. Gracias a la experticia del profesor Óscar Molina en la enseñanza de la geometría, las respuestas obtenidas en sus cursos, al momento de plantear problemas similares funcionaron como una base para los videos. Aun así, siguiendo lo planteado por Herbst (2011), estas respuestas se adaptan con el propósito de depurar la actividad matemática en cuestión. Para ello, se omiten partes del proceso y se enfatizan los elementos esenciales que buscamos resaltar en los videos, en este caso, los distintos tipos de argumentación que emergen al plantear el problema.

# CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se describe el problema central que dio origen a este trabajo junto con los objetivos que guiaron su desarrollo. A lo largo del capítulo, se exploran las necesidades y desafíos relacionados con la enseñanza de la argumentación matemática en la escuela, particularmente en lo que respecta a la formación docente. Se presenta una justificación detallada del proyecto, así como los objetivos específicos y generales que orientaron el diseño de los cómics animados, concebidos como una herramienta pedagógica para apoyar a los profesores en la promoción de la argumentación entre sus estudiantes. Además, se detallan las bases teóricas que sustentan esta propuesta, destacando los antecedentes en la literatura sobre el diseño de tareas que favorecen la argumentación y la gestión del profesor de dichas tareas.

## 1.1 Justificación

Enfrentar como profesional de la educación en matemáticas el reto de desarrollar la capacidad argumentativa en los estudiantes le exige al profesor un conocimiento que le permita, por ejemplo, caracterizar la argumentación con base en de la estructura funcional de un argumento, reconocer los rasgos de un discurso basado en el lenguaje matemático, y diseñar y gestionar tareas matemáticas que promuevan la argumentación y la explicitación de argumentos por parte de los estudiantes mediante la identificación de los atributos que estas tareas deberían tener (Ayalon y Nama, 2023; McNeill y Knight, 2013; Ayalon y Nama, 2023; Baker, 2009, Stylianides y Ball, 2008).

Dado que estas habilidades son fundamentales en la enseñanza de las matemáticas, resulta clave que los programas de formación docente proporcionen espacios para la reflexión sobre las exigencias que enfrentan los profesores en este ámbito (MEN, 2020, p. 45). Así, este trabajo tiene la pretensión de generar un recurso que pueda ser usado en programas de formación de profesores que apoyen la selección de tareas que promuevan la argumentación. Antes de indicar en qué consiste nuestra propuesta, vale la pena reconocer antecedentes que versan sobre el papel de las tareas en la promoción de la argumentación en clase de matemáticas.

En la literatura especializada en Educación Matemática existen referentes relativos al diseño de tareas matemáticas. Algunos son generales, pues brindan fundamentos para construir conocimiento especializado sobre tarea de aprendizaje y no se concentran en un proceso o un contenido matemático específico. Otros, se centran en tareas para el desarrollo de procesos matemáticos como la argumentación, la demostración y la conjeturación, los cuales brindan bases para dos asuntos: (i) la caracterización de una tarea de argumentación y (ii) la configuración de ese tipo de tareas.

En cuanto a la caracterización de una tarea de argumentación, Stylianides et al. (2016) comenta que algunos autores consideran que este tipo de tarea debe tener el potencial para generar situaciones de conflicto o de incertidumbre y debe favorecer la actividad demostrativa ligada a un proceso de conjeturación y justificación de esta. Este autor expone algunas características de una tarea de argumentación: (i) que el propósito sea justificar o refutar una afirmación y (ii) que el grado de ambigüedad de las condiciones expuestas en el enunciado de la tarea lleve a diferentes suposiciones legítimas.

Respecto a la configuración de una tarea, Lin et al. (2012) proponen principios para que una tarea propicie la conjeturación y la demostración. Estos describen acciones que deben incluirse en la solicitud de las tareas (e. g., observar, construir, reflexionar, clasificar enunciados matemáticos, crear y compartir argumentos). Kieran et al. (2015) presentan una propuesta para la configuración de tareas que propician la argumentación matemática, que incluye los siguientes principios: promover la producción de múltiples soluciones; crear situaciones colaborativas; lograr el compromiso con conflictos sociocognitivos; proveer herramientas para comprobar hipótesis; invitar a los estudiantes a reflexionar sobre las soluciones. Molina, et al. (2024) exponen una clasificación de los enunciados de tareas según el tipo de argumento que surge durante el proceso de resolución de la tarea.

Con este trabajo seguimos la invitación Stylianides et al. (2016) en relación con proveer maneras para que los profesores puedan promover argumentación en sus aulas de matemáticas. Específicamente, proponemos diseñar una serie de comics animados, susceptibles de usarse en procesos de formación de profesores, que presente enunciados de tareas que promueven la argumentación, maneras sobre cómo el profesor los podría gestionar y posibles acciones argumentativas (y argumentos correspondientes) que podrían realizar los estudiantes a partir de esos enunciados. Esto con el fin de proveer información a los estudiantes para profesor o profesores en ejercicio sobre cómo, dependiendo del enunciado que se proponga y de la gestión del profesor, se potencia una cierta actividad argumentativa.

Contar con una herramienta como esta permite referentes para analizar procesos de enseñanza y de aprendizaje e identificar tareas que son pertinentes en relación con la expectativa de aprendizaje que el profesor tenga en mente; así mismo, determinar qué tan probable es que el profesor lleve a cabo una acción ilustrada en los *comics animados* dependiendo de su afinidad o no afinidad con ella (Herbst, et al., 2011).

## **1.2 Objetivos**

Tomando en cuenta las inquietudes y antecedentes citados en la sección previa, exponemos los objetivos de nuestro trabajo de grado.

### 1.2.1 *Objetivo General*

Diseñar un recurso conformado por un conjunto de *comics animados* que presenten enunciados de tareas de geometría que promueven la argumentación y los posibles tipos de argumentos que los estudiantes elaborarían cuando los aborden, y que pueda ser usado en procesos de formación de profesores para cualificar su conocimiento sobre argumentación.

### 1.2.2 *Objetivos específicos*

- Caracterizar diferentes tipos de enunciados de tareas de argumentación en geometría y los tipos de argumentos que estos puede suscitar cuando son solucionadas.
- Escoger tareas de argumentación en geometría que concrete la tipología de enunciados precisados en el primer objetivo específico.
- Para cada enunciado de tarea, precisar la actividad argumentativa que posiblemente puede llevar a cabo un estudiante cuando la aborda.
- Diseñar los *comics animados* tomando como referencia los resultados establecidos en los objetivos específicos previos.
- Describir cada *comic animado* diseñado que sirva como orientación para el formador de profesores que quiera utilizar el recurso diseñado.

## CAPÍTULO II. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se presenta los referentes conceptuales que fundamentan el trabajo de grado. Estos contemplan los siguientes aspectos: *proceso de argumentación*, junto a la tipificación de algunos tipos; *tareas de aprendizaje*, enfatizando en los enunciados que fomenten ciertos tipos de argumentación; *comics animados*, principalmente como herramienta útil en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

### 2.1 Sobre argumento y argumentación

El grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría [AEG] conceptualiza los términos argumento y argumentación basándose en las ideas de Toulmin (2003), Pedemonte (2007) y Kipping y Reid (2019). Exponemos las definiciones enseguida:

*Argumento* “es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La *aserción* se presenta de una de tres maneras: como una proposición (esto es, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; como una oración en la que se plantea una postura; o como una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las *razones* se pueden presentar como oraciones (sean o no proposiciones) o como acciones. El conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de una aserción conforman la *justificación* de la aserción”. (Molina et al, 2023, p. 7).

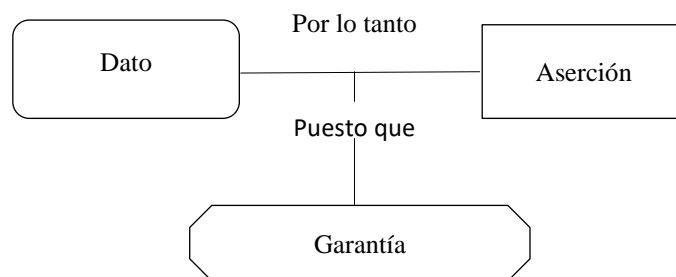
*Argumentación* “es un proceso discursivo y sociocultural destinado a aumentar (o disminuir) la aceptabilidad de un punto de vista o a determinar la veracidad de una idea mediante la presentación de un conjunto de proposiciones o acciones destinadas a justificar (o refutar) el punto de vista.” (Molina et al, 2023, p. 8).

El grupo se basa en Toulmin (2003) para indicar que un argumento simple se compone por tres elementos: dato, aserción y garantía; su estructura funcional alude a las interacciones entre estos elementos, de acuerdo con el rol que desempeña cada uno. El dato contiene información la cual es evidencia que respalda a la aserción. La garantía establece una conexión entre el dato y la aserción y, mediante una regla general, indica por qué sustenta la aserción. Tanto el dato como la garantía son razones que justifican la aserción propuesta. A su vez, se basa en Knipping y Reid (2019) para indicar que un argumento global es una conjunción de argumentos simples que fundamentan la aserción principal. En el contexto matemático, un argumento surge en el transcurso de actividades dentro de la práctica matemática como generalizar, visualizar, explorar, conjeturar, representar, clasificar, demostrar, etc. En este tipo de argumentos la afirmación se centra en un objeto matemático,

como propiedades o relaciones entre ellas y las razones no necesariamente deben estar relacionadas con aspectos de índole matemática.

De acuerdo con los elementos propuestos, Toulmin propone un esquema para representar un argumento simple que permite ilustrar la relación entre los tres elementos básicos descritos previamente. (Figura 1).

**Figura 1** Esquema básico de argumento



*Nota.* Adaptado de Molina, et. al. (2023)

## 2.2 Tipos de argumentación y de argumento

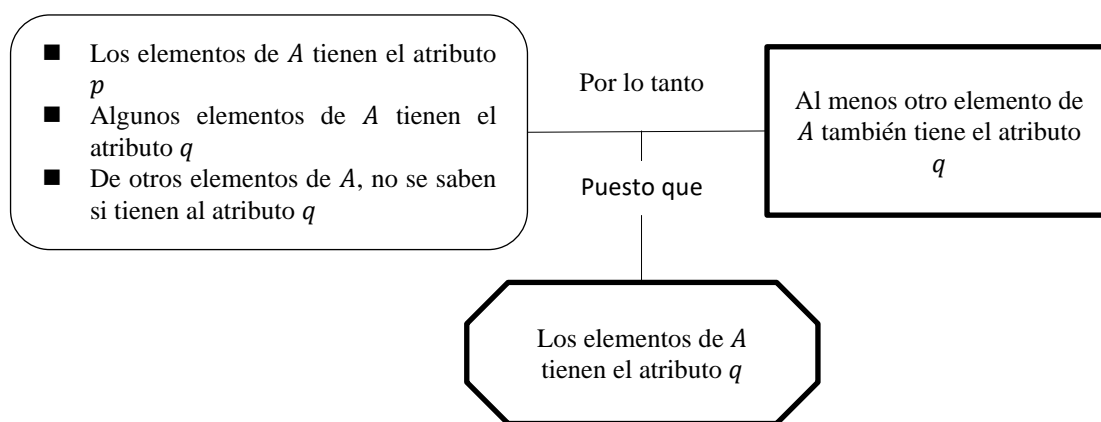
El grupo AEG presenta una tipificación de argumentación, la cual se encuentra basada en las ideas de Pedemonte (2007). En este sentido, se presentan tres tipos de argumentación: argumentación inductiva, argumentación deductiva y argumentación abductiva. Para cada tipo, se mantuvo la estructura de argumento simple, sus elementos (aserción, garantía y datos) teniendo en cuenta cuales de estos elementos se infieren o se dan por hecho en el proceso argumentativo en el cual intervienen. Se presenta cada tipo de argumentación; por abuso de lenguaje, el argumento que se desprende de cada tipo de argumentación se tipifica de la misma manera que esta. Ejemplos relativos a la tipificación se presentan más adelante, cuando describamos tipos de tareas que promueven, principalmente, un tipo de argumento simple específico.

*Argumentación inductiva:* Se desarrolla en un contexto que involucra un conjunto de referencia, representado por el conjunto  $A$ , compuesto por elementos que comparten un atributo común denominado  $p$ . Además, se reconoce la existencia de subconjuntos de  $A$  que también poseen otro atributo  $q$ . Toda esta información se concibe como dato. Al considerar casos particulares no examinados previamente dentro de este conjunto, la argumentación inductiva permite inferir un patrón de generalidad a partir del cual se obtiene que al menos otro elemento del conjunto  $A$  (no contemplado previamente) tiene también el atributo  $q$ . En suma, un argumento inductivo puede enunciarse de la siguiente manera:

“Los elementos de  $A$  tienen el atributo  $p$ , algunos elementos de  $A$  tienen atributo  $q$  sobre otros elementos de  $A$  no se sabe si tienen atributo  $q$  (datos). Por lo tanto, al menos otro elemento de  $A$  también tiene atributo  $q$  (aserción), puesto que los elementos de  $A$  tienen atributo  $q$  (garantía)”. (Molina et al, 2023, p. 11).

De acuerdo con el esquema propuesto por Toulmin, en la Figura 2 se presenta la estructura funcional del argumento inductivo. Además, en el esquema se resaltan con líneas poligonales gruesas los elementos que fueron inferidos en el proceso de la argumentación para llegar a la producción del argumento.

**Figura 2** Esquema de argumento inductivo<sup>1</sup>



*Nota.* Adaptado de Molina, et. al. (2023)

*Argumentación deductiva:* En esta se dispone de dos tipos de información que se acepta como verdadera, una regla general y datos que consisten en un caso particular del antecedente de la regla general. La regla general se emplea para derivar como resultado necesario una aserción que concierne el caso particular correspondiente al consecuente de la regla general. Un argumento deductivo puede enunciarse de la siguiente manera:

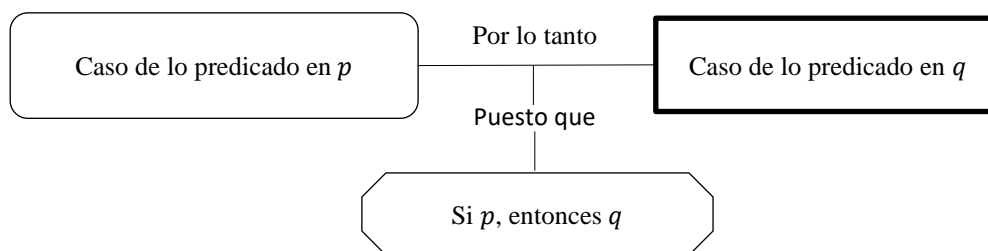
$p_i$  (datos); por lo tanto  $q_i$  (aserción), debido a que si  $p$  entonces  $q$  (garantía).

En la Figura 3 se presenta la estructura funcional del argumento deductivo.

---

<sup>1</sup> En los diagramas, se resaltan con líneas más gruesas las cajas (de forma rectangular, hexagonal o rectangular con esquinas redondeadas) en las que se ponen los elementos que se infieren en el proceso de argumentación (ya sea dato, garantía o aserción).

**Figura 3** Esquema argumento deductivo



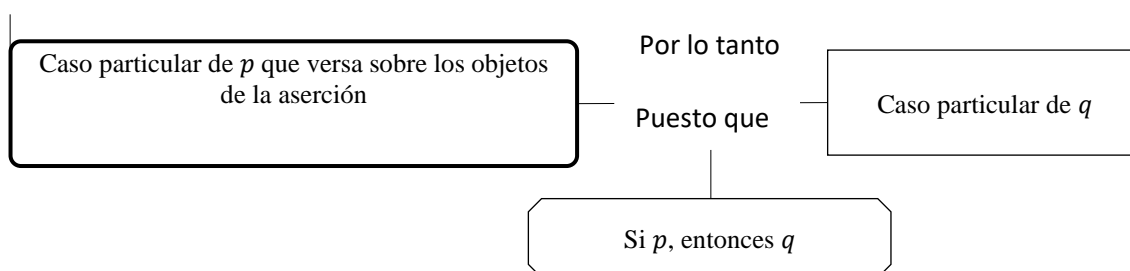
*Nota.* Adaptado de Molina, et. al. (2023)

*Argumentación Abductiva:* es un proceso que parte de un primer enunciado planteado que, junto a una aserción de carácter verdadero o aceptable sobre la cual se trabaja de forma teórica o empírica se infiere un dato. Además, de este dato, se cuenta con una regla general que hace de garantía. La argumentación abductiva se puede definir en dos tipos, pues parten de dos caminos distintos para conseguir la inferencia deseada: utilizando información teórica, llamado argumentación teórica abductiva; utilizando información empírica, llamado abducción creativa. Por un lado, para la argumentación abductiva teórica se parte de un conocimiento teórico previamente aceptado dentro de las normas compartidas. Por otro lado, la argumentación abductiva creativa apela a hechos conjeturados o creados en el momento, que se creen verdaderos. En ambos casos el argumentador considera lo inferido como algo verdadero, pero bajo la visión teórica aquello inferido es plausible.

El argumento abductivo cuenta con un  $p_i$  siendo este un caso particular de  $p$  que versa alrededor de los objetos de la aserción, un dato obtenido mediante inferencia teórica o empírica que permiten sustentar a  $q_i$  siendo también, un caso particular de  $q$  (aserción).

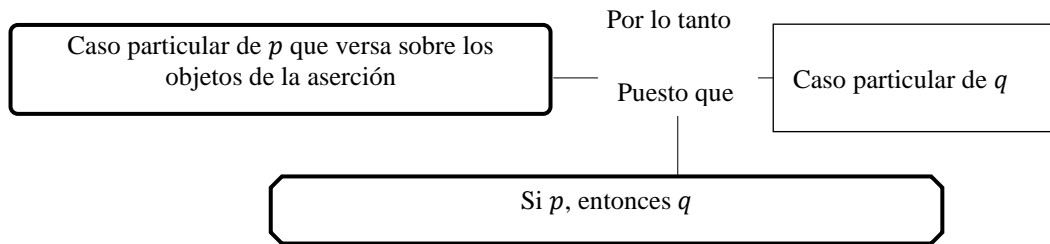
Los esquemas de argumentación abductiva son los siguientes:

**Figura 4** Esquema de argumentación abductiva teórica



*Nota.* Adaptado de Molina, et. al. (2023).

