TANGRAM AO PO'I: UNA PROPUESTA DE TAREAS PROFESIONALES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES PARAGUAYOS

Autores

María Carolina Giménez Quiñónez

Ismael Adrián Galeano Araujo

Víctor Raúl Ferreira Pérez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, D. C.

2024

TANGRAM AO PO'I: UNA PROPUESTA DE TAREAS PROFESIONALES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES PARAGUAYOS

Autores

María Carolina Giménez Quiñónez

Ismael Adrián Galeano Araujo

Víctor Raúl Ferreira Pérez

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática

Asesora

Mg. Lyda Constanza Mora Mendieta

Coasesora

Dra. Elizabeth Torres Puentes

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, D. C.

2024

Agradecimientos

A Dios, por otorgarnos la sabiduría, la fuerza y la paciencia necesarias a lo largo de este viaje académico. Su constante presencia nos ha dado el aliento para superar los desafíos y la perseverancia para alcanzar nuestras metas.

Al Gobierno Nacional de Paraguay, nuestra gratitud por su firme compromiso con la educación y el desarrollo académico del país. Agradecemos, a través del Programa Nacional de Becas en el Exterior para el Fortalecimiento de la Investigación, la Innovación y la Educación del Paraguay «Don Carlos Antonio López» (BECAL) y del Ministerio de Educación y Ciencias, la confianza depositada en nosotros al brindarnos la oportunidad de ser becarios y fomentar nuestro crecimiento personal y profesional, permitiéndonos posteriormente implementar en nuestro país lo aprendido en cualquier lugar donde nos corresponda ejercer.

A la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, por habernos brindado la oportunidad de cursar la Maestría en Docencia de la Matemática. Agradecemos especialmente el apoyo académico y los recursos proporcionados, que han sido esenciales para nuestro desarrollo en esta maestría.

A nuestras asesoras de trabajo de grado, Lyda Constanza Mora Mendieta y Elizabeth Torres Puentes, por su paciencia y por el conocimiento compartido en cada etapa de la tutoría.

A nuestros profesores de la universidad, expresamos nuestra gratitud por la enseñanza recibida en un ambiente cálido, lleno de amistad, amabilidad y dedicación. Estas actitudes nos hicieron sentir como en casa, y llevaremos en nuestros corazones el noble ejemplo de estudio y cariño de esta querida tierra colombiana.

Dedicatorias

A mis hijos, Lucas Emmanuel y Verónica Luján, que son mi mayor motivación. Dedico este trabajo a ustedes, con la esperanza de que continúen persiguiendo sus sueños con la misma pasión y determinación que me han impulsado a terminar este proyecto.

María Carolina Giménez Quiñónez

A mis padres, Antonia y Florencio (+) por acompañarme y animarme a seguir mis ideales y en los últimos años principalmente a mi madre, mujer luchadora, cariñosa y emprendedora para mejorar la vida de sus hijos.

A la familia Pérez por alentarme siempre, y a la estrella que brilla en el cielo, tía Florentina (+), por ser parte de mi formación profesional.

Víctor Raúl Ferreira Pérez

A mis padres, mi esposa y a mi hija Jazlyn Anahí por brindarme apoyo constante.

Ismael Adrián Galeano Araujo

Tabla de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

El presente trabajo, titulado «Tangram *ao po'*i[1]: Una propuesta de tareas profesionales para la formación de profesores paraguayos», se enmarca en la modalidad de profundización y se alinea con el propósito del convenio entre BECAL (Programa Nacional de Becas en el Exterior para el Fortalecimiento de la Investigación, la Innovación y la Educación del Paraguay «Don Carlos Antonio López») y la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Este trabajo se centra en la formación de profesores de matemáticas y aborda el núcleo problemático «Diseño de tareas o de material didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático».

En cuanto a la estructura del trabajo, en el primer capítulo, abordamos nuestra inquietud pedagógica, la cual exponemos a partir de tres motivaciones: (1) la necesidad de proponer tareas profesionales que favorezcan el conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido de los profesores paraguayos, que enseñan matemáticas en la educación primaria, asociadas a las relaciones entre perímetro y área; (2) el escaso material didáctico utilizado por los profesores paraguayos que aporte en la comprensión de la relación entre área y perímetro; y (3) la carencia de investigaciones en la formación de profesores de matemáticas en Paraguay. Además, presentamos las características del contexto educativo paraguayo con relación a la formación inicial y en servicio de los profesores, así también exponemos los antecedentes investigativos y finalmente, en correspondencia con todo lo expresado anteriormente, presentamos los objetivos del trabajo, tanto generales como específicos.

[1] "*ao po'i* es una palabra guaraní que significa «tela fina o delicada» en español (Silva, 2023). Este trabajo busca resaltar un aspecto de la cultura paraguaya, como los bordados del *ao po'i*. No se trata de un enfoque etnomatemático ni de rescatar los aspectos culturales propiamente, sino de utilizarlos de manera contextual para explorar algunas relaciones entre los saberes de la región y el aprendizaje de las matemáticas. El tangram *ao po'i*, con las representaciones geométricas de algunos bordados, ofrece posibilidades para trabajar la relación entre perímetro y área. Cabe destacar que el objetivo principal de este trabajo es la formación de profesores mediante tareas profesionales relacionadas con dicha relación.

En el segundo capítulo presentamos el sustento conceptual de nuestro marco de referencia, dividido en cuatro categorías: marco matemático, marco didáctico, material didáctico y formación de profesores de matemáticas. Además, en este capítulo, presentamos el «tangram *ao po'i*», un material didáctico elaborado por los autores de este trabajo con el propósito de rescatar la identidad cultural paraguaya.

En el tercer capítulo, abordamos la perspectiva metodológica, optando por un enfoque cualitativo acorde con la modalidad de profundización a la que corresponde nuestro trabajo. En este contexto, describimos algunos elementos que consideramos para aproximarnos a una estrategia investigativa. Asimismo, explicamos las fases del desarrollo del trabajo, los instrumentos utilizados para evidenciar el logro de los objetivos específicos, y las categorías de reflexión.

Seguidamente, en el cuarto capítulo, presentamos los resultados de nuestro trabajo, que consisten en tres tareas profesionales y una reflexión sobre el cumplimiento de los objetivos específicos propuestos. Finalmente, en el quinto capítulo, exponemos una reflexión sobre el objetivo general del trabajo, así como reflexiones individuales acerca del proceso de formación de cada autor y el objeto de estudio. Además, presentamos perspectivas futuras para la implementación y rediseño de las tareas profesionales propuestas y del material didáctico tangram *ao po'i*.

Generalidades del proyecto

Este capítulo está estructurado en cuatro apartados. En el primero, damos a conocer las motivaciones personales y profesionales que nos llevaron a considerar este estudio sobre las relaciones entre perímetro y área, y a reconocer las tareas profesionales como un posible medio a través del cual favorecer el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido de los profesores paraguayos del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica.

En el segundo apartado, presentamos las características del contexto de la formación de profesores en Paraguay, con el fin de exponer los aspectos relevantes que consideramos para el diseño de las tareas profesionales dirigidas a los profesores en servicio del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, quienes enseñan matemáticas sin tener una formación específica suficiente en el área.

En el tercer apartado, mostramos cómo el estudio del diseño de tareas que favorecen el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas, asociado a las relaciones entre perímetro y área, han ocupado a otros investigadores, quienes igualmente reconocen la relevancia de este tema. En el cuarto apartado, damos a conocer los objetivos que nos propusimos alcanzar durante el desarrollo del trabajo.

Inquietud pedagógica que motiva el trabajo

Desde el inicio de la segunda década del siglo XXI Paraguay está llevando a cabo la Transformación Educativa con el objetivo de implementar cambios significativos en las políticas educativas, estos cambios están diseñados para mejorar tanto los procesos educativos como los resultados del aprendizaje en los estudiantes. Dentro de este contexto, la formación profesional de los educadores ocupa un lugar central e imprescindible de atención (Ministerio de Educación y Ciencias del Paraguay [MEC], 2020).

En este marco, en agosto de 2020, la República de Paraguay firmó el Convenio de Financiación N.º LA/2019/40138 con la Unión Europea para el «Programa de Apoyo a la Transformación del Sistema Educativo en Paraguay». Este programa abarca la ejecución de tres componentes temáticos: Componente 1: Resultados del Aprendizaje; Componente 2: Formación inicial docente y desarrollo de las capacidades de los profesionales de la educación; Componente 3: Formación Técnica y Profesional; y Sistema Nacional de Cualificaciones Profesionales.

En este contexto, el 21 de diciembre de 2020 se firmó un convenio de contribución N.º OEI - UE - LA/2020/421-144, entre la Unión Europea (UE) y la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), para llevar a cabo el proyecto denominado «Impulsando la Calidad Educativa en Paraguay a través de los Resultados del Aprendizaje y la Formación Técnica y Profesional; y Sistema Nacional de Cualificaciones Profesionales». El objetivo general del Proyecto es lograr la calidad educativa a través de mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes paraguayos con la instalación de un sistema actualizado de Educación Técnica y Profesional. En este proyecto, el fortalecimiento de la formación de profesores paraguayos en servicio está en la agenda del componente 1: «Resultados del Aprendizaje».

Según lo propuesto en el componente 1, en especial en la línea de acción 4, denominada Plan de formación de docentes en servicio y desarrollo de metodologías para su implementación, se busca identificar las brechas entre las competencias de los docentes en servicio y las que demanda el currículo. A partir de ello, se elaboran planes de formación y capacitación para educadores, que permitan el fortalecimiento y acompañamiento de los actores educativos en la mejora de sus competencias pedagógicas. Y con la línea 5, Implementación del plan de formación de docentes en servicio, se ponen en marcha los planes elaborados de formación y capacitación docente, optimizando las prácticas pedagógicas y buscando mejorar el aprendizaje de los estudiantes en el aula.

En estos planes se asume la necesidad de formar profesores de alta calidad, para que ello influya en los aprendizajes de los estudiantes, reconociendo el rol protagónico de los profesores en la educación. En este sentido, Camargo et al. (2004) proponen que:

> El docente es concebido como un actor fundamental del proceso educativo, sobre quien descansa la transmisión y reconstrucción del conocimiento, que permite al individuo que se forma relacionarse con el legado de la humanidad y desarrollar las comprensiones que la transformación de las sociedades demanda. (p. 80)

Teniendo en cuenta que compartimos la premisa que el profesor desempeña un papel fundamental en los procesos educativos y que la necesidad de su formación continua responde a una perspectiva importante en la búsqueda de la calidad educativa paraguaya, surge en nosotros la presente inquietud pedagógica, que exponemos a partir de tres motivaciones; una centrada en el diseño de tareas (para profesores, tareas profesionales) que aborden objetos matemáticos relevantes que aporten al conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas; otra enfocada en el uso del material didáctico como una estrategia para el aprendizaje matemático de los profesores y como insumo para el desarrollo de su enseñanza y, una tercera, fundamentada en que este trabajo pueda servir como un germen para la investigación en la formación de profesores en nuestro país.

La primera motivación corresponde a la necesidad de proponer algunas tareas profesionales que favorezcan el conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido de los profesores paraguayos, que enseñan matemáticas en el primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, a propósito de las relaciones entre perímetro y área.

Hemos considerado las relaciones entre perímetro y área como un tema fundamental, desde nuestras experiencias como tutores de los módulos de matemáticas en la formación docente inicial y capacitación docente continua en servicio. Creemos conveniente abordar este objeto matemático por la necesidad de profundizar el conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido de los profesores paraguayos, adquiridos durante su formación docente inicial en relación con el proceso de enseñanza aprendizaje de la unidad temática «Geometría y medidas», considerando su importancia para la construcción de conocimientos matemáticos y la escasa profundización que sobre este tema tienen los profesores paraguayos, ya que las capacidades de esta unidad temática se encuentran al final del programa de estudio de la Educación Escolar Básica y por factor tiempo los profesores usualmente no implementan las orientaciones metodológicas pertinentes para su desarrollo.

La segunda motivación que configura nuestra inquietud pedagógica se fundamenta en nuestra percepción empírica como formador de profesores, y se refiere al poco material didáctico utilizado por los profesores paraguayos que aporte en la comprensión de la relación entre área y perímetro. Por ello proponemos el diseño de un material didáctico construido por los autores de este trabajo de grado, inspirado en el clásico tangram y en nuestras raíces paraguayas, al cual llamamos *tangram ao po'i*. Este material didáctico vincula la identidad cultural paraguaya con las matemáticas, usando las representaciones de los diseños del bordado del *ao po'i.*

Para respaldar esta segunda motivación, recurrimos al análisis de las orientaciones metodológicas del programa de estudio del área de matemáticas para el primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, en las cuales se indica que el niño y la niña deben emplear la manipulación de objetos para poder realizar la representación simbólica. En estas orientaciones, el Ministerio de Educación y Ciencias sugiere a los profesores:

> Considerar las fases del aprendizaje: manipulativo, gráfico y simbólico; valiéndose de la utilización de recursos auxiliares, de fácil manejo y construcción, como: cartel de valores, ábaco, tarjetas de adición, sustracción, multiplicación y división, entre otros.
>
> Evitar la repetición mecánica de fórmulas, insistiendo en la aplicación de conceptos para la solución de problemas geométricos. (MEC, 2008a, p. 89)

Además, surgiere,

> Recordar que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se sustentan fundamentalmente en la creación y resolución de problemas, recurriendo a situaciones basadas en la historia, el lenguaje, las costumbres y preferencias de los niños, con el fin que le encuentren sentido e intencionalidad a lo que aprenden y, para lo cual resulta necesario que el docente cumpla la función de guiar a los niños a inventar, descubrir, tomar decisiones, plantearse preguntas, experimentar, estimar resultados, argumentar procedimientos, comparar cantidades, generalizar, sintetizar, entre otros. (MEC, 2008b, p. 334)

La última motivación, se apoya en nuestro deseo de que este trabajo inicie un camino hacia la investigación en la formación de profesores de matemáticas en Paraguay. Usando tareas profesionales como un insumo para la reflexión sobre el conocimiento matemático y conocimiento didáctico de contenido de los profesores que enseñan en el primer y segundo ciclo, así también, fortalecer nuestros conocimientos como formadores de formadores.

Características del contexto

En este apartado describimos el contexto de la formación de profesores en Paraguay, considerando elementos como la estructura del sistema educativo paraguayo, la formación docente inicial y continua en servicio, la educación escolar básica del primer y segundo ciclo, y la caracterización de los profesores de las escuelas de aplicación, a quienes va dirigido el diseño de tareas.

Para describir las características del contexto, recurrimos a la revisión bibliográfica del marco legal de referencia, como la Ley N.º 1264/98 General de Educación y la Carta Orgánica aprobada por la Ley N.º 5749/2017, así como al Diseño Curricular de la Formación Docente Inicial para el Profesorado de la Educación Escolar Básica Primer y Segundo Ciclo implementado en el año 2020; además, consultamos el portal virtual del Ministerio de Educación y Ciencias de Paraguay (https://www.mec.gov.py/).

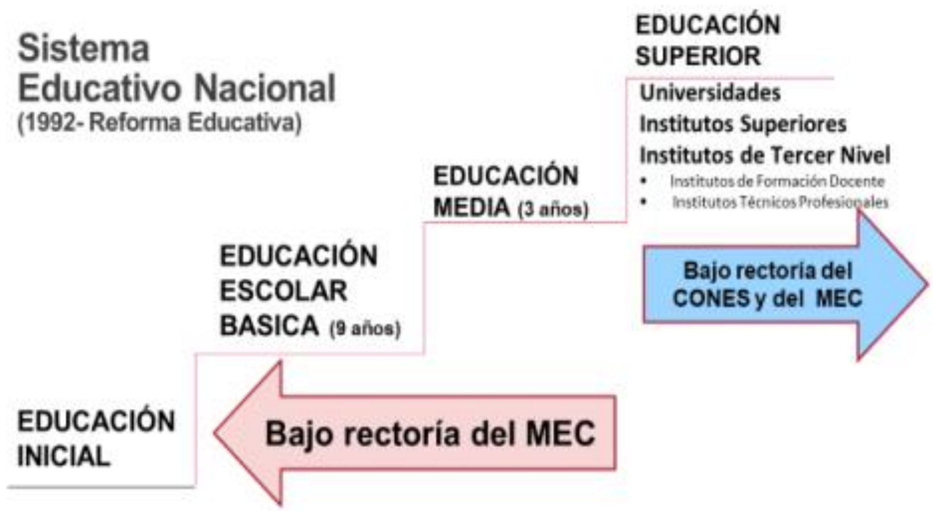
Sistema educativo paraguayo

La legislación educativa paraguaya, compuesta por la Ley General de educación N.º 1264 de 1998 y la Ley de la Carta orgánica del Ministerio de Educación N.º 5749 de 2017, establece la estructura del sistema educativo nacional, que abarca el régimen general, el régimen especial y otras modalidades de atención educativa.

El régimen general, se estructura en tres niveles: el primero, que comprende la Educación Inicial y la Educación Escolar Básica (EEB); el segundo, que abarca la Educación Media (EM); y el tercero, que corresponde a la Educación Superior (ES). En este último nivel se encuentra la educación terciaria, que incluye a los Instituto de Formación Docente (IFD) y Niveles de Formación Docente – Centro Regional de Educación, responsables de la formación inicial y continua en servicio de profesores. Esto se representa gráficamente en la Figura 1.

Figura 1

Sistema Educativo Nacional. Régimen general



Nota. El organizador gráfico muestra la estructura del sistema educativo paraguayo, específicamente del régimen general. Tomado de Speratti et al. (2023).

Por su parte, el régimen especial se circunscribe a la educación artística, arte dramático, música, danza, lenguas extranjeras y otras etnias. Finalmente, las modalidades de atención educativa consideran: educación general básica y educación permanente, educación para grupos étnicos, educación campesina y rural, educación de personas con limitaciones excepcionales, educación militar y policial; y la educación para ministros de culto. Los establecimientos educativos pueden ser de gestión estatal (oficial), gestión privada subvencionadas por el Estado y no subvencionadas por el Estado (Speratti et al., 2023).

Formación docente continua

Las Instituciones Formadoras de Docentes (IFD) de gestión oficial, privada y privada subvencionada son centros educativos de tercer nivel de referencia de la Educación Superior (Institutos de Formación Docente, Nivel de Formación Docente – Centro Regional de Educación), vinculadas al MEC. "Las mismas se encargan de formar a los docentes de todos los niveles educativos a nivel nacional, y se rigen por las normativas establecidas por el Viceministerio de Educación Superior, según estipula la Resolución 7056/12" (Castillo y Manso, 2020, p. 86).

Según el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) en su informe del año 2023, Paraguay cuenta con 40 Institutos de Formación Docente de gestión oficial, de los cuales 38 recibieron el certificado de calidad y dos (2) han sido postergados. En cuanto a los Institutos de Formación Docente (IFD) de gestión privada, de los 75 habilitados en el periodo señalado, 10 participaron en el proceso, de los cuales 6 obtuvieron el licenciamiento y 4 fueron postergados. Es importante destacar que a partir del año 2022 se ha convocado a nuevos Institutos de Formación Docente de gestión privada a participar en el proceso, y un total de 34 se inscribieron, encontrándose actualmente en la fase de autoevaluación.

La Formación Docente Continua es un proceso sistemático y dinámico de mejora constante que busca desarrollar las competencias necesarias para el desempeño idóneo y comprometido de los profesionales de la educación. Este proceso fomenta una visión prospectiva y la capacidad de adaptarse a las demandas del entorno, con el objetivo de reorientar procesos y acciones, elevando así la calidad de la enseñanza y el aprendizaje en beneficio del desarrollo integral de la persona (MEC, 2013).

La Formación Docente Continua comprende la Formación Docente Inicial y la Formación Docente Continua en Servicio. Estas dos etapas están articuladas e interdependientes.

La Formación Docente Inicial es un proceso pedagógico y sistemático en el cual se desarrollan los saberes básicos que promueven las competencias profesionales, la construcción de aprendizajes y la participación en acciones pedagógicas e institucionales. Esta etapa habilita al estudiante de formación inicial de docentes ejercer la profesión con el título de profesor.

En el marco de la Nueva Formación Docente Inicial, en 2020 se implementó un nuevo diseño curricular enfocado en el desarrollo de habilidades para la vida. Este enfoque se basa en la práctica docente centrada en el aprendizaje, buscando vincular la teoría con la práctica, dando énfasis a la investigación-acción. Además, se ha destacado la posibilidad de articular la formación inicial con la formación universitaria de grado (MEC, 2020).

Dentro de esta nueva propuesta, se destacan varios cambios importantes, como el desarrollo de competencias comunicativas en inglés, la implementación del sistema de estudio por créditos y una mayor integración de la teoría con la práctica. A nivel general, la duración de todos los programas de formación docente inicial es de 3 años, organizados en régimen semestral con una carga académica total de 3.351 horas (MEC, 2020).

La Formación Continua en Servicio se realiza con los docentes que están en ejercicio de la docencia de todos los niveles educativos. Este tipo de formación incluye capacitación, actualización, profesionalización y especialización. Según el MEC (2013), estos conceptos se comprenden de la siguiente forma:

- Capacitación: cursos o talleres orientados al desarrollo de habilidades y destrezas para fortalecer aspectos específicos. Son ofrecidos por instituciones autorizadas y cuentan con una carga mínima de 100 horas reloj.
- Actualización: cursos orientados a la integración de competencias pedagógicas innovadoras.
- Profesionalización: cursos dirigidos a docentes bachilleres y titulados sin un perfil específico en el área. Estos cursos permiten al docente en ejercicio obtener el título de profesor en el área en la que se desempeña.

- Especialización: cursos ofrecidos tras la obtención del título terciario, que permiten al docente especializarse en un área y brindar una nueva calificación profesional.

En este trabajo de grado, nos centramos en la formación continua conocida como «capacitación», particularmente en los cursos o talleres de Matemáticas dirigidos a profesores de Educación Escolar Básica del primer y segundo ciclo. En este contexto, y basándonos en nuestras experiencias como formador de profesores, observamos que las tareas abordadas en estas capacitaciones se enfocan más en el conocimiento didáctico del contenido y en aspectos generales de la didáctica (momentos didácticos, estrategias de enseñanza – aprendizaje, evaluación de los aprendizajes, entre otros), dejando de lado aquellas tareas que favorecen el conocimiento de los temas matemáticos, ya que se supone que dichos conocimientos han sido adquiridos en su formación docente inicial.

Con el propósito de particularizar nuestro objeto matemático, la «relación entre perímetro y área», en el contexto educativo de Paraguay, describimos a continuación las características del currículum de la Formación Docente Inicial y de la Educación Escolar Básica (1. ° y 2. ° ciclo), ya que, en la Formación Continua en Servicio, a cuya población va dirigida nuestras tareas profesionales, no existe un currículum preestablecido. Los temas generalmente dependen de los programas de capacitación ofrecidos a nivel nacional por el Ministerio de Educación y Ciencias o de las necesidades específicas de cada contexto educativo (institucional o departamental). En cuanto a las capacitaciones ofrecidas a nivel nacional y departamental, estas suelen estar a cargo de los Institutos de Formación Docente o de la Supervisión Pedagógica de cada departamento geográfico. Por otro lado, las capacitaciones que surgen de las necesidades institucionales están a cargo de los asesores pedagógicos de cada institución, en algunos casos con el apoyo de los Institutos de Formación Docente.

En cuanto a la propuesta curricular del profesorado de educación escolar básica del primer y segundo ciclo se organiza en cinco líneas de formación (Figura 2), las cuales permiten adquirir saberes generales, específicos, complementarios y prácticos indispensables para la formación profesional del docente. Estas líneas de formación incluyen: la formación fundamental (FF), la formación de la especialidad (FE), la formación práctica profesional (FPP), la formación instrumental (FI) y la formación optativa o local (FO), también denominada componente local/optativo (MEC, 2020).

Figura 2

Organización del currículum de la Nueva Formación Docente

Nota. MEC (2020). Tomado del Diseño curricular del Profesorado de EEB 1. ° y 2. ° ciclo.

Con relación a la línea de formación de la especialidad (FE), en la cual se centra nuestro objeto de estudio, el diseño curricular de la Nueva Formación Docente, indica que esta línea abarca los conocimientos de las didácticas y las ciencias propias de cada ciclo y nivel, desde la teoría hasta la práctica. La formación en esta línea es fundamental para el desarrollo profesional especializado, y está en estrecha coherencia con la implementación del currículo de la Educación Escolar Básica (MEC, 2020).

Para promover el desarrollo profesional especializado en el área de Matemáticas, en consonancia con la implementación del currículo de la Educación Escolar Básica, el Ministerio de Educación y Cultura (MEC) propone, en la malla curricular del Profesorado de Educación Escolar Básica del Primer y Segundo Ciclo, el desarrollo de los módulos «Enseñanza de la Matemática I» en el segundo semestre y «Enseñanza de la Matemática II» en el tercer semestre.