**Figura 5** Esquema de argumentación abductiva creativa.



*Nota.* Adaptado de Molina, et. al. (2023)

### 2.3 Gestión del profesor para promover la producción de argumentos

El papel del profesor es de vital importancia, pues tal y como afirman Sowder y Harel (1998) “el profesor ciertamente tiene importantes roles con respecto a proponer tareas, guiar discusiones, generar dudas, dirigir a los estudiantes hacia la indagación, dar explicaciones, y establecer resultados” (p. 4). Además, la directriz del Ministerio de Educación Nacional [MEN], enfatiza el rol del profesor como un orientador del proceso de enseñanza y aprendizaje, convirtiendo el aula en un medio para la construcción y generación de aprendizaje a partir de experiencias significativas, priorizando la comunicación; como una herramienta importante para fomentar el desarrollo de argumentos al enfrentar desafíos educativos. En este sentido, el profesor tiene un papel muy importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Yackel (2002) asegura que el rol del profesor en la argumentación colectiva es crucial para la formación de una cultura de argumentación en el aula; enfatiza que los profesores deben crear oportunidades para que los estudiantes se involucren en discusiones matemáticas significativas. Esto implica que el profesor debe planificar tareas en las que se requieran más de una solución por parte de los estudiantes, en las que también expliquen y defiendan sus soluciones. Asimismo, el profesor en la argumentación guía a los estudiantes por medio de la creación de un ambiente seguro para discutir, haciendo preguntas que logren profundizar sus razonamientos y reformulando sus ideas para una mayor claridad e interacción entre ellos. Además, el desarrollo de habilidades argumentativas facilita la evaluación crítica de los argumentos presentados. Ayalon (2014) añade que los factores que influyen en las oportunidades de los estudiantes para participar en actividades argumentativas incluyen la forma en que los profesores estructuran las tareas y el ambiente en el aula, es necesario que los profesores diseñen tareas que no solo desafíen a los estudiantes a pensar críticamente, sino que también fomenten la discusión y el debate. Por lo cual, se requiere que los profesores

prevean posibles situaciones de argumentación y preparen estrategias para gestionar estas interacciones de manera efectiva. Por último, Ayalon (2017) explora cómo la atención de los profesores a las situaciones potenciales de argumentación afecta la calidad de la actividad argumentativa en el aula. El estudio revela que los profesores que son conscientes de las oportunidades para la argumentación y que están preparados para intervenir y guiar las discusiones de manera constructiva pueden mejorar significativamente la participación de los estudiantes en actividades argumentativas. Sostiene que el éxito en la implementación de la argumentación depende de la capacidad del profesor para anticipar y manejar dinámicas de aula que promuevan un intercambio rico de ideas.

En este sentido, Martin et al. (2005) proponen 6 acciones que debe tener en cuenta un profesor para llevar a cabo el proceso de argumentación en el aula, las acciones que proponen son las siguientes:

1. *Seleccionar tareas:* Las tareas deben ser diseñadas con el fin de fomentar la argumentación, por lo tanto, deben promover un pensamiento crítico y generar discusión entre el profesor y los estudiantes, para que los estudiantes requieran dar la justificación de su solución.
2. *Rebote:* Consiste en parafrasear o repetir las preguntas o comentarios de los estudiantes, con el propósito de detallar las ideas dadas, para pedir más información, alguna justificación, verificación o refutación de las fallas y poder dar una retroalimentación.
3. *Pedir una explicación o razonamiento:* Cuando se está llevando a cabo un proceso de argumentación en el aula, no solo se espera que los estudiantes digan sus respuestas, sino que también justifiquen su pensamiento y el proceso de razonamiento. Se debe hacer por medio teoremas, definiciones o postulados.
4. *Modelar:* Estrategia que usa el profesor para resolver una situación, proporciona representaciones visuales o conceptuales que permiten a los estudiantes comprender mejor los conceptos, también se hace uso de contraejemplos para identificar las condiciones para que una proposición sea verdadera. Además, se hace uso del sistema axiomático y proceso generales para elaborar conclusiones.
5. *Evaluar las respuestas de los estudiantes:* Se analizan los resultados de los estudiantes ya sea de manera explícita o implícita, haciendo énfasis en el correcto uso de las definiciones, teoremas y postulados, con el fin de refinar o mejorar los argumentos que han propuesto.
6. *Dar valor a las ideas de los estudiantes:* Se caracteriza por escuchar las ideas propuestas por los estudiantes, esto implica reconocer su importancia y tomar en

cuenta sus contribuciones, por consiguiente, se hace un seguimiento a sus ideas mediante preguntas o comentarios.

Respecto a este último ítem, Yackel (2002) reconoce la importancia de escuchar las ideas propuestas por los estudiantes con el fin de resaltar sus aportes a las discusiones que se den, en el marco de procesos de argumentación. Así las cosas, valorar sus formas de proceder para establecer aceptabilidad, formar posturas o convencer son aspectos sustanciales cuando se procura generar un ambiente que potencie la argumentación en el aula.

Estas acciones serán retomadas más adelante como herramientas que nos permitan describir los *cómic*s diseñados en relación con la acción del profesor.

Dado que estos autores sugieren que el profesor debe escoger o diseñar tareas que susciten argumentación y prevean actividad de los estudiantes en torno a estas, vale la pena precisar lo que para este trabajo se concibe como tarea de argumentación y sobre enunciados que podría suscitar producción de diversos tipos de argumentos.

## 2.4 Tareas de Aprendizaje y de Argumentación

En el contexto educativo, Molina et al. (2024) definen *tarea de aprendizaje* como una acción que el profesor pide a los estudiantes que realicen, esperando que consigan alguna expectativa de aprendizaje deseada. El enunciado de una tarea de aprendizaje está compuesto por tres elementos: la solicitud, la situación y las indicaciones:

La *solicitud* es la información de lo que se pide hacer al estudiante, esta debe fomentar duda, curiosidad, incertidumbre, perturbación o controversia, que al resolverse promueva plantear ideas o posturas; la *situación* es la información que ubica la acción solicitada dentro del conocimiento y la práctica, que a su vez provee información asociada con definiciones, teoremas y/o hechos que puedan ser empleados en la formulación de un argumento; las *indicaciones* exponen sugerencias de apoyo o condiciones para limitar la ejecución de la acción que faciliten o delimiten la realización de acciones destinadas a establecer posturas o desarrollar nuevas ideas para la exposición de argumentos.

En caso de que la expectativa de aprendizaje de la tarea estuviese centrada en una producción y en una expresión de argumentos, esta lleva por nombre *tareas de argumentación*. Para ejemplificar lo dicho antes, presentamos el siguiente enunciado de tarea:

Consideremos tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$  en un plano  $\alpha$ . Sea  $m$  es la recta perpendicular al  $\overline{AB}$  por su punto medio y  $n$  la recta perpendicular al  $\overline{BC}$  por su punto medio, ambas en  $\alpha$ . Sea  $T$  el punto de intersección de  $m$  y  $n$ . ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$ ? Utilice regla y compás para su resolución. Además, tengan en cuenta las definiciones y teoremas vistos previamente.

En este enunciado, la *solicitud* corresponde a la acción que se espera hagan los estudiantes, esto es, determinar la característica geométrica del punto  $T$ . La *situación*, es el conjunto geométrico en el cual se ubica la solicitud: tres puntos no colineales en un plano, las rectas

perpendiculares a dos de los lados de un triángulo, y el punto de intersección de estas rectas. Este contexto proporciona un marco en el que los estudiantes pueden utilizar teoremas, definiciones y conceptos previamente vistos en relación con el objeto mediatriz de un segmento. Finalmente, las *indicaciones* aluden a las herramientas o recursos que los estudiantes pueden utilizar para resolver la tarea, como la regla, el compás, y el sistema teórico previamente trabajado en clase.

## 2.5 Enunciados de tareas que promueven cada tipo de argumentación

Molina, et al. (2024) hacen una propuesta según la cual, dependiendo de la estructura del enunciado de una tarea, es posible predecir el argumento simple principal que esta puede promover. En otras palabras, dependiendo de la información con la que se cuenta y de aquella que se infiere en el proceso de argumentación es posible determinar su papel en la estructura funcional del argumento que podría suscitar la respuesta a la solicitud planteada en la tarea. En lo que sigue, se presenta una caracterización de enunciados de tareas que promueven argumentación inductiva, abductiva y deductiva.

*Enunciado que promueve una argumentación inductiva:* Este tipo de enunciado además de promover un argumento inductivo, también promueve la búsqueda de un consecuente, y para conseguir un enunciado capaz de ello, es menester que, la situación expuesta en el enunciado proporcione o insinúe el conjunto que se desea tratar como referencial. Además, el enunciado podría informar o presentar de forma implícita un atributo que bien puede ser parte de la solicitud. También, se debe utilizar la representación de los objetos del conjunto de referencia y realizar una exploración de casos límites para determinar otro atributo.

Un ejemplo de esto puede ser el siguiente:

Consideremos tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , tenemos dos mediatrices,  $m$  del  $\overline{AB}$  y  $n$  del  $\overline{BC}$  y  $T$  siendo el punto de intersección de estas mediatrices. ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$  al mover el punto  $B$ ? Pueden usar GeoGebra para explorar la situación.

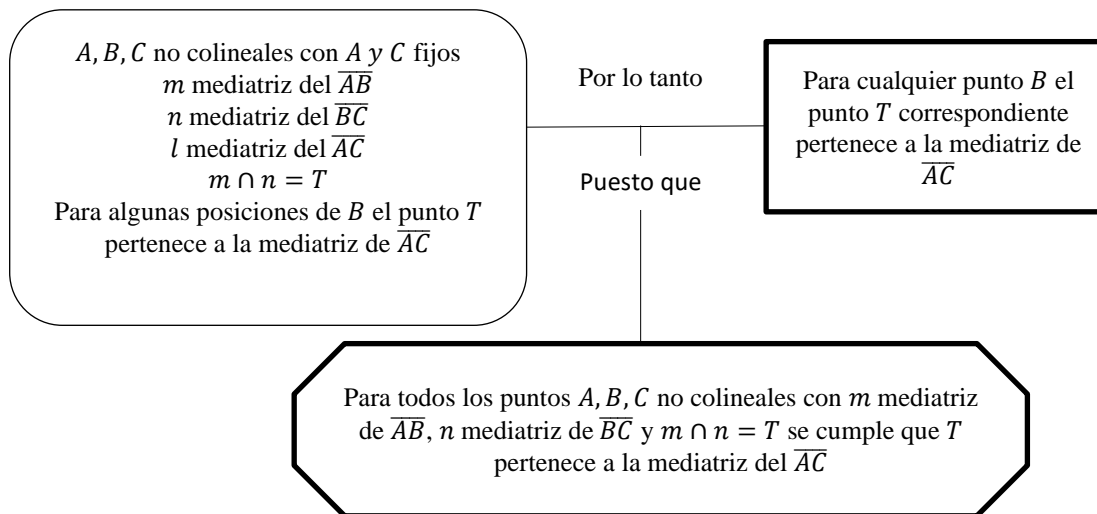
El enunciado de la tarea presenta como *situación*: “tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , tenemos dos mediatrices,  $m$  del  $\overline{AB}$  y  $n$  del  $\overline{BC}$ ”; se invita a los estudiantes a caracterizar geoméricamente al punto  $T$  cuando se mueve el punto  $B$  (esto es la *solicitud*). Como *indicaciones*, se da la posibilidad de un uso de herramientas, ya sean apuntes, construcciones con regla y compás o GeoGebra.

El argumento inductivo surge cuando se representa la situación en un *Software* de geometría dinámica (GeoGebra) para modelar la situación y explorar de manera empírica. Cuando se mueve al punto  $B$  desplazándolo en varias posiciones y se utiliza la herramienta “Rastro” que proporciona el *software* en el punto  $T$ , se puede observar que la trayectoria del punto  $T$  es una recta al mover  $B$ . Por lo cual a partir de esta exploración identifican otro atributo: Para

algunas posiciones del punto  $B$  en el plano se cumple que la intersección de las rectas  $m$  y  $n$ , el punto  $T$ , pertenece a la mediatriz de  $\overline{AC}$ .

Por lo tanto, se concluye que para otras posiciones del punto  $B$  en el plano, los puntos  $T$  correspondientes hacen parte de la mediatriz del  $\overline{AC}$ . En la figura 6 se presenta el argumento en su respectivo esquema.

**Figura 6** Esquema de enunciado que promueve un argumento inductivo.



*Nota.* Elaboración propia.

*Enunciado que promueve una argumentación deductiva:* Para promover un argumento deductivo, es fundamental que el enunciado brinde información en calidad tanto del dato como de la aserción que se solicita inferir. A través de la argumentación, se busca validar una garantía que puede o no estar incluida en el enunciado y la aserción debe ser una conclusión necesaria basada en los datos presentados para ser considerada válida.

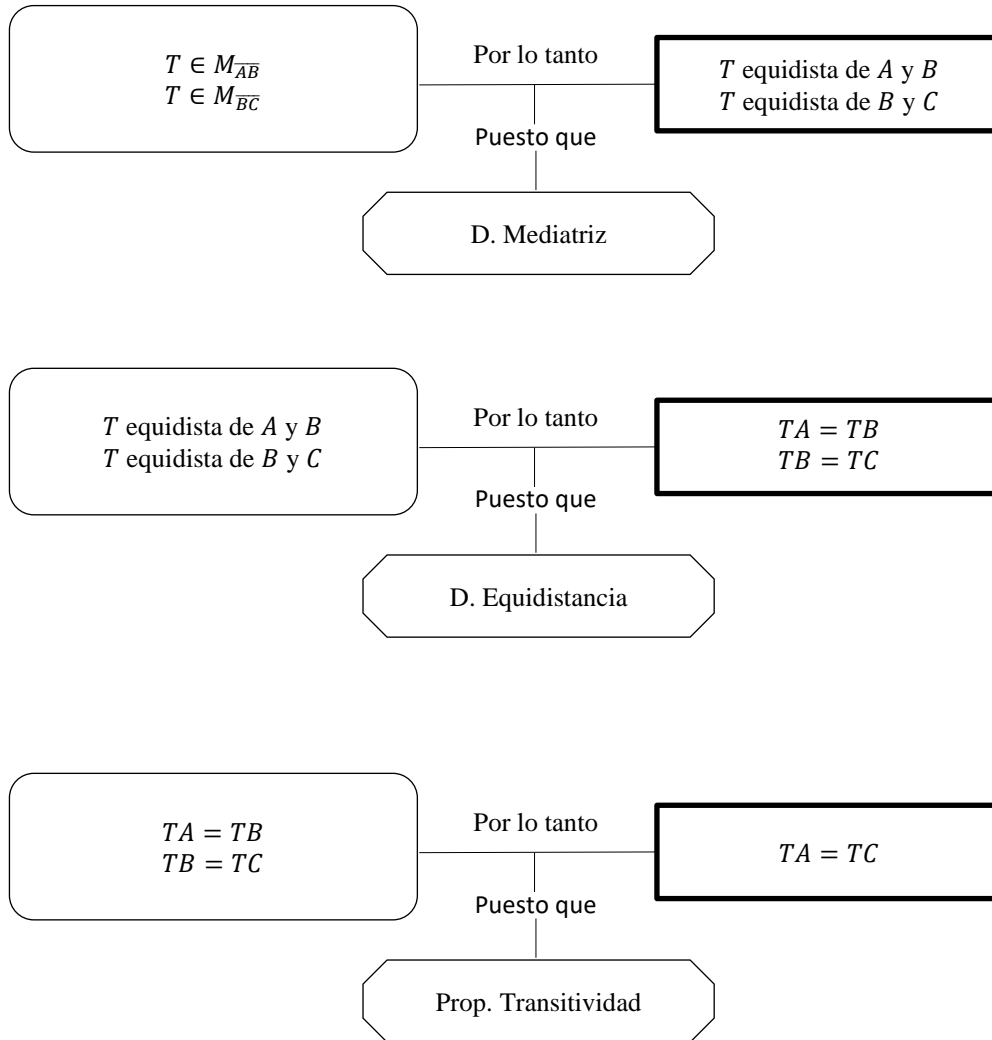
Un ejemplo de enunciado es el siguiente:

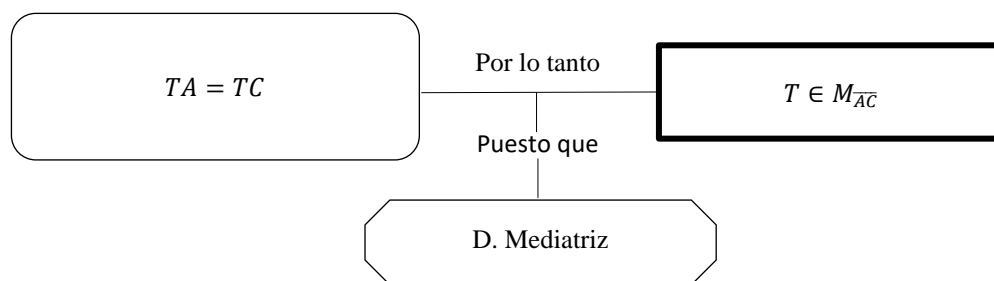
Consideremos tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , tenemos dos mediatrices,  $m$  del  $\overline{AB}$  y  $n$  del  $\overline{BC}$  y siendo  $T$  el punto de intersección de estas mediatrices. ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$ ? Formule una conjetura y demuéstrela.

Debido a que se proporciona un conjunto de datos iniciales “tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , tenemos dos mediatrices,  $m$  del  $\overline{AB}$  y  $n$  del  $\overline{BC}$ ”, con lo cual, la situación es análoga a la de ejemplo anterior. Aquí hay dos solicitudes; decir la característica geométrica del punto  $T$  y formular una conjetura y demostrarla. Esta última solicitud es la que explícitamente promueve la producción de argumentos deductivos necesarios para validar la conjetura que

se formule. El argumento asociado se conforma de tres argumentos simples que se exponen en la Figura 7.

**Figura 7** Esquema de enunciado que promueve un argumento deductivo.





*Nota.* Elaboración propia.

*Enunciado que promueve una argumentación abductiva:* La estructura del enunciado que promueve un argumento abductivo proporciona o insinúa un hecho a modo de situación y la solicitud pregunta sobre las condiciones que aseguren la veracidad de este hecho. Asimismo, la solicitud deberá ser la inferencia de uno de los datos y la regla general. Cabe aclarar, el enunciado debe dar la oportunidad de realizar una exploración empírica o teórica puesto que, este tipo de enunciado se basa en la búsqueda de un antecedente.

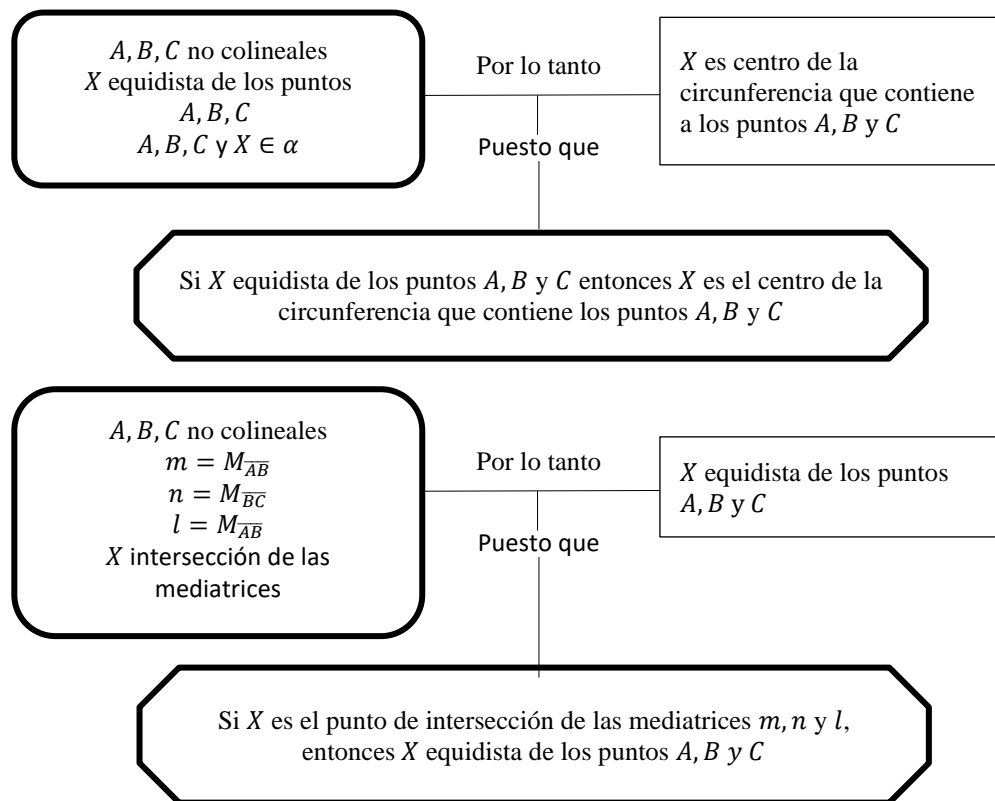
Un ejemplo de enunciado puede ser el siguiente:

Dados tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$  ¿Qué condición debe tener un punto para que sea el centro de la circunferencia que los contiene? Diga de qué manera se da cuenta de que su respuesta cumple con lo solicitado.