A continuación, describimos algunos aspectos importantes de los «Módulos Enseñanza de la Matemática I y II», los cuales incluyen el estudio de los objetos matemáticos de interés en este trabajo de grado.

Los Módulos «Enseñanza de la Matemática I y II» tienen como objetivo proporcionar una formación integral con varios componentes interrelacionados:

> a) Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información matemática y los argumentos apoyados en datos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, o en su trabajo profesional. b) Capacidad para discutir o comunicar información matemática, cuando sea relevante, y competencia para resolver los problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria o en el trabajo profesional. (MEC, 2020, p.49)

La competencia que se desarrolla en el área de matemáticas, relacionada con nuestro objeto de estudio (relación entre perímetro y área), se encuentra en el Módulo «Enseñanza de la Matemática II». Esta competencia consiste en: “Aplicar teorías y estrategias didácticas de la Matemática en el desarrollo de las clases del 1. ° y 2. ° ciclo de la EEB, para potenciar pensamiento lógico matemático utilizando los recursos didácticos pertinentes al desarrollo cognitivo del niño y el adolescente” (MEC, 2020, p. 208).

La unidad didáctica y los contenidos que se especifican para alcanzar la competencia propuesta en el módulo son los siguientes:

Unidad didáctica: Didáctica de la geometría plana y medidas.

Contenidos: Poligonal, polígonos cóncavos y convexos, región interior, región exterior y frontera. Polígonos cóncavos y convexos. *Perímetro y área* de rectángulos, cuadrados, triángulos y círculos. Simetría. Propiedades. Ejes de simetría. *Perímetro y área* del pentágono, heptágono, octágono y eneágono. Planteo y resolución de problemas que requieran el cálculo de perímetro y/o área de la circunferencia y el círculo, como también el *perímetro y/o área* de polígonos inscriptos en una circunferencia. Métodos y estrategias para la enseñanza. (MEC, 2020, p. 209, cursivas fuera del texto original)

Algunas de las orientaciones metodológicas para la implementación de los módulos «Enseñanza de la Matemática I y II» son las siguientes:

- El aprendizaje cooperativo como metodología que potencia los aprendizajes y las producciones de los estudiantes, permitiendo que pequeños grupos trabajen en el desarrollo de habilidades como la resolución de situaciones problemáticas. Esta estrategia no solo promueve el desarrollo de competencias matemáticas, sino también el fortalecimiento de habilidades sociales y comunicativas, facilitando la colaboración, el intercambio de ideas y recursos, y la distribución de responsabilidades entre los alumnos y alumnas (MEC, 2020).
- El trabajo con materiales concretos reconocido por su capacidad para mejorar el proceso de aprendizaje en los alumnos. Esta práctica implica actividades como la construcción de cuerpos geométricos (prismas, cubos, cilindros, maquetas, entre otros), el uso de la

geotabla para trabajar con figuras planas, la creación de carteles de valores y el empleo de diversos instrumentos de medición y dibujo (MEC, 2020).

- Las actividades lúdicas representan una estrategia didáctica valiosa para los docentes y una actividad atractiva para los alumnos. Juegos como el dominó, rompecabezas, tangram, entre otros, pueden ser construidos por los estudiantes, quienes también pueden elaborar las reglas del juego (MEC, 2020).

Todas estas orientaciones y temas del currículum del profesorado están relacionadas con lo que se espera que sea enseñado a los estudiantes. Esto se refleja en el siguiente apartado, en el cual se describen las características del currículum de la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclo.

Educación escolar básica primer y segundo ciclo

La educación escolar básica del primer y segundo ciclo es obligatoria y gratuita en Paraguay. En este período, se contemplan seis años de escolarización para niños de seis a once años, divididos en dos ciclos de tres años cada uno. El primer ciclo abarca el primer, segundo y tercer grado, mientras que el segundo ciclo comprende el cuarto, quinto y sexto grado.

En el currículo del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, en el área de Matemáticas, se plantean capacidades a desarrollar en los niños con el objetivo de que puedan razonar, cuestionarse, establecer relaciones, analogías, generalizar, sintetizar y reflexionar sobre situaciones reales de la vida que requieran la aplicación de conceptos matemáticos aprendidos. (MEC, 2008)

Según el programa de estudios (MEC, 2008a) “la matemática se organiza en las unidades temáticas: El número y las operaciones, La Geometría y la medida, Los datos y la Estadística” (p. 327).

En cuanto a la Geometría se trabaja, entre otros, la deducción de las expresiones matemáticas que permitan el cálculo del *perímetro de polígonos regulares e irregulares y el área de polígonos como el cuadrado, el rectángulo y el triángulo*, a fin de comprender y resolver situaciones problemáticas presentes en el entorno. (MEC, 2008a, p. 327, cursivas fuera del texto original)

En este contexto, nuestro diseño de tareas profesionales se relaciona con la unidad temática «La Geometría y la medida», la cual se aborda desde el primer hasta el sexto grado. Para desarrollar las capacidades matemáticas, se emplean como herramienta los temas descritos en la Tabla 1.

Tabla 1

Temas matemáticos del primero y segundo ciclo de la EEB

Ciclo	Grado	Temas
Primer ciclo	Primer	Figuras geométricas planas, asociadas al cubo (cuadrado), a la pirámide (triángulo) y al paralelepípedo (rectángulo). (MEC, 2008d, p.86)
	Segundo	Regiones poligonales: circulares, cuadradas rectangulares y triangulares. Características y elementos de las regiones poligonales. Región interior, región exterior y frontera de las regiones poligonales. Concepto de perímetro de regiones poligonales como la suma de las medidas de sus lados. (MEC, 2008e, p.86)
	Tercer	Figuras geométricas planas: triángulos y cuadriláteros. Perímetro de figuras geométricas planas regulares. Fórmulas. (MEC, 2008a, p.87)
Segundo Ciclo	Cuarto	Elementos de los polígonos: lados, ángulos y vértices. Polígonos regulares e irregulares. Perímetro de polígonos regulares e irregulares. Área de polígonos: cuadrado, rectángulo y triángulo. (MEC, 2008b, p.331)
	Quinto	Perímetro de polígonos regulares e irregulares. Longitud de la circunferencia. Área de figuras geométricas planas: rectángulo, cuadrado, triángulo, trapecio, rombo. Área del círculo. (MEC, 2008f, p.340)
	Sexto	Perímetro de polígonos regulares e irregulares y circunferencias. Área de polígonos regulares e irregulares y circunferencias.

	Relación entre el perímetro y el área de una figura en función a las medidas de sus lados. (MEC, 2008c, p.351)

Nota. Elaboración propia a partir de los programas de estudio del 1. ° y 2. ° ciclo de la Educación Escolar Básica.

Como mencionamos anteriormente, la formación continua en servicio no cuenta con un currículo preestablecido. Por lo tanto, para el diseño de las tareas profesionales, consideramos las competencias, las capacidades, las orientaciones metodológicas y los temas establecidos tanto en el currículum del profesorado como de los estudiantes de la Educación Escolar Básica del primer y segundo ciclo, y los relacionamos con las características de los profesores a quienes están dirigidos las tareas. Estas características se describen en el siguiente apartado, basándonos en nuestra experiencia como formadores de profesores en los Institutos de Formación Docente, que se vinculan con las escuelas de prácticas en las cuales estos profesores ejercen la docencia, así como en los resultados de una encuesta aplicada a dichos profesores.

Caracterización de los profesores de las escuelas de prácticas de los Institutos de Formación Docente de los departamentos de Misiones, Amambay y Boquerón

A continuación, presentamos algunas características de los profesores en ejercicio de las escuelas de prácticas vinculadas a los Institutos de Formación Docente, a quienes está dirigido el diseño de tareas profesionales fruto de este trabajo de grado. Elegimos esta población porque dichas escuelas de prácticas mantienen un vínculo de cooperación con los Institutos de Formación Docente. Las escuelas de prácticas reciben a los estudiantes de formación inicial de docentes para la planificación, ejecución y evaluación de sus prácticas pedagógicas, mientras que los Institutos de Formación Docente ofrecen a los profesores de estas escuelas cursos de capacitación según sus necesidades. En este caso, describiremos las características de los profesores en ejercicio de seis escuelas de prácticas pertenecientes a tres Institutos de Formación

Docente. En la Figura 3 se muestra la distribución de las seis escuelas de prácticas a cuyos profesores están dirigidas las tareas profesionales.

Figura 3

Distribución de las escuelas de prácticas de los Institutos de Formación Docente de los departamentos de Misiones, Boquerón y Amambay

Nota. Elaboración propia.

Para caracterizar a las escuelas de prácticas diseñamos un formulario en línea aplicado a los profesores de dichas escuelas, obteniendo 42 profesores encuestados. Dicho formulario preguntó por:

- Género
- Nivel educativo más alto alcanzado
- Años de antigüedad en la docencia
- Participación regular en capacitaciones de formación docente en servicio
- Necesidades que enfrenta como profesor de matemáticas
- Tipo de apoyo que le gustaría recibir para fortalecer su práctica profesional
- ¿Cómo se integra las tradiciones y costumbres en la enseñanza de las matemáticas?

Los resultados de dicho formulario se encuentran en el Anexo

La caracterización de los profesores en ejercicio que conforman el cuerpo docente del primer y segundo ciclo de la educación escolar básica en las escuelas de prácticas del Instituto de

Formación Docente Santa Rosa Misiones revela muy poca diversidad geográfica. Según los resultados del formulario, aplicado a 27 maestros de estas cuatro escuelas (Escuela Básica N.º 352 «Defensores del Chaco», Escuela Básica N.º 70 «Prof. Luciano Bordón», Escuela Básica N.º 6150 «Pablo VI» y la Escuela Básica N.º 2361 «San Blas»), aproximadamente el 95% de estos profesionales son de escuelas urbanas, mientras que los restantes son de áreas rurales.

En términos de formación, la totalidad de los profesores en ejercicio de las escuelas de prácticas cuentan con títulos habilitantes (Profesorado en Educación Escolar Básica del primer y segundo ciclo) para ejercer la docencia en los ciclos mencionados. Además, más del 48% de estos profesores han obtenido el título de grado (en Paraguay el título de grado es de licenciatura) y un 18% de los profesores han llegado a obtener una especialización en educación; lo que denota un compromiso con la actualización y la búsqueda de promover mejora continua en sus prácticas.

Es importante señalar que, a pesar de la riqueza en variedad de especialidades educativas, se identifica una limitada representación de licenciados en matemáticas, menos del 26% de los profesores cuentan con este título específico. Estos datos nos pueden sugerir áreas de oportunidad para fomentar la especialización en esta disciplina particular, contribuyendo así al fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en los dos primeros ciclos de la Educación Escolar Básica.

En cuanto a la experiencia laboral, el promedio de antigüedad en sus cargos es de aproximadamente 13 años. Este indicador refleja que la población de los profesores en servicio, en las escuelas de prácticas del Instituto de Formación Docente Santa Rosa Misiones, está en desarrollo profesional. Esto sugiere una experiencia en proceso de consolidación, que puede aportar dinamismo y mayores probabilidades de traducirse en un impacto positivo en la calidad de la enseñanza de la matemática en los dos primeros ciclos de educación escolar básica, brindando más oportunidades de preparación.

Ahora, con relación a la caracterización de los profesores de las escuelas de prácticas que colaboran con el Instituto de Formación Docente Mariscal José Félix Estigarribia, ubicado en la ciudad de Mariscal Estigarribia, departamento de Boquerón, a 526 km de la capital de Paraguay, el formulario fue respondido por nueve (9) profesores.

De acuerdo con los datos obtenidos, la máxima titulación alcanzada por la mayoría de los profesores en ejercicio es de «profesor» (egresados del profesorado, corresponde a pregrado). En cuanto a los años de antigüedad en la docencia, el 80% oscila entre 10 y 15 años. Por otro lado, el 95% de los profesores son mujeres.

Por su parte, la Escuela Básica N.º 458 «Mariscal Francisco Solano López» es la escuela de práctica del Nivel de Formación Docente del Centro Regional de Educación «Dr. Raúl Peña», ubicada en la zona urbana de la ciudad de Pedro Juan Caballero, en el departamento de Amambay. El formulario fue respondido por seis (6) profesores en servicio en esta escuela de práctica, lo que permitió identificar que la población es mayoritariamente femenina (83%).

En cuanto a la formación académica, todos cuentan con el título habilitante de Profesor de Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclo. El 33% posee formación de grado y el 17% cuenta con formación a nivel de posgrado. Es importante destacar que el 100% participa anualmente en cursos de capacitación profesional, lo cual demuestra su compromiso con el desarrollo profesional docente. Con relación a la experiencia laboral, el promedio de antigüedad en sus cargos es de aproximadamente entre 10 y 20 años.

Como se puede observar, el contexto de las escuelas de prácticas de los tres Institutos de Formación Docente es muy similar: la mayoría de estas escuelas están ubicadas en zonas urbanas y cuentan con profesores cuyo nivel de experiencia está en proceso de consolidación. Estos profesores están comprometidos con su formación profesional, como lo manifestaron en el formulario, donde expresaron su interés en recibir capacitación sobre materiales y aspectos didácticos relacionados con su contexto para la enseñanza.

En conclusión, al considerar las características generales del sistema educativo paraguayo, el currículum de la formación docente inicial y las características de la formación docente en servicio, especialmente la de los profesores a quienes están dirigidas las tareas, logramos identificar elementos importantes que permitieron diseñar tareas más pertinentes al contexto y a las necesidades de dichos profesores.

Antecedentes investigativos

Teniendo en cuenta nuestro contexto regional y curricular, así como la inquietud pedagógica descrita, se hace necesario ahora indagar sobre los avances investigativos que se encuentran en la literatura académica que nos permitan direccionar, adelantar y precisar (con el establecimiento de objetivos) los aportes que deseamos hacer como formadores de profesores paraguayos alrededor del objeto matemático de interés y de algunos elementos didácticos como lo son los materiales didácticos. Para ello, utilizamos criterios de búsqueda específicos centrados en estudios que abordan la relación entre perímetro y área, la formación de profesores que enseñan matemáticas, el diseño, la gestión y la evaluación de tareas profesionales y el uso del tangram para la enseñanza de la relación entre perímetro y área. Con este fin, consultamos varios repositorios de investigaciones, entre ellos los de la Universidad de Huelva, la Universidad de los Andes y la Universidad Pedagógica Nacional, así como los portales bibliográficos: Scielo, Dialnet y Google Académico. Es importante señalar que en el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional no encontramos trabajos relacionados con nuestro objeto matemático. Consideramos un total de 21 investigaciones entre trabajos de grado y artículos publicados en revistas. De estas, seleccionamos siete (7) que abordan los asuntos de la inquietud pedagógica, clasificándolos en cuatro categorías que describimos a continuación.

Trabajos que abordan la relación entre perímetro y área

Sobre la relación entre perímetro y área, en el ámbito de la Educación Matemática, hemos identificado dos trabajos que exploran este tema con profundidad. Estos estudios abordan diversas perspectivas y metodologías para comprender cómo estos dos conceptos matemáticos están interrelacionados y su impacto en el aprendizaje y la enseñanza de la medida.

El primer trabajo titulado*: Relaciones entre área y perímetro, convicciones de maestros y de estudiantes*, desarrollado por D'Amore y Fandiño (2007), analizó las convicciones de maestros y de estudiantes en lo que concierne a las relaciones existentes entre perímetro y área de una figura plana. Estos autores resaltan la investigación de Tierney et al. (1990, citado en D'Amore y Fandiño, 2007), en la que se destaca la coincidencia ocasional entre las concepciones de los profesores y las de los alumnos en cuanto a la medida del área. Una observación reveladora es que, en muchos casos, se relaciona el área con fórmulas específicas para su cálculo en lugar de abordarla como un concepto general.

El trabajo de D'Amore y Fandiño (2007) se enfocó en examinar nueve posibles relaciones entre el perímetro y el área de dos figuras planas. Estas relaciones son: mayor perímetro y mayor área, igual perímetro y mayor área, menor perímetro y mayor área, mayor perímetro y área igual, igual perímetro y área igual, y menor perímetro y área igual. Para examinar estos casos, estos autores propusieron una tarea en la que profesores y estudiantes debían encontrar ejemplos que representaran estas relaciones, con el propósito de inducir cambios en sus concepciones.

La metodología empleada se centró en la investigación de hipótesis y respuestas con un grupo de colaboradores, que incluía a profesores de escuela primaria, de escuela media, de escuela superior y de universidad en Bologna, Italia. Los participantes expresaron sus convicciones antes de la investigación mediante declaraciones escritas, entrevistas individuales y colectivas.

El análisis de las respuestas a las preguntas propuestas en la investigación reveló que las dificultades se concentran principalmente entre los maestros de los primeros grados escolares, quienes encontraron difícil hallar ejemplos de los nueve casos de las relaciones entre perímetro y área. Por otro lado, los profesores entrevistados tuvieron comportamientos muy diferentes, aunque también algunas reacciones en común. La mayoría de los profesores, independientemente de su grado escolar, tienden a afirmar que existe una dependencia estrecha entre el aumento o disminución del perímetro y el aumento o disminución del área. Los investigadores concluyen que el obstáculo para entender esta relación es principalmente didáctico, y no solo epistemológico, como se había sugerido en investigaciones anteriores.

Los hallazgos de D'Amore y Fandiño (2007) aportan perspectivas importantes a nuestro enfoque en el diseño de tareas profesionales, al reconocer que los problemas principales son de índole didáctica. Este diseño se centra en considerar ejemplos de los posibles casos de relación entre perímetro y área, con el fin de reconocer la posible independencia entre estos dos conceptos matemáticos.

Por otra parte, la segunda investigación titulada: *Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro*, desarrollada por Cayo y Contreras (2020) en Antofagasta, Chile, identificó aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que favorecen la gestión efectiva de la enseñanza de relaciones entre perímetro y área en estudiantes de educación primaria. Para ello, los autores realizaron observaciones y filmaciones a dos maestras noveles en su primer año de ejercicio docente, quienes habían obtenido el título de Profesora de Educación Básica con Mención en Matemática.

Cayo y Contreras (2020) se basaron en el referente teórico del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK[2]), que analiza tanto el conocimiento del contenido de la materia (MK[3]) como el conocimiento didáctico del contenido (PCK[4]), abordando las creencias como un elemento transversal a los subdominios del modelo. Estos investigadores partieron de una concepción tradicional errónea: que igualdad de área implica igualdad de perímetro, y viceversa, identificando así obstáculos epistemológicos y didácticos presentes en el aprendizaje de estas nociones. Emplearon una metodología con enfoque interpretativo y un estudio de caso múltiple, analizando 13 episodios de clases de las dos maestras noveles de Educación Primaria. De las observaciones y filmaciones, se transcribieron las clases y se realizaron entrevistas semiestructuradas; la información fue analizada usando el modelo MTSK, identificando elementos claves del conocimiento especializado.

Los hallazgos revelaron la importancia de que las maestras comprendan las creencias erróneas de los estudiantes y utilicen material concreto para facilitar la comprensión de conceptos geométricos. También se destacó la necesidad de proponer tareas que fomenten el razonamiento matemático y de abordar obstáculos epistemológicos, como la comprensión incorrecta de las relaciones entre perímetro y área, así como los obstáculos didácticos y la tendencia a aplicar fórmulas sin comprender su significado.

A partir de la revisión del trabajo de Cayo y Contreras (2020), consideramos pertinente diseñar las tareas profesionales utilizando el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), con el propósito de identificar los elementos a abordar en cada subdominio, asociados a las relaciones entre perímetro y área.

---

[2] Mathematics Teacher's Specialized Knowledge
[3] Mathematical Knowledge
[4] Pedagogical Content Knowledge

Los dos trabajos referenciados en este grupo coinciden con nuestro interés, ya que ambos consideran que los obstáculos para comprender las relaciones entre perímetro y área, tanto en profesores en ejercicio como en formación, son de naturaleza didáctica y epistemológica. Estos obstáculos incluyen la comprensión errónea de estas relaciones, los desafíos didácticos como la tendencia a emplear fórmulas sin entender su significado y, según el último trabajo, la necesidad de utilizar materiales concretos para facilitar la compresión.

Trabajos que abordan la formación de profesores que enseñan matemáticas

En relación con esta categoría, identificamos dos trabajos relevantes.

El primer trabajo es abordado desde el artículo titulado: *Formación de profesores que enseñan matemáticas: Investigación colaborativa, producción y socialización de saberes*, desarrollado por Curi (2004) de la Pontificia Universidad Católica de San Paulo, quien indagó sobre el impacto de la formación matemática proporcionada a profesores de educación primaria en Brasil en sus prácticas profesionales, centrándose en un curso superior multidisciplinario y su relación con la enseñanza de las matemáticas.

La metodología utilizada por Curi (2004) consistió en analizar narrativas de siete profesoras que participaban en el curso mencionado, como parte de un grupo de investigación colaborativa. Se llevaron a cabo quince encuentros presenciales, durante los cuales se registraron 2700 minutos de grabación. En estos encuentros, se analizaron materiales de formación y actividades de aula, observándose que algunas profesoras mostraban resistencia a trabajar con geometría debido a la falta de familiaridad o al temor a ser evaluadas. Sin embargo, con el tiempo, estas resistencias disminuyeron y el grupo se volvió más colaborativo, apoyándose en la comprensión de contenidos y en la planificación de actividades didácticas.

Los hallazgos más relevantes mostraron que todas las profesoras destacaron la metodología de resolución de problemas y la identificación de los conocimientos previos de los estudiantes como aspectos importantes del curso de matemáticas. Sin embargo, señalaron la necesidad de profundizar más en los contenidos de geometría y en el tratamiento de la información para incorporarlos de manera más efectiva en sus prácticas docentes. Además, el grupo consideró que un aspecto central del proceso de formación fue la producción y socialización de sus conocimientos, a través de la discusión de experiencias, la exposición de inquietudes y la reflexión colectiva.

Las conclusiones de Curi (2004) nos aportan información sobre la necesidad de una mayor profundización en los contenidos de geometría por parte de los profesores de educación primaria que enseñan matemática, así como la necesidad de espacios de colaboración y reflexión donde los profesores puedan compartir sus experiencias y construir conocimiento. En este sentido, nuestra intención con el diseño de tareas profesionales es brindar un espacio para la reflexión individual de profesores en formación, sobre su práctica y, posteriormente, para la socialización y el intercambio de sus experiencias.

El segundo trabajo titulado: *Formación de profesores de matemáticas: Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*, desarrollado por Llinares (2007), en el marco de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante, exploró la relación entre la formación inicial y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, enfatizando en la importancia de preparar a los futuros profesores para aprender a lo largo de su vida profesional desde la práctica de enseñar matemáticas.

Llinares (2007) se basó en caracterizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesores y los procesos de desarrollo profesional de los profesores en ejercicio desde una misma perspectiva de aprendizaje, reconociendo que los graduados de programas de formación de profesores no egresan como expertos, lo que ha llevado a resaltar la necesidad de enfoques que preparen a los estudiantes para profesores de matemáticas.

En la metodología mencionada por Llinares (2007) resalta la implementación de entornos de aprendizaje que integren registros de la práctica, como el uso de video-clips y entornos virtuales, que promuevan el aprendizaje efectivo de los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio, facilitando la reflexión teórica y la aplicación práctica de los conocimientos adquiridos.

Las conclusiones de Llinares (2007) comprenden que el desafío para los programas de formación inicial y permanente radica en el carácter integrado del conocimiento, especialmente en la relación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico específico de las matemáticas y propone una articulación necesaria a través de tareas que integren y transformen el conocimiento de manera coherente y sistemática. Estas conclusiones aportan datos muy importantes para nuestro trabajo de grado, porque en la tarea a diseñar, podríamos utilizar registros de la práctica como estudio de caso con el objetivo de favorecer la integración del conocimiento matemático y didáctico de los profesores del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica.

Ambos trabajos citados en este grupo se alinean con nuestro interés, ya que consideran fundamentales en la formación de profesores de matemáticas tanto el fomento del conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del contenido. Además, destacan que la inclusión de la práctica en las tareas profesionales permite a los profesores en ejercicio desarrollar las habilidades y conocimientos necesarios para enseñar matemáticas, mediante un espacio para la reflexión sobre la teoría y la aplicación práctica de los conocimientos. Sin embargo, existe una pequeña diferencia, Curi (2004) pone mayor énfasis en el conocimiento matemático, en particular en los contenidos de geometría, mientras que Llinares (2007) se centra tanto en el conocimiento matemático como el conocimiento pedagógico mediado por la práctica.

Trabajos que abordan el diseño, gestión y evaluación de tareas profesionales

Hemos identificado dos trabajos relevantes que abordan el diseño, la gestión y la evaluación de tareas profesionales.

La primera investigación, titulada: *Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas*, desarrollada por Pascual et al. (2023), bajo la perspectiva de una investigación de diseño en la formación de maestros de la Universidad de Huelva, investigó la evolución de una tarea formativa centrada en la construcción de la definición de polígono. Esta tarea se implementó en un curso de Didáctica de la Geometría en el Grado de Maestro de Primaria, basándose en la transferencia de resultados de investigación.

La investigación se basó en el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que distingue entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido (PCK), integrando las creencias como elemento transversal. Además, profundiza en los subdominios del PCK, enfocándose en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT[5]), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM[6]) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS[7]).

La metodología adoptada fue la de una investigación de diseño, centrada en la creación e implementación de tareas para la formación inicial de maestros de Primaria en la Universidad de Huelva, España. El estudio se dividió en dos momentos: el primero, basado en una

[5] Knowledge of Mathematics Teaching
[6] Knowledge of Features of Learning Mathematics
[7] Knowledge of Mathematics Learning Standards

videograbación, y el segundo, en las producciones de los estudiantes para maestros. Como instrumento de análisis, se utilizó la observación de un vídeo de una clase de quinto de primaria para fomentar la reflexión y el análisis de la práctica docente.

Los hallazgos de Pascual et al. (2023) muestran que el segundo momento de implementación movilizó más elementos del PCK que el primero, destacando el uso del vídeo para acercar a los estudiantes a situaciones reales de aula y fomentar una reflexión más profunda sobre el conocimiento didáctico del contenido. Se subrayó la importancia de la ejemplificación como estrategia para la enseñanza, para comprender conceptos matemáticos y reflexionar sobre la práctica escolar, aunque los resultados obtenidos están limitados por las variables propias de los estudios de diseño.

La investigación de Pascual et al. (2023) destaca cómo las tareas formativas facilitan la construcción del conocimiento especializado y la reflexión sobre la praxis docente en la formación de maestros. Estos hallazgos son valiosos para nuestro trabajo de grado, ya que orientan el diseño de las tareas al reconocer la movilización autónoma del conocimiento didáctico del contenido por parte de los profesores, lo que permite que el conocimiento especializado emerja de manera natural durante el análisis de situaciones de aula. Estas actividades facilitan que los profesores gestionen de forma independiente su enseñanza, sin depender exclusivamente de instrucciones externas.

El segundo trabajo, titulado: *Tareas matemáticas en la formación de maestros: Caracterizando perspectivas*, desarrollado por Llinares (2011) en la Universidad de Alicante, ejemplificó cómo un formador de profesores puede tomar decisiones sobre las características de las tareas matemáticas propuestas en un programa de formación y su implementación, con el objetivo de generar oportunidades de aprendizaje matemático para los futuros profesores.

Según Llinares (2011), en la formación de profesores de educación primaria, es importante que los futuros profesores comprendan tanto el contenido matemático como su adecuada enseñanza, considerando diversas estrategias pedagógicas. Además, destaca la importancia de adoptar una perspectiva situada en el aprendizaje del profesor, en la que las tareas se consideran instrumentos para comprender y mejorar la práctica docente. Esto implica que el formador de profesores debe diseñar tareas matemáticas que promuevan la reflexión sobre la competencia docente, entendida como la capacidad de aplicar el conocimiento para resolver los desafíos profesionales relacionados con la enseñanza de las matemáticas.

La metodología consistió en ejemplificar las competencias necesarias para que los futuros profesores puedan analizar las propuestas de libros de texto, específicamente en la enseñanza de los números decimales en sexto grado, y el papel de los modos de representación ante un problema planteado.

Los hallazgos de Llinares (2011) nos brindan aportes importantes para considerar en las tareas matemáticas dirigida a los profesores paraguayos, tales como: permitir que los profesores en ejercicio reexaminen su comprensión de las ideas matemáticas, amplíen su conocimiento de contenidos matemáticos y reflexionen sobre sus creencias en relación con la actividad matemática. De esta manera, se reconoce la importancia de las tareas profesionales en la formación de profesores para generar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

Los dos trabajos incluidos en este grupo coinciden con nuestro interés, ya que resaltan la importancia del diseño de tareas profesionales en la formación inicial de maestros de primaria. Estas tareas ayudan a los profesores a diferenciar lo que deben saber cómo maestros y lo que deben saber los estudiantes a quienes enseñan.

Trabajo que aborda el uso del tangram

En relación con esta categoría, identificamos un solo trabajo relevante.

El trabajo es abordado desde el artículo titulado: *Resolver problemas utilizando tecnología y actividades lúdicas para fortalecer el aprendizaje de áreas y perímetros en primer grado de secundaria*, desarrollado por Rocha (2021), quien implementó su propuesta en la Escuela Secundaria General Camilo de San Luis Potosí, México. El objetivo principal del trabajo fue diseñar, analizar y reflexionar sobre el uso de material didáctico y tecnológico en la enseñanza de áreas y perímetros, con el fin de incrementar la motivación y participación de los alumnos de primer grado de secundaria.

La metodología aplicada se fundamentó en la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, siguiendo sus cuatro fases: acción, formulación, validación e institucionalización. En el transcurso de las secuencias didácticas, se destacó el uso del tangram chino de siete piezas como material didáctico, lo que estimuló tanto la participación de los estudiantes como su interés en el contenido de áreas y perímetros de figuras geométricas planas. Rocha (2021) responde a la pregunta fundamental sobre la importancia del tangram al señalar que su utilización facilitó una conexión efectiva entre la profesora en formación y los alumnos. Además, se observó un incremento notable en la participación, la confianza y la colaboración entre los estudiantes.

La implementación de la secuencia didáctica reveló que el tangram, al presentar retos y permitir la simulación, la exploración y la manipulación, favorece un aprendizaje efectivo para los estudiantes, ya que, el uso de materiales manipulativos permite una mayor participación del estudiante en las actividades propuestas, alineándose con una de las características que se les atribuye a los materiales: su carácter motivador.

El trabajo de Rocha (2021), nos aporta cómo integrar el tangram en la enseñanza y aprendizaje de la relación entre perímetro y área de figuras planas. En nuestro trabajo, utilizaremos el tangram (*ao po'i*) como un medio didáctico para enseñar las relaciones entre estos dos conceptos matemáticos; no obstante, mientras el trabajo de Rocha (2021) fue aplicado a una población escolar, nosotros pretendemos aplicarlo, en el futuro, a profesores en ejercicio de educación básica primaria.

En conclusión, este análisis nos proporciona elementos que nos permiten confirmar la pertinencia sobre el interés que tenemos sobre la relación entre perímetro y área, la formación de profesores de matemáticas, la gestión de tareas profesionales, y el uso del tangram como material didáctico. Estos estudios no solo aportan conocimientos actualizados y valiosos en cada uno de estos temas, sino que también nos ofrecen bases teóricas para el diseño de las tareas profesionales.

Objetivos

A partir de los antecedentes previamente mencionados, el contexto en el que inscribe el trabajo de grado, y la inquietud pedagógica que lo motiva, se construyen los siguientes objetivos que orientan este trabajo de grado.

Objetivo general

Diseñar tareas profesionales que promuevan la construcción del conocimiento matemático y didáctico de las relaciones entre perímetro y área en profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica, 1. ° y 2. ° ciclo, utilizando el tangram *ao po'i* como material didáctico, para favorecer la competencia mirar profesionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Objetivos específicos

- Construir un marco de referencia acerca de los aspectos matemáticos y didácticos de las relaciones entre perímetro y área, el tangram y la formación de profesores de matemáticas (tareas profesionales y material didáctico).
- Crear el material didáctico tangram *ao po'i*, destacando sus características geométricas y métricas, con el fin de utilizarlo como herramienta didáctica para el desarrollo de tareas

profesionales en la formación de profesores paraguayos, enfocadas en las relaciones de perímetro y área.

- Elaborar tres tareas profesionales dirigidas a profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclo, asociadas a las relaciones entre perímetro y área, el aprendizaje de las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes y la utilización del método COPISI para la enseñanza, empleando el tangram *ao po'i*.

Marco de referencia

En este capítulo damos a conocer los fundamentos conceptuales que sustentan el diseño de las tareas profesionales. El marco de referencia se centra en cuatro marcos principales. El marco matemático, proporciona las bases conceptuales necesarias para explorar la relación entre el perímetro y el área. El marco didáctico se enfoca en las características del aprendizaje de las relaciones entre área y perímetro, en el conocimiento de su enseñanza y en el uso del método COPISI, con el objetivo de contar con los insumos necesarios para favorecer el conocimiento didáctico del contenido (PCK) de los profesores. En el tercer apartado de los referentes se presenta el tangram *ao po'i* como material didáctico, este material es una propuesta de los autores de este trabajo, que además de desarrollar el objeto matemático de interés, busca vincular la identidad cultural paraguaya, y entender su relación con las matemáticas mediante los diseños del bordado del *ao po'i*. Finalmente, el cuarto marco refiere a la formación de profesores. Allí se resalta el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) para definir la conceptualización sobre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, ya que es en este ámbito donde el presente trabajo aporta.

Marco matemático

En este apartado, abordamos las bases conceptuales necesarias para analizar las relaciones entre el perímetro y el área. Comenzamos con la descripción de los conceptos fundamentales de la medida, que incluyen la magnitud, la cantidad de magnitud, la medida, la unidad de medida y los sistemas de medidas, tanto regulares como irregulares. También desarrollamos conceptos relacionados con el perímetro y el área, como la región plana, la longitud, el perímetro y el área. Además, presentamos las fórmulas para calcular el perímetro y el área de polígonos regulares e irregulares. Finalmente, presentamos las nueve relaciones entre perímetro y área propuestas por D'Amore y Fandiño (2007).

Conceptos fundamentales

El concepto de medida tiene raíces antiguas en la historia y se emplea de manera generalizada en diversas culturas y épocas. Pizarro et al. (2016) describen que el conocimiento de la medida es una herramienta útil en la vida de los ciudadanos; por ello, independientemente de la cultura, la religión y la política elegida o impuesta, en la mayoría de los países del mundo, el conocimiento de la medida se desarrolla en el currículo escolar.

Por supuesto, la medida de magnitudes está presente en el currículo escolar de Paraguay, tanto en la formación inicial de profesores del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, como en el programa de estudio de los alumnos de dicho nivel educativo. Específicamente, en la unidad temática «Geometría y medidas» la cual se encuentra dentro del currículo de los estudiantes del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, se encuentra el objeto matemático que queremos abordar en el diseño de las tareas profesionales, el cual es la «relación entre perímetro y área».

Consideramos pertinente partir de los conceptos de magnitud, cantidad de magnitud y medida para establecer la relación entre perímetro y área, ya que ambos conceptos relacionan dos magnitudes (longitud y área). Generalmente, los profesores y alumnos suelen confundir estos dos conceptos debido al uso incorrecto de fórmulas, que generalmente carecen de significado, y a la falsa creencia de que la igualdad de áreas implica la igualdad de perímetros, como lo afirman García y Carrillo (2006), "la confusión entre área y perímetro en estudiantes se debe al uso incorrecto de fórmulas y la creencia de que la igualdad de áreas implica igualdad de perímetros" (p. 42). A continuación, con el ánimo de argumentar la importancia de la idea expresada anteriormente, describimos los conceptos de magnitud, cantidad de magnitud, medida y sistemas de medida con base en referentes teóricos pertinentes.

Magnitud. El concepto de magnitud que utilizamos para diseñar las tareas se fundamenta en la definición propuesta por Caggiani et al. (2015), quienes describen la magnitud desde una perspectiva física y matemática. Desde el punto de vista físico, la magnitud se refiere a cualquier atributo que puede ser cuantificado. Matemáticamente, una magnitud es un conjunto de cantidades que cumplen dos propiedades fundamentales: ser sumables y, en consecuencia, multiplicables por un número real. Estas características corresponden a las magnitudes extensivas, las cuales se clasifican en dos tipos: discretas y continuas. Las magnitudes discretas se cuantifican mediante números naturales, mientras que las continuas requieren de números reales positivos, ya sean racionales o irracionales.

Por otro lado, Chamorro y Belmonte (1988) afirman que "una magnitud casi siempre responde a una característica física, a un atributo observable de los objetos (como la longitud, masa, capacidad, etc.)" (p. 131). Desde el punto de vista matemático, Chamorro (2003) define la "magnitud como un conjunto M de clases de equivalencia en el que se ha definido una suma $+$ y un orden $<$, dotando al conjunto $(M,<,+)$ de la estructura de monoide conmutativo y arquimediano"[8] (p. 224).

Cantidad de magnitud. El concepto de magnitud implica necesariamente abordar la relación de equivalencia, una idea fundamental en matemáticas. Una relación de equivalencia es un tipo de relación particular en A (un conjunto cualquiera) que satisface las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

- ✓ Propiedad reflexiva: Una relación en A, un conjunto en sí mismo, es reflexiva si todo elemento de A está relacionado consigo mismo. La relación «tener la misma área» en el

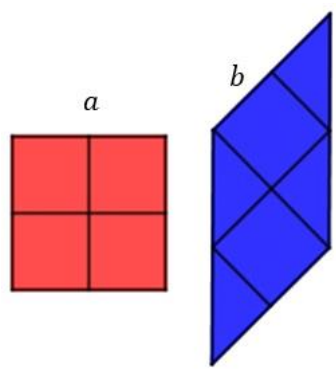
[8] Un semigrupo es una dupla de la forma (A, *), tales que A es un conjunto no vacío y * es una operación binaria, en la cual se cumple que la operación binaria es cerrada y asociativa. Si además de todo lo anterior, la dupla también tiene elemento neutro y es conmutativa se denomina monoide conmutativo.

conjunto de los polígonos es reflexiva porque todo polígono tiene la misma área que sí mismo.

- ✓ Propiedad simétrica: Una relación en A es simétrica si, cuando un elemento a en A está relacionado con otro elemento b en A, entonces b también está relacionado con a. Siguiendo con la misma relación en el conjunto de polígonos («tener la misma área»), si el cuadrado rojo tiene la misma área que el paralelogramo azul (ver Figura 4), entonces el paralelogramo azul también tiene la misma área que el cuadrado rojo.

Figura 4

Ejemplo de propiedad simétrica entre polígonos, relación «tener la misma área»

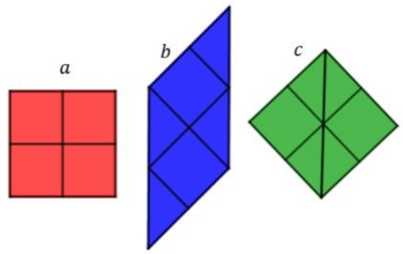


Nota. Elaboración propia.

- ✓ Propiedad transitiva: Una relación en A es transitiva si cuando un elemento a en A relacionado con un segundo elemento b en A y este segundo elemento b está relacionado con un tercer elemento c en A, entonces el primer elemento a está relacionado con el tercer elemento c. Por ejemplo, si el cuadrado rojo a tiene la misma área que el paralelogramo azul b, y este paralelogramo azul b tiene la misma área que el cuadrado verde c, entonces, según la propiedad transitiva, el cuadrado rojo a también tiene la misma área que el cuadrado verde c (Figura 5).

Figura 5

Ejemplo de propiedad transitiva entre polígonos, relación «tener la misma área»



Nota. Elaboración propia.

Estas tres propiedades (reflexividad, simetría y transitividad) definen la relación «tener la misma área» entre polígonos como una relación de equivalencia. Esto implica que todas las piezas que cumplen con esta relación de equivalencia forman una clase de equivalencia dentro del conjunto dado. En este contexto, la cantidad de magnitud se entiende como un conjunto de objetos agrupados por una «propiedad común», es decir, ser iguales en ese atributo o magnitud, independientemente del contexto o material didáctico en el que se observe (Chamorro y Belmonte, 1988). Esta relación de equivalencia basada en la cantidad de magnitud facilita la comparación entre diferentes magnitudes.

Ejemplo: Si observamos las dos figuras geométricas de la Figura 6 (un triángulo y un trapecio rectángulo) y tomamos como criterio «tener mayor área», podemos decir que el trapecio rectángulo tiene una mayor cantidad de magnitud (área) que el triángulo rectángulo.

Figura 6

Comparación de áreas: trapecio y triángulo rectángulo

Nota. Elaboración propia.

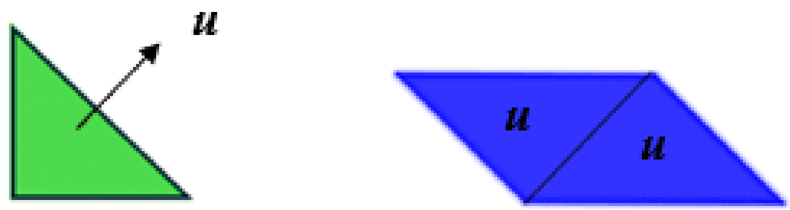
Medida. Para Chamorro y Belmonte (1988) "medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud" (p. 143), esta definición de medida matemática es bastante intuitiva y se ajusta a la comprensión común de lo que significa medir. De igual forma, según estos autores, para medir una cantidad, lo que se busca es encontrar un número que, al multiplicarlo por la unidad, resulte la cantidad que queremos medir. De esta manera, se dice que esa cantidad mide dicho número de unidades. Es decir, dada una cantidad de magnitud a y una unidad u, la medida de a respecto a la unidad u es el número real r que cumple la relación $r.u = a$.

En relación con el proceso de medir, Chamorro (2003) sostiene que "fijar la aplicación medida supone fijar la unidad" (p. 234), en relación con esto, la unidad de medida es relevante para interpretar y comprender correctamente el resultado de una medición. Sin esta unidad, el resultado queda desprovisto de contexto, lo que impide determinar con precisión la magnitud que se está midiendo, en consecuencia, omitir la unidad de medida puede llevar a malentendidos y errores en la interpretación de la información.

Ahora bien, según Caggiani et al. (2015), desde el punto de vista físico, medir implica determinar cuántas veces una unidad específica se incluye en una cantidad determinada. Matemáticamente, esto se traduce en asignar un número real a esa cantidad. Los autores explican que la medida es el número de veces que una cantidad contiene la unidad o referencia utilizada para evaluar otras cantidades del mismo tipo. En la Figura 7 se puede observar que el triángulo verde es la unidad de medida (u) y que la medida del área de la superficie del paralelogramo es $2 \cdot u = 2u$.

Figura 7

Medida del área del paralelogramo



Nota. Elaboración propia.

Unidad de medida. En el ejemplo anterior, en el que se expresa la medida del área de la superficie del paralelogramo, se ha empleado como unidad de medida la superficie de un triángulo rectángulo. Esto se debe a que una unidad de medida es una cantidad que se ha estandarizado a partir de las comparaciones repetidas con un patrón, entendido este último como una representación física de dicha relación.

Chamorro y Belmonte (1988) indican que "medir es, en realidad, realizar una comparación indirecta en la que se escoge de antemano el objeto que se usará como intermediario en la comparación para que sirva como referencia única para cualquier objeto que se tome" (p.62). En este sentido, es importante incorporar unidades de medida adecuadas a la realidad que se desea medir, practicando el encuadramiento[9] y buscando precisión mediante mejoras continuas.

Por ejemplo, si se utilizan lápices (asumiendo que son iguales) como unidad de medida para comparar dos longitudes diferentes, l y l', y se encuentra que l se «cubre» con 4 lápices y l'

[9] Según Chamorro y Belmonte (1988), el término «encuadramiento» en el contexto de la medida se refiere a un método para aproximar una cantidad cuando no se puede medir exactamente con las unidades disponibles. Consiste en definir un rango dentro del cual se encuentra la medida real. En otras palabras, se establece un intervalo que contiene la magnitud que se está midiendo.

con 6, entonces decimos que la medida de l es 4 lápices y la de l', 6 lápices. De manera similar, si se intenta cubrir un lápiz con otros lápices, se observa que un lápiz mide un lápiz. Aunque esto puede parecer obvio, ofrece una indicación de lo que realmente significa la palabra «unidad».

Las medidas de l y l' son de tipo entero porque la longitud puede ser cubierta completamente por un número exacto de lápices sin dejar restos. No obstante, en la práctica, es poco común encontrar longitudes que se ajusten exactamente a un número entero positivo (por ejemplo, para el caso que se está considerando, de lápices), lo que significa que a menudo se obtendrán fracciones de la unidad, lo que implica que los números enteros positivos son insuficientes para representar una medida de una magnitud. En la práctica del mundo físico estas medidas se suelen representar con números fraccionarios, en el ámbito matemático, estos números resultan insuficientes. Es en este contexto donde se requiere la utilización de números reales para expresar con precisión la medida de una magnitud (como al querer medir la diagonal de un cuadrado con su lado como unidad). Como explican Caggiani et al. (2015), las magnitudes continuas requieren números reales, ya sean racionales o irracionales, para su correcta representación.

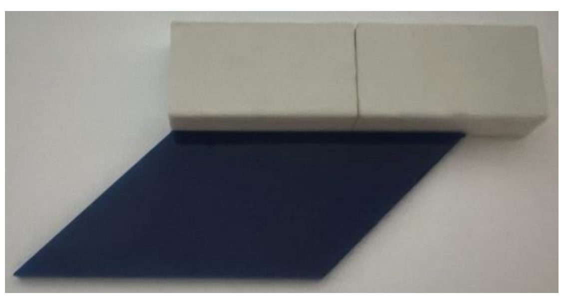
Por otro lado, Chamorro y Belmonte (1988) proponen que la elección de una unidad es siempre arbitraria, es decir, podemos elegir cualquier objeto o cantidad como nuestra unidad estándar; la unidad elegida depende de la necesidad y del contexto. Por ejemplo, podríamos elegir un borrador de lápices o un tajalápiz para medir la longitud de un cuaderno. Es importante que la unidad sea práctica y adecuada para el proceso de la medición. En consecuencia, no tendría sentido elegir una unidad demasiado pequeña o demasiado grande para el objeto que estamos midiendo. Además, se requiere que la unidad se pueda subdividir.

Los mismos autores sostienen que “elegir una unidad supone entre otras cosas una adecuación entre lo que se desea medir y el objeto elegido como unidad” (p.63). Para ilustrar esto (ver Figura 8), utilizamos borradores de lápices para explicar qué sucede cuando la medida de una magnitud, en ese caso la longitud, no corresponde a un número entero. Por ejemplo, si la longitud de un lado de la pieza de un tangram no coincide con un número entero respecto a la unidad elegida, en este caso el borrador, realizamos un encuadramiento de la medida de la longitud de la siguiente manera: $n.a < m < (n+1).a$, donde: m representa la longitud del lado que estamos midiendo, a la longitud del borrador de lápiz, y n y $n+1$ es el número de (lado más largo) del borrador usados.

Por lo tanto, la longitud del lado de la pieza es mayor que (el lado más largo de) un borrador y menor que dos (lados más largos de) borradores; o sea, para el ejemplo: 1 (lado más largo de) borrador $< m < 2$ (lado más largo de) borradores. Esto demuestra que las unidades de medida elegidas pueden no encajar de manera exacta, pero permiten aproximarse.

Figura 8

Encuadramiento de la longitud de un lado de la pieza de un tangram tomando como unidad (el lado más largo de) un borrador



Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

Sistemas de medida. Según Kum Witold (1980, citado en Chamorro y Belmonte, 1988), las unidades de medida en la antigüedad eran difíciles de estandarizar. Existían unidades de medida para la longitud, como el dedo, que se utilizaba para medir el espesor de un tablón; el palmo, para medir el ángulo de una casa; el codo, para medir piezas de tela; y el paso, para calcular la distancia del camino, es decir, se basaban en medidas antropométricas. Estas medidas presentaban variaciones significativas, que lo que daba lugar a un sistema irregular. Sin embargo, esta situación impulsó la necesidad de encontrar un sistema de medida uniforme y regular.

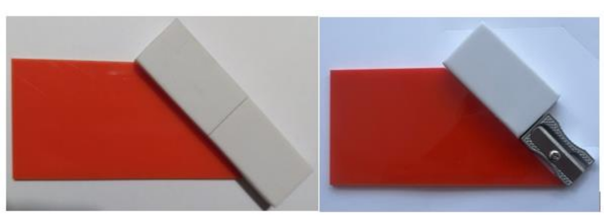
Sistemas de medidas irregulares. Según Chamorro y Belmonte (1988), en el sistema de medida irregular, se mide una magnitud utilizando distintas unidades de medida no estándar, entre las cuales no existe una relación de correspondencia o una constante de proporcionalidad. Por ejemplo, para medir la longitud de un lado de una pieza de un tangram utilizando un sistema de medidas irregular (-lado más largo de un- borrador y -lado más largo de un- tajalápiz), seguiríamos estos pasos:

- ✓ Colocar borradores $(u1)$ a lo largo del lado que se desea medir, uno tras otro, hasta que coincidan o sobrepasen su longitud. Luego, retirar el último borrador añadido.
- ✓ Agregar tajalápices $(u2)$ para completar la longitud que se desea medir.

Supongamos que, para cubrir completamente la longitud del lado de la pieza de un tangram, se utilizaron 1 borrador $(u1)$ y 1 tajalápiz $(u2)$(Figura 9). Para esta medición, se han empleado dos unidades de medida que no tienen una relación de correspondencia ni una constante de proporcionalidad. Por lo tanto, el sistema de medida utilizado es un sistema de medida irregular.