En la información dada están los *datos* que son los puntos  $A, B$  y  $C$  no colineales, además se evidencia una aserción implícita en la *solicitud*: establecer condiciones para un punto que sea el centro de la circunferencia que contiene a los tres puntos  $A, B$  y  $C$ ". En esta ocasión no se enuncian indicaciones; se puede suponer que los estudiantes podrían usar elementos del sistema teórico con el que se cuenta o hacer exploraciones empíricas para establecer la condición que implique que un punto sea el centro de la circunferencia que contiene a los puntos dados.

El proceso abductivo surge porque los estudiantes deben proponer una explicación plausible para justificar la existencia del centro de la circunferencia que contiene tales puntos. Se puede observar posibles argumentos abductivos asociado a esta tarea en la figura 8.

**Figura 8** Esquema de enunciado que promueve un argumento abductivo.



Nota. Elaboración propia

## 2.6 Acciones de los estudiantes

En lo que sigue, presentamos acciones generales que pueden llevar a cabo los estudiantes cuando están implicados en procesos en lo que resuelven tareas abiertas, formulan conjeturas y procuran sustentarlas; esto es, están inmersos en una actividad demostrativa (Samper y Molina, 2013). La actividad demostrativa tiene dos procesos que la constituyen, siempre teniendo como trasfondo un proceso de argumentación: el de conjeturación y el de justificación. El primero tiene por finalidad la formulación de un enunciado condicional de la forma “si entonces”, obtenido gracias a la observación, evidencias empíricas y regularidades halladas en un objeto matemático explícito, cuyo valor de verdad no está definido (aunque posea un alto nivel de certeza), pero que, teniendo a la mano una axiomática, determinada, puede llegar a demostrarse y de esta manera, tener validez dentro de un sistema teórico determinado. De este proceso se desglosan las siguientes acciones:

- *Detectar propiedades*: acción que se lleva a cabo por medio de la exploración empírica de la situación dada, que conlleva a la identificación de una propiedad invariante, es decir, una característica que no varía bajo un conjunto determinado de condiciones. Esta acción es clave para precisar elementos que podrían conformar un argumento inductivo

o abductivo; específicamente, determinar el dato en un argumento inductivo (el otro atributo que cumplen algunos elementos del conjunto referencial) y bases para la aserción; o el dato en un argumento abductivo (elementos que podría ser evidencia para sustentar un hecho dado). Acciones específicas que pueden llevar a cabo los estudiantes son (Molina, et al. 2024):

- Identificar los elementos dados en la situación de la tarea (elementos que podría ser dato o aserción según la estructura del enunciado).
  - Hacer un estudio empírico para determinar una propiedad invariante; por ejemplo, estudiar varios casos para “descubrir” un invariante (aporta a la construcción de un posible argumento inductivo) o proponer un procedimiento de construcción que lleve a un hecho dado, o hacer un arrastre procurando mantener una propiedad (hecho dado) para determinar datos que llevan a esa propiedad (aporta a la construcción de un posible argumento abductivo).
- **Verificar propiedades:** cobra sentido después de haber detectado las propiedades invariantes inducidas. Consiste en hacer una nueva exploración, pero ahora con sentido de comprobación de estas propiedades.
    - Utilizar el arrastre o toma medidas con miras a verificar el invariante encontrado.
    - Estudiar casos límite (posiciones muy cercanas a ciertos puntos o posiciones muy lejanas de los objetos dados) para verificar si el invariante se sigue cumpliendo.Esta acción es clave para determinar, si los hay, contraejemplos que puedan sustentar una refutación a una propiedad invariante (o una aserción) determinada.
  - **Formular conjetura:** para llegar a esta acción es ideal haber ejecutado las primeras dos acciones, por lo menos la primera de ellas. Consiste en hacer la formulación de un enunciado condicional que reporte, de manera general, en su consecuente o su antecedente la propiedad inducida o abducida, respectivamente, obtenida a partir de las condiciones impuestas en la exploración y en situación dada en el enunciado de la tarea. Podríamos decir, entonces, que esa conjetura encapsula y generaliza los elementos que podría constituir un argumento: en su antecedente, el dato; en su consecuente, la aserción. La conjetura tiene un carácter de generalidad y tiene una estructura condicional *si p entonces q*. El argumento está compuesto de, por lo menos, dos proposiciones que no necesariamente tienen un carácter de generalidad: una instanciación  $p_i$  de  $p$  y una instanciación  $q_i$  de  $q$  que se conectan según una estructura  $p_i, \text{ por lo tanto } q_i$ . Un argumento tiene una intención justificativa para  $q_i$ ; una condicionalidad es una proposición que informa sobre algo: una relación condicional entre  $p$  y  $q$ .
  - **Corroborar la conjetura:** Permite determinar si las propiedades dadas en el antecedente bastan para tener como consecuencia necesaria las propiedades que se indican en el consecuente de la conjetura, por lo cual contiene todas las conclusiones posibles.

En el proceso de justificación, se procuran enlazar argumentos simples para justificar la aceptabilidad de la conjetura antes establecida. Las acciones que componen este proceso son:

- *Selección de elementos teóricos o empíricos*: en esta acción se escogen los elementos (dato o garantía) que podrían ser usados para establecer la aceptabilidad de la aserción formulada; estos pueden ser hechos teóricos que conformen el cuerpo de conocimientos con el que cuenta la clase, o datos establecidos mediante una exploración empírica realizada en un software de geometría dinámica, por ejemplo. Las acciones que pueden llevar a cabo los estudiantes son:
  - Determinar, en la situación de la tarea, aquello que podría conformar elementos de un argumento: el dato o la aserción.
  - Determinar, qué de la exploración empírica o del estudio teórico, podría conformar elementos de un argumento: el dato, la aserción y la garantía.
- *Construcción y formulación del argumento*: en esta acción se hilvanan los elementos establecidos en la acción anterior y se exponen los argumentos construidos anteriormente. Vale la pena precisar que las razones de los argumentos son de diversa índole; esta diferenciación provoca a su vez diversidad en los tipos de argumentos. Para este caso consideramos dos: sustentación empírica y demostración.
- *Sustentación informal*: es un argumento cuyos datos y garantías provienen de fuentes no teóricas (empíricas, de autoridad, rituales, de convicción personal). Dan lugar a argumento inductivos o abductivos, principalmente.
- *Demostración*: es el argumento que puede estar compuesto de varios argumentos simples, en los cuales todas las garantías provienen del sistema teórico con el que se cuenta.

Para el trabajo de grado que acá nos convoca, nos interesa tomar en cuenta estas acciones como herramientas útiles para describir los videos. En el capítulo siguiente presentamos la tabla 3 en la que precisamos acciones de los estudiantes, basadas en la información que se acaba de presentar. Esta tabla presenta categorías con las cuales describir los *comics*.

## **2.7 Los comics animados como herramienta en los procesos de enseñanza y de aprendizaje**

Según la RAE define *cómic* como “Serie o secuencia de viñetas que cuentan una historia”, siendo una viñeta según la RAE “Cada uno de los recuadros de una serie en la que con dibujos y texto se compone una historieta”. Los *comics animados* en un ámbito educativo se destacan como una herramienta para comunicar ideas debido a que pueden ser utilizados en diversos campos para expresar conceptos y facilitar su comprensión. Los *comics animados* no solo sirven para la comunicación visual, sino también para la generación de ideas, la representación de conceptos y la colaboración interdisciplinaria en diversos contextos

profesionales y educativos. Para su uso efectivo, es necesario contar con habilidades en el dibujo, la creatividad y la capacidad de síntesis visual.

Roam (2009) y Wujec (2010) coinciden en destacar a los cómics animados como herramientas sumamente efectivas para la comunicación y el aprendizaje en diversos contextos, especialmente en el ámbito educativo. Roam (2009) resalta la importancia de utilizar dibujos simples y esquemáticos para representar conceptos complejos, lo que facilita la comprensión, organización de ideas y la resolución de problemas. Además, enfatiza que el pensamiento visual promueve una mejor conexión entre los conceptos, mejorando así la capacidad de análisis. Wujec (2010), da énfasis al valor de los *cómics animados* y los diagramas para desglosar ideas complejas en una serie de pasos claros y comprensibles, transformando la información abstracta en algo concreto y accesible para cualquier audiencia. En conjunto, los tres autores reconocen el inmenso potencial de los cómics animados como una herramienta que transforma la enseñanza al hacer la información más accesible, dinámica y memorable en el contexto educativo.

Herbst et al. (2011) destacan una ventaja significativa de la incorporación de *comics animados* en la formación de profesores, ya que su capacidad para representar acciones permite aprovechar mejor las oportunidades de enseñanza y secuencias de tiempo, posibilitando plantear preguntas para el análisis de situaciones específicas en la enseñanza, como la anticipación de respuestas de los estudiantes o la exploración de distintas estrategias pedagógicas. También, explicitan la gran utilidad que llega a tener el uso de *comics animados* en aquellas clases de formación de profesores en las que sea menester fomentar conversaciones sobre la práctica de enseñanza de las matemáticas, pues pueden parecer adecuados en notar o representar las acciones posibles de los estudiantes. Esto significa, presentar al profesor en formación un instructivo de cómo un maestro atiende al contenido y la cognición del estudiante, dejándole ver cómo tiene éxito o falla en esto, pues la creación de los *comics animados* cuenta con una gran ventaja por la maleabilidad para representar las diferentes formas en las que se puede realizar un mismo trabajo. Los autores indican que al momento de crear o utilizar *comics animados* lo más recomendable es utilizar personajes/protagonistas en cierta medida indescriptibles o transparentes; de no hacerlo, podría ocurrir que la atención se desvíe a otros elementos y no a diálogos o acciones propios de la actividad que se quiere resaltar.

Asimismo, Herbst et al. (2011) indican que el uso de los *comics animados* permite a los futuros profesores ver la vida del aula como lo suele hacer un profesor, en particular con el intercambio de ideas matemáticas de profesor-estudiantes. En ese sentido, mediante los *comics* se pretende facilitar el análisis de práctica, en el que es posible identificar los momentos en los que el profesor puede actuar de forma deliberada y atenta, evaluando e interpretando las acciones y decisiones del profesor, y también desarrollar un lenguaje de descripción que permita el análisis de lecciones de manera efectiva. Además, otra de las

utilidades del uso de comics animados se encuentra en la exploración de toma de decisiones tácticas en la enseñanza, permitiendo a los futuros profesores concebir y evaluar diferentes cursos de acción en el aula, en las que se consiga desarrollar y pensar en alternativas pedagógicas y formas de pensar. Como un último uso, se encuentra la predicción, pues los profesores en formación podrían adelantarse y anticipar el desarrollo de las lecciones, aprendiendo a atender las demandas temporales e individuales del trabajo que significa enseñar.

En suma, Herbst y sus colegas indican que los *comics* se utilizan con tres propósitos principales: primero, como una herramienta para la ilustración de conceptos y prácticas pedagógicas, al presentar ejemplos de la enseñanza en acción; segundo, proporcionan un medio para la reflexión crítica, los futuros profesores pueden analizar y discutir para identificar elementos clave de la práctica docente, como la gestión del aula, la interacción con los estudiantes y la implementación de estrategias de enseñanza; tercero, son una herramienta de comparación y contraste en las que se lograrían visualizar diferentes estilos y enfoques de enseñanza, permitiendo la comparación de diversas prácticas y estrategias.

## **2.8 Tareas de formación profesional**

Según Pino-Fan, et al. (2015), la formación profesional tiene como objetivo darles a los futuros profesionales un conjunto integral de habilidades, conocimientos y competencias que le permitan enfrentar los retos de su labor profesional. Por consiguiente, las tareas que se desarrollen para esta formación son herramientas fundamentales para el aprendizaje y para posibilitar que los estudiantes logren una comprensión y aplicación del aprendizaje. Un tipo de tarea de formación profesional que sigue estas ideas y que adaptamos al uso de los *comics* en este trabajo son las *tareas de reflexión crítica*. Este tipo de tareas tiene por objetivo propiciar una reflexión sobre la propia práctica profesional, la práctica de otros o sobre escenarios hipotéticos y sobre las consecuencias de las decisiones que se tomaron, o se pueden tomar durante el proceso. En la formación de profesores, esta tarea invita a una reflexión juiciosa frente a lo sucedido en una determinada clase para precisar posibles acciones de los profesores en contextos similares, las consecuencias de esas acciones, sus conocimientos al respecto de los aspectos (didácticos o matemáticos) involucrados, etc.

Para este caso, las tareas podrían suscitar reflexión sobre aspectos que estén presentes en los *comics* (sobre los procesos de la actividad matemática que la tarea suscita, sobre la actividad que los estudiantes podrían realizar, sobre el papel de los artefactos o recursos, sobre lo curricular o contextual, sobre lo interaccional –papel del profesor–, etc.). Pino-Fan y Godino (2015) proponen enunciados de tareas que nosotros usamos para cuestionar sobre algunos de estos aspectos:

- ¿Qué conocimientos o procesos se ponen en juego al resolver la tarea?

- ¿Qué tipo de respuestas o actividad matemática se esperan por parte de los estudiantes?
- ¿Cómo un profesor puede gestionar la tarea si el estudiante presenta alguna dificultad?
- ¿Qué papel tiene un recurso (manipulable, digital, etc.) en la actividad de los estudiantes al resolver la tarea?
- ¿En qué nivel educativo se podría proponer la tarea?

Basados en estos enunciados de tareas, nosotros proponemos algunas que apuntan a que el formador de profesores le pueda sacar un provecho aceptable a los *comics*. En el capítulo 4, presentamos un desarrollo al respecto.

## CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

Para este capítulo, se utilizó como base la estructura de la metodología planteada por Velandia y Miranda (2014) quienes, mediante su trabajo de grado de Licenciatura en Matemáticas, diseñaron videos con características similares a los que realizamos en este trabajo (ellos se concentraron en el proceso de conjeturación; nosotros en procesos de argumentación). Presentamos, las cinco fases seguidas para realizar nuestro estudio:

La *fase 1* consistió en una revisión bibliográfica. En esta etapa, se seleccionaron los documentos fundamentales que sirvieron de referencia para la construcción del marco conceptual, con énfasis en temas clave como la argumentación, los argumentos, las tareas de aprendizaje y el uso de cómics en la educación. Este análisis permitió identificar los elementos teóricos que sustentarían el proyecto.

En la *fase 2*, se procedió con la construcción del marco conceptual. En esta, se tomaron las ideas con mayor relevancia de los documentos seleccionados previamente. Estas ideas fueron organizadas y articuladas para formar un marco teórico sólido.

La *fase 3* se centró en la decantación y recopilación de la información necesaria para el diseño de los cómics. En esta etapa, se estructuró de manera clara la información para ser utilizada en la creación de los cómics animados. Tal proceso, fue de suma importancia para la definición los contenidos y la narrativa visual que fue empleada.

Durante la *fase 4*, se llevó a cabo la elaboración de los videos. En esta fase, se describió en detalle la secuencia de acciones utilizadas para la producción de los cómics animados, desde la planificación inicial hasta la creación del producto final.

Finalmente, en la *fase 5*, se redactó el documento final. En esta última fase, se integraron todas las fases anteriores, articulando el proceso completo de creación de los cómics animados y su justificación teórica.

A continuación, describimos con un poco más de detalle cada fase del estudio.

### **3.1 Fases I y II: Revisión bibliográfica y construcción del marco conceptual**

En esta fase se realizó un análisis de la revisión bibliográfica, el cual ayudó en la construcción de los dos primeros capítulos. Para esto, se tuvieron cinco puntos referenciales relacionados con los intereses de nuestro trabajo. El primero de estos puntos se encontró relacionado con los conceptos de argumento y argumentación con su respectiva tipificación; para ello se usó como principal referente la propuesta del Grupo AEG del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

El segundo punto se refiere a las tareas de aprendizaje y sus elementos, junto con la propuesta que Molina, et al. (2024) presentan respecto a tareas de argumentación; esta plantea cómo la estructura del enunciado de la tarea promueve principalmente un tipo de argumento: búsqueda de consecuente, argumentos inductivos, búsqueda de antecedente, argumentos abductivos. Esta tipificación fue la usada para las tareas que empleamos en los *comics animados*.

El tercer punto está relacionado con la gestión del profesor para promover argumentación en el aula. Tuvimos un interés en este asunto dado que en los *comics animados* procuramos usar algunas de las acciones, propuestas por ciertos autores (e.g., Martin et al., 2005), que deberían ejecutar los profesores para apoyar procesos argumentativos en sus estudiantes. También, para tener un punto de referencia respecto a qué contenido considerar a la hora de formular tareas de formación profesional relativa a la potencial gestión del profesor con respecto a la actividad argumentativa expuesta en el video.

El cuarto punto está relacionado con el *comic animado* como recurso de aprendizaje. Debimos documentarnos respecto al potencial de este tipo de *comics* en la formación de profesores, para lo cual nos basamos principalmente en las ideas de Herbst (2011).

El último punto corresponde a las tareas de formación profesional. Nuestro interés con este asunto se centra en tener una referencia sobre tipos de tareas de formación profesional mediante las cuales los videos puedan ser usados de la mejor manera posible. Para ello, se tuvo en cuenta algunas ideas planteadas por Pino-Fan y Godino (2015).

### **3.2 Fase III: Diseño de Comics**

En esta sección se presenta el paso a paso de la creación de los *comics*, detallando cada uno de estos pasos y los elementos que se tuvieron en cuenta. Asimismo, se detallan los *softwares* utilizados, dando una descripción y breve vistazo a estos. Los *comics* pueden visualizarse en los siguientes enlaces: [Argumentación deductiva](#), [Argumentación inductiva](#) y [Argumentación abductiva](#).