Figura 9

Sistema de medida irregular



Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

La falta de uniformidad de un sistema irregular de medidas dificultaba la realización de comparaciones precisas y consistentes. Esta variabilidad generaba problemas al intentar establecer una medida estándar que fuera confiable y ampliamente aplicable. Por lo tanto, surgió la necesidad de desarrollar un sistema de medida más regular y uniforme, que pudiera proporcionar una forma más fiable y fácil de usar para medir y comparar longitudes en diferentes contextos.

Así como las unidades de medida antiguas eran irregulares y causaban dificultades, el concepto de sistemas de medida irregulares modernos también refleja la falta de uniformidad y la necesidad de estándares consistentes. La búsqueda de un sistema uniforme, tanto en la antigüedad como en la actualidad, subraya la importancia de contar con medidas estandarizadas para asegurar precisión y facilidad en la comparación.

Sistemas de medidas regulares. Para simplificar y agilizar los cálculos, es recomendable establecer sistemas regulares. Esto proporciona un método sistemático para formar unidades mayores (superiores a una unidad dada) y unidades menores (inferiores a una unidad dada). En relación con los sistemas de medidas regulares, Chamorro y Belmonte (1988) afirman que en un sistema de medida regular se realiza la medición de una magnitud utilizando varias unidades de medida que mantienen una relación de correspondencia y una constante de proporcionalidad entre ellas.

Si se requiriera convertir el sistema de medida irregular utilizado en el apartado anterior en un sistema de medida regular, tendríamos que determinar una constante de proporcionalidad entre las unidades, así como identificar la unidad fundamental, las unidades de orden superior y las unidades de orden inferior. Por ejemplo: podríamos utilizar las regletas de Cuisenaire para medir el lado de una pieza de un tangram, dado que entre las regletas existe una proporción constante. Dos regletas blancas $(u2)$, equivale a una regleta roja $(u1)$ (ver Figura 10).

$$1 \cdot u1 = 2 \cdot u2$$

La elección de una unidad fundamental u en el sistema implica que todas las demás unidades se definen en relación con u. Las unidades que son más grandes que u se llaman múltiplos, mientras que las más pequeñas se conocen como submúltiplos. Sin embargo, para evitar confusiones, es preferible referirse a ellas como sobreunidades y subunidades (Chamorro y Belmonte, 1988).

Figura 10

Sistema de medida regular

Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

Uno de los sistemas de medición más comunes y ampliamente utilizados es el sistema de medidas decimal, también conocido como Sistema Métrico Decimal. En este sistema, las unidades de medida están organizadas de manera que las conversiones entre ellas se realizan en múltiplos de diez. Por ejemplo, en el caso de magnitudes lineales como la longitud, 1 metro es igual a 10 decímetros, 100 centímetros o 1000 milímetros. Esta estructura basada en potencias de diez facilita el cálculo y la conversión entre diferentes unidades de medida, no solo en longitudes, sino también en otras magnitudes como el área, el volumen y la masa. Por ejemplo, un litro equivale a 1000 mililitros, y un kilogramo equivale a 1000 gramos, mostrando cómo el sistema decimal simplifica la relación entre diferentes medidas.

Este sistema fue seleccionado lógicamente porque nuestro sistema de numeración es de base diez, lo que facilita considerablemente los cálculos. El metro, como unidad patrón (originalmente una barra de platino e iridio), se hizo obligatorio a partir de la I Conferencia Internacional de Pesas y Medidas de 1889. Sin embargo, debido a su margen de error y a la necesidad de mayor precisión en los cálculos con el tiempo, fue reemplazado en 1960 por una definición más exacta que garantizara mejor la reproducción del patrón.

Perímetro y área

En este apartado, abordamos los aspectos relacionados con el perímetro y el área. Para ello, es oportuno definir previamente algunos conceptos, como región plana y longitud.

Región plana. Existen diversas nociones sobre lo que constituye una región plana. En este trabajo adoptamos la definición de Alfonso (1997), quien reconoce que una región plana es un subconjunto del plano, aunque no todos los subconjuntos del plano califican como regiones. Por ejemplo, los subconjuntos de segmentos de recta, rectas o ángulos no se consideran regiones. Del mismo modo, un conjunto finito de puntos en el plano tampoco se clasifica como una región. En este contexto, Alfonso (1997) define que:

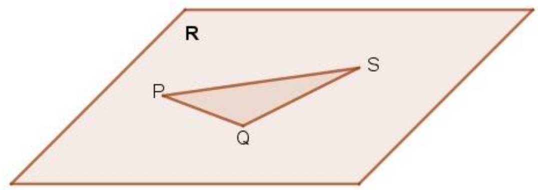
R es una región plana si:

1. R es un subconjunto no vacío del plano, y
2. Si P es un punto de R, existen en R otros dos puntos Q y S no colineales con P y el interior del triángulo PQS está contenido en R. (p.255)

Como se evidencia en la Figura 11.

Figura 11

Representación gráfica de una región plana

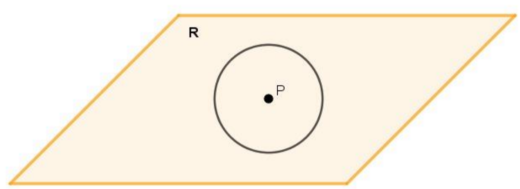


Nota. Elaboración propia.

Además, es importante definir cuándo un punto es interior a una región plana y cuándo pertenece a la frontera de una región plana. En ese sentido, Alfonso (1997) aclara que un punto P es interior a la región plana R si existe una circunferencia con centro en P contenida en R (Figura 12).

Figura 12

Punto P interior a la región plana R



Nota. Elaboración propia.

Por otro lado, se dice que F es un punto de frontera de la región R si cualquier circunferencia con centro en F contiene puntos de R y puntos que no son de R (Figura 13).

Figura 13

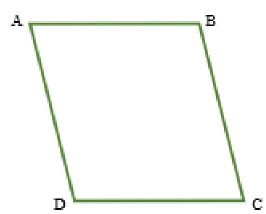
Punto F frontera en una región plana R

Nota. Elaboración propia.

En consecuencia, el conjunto de todos los puntos de frontera de la región R se llama su frontera. Es decir, los segmentos que forman los lados de un polígono determinan su frontera. Por ejemplo, en la Figura 14 los lados $AB, BC, CD\ y\ AD$ determinan la frontera del paralelogramo $ABCD$.

Figura 14

Frontera de la región plana ABCD



Nota. Elaboración propia.

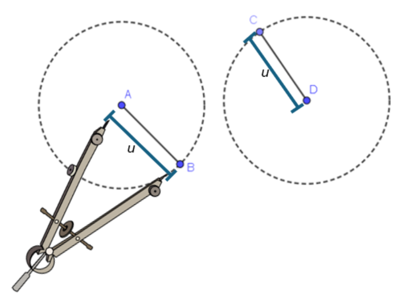
En el ámbito de las regiones planas, la distinción entre polígonos regulares e irregulares es fundamental para comprender las propiedades y características de estas figuras geométricas. Piñeiro (2021) define un polígono regular como "una figura geométrica plana limitada por una línea poligonal cerrada, cuyos lados son todos congruentes entre sí, al igual que sus ángulos interiores" (p. 75). Esta definición implica que, en un polígono regular, todos los lados tienen la misma longitud y todos los ángulos internos tienen la misma medida.

Por otra parte, también establece que un polígono irregular es "aquel en el que sus lados o sus ángulos no son todos congruentes entre sí" (Piñeiro, 2021, p. 75). Es decir, un polígono irregular presenta variaciones en la longitud de sus lados o en la medida de sus ángulos internos, lo que resulta en una figura menos simétrica en comparación con los polígonos regulares.

Longitud. Alfonso (1997) define la longitud partiendo de la idea primitiva de congruencia entre bipuntos[10]. Resalta que el bipunto AB es congruente al bipunto CD si se verifica con un compás que A está tan separado de B como C de D. Hecha esta verificación, también se puede afirmar que A está tan cercano a B como C a D (Figura 15).

Figura 15

Separación entre bipuntos congruentes



Nota. Elaboración propia.

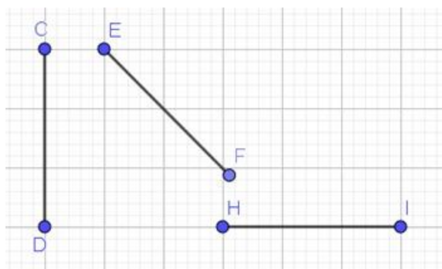
En relación con esto, se afirma que la congruencia entre bipuntos es una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades reflexivas (todo bipunto AB es congruente consigo mismo), simétrica (si el bipunto AB es congruente con el bipunto CD, entonces este es congruente a AB) y transitiva (si el bipunto AB es congruente con el bipunto CD y el bipunto CD es congruente con el bipunto EF, entonces el bipunto AB es congruente con el bipunto EF).

[10] par de puntos en el espacio (Alfonso,1997).

Sobre esta base, se define la congruencia entre segmentos rectilíneos. Así, el segmento AB es congruente a segmento CD si los bipuntos AB y CD son congruentes. Por lo tanto, “se llama longitud a cada una de las clases de la partición inducida por la congruencia en el conjunto de los segmentos” (Alfonso, 1997, p. 99). Con lo anterior, se puede afirmar que la longitud se establece como la clase de equivalencia de todos los segmentos que son congruentes entre sí. En la Figura 16 se observan tres segmentos congruentes entre sí, elementos de la clase de equivalencia de la misma longitud.

Figura 16

Conjunto de segmentos en el espacio congruentes al segmento AB



Nota. Elaboración propia.

Finalmente, considerando que los segmentos de igual longitud forman una clase de objetos, se establece una de las propiedades algebraicas de la magnitud longitud: la estructura de semigrupo conmutativo ordenado. Esto implica que las longitudes pueden operarse, en este caso, sumarse y compararse de manera análoga a las propiedades algebraicas del semigrupo[11].

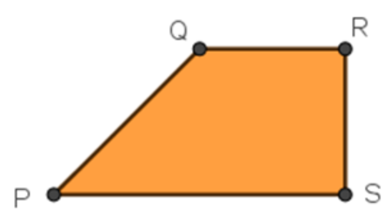
[11] Un semigrupo es una estructura algebraica que satisface la propiedad asociativa con la operación dada; al ser además conmutativo, se garantiza la propiedad conmutativa de la operación definida en el conjunto, en este caso, en el de los segmentos. Además, cuando se dice «ordenado», es porque en el conjunto de pares ordenados (en este caso, pares de segmentos) se cumple con las propiedades de una relación de orden, que son reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Perímetro. El perímetro es un término ampliamente utilizado en la vida cotidiana. Proviene del griego «perì» significa «alrededor» y «métron» significa «medida»; etimológicamente, se refiere al contorno de una figura (Serrano, 2000).

En el ámbito matemático, es frecuente que tanto estudiantes como profesores conceptualicen erróneamente el perímetro como la simple suma de los lados de un polígono. Esta concepción es inadecuada, porque el cálculo del perímetro es distinto al concepto propiamente dicho, además reduce el concepto a una mera aplicación de fórmulas matemáticas descontextualizadas; en la Figura 17 es posible evidenciar el perímetro del polígono $PQRS$ la cual es la longitud de su frontera formada por $PQ, QR, RS\ y\ SP$. De acuerdo con Alfonso (1997), es preciso definir el perímetro como la longitud total que delimita una región plana, lo cual enfatiza la comprensión conceptual sobre la memorización de fórmulas.

Figura 17

Región plana cuya frontera (lados) son los segmentos PQ, QR, RS y SP

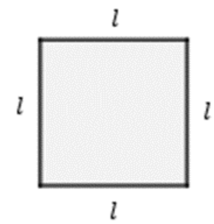


Nota. Elaboración propia.

Por otro lado, si cada lado de un polígono regular de n lados mide l unidades de longitud, entonces el perímetro del polígono es $n \cdot l$ unidades de longitud; por ejemplo, si el polígono regular es un cuadrado, su perímetro será $4 \cdot l$ (ver Figura 18).

Figura 18

Perímetro del cuadrado cuyo lado mide l unidades de longitud



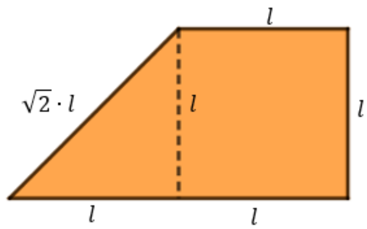
Nota. El perímetro del cuadrado es igual a $4.l$. Fuente: Elaboración propia.

En cambio, si el polígono es irregular, es decir, si los lados tienen longitudes diferentes, no se puede aplicar, para calcular su perímetro, la fórmula $n \cdot l$, como se hizo con la figura anterior. Por lo tanto, es importante entender la definición de perímetro. En este contexto, es importante comprender la definición de perímetro como la longitud total que delimita el polígono. Para facilitar este cálculo, se pueden emplear métodos matemáticos adicionales. Entre estos, el uso de trazos auxiliares provee una herramienta visual para descomponer el polígono en figuras simples, cuyos perímetros pueden ser calculados con mayor facilidad. Asimismo, el teorema de Pitágoras resulta particularmente útil cuando el polígono puede subdividirse en triángulos rectángulos, permitiendo calcular las longitudes de los lados desconocidos a partir de las medidas conocidas de los otros dos lados.

Por ejemplo, en la Figura 19, para calcular el perímetro del trapecio rectángulo, consideremos que la medida de la longitud de la base menor sea l y la medida de la longitud de la base mayor sea $2 \cdot l$. Además, que la longitud de la altura del trapecio rectángulo mida l; luego se halla la medida de la longitud del lado (faltante) oblicuo aplicando el teorema de Pitágoras. Por último, aplicando la definición de perímetro, se obtiene: $l \cdot (4 + \sqrt{2})$.

Figura 19

Cálculo del perímetro del trapecio rectángulo



En el trapecio rectángulo de la figura:

- Sea l la medida de la base menor, $2 \cdot l$ la medida de la base mayor y cuya altura mide l
- Entonces, la medida del lado oblicuo se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2} \cdot l$
- Por lo tanto, el perímetro P del trapecio es:

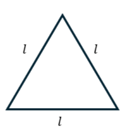
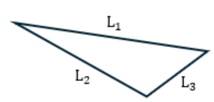
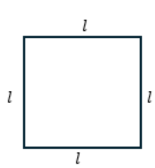
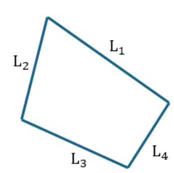
$$P = 4 \cdot l + \sqrt{2} \cdot l \quad \rightarrow \boldsymbol{P = l \cdot \left(4 + \sqrt{2}\right)}$$

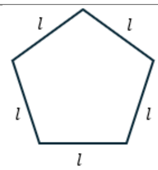
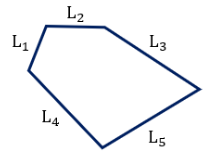
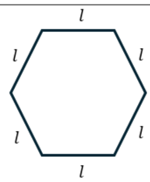
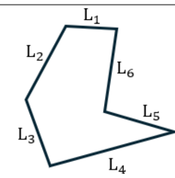
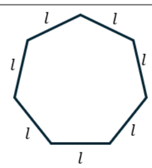
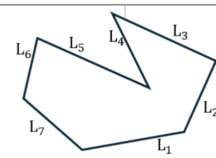
Nota. Elaboración propia.

A continuación, en la Tabla 2 se presenta una descripción de las fórmulas de algunas regiones planas regulares e irregulares.

Tabla 2

Fórmulas de perímetro de regiones planas regulares e irregulares

Regiones planas regulares		**Regiones planas irregulares**	
Triángulo Equilátero	Perímetro (Multiplicativo)	Triángulo	Perímetro (Aditivo)
	$P = 3 \cdot l$		$P = L_1 + L_2 + L_3$
Cuadrado		Cuadrilátero no cuadrado	
	$P = 4 \cdot l$		$P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$
Pentágono regular		Pentágono no regular	

	$P = 5 \cdot l$		$P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$
Hexágono regular		Hexágono no regular	
	$P = 6 \cdot l$		$P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6$
Heptágono regular		Heptágono no regular	
	$P = 7 \cdot l$		$P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7$
Polígono regular de n lados	$P = n \cdot l$	Polígono irregular de n lados	$P = L_1 + L_2 \ldots + L_{n-1} + L_n$

Nota. Elaboración propia.

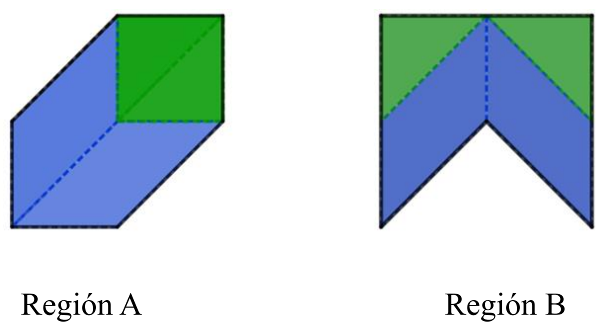
Área. En relación con este concepto, García y Carrillo (2006) sostienen que el área es una magnitud autónoma inherente a las formas geométricas, no vinculada a la forma específica, que permite, mediante el uso de unidades, asociar un número a la superficie, diferenciando así el concepto de área de su medida.

Por su parte, Alfonso (1997) define que "en el conjunto de las regiones planas se llaman áreas a las clases de equivalencia de la partición inducida por la equidescomponibilidad" (p. 265). Esta es la definición que adoptamos en este trabajo. De igual forma indica que, para construir el concepto de área es necesario comenzar con un conjunto de objetos, específicamente regiones planas a las que se les pueda atribuir un área. En ese conjunto, se puede definir una relación de equivalencia que induzca una partición; por tanto, las clases de equivalencia de esa partición estarán constituidas por todas las regiones de la misma área.

Teniendo en cuenta lo anterior, sí R es una región dada, entonces el área de R se puede identificar con el conjunto de todas las regiones equivalentes a R por la relación de equidescomponibilidad. Para establecer esta relación de equivalencia, se utiliza el criterio de descomposición de regiones en subregiones. De hecho, si dos regiones pueden descomponerse en subregiones congruentes, aunque no necesariamente dispuestas de la misma manera, dichas regiones tienen la misma área (Alfonso, 1997). En la Figura 20, las subregiones del mismo color son congruentes; por lo tanto, dos regiones como las mostradas en la figura se llaman equidescomponibles y tienen la misma área.

Figura 20

Dos regiones equidescomponibles A y B



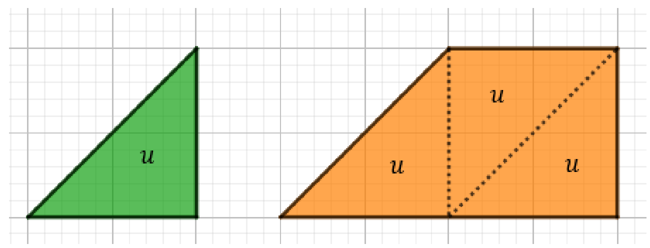
Nota. Elaboración propia.

Alfonso (1997) define que dos regiones son equidescomponibles si cada una de ellas puede descomponerse en el mismo número de subregiones congruentes, de manera que solo compartan puntos de frontera en común dos a dos. De igual forma, muestra que la relación de equidescomponibilidad entre regiones planas es una relación de equivalencia.

Ahora, medir el área de una región plana implica compararla con un área patrón y expresar el resultado de esta comparación mediante un número real no negativo. Por ejemplo, para medir el área del trapecio rectángulo particular que ya hemos expuesto antes, utilizando como unidad de área un triángulo rectángulo isósceles particular (como el que se observa en la Figura 21), se calcula por el número de veces que el triángulo rectángulo isósceles está contenido en la región plana. Así, el área del trapecio rectángulo como se evidencia en la Figura 21 es igual a 3 unidades de área ($3u$).

Figura 21

Medir área de una región plana mediante recubrimiento de otra región plana

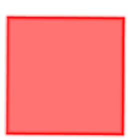
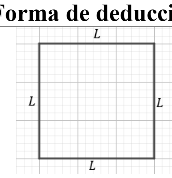
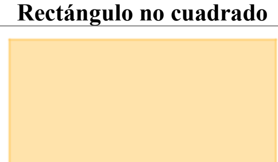
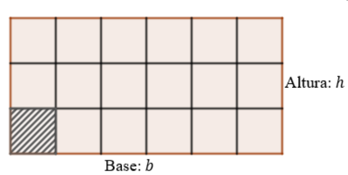


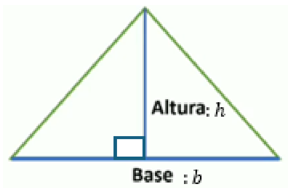
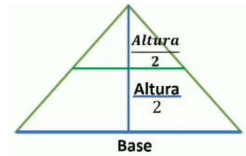
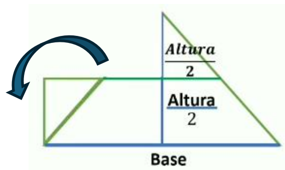
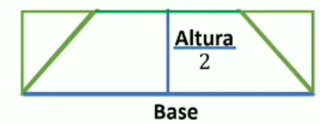
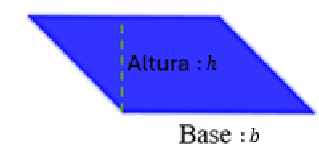
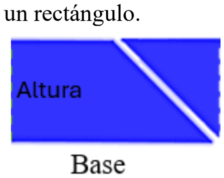
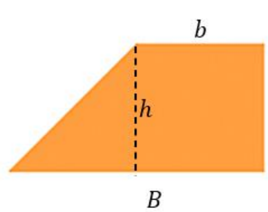
Nota. Elaboración propia.

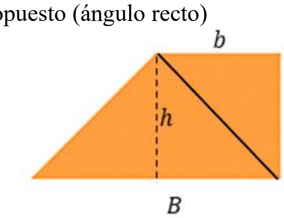
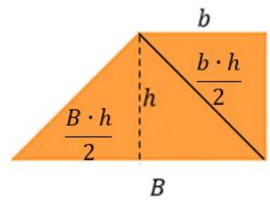
En la Tabla 3 se describen algunas de las fórmulas de la medida del área de algunos polígonos y la forma de deducción de su fórmula.

Tabla 3

Fórmulas de área de algunas regiones planas y sus deducciones

Cuadrado	**Forma de deducción**	**Área**
		$A = L \cdot L$
Rectángulo no cuadrado	Forma de deducción	Área
	 b: longitud de la base h: longitud de la altura	$A = b \cdot h$

Triángulo Rectángulo	Forma de deducción	Área
	Inicialmente dividimos la longitud de la altura en 2.  Posterior a esto, acomodamos los triángulos superiores en los costados de la base del triángulo.  Lo que resulta en  Queda un rectángulo con la mitad de la longitud de la altura del triángulo original, el área del triángulo original es igual a la del rectángulo formado.	$A = \frac{Longitud(Base) \cdot Longitud(Altura)}{2}$ $A = \frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo	Forma de deducción	Área
	Para deducir la fórmula del área del paralelogramo es necesario visualizar la longitud de la altura como si fuera un corte sobre el paralelogramo.  Visualiza el corte de un triángulo de un extremo del paralelogramo y su traslado al lado opuesto para formar un rectángulo.  Se aplica la fórmula del área $A = b \cdot h$, en la que b es la longitud de la base y h es la longitud de la altura perpendicular a la base.	A = longitud (Base)·longitud (Altura) $A = b \cdot h$
Trapecio Rectángulo	Forma de deducción	Área
	Se identifica como B a la longitud de la base mayor del trapecio, como b a la longitud de la base menor y como h a la longitud de la altura de este. 	

Se procede a dividir el trapecio rectángulo en dos triángulos, sobreponiendo una línea desde el vértice donde se señala la altura (h) y el vértice opuesto (ángulo recto)  En este caso se obtienen dos triángulos, uno con base B y el otro con base b, de los cuales es posible obtener a partir de los triángulos descritos dos áreas diferentes, que al sumarse generan el área total del trapecio rectángulo. Ambos triángulos tienen altura h.  En consecuencia, es posible encontrar que el área del trapecio rectángulo es igual a: $$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$ Sacando a $h/2$ como factor común $$A = \frac{h(B + b)}{2}$$ Dando como resultado la fórmula del área del trapecio rectángulo.	$A = \frac{h(B + b)}{2}$

Nota. Elaboración propia.

Relaciones entre perímetro y área. La relación entre el perímetro y el área de figuras planas ha sido objeto de estudio por diversos investigadores y educadores matemáticos. Es importante abordar esta relación desde una perspectiva matemática precisa, evitando generalizaciones incorrectas. Según D’Amore y Fandiño (2007), es un error común asumir una relación directamente proporcional entre el perímetro y el área de figuras geométricas. Estos autores enfatizan que “no existe una relación de proporcionalidad directa entre área y perímetro de figuras planas” (D’Amore y Fandiño, 2007, p. 43).

Esta afirmación desafía la concepción intuitiva de que, a mayor perímetro, necesariamente corresponde una mayor área, y viceversa. A continuación, en la Tabla 4*,* se realiza una descripción de las posibles relaciones que se pueden presentar entre estos objetos matemáticos.

Tabla 4

Casos posibles de las relaciones entre perímetro y área según D'Amore y Fandiño

P	A	Descripción
>	>	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, es posible hallar otra región en la que su perímetro aumente y su área también.
>	=	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, es posible hallar otra región en la que su perímetro aumente mientras su área permanece constante.
>	<	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, es posible encontrar una región cuyo perímetro sea mayor que el de otra, mientras que su área es menor.
=	>	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, se pueden encontrar otra región con el mismo perímetro, pero una mayor área que la otra.
=	=	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, es posible encontrar otra región con el mismo perímetro y la misma área.
=	<	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, se puede hallar otra región con el mismo perímetro, pero con menor área que la otra.
<	>	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, es posible encontrar otra región con menor perímetro, pero con mayor área que la otra.
<	=	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, se puede hallar otra región con menor perímetro, pero manteniendo la misma área que otra.
<	<	Si se tiene una región con perímetro *P* y área *A*, se puede encontrar otra región con menor perímetro y menor área que otra.

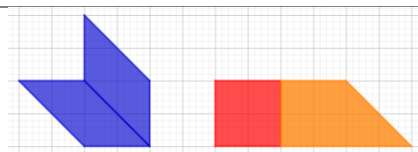
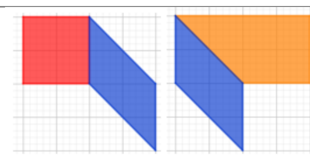
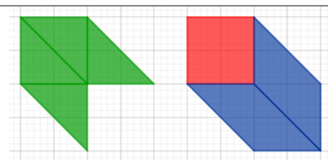
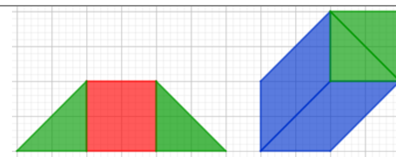
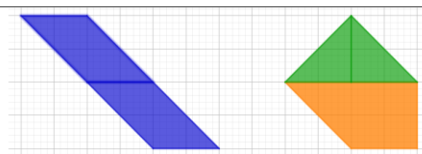
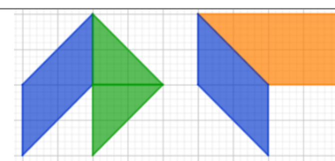
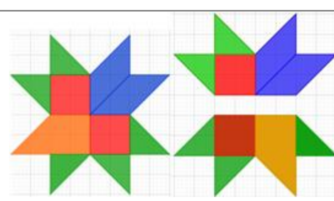
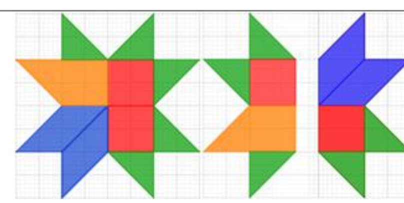
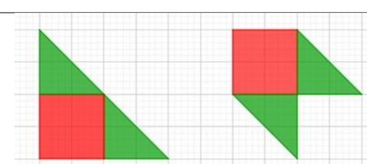
Nota. Elaboración propia.

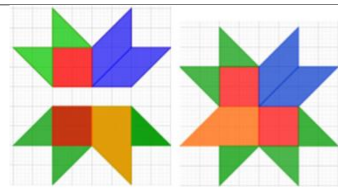
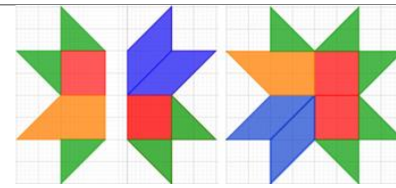
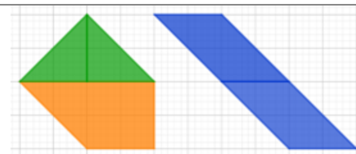
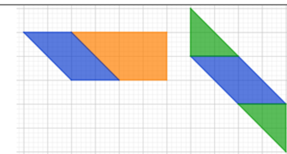
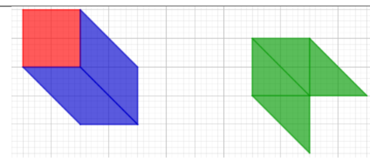
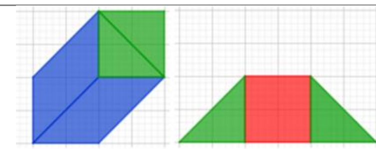
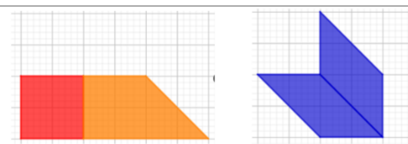
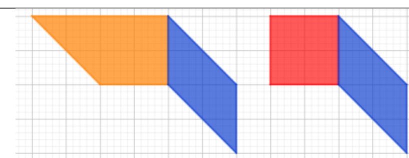
Asimismo, en la Tabla 5 se presentan ejemplos de las representaciones de los nueve casos de las relaciones entre perímetro y área, propuestas por D'Amore y Fandiño (2007), utilizando las piezas de un tangram. Para representar la primera relación (ver Tabla 5) se han utilizado dos paralelogramos congruentes, un cuadrado y un trapecio rectángulo; con dichas piezas se construyen dos ejemplos con dos figuras cada uno.

En el primer ejemplo, la primera figura está compuesta por dos paralelogramos y la segunda figura, por un cuadrado y un trapecio; con la cual se evidencia que la segunda figura tiene mayor perímetro y mayor área con respecto a la primera figura. En el segundo ejemplo, la primera figura está compuesta por un cuadrado y un paralelogramo, y la segunda, por un paralelogramo y un trapecio; en este segundo ejemplo también se evidencia que la segunda figura tiene mayor perímetro y mayor área con respecto a la primera figura. De forma análoga se representan las demás relaciones.

Tabla 5

Casos posibles de las relaciones entre perímetro y área representados con algunas figuras particulares

Relaciones	**Posibles representaciones con piezas del tangram *ao po´i***	
	Ejemplo 1	Ejemplo 2
$\boldsymbol{P} >$ $\boldsymbol{A} >$		
$\boldsymbol{P} =$ $\boldsymbol{A} >$		
$\boldsymbol{P} <$ $\boldsymbol{A} >$		
$\boldsymbol{P} >$ $\boldsymbol{A} =$		
$\boldsymbol{P} =$ $\boldsymbol{A} =$		

$P <$ $A =$		
$P >$ $A <$		
$P =$ $A <$		
$P <$ $A <$		

Nota. Elaboración propia.

Marco didáctico

En este apartado presentamos los fundamentos conceptuales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las magnitudes, que fueron considerados para el diseño de las tareas profesionales y utilizados como documento de análisis en la fase teórica de la tarea 2. Se incluyen las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, las operaciones fundamentales en el proceso de medida, las etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y el aprendizaje del perímetro y el área.

Fases piagetianas en la construcción de las magnitudes

Según Chamorro y Belmonte (1988), la medición de magnitudes no es una tarea fácil ni natural para los niños y suele ser difícil de practicar hasta niveles avanzados de educación primaria. Esto se debe a que medir requiere experiencia en estimaciones, clasificaciones y seriaciones una vez que se ha definido la magnitud a medir. Por lo tanto, consideran importante que los niños desde temprana edad se expongan a situaciones que les permitan descubrir las magnitudes físicas, ya sea mediante la percepción directa a través de los sentidos o con la ayuda de instrumentos auxiliares.

En este contexto, Arteaga y Macías (2016) sostienen que la medición de magnitudes es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y resulta importante en la Educación Infantil para desarrollar simultáneamente el pensamiento lógico-matemático. En esta etapa educativa, el trabajo con magnitudes se basa en conceptos clave como la clasificación y la ordenación.

Siguiendo las perspectivas de Chamorro y Belmonte (1988) y de Arteaga y Macías (2016), a continuación, describimos las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, relacionándolas con el uso de fichas de un tangram.

- *Consideración y percepción de una magnitud*: Cuando un niño interactúa con un objeto, debe ser capaz de identificar y aislar la magnitud que va a comparar. Por ejemplo, al presentar a los niños fichas de un tangram, se les puede pedir que observen y manipulen las diferentes piezas (triángulos, cuadrados, paralelogramos y trapecio) y que identifiquen y describan las magnitudes que observan, como la longitud de los lados y las áreas de las piezas, aislándolas de otros atributos como la masa, el color y el grosor.
- *Conservación de la magnitud:* El niño debe entender cuáles cambios en el objeto no afectan la magnitud que está trabajando. Por ejemplo, se les muestra a los niños que, aunque cambien la disposición de una pieza del tangram (como girar un triángulo o mover un cuadrado), la longitud de sus lados y su área permanecen iguales.
- *Ordenación respecto a la magnitud:* El concepto de magnitud y su medida facilitan la clasificación y el orden de los elementos según dicha magnitud. Por ejemplo, se puede pedir a los niños que ordenen las piezas de un tangram de mayor a menor área, teniendo

en cuenta el área de las piezas, ayudándoles así a entender cómo clasificar y ordenar elementos según una magnitud específica.

- *Correspondencia de números a cantidades de magnitud:* En esta fase, el niño debe estimar con exactitud la cantidad de magnitud de un objeto asignándole una medida, lo que requiere haber adoptado previamente una unidad de medida y comprender el proceso para llegar a este concepto. Por ejemplo, los niños pueden calcular el área de la superficie de una ficha de un tangram utilizando otra ficha de este como unidad de medida, es decir, determinar cuántas veces cabe la segunda en la primera. Esto les ayudaría a entender cómo ordenar y clasificar las piezas de acuerdo con su cantidad área.

Operaciones fundamentales en el proceso de medida

Dickson et al. (1991) argumentan que la medición va más allá de la simple cuantificación de magnitudes, destacando que Piaget identifica dos operaciones fundamentales en este proceso: la conservación y la transitividad.

La operación de conservación se enfoca en la invariancia de ciertos aspectos claves de una situación. Dickson et al. (1991) subrayan que reconocer los elementos invariantes en una situación es importante para desarrollar una comprensión efectiva de la medición, esto implica reconocer que la cantidad medida permanece constante sin importar cómo se represente físicamente. Por ejemplo, los niños pueden tomar una pieza de un tangram y cambiar su orientación o posición. Posteriormente, se les puede preguntar si la forma o el tamaño de la pieza ha cambiado. Esta actividad les ayuda a entender que a pesar de las variaciones en apariencia la longitud de los lados y el área permanecen inalteradas.

Por otro lado, la operación de transitividad es igualmente esencial en el proceso de medición. Dickson et al. (1991) explican que esta noción es fundamental para cualquier situación de medición y para el uso significativo de instrumento de medida. En términos simples, si un objeto A es mayor, menor o igual que un objeto B, y el objeto B es mayor, menor o igual que un objeto C, entonces el objeto A también será mayor, menor o igual que el objeto C. Por ejemplo, los niños pueden ordenar y comparar las piezas de un tangram según sus áreas, utilizando otra ficha como unidad de medida, pueden determinar el área de cada pieza y realizar comparaciones entre ellas.

Según Dickson et al. (1991), el niño empieza a mostrar una comprensión inicial de los conceptos de conservación y transitividad cuando emplea algún intermediario como instrumento de medida, aunque sea algo rudimentario como la extensión de sus brazos o un punto de referencia en su cuerpo, como la altura de su hombro. Así, a través de la experimentación basada en tanteos, el niño comienza a entender que, si necesita más unidades para cubrir A, que, para cubrir B, entonces A es más grande.

Etapas en la construcción del concepto de medida

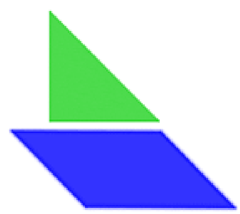
En relación con la construcción del concepto de medida, Arteaga y Macías (2016) mencionan que Piaget establece tres etapas fundamentales que deben considerarse. A continuación, describimos cada una de estas etapas y proporcionamos ejemplos aludiendo a fichas de un tangram.

1. *Comparación perceptiva directa:* El niño examina una magnitud específica comparándola con un grupo de objetos mediante el uso de sus sentidos. Por ejemplo, al observar y tocar las diferentes piezas de un tangram, los niños pueden determinar cuál de ellas tiene mayor, menor o igual área y longitud.
2. *Desplazamiento* de objetos: Cuando los objetos que se comparan son muy similares en la magnitud que se está considerando, el niño necesita acercarlos para hacer una

comparación directa que les permita tomar decisiones con un poco de mayor precisión. Por ejemplo, cuando dos piezas de un tangram parecen tener la misma longitud o área, los niños pueden colocarlas una al lado de la otra para compararlas directamente. Así, al colocar una ficha con forma de triángulo rectángulo isósceles junto a una ficha con forma de paralelogramo, como se muestra en la Figura 22, es posible observar cuál de las piezas tiene un lado más largo o corto.

Figura 22

Comparación entre piezas del tangram



Nota. Elaboración propia.

3. *Operatividad de la propiedad transitiva:* El niño comprende que si un valor A es igual a B y B es igual a C, entonces A debe ser igual a C, lo que demuestra que ha adquirido la noción de transitividad. Por ejemplo, si los niños saben que la longitud más larga de una ficha, por ejemplo, el cateto de una ficha con forma de triángulo rectángulo isósceles es igual al lado de otra ficha, digamos con forma de cuadrado, y que el lado de este cuadrado es igual a uno de los lados de otra ficha, por ejemplo, de una ficha con forma de paralelogramo, pueden concluir que el cateto del triángulo rectángulo isósceles también es igual al lado del paralelogramo.

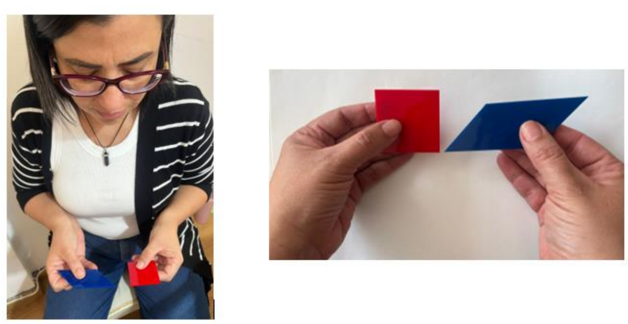
Etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes

Considerando las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, las operaciones fundamentales en el proceso de la medida y las etapas en la construcción de la medida, Belmonte (2005) establece siete etapas en la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes:

1. *Estimación sensorial:* En esta etapa, el enfoque principal es permitir que los estudiantes experimenten y perciban las magnitudes utilizando sus sentidos. El objetivo es que puedan distinguir la magnitud específica de otras características de los objetos. Una actividad interesante sería pedirles que intenten reconocer cuál pieza tiene la mayor y la menor área antes de realizar cualquier medición. Por ejemplo, un estudiante podría decir, de manera errónea, que la ficha cuadrada de la Figura 23 tiene menor área que la ficha con forma de paralelogramo. Este ejercicio permite a los estudiantes utilizar sus sentidos para percibir y comparar las magnitudes de las piezas de manera intuitiva. A través de esta exploración sensorial, los alumnos pueden desarrollar una comprensión inicial de los conceptos de longitud y área, y cómo estas magnitudes difieren de otras propiedades de los objetos.

Figura 23

Percepción de áreas entre dos figuras de formas diferentes

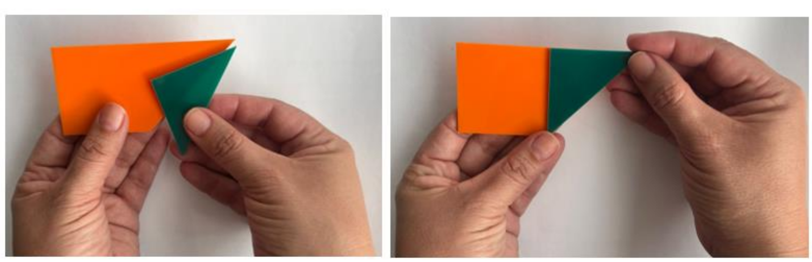


Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

2. *Comparación directa:* la magnitud se aborda a través de la clasificación y ordenación de los elementos dentro de una colección, sin recurrir a intermediarios o elementos externos. Es importante destacar que, en este punto del proceso, el concepto de unidad de medida aún no se ha introducido. Como resultado, las relaciones que se establecen se limitan a comparaciones básicas como mayor, igual o menor en términos de la magnitud en cuestión. Por ejemplo, después de observar y manipular las piezas de un tangram, se puede pedir a los alumnos que las ordenen de menor a mayor según su área. En esta actividad, los estudiantes no solo deben comparar las piezas y determinar su orden relativo sin utilizar herramienta de medición, sino que también pueden desplazar las piezas, colocándolas cerca o superponiéndolas para hacer una comparación directa (Figura 24). Además, pueden clasificar las piezas que tengan la misma área o el mismo perímetro, sin importar su forma. Ejercicios como este permiten a los alumnos fortalecer su comprensión de los conceptos de magnitud y desarrollar habilidades de razonamiento comparativo. Estas actividades sientan las bases para la posterior introducción de unidades de medida estándar, que se abordarán en etapas más avanzadas del proceso de aprendizaje.

Figura 24

Comparación directa del área de las piezas del tangram

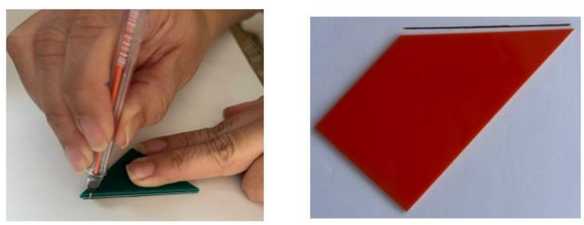


Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

3. *Comparación indirecta:* se aborda la magnitud mediante la clasificación y organización de los elementos dentro de una colección utilizando un intermediario que facilita la comparación, dado que no es posible hacerlo de manera directa. Al igual que en la fase de comparación directa, el concepto de unidad aún no se ha construido en esta etapa. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos calcar en una hoja la medida de la longitud de un lado de la pieza (el lado que se quiere comparar), y luego con esa marca, medir el lado de otra pieza, para establecer si es igual o más o menos largo (Figura 25).

Figura 25

Comparación indirecta de la longitud de un lado del trapecio rectángulo



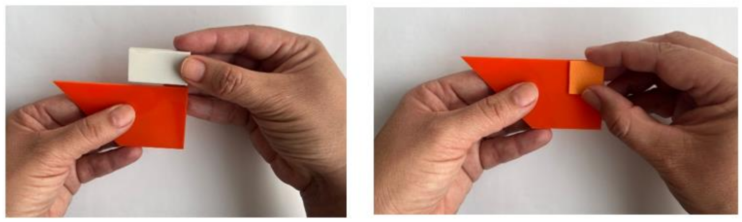
Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

4. *Elección de la unidad:* se mide una magnitud específica utilizando una única unidad de medida no estándar. Si se desea medir la longitud de los lados de una pieza de un tangram, es necesario elegir un objeto que funcione como unidad lineal, como clips, palillos de fósforos, borrador, tajalápiz, entre otros. Esto implica seleccionar un referente para determinar cuántas veces dicho referente se repite en la cantidad a medir. Ese número representa la medida y, claramente, depende de la unidad de medida escogida. Por ejemplo, los alumnos pueden elegir una unidad para decir cuántas veces (o sea si se cuenta, se asigna cantidad), cabe en la pieza que desean medir, pero la unidad es no estándar. Así, pueden utilizar un borrador de lápiz para contar cuántas veces cabe en la

longitud de un lado de una ficha del tangram, o emplear cuadritos para contar cuántos caben en el área de la ficha (Figura 26).

Figura 26

Ejemplo de elección de unidad de medida

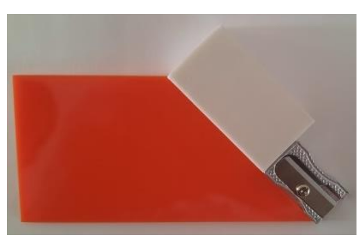


Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

5. *Sistemas de medida irregulares:* se realiza la medición de una magnitud específica empleando varias unidades de medida no estándar que no guardan entre sí una relación de correspondencia o una constante de proporcionalidad. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que midan la longitud del lado de una pieza de un tangram, por ejemplo, con un borrador. Si al medir queda un espacio que no puede cubrirse completamente porque el borrador no alcanza, que utilice otra unidad, como un tajalápiz, para medir el espacio restante (Figura 27). Observarán que las mediciones varían y discutirán por qué las diferentes unidades de medida producen distintos resultados.

Figura 27

Aplicación de un sistema de medida irregular

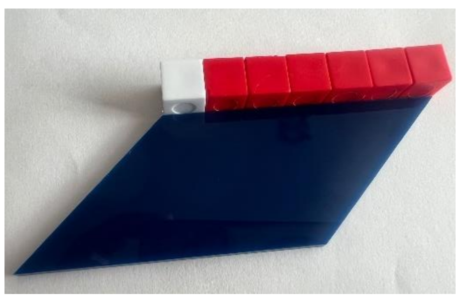


Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

6. *Sistema de medida regulares:* Se realiza la medición de una magnitud específica empleando varias unidades de medida no estándar que tienen una relación de correspondencia o una constante de proporcionalidad entre sí. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que utilicen las regletas de Cuisenaire para medir la longitud del lado de una pieza de un tangram, dado que entre las regletas existe una constante de proporcionalidad entre sus medidas de longitud. Dos regletas blancas, por ejemplo, equivalen a una regleta roja, lo que permite realizar mediciones más precisas y la posibilidad de comparar magnitudes fácilmente. De este modo, en la Figura 28, la longitud del lado de la ficha azul es igual a tres regletas rojas y una regleta blanca.

Figura 28

Aplicación de un sistema de medida regular



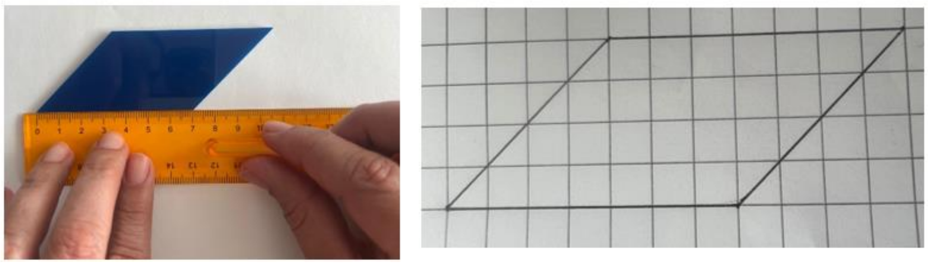
Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

7. Sistema Métrico Decimal: En esta etapa, se puede pedir a los alumnos que usen una regla o cinta métrica para medir la longitud de los lados de las piezas de un tangram en centímetros o milímetros. Para medir el área, se puede utilizar un cuadrado de un centímetro de lado como unidad de medida, lo que permitirá determinar cuántos cuadrados de un centímetro caben en cada figura. En la Figura 29 , la longitud del lado de la ficha azul es de 7 cm y su área es de 28 cm^2. Esta actividad les ayudará a

familiarizarse con el sistema métrico decimal y a comprender la relación entre sus unidades.

Figura 29

Aplicación del sistema métrico decimal



Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

En relación con la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes, es importante considerar las siguientes perspectivas:

Chamorro (2003) identifica dos aspectos fundamentales en la construcción de la noción de unidad. Primero, es esencial que los alumnos comprendan la importancia de definir claramente la unidad de medida. Este aspecto debe abordarse con especial atención a través del diseño de actividades educativas específicas, que permitan a los estudiantes explorar el papel central de la unidad en la medición de magnitudes.

El segundo aspecto, según Chamorro (2003), es el reconocimiento de las cualidades necesarias para seleccionar la unidad adecuada, destacando la universalidad como una característica que no siempre es evidente para los estudiantes de educación primaria. Además, esta misma autora señala que el proceso histórico para establecer un sistema de medida universal refleja el desarrollo paralelo entre la historia de la humanidad y el aprendizaje individual de los estudiantes. Los alumnos a menudo muestran resistencia a usar unidades de medida convencionales, prefiriendo objetos familiares, aunque imprecisos. Para superar esta resistencia, es fundamental diseñar actividades que muestren las limitaciones de estos métodos informales y su asociación con estrategias incorrectas, evitando imponer métodos basados en factores sociales en lugar de razones lógico-matemáticas.

Aprendizaje de perímetro y área

En relación con el aprendizaje del perímetro y el área de figuras planas, Dickson et al. (1991) afirman que los niños suelen confundir estos conceptos cuando se les presentan de manera abstracta y se enfatiza el uso de fórmulas desde el principio. Aunque es deseable que los estudiantes aprendan estos conceptos en contextos de medición, frecuentemente el primer encuentro con estos conceptos es por medio de la aplicación directa de las fórmulas sin una exploración práctica previa que puede resultar poco intuitiva y dificultar la comprensión de los fundamentos espaciales y las relaciones entre perímetro y área.