*Paso 1: Creación de maqueta de cada comic.* Se planteó crear tres videos diferentes enfatizando en un tipo de argumentación por video. Para esto, se pensó mantener un mismo escenario para todos los videos, que en este caso fue un salón de clase con una pizarra, el profesor y algunos estudiantes en el fondo. Para cada video se pretendió enfocar el trabajo de un grupo de 3 estudiantes, quienes estarían dando solución a la tarea planteada por el profesor utilizando diferentes herramientas como apuntes, reglas y compás o el uso de un *software* de geometría dinámica (GeoGebra).

Las tareas expuestas como ejemplo en la sección 2.5 sirvieron de base para las tareas usadas en los *cómics*; sus enunciados son los siguientes:

**Tarea para promover argumentación deductiva:** Vamos a considerar tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , vamos a considerar también dos mediatrices,  $m$  del  $\overline{AB}$  y  $n$  del  $\overline{BC}$ , además, un punto  $T$  que será la intersección de las mediatrices. Entonces la pregunta es, ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$ ? Para esto, quiero que usemos los apuntes y propiedades de los objetos que hemos estudiado previamente.

**Tarea para promover argumentación inductiva:** Vamos a considerar tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , vamos a considerar también dos mediatrices,  $m$  del  $\overline{AB}$  y  $n$  del  $\overline{BC}$ , además, un punto  $T$  que será la intersección de las mediatrices. Entonces la pregunta es, ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$ , al mover el punto  $B$ ? Sustente la aceptabilidad de sus hallazgos. Pueden usar GeoGebra.

**Tarea para promover argumentación abductiva:** Dados tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , ¿qué condición debe tener un punto para que sea el centro de la circunferencia que los contiene? ¿Cómo aseguran que su respuesta es acertada? Pueden usar sus apuntes o GeoGebra.

*Paso 2: Creación de libretos.* Se crearon tres libretos como se evidencia en el *Anexo 1*, uno por cada video; esto es, uno por cada tipo de argumentación. En un principio, se pensó en un mismo grupo de tres estudiantes, quienes serían los protagonistas del desarrollo de la tarea para los tres videos; sin embargo, en el transcurso de la creación de los libretos, surgió la idea de implementar la misma situación de la tarea para los *comics* correspondientes a la argumentación deductiva e inductiva, por lo cual se prefirió crear otros tres personajes que conformarían un nuevo grupo de trabajo. Aunque se mantuvieron estos nuevos personajes, en una instancia final se optó por hacer cambios sustanciales en la solicitud e indicaciones para estas dos tareas, con el fin de promover la producción de un tipo de argumento en específico. Por su parte, en cuanto al *comic* correspondiente a la argumentación abductiva, se cambió completamente la situación de la tarea y se usó al mismo grupo de trabajo de uno de los *comics* mencionados anteriormente.

*Paso 3: Selección y uso de softwares utilizados.* Para este paso se contó con la colaboración de Sebastián Díaz, estudiante de producción audiovisual interactiva de la Universidad Javeriana, quien aportó su conocimiento para la elaboración de los videos.

Para la elaboración de los *cómics* se usaron programas para el diseño de los personajes, la secuencia de las escenas, la ilustración de las escenas, el sonido, la animación y el software de geometría dinámica. A continuación, se describieron los *softwares* utilizados:

*Adobe Illustrator:* *software* de diseño basado en gráficos vectoriales, para crear personajes y escenarios detallados que se pueden escalar sin perder calidad. Este ofrece herramientas precisas para dibujo digital, organización de elementos, y una amplia gama de opciones de color y degradados para agregar profundidad a los diseños. Además, se integra con otros programas de Adobe, cosa que lo hace una herramienta versátil y eficiente para el diseño visual de proyectos animados. En la Figura 9 se ilustra el diseño de uno de los personajes en diferentes vistas (frontal, lateral,  $\frac{3}{4}$  y trasera).

**Figura 9** Adobe Illustrator.



*Nota.* Personaje del profesor elaborado mediante *Illustrator*.

*Adobe After Effects:* Esta herramienta permite la creación de animaciones y efectos visuales, a través de su sistema de fotogramas permite ajustar propiedades como la posición, escala y rotación para lograr movimientos fluidos en los personajes, además efectos visuales como desenfoques, luces y sombras, que añaden dinamismo y realismo tanto a los personajes como al entorno. Esta herramienta permite una organización por capas, es decir que facilita la manipulación independiente de cada elemento de la escena. La Figura 10 ilustra a los personajes sentados en un salón de clase, las capas de animación y los fotogramas en la línea del tiempo que son los que permiten el movimiento de estos.

**Figura 10** Adobe After Effects.



*Nota.* Animaciones de los personajes en *After Effects*

*Adobe Photoshop:* Permite gestionar cada fotograma de forma independiente, aplicando efectos y ajustes que se replican a lo largo de la secuencia, lo que facilita la creación de transiciones suaves y efectos visuales dinámicos. La Figura 11 ilustra los retoques de color, sombra y efectos de fondo.

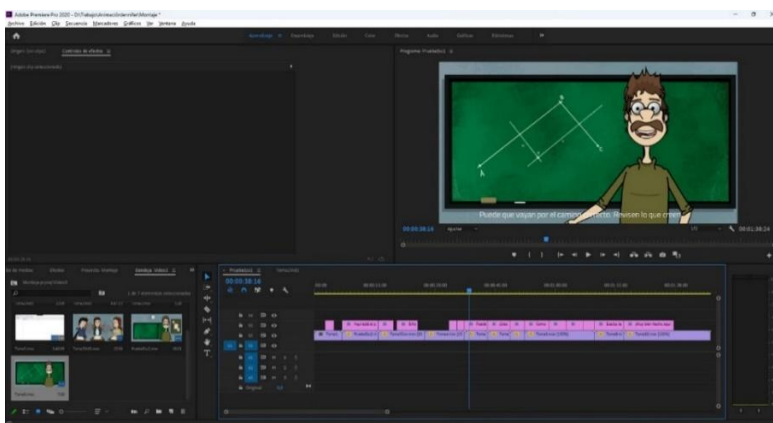
**Figura 11** Adobe Photoshop



*Nota.* Edición del entorno en *Photoshop*.

*Adobe Premiere:* Permite compilar escenas en la edición de videos, es decir, organizar y ensamblar clips de manera fluida en una línea de tiempo intuitiva. Con su soporte para múltiples pistas de video y audio, es posible sincronizar diversos elementos, como diálogos, música y efectos, creando una narrativa coherente. Además, ofrece una amplia gama de transiciones y efectos visuales que mejoran cada escena, por lo cual cada detalle visual y sonoro se encuentre bien ajustado. La Figura 12 ilustra la animación de uno de los personajes, en el que se organizan los fragmentos de animación y audios en su correspondiente la línea de tiempo.

**Figura 12** Adobe Premiere.

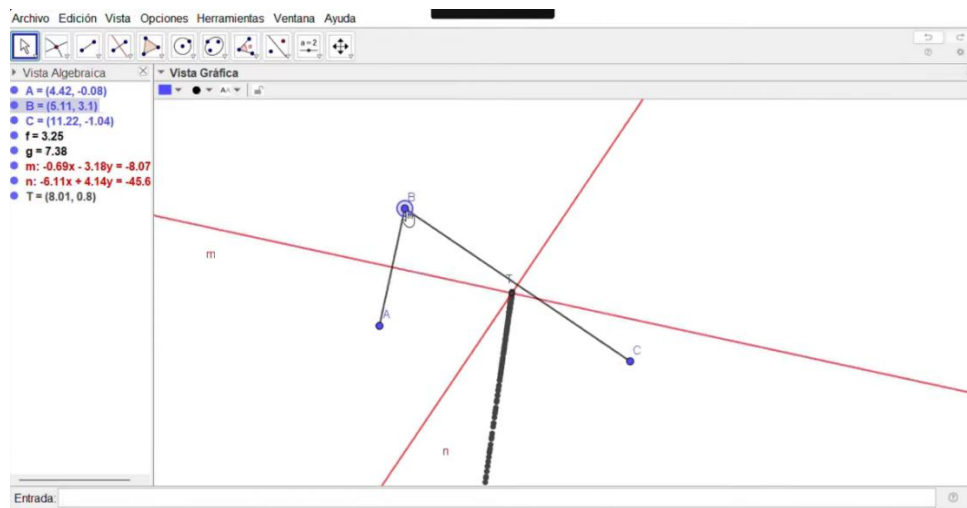


*Nota:* Edición de audio en *Premiere*

*GeoGebra:* Es un *software* de geometría dinámica que proporciona herramientas para la geometría, álgebra, cálculo y estadística. En el ambiente que este ofrece es posible explorar

objetos construidos de forma interactiva y visual. En la figura 13 se expone un pantallazo de GeoGebra que representa la construcción hecha por los personajes del comic relativo a la producción del argumento inductivo.








**Figura 13** GeoGebra



*Nota.* Exploración en GeoGebra por parte de los estudiantes.

*Paso 4: Creación de personajes.* Fue creado un profesor, que estaría presente en los tres videos. Además, se crearon 6 personajes más, quienes conformarían los dos grupos de trabajo, uno para los *comics* relativos al proceso de argumentación inductiva y deductiva, y otro para el *comic* de argumentación abductiva. Cada personaje adoptó el nombre de la persona que nos prestó su voz para el personaje; en suma, los personajes son: el profesor Miguel y los estudiantes Aleja, Danna, Sofia, Jenn, Brandon y Diego. Los *avatar* de los personajes se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1** Personaje de los comics

<p>Profesor</p> 	Grupo 1		
	<p>Jenn</p> 	<p>Aleja</p> 	<p>Brandon</p> 
	Grupo 2		
	<p>Sofia</p> 	<p>Danna</p> 	<p>Diego</p> 

*Paso 5: Creación de escenarios de los videos.* Durante la creación de los *comics* se plantearon diferentes escenarios, como primer lugar el aula de clase que está compuesto por un tablero, la mesa del profesor y los asientos de los estudiantes. Además, en algunas escenas se presenta lo que realizan los estudiantes mediante el *software* y lo que escriben en sus apuntes. En la figura 14 se ilustra el aula de clase con vista hacia el tablero, la cual es la primera escena de todos los videos.

**Figura 14** Escenario de clase.



Nota: Escenario de los *comics*.

### 3.3 Fase IV: Descripción de los videos

Una vez que los comics animados fueron elaborados, se realizó una descripción detallada de cada uno de ellos, resaltando aquellos puntos clave como el tipo de enunciado, la actividad argumentativa del grupo de estudiantes y la gestión del profesor. Lo anterior, se realizó de acuerdo con los referentes teóricos expuestos con antelación en el capítulo dos. Concretamente (i) indicamos, a partir de la sección 1.8, por qué las tareas empleadas en los videos suscitan, principalmente, un tipo de argumento específico; (ii) describimos, a la luz de las secciones 1.6 y 1.10, las acciones de los grupos de estudiantes en cada video; y (iii) describimos, a la luz de la sección 1.7, las acciones del profesor de cada video. Además, se elaboraron las tablas 2 y 3 de indicadores, donde se presentan las acciones del profesor y de los estudiantes, que permitieron un mejor análisis en relación con esto. Cabe aclarar, en ambas tablas, cada uno de los indicadores tiene consigo un código, el cual será usado en la descripción para referirse a este de una manera más clara, facilitando la lectura.

**Tabla 2** Indicadores acciones del profesor

Acción del Profesor	Indicadores
Seleccionar tareas	La tarea presentada está compuesta por los tres elementos importantes: la situación, la solicitud y las indicaciones (ET).
	La tarea permite un debate entre los estudiantes y entre los estudiantes con el profesor (DEP).
	Las tareas fomentan duda, curiosidad, incertidumbre, perturbación o controversia (FD).
Rebote	Parafrasea las ideas o preguntas de los estudiantes (PI).
	Provee elementos de un argumento (dato, aserción o garantía) para poyar o complementar o refuta las ideas de los estudiantes para reorientar (EA).

Pedir explicación	Pide explicaciones enfocada en explicitación de sustentos de ideas (PE).
	Incentiva al uso adecuado del lenguaje al expresar sus ideas (UL).
Modelar	Emplea construcciones gráficas para apoyar un argumento (ECG).
	Usa el sistema teórico para soportar ideas (UST).
	Usa evidencia empírica para soportar ideas (UE).
	Presenta argumentos completos (AC).
Evaluar las respuestas de los estudiantes	Corrige argumentos de los estudiantes comentando sobre cada uno de sus elementos (CA).
	Advierte qué parte del argumento merece revisión (AR).
Dar valor a las ideas de los estudiantes	Escucha las ideas y preguntas de los estudiantes (EI).
	Realiza preguntas con el fin de hacer un seguimiento de las ideas de los estudiantes (RP).
	Destaca las contribuciones de los estudiantes (DC).

*Nota.* Elaboración propia

**Tabla 3** Indicadores acciones los estudiantes

<b>Acción de los estudiantes</b>	<b>Indicador del proceso de conjeturación</b>
Identificar elementos	Reconocen implícitamente los elementos de la tarea (situación, solicitud o indicaciones) (RE).
Detectar propiedades	Exploran la situación con miras a establecer propiedades invariantes (ES).
	Registran observaciones sobre las propiedades invariantes encontradas (RO).
	Proponen construcciones para determinar las propiedades (PC).
Formular conjeturas	Formulan un enunciado condicional de acuerdo con la situación, solicitud y propiedad abducida o inducida (FE).
Verificar propiedades	Llevan a cabo exploraciones adicionales para comprobar que las propiedades descubiertas se mantienen (ECP).
	Estudian casos límite para verificar el comportamiento de los elementos y confirmar que la invariante se siga cumpliendo (CL).
<b>Acción de los estudiantes</b>	<b>Indicador del proceso de justificación</b>
Seleccionar elementos teóricos o empíricos para sustentar	Identificación de evidencias empíricas o datos que sustentan aserción (o consecuente de la conjetura) (EE).
	Identificación de hechos geométricos (garantías) que relacionan evidencias (datos) con aserción (IHG).
Construir el argumento	Intervención que expone duda o una aserción contraria a otra enunciada (IED).
	Intervención que expone ideas para sustentar afirmaciones (SA).
	Intervención que expone refutaciones (ER).
	Intervención que expone acuerdos (IEA).
Formular el argumento	Precisión y manifestación de dato, garantía o aserción de un argumento (PM).
	Exposición de argumentos simples (EAS).
	Exposición de argumento global que hilvana argumentos simples (EAG).

*Nota.* Elaboración propia.

### 3.4 Fase V: Elaboración del escrito final

Para concluir el trabajo, se redactaron las conclusiones en relación con los objetivos planteados y se incluyeron comentarios personales sobre el proceso de elaboración del

trabajo. Además, se consolidó un documento que detalla todo el trabajo realizado, resaltando su valor educativo y su aplicación práctica en el ámbito docente.

## CAPÍTULO IV. DESCRIPCIÓN DE LOS COMICS

En el siguiente capítulo se presenta una breve descripción de los elementos genéricos que comparten los tres *comics* animados. Después de ello, se realizará una descripción de cada uno de los *comics*, usando sendas tablas que ilustran las acciones de los estudiantes cuando abordan la tarea y las acciones del profesor que apuntan a gestionarla. Los enlaces a estos *comics* animados son los siguientes:

- Argumentación deductiva: <https://youtu.be/H1MLaBX3Vwc>
- Argumentación inductiva: <https://youtu.be/WGjF-aYyrRE>
- Argumentación abductiva: <https://youtu.be/vdvrUWNX1fU>

Las tablas tienen tres columnas en las que se mencionan las acciones generales de los estudiantes o profesor, una descripción particular de la acción y pantallazos asociados a la acción, junto con un intervalo de tiempo relativo al video. Esto se realizó utilizando como base los indicadores de acciones de los estudiantes y profesores expuestos en las Tablas 2 y 3. En las tablas de descripción de las acciones de los estudiantes se presentan los argumentos producidos conforme la actividad que realizaban; para ello, tuvimos en cuenta los referentes expuestos en el marco conceptual.

Luego de describir los *comics*, sugerimos tareas de formación profesional que usan los videos creados. Para estas, describimos sus propósito o intención y algunas sugerencias de gestión.

### 4.1 Caracterización genérica de los *comics*

Los cómics compartieron varios elementos, entre ellos el escenario en el que se desarrollan: un aula de clase con una pizarra y la presencia de estudiantes, como se ilustra en la figura 15.

**Figura 15** Escenario de clase.

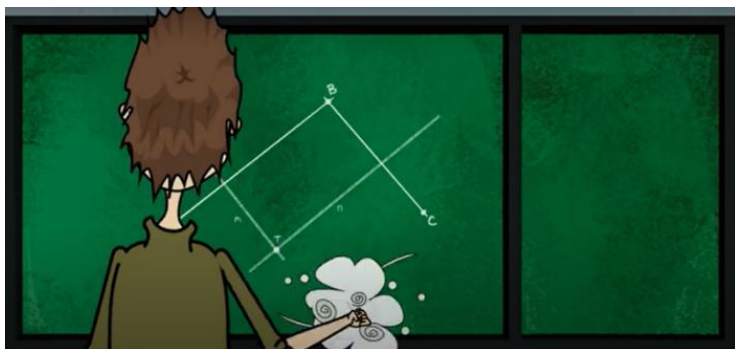


*Nota:* Elementos que se presentaron en los 3 *comics*.

Por su parte, en cada uno de los videos se presenta un grupo conformado por tres estudiantes que realiza un trabajo en equipo; esto con el fin de favorecer la posibilidad de argumentación. Cada estudiante cuenta con su propio asiento. En los videos relativos al argumento inductivo y abductivo, un integrante del grupo de estudiantes protagonistas tiene a su disposición un computador con el fin de usar el *software* GeoGebra.

En los tres videos, al iniciar la clase, el profesor Miguel no solo expone el enunciado de la tarea respectiva verbalmente; también se apoya con una representación gráfica en el tablero (Figura 15). Así, el profesor combina lo verbal con lo visual para que los estudiantes conozcan la tarea. Además, proporciona unas indicaciones que son fundamentales para que los estudiantes sepan qué pueden usar durante la solución de la tarea.

**Figura 16** Representación gráfica por parte del profesor.

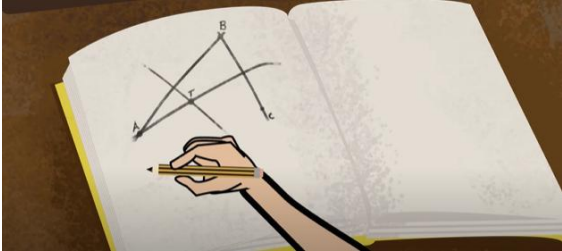




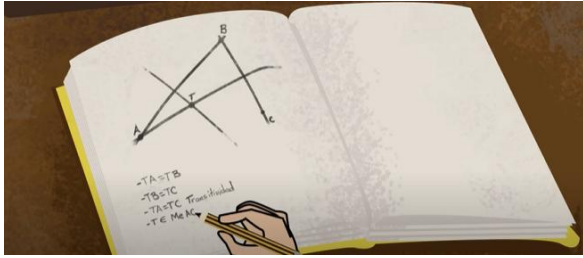
*Nota:* Apoyo visual que presenta el profesor.

## 4.2 Descripción *comic* Argumento deductivo

A continuación, se presentará la descripción del *comic* referente al argumento deductivo.


**Tabla 4** Acción de estudiantes *comic* argumentación deductivo

Acción general de los estudiantes	Descripción particular de la acción	Imagen Asociada
Identificar elementos	<p>Intervalo de tiempo: [01:05 – 01:12]</p> <p>Elaboración de una representación gráfica con base en los elementos detectados de la tarea (RE).</p> <p>Los estudiantes realizan una representación gráfica de la situación de la tarea en su cuaderno. Así, representan tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>, las mediatrices <math>m</math> del <math>\overline{AB}</math> y <math>n</math> del <math>\overline{BC}</math>, y <math>T</math> punto de intersección de las mediatrices.</p>	
Formular conjeturas	<p>Intervalo de tiempo: [00:57 – 01: 02]</p> <p>Los estudiantes empiezan a notar los elementos de uno de los argumentos (FE). En particular, Aleja precisa la aseveración que responde la solicitud: “El punto <math>T</math> debe pertenecer a la mediatriz del <math>\overline{AC}</math>.”</p>	



<p>Seleccionar elementos teóricos o empíricos</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:03 – 01:32]</p> <p>Para comprobar la aserción dicha anteriormente Aleja, Jenn y Brandon abordan la situación utilizando el sistema teórico y los conceptos que habían visto en clase (EE).</p>	
<p>Construir el argumento</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:03 – 01:32]</p> <p>Reconocimiento de los elementos que conforman cada argumento. (IEA)</p> <p>Los estudiantes deducen la propiedad de <math>T</math>, teniendo en cuenta elementos tales como la definición de mediatriz y la propiedad transitiva tal y como se evidencia en el siguiente dialogo:</p> <p><b>Aleja:</b> Como <math>T</math> pertenece a las mediatrices de los <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{BC}</math>, así, <math>T</math> equidista de los segmentos.</p> <p><b>Jenn:</b> ¡Claro! Por la definición de mediatriz. Por lo tanto, <math>TA = TB</math> y <math>TB = TC</math>.</p> <p><b>Brandon:</b> ¡Ah miren! Podemos afirmar que, <math>TA</math> debe ser igual a <math>TC</math>.</p> <p><b>Aleja:</b> Sí, son iguales por transitividad.</p> <p><b>Brandon:</b> Ah, claro, así <math>T</math> pertenece a la mediatriz del <math>\overline{AC}</math>.</p>	



<p>Formulación del argumento</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:48 – 02:29]</p>	
	<p>A la vez que verbalizan el proceso de argumentación, escribe el siguiente argumento global compuesto de tres argumentos simples deductivos (EAG):</p>	
	<p>Argumento 1:  Dato: <math>T \in M_{\overline{AB}}, T \in M_{\overline{BC}}</math>  Aserción: <math>T</math> equidista de <math>\overline{AB}</math>, <math>T</math> equidista de <math>\overline{BC}</math>  Garantía: D. Mediatriz</p>	
	<p>Argumento 2:  Dato: <math>TA = TB, TB = TC</math>  Aserción: <math>TA = TC</math>  Garantía: Prop. Transitiva</p> <p>Argumento 3:  Dato: <math>TA = TC</math>  Aserción: <math>T \in M_{\overline{AC}}</math>  Garantía: D. Mediatriz</p>	


**Tabla 5** Acción del profesor *comic* argumentación deductivo

Acción general del profesor	Descripción particular de la acción	Imagen asociada
<p>Seleccionar tareas.</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:00 – 00:43]</p> <p>La tarea presentada por el profesor es la siguiente:</p> <p>Vamos a considerar tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>, vamos a considerar también dos mediatrices, <math>m</math> del <math>\overline{AB}</math> y <math>n</math> del <math>\overline{BC}</math>, además, un punto <math>T</math> que será la intersección de las mediatrices. Entonces la pregunta es, ¿Qué característica geométrica tiene el punto <math>T</math>? Para esto, quiero que usemos los apuntes y propiedades de los objetos que hemos estudiado previamente.</p> <p>De este enunciado, realiza una representación gráfica y se escribe en el tablero únicamente la solicitud.</p> <p>Los elementos de la tarea son los siguientes (ET):</p> <p><i>Situación:</i> Tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>; dos mediatrices, <math>m</math> del <math>\overline{AB}</math> y <math>n</math> del <math>\overline{BC}</math>; el punto de intersección <math>T</math> de estas mediatrices. Con esto, de alguna forma, la situación refiere a propiedades de las mediatrices de los lados de un triángulo.</p>	

	<p><i>Solicitud:</i> Se pide la característica geométrica que tiene el punto <math>T</math> cuando se mueve el punto <math>B</math>.</p> <p><i>Indicaciones:</i> Se solicita hacer uso de los apuntes y propiedades de objetos que se hayan estudiado previamente.</p> <p>Esta tarea cumple con algunos requisitos para ser de argumentación dado que:</p> <p>Primero, el problema es del tipo búsqueda de consecuente: Se provee una situación y se pregunta por la consecuencia de esta. Despierta incertidumbre al no conocerse la característica que tiene el punto <math>T</math>. Además, requiere una sustentación para dicha característica mediante apuntes y objetos estudiados previamente, de modo que el profesor no espera ver una exploración empírica sino, una producción de deducciones. En otras palabras, la elaboración de uno o más argumentos deductivos.</p>	
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

<p>Dar valor a las ideas de los estudiantes</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:48 – 00:56]</p> <p>Reconocimiento explícito a la idea inicial de los estudiantes. (DC).</p> <p>Los estudiantes se encontraban revisando sus apuntes, y luego de un momento, Jenn menciona sobre una posible relación con las distancias como un camino para dar con la solución [haciendo referencia a la característica geométrica del punto <math>T</math> teniendo en cuenta lo expuesto en la situación]; presenta algo de duda frente a su propia idea. Luego de escuchar esto, el profesor decide por su cuenta intervenir diciendo “Puede que vayan por el camino correcto. Revisen aquello que creen.” En suma, pretende reconocer la idea de los estudiantes, con la expectativa de motivarles a continuar trabajando en torno a esta.</p>	
<p>Dar valor a las ideas de los estudiantes.</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:32 – 01:38]</p> <p>Pregunta si ya ha obtenido una asección que responda a la pregunta (RP).</p> <p>Realiza la pregunta “¿Qué tal van, muchachos?, ¿Han establecido la propiedad del punto <math>T</math>?” para darse una idea respecto al progreso de los estudiantes. Aleja afirma que <math>T</math> pertenece a la mediatriz de <math>\overline{AC}</math>.</p>	


<p>Pedir explicación</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:39 – 01:47]</p> <p>Para saber las razones que los llevó a esa aserción, el profesor decide preguntar “¿Por qué dicen eso? Veo que tienen algo anotado allí”. Así, tiene la expectativa de que los estudiantes le presentan lo que han encontrado y los sustentos para ello. (PE).</p>	 <p>Ah y por qué dicen eso ve que tienen allí algo</p>
<p>Evaluar la respuesta de los estudiantes</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:48 – 02:20]</p> <p>Sugiere la complementación de un argumento, luego de evaluarlo, sugiriendo partes de este (AR).</p> <p>Cuando los estudiantes le presentan al profesor aquello que hicieron, él decide resaltar la falta de una parte del argumento (una garantía), a la espera de que los estudiantes consigan ver aquello faltante. El siguiente fragmento ilustra lo respectivo.</p> <p><b>Profesor:</b> Ya veo, pero hace falta la primera parte del argumento.</p> <p><b>Aleja:</b> ¿Cómo así profe?</p> <p><b>Profesor:</b> Dicen que <math>TA = TB</math> y <math>TB = TC</math>, pero ¿Por qué pasa eso?</p> <p><b>Brandon:</b> Ah si profe, nos falta eso, pero es por la definición de mediatriz y de equidistancia.</p>	 <p>AC ya veo pero hace falta la primera parte del</p>

	<p>Efectivamente, la acción del profesor tiene réditos y los estudiantes dicen la garantía relativa a la aserción <math>TA = TB</math> y <math>TB = TC</math>, tendiendo como dato que <math>T \in M_{\overline{AB}}</math> y <math>T \in M_{\overline{BC}}</math> (ver argumento 1 de la tabla anterior).</p>	
<p>Dar valor a las ideas de los estudiantes</p>	<p>Intervalo de tiempo: [02:21 – 02:29]</p> <p>Escucha las ideas de los estudiantes y realiza preguntas con el fin de obtener una sustentación (EI).</p> <p>Los estudiantes tenían casi en su totalidad el argumento, pero les hacía falta una garantía. Jenn, la expone y el profesor de manera explícita da aprobación a esta respuesta dada:</p> <p><b>Profesor:</b> ¿Y por qué garantizan que <math>T</math> pertenece a la mediatriz de <math>\overline{AC}</math>?</p> <p><b>Jenn:</b> Por la Definición de mediatriz, profe.</p> <p><b>Profesor:</b> Bien muchachos.</p>	

### 4.3 Descripción *comic* Argumento inductivo

A continuación, se presentará el análisis y la descripción del *comic* referente al argumento inductivo.

**Tabla 6** Acciones de estudiantes cómic argumentación inductivo

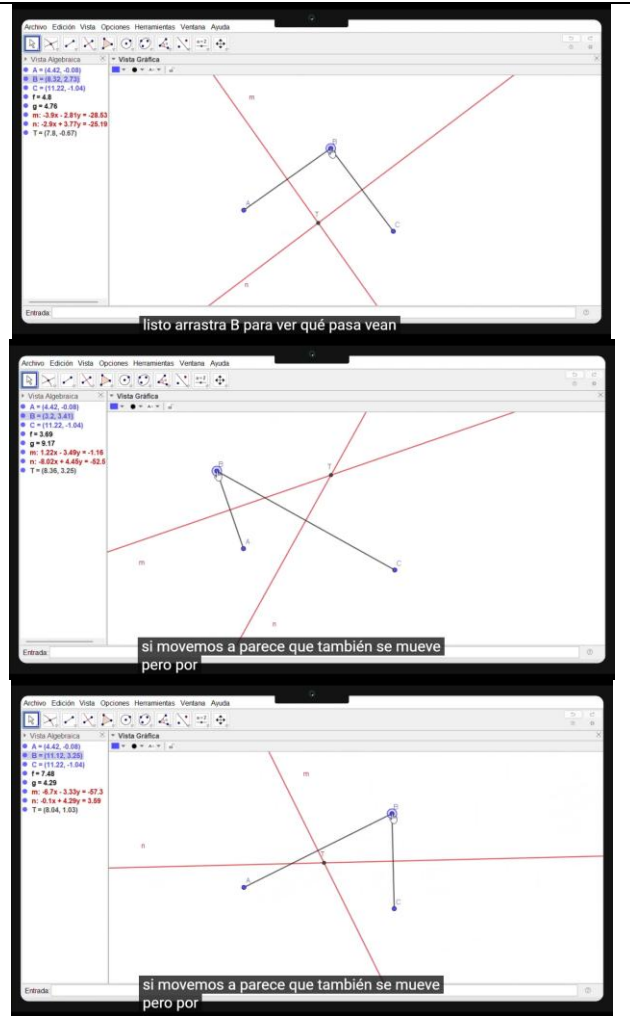
Acción general de los estudiantes	Descripción particular de la acción	Imagen Asociada
Detectar propiedades	<p>Intervalo de tiempo: [00:52 – 01:40]</p> <p>Uso del <i>software</i> para realizar la construcción de la situación con el fin de buscar propiedades (ES).</p> <p>Los estudiantes usan GeoGebra para representar tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>, las mediatrices <math>m</math> del <math>\overline{AB}</math> y <math>n</math> del <math>\overline{BC}</math>, y <math>T</math> punto de intersección de estas.</p>	 <p>mediatriz ahora el punto t que sería la intersección entre las mediatrices</p>

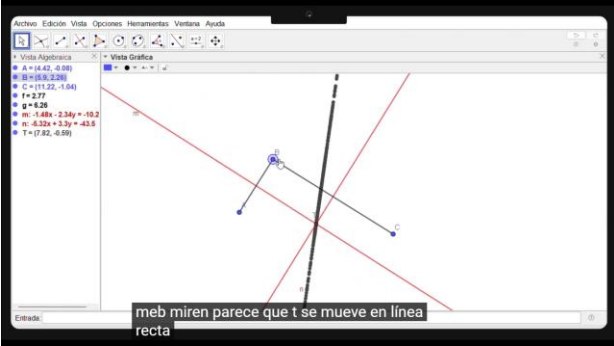
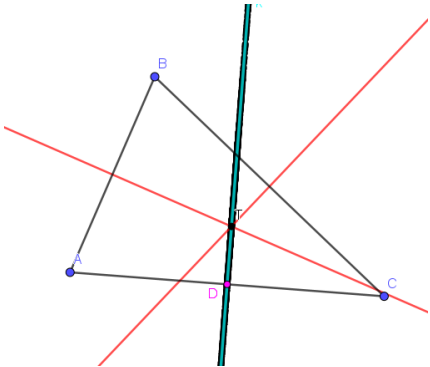
Detectar propiedades

Intervalo de tiempo: [01:40 – 01:50]

Detección de propiedades invariantes mediante el uso del software (RO).

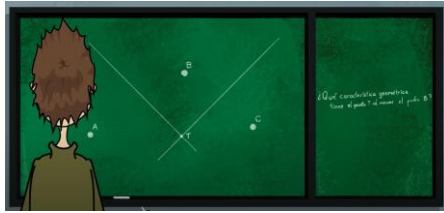
Teniendo en cuenta la solicitud de la tarea, los estudiantes estudian diversos casos a partir de considerar diferentes posiciones de  $B$  en el plano, a partir del arrastre de ese punto, en búsqueda de un invariante. Sofía, como primera observación, destaca el movimiento del punto  $T$  conforme el movimiento de  $B$ , pero no consiguen identificar una propiedad geométrica para  $T$ .





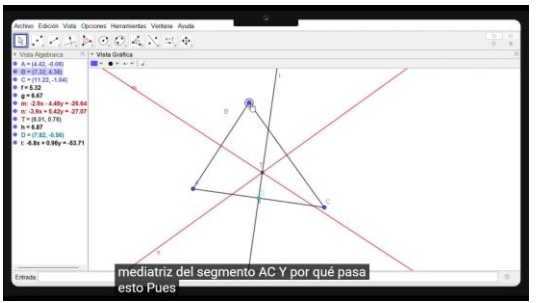
<p>Verificar propiedades</p>	<p>Intervalo de tiempo: [02:11 – 02:25]</p> <p>Usan la herramienta rastro en el punto <math>T</math>, tal como recomendó el profesor, para establecer la propiedad geométrica de ese punto, a partir del arrastre del punto <math>B</math>. Esto es, a partir del estudio de varios casos (varias posiciones) relativos al punto <math>B</math>. Se percatan que al mover el punto <math>B</math>, <math>T</math> genera el rastro de una recta. Esto es, notan que <math>T</math> pertenece a una recta (ECP).</p>	
<p>Verificar propiedades invariantes.</p>	<p>Intervalo de tiempo: [02:27 – 03:23]</p> <p>Realizan un estudio de los casos límites para verificar si la invariante que encontraron previamente se sigue manteniendo (CL).</p> <p>Al notar que <math>T</math> pertenecía a una recta, Diego sugirió revisar la perpendicularidad de la recta que contiene a <math>T</math> respecto a <math>\overline{AC}</math>, por lo que Danna realiza la construcción, confirmando la perpendicularidad de dicha recta. Además, Sofía resalta que esa recta también pasa por el punto medio de <math>\overline{AC}</math>, por lo que se realiza la construcción del punto medio de dicho segmento y posteriormente una perpendicular por este punto. Danna, al finalizar la construcción hace notar que dichas rectas coinciden (la determinada bajo el arrastre y la construida por Danna).</p>	


<p>Construcción del argumento</p>	<p>Intervalo de tiempo: [03:24 – 04:01]</p> <p>Ante la pregunta del profesor ¿Por qué pasa eso [Frente a lo dicho anteriormente por los estudiantes: “Profe, al parecer <math>T</math> pertenece a la mediatriz de <math>\overline{AC}</math>”]? Danna dice (SA):</p> <p>Pues mira profe... nosotros tomamos varias posiciones para el punto <math>B</math> cuando lo movimos... lo arrastramos y nos dimos cuenta de que para esas posiciones el punto <math>T</math> siempre pertenece a la mediatriz... usamos el arrastre como usted nos dijo para darnos cuenta de eso. Por lo tanto, dijimos que para cualquier punto <math>B</math> el punto <math>T</math> correspondiente pertenece a la mediatriz del <math>\overline{AC}</math>.</p> <p>De lo dicho por Danna, reconocemos los siguientes elementos del argumento:</p> <p><i>Dato:</i> <math>A, B, C</math> no colineales con <math>A</math> y <math>C</math> fijos, <math>m</math> mediatriz de <math>\overline{AB}</math>, <math>n</math> mediatriz de <math>\overline{BC}</math>, <math>l</math> mediatriz de <math>\overline{AC}</math> <math>m \cap n = T</math>, Para algunas posiciones de <math>B</math> el punto <math>T</math> pertenece a la mediatriz de <math>\overline{AC}</math></p> <p><i>Aserción:</i> Para cualquier punto <math>B</math> el punto <math>T</math> correspondiente pertenece a la mediatriz del <math>\overline{AC}</math></p> <p><i>Garantía:</i> Para todos los puntos <math>A, B, C</math> no colineales con <math>m</math> mediatriz de <math>\overline{AB}</math>, <math>n</math> mediatriz de <math>\overline{BC}</math> y <math>m \cap n = T</math> se cumple que <math>T</math> pertenece a la mediatriz del <math>\overline{AC}</math>.</p>	
-------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

**Tabla 7** Acciones del profesor *comic* argumentación inductivo

Acción general del profesor	Descripción particular de la acción	Imagen asociada
<p>Seleccionar tareas</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:00 – 00:38]</p> <p>Propone una tarea de argumentación cuyo enunciado es:</p> <p>Vamos a considerar tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>, vamos a considerar también dos mediatrices, <math>m</math> del <math>\overline{AB}</math> y <math>n</math> del <math>\overline{BC}</math>, además, un punto <math>T</math> que será la intersección de las mediatrices. Entonces la pregunta es, ¿Qué característica geométrica tiene el punto <math>T</math>, al mover el punto <math>B</math>?</p> <p>El profesor, además, realiza en el tablero una representación gráfica de los tres puntos no colineales y las mediatrices de los <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{BC}</math> y escribe la pregunta que concreta solicitud de la tarea.</p> <p>En el enunciado de la tarea, es posible reconocer los siguientes elementos:</p> <p><i>Situación:</i> Tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>; dos mediatrices, <math>m</math> del <math>\overline{AB}</math> y <math>n</math> del <math>\overline{BC}</math>; el punto de intersección <math>T</math> de estas mediatrices. Con esto, de alguna forma, la situación refiere a propiedades de las mediatrices de los lados de un triángulo.</p> <p><i>Solicitud:</i> Se pide la característica geométrica que tiene el punto <math>T</math> al mover el punto <math>B</math>.</p> <p><i>Indicaciones:</i> El enunciado no especifica alguna indicación. Sin embargo, esta surge cuando en las interacciones uno de los estudiantes le pregunta al profesor sobre el uso de GeoGebra para representar la situación y este afirma y destaca el interés en</p>	