Así mismo, Chamorro (2003) menciona que uno de los desafíos en la enseñanza de estos conceptos es la tendencia de los alumnos a confundir el perímetro con el área, asumiendo que un cambio en uno implica un cambio en proporcionalidad directa en el otro. Esto puede llevar a malentendidos fundamentales, especialmente al manipular figuras geométricas. Por ejemplo, al modificar la forma de una figura manteniendo constante el perímetro, los estudiantes pueden suponer incorrectamente que el área también permanece invariable. Por lo tanto, es fundamental diseñar tareas que permitan a los alumnos explorar y comprender la independencia de estas dos magnitudes (longitud y área), favoreciendo una comprensión significativa de estos conceptos.

Para Chamorro (2003), abordar este desafío puede enfocarse a través del empleo de materiales didácticos que permitan la manipulación física de figuras geométricas. Mediante la deformación controlada de estas figuras; por ejemplo, en la transformación de un cuadrado en un paralelogramo se puede guiar a los estudiantes a observar cómo el perímetro puede variar mientras el área se mantiene constante.

Para superar los obstáculos en el aprendizaje del área y del perímetro mencionados en los párrafos anteriores, pretendemos diseñar unas tareas profesionales basadas en la construcción de las relaciones entre perímetro y área, apoyándonos en las perspectivas de García y Carrillo (2006), Chamorro (2003), Dickson et al. (1991), Olmo et al. (1989) y Marmolejo y González (2015). A continuación, describimos estas perspectivas.

García y Carrillo (2006) destacan que la confusión entre área y perímetro se debe al uso incorrecto de fórmulas que, en general, carecen de significado, así como a la falsa equivalencia entre la igualdad de áreas y la igualdad de perímetros. En el ámbito escolar, se dedica mucho tiempo en tareas de conversión de unidades en perjuicio de actividades de manipulación y exploración centradas en significados.

Para abordar esta problemática, García y Carrillo (2006) sugieren diferenciar entre los conceptos de área y perímetro de una superficie y analizar cómo varía el perímetro en figuras equivalentes sin recurrir a unidades de medida convencionales. Consideran el área como una magnitud independiente de las formas geométricas, no vinculada a la forma específica, que permite asignar un número mediante el uso de unidades, diferenciando así la superficie del área y de su medida. Estos aspectos permiten tratar el concepto tanto cualitativa como cuantitativamente, utilizando procedimientos geométricos y numéricos.

Marmolejo y González (2015) destacan y caracterizan cuatro aspectos claves de la complejidad en el tratamiento del concepto de área de superficies planas, según la literatura especializada de la Educación Matemática. El primero se centra en la conceptualización y enseñanza del área en el entorno escolar. El segundo aborda la conservación del área y su papel en el tratamiento del concepto de área. El tercero trata la medida de cantidades de áreas, mientras que el cuarto explora cómo el área se articula con otros conceptos matemáticos.

En relación con el primer aspecto, la conceptualización y enseñanza del área en el entorno escolar, Marmolejo y González (2015) mencionan diversas perspectivas. Entre estas, consideramos especialmente relevantes para nuestro trabajo las de Piaget et al. (1981, como se citó en Marmolejo y González, 2015), Osborne (1976, como se citó en Olmo et al., 1989), Douady y Perrín (1989, como se citó en Marmolejo y González, 2015), y Chamorro (1997, como se citó en Marmolejo y González, 2015).

Piaget et al. (1981, como se citó en Marmolejo y González, 2015) sugieren que el aprendizaje del área debe pasar por varias etapas de desarrollo (primitiva, intuitiva, operacional y analítica). También proponen que la enseñanza debe centrarse exclusivamente en las operaciones de conservación y transitividad.

Osborne (1976, como se cita en Olmo et al.,1989), sostiene que el área y el perímetro comparten principios y propiedades matemáticas comunes, como función y aditividad. Por lo tanto, su enseñanza y comprensión deberían integrarse, aprovechando estas similitudes para construir ambos conceptos de manera coherente.

Douady y Perrín (1989, citado en Marmolejo y González, 2015) abogan por considerar el área como una magnitud independiente, separada de la forma específica, y sugieren distinguir entre superficie, cantidad de área y medida. Destacan la importancia de medir superficies no pavimentables con una unidad determinada y recomiendan actividades prácticas como recortar y pegar para igualar áreas. Además, sugieren comparar el área y el perímetro, destacando sus diferencias y similitudes a través de diversas transformaciones.

Chamorro (1997, como se citó en Marmolejo y González, 2015) indica que la dificultad en la compresión de la medida del área, al igual que otras magnitudes, se debe a un vocabulario impreciso que usa términos para describir acciones o conceptos matemáticos diversos. Identifica varios entornos importantes para el aprendizaje de la medida, como objeto soporte, tipo de magnitud, valor particular o cantidad de magnitud, medida de aplicación, medida de imagen, medida concreta y orden de magnitud. Recomienda que el diseño de secuencias de enseñanza ponga especial énfasis en comparar áreas y distinguir entre área y perímetro. La comparación de áreas ayuda a conceptualizar el área como un objeto mental, mientras que diferenciar entre área y perímetro es esencial para evitar errores comunes en la comparación de áreas. Por lo tanto, sugiere utilizar ejemplos de figuras con la misma área, pero dimensiones lineales diferentes, así como figuras con diferentes áreas, pero dimensiones lineales iguales, para clarificar estos conceptos.

En relación con el segundo aspecto, la conservación del área y su papel en el tratamiento del concepto de área, consideramos relevante la propuesta de Chamorro (1997, como se citó en Marmolejo y González, 2015). En su investigación, concluye que las superficies prototípicas de polígonos regulares estándares no facilitan la identificación de una misma superficie cuando cambia de forma. Además, la presentación de figuras dibujadas en lugar de recortadas dificulta la aplicación de procedimientos de comparación de superficies, lo cual es fundamental para estudiar la conservación del área. Chamorro (2003) también señala que, a menudo, los alumnos no reconocen la superficie como el interior delimitado por el borde y creen que el área de una figura depende únicamente de la medida de sus lados, especialmente en polígonos regulares, lo que constituye un obstáculo didáctico y epistemológico.

Por otro lado, Marmolejo y González (2015) destacan que la literatura especializada en Educación Matemática ha documentado las estrategias que los alumnos emplean al realizar tareas relacionadas con la conservación del área. Se ha observado que los alumnos tienden a seguir ciertos patrones de comportamiento al intentar verificar si dos formas distintas tienen la misma área. Entre las estrategias mencionadas se encuentra la aplicación del concepto de congruencia pieza por pieza, que implica reconfigurar una de las figuras sobre la superficie de la otra para comprobar si coinciden en área. Este método representa una forma concreta de comparar áreas al descomponer y recomponer las figuras.

En relación con el tercer aspecto, la medida de cantidades de áreas es relevante considerar las perspectivas de Chamorro (1997, como se citó en Marmolejo y González, 2015) y Douady y Perrín (1989, como se citó en Marmolejo y González, 2015). Muchos estudios en el campo de la Educación Matemática evidencian que el concepto de medición de áreas es complejo y está asociado a una red de conceptos interrelacionados, como la conservación del área, la unidad y su iteración, el recuento de unidades y el uso de fórmulas. Además, se ha destacado el papel importante de la variedad de sistemas de representación, el contexto en que se expresan y la disponibilidad de herramientas para la comprensión de la medida (Marmolejo y González, 2015).

En este contexto, se observa que las dificultades de los estudiantes en relación con la medida de área se deben, en parte, a la forma fragmentada en que se estudia el área, sin relacionarla dinámicamente con su perímetro. También se señala la dificultad de llenar el vacío existente entre el uso de fórmulas y la manipulación cualitativa del área sin uso de números. Además, algunos informes de investigación indican que la comparación y conservación de áreas son aspectos fundamentales y preliminares para comprender la medición de áreas. Las acciones de corte, movimiento y pegado de superficies al transformar una figura en otra de igual área se consideran esenciales para la comprensión de la medida (Marmolejo y González, 2015).

En este sentido, Chamorro (1997, citado en Marmolejo y González, 2015) observa en sus investigaciones que muchas propuestas educativas se centran en desarrollar métodos aritméticos para la enseñanza de la medición de áreas. Indica que esta focalización excesiva en los aspectos aritméticos puede tener efectos negativos en la comprensión global del concepto de medida de áreas, ya que, al centrarse únicamente en aplicar fórmulas y cálculos numéricos, se puede descuidar el entendimiento profundo y significativo de los principios subyacentes de la medición de áreas. Estos principios incluyen la conservación del área (el área de una figura no cambia al modificar su forma), la relación entre la unidad de medida y la cantidad de unidades necesarias para cubrir una superficie (a menor unidad de medida, mayor cantidad de unidades necesarias), y la comprensión de que el área es una medida bidimensional que considera tanto la longitud como el ancho de una figura.

Finalmente, en relación con el desarrollo del concepto de unidad en el proceso de medición, Marmolejo y González (2015), identifican varios elementos importantes. Estos incluyen la comprensión de las características espaciales de la unidad, su invariabilidad durante la medición, su conservación mediante acciones de separación y recombinación, y la relación inversa entre el tamaño de la unidad y la cantidad necesaria para cubrir una superficie.

Para concluir con el cuarto y último aspecto, sobre cómo el área se articula con otros conceptos matemáticos, nos enfocaremos en su relación con el perímetro. Según Marmolejo y González (2015), tanto los alumnos como los profesores enfrentan muchas dificultades para distinguir entre área y perímetro, y existe un notable desconocimiento considerable sobre cómo se relacionan estas dos magnitudes. La literatura especializada revela que las nociones intuitivas de los alumnos, como la creencia de que un mayor perímetro implica un área mayor, o que un área mayor necesariamente se traduce en un perímetro mayor, o que figuras con la misma área tienen el mismo perímetro, complican la comprensión de estas relaciones.

En este contexto, D’Amore y Fandiño (2007) destacan la presencia de ideas intuitivas similares y sugieren que proporcionar ejemplos que ilustren diversas manifestaciones de esta relación puede facilitar la modificación de las concepciones de alumnos y profesores. Además, D’Amore y Fandiño (2007) argumentan que la confusión entre área y perímetro no solo tiene un origen epistemológico, sino que también se debe a aspectos didácticos. Según estos autores, esta confusión resulta de decisiones pedagógicas como: 1) el uso exclusivo de figuras convexas y formas estándar, 2) la ausencia de una presentación explícita de la relación entre área y perímetro en una misma figura, 3) la diferenciación de estas magnitudes únicamente a través de afirmaciones como «el perímetro se mide en metros y el área en metros cuadrados» sin abordar sus relaciones recíprocas, y 4) la escasez de tareas que fomenten transformaciones en las figuras que mantengan o alteren el área o el perímetro.

Método COPISI

La enseñanza de las magnitudes de perímetro y área de regiones planas representa un desafío, como se ha señalado previamente. Por ello, es natural preguntarse sobre estrategias metodológicas adecuadas para su abordaje, tomando en cuenta los resultados de investigaciones en Educación Matemática, como las compiladas por Marmolejo y González (2015). En este sentido, y considerando lo expuesto por estos autores sobre la importancia de tocar, mover, transformar y cortar (concreto), antes de introducir lo numérico o las fórmulas (simbólico), el uso del método COPISI podría ser particularmente pertinente en la enseñanza de estos conceptos. Esto resulta aún más relevante dado que, en Paraguay, el currículum para el primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica aboga por este enfoque en sus orientaciones metodológicas: "Considerar las fases del aprendizaje: manipulativo, gráfico y simbólico; valiéndose de la utilización de recursos auxiliares, de fácil manejo y construcción, como: cartel de valores, ábaco, tarjetas de adición, sustracción, multiplicación y división, entre otros" (MEC, 2008a, p. 89).

El método COPISI, según Barriga (2021), fue creado en el año 1980 por el matemático Yeap Ban Har como una aproximación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, centrada especialmente en la resolución de problemas y su aplicación. Este método se apoya en el uso de representaciones concretas, pictóricas y abstractas (CPA), un método que también ha sido ampliamente adoptado en Singapur.

COPISI, cuyas siglas corresponden a Concreto (CO), Pictórico (PI) y simbólico (SI), ha sido implementado con éxito en diversos países (Barriga, 2021). Este método permite a los estudiantes construir conceptos matemáticos mediante la transición entre estas distintas representaciones. A través del uso de objetos cotidianos y materiales manipulativos, junto con el apoyo del aprendizaje cooperativo y en espiral, se facilita la comprensión gradual de los conceptos abstractos, representados finalmente mediante símbolos (Yeap Ban Har, s.f.).

La manipulación de materiales concretos, combinada con el uso de representaciones gráficas mediante esquemas, favorece el desarrollo de imágenes mentales claras de los conceptos en los estudiantes. De esta manera, se construye una comprensión visual y tangible de las ideas matemáticas antes de abordar formas más abstractas de representación. Este proceso facilita una transición natural hacia el uso de símbolos y fórmulas (Barriga, 2021).

Para Andrada y Bernabeu (2022), la metodología COPISI "consiste en una progresión de lo concreto a lo abstracto. Esta metodología se inicia con el uso del material concreto, avanza con el reconocimiento y uso de representaciones pictóricas y culmina con el pensamiento abstracto o simbólico" (p. 46). Sin embargo, Vidal (2024) cuestiona el método COPISI argumentando que no siempre es posible emplear simultáneamente los tres modos de representación en la enseñanza de las matemáticas, ya que algunos conceptos matemáticos no pueden partir de la manipulación de un material físico concreto. Además, lo concreto puede entenderse como algo ya conocido desde la perspectiva del aprendizaje significativo.

Con base en lo expuesto anteriormente sobre el método COPISI, consideramos relevante que los profesores experimenten de manera explícita este método en la primera tarea. Inicialmente, al manipular las fichas del tangram para comparar el área y el perímetro de los bordados representados geométricamente, destacando sus diferencias y similitudes a través de diversas construcciones, lo que implica realizar transformaciones a las figuras representadas.

Posteriormente, los profesores avanzan hacia el reconocimiento de representaciones pictóricas, lo que les permitirá llegar al pensamiento abstracto y reconocer las relaciones entre perímetro y área sin necesidad de recurrir al material concreto. Creemos que es importante que los profesores vivencien primero el método COPISI para que, en las tareas posteriores, puedan identificar las representaciones (concreta, pictórica y simbólica) utilizadas por los estudiantes y planificar una tarea que vincule el método COPISI y el tangram, para la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones entre perímetro y área en estudiantes de primero y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica.

En la siguiente sección del marco de referencia presentamos el tangram *ao po'i*, un material didáctico creados por los autores de este trabajo, inspirado en la cultura paraguaya y en el tangram chino, cuyo uso se relaciona con la primera fase del método COPISI (Concreto-Pictórico-Simbólico), que exponemos también, más adelante.

El tangram *ao po'i* como material didáctico

En este apartado presentamos los fundamentos conceptuales sobre los materiales didácticos, tanto desde la perspectiva del aprendizaje de los niños como en la formación de profesores. Así mismo, describimos las características del tangram chino y otros tipos de tangram, junto con los elementos de la cultura paraguaya, en particular los bordados realizados en la tela «*ao po'i*», los cuales nos sirvieron de inspiración para crear el tangram *ao po'i.* Además, detallamos las características geométricas y métricas de este material.

Materiales didácticos

Nührenbörger y Steinbring (2009) desarrollaron un enfoque teórico-crítico hacia las condiciones y posibilidades fundamentales del uso de manipulativos para el aprendizaje de conocimientos matemáticos abstractos basados en relaciones y estructuras, es decir que el valor de los manipulativos depende de la vinculación del objeto a las relaciones y estructuras matemáticas que representan.

La propuesta de Nührenbörger y Steinbring (2009) aboga por una formación integral que no sólo capacite a los futuros docentes en el uso práctico de manipulativos para la enseñanza de las matemáticas, sino que también los prepare teóricamente, dotándolos de las herramientas necesarias para comprender a profundidad el impacto pedagógico de estos recursos en el proceso de aprendizaje.

En la práctica educativa, resulta esencial que los profesores establezcan ambientes que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo que los niños desarrollen conocimientos específicos. Por lo tanto, es importante definir, diferenciar y vincular adecuadamente los materiales, recursos y juegos utilizados, ya que su naturaleza y características contribuyen a fortalecer la comprensión de los conceptos matemáticos, así como al desarrollo de competencias y habilidades en los contextos de aprendizaje (Torres y Casallas, 2021).

En tal sentido, Torres y Casallas (2021), Godino (1998) y Alsina (2001) proponen definiciones de materiales, recursos y juegos:

- Material: cualquier objeto manipulativo que puede mediar para la comprensión de un saber. Puede ser estructurado o no estructurado.
    - ✓ Material estructurado es entendido como aquel que está diseñado para el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, la tabla para multiplicar de acuerdo al método Montessori.
    - ✓ Material no estructurado es aquel que no ha sido pensado para el aprendizaje de las matemáticas, pero puede ser útil, por ejemplo, palitos de paleta para contar.

- Recurso: herramienta de apoyo con una intención preestablecida. Puede ser manipulativo o de ayuda al estudio.
  - ✓ Recursos manipulativos, hace referencia a los objetos físicos que son usados como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.
  - ✓ Los recursos, entendidos como ayudas al estudio, asumen parte de la función del profesor e incluyen los manuales escolares en sus diversas versiones, ya sean presentaciones magistrales o de otro tipo).
- Juego: actividad estructurada bajo reglas, contenidos, tiempos y objetivos que involucra de manera equitativa a quienes participan de él.
  - ✓ Juego *game*, entendido como el juego estructurado (aquel que tiene reglas que deben seguirse).
  - ✓ Juego *play*, corresponde al juego libre.

Con relación a los materiales manipulativos, Alsina y Planas (2008) indican que,

> La manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que debe hacer más eficaz el proceso de aprendizaje, sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje. (p. 50)

De lo propuesto por Alsina y Planas (2008) podemos rescatar que, en el proceso de aprendizaje el uso de materiales manipulativos es una estrategia potente que va más allá de proporcionar una forma divertida de aprender. La manipulación de materiales permite interactuar, explorar y experimentar con los conceptos que se están desarrollando, puede ayudar a internalizar y comprender los conceptos de manera más profunda y significativa, facilitando la conexión entre los conceptos abstractos y la vida real.

También es posible expresar que, esto promueve la autonomía del aprendiz, fortaleciendo la capacidad de tomar decisiones y resolver problemas de manera independiente, fomentando la independencia y la confianza en las habilidades del estudiante para aprender y resolver problemas por sí mismos.

Siguiendo las descripciones de Moreno y González (2019) se presentan los siguientes materiales didácticos que pueden aportar a la enseñanza del perímetro y área.

- GeoGebra: Es un software de geometría dinámica que permite a los estudiantes explorar y manipular figuras geométricas. Pueden modificar las dimensiones de las figuras y observar cómo cambian el perímetro y el área en tiempo real.
- Geoplanos: Son tableros cuadrados con clavos o pines en los que se pueden formar figuras geométricas utilizando bandas elásticas. Los estudiantes pueden crear diferentes figuras y calcular su perímetro y área contando las unidades correspondientes.
- Tangrams: Son rompecabezas geométricos que constan de diferentes piezas, en el caso del tangram chino, consta de siete piezas (cinco triángulos, un cuadrado y un paralelogramo) que se pueden combinar para formar diversas figuras. Los estudiantes pueden explorar la relación entre el perímetro y el área de las diferentes figuras formadas.
- Papel cuadriculado: Permite a los estudiantes dibujar y manipular figuras geométricas utilizando las cuadrículas como unidades de medida. Pueden contar las unidades de longitud para calcular el perímetro y las unidades cuadradas para determinar el área.

- Fichas o cubos de unidad: Son pequeños cuadrados o cubos que representan una unidad de medida. Los estudiantes pueden utilizarlos para cubrir la superficie de una figura y contar la cantidad de unidades necesarias para determinar el área.
- Plantillas de figuras geométricas: Son modelos precortados de diferentes figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos, etc.) que los estudiantes pueden manipular y comparar. Pueden medir los lados para calcular el perímetro y utilizar unidades cuadradas para determinar el área.

Enseguida nos referiremos al tangram por ser este material de preponderancia en este trabajo.

El tangram

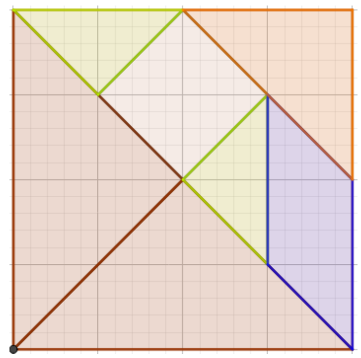
El tangram se define como un rompecabezas geométrico y etimológicamente la palabra se puede descomponer en «tang» que significa chino y «gram» que significa escrito o gráfico. De igual manera, son considerados objetos concretos que pueden ser creados basándose en otros, por lo tanto, no todos tienen origen histórico y criterios prestablecidos (Wahyudi y Aulina, 2021).

Según Fuentes (2020) existen distintos tipos de Tangram. A continuación, veremos algunos:

- El Tangram chino clásico (Figura 30), el de siete piezas: conformado por dos triángulos rectángulos isósceles grandes, dos triángulos rectángulos isósceles pequeños, un triángulo rectángulo isósceles mediano, un cuadrado y un paralelogramo.

Figura 30

Tangram clásico chino

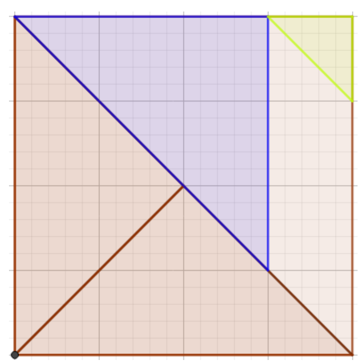


Nota. Elaboración propia.

- El Tangram de cinco piezas: esta versión está formada por tres triángulos rectángulos grandes, un paralelogramo y un triángulo rectángulo pequeño (Figura 31).

Figura 31

Tangram de cinco piezas

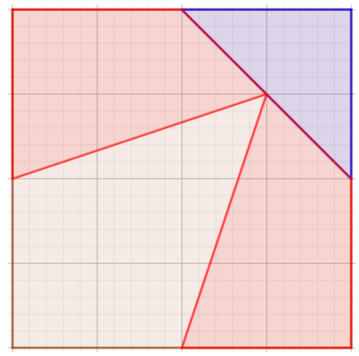


Nota. Elaboración propia.

- Tangram de cuatro elementos: está formado por un triángulo rectángulo, dos polígonos similares de cuatro lados y un polígono de cuatro lados diferente a los anteriores (Figura 32).

Figura 32

Tangram de cuatro elementos

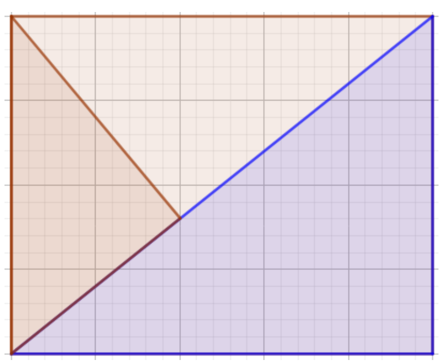


Nota. Elaboración propia.

- Tangram de Brügner: el matemático alemán G. Brügner creó este Tangram, a partir de un rectángulo, que tiene solamente tres figuras (tres triángulos) como se observa en la Figura 33. Estos tres triángulos fueron creados de tal manera que se pudiera formar el mayor número de polígonos convexos con ellos, en total 16 polígonos convexos (Cortínez y Castro, 2008).

Figura 33

Tangram de Brügner

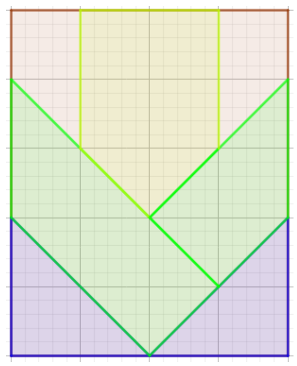


Nota. Elaboración propia.

- Tangram Pitagórico: en este tangram (ver Figura 34), se configuran dos cuadrados que corresponden a los catetos del triángulo, y un tercer cuadrado que corresponde a la hipotenusa. Las piezas del tangram pueden reordenarse para mostrar que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa, proporcionando así una representación visual del teorema y facilitando su comprensión en contextos educativos.

Figura 34

Tangram pitagórico

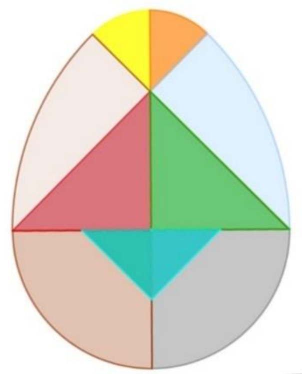


Nota. Elaboración propia.