	<p>el que los estudiantes den uso del software. Además, en este mismo momento les aclara que desea que más allá de encontrar la característica, deberán sustentar sus hallazgos.</p> <p>Esta tarea cumple con algunos requisitos para ser de argumentación dado que:</p> <p>El problema es del tipo búsqueda de consecuente: Se provee una situación y se pregunta por la consecuencia de esta. Despierta incertidumbre al no conocerse la característica que tiene el punto <math>T</math> al mover el punto <math>B</math>. Además, requiere una sustentación para dicha característica que, para este caso, podría dar pie a usar evidencia empírica y descubrimiento de invariantes que se evidencian en una exploración de GeoGebra. En ese sentido, la tarea podría suscitar un argumento inductivo debido a que incentiva la búsqueda de un consecuente siendo en este caso, la aserción del potencial argumento.</p>	
<p>Modelar</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:56 – 02:07]</p> <p>Retroalimentación (ECG)</p> <p>Al observar la primera exploración hecha por el grupo en GeoGebra y percatarse que no logran establecer un invariante, el profesor decide, de manera autónoma, hacerles una sugerencia. En este caso, les sugiere utilizar la herramienta rastro de GeoGebra.</p>	


<p>Pedir una explicación</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:50 – 01:55]</p> <p>Pregunta por el progreso de los estudiantes (PE)</p> <p>Realiza preguntas como “¿Qué tal van, muchachos, tienen avances o alguna idea de una posible solución?” para conocer la producción de los estudiantes al abordar la tarea. Hace la pregunta justo cuando los estudiantes realizan la debida exploración en el <i>software</i>, en el que exponen unas ideas frente a la posible solución.</p>	
<p>Pedir una explicación</p>	<p>Intervalo de tiempo: [03:20 – 03:32]</p> <p>Solicita justificación (PE)</p> <p>Justo después de que los estudiantes le cuentan sus resultados, concretamente que <math>T</math> pertenece a la mediatriz del <math>\overline{AC}</math>, el profesor pregunta ¿Y por qué pasa eso? en busca de que los estudiantes produzcan razones para sustentar la aceptabilidad de ese resultado.</p>	



<p>Rebote</p>	<p>Intervalo de tiempo: [04:01 – 04:20]</p> <p>Parafrasea para verificar si ha capturado el argumento producido por los estudiantes. (PI)</p> <p>Cuando el profesor les dice “O sea que ustedes lo que hicieron fue explorar diferentes casos del punto <math>B</math> para ver qué pasaba con el punto <math>T</math>, y con base en eso concluyeron que para cualquier posición del punto <math>B</math> el punto <math>T</math> pertenece a la mediatriz de [de segmento] <math>AC</math>, ¿Verdad?” pretende verificar si ha capturado el argumento de los estudiantes, en este caso, la evidencia empírica (dato) que permite concluir la característica del punto <math>T</math> (aserción).</p>	
---------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

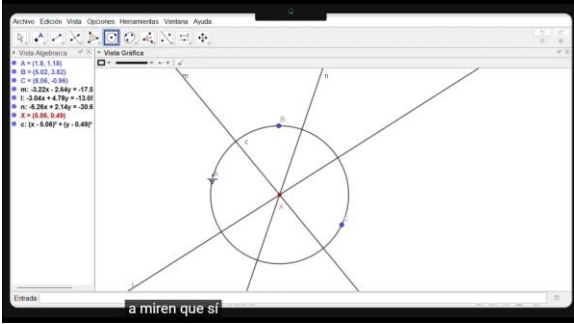
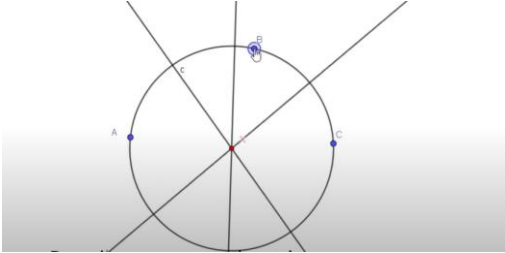
#### 4.4 Descripción *comic* Argumento abductivo

A continuación, se presentará la descripción del *comic* referente al argumento abductivo.

**Tabla 8** Acciones de estudiantes *comic* argumentación abductivo

Acción general de los estudiantes	Descripción particular de la acción	Imagen Asociada
<p>Identificar elementos</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:28 – 00:57]</p> <p>Los estudiantes para empezar a tener ideas con el fin de abordar la tarea revisan la tarea y tienen en cuenta los elementos de esta. Dándoles pie a un posible camino que los lleve a la solución. (RE)</p>	

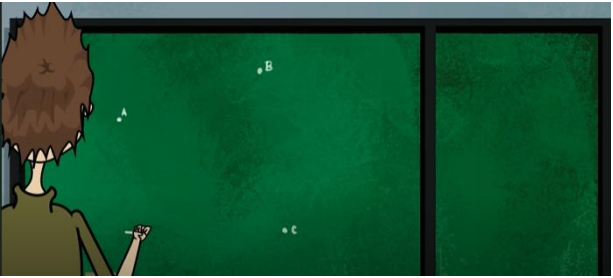
<p>Formular conjeturas</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:32 – 00:42]</p> <p>Los estudiantes deciden empezar a trabajar teniendo en cuenta que deben hallar un punto que es equidistante de <math>A</math>, <math>B</math>, y <math>C</math>. Puesto que esta es la primera conjetura dicha por Aleja: “Para que el punto <math>X</math> sea centro de la circunferencia... mmm <math>X</math> debería equidistar de los puntos <math>A</math>, <math>B</math> y <math>C</math>.” (FE).</p>	
<p>Seleccionar elementos teóricos o empíricos para sustentar</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:48 – 00:57]</p> <p>Dada la primera conjetura, los estudiantes deciden buscar elementos teóricos que les sirvan de dato para dar con una posible solución. En sus apuntes, Brandon encuentra una relación entre la equidistancia de los puntos y las mediatrices. “Ah! Yo estaba buscando aquí [mira el cuaderno] y para tener equidistancia, deberíamos tener mediatrices... bueno ese es un camino.” (EE).</p>	


<p>Detectar propiedades</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:36 – 01:57]</p> <p>Construcción de objetos para realizar una exploración que les permita corroborar su conjetura inicial y establecer propiedades invariantes (ES).</p> <p>De acuerdo con las ideas que tuvieron respecto a la equidistancia y las mediatrices, los estudiantes deciden realizar una representación gráfica en GeoGebra de los tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>, las respectivas mediatrices de <math>\overline{AB}</math>, <math>\overline{BC}</math> y <math>\overline{AC}</math> y el punto <math>X</math> que es la intersección de estas. Con esta representación gráfica los estudiantes realizan una exploración y deciden utilizar la herramienta de GeoGebra llamada “circunferencia centro punto”, con la que es posible hacer una circunferencia dado un centro y un segundo punto para el radio; usan esa herramienta con los puntos, <math>X</math> y <math>A</math>, respectivamente. Al hacer esta acción, ellos descubren que <math>B</math> y <math>C</math> también pertenecen a la circunferencia con centro en <math>X</math> y radio <math>XA</math>.</p>	
<p>Verificar propiedades</p>	<p>Intervalo de tiempo: [02:02 – 02:21]</p> <p>Realizaron exploraciones para comprobar si las propiedades descubiertas se mantienen, por lo tanto, con base en el descubrimiento que realizaron los estudiantes, usan varias posiciones de los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math> para verificar que, en cualquier posición de estos</p>	



	<p>puntos, el punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia que los contiene (CL).</p>	
<p>Construir el argumento</p>	<p>Intervalo de tiempo: [02:02 – 03:02]</p> <p>Los estudiantes le sustentan al profesor su abordaje como se puede ver en el siguiente dialogo (IEA):</p> <p><b>Profesor:</b> ¿Han encontrado algo?</p> <p><b>Aleja:</b> Sí, profe.</p> <p><b>Profesor:</b> A ver, muéstrenme.</p> <p><b>Brandon:</b> Este <math>X</math> es en el centro de la circunferencia [señala la pantalla] porque ese <math>X</math> debería equidistar de los tres puntos <math>[A, B \text{ y } C]</math>.</p> <p><b>Profesor:</b> ¿Tienen alguna razón para garantizar eso?</p> <p><b>Brandon:</b> Pues buscamos en el cuaderno y para que eso pase ese <math>X</math> debe ser la intersección de las mediatrices.</p> <p><b>Aleja:</b> Sí, de las mediatrices de los <math>\overline{AB}</math>, <math>\overline{BC}</math> y <math>\overline{AC}</math>.</p> <p><b>Jenn:</b> Entonces, verificamos eso en software... hicimos las mediatrices y marcamos el punto <math>X</math> de intersección y la circunferencia de centro <math>X</math> y radio <math>XA</math> y vimos que este contiene a los otros puntos. Y nos funcionó.”</p> <p><b>Profesor:</b> Ah entonces, lo que ustedes hicieron fue: Dado el punto <math>X</math> que debe ser el centro de la circunferencia, se preguntaron por datos que les permitiera establecer una conclusión frente a ese punto, ¿verdad?</p>	<p>The top flowchart consists of a rounded rectangle on the left containing the text: "A, B, C no colineales", "X equidista de los puntos A, B, C". A vertical line descends from this box to an octagonal box containing: "Si X equidista de los puntos A, B y C entonces X es el centro de la circunferencia que contiene los puntos A, B y C". A horizontal line branches from the vertical line to the right, with "Por lo tanto" above it and "Puesto que" below it. This horizontal line leads to a rectangular box containing: "X es centro de la circunferencia que contiene a los puntos A, B y C".</p> <p>The bottom flowchart consists of a rounded rectangle on the left containing the text: "A, B, C no colineales", "m = M_{\overline{AB}}", "n = M_{\overline{BC}}", "l = M_{\overline{AC}}", "X intersección de las mediatrices". A vertical line descends from this box to an octagonal box containing: "Si X es el punto de intersección de las mediatrices m, n y l, entonces X equidista de los puntos A, B y C". A horizontal line branches from the vertical line to the right, with "Por lo tanto" above it and "Puesto que" below it. This horizontal line leads to a rectangular box containing: "X equidista de los puntos A, B y C".</p>

	<p><b>Aleja:</b> Sí, profe.</p> <p><b>Profesor:</b> ¿Y Cuál fue el dato que encontraron?</p> <p><b>Brandon:</b> Que ese punto <math>X</math> es la intersección de las mediatrices de los <math>\overline{AB}</math>, <math>\overline{BC}</math> y <math>\overline{AC}</math>.</p> <p>Con base en este dialogo, es posible explicitar los siguientes argumentos abductivos de acuerdo con sus elementos respectivos:</p> <p>Argumento 1:</p> <p><i>Dato:</i> <math>A, B, C</math> no colineales, <math>X</math> equidista de los puntos <math>A, B, C</math></p> <p><i>Aserción:</i> <math>X</math> es centro de la circunferencia que contiene a los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math></p> <p><i>Garantía:</i> Si <math>X</math> equidista de los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math> entonces <math>X</math> es el centro de la circunferencia que contiene los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math></p> <p>Argumento 2:</p> <p><i>Datos:</i> <math>m = M_{\overline{AB}}</math>, <math>n = M_{\overline{BC}}</math>, <math>l = M_{\overline{AC}}</math>, <math>X</math> intersección de las mediatrices</p> <p><i>Aserción:</i> <math>X</math> equidista de los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math></p> <p><i>Garantía:</i> Si <math>X</math> es el punto de intersección de las mediatrices <math>m, n</math> y <math>l</math>, entonces <math>X</math> equidista de los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math></p>	
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

**Tabla 9** Acciones del profesor *comic* argumentación abductivo

Acción general del profesor	Descripción particular de la acción	Imagen asociada
<p>Seleccionar tarea</p>	<p>Intervalo de tiempo: [00:00 – 00:25]</p> <p>El profesor presenta el siguiente enunciado de tarea de manera verbal:</p> <p style="padding-left: 40px;">Dados tres puntos no colineales <math>A, B</math> y <math>C</math>, ¿qué condición debe tener un punto para que sea el centro de la circunferencia que los contiene? ¿Cómo aseguran que su respuesta es acertada? Pueden usar sus apuntes o usar GeoGebra.</p> <p>De este enunciado, el profesor dibuja únicamente los tres puntos no colineales en el tablero.</p> <p>En la tarea es posible identificar los siguientes elementos (ET):</p> <p><i>Situación:</i> En esta, se presenta tres puntos no colineales: <math>A, B</math> y <math>C</math>.</p> <p><i>Solicitud:</i> Se solicita encontrar un punto que sea centro de la circunferencia que contiene a los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math>.</p> <p><i>Indicaciones:</i> Se pide la búsqueda en los apuntes de elementos teóricos previos que</p>	

	<p>puedan ayudar a dar solución. Además, usar GeoGebra para explorar o verificar hallazgos.</p> <p>Esta tarea cumple con las características para ser una tarea de argumentación dado que:</p> <p>Genera incertidumbre al no contar con mucha información en la situación. Por lo que permite a los estudiantes inferir datos mediante el uso de evidencia empírica o teórica y una respectiva verificación mediante GeoGebra. Con ello, es posible crear una serie de argumentos abductivos.</p>	
<p>Dar valor a las ideas de los estudiantes</p>	<p>Intervalo de tiempo: [01:58 – 02:05]</p> <p>El profesor les pregunta “¿Han encontrado algo?” luego de que los estudiantes han hecho una consulta en sus apuntes y una construcción en GeoGebra. Además, pide mostrar lo que han realizado en GeoGebra con el fin de conocer sus avances y hacer un seguimiento a las ideas de los estudiantes en cuanto a una posible solución (RP).</p>	

<p>Pedir explicación</p>	<p>Intervalo de tiempo: [02:22 – 03:02]</p> <p>Después que el profesor observó y escucho los avances que los estudiantes presentaron, les pregunta “¿Tienen alguna razón para garantizar eso?” [Frente a la idea que <math>X</math> es el centro de la circunferencia] con esta pregunta el profesor les pide la garantía que corrobora lo presentado por los estudiantes (PE).</p>	 <p>AC Entonces verificamos eso en el softw hicimos las mediatrices y marcamos</p>
<p>Rebote</p>	<p>Intervalo de tiempo: [03:03 – 03:16]</p> <p>El profesor les dice “Ah entonces, lo que ustedes hicieron fue: Dado el punto <math>X</math> siendo el centro de la circunferencia, se preguntaron por datos que les permitieran establecer una conclusión frente a ese punto ¿Verdad?” suscitando lo expresando por los estudiantes para comentar, si lo que él entendió es aquello que deseaban expresar (PI).</p>	 <p>dado el punto x siendo el centro de la circunferencia se preguntaron</p>

#### 4.5 Tareas de formación profesional

A continuación, se presentarán algunas tareas de formación profesional que pretenden ilustrar qué cuestionar en los *comics* diseñados, para sacar un provecho aceptable de estos en relación con la actividad argumental de los estudiantes presente en los videos y con la gestión del profesor al respecto de esa actividad. Usamos como base la propuesta de tareas que proponen Pino-Fan y Godino (2015).

*Tarea 1:* ¿Cuál es la expectativa de aprendizaje que podría estar relacionada con la tarea presente en cada uno de los cómics? Diga las partes del cómic que le permiten sustentar sus planteamientos y produce las explicaciones correspondientes.

*Comentarios de la tarea 1.* Precisamos, enseguida, la expectativa de cada tarea presente en cada comic:

*Comic 1:* El profesor plantea un problema de tipo *búsqueda de consecuente*; en él se dan tres puntos no colineales ( $A, B, C$ ) y las mediatrices de dos segmentos determinados por tales puntos, de forma tal que tales mediatrices se intersequen; se pregunta por la propiedad de ese punto de intersección. El hecho de que el profesor indique que se pueden usar los apuntes y propiedades de los objetos que se han estudiado previamente, implica que la expectativa de aprendizaje apunta a la producción de argumentos deductivos que respalden el hecho de que ese punto de intersección está en la mediatriz del tercer segmento.

La interacción que se puede observar entre los estudiantes se condice con tal expectativa pues producen argumentos deductivos que permiten sustentar esa aserción (ver la tabla 4 relativa al análisis del *comic*).

*Comic 2:* Aun cuando la situación de la tarea de este *comic* es la misma presente en la del *comic 1* (así las cosas, es del tipo *búsqueda de consecuente*), la solicitud y las indicaciones cambian sustancialmente, hecho que lleva a que la expectativa de aprendizaje también se modifique. Aun cuando el profesor espera sustentos de los resultados que establezcan los estudiantes, la solicitud del problema advierte movimiento (qué sucede con  $T$  cuando se mueve  $B$ ) e indica que se puede hacer uso de GeoGebra. Esto permite inferir que el profesor busca que los estudiantes exploren la situación con miras a la formulación de una conjetura y a sustentos que no necesariamente sean basados en propiedades previas, sino en evidencias empíricas producto de la exploración. En suma, la expectativa de aprendizaje puede estar más cercana a la producción de argumentos inductivos que apoyen la aceptabilidad de la conjetura, que a la producción de un argumento deductivo que valide esa conjetura. Esto último podría ocurrir, pero no está suscitado por las indicaciones o solicitudes de la tarea.

En ese marco, se espera que los estudiantes identifiquen patrones y regularidades geométricas al observar el comportamiento del punto de intersección de las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales. Usando herramientas dinámicas como

GeoGebra, los estudiantes deben generalizar que el punto de intersección de esas mediatrices también pertenece a la mediatriz del tercer segmento; de manera implícita, que ese punto es el de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El cómic muestra una actividad de los estudiantes que se condice con esa expectativa. Así, ellos interactúan con el software GeoGebra, manipulando dinámicamente el punto  $B$  mientras observan que el punto  $T$  (intersección de dos mediatrices) pertenece a la tercera mediatriz (la del  $\overline{AC}$ ). La interacción se centra en descubrir que, cualquiera sea la posición del punto  $B$ , el punto  $T$  siempre mantiene esa propiedad. El argumento que sustenta la aceptabilidad de esa aserción es inductivo, ya que los estudiantes no demuestran formalmente la propiedad, sino que generalizan una regularidad basada en múltiples casos observados.

*Comic 3:* A diferencia de los casos anteriores, la estructura de su enunciado cambia sustancialmente. Aun cuando se parte de tres puntos no colineales, lo que se quiere es determinar las condiciones que debe tener un punto para que este sea el centro de una circunferencia que contenga a dichos puntos. Así las cosas, esta tarea es del tipo *búsqueda de antecedente*. Se espera que los estudiantes puedan formular condiciones para establecer el centro de tal circunferencia. Así las cosas, la tarea se apunta a la producción de argumentos abductivos.

De hecho, en el video, los estudiantes formulan la hipótesis de que el punto buscado debe ser la intersección de las mediatrices de lados del triángulo que los tres puntos dados determinan. A partir de esta conjetura, utilizan herramientas del software GeoGebra para verificar que el punto determinado de esa forma equidista de los puntos dados, lo que hace que su respuesta sea aceptable. Es posible evidenciar que generan un argumento abductivo, ya que los estudiantes proponen una hipótesis inicial (dato inferido) que se puede usar como evidencia de la aserción buscada (el punto es centro de la circunferencia que contiene a los puntos dados).

Dependiendo de las respuestas dadas a la pregunta anterior, puede suceder que los estudiantes para profesor no refieran a que las tareas apuntan a que los estudiantes produzcan argumentos o que aun, cuando refieran ello (implícita o explícitamente), no indiquen los tipos de argumentos asociados. En ese caso, se podría proponer la siguiente pregunta:

*Tarea 2:* ¿Considera que las tareas podrían suscitar la producción de argumentos? ¿En qué basas tu respuesta?

Como se mostró antes, la descripción previa deja ver los tipos de argumentos que cada tarea puede suscitar principalmente y las razones que los podría producir. En suma, la primera tarea, argumentos deductivos; la segunda, uno inductivo; la tercera, abductivos. Se esperaría que los profesores adviertan cómo la estructura del enunciado, sus indicaciones y sus solicitudes favorecen la producción de argumentos. La tabla 10 sintetiza esa asociación ya explicada en el comentario a la Tarea 1:

**Tabla 10** Tareas que suscitan la producción de argumentos.

Situación	Solicitud	Estructura del enunciado	Indicación	Tipo de argumento
Vamos a considerar tres puntos no colineales $A, B$ y $C$ , vamos a considerar también dos mediatrices, $m$ del $\overline{AB}$ y $n$ del $\overline{BC}$ , además, un punto $T$ que será la intersección de las mediatrices.	¿Qué característica geométrica tiene el punto $T$ ? ¿Por qué?	Búsqueda de consecuente	Para esto, quiero que usemos los apuntes y propiedades de los objetos que hemos estudiado previamente.	Deductivo
	¿Qué característica geométrica tiene el punto $T$ , al mover el punto $B$ ? Sustente la aceptabilidad de sus hallazgos.		Pueden usar GeoGebra.	Inductivo
Dados tres puntos no colineales $A, B$ y $C$ en una circunferencia.	¿Qué condición debe tener un punto para que sea el centro de la circunferencia que los contiene? ¿Cómo aseguran que su respuesta es acertada?	Búsqueda de antecedente	Pueden usar sus apuntes o GeoGebra.	Abductivo

Si dentro de las razones que aducen los profesores en formación para sustentar sus respuestas, no se ejemplifican posibles argumentos que las tareas de los *comics*, se sugiere proponer la siguiente tarea de formación profesional:

*Tarea 2.1:* Con base en las acciones llevadas a cabo por cada grupo de trabajo en cada cómic, ¿identifica la producción de algún argumento en dichas acciones? Si la respuesta es afirmativa, enuncie el argumento o los argumentos que identifica, mencione el propósito de ese(os) argumento(s) y diga por qué considera que lo reportado como argumento efectivamente lo es.

Se esperaría que los estudiantes para profesor aludan a algunos de los argumentos que se expusieron en las tablas 4, 6 y 8, en las que respectivamente se exponen argumentos deductivos, uno inductivo y abductivos. Si los estudiantes para profesor no aluden a esos argumentos o no los identifican, se les podría indicar parte de los cómics donde hay alguno de los argumentos mencionados y orientarlos para que identifiquen datos, aserción o garantía de estos, hasta reconstruirlos.

Si dentro de las razones que aducen los profesores en formación para sustentar sus respuestas a la tarea 2, ellos no identifican cómo la estructura del enunciado o cómo la manera de enunciar la solicitud o la indicación favorecen ciertos tipos de argumentos, la siguiente tarea podría tener sentido. Con ella se apunta a que los profesores en formación piensen cómo, modificando los enunciados (estructura, solicitud o indicación) se promueva argumentos diferentes.

*Tarea 2.2:* ¿Qué ajustes haría a los enunciados de las tareas de los cómics 1 y 2, para que la expectativa de aprendizaje se centre en la argumentación inductiva y en la argumentación deductiva, respectivamente? ¿En qué basas tus respuestas? ¿Podrías hacer un ajuste al enunciado de la tarea del cómic 3 para que esta suscite la producción de un argumento inductivo? Explica tu respuesta.

Se esperaría que los estudiantes digan que la tarea del comic 1 se parezca a la del cómic 2 y viceversa. De hecho, podría pasar que los estudiantes digan que para que la tarea del comic 1 favorezca argumentos deductivos se modifique por algo como:

Dados tres puntos no colineales  $A, B$  y  $C$ , y las mediatrices de los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , demuestre que  $T$  el punto de intersección de estas mediatrices es equidistante de los vértices del triángulo. Utilicen teoremas geométricos sobre las mediatrices para elaborar su argumento.

Esto es, que recurran a enunciados que son familiares para ellos en relación con la producción de demostraciones.

Más interesante podría ser abordar posibles modificaciones a la tarea del cómic 3 para que, en lugar de producir argumentos abductivos, se produzca un inductivo. En este caso, más que cambiar las solicitudes o indicaciones (como sucedería para las tareas del comic 1 y 2), habría que cambiar la estructura del enunciado. Así este se podría modificar como sigue:

Sean tres puntos  $A, B$  y  $C$  que pertenecen a una circunferencia. ¿Qué característica geométrica tiene su centro  $T$  con relación a los lados del triángulo  $ABC$ ? Explore en GeoGebra y formule una conjetura. Diga en qué se basa para decir que esa conjetura es cierta.

Este enunciado es del tipo *búsqueda de consecuente*. Además, sugiere el uso de GeoGebra para explorar, lo que implicaría que el hecho que encierra la situación del problema no es conocido por los estudiantes. Así, ellos deben explorar varios casos de ternas de puntos en la circunferencia hasta “descubrir” que el centro de la circunferencia, para esos casos, se corresponde con el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados del triángulo respectivo. En consecuencia, generalizar que ello pasa para “toda” terna puntos contenida en la circunferencia. Esto es la base de un argumento inductivo.

Con las tareas previas, se apuntaba a estudiar los enunciados de las tareas (su estructura, sus solicitudes, sus indicaciones, la actividad que podría suscitar) para decantar cómo estos podrían favorecer ciertos tipos de argumentos. La tarea siguiente apunta a que se genere reflexiones sobre cómo ciertas acciones del profesor suscitan o podrían suscitar la producción de argumentos.

*Tarea 3:* ¿Cuáles acciones concretas lleva a cabo el profesor para suscitar la producción de argumentos por parte de los estudiantes? Si usted fuera el profesor Miguel, ¿consideraría realizar otras acciones para promover en ellos la producción de argumentos? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles serían esas acciones?

El profesor Miguel realiza varias acciones concretas para suscitar la producción de argumentos entre los estudiantes, tales como diseñar tareas con situaciones problemáticas que generan inquietud (no hay una respuesta sugerida); en todas ellas solicita directamente sustento a los resultados establecidos (usa requerimientos como: sustente la aceptabilidad de sus hallazgos –comic 1– o ¿cómo aseguran que su respuesta es acertada? –comic 2–). Así mismo, promueve la colaboración sugiriendo trabajar en grupos, valora las ideas de los estudiantes mediante preguntas de seguimiento y solicita justificaciones basadas en propiedades matemáticas (para conocer argumentos deductivos o abductivos –comic 1 y 3–) o evidencias empíricas (para conocer argumentos inductivos o abductivos –comic 2 y 3–). Además, orienta la resolución de problemas sin resolverlos directamente, indicando herramientas del software que permiten determinar una aserción (comic 2). Por otro lado, incorpora la técnica de "rebote" para clarificar y profundizar las ideas de los estudiantes o para ayudar a completar argumentos (comic 1). Vale resaltar una acción clave del profesor, la cual tiene que ver con las indicaciones que da, en relación con las expectativas de aprendizaje que este podría tener en mente. En ese marco, tanto la pareja *solicitud-indicación del recurso a emplear* es clave para suscitar ciertos argumentos (ver comentario a la Tarea 1 de formación profesional).

La siguiente tarea podría ser una pregunta subsidiaria de la anterior, que ayudaría a explicitar esta acción que favorece la producción de argumentos, principalmente inductivos o abductivos:

*Tarea 3.1:* (a) En dos de los videos, los estudiantes usan el software GeoGebra; en relación con los procesos de argumentación ¿qué favorece el uso de este tipo de herramientas? Explique sus respuestas con detalle. (b) Suponga que el contexto en el que se propone la tarea no tiene acceso a este tipo de artefactos. ¿Cómo ajustaría los enunciados de las tareas para que las expectativas de aprendizaje se relacionen con la producción de argumentos?

El ítem a de esta tarea pretende que los estudiantes se percaten de la importancia de una herramienta como GeoGebra para la producción de argumentos inductivos o abductivos; en el primer caso, para descubrir propiedades, en el segundo para descubrir o verificar propiedades. En el video correspondiente a la argumentación inductiva, el profesor da como

indicación que se puede usar GeoGebra con lo cual permite que los estudiantes realicen una actividad de exploración y descubrimiento que favorece la producción del argumento inductivo ya descrito. En ese marco, permite que los estudiantes visualicen propiedades invariantes (v.g.,  $T$  parece pertenecer a la mediatriz de  $\overline{AC}$ ) y tengan una evidencia de la certeza de la conjetura que formulan, además de verificarla con las herramientas mismas del software (en este caso, construir la mediatriz del  $\overline{AC}$  para verificar que contiene a  $T$ ).

En relación con la tarea del video 3, GeoGebra permite verificar una propiedad que los estudiantes abducen a partir de usar conocimiento teórico que tienen (puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos de este).

Por su lado, el ítem b busca dos cosas: por un lado, que los profesores valoren la importancia de poder contar con los recursos tecnológicos para potenciar actividad argumentativa; por otro, a que se adapten a diversas circunstancias que pueden suceder en contextos reales, incentivándolos a ser creativos con otros recursos, con el fin de promover escenarios similares a los que suscita GeoGebra (v.g., promover el estudio de diversos casos discretos usando construcciones de mediatrices de segmentos usando regla y compás).

Siguiendo con la posible gestión del profesor, la siguiente tarea busca que los profesores en formación especulen sobre acciones que ellos llevarían a cabo tomando en cuenta la actividad de los estudiantes en los videos.

Tarea 4: Suponga que usted es el profesor Miguel. En relación con la tarea 1, hubo dos maneras en las que los grupos de estudiantes procedieron (expuestas en los cómics 1 y 2, respectivamente). ¿Cómo gestionaría usted la puesta en común de la exposición de los resultados de esos grupos?

Vale decir que no se diseñó un video que exponga la puesta en común de las producciones de los estudiantes. Por ello, se pide que los profesores en formación especulen al respecto.

Se esperaría que los profesores aludan a una estructura de esa puesta en común en la que consideren el orden de exposición de resultados y la racionalidad detrás de esa decisión; los comentarios que harían a cada grupo; si darían o no espacio para que los grupos discutan las ideas de otros; si este es el caso, cómo suscitarían esa interacción; qué institucionalizan en la sesión de la clase, etc.

Se esperaría, entonces, que los profesores establecieran las expectativas de la sesión, explicando que el objetivo es contrastar dos enfoques diferentes para resolver el problema (el inductivo –comic 2– y deductivo –comic 1–) y reflexionar sobre sus fortalezas y limitaciones. Luego, indicaría el orden de presentación, comenzando con el grupo que utilizó el enfoque inductivo y seguido por el grupo que utilizó el enfoque deductivo.

Durante la exposición del primer grupo, se les podría pedir que expliquen cómo utilizaron GeoGebra para explorar el problema y que proporcionen ejemplos concretos de los patrones que identificaron. Se intervendría con preguntas como *¿de qué manera sustentan la*

*aceptabilidad de sus hallazgos?* para hacer ostensiva su argumentación inductiva y preparar la transición al segundo grupo.

Luego, durante la exposición del segundo grupo, les pediría que expliquen cómo usaron teoremas y definiciones para validar la característica geométrica del punto  $T$  y que presenten un esquema claro del argumento deductivo en el tablero. Finalmente, pediría que los estudiantes de la clase comenten el papel de cada proceder en la solución del problema con el objetivo de poder decantar que el primero busca la construcción de una conjetura aceptable y que el otro busca la validación de la misma; esto, para resaltar la complementariedad de los enfoques y su rol en la actividad matemática.

Finalmente, en la fase de cierre e institucionalización, escribiría en el tablero las conclusiones de ambos grupos, explicitando el argumento de cada caso (indicado cada uno de sus elementos –dato, garantía y aserción–) y su importancia para conjeturar o para validar, respectivamente.

La siguiente, podría ser una pregunta subsidiaria de la anterior, que ayudaría a explicitar cierta racionalidad detrás de las maneras de gestión del profesor:

*Tarea 4.1:* En relación con la tarea 1 propuesta, ¿cuál considera usted que es la mejor manera de proceder, la del grupo del cómic 1 o la de grupo del cómic 2? Mencione las razones de su escogencia.

Esta tarea busca que cada profesor en formación indique su postura epistemológica con relación a la actividad matemática. Si escoge solo lo relativo al comic 1, da prioridad a una actividad en la cual la validación teórica es la expectativa de aprendizaje central; si asume el comic 2, da prioridad a una actividad en la que la exploración y la formulación de hechos promueve una visión más constructiva de las matemáticas. Alguien podría asumir una postura como la indicada en la respuesta a la tarea 4, en cuyo caso parecería que la sinergia de ambos procedimientos sería un camino ideal. De hecho, alguien podría decir que dependiendo del nivel educativo promovería una actividad u otra; si el contexto son clases de geometría de primaria, podría mencionar que prefería lo relativo al comic 2; si el contexto son clases de secundaria, podría aducir que sería más pertinente lo relativo al comic 1. Todo esto, dependiendo de lo que se asuma como expectativa para cada escenario: es usual que se conciba un acercamiento experimental en primaria y uno que no lo es tanto para la secundaria.

El papel del formador de profesores en estas tareas es el de mediador y orquestador. Que plantee sus posturas epistémicas al respecto de las tareas 4 y 4.1 será decisión de cada uno, teniendo conciencia de los efectos que ese posicionamiento puede tener.

# CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones de nuestro trabajo de grado teniendo en cuenta tres apartados: el cumplimiento de los objetivos planteados, los aportes y aprendizajes como futuros profesores, y las dificultades que se presentaron.

## 5.1 Cumplimiento de los objetivos

Tabla 11 Cumplimiento de los objetivos

<b>Objetivo general</b>	
<p>Diseñar un recurso conformado por un conjunto de <i>comics animados</i> que presenten enunciados de tareas de geometría que promuevan la argumentación y los posibles tipos de argumentos que los estudiantes elaborarían cuando los aborden, que pueda ser usado en procesos de formación de profesores para cualificar su conocimiento sobre argumentación.</p>	<p>Este objetivo se cumplió plenamente. Fueron creados tres <i>comics</i> animados, que ilustraron diferentes tipos de argumentación (inductiva, deductiva y abductiva). En cada uno, se presenta un escenario de clase en el que el profesor propone una tarea que suscita un tipo de argumento en específico producido por estudiantes cuando abordan el problema, los cuales pueden ser usados en procesos de formación de profesores para evaluar su conocimiento frente a la argumentación. Los <i>comics</i> diseñados se encuentran en los siguientes enlaces:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Argumentación deductiva: <a href="https://youtu.be/H1MLaBX3Vwc">https://youtu.be/H1MLaBX3Vwc</a></li> <li>- Argumentación inductiva: <a href="https://youtu.be/WGjF-aYyrRE">https://youtu.be/WGjF-aYyrRE</a></li> <li>- Argumentación abductiva: <a href="https://youtu.be/vdvrUWNX1fU">https://youtu.be/vdvrUWNX1fU</a></li> </ul>
<b>Objetivos específicos</b>	
<p>Caracterizar diferentes tipos de enunciados de tareas de argumentación en geometría y los tipos de argumentos que estos puede suscitar cuando estas son solucionadas.</p>	<p>Se identificaron tipos de enunciados que promueven argumentación. En ese marco, se enunciaron condiciones para que estos susciten diferentes tipos de argumentos, basados en la propuesta de Molina et al., (2024). Esta caracterización sirvió como base para el diseño de</p>

	los comics, asegurándonos que los enunciados de las tareas presentadas en cada comic fomentaran el tipo de argumento deseado (ver sección 2.5).
Escoger tareas de argumentación en geometría que concrete la tipología de enunciados precisados en el primer objetivo específico.	Se seleccionaron tareas que se ajustaban al tipo de argumentación por promover. Asimismo, se incluyeron algunas indicaciones que fomentaban la exploración o el uso de elementos teóricos para conllevar al tipo de argumentación deseado (ver secciones 3.2 y Tablas 2 y 3).
Precisar la actividad argumentativa que posiblemente puede llevar a cabo un estudiante cuando la aborda.	Se hizo una descripción de la actividad argumentativa que cada tarea puede promover. En ella, se explicitaron los elementos de cada argumento, el tipo de argumento, cómo el tipo de enunciado, su solicitud y su indicación puede promover cierto tipo de argumento. (Tablas 5, 7 y 9).
Diseñar los <i>comics</i> animados tomando como referencia los resultados establecidos en los objetivos específicos previos.	Se describieron los videos diseñados, indicando para cada uno el tipo de enunciados de tareas que el profesor propone, acciones deseables de los estudiantes en relación con cada tarea (e.g., identificar los elementos de la tarea, detectar propiedades invariantes, formular conjeturas, identificar elementos del argumentos, construir y formular argumentos), y acciones de gestión del profesor (e.g., proponer tareas de argumentación, reorientar a los estudiantes, apoyar la producción de argumentos, valorar sus ideas). (Ver secciones 4.2 a la 4.4)
Describir cada <i>comic</i> animado diseñado que sirva como orientación para el formador de profesores que quiera utilizar el recurso diseñado.	Se diseñaron cuatro tareas de formación profesional (algunas de ellas con tareas subsidiarias) pensadas para que los videos elaborados se puedan aprovechar, de una manera aceptable, en la formación de profesores de matemáticas que tiene que ver con asuntos relativos a la argumentación (algunos tipos de tareas que la suscitan, ejemplos de

	tipos de argumentos, simulación de ciertas acciones de los estudiantes cuando abordan las tareas relativas a la producción de argumentos y algunos elementos de la gestión del profesor para promover esas acciones). Así mismo, se hizo una breve descripción de la intención de cada una de tales tareas con algunas sugerencias de gestión o de respuestas deseables (ver secciones 4.5).
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 5.2 Aportes y aprendizajes como futuros profesores de matemáticas

*Aprendizajes de orden didáctico:* Conforme avanzamos en la creación de los *comics*, el análisis de estos y su relación con las acciones del profesor nos permitió profundizar en cómo gestionar las tareas de matemáticas orientadas a la argumentación. Comprendimos que, para implementar tareas que pueden promover un tipo de argumento en específico (inductivo, abductivo o deductivo), es necesario que estas cuenten con características específicas como la estructura de su enunciado; así mismo, que este tenga solicitudes que generen duda, curiosidad, incertidumbre, perturbación o controversia, que pidan sustentos de aceptabilidad de resultados y que den indicaciones para favorecer estos elementos. Esto nos permitió aprender respecto a la orientación y el valor del aprendizaje argumentativo en el aula, destacando acciones clave del profesor como brindar herramientas que generen un tipo de argumento en específico, el uso de preguntas dirigidas al proceso de argumentación, la modelación con ejemplos teóricos y la evaluación de las ideas de los estudiantes enfatizando en el uso correcto de definiciones y teoremas. Junto a esto, comprendimos que las tareas bien diseñadas por el profesor pueden ser el motor para que los estudiantes se involucren en discusiones matemáticas significativas, dando la posibilidad a la creación de un ambiente en el que las ideas puedan ser discutidas, contrastadas y defendidas.