- Tangram ovalado: también se le conoce como ovotangram o tangram del huevo. Se origina a partir de la disección de una figura ovoide. Este tangram (Figura 35) consta de nueve piezas: dos triángulos isósceles curvos (se denomina triángulo isósceles curvo a aquel que tiene dos lados rectos de igual longitud y el tercer lado es un arco de circunferencia cuyo centro coincide con el vértice opuesto a dicho lado), dos triángulos rectángulos curvos, dos triángulos rectángulos grandes y uno pequeño, y dos trapecios curvos.

Figura 35

Tangram ovalado



Nota. Elaboración propia.

Estos tipos de tangram muestran subdivisiones de una figura, lo cual nos lleva a inspirarnos en la creación de un tangram basado en la cultura paraguaya, específicamente en los bordados del *ao po'i*.

El tangram ao po'i

La riqueza cultural del Paraguay se ve reflejada en sus tejidos tradicionales, entre los cuales destaca *el ao po'i*, un arte textil que ha evolucionado a lo largo del tiempo pero que mantiene su esencia y significado. En esta sección exploramos en detalle el *ao po'i*, desde su origen y significado hasta las técnicas utilizadas en su elaboración, haciendo hincapié en la importancia de preservar este valioso patrimonio cultural paraguayo.

Ao po'i es una palabra guaraní que significa «tejido fino». Es uno de los tejidos típicos del Paraguay, que, originalmente se realizaba en los telares, actualmente se representa con diferentes bordados. Cabe destacar que el *ao po'i* es el tejido en sí, y los bordados se elaboran sobre el tejido de *ao po'i*. El auténtico *ao po'i*, o *ao po'ieté*, abarca todo el proceso artesanal realizado a mano. Esto incluye desde la recolección del algodón blanco o rojo (*mandiyú pyta*) cultivado en los jardines de las mujeres artesanas, su limpieza e hilado, la elaboración del tejido en el telar rústico y, finalmente, su bordado con los puntos tradicionales. El proceso de elaboración del *ao po'i* exige cuidado y atención al detalle, siguiendo técnicas tradicionales que han sido heredadas y transmitidas, en su mayoría por mujeres, a través de generaciones en el entorno familiar (Silva, 2023).

Su historia y desarrollo se remonta hacia el siglo XIX, durante el gobierno del Dr. José Gaspar Rodríguez de Francia, periodo en el cual se produjo un bloqueo comercial para la importación de telas, hecho que obligó a las mujeres a aprender a hilar el algodón crudo, para luego utilizarlo en el telar rústico y elaborar distintos bordados, que con el tiempo se convirtieron en emblemas de la identidad nacional.

En Paraguay, el Instituto Paraguayo de Artesanía (IPA) es la entidad responsable de promover la producción y el consumo de artesanías. Según el registro proveído por el IPA, existen 2.323 productores de bienes culturales, como tejidos y bordados tradicionales. De estos, el 71,7% se dedica a la producción de prendas en *ao po'i*, el 18 % al bordado en *ñandutí*[12] y el 10,3% al bordado en algodón o *encaje Ju*[13]. El *ao po'i* se elabora principalmente en las ciudades de Villeta, *Carapeguá*, *Pirayú*, Asunción, siendo el departamento de Guairá el mayor representante, con varios distritos dedicados a esta actividad, especialmente *Yataity*, conocida como la cuna del *ao po'i*. En total, 1.666 artesanos trabajan en este rubro, de los cuales el 97,7% son mujeres y el 2,3% hombres. Del total de productores de prendas de *ao po'i*, el 85,4% se encuentra en el departamento de Guairá, el 12,2% en Central y el 2,5% en Cordillera (Olmedo et al., 2016).

---

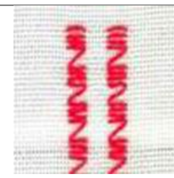
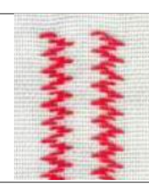
[12] Encaje, muy fino, originario del Paraguay, que imita el tejido de una telaraña (Silva, 2023).
[13] "Encaje *ju* significa tejidos (*ju* en guaraní que significa aguja.) Tejidos con aguja" (Instituto Paraguayo de Artesanía, 2011b, p. 2).

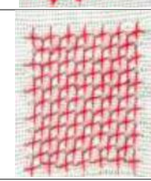
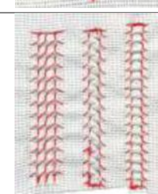
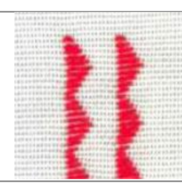
Por esta razón, la ciudad de Yataity del departamento de Guaira es la cuna del *ao po'i*, caracterizado por la elaboración de los bordados en diversos diseños y colores.

Los puntos tradicionales tienen nombres en guaraní y son muy ricos culturalmente, ya que por lo general están inspirados en la fauna y la flora local. Según fuentes del Instituto Paraguayo de Artesanía (2011a) los puntos de bordados más conocidos son:

Tabla 6

Puntos bordados conocidos

Tipos de puntos	Descripción	Ejemplos
Piola	Se le dio el nombre de «punto piola» debido a su forma.	
Ysyry	Es una palabra en guaraní que significa «arroyo», y se le da ese nombre al punto por su forma sinuosa, similar a la de un arroyo.	
Meró ra´ỹi	Esta palabra significa «semilla del melón» en guaraní.	
Typói jegua	En guaraní, «*jegua*» significa «adorno», por lo que podríamos traducir este punto como «adorno del *typòi*», en referencia a los bailes paraguayos.	
Ju'i rupi'a	En guaraní, significa «huevo de rana» debido a su parecido con los huevos de este animal.	
Ju'i rendy	Este punto, en guaraní, significa «saliva de rana».	

Margarita poty	Este nombre se refiere a una flor llamada Margarita, y en guaraní, «*poty*», significa «flor».	
Estrella	Este nombre es más sencillo de identificar como una estrella, ya que la bordadora fijó su mirada en una estrella y realizó las puntadas en el *ao po`i*.	
Kamba resa	En guaraní, significa «ojo de moreno» o «ojo negro». Se denomina así por el brillo especial que tienen los ojos oscuros, y al ver el punto, este también parece brillar.	
Jazmín Poty	Significa «flor de jazmín» en guaraní y se trata de un punto muy popular.	
Filtiré	Se denomina «filtiré» a un punto que genera calados en la tela y que es muy utilizado en el bordado del *ao po`i*.	
Ñandú Pysâpe	En guaraní, significa «uña del avestruz», y si se imaginan las patas del avestruz, verán el parecido.	
Vainilla	Se llama «vainilla» por el parecido a las antiguas galletitas de los españoles.	
Montañita	Como su nombre lo indica, es muy parecido a una montaña o montañita debido al desnivel del bordado.	

Nota. Los datos y las imágenes han sido extraídos del artículo publicado por el Instituto Paraguayo de Artesanía (2011a). Fuente: Elaboración propia.

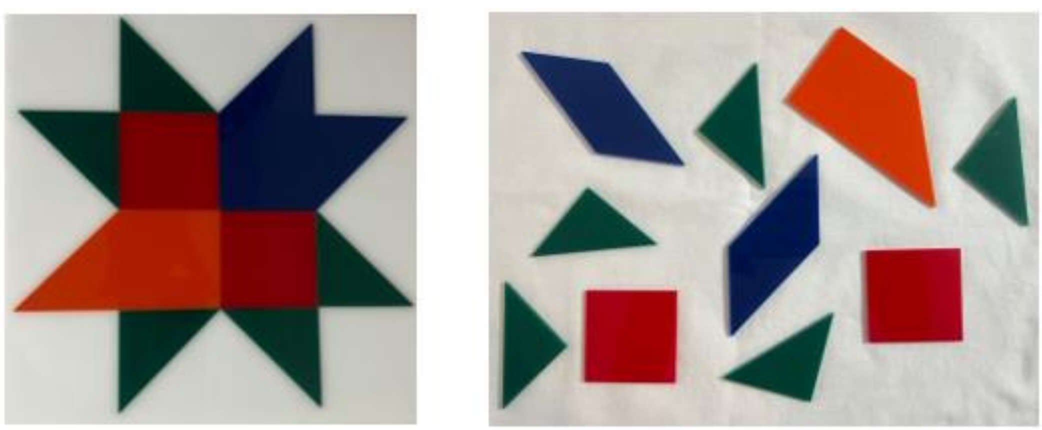
Los puntos de los bordados del *ao po'i*, descriptos en la Tabla 6, fueron inspiración para la construcción del tangram *ao po'i*.

El tangram *ao po'i* es un material desarrollado por los autores de este trabajo, diseñado para representar geométricamente algunos bordados tradicionales de *ao po'i*. Entre los bordados que se pueden recrear se encuentran: estrella, margarita *poty*, *ysyry*, *meró ra' ỹi*, *tipo'y jegua*, *kamba resa*, jazmín *poty* y montañita. Este tangram se compone de diez (10) piezas, que incluyen tres figuras del tangram chino original (el cuadrado, el triángulo rectángulo isósceles y el paralelogramo), junto con un trapecio rectángulo adicional. Cada una de estas piezas tiene una relación de equivalencia en área con respecto al triángulo rectángulo isósceles, lo que permite explorar de manera didáctica y visual conceptos geométricos.

A continuación, presentamos las piezas del tangram *ao po'i* (Figura 36), las relaciones de equivalencia entre ellas (Tabla 7) y las formas de los bordados estrella, margarita *poty*, *ysyry*, *meró ra' ỹi*, *tipo'y jegua*, *kamba resa*, jazmín *poty* y montañita, representadas mediante estas piezas (Tabla 8).

Figura 36

Piezas del tangram ao po'i

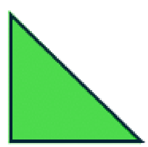
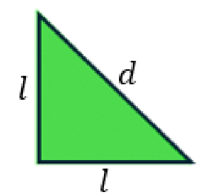
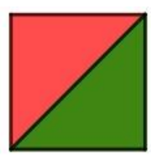
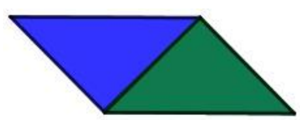
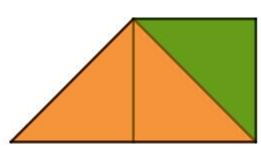


Nota. Elaboración propia.

En la Figura 36 se puede apreciar que el tangram *ao po'i* está compuesto por cinco triángulos rectángulos isósceles congruentes de color verde, dos cuadrados congruentes de color rojo, dos paralelogramos congruentes de color azul y un trapecio rectángulo de color anaranjado.

Tabla 7

Relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram ao po'i con respecto al triángulo rectángulo isósceles

Relaciones entre las piezas con respecto al triángulo rectángulo isósceles			
Pieza		Equivalencias de área	Equivalencias de perímetro
Triángulo rectángulo isósceles (tr)		Unidad de medida	
Cuadrado (c)		$A_c = 2 \cdot tr$	$P_c = 4 \cdot l$
Paralelogramo (pa)		$A_{pa} = 2 \cdot tr$	$P_{pa} = 2 \cdot l + 2 \cdot d$
Trapecio rectángulo (tra)		$A_{tra} = 3 \cdot tr$	$P_{tra} = 4 \cdot l + 1 \cdot d$

Nota. Elaboración propia.

Las piezas del tangram *ao po'i* tienen una relación de equivalencia de área y perímetro con respecto al triángulo rectángulo isósceles. A continuación, se describen estas relaciones, de acuerdo con información presentada en la Tabla 7:

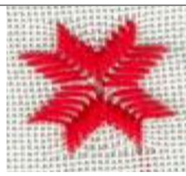
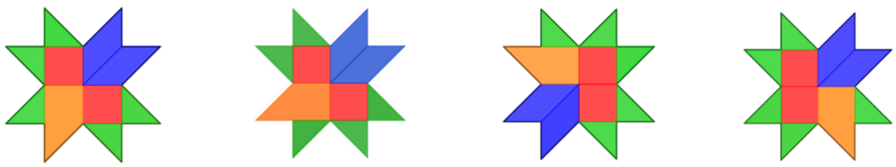
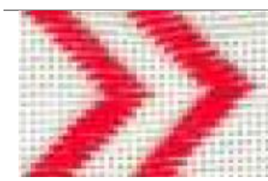
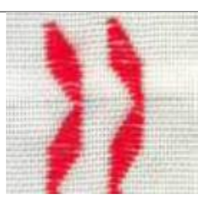
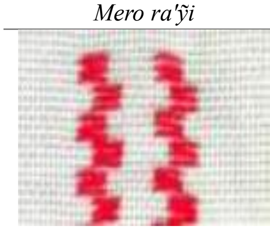
- *Triángulos rectángulos isósceles:* Los cinco triángulos rectángulos isósceles del tangram *ao po'i* tienen la misma área, ya que son congruentes.
- *Cuadrados:* Cada cuadrado (de color rojo) tiene un área equivalente a la de dos triángulos rectángulos isósceles. Esto se debe a que el área de un cuadrado se puede dividir en dos triángulos rectángulos isósceles congruentes. Su perímetro se expresa como $P_c = 4 \cdot l,\ l$ representa la longitud del cateto del triángulo rectángulo isósceles.
- *Paralelogramos:* Cada paralelogramo (azul) tiene un área equivalente a dos triángulos rectángulos isósceles. La relación se basa en la descomposición del paralelogramo en dos triángulos rectángulos isósceles iguales. Su perímetro es $P_{pa} = 2 \cdot l + 2 \cdot d$, en la que l representa la longitud del lado del cateto del triángulo rectángulo isósceles y d es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles, que también corresponde a la longitud de la diagonal del cuadrado.
- *Trapecio rectángulo:* El trapecio rectángulo (de color anaranjado) tiene un área que equivale a la de tres triángulos rectángulos isósceles. Su perímetro está dado por $P_{tra} = 4 \cdot l + 1 \cdot d$, en la que l representa la longitud del lado del cateto del triángulo rectángulo isósceles y d es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles.

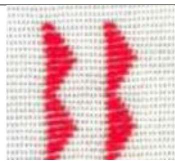
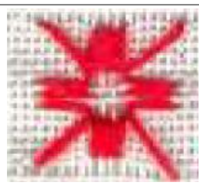
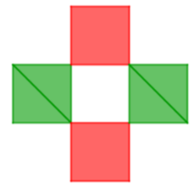
Estas relaciones permiten una comprensión clara de cómo las diferentes piezas del tangram *ao po'i* se comparan en términos de área y perímetro, utilizando el triángulo rectángulo isósceles como referencia.

Las formas geométricas de los bordados estrella, margarita *poty*, *ysyry*, *meró ra' ỹi*, *tipo'y jegua*, *kamba resa*, jazmín *poty* y montañita, representadas con piezas del tangram *ao po'i*, se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8

Formas geométricas de algunos bordados del ao po'i representados con piezas del tangram ao po'i

Bordados	Formas de construcción con piezas del tangram *ao po'i*
 Estrella	
 Margarita *poty*	
 *Ysyry*	
 *Mero ra'ỹi*	
 *Typói jegua*	

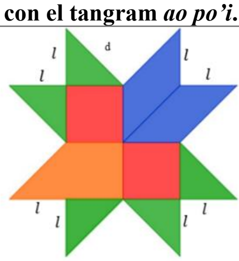
 Montañita		
 *Kamba resa*		
 Jazmín *Poty*		

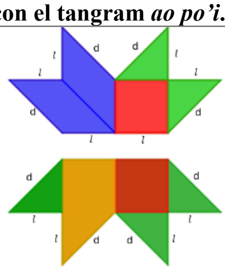
Nota. Elaboración propia

Finalmente, utilizamos las fórmulas clásicas para determinar el perímetro y el área de las figuras estrella y margarita *poty*. Para el área, utilizamos el triángulo como unidad de medida, y como unidad de medida para la longitud, l, que es la longitud del lado del cateto del triángulo (del tangram) (Tabla 9).

Tabla 9

Fórmulas del perímetro y el área de los bordados estrella y margarita poty

Bordado estrella		
Representación geométrica con el tangram *ao po'i.*	Perímetro	Área
	$P = 8 \cdot l + 8 \cdot d$ $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2} \cdot l$ $\rightarrow P = 8 \cdot l + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot l = 8.l(1+\sqrt{2}) =$ $\mathbf{8(1+\sqrt{2})}\boldsymbol{l}$ Si $l = 1$, entonces: $P \approx 19{,}31$ unidades de longitud.	$A = 5 \cdot tr + 2 \cdot c + 2 \cdot pa + 1 \cdot tra$ $A = 5 \cdot tr + 2(2 \cdot tr) + 2(2 \cdot 2tr) + 1(3 \cdot tr)$ $\boldsymbol{A = 16tr}$ Pero, área de $tr = \frac{l^2}{2}$ $\rightarrow A = 16(\frac{l^2}{2}) = \boldsymbol{8l^2}$ Si $l = 1$, entonces: $A = 8(1) = 8$ unidades de área.
Bordado margarita *poty*		

Representación geométrica con el tangram *ao po'i*.	Perímetro	Área
	$P = 12 \cdot l + 8 \cdot d \rightarrow P = 12 \cdot l + 8\sqrt{2} \cdot l$ $= \mathbf{4l(3 + 2\sqrt{2})}$ Si $l = 1$, entonces: $P \approx 23{,}31$ unidades de longitud.	$A\ = 5 \cdot tr + 2 \cdot c + 2 \cdot pa + 1 \cdot tra$ $A\ = 5 \cdot tr + 2(2 \cdot tr) + 2(2 \cdot tr) + 1(3 \cdot tr)$ $A\ = \mathbf{16tr}$ Pero, área de $tr = \frac{l^2}{2}$ $\rightarrow \mathrm{A} = 16(\frac{l^2}{2})\ = \mathbf{8l^2}$ Si $l = 1$, entonces: $\mathrm{A} = 8(1) = 8$ unidades de área.

Nota. Elaboración propia.

La formación de profesores de matemáticas

En este apartado presentamos los fundamentos conceptuales relacionados con la formación de profesores de matemáticas, específicamente los aspectos vinculados al modelo del conocimiento del profesor adoptado en este trabajo: el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Asimismo, exponemos los fundamentos conceptuales sobre las tareas profesionales y los materiales didácticos en la formación de profesores de matemáticas.

El modelo de conocimiento MTSK

En el campo de la formación de profesores de matemáticas, existe el reto constante de adaptarse a las exigencias de una educación en evolución, en la cual la enseñanza de las matemáticas requiere un conocimiento especializado que va más allá del dominio de los contenidos. La formación de profesores encargados de enseñar matemáticas representa un elemento fundamental en la educación, ya que son ellos quienes tienen la responsabilidad de generar conocimientos y promover el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes.

En este contexto, existen varios modelos de conocimiento del profesor de matemáticas. Sin embargo, en este trabajo abordaremos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

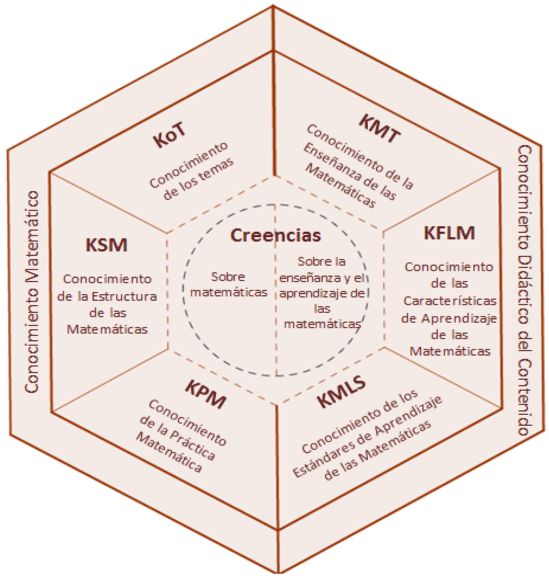
Escudero, et al. (2015) consideran que, para la enseñanza de una materia, en este caso Matemáticas, el profesor necesita un conocimiento específico que va más allá del conocimiento disciplinar. Estos autores asocian este conocimiento específico a la enseñanza de la materia, es decir, un conocimiento pedagógico del contenido. Además, proponen el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), que plantea lo especializado como la conjunción de conocimientos matemáticos y didácticos específicos del profesor de matemáticas. Estos conocimientos, a su vez, están influenciados por las ideas y creencias que el profesor tiene sobre las matemáticas, así como sobre su aprendizaje y enseñanza.

En el modelo MTSK, según Flores et al. (2016), el aprendizaje es un proceso en el que el profesor de matemáticas comprende y relaciona los conceptos matemáticos con la enseñanza, considerando las características y necesidades de los estudiantes. Se enfoca en el conocimiento especializado que el profesor utiliza para explicar y comprender la naturaleza de las matemáticas, así como en las prácticas pedagógicas específicas para facilitar el aprendizaje matemático.

En la Figura 37, Flores et al. (2016) ilustran los elementos principales del modelo MTSK y sus respectivos subdominios:

Figura 37

Subdominios del MTSK



Nota. Tomado de Flores et al. (2016).

Dentro del *Conocimiento Matemático* (MK), Flores et al. (2016) proponen tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático del profesor de matemáticas: el conocimiento del contenido matemático en sí (el conocimiento de los temas matemáticos), de su estructura (conocimiento de la estructura matemática) y de cómo se procede y produce en matemáticas (conocimiento de la práctica matemática), estos se describen de la siguiente forma:

- *Conocimiento de los temas matemáticos* (KoT[14]): Supone conocer los contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos, hechos, reglas, teoremas, etc.) y sus significados de manera fundamentada, integrando el contenido que queremos que aprenda el alumno, el profesor debe poseer un nivel de profundización mayor en estos temas en

[14] Knowledge of Topics

comparación con el nivel de conocimiento que se espera que alcancen los estudiantes. Este conocimiento permite al docente comprender las interconexiones entre los diferentes conceptos matemáticos y las posibles dificultades que puedan enfrentar los alumnos en su aprendizaje.

- C*onocimiento de la estructura de la matemática* (KSM[15]): Se refiere a las relaciones que establece el profesor entre distintos contenidos matemáticos, ya sea en un curso específico o con contenidos de otros cursos o niveles educativos.
- *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM[16])*:* se centra en comprender las formas de conocer y producir en Matemáticas, destacándose por su enfoque en la identificación de prácticas características del trabajo matemático, ya sea relacionadas con un tema específico o con la matemática en su conjunto.

Por otra parte, dentro del *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) están incluidos:

> El conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido como objeto de aprendizaje (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas), como objeto de enseñanza (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) y desde el punto de vista de lo que se debe/puede alcanzar en un determinado momento escolar (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas). (Flores et al., 2016, p. 212)

Estos conocimientos son descritos de la siguiente forma:

- *Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM): Responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno frente a las actividades y tareas matemáticas. Se consideran, además, los conocimientos de las

[15] Knowledge of the Mathematical Structure
[16] Knowledge of Practices in Mathematics

creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático específico.

- *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT): Se refiere a los conocimientos que tiene el profesor sobre las teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, las distintas actividades, tareas, analogías o ejemplos que usa el profesor, así como los conocimientos sobre el potencial y limitaciones que pueden tener los diferentes recursos al abordar un contenido matemático.
- *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS): Este apartado aborda el conocimiento de los contenidos establecidos en las normativas curriculares institucionales, con el objetivo de entender lo que se prescribe en cada etapa educativa. Se trata de situar temporal y contextualmente el contenido enseñado, considerando qué contenidos matemáticos corresponden al nivel educativo que atiende el profesor, cuáles están asociados al nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un determinado tema, y el conocimiento sobre la secuenciación de diversos temas dentro de un curso (Flores et al., 2016).

Además de los dos dominios principales y sus respectivos subdominios descritos anteriormente, están las *Creencias* como unos aspectos transversales que permean los subdominios en este modelo.

Tareas profesionales

Según Llinares (2011) las tareas son un componente fundamental en la formación de profesores. En los programas de formación docente, estas tareas son las herramientas que los formadores emplean para que los futuros profesores puedan desarrollar los conocimientos, como los planteados en el modelo anterior, y las destrezas indispensables para enseñar matemáticas, al mismo tiempo que comienzan a adquirir las habilidades necesarias para seguir aprendiendo a lo largo de su trayectoria profesional.