Por su parte, conforme realizamos nuestro análisis de las acciones de los estudiantes y su papel en procesos de conjeturación y justificación, también aprendimos varias cosas clave. Observar cómo los estudiantes pasan por distintas etapas, como la formulación de conjeturas y la búsqueda de evidencia para aceptarlas, nos permitió identificar el papel fundamental de las acciones de detección, verificación y formulación en la construcción de argumentos, pues los estudiantes no solo buscan propiedades invariantes o realizan verificaciones, sino que también pueden emplear elementos empíricos o teóricos para sustentar sus conclusiones.

*Aprendizaje de orden matemático:* Trabajar con cómics y ejercicios geométricos nos ha permitido adentrarnos en el estudio de propiedades matemáticas, especialmente relativas a las mediatrices de un triángulo y su aplicación en contextos argumentativos. Consideramos que las propiedades de equidistancia tienen un valor que puede justificarse desde diferentes

perspectivas. Además, hemos evidenciado que es posible integrar aspectos teóricos en el desarrollo de acciones prácticas (especialmente visto en los argumentos inductivos y abductivos), lo que nos ha ayudado a considerar, para nuestra futura labor docente, esos aspectos de los procesos de exploración, detección de patrones y validación formal de sus ideas que quisiéramos promover en nuestros estudiantes.

*Aprendizaje sobre el uso de las TICS:* La aplicación de GeoGebra en los cómics nos permitió observar, en la práctica, cómo la tecnología digital puede mejorar la visualización, tanto en términos de geometría como de construcción de argumentos. De igual manera, llegamos a aplicar la tecnología con la debida efectividad para encontrar relaciones geométricas, producir datos empíricos y crear interacción en el aula. Allí evidenciamos que esta herramienta no sólo nos ayuda a resolver problemas, sino que también proporciona bases para argumentar, probablemente comprobando propiedades, refutando ideas y contraejemplos. Esa adquisición es central para nuestra práctica futura, ya que las TIC han supuesto un medio básico en la enseñanza de las matemáticas.

*Sobre la Proyección como Futuros Profesores:* La creación y análisis de *cómics* nos permitió reflexionar sobre la enseñanza de la argumentación desde un punto de vista reflexivo. Logramos un mayor dominio de la producción de materiales didácticos que retraten no sólo hechos matemáticos sino también procesos de argumentación. Empezamos a apreciar el valor de los *cómics* como un elemento importante en la formación de futuros docentes, ya que permiten crear situaciones de la vida real para estudiar dinámicas de aula y posibles acciones de los estudiantes o de los profesores. De igual manera, podríamos relacionarla con una comprensión más profunda de la construcción de planeaciones de clase que incluyan tareas que permitan que el estudiante desarrolle por sí mismo este tipo de conclusiones, así como de la capacidad de los estudiantes para el aprendizaje colaborativo.

### **5.3 Dificultades en la elaboración y proyecciones**

En la elaboración de los *comics* surgieron varias dificultades. La primera y de mayor complejidad fue la animación, pues no contábamos con este tipo de habilidades o conocimientos, llevándonos a la necesidad de aprender sobre el uso de *softwares* como lo era *Adobe Illustrator*, *After Effects* y *Photoshop*. Este aprendizaje, se realizó con ayuda de un profesional en animación, quien nos guió en el manejo de este tipo de programas y contribuyó con la animación y creación de algunos de los elementos utilizados en los *comics*. La segunda dificultad fue referente a la elaboración de las tareas que se utilizarían para los videos, debido que requirió de varios diseños y constantes reajustes para evitar interpretaciones ambiguas o malentendidos para quienes a futuro decidieran dar uso a este recurso. Además, las tareas también requirieron un gran esfuerzo para lograr que estas suscitara al tipo de argumentación deseado. Por último, otra dificultad que se presentó fue referente a la descripción de los *comics* puesto que, conforme esto se realizaba notamos la escasez en

algunos puntos, como lo fue, por ejemplo, la gestión del profesor que se le estaba dando en un inicio, lo que nos conllevó a una reescritura de los guiones y por consecuente, modificaciones a los *comics*.

A pesar de estas dificultades, al concluir con el producto final contamos con que este tenga grandes proyecciones, dada la versatilidad de los *comics* para la formación de profesores. Esto, junto a las tareas de formación profesional, con las que se espera tener un pequeño insumo de reflexión sobre aspectos del proceso de argumentación que se pueden llevar en un aula de geometría.

# BIBLIOGRAFÍA

- Alfaro, L., Castro, E., & Gutiérrez, R. (2020). *Formación de Profesores en Argumentación Matemática: Un Estudio de Caso*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(1), 45-67.
- Ayalon, M., & Even, R. (2014). Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 575-601.
- Ayalon, M., Hershkowitz, R. (2017). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*. 49, 163-173. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010>
- Ayalon, M. (2019). Exploring changes in mathematics teachers' envisioning of potential argumentation situations in the classroom. *Teaching and Teacher Education*, 85, 190-203. [10.1016/j.tate.2019.06.019](https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.06.019)
- Baker, M. (2009). Argumentative Interactions and the Social Construction of Knowledge. In N. Muller Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 127-144). Springer
- Boero, P., Fenaroli, G. y Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. En A. Stylianides y G. Harel (eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving. ICME-13*. Springer.
- De Sá Ibrahim, S. y Justi, R. (2016). Teachers' knowledge in argumentation: Contributions from an explicit teaching in an initial teacher education programme. *International Journal of Science Education*. [10.1080/09500693.2016.1221546](https://doi.org/10.1080/09500693.2016.1221546)
- Herbst, P., Chazan D., Chen, C., Minh, V. (2011). Using comics-based representations of teaching, and technology, to bring practice to teacher education courses. *ZDM*, 43(1), 91-103.
- Kieran, C.; Doorman, M.; Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. En Watson, A.; Ohtani, M. (ed.). *Task design in mathematics education: An ICMI Study*, 19-81. Springer.
- McNeill, K. L., & Knight, A. M. (2013). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Scientific Argumentation: The Impact of Professional Development on K-12 Teachers. *Science Education*, 97(6), 936-972
- Mariotti M. (2006). *Proof and Proving in Mathematics Education*. [10.1163/9789087901127\\_008](https://doi.org/10.1163/9789087901127_008).

- Martin, T.S., McCrone, S.M.S., Bower, M.L.W. *et al.* (2005) The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95–124.
- Ministerio de Educación Nacional. (2020). *Políticas y lineamientos para la formación docente en Colombia*. Ministerio de Educación Nacional.
- Molina, Ó., Camargo, L., Vargas, J., Samper, C., & Perry, E. (2023). *Una propuesta para la formación de profesores en matemáticas: el caso de la argumentación matemática*. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 1(1), 151-185. <https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013356>
- Molina, Ó., Camargo, L., Vargas, J., Samper, C., & Perry, E. (2024). *¿Qué estructura debe tener el enunciado de una tarea de Geometría para promover un determinado tipo de argumento?* International Commission on Mathematical Instruction. ICMI 26.
- Molina, Ó., Font, V., & Pino-Fan, L. (2019). *Estructura y dinámica del argumentos analógicos, abductivos y deductivos*. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 37(1), 93-116. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484>
- Pino-Fan, L., Assis Adriana., Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a>.
- Reuter, F. (2023) Explorative mathematical argumentation: a theoretical framework for identifying and analysing argumentation processes in early mathematics learning. *Educ Stud Math* 112, 415–435. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10199-5>
- Roam, D. (2009). No, gracias, solo estaba mirando. En D. Roam (Ed.). *La clave es la servilleta: resolver problemas y vender ideas mediante dibujos*. 45-78. Grupo Editorial Norma.
- Harel, G. y L. Sowder (1998), “Students’ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies”, *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Stylianides, A. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
- Velandia, M. & Miranda, A. (2014). *El proceso de conjeturación a través de viñetas animadas*. Trabajo de grado de pregrado. Universidad Pedagógica Nacional.
- Wujec, T. (2010). *Cómo los cómics pueden transformar el aprendizaje visual: Aplicaciones en la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Pearson.

- Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematics Education*, 21(4), 423-440.
- Yackel, E., & Cobb, P. (2006). "Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Zohar, A. (2007). Science Teacher Education and Professional Development in Argumentation. In S. Erduran & M. P. Jiménez-Aleixandre (Eds.), *Argumentation in Science Education: Perspectives from Classroom-Based Research* 245-268. Springer.

# ANEXO

## Libreto de los *comics* animados

### Comic 1: Argumentación deductiva

#### Escena 1: Presentación de la tarea

Profesor: Hola muchachos hoy vamos a abordar un problema que tiene que ver con las mediatrices de unos segmentos en los que quiero que encontremos la propiedad que tiene un punto en especial, el problema en específico es el siguiente:

Vamos a considerar tres puntos no colineales  $A$ ,  $B$  y  $C$ , vamos a considerar también dos mediatrices,  $m$  del segmento  $AB$  y  $n$  del segmento  $BC$ , además, un punto  $T$  que será la intersección de las mediatrices. Entonces la pregunta es, ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$ ? Para esto, quiero que usemos los apuntes y propiedades de los objetos que hemos estudiado previamente

*La cámara se enfoca en la pizarra donde el profesor está dibujando los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , las mediatrices de los segmentos  $AB$  y  $BC$  y  $T$  el punto de intersección.*

#### Escena 2: Trabajo en Grupo

*La cámara muestra a los estudiantes discutiendo el problema en grupo. Se ven concentrados y revisando los apuntes en sus cuadernos.*

**Jenn:** Mmm... Qué podrían tener en común, ¿Quizás las distancias?

**Profesor:** Puede que vayan por el camino correcto. Revisen lo que creen

*La cámara enfoca a Estudiante 1, quien se ve emocionado.*

**Aleja:** ¡Creo saberlo! El punto  $T$  pertenece a la mediatriz del segmento  $AC$ .

**Jenn:** ¿Por qué dices eso?

*La cámara se enfoca en la mano de Estudiante 1 y en lo que está escribiendo en el cuaderno.*

**Aleja:** Como  $T$  pertenece a las mediatrices de los segmentos  $AB$  y  $BC$ , así,  $T$  equidista de los segmentos.

**Jenn:** ¡Claro! Por la definición de mediatriz. Por lo tanto,  $TA = TB$  y  $TB = TC$ .

**Brandon:** ¡Ah miren! Podemos afirmar que,  $TA$  debe ser igual a  $TC$ .

**Aleja:** Sí, son iguales por transitividad.

**Brandon:** Ah, claro, así  $T$  pertenece a la mediatriz del segmento  $AC$ .

*La cámara se enfoca en el grupo de estudiantes y el profesor se acerca a ellos.*

**Profesor:** ¿Qué tal van muchachos, han establecido la propiedad del punto  $T$ ?

**Aleja:** ¡Bien profe! Concluimos que el punto  $T$  pertenece a la mediatriz del segmento  $AC$ .

**Profesor:** ¿Ah, y por qué dicen eso? Veo que tienen algo anotado algo allí.

**Jenn:** Si profe, como  $TA$  es igual a  $TB$  y  $TB$  es igual a  $TC$  entonces por transitividad  $TA$  es igual a  $TC$  por lo tanto  $T$  pertenece a la mediatriz del segmento  $AC$

**Profesor:** Ya veo, pero hace falta la primera parte del argumento

**Aleja:** ¿Cómo así profe?

**Profesor:** Dicen que  $TA = TB$  y  $TB = TC$ , pero ¿Por qué pasa eso?

**Brandon:** Ah si profe, nos falta eso, pero es por la definición de mediatriz y de equidistancia

**Profesor:** ¿Y por qué garantizan que  $T$  pertenece a la mediatriz de  $AC$ ?

**Jenn:** Por la Definición de mediatriz, profe.

**Profesor:** Bien muchachos.

## **Comic 2: Argumentación inductiva**

### ***Escena 1: Presentación del Problema***

Profesor: Hola muchachos hoy vamos a abordar un problema que tiene que ver con las mediatrices de unos segmentos y quiero que establezcan la propiedad que tiene un punto en especial. Específicamente el problema es el siguiente:

Vamos a considerar tres puntos no colineales  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tenemos dos mediatrices,  $m$  del segmento  $AB$  y  $n$  del segmento  $BC$ , además, un punto  $T$  que será la intersección de las mediatrices. Entonces la pregunta es, ¿Qué característica geométrica tiene el punto  $T$ , al mover el punto  $B$  ?

*La cámara se enfoca en el tablero donde se dibujan los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y las mediatrices.*

**Danna:** Profe, ¿podemos utilizar GeoGebra?

**Profesor:** Claro, de hecho, me gustaría que hicieran una exploración mediante el software.

### ***Escena 2: Exploración en GeoGebra***

*La cámara muestra la pantalla de una computadora con GeoGebra abierto. Los estudiantes están interactuando con el software.*

**Diego:** ¿Deberíamos graficar lo del enunciado?

**Sofía:** Claro, debemos hacerlo, o si no ¿cómo?

**Danna:** Dibuja los puntos A, B y C. Ahora los segmentos.

**Sofía:** Para la mediatriz, ¿utilizamos la Herramienta Mediatriz o mejor punto medio y luego recta perpendicular?

**Diego:** Mejor con la herramienta Mediatriz.

**Danna:** Ahora el punto T que sería la intersección entre las mediatrices.

**Diego:** ¡Listo! Arrastra a B... para ver qué pasa...

### ***Escena 3: Observación de Resultados***

**Sofía:** Si movemos B, parece que T también se mueve. Pero ¿por dónde?

**Profesor:** ¿Cómo van muchachos, tienen algún avance o alguna idea de una posible solución?

**Danna:** Ya tenemos la construcción y estamos moviendo a B, y al hacerlo T también se mueve, pero no sabemos cómo.

**Profesor:** Utilicen la herramienta Rastro en el punto T y quizá podrían encontrar algo.

**Diego:** Listo, ponle entonces Rastro a T y mueve a B....

### **Escena 4: Descubrimiento**

*La pantalla de GeoGebra muestra el rastro dejado por el punto T mientras B se mueve.*

**Sofía:** (Sorprendido) ¡Miren! Parece que [T] se mueve en línea recta.

**Danna:** Entonces T pertenece a una recta. Pero ¿cuál?

**Diego:** ¿Será que esa recta es perpendicular a  $\overline{AC}$ ? Me parece ver que eso pasa

**Danna:** Espera construyo el segmento AC... [Construye ese segmento y mueve a B]

**Sofía:** ¡Miren! Y parece que esa recta pasa por el punto medio [de AC]... Verifiquemos...

**Danna:** ¿Cómo?

**Diego:** Haga el punto medio de AC.

**Danna:** Ajá... y ¿ahora hago la perpendicular?

**Sofía:** Sí, al segmento AC por E... Si esa recta coincide con esta [señala la del rastro], lo que dijimos antes está bien, ¿no?

**Danna:** [Luego de hacer la construcción]. Ay sí, son la misma...

**Profesor:** Qué tal muchachos... cuéntenme a qué resultado han llegado (el profesor llega por detrás de los estudiantes)

**Danna:** Profe, al parecer  $T$  pertenece a la mediatriz del segmento  $AC$

**Profesor:** Y, ¿Por qué pasa eso?

**Danna:** Pues mira profe... nosotros tomamos varias posiciones para el punto B cuando lo movimos... lo arrastramos y nos dimos cuenta de que para esas posiciones el punto T siempre pertenece a la mediatriz... usamos el arrastre como usted nos dijo para darnos cuenta de eso. Por lo tanto, dijimos que para cualquier punto B el punto T correspondiente pertenece a la mediatriz del segmento AC.

**Profesor:** O sea que ustedes lo que hicieron fue explorar diferentes casos del punto B para ver qué pasaba con el punto T, y con base en eso concluyeron que para cualquier posición del punto B el Punto T pertenece a la mediatriz de AC, ¿Verdad?

**Sofía:** Exacto profe, eso fue lo que concluimos

### *Comic 3: Argumentación abductiva*

#### *Escena 1: Presentación del Problema*

**Profesor:** Hola muchachos, hoy quiero que abordemos un problema que tiene que ver con una circunferencia y sus propiedades. En ese orden de ideas, la situación es la siguiente:

Dados tres puntos no colineales  $A$ ,  $B$  y  $C$ , ¿cómo encontrar el punto que sea el centro de la circunferencia que los contiene? Pueden usar sus apuntes y verifiquen en GeoGebra

*La cámara muestra el tablero con una representación de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .*

#### *Escena 2: Trabajo en Grupo*

*La cámara se enfoca en los estudiantes trabajando en grupo. Están concentrados y discutiendo.*

**Brandon:** Bueno, vamos a pensar en ideas... ¿Alguna que se les ocurra?

**Aleja:** Para que el punto X sea centro de la circunferencia... mmm X debería equidistar de los puntos A, B y C.

**Jenn:** Ajá. ¿Cómo logramos encontrar ese punto?

**Brandon:** [Busca en los apuntes del cuaderno] Ah! Yo estaba buscando aquí [mira el cuaderno] y para tener equidistancia, deberíamos tener mediatrices... bueno ese es un camino.

**Jenn:** Profe, ¿Podemos verificar algo en GeoGebra?

**Profesor:** Claro muchacho.

**Jenn:** Dibuja en GeoGebra los puntos A, B y C, las tres mediatrices [ $m$ ,  $n$  y  $l$ ] y la intersección [X]

**Brandon:** Ok, entonces con la herramienta circunferencia (centro, punto), selecciona al punto X y al punto A. [Se dan cuenta que la circunferencia contiene los puntos B y C].

**Jenn:** ¡miren que sí es!

**Profesor:** ¿Han encontrado algo?

**Aleja:** Sí, profe.

**Profesor:** A ver, muéstrenme.

**Brandon:** Este X es en el centro de la circunferencia [señala la pantalla] porque ese X debería equidistar de los tres puntos [A, B y C].

**Profesor:** ¿Tienen alguna razón para garantizar eso?

**Brandon:** Pues buscamos en el cuaderno y para que eso pase ese X debe ser la intersección de las mediatrices.

**Aleja:** sí, de las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC.

**Jenn:** Entonces, verificamos eso en software... hicimos las mediatrices y marcamos el punto X de intersección y la circunferencia de centro X y radio XA y vimos que es

**Profesor:** Ah entonces, lo que ustedes hicieron fue: Dado el punto X siendo el centro de la circunferencia, se preguntaron por datos que les permitiera establecer una conclusión frente a ese punto ¿Verdad?

**Aleja:** Si profe eso fue

**Profesor:** ¿Y Cuál fue el dato que encontraron?

**Brandon:** Que ese punto X es la intersección de las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC.

**Profesor:** Muy bien, chicos.