Las tareas en los programas de formación se diseñan para promover el desarrollo de competencias específicas, lo que favorece el aprendizaje y desarrollo de conocimiento y destrezas relacionadas con contextos-problemas específicos. Algunos de los contextos-problemas específicos asociados con la enseñanza de las matemáticas y que constituyen un sistema de actividad para el profesor de matemáticas, en el cual se enmarca la práctica de enseñar matemáticas, se relacionan con los componentes del modelo MTSK de la siguiente manera:

- Analizar las producciones de los estudiantes: Este contexto-problema se relaciona con el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), ya que requiere que el profesor comprenda cómo los estudiantes aprenden matemáticas y sea capaz de interpretar sus producciones. Sin embargo, no solamente se puede relacionar las interpretaciones de las producciones de los estudiantes con el subdominio KFLM, también se precisa de otros conocimientos, por ejemplo, el conocimiento de los temas matemáticos.
- Organizar el contenido matemático para su enseñanza: Este contexto-problema se vincula con el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y el Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT). El KSM permite al profesor organizar los contenidos considerando las conexiones entre diferentes conceptos y procedimientos matemáticos, mientras que el KMT le ayuda a seleccionar las estrategias de enseñanza más adecuadas para cada contenido.
- Gestionar la comunicación matemática en el aula: Este contexto-problema se asocia con el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), el Conocimiento de las

Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT). El KMT facilita al profesor el diseño de actividades que promuevan la comunicación matemática efectiva en el aula, mientras que el KFLM le permite anticipar y responder a las posibles dificultades de los estudiantes en la comunicación de ideas matemáticas.

Para gestionar cada uno de los componentes de este sistema de actividad, el profesor pone en funcionamiento diferentes dominios de conocimiento de manera integrada (Gavilán, García y Llinares, 2007; Escudero y Sánchez, 2007, 2008; Llinares, 2000, citados en Llinares, 2011):

- Su perspectiva y comprensión sobre (y de) las matemáticas.
- Su perspectiva y comprensión sobre el aprendizaje de las matemáticas.
- Su perspectiva y comprensión sobre la enseñanza de las matemáticas.

Estos dominios de conocimiento y creencias (perspectivas) está relacionados unos con otros durante la práctica de enseñar matemáticas. Desde estas referencias, las tareas en los programas de formación deberían favorecer al desarrollo de los diferentes dominios de conocimiento en uso en estas diferentes actividades de la práctica.

Además de las tareas específicas que los programas de formación de profesores de matemáticas incorporan para desarrollar habilidades y competencias prácticas, es fundamental considerar las competencias docentes más amplias que sustentan la práctica profesional. Una de estas competencias, ampliamente reconocida en la literatura educativa, es la capacidad de «mirar profesionalmente».

Mirar profesionalmente la enseñanza. Además de las tareas específicas que los programas de formación de profesores de matemáticas incorporan para desarrollar habilidades y competencias prácticas, es fundamental considerar las competencias docentes más amplias que sustentan la práctica profesional. Una de estas competencias, ampliamente reconocida en la literatura educativa, es la capacidad de «mirar profesionalmente». Fernández (2021) destaca esta competencia como un componente esencial en la articulación de la teoría y la práctica del profesor de matemáticas, subrayando su importancia en la formación docente. Esta perspectiva no solo abarca el conocimiento matemático y pedagógico, sino que también implica una reflexión profunda sobre la práctica educativa, permitiendo a los futuros profesores desarrollar una visión crítica y consciente de su labor. En este contexto, la competencia de «mirar profesionalmente la enseñanza» se convierte en un aspecto clave para la formación integral del docente.

En palabras de Fernández (2021)

> La competencia docente descrita como mirar profesionalmente la enseñanza es vista como una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas, y, por tanto, ha sido identificada como una competencia docente importante a desarrollar en los programas de formación de profesorado. (p. 41)

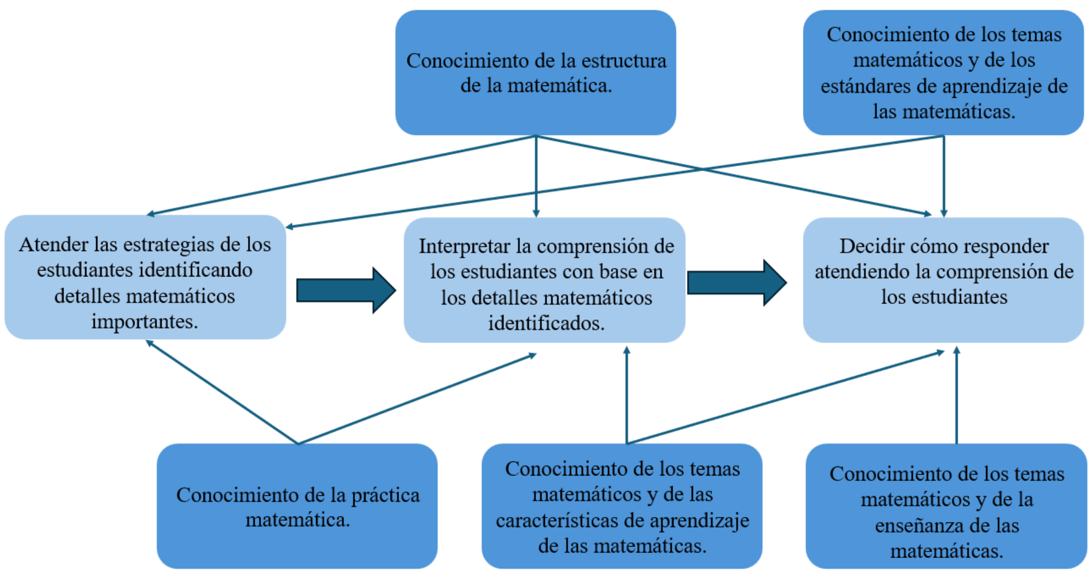
"Esta competencia permite al futuro profesorado identificar aspectos relevantes en una situación, usar el conocimiento para interpretarlos y justificar las decisiones de enseñanza" (van Es y Sherin, 2002, citado en Fernández, 2021, p. 42). Por tanto, una mirada profesional distingue a un experto en una determinada área de alguien que no lo es por su capacidad de ver ciertos fenómenos de una manera particular (Goodwin, 1994, citado en Fernández, 2021).

Jacobs, Lamb y Philipp (2010, citados en Fernández, 2021) definen mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas: "(i) atender las estrategias de los estudiantes identificando detalles matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión de los estudiantes con base en los detalles matemáticos identificados y (iii) decidir cómo responder atendiendo la comprensión de los estudiantes" (Fernández, 2021, p. 43).

Esta competencia implica que el profesorado use su conocimiento matemático y conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para atender, interpretar y decidir (Brown, Fernández, Helliwell y Llinares, 2020; Thomas, Jong, Fisher y Schack, 2017, citado en Fernández et al., 2021). La Figura 38 relaciona los dominios de conocimientos necesarios para enseñar matemáticas del modelo MTSK (Flores et al., 2016) y las destrezas de mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante.

Figura 38

Relación MTSK y la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante



Nota. Elaboración propia.

Como pudimos ver, las tareas profesionales deben ocupar una parte fundamental en la formación de profesores de matemáticas, además vinculando dichas tareas con la competencia «mirar profesionalmente» la enseñanza y el aprendizaje y, el modelo MTSK se pueden promover el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Sin embargo, el éxito de las tareas profesionales dependería, en gran parte, de una buena organización y gestión las mismas.

Metodologías para las tareas profesionales. Aké y López-Mojica (2020) sugieren que el diseño de tareas profesionales, fundamentadas en la investigación es esencial en la formación docente, ya que permite a los futuros profesores desarrollar las competencias necesarias para su práctica educativa. Este enfoque resalta la necesidad de identificar qué tipos de tareas deben incorporarse en la formación del profesorado para prepararlos ante los desafíos de la enseñanza.

En este sentido, Aké y López-Mojica (2020) plantean que las tareas profesionales en la formación docente se desarrollan siguiendo una postura teórica determinada, específicamente el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Este modelo orienta la intención didáctica de las tareas profesionales de estos investigadores, con el propósito de fomentar en los profesores el desarrollo tanto del conocimiento matemático como de las competencias didácticas necesarias para su práctica educativa.

Asimismo, las tareas profesionales pueden estar compuestas por una o varias situaciones que están concatenadas y relacionadas por la misma intención didáctica, lo que garantiza la coherencia en el proceso de aprendizaje. Estas situaciones se diseñan a partir de un contenido matemático específico y se presentan en escenarios que pueden surgir en el aula, permitiendo a los futuros profesores practicar cómo abordar temas reales con un enfoque pedagógico bien fundamentado.

Aké y López Mojica (2020) también establecen una lógica de implementación para cada tarea profesional durante el proceso de instrucción, como se muestra en la Figura 39. Su metodología asegura que las tareas se apliquen de manera coherente hacia el logro de la competencia «mirar profesionalmente» la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por medio de la integración teoría-práctica.

Figura 39

Lógica de implementación de las tareas profesionales establecida por Aké y López Mojica

Nota. Tomado de Aké y López Mojica (2020).

Las fases de implementación de las tareas profesionales son: la fase inicial, en la que se presentan las tareas junto con las preguntas correspondientes; la fase individual, en la que se responden las preguntas justificándolas con el referente teórico; la fase grupal, que permite una discusión colectiva sobre las preguntas planteadas; la fase teórica, que introduce cuestiones para conectar con las investigaciones realizadas sobre el contenido matemático; la fase de reajuste, en la que se revisan las interpretaciones de las fases anteriores y se comparan con las propuestas de la investigación; y, finalmente, la fase institucional, en la cual el formador de profesores proporciona retroalimentación sobre todas las fases previas.

Estas fases permiten formar a los futuros profesores y profesores en servicio, con el fin de contribuirles al afrontamiento competente los desafíos del aula. Este enfoque integral fortalece la formación académica y fomenta una práctica educativa basada en un conocimiento matemático, pedagógico y didáctico.

La lógica de implementación de las tareas propuestas por Aké y López Mojica (2020) nos permitió estructurar las actividades incluidas en las tareas profesionales, integrando en ellas el uso del tangram *ao po'i*.

Materiales didácticos en la formación de profesores de matemáticas. En cuanto al papel de los materiales didácticos en la formación de profesores, Nührenbörger y Steinbring (2009) consideran que los objetos manipulables cumplen una doble función. Por un lado, sirven como recursos de aprendizaje para los futuros profesores, ya que se pueden utilizarse diversos manipulativos para promover su propio aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, los futuros profesores adquieren conocimientos prácticos sobre cómo emplear estos recursos en la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, los profesores deben actuar como aprendices y desarrollar una comprensión profunda de los fundamentos teóricos y las implicaciones prácticas del uso de manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. Esto implica entender cómo estos recursos pueden contribuir al aprendizaje de los estudiantes, así como reconocer sus limitaciones y los desafíos que pueden surgir durante su implementación en el aula. Al adquirir este conocimiento, los profesores serán más efectivos en su uso, adaptando su enfoque pedagógico a las necesidades específicas de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje que se propongan.

De igual manera, es fundamental que los profesores desarrollen habilidades para evaluar de manera efectiva el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos cuando se utilizan materiales didácticos. Esto implica ir más allá de un uso mecánico o procedimental de estos recursos, y emplearlos como herramientas que promuevan el pensamiento simbólico y la construcción de significados matemáticos. Los profesores deben ser capaces de diseñar actividades y preguntas que revelen cómo los estudiantes interpretan y aplican los conceptos matemáticos mediante la manipulación de estos materiales, y a partir de esa información, tomar decisiones pedagógicas que favorezcan el aprendizaje (Nührenbörger y Steinbring, 2009).

No obstante, el uso efectivo de los materiales manipulativos en el aula requiere más que simplemente tener acceso a ellos. Los futuros profesores, así como los profesores en ejercicio también deben adquirir conocimientos matemáticos específicos para integrarlos en su enseñanza diaria. Esto implica no solo aprender a utilizar técnicamente, sino también comprender cómo pueden fomentar el pensamiento creativo, la colaboración y la resolución de problemas.

Metodología

Este capítulo está estructurado en cinco apartados. En el primero, presentamos la perspectiva metodológica, describiendo el acercamiento al tipo de estrategia investigativa empleada en este trabajo de grado. En el segundo, detallamos los instrumentos que evidencian el logro de los objetivos específicos propuestos. En el tercero, describimos la estructura de las tareas profesionales que diseñamos. En el cuarto, explicamos las fases del trabajo de grado. Finalmente, en el quinto apartado, presentamos la matriz de las categorías de reflexión de las tareas profesionales.

Perspectiva metodológica

Este trabajo de grado se enmarca en la modalidad de profundización y es por ello que no se asume una metodología investigativa como tal, no obstante, empleamos una metodología de diseño que permita más adelante (con la implementación de las tareas) consolidar todas las etapas de un experimento de enseñanza. A su vez, adoptamos una aproximación hermenéutica, orientada a interpretar la política educativa paraguaya, los componentes del currículum del profesorado y de los estudiantes del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica. Asimismo, consideramos aspectos de la cultura paraguaya, como los tipos de bordados del *ao po´i*.

Desde esta perspectiva, asumimos una postura reflexiva caracterizada por una actitud de indagación y cuestionamiento sobre el conocimiento matemático y didáctico del contenido de los profesores paraguayos de la educación básica primaria.

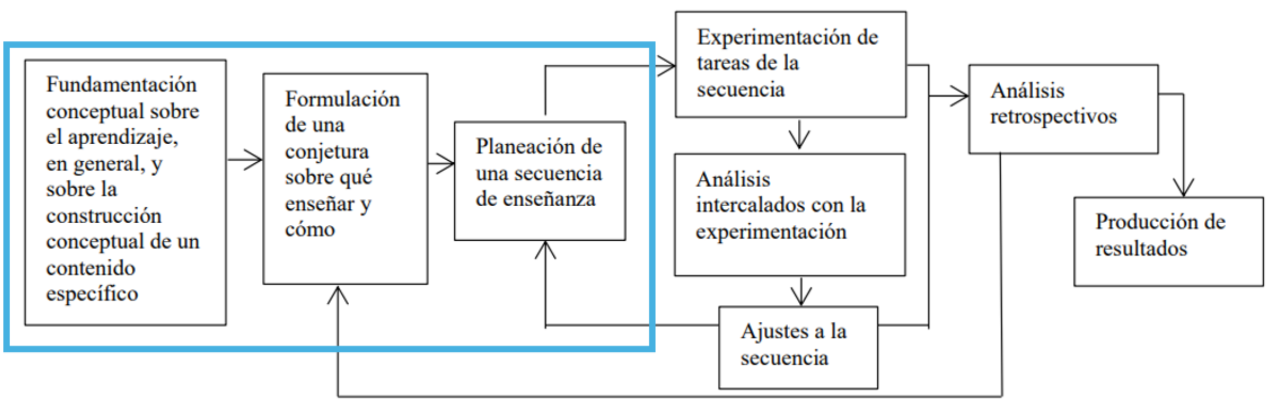
La estrategia investigativa que empleamos es de tipo cualitativa y se relaciona con la «estrategia de diseño», ya que el núcleo problemático de nuestro trabajo de grado se centra en el «Diseño de tareas o de material didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático».

Específicamente, nos aproximamos a las tres primeras etapas de la estrategia investigativa denominada «experimento de enseñanza».

Camargo (2021) define el «experimento de enseñanza» como “el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico” (p. 69). La investigadora sugiere un esquema general que debe seguirse en un experimento de enseñanza (Figura 40), el cual sirve como plan de ejecución para implementar dicha estrategia. Cabe destacar que, en este trabajo, debido a la modalidad, se abarca hasta el diseño de las tareas profesionales.

Figura 40

Plan de ejecución para la estrategia «experimento de enseñanza»



Nota. Adaptado de Camargo (2021. p. 71).

En la Figura 40, destacamos con un recuadro las etapas de la estrategia «experimento de enseñanza» que consideramos para el diseño de las tareas profesionales. Según Camargo (2021), la primera etapa se centra en el análisis crítico de la literatura disponible sobre el fenómeno, el descontento de los investigadores con los resultados de las prácticas de enseñanza tradicionales, y las evidencias parciales e inconclusas sobre cómo lograr un aprendizaje significativo. Esta etapa se refleja en nuestro trabajo, comenzando con el análisis de la política educativa paraguaya, los componentes del currículum tanto del profesorado como de los estudiantes del primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, y los aspectos de la cultura paraguaya. A partir de este análisis, se elabora una fundamentación conceptual sobre la relación entre perímetro y área, que considera tanto los aspectos matemáticos como didácticos, además de los relacionados con la formación de profesores de matemáticas. Dichos fundamentos conceptuales se hallan en el marco de referencia de este trabajo.

En la segunda etapa, se formulan una conjetura preliminar sobre cómo promover el aprendizaje de un contenido específico, con el propósito de generar una transformación positiva en los profesores del primero y segundo ciclo. Esta conjetura se articula en dos dimensiones: la primera, relacionada con el contenido matemático, responde a qué debe enseñarse, y la segunda, enfocada en el aprendizaje, trata de cómo enseñarlo. Para el caso de este trabajo, esta etapa se observa en nuestra conjetura de que es necesario formular tres tareas profesionales que aborden la relación entre perímetro y área como objeto matemático (primera dimensión). Estas tareas deben basarse en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), con el fin de desarrollar la competencia mirar profesionalmente. Conjeturamos que la tarea 1 debe favorecer el dominio del conocimiento matemático, mientras que las tareas 2 y 3 deben enfocarse en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, considerando las creencias de los profesores en todas las tareas.

Con relación a la segunda dimensión, el cómo enseñar, esta se relaciona tanto con las fases de las tareas profesionales como aquellas que incluyan prácticas propias del rol del profesor. En ese sentido, conjeturamos que el profesor aprende cuando se les propone tareas que usualmente realiza en su desempeño profesional, como analizar e interpretar las producciones de los estudiantes y planificar una clase. Estas dos funciones esenciales del profesor están vinculadas al diseño de las tareas 2 y 3 respectivamente.

Finalmente, la tercera etapa que abordamos en este trabajo de grado es la planificación de las tareas profesionales. Nos detenemos en esta etapa, ya que este trabajo de grado forma parte de los estudios de la cohorte BECAL-Paraguay, los cuales, debido a su enfoque y alcance, se clasifican como estudios de profundización o reflexión. La planificación de las tres tareas profesionales, en el marco de este trabajo da cuenta de esta etapa, ya que se diseñaron considerando los fundamentos conceptuales del marco de referencia y las fases de la lógica de implementación de las tareas propuestas por Aké y López Mojica (2020).

Instrumentos

Los instrumentos que proporcionan las evidencias necesarias para verificar el logro de los objetivos específicos propuestos en este trabajo se detallan a continuación.

El primer objetivo específico es construir un marco de referencia acerca de los aspectos matemáticos y didácticos de las relaciones entre perímetro y área, el tangram y la formación de profesores de matemáticas (tareas profesionales y material didáctico). El instrumento utilizado para verificar el logro de este objetivo es la Tabla 10 que incluye las categorías del marco de referencia, los aspectos o temas considerados más relevantes, y los autores en los que se fundamenta dicho marco.

Tabla 10

Categorías del marco de referencia: Temas relevantes y autores fundamentales

Categorías	Aspectos	Autores
Marco matemático	• Conceptos fundamentales ✓ Magnitud ✓ Cantidad de magnitud ✓ Medida ✓ Unidad de medida ✓ Sistema de medidas • Perímetro y área ✓ Región plana ✓ Longitud ✓ Perímetro ✓ Área ✓ Relaciones entre perímetro y área	• Pizarro et al. (2016) • García y Carrillo (2006) • Caggiani et al. (2015) • Chamorro y Belmonte (1988) • Chamorro (2003) • Alfonso (1997) • Serrano (2000) • D'Amore y Fandiño (2007)

Marco didáctico	• Fases piagetianas en la construcción de las magnitudes • Operaciones fundamentales en el proceso de medida • Etapas en la construcción del concepto de medida • Etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes • Aprendizaje de perímetro y área. • Método COPISI	• Chamorro y Belmonte (1988) • Arteaga y Macías (2016) • Dickson et al. (1991) • Belmontes (2005) • Chamorro (2003) • García y Carrillo (2006) • Marmolejo y González (2015) • Olmo et al. (1989) • D'Amore y Fandiño (2007) • Barriga (2021) • Yeap Ban Har (s.f) • Andrada y Bernabeu (2022)
El tangram a*o po'i* como material didáctico	• Material didáctico ✓ Materiales didácticos ✓ El tangram ✓ El tangram *ao po'i*	• Torres y Casallas (2021) • Alsina y Planas (2008) • Moreno y González (2019) • Wahyudi y Aulina (2021) • Instituto Paraguayo de Artesanía. (2011)
La formación de profesores de matemáticas	• El modelo de formación MTSK ✓ Tareas profesionales ✓ Mirar profesionalmente la enseñanza ✓ Metodologías para las tareas profesionales ✓ Materiales didácticos en la formación de profesores de matemáticas	• Escudero, et al. (2015) • Flores et al. (2016) • Llinares (2011) • Fernández (2021) • Aké y López Mojica (2020) • Nührenbörger y Steinbring (2009)

Nota. Elaboración propia.

El segundo objetivo específico de este trabajo refiere a la creación del material didáctico tangram *ao po'i,* destacando sus características geométricas y métricas, con el fin de utilizarlo como herramienta didáctica para el desarrollo de tareas profesionales en la formación de profesores paraguayos, enfocadas en las relaciones de perímetro y área. La creación del tangram *ao po'i*, evidenciada con la Figura 36 previamente presentada, así como con la descripción de las piezas, sus características, relaciones y los tipos de bordados que se pueden representar geométricamente, como se detalló en el apartado «El tangram *ao po'i*» del marco de referencia de este documento, son muestra del cumplimiento de este objetivo; además de la alusión que se hizo a este en el marco matemático y didáctico.

Las evidencias del logro del tercer objetivo específico, elaborar tres tareas profesionales dirigidas a profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclo, asociadas a las relaciones entre perímetro y área, el aprendizaje de las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes y la utilización del método COPISI para la enseñanza, utilizando el tangram *ao po'i*, son las tres tareas profesionales, cuyos objetivos y dominios del modelo MTSK que se pretende favorecer se describen a continuación.

La primera tarea se titula «*El tangram ao po'i y las relaciones entre perímetro y área*». El propósito de esta tarea es que los profesores reconozcan los nueve casos de las relaciones entre perímetro y área, propuestos por D'Amore y Fandiño (2007), mediante la utilización del tangram *ao po'i*. La tarea promueve el conocimiento matemático, específicamente el subdominio denominado *Knowledge of Topics* (KoT: conocimiento de los temas matemáticos), vinculado a las relaciones entre perímetro y área.

La segunda tarea se titula «*El tangram ao po'i y las etapas de la enseñanza – aprendizaje de las magnitudes*». El objetivo de esta tarea es que los profesores identifiquen las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes, específicamente de longitud (perímetro) y área, a través del análisis de una situación de aula. Esta tarea favorece el conocimiento didáctico de los contenidos, en particular el subdominio *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM: conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas).

Por último, la tercera tarea se titula «*El tangram ao po'i y el método COPISI para la enseñanza*». El propósito de esta tarea es que los profesores vinculen el método COPISI con el tangram *ao po'i* para la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones entre perímetro y área en estudiantes de primero y segundo ciclo de la educación paraguaya. Esta tarea favorece el conocimiento didáctico de los contenidos, específicamente el subdominio Knowledge *of Mathematics Teaching* (KMT: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas).

Estructura de las tareas profesionales

Asumimos el concepto de tarea profesional propuesto por Llinares (2011), quien la define como una actividad orientada a que los profesores adquieran conocimientos y desarrollen habilidades para la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, el diseño de nuestras tareas profesionales se basa en el modelo MTSK (*Mathematics Teacher Specialized Knowledge*) propuesto por Flores et al., (2016), el cual se centra en el estudio del conocimiento matemático y didáctico pedagógico que requiere un profesor de matemáticas para enseñar esta disciplina en cualquier nivel académico. En este contexto, adoptamos la postura sobre el aprendizaje de los profesores propuestas por dicho modelo, postura que describimos a continuación.

Nuestra interpretación sobre el aprendizaje, basado en el modelo MTSK, consiste en un proceso en el que el profesor de matemáticas comprende y relaciona los conceptos matemáticos con su enseñanza, considerando las características y necesidades de los estudiantes. El enfoque está en el conocimiento especializado que el profesor utiliza para explicar y comprender la naturaleza de las matemáticas, así como en las prácticas pedagógicas específicas que posibilitan el aprendizaje matemático.

Para establecer la relación entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que se busca promover con las tareas profesionales, y las destrezas de la competencia «mirar profesionalmente», propuesta por Fernández (2021) y descritas en el marco de referencia, se presenta la Tabla 11.

Tabla 11

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas abordadas en las tareas profesionales centradas en la competencia «mirar profesionalmente»

Competencia «mirar profesionalmente» (Fernández, 2021)						
Destrezas	Conocimiento matemático (MK)			Conocimiento didáctico del contenido (PCK)		
	K o T	KSM	KPM	KFLM	KMT	KMLS
Atender las estrategias de los estudiantes identificando detalles matemáticos importantes.	X					
Interpretar la comprensión de los estudiantes con base en los detalles matemáticos identificados.	X			X		

Decidir cómo responder atendiendo la comprensión de los estudiantes.	X			X	X

Nota. Elaboración propia.

Para el diseño de las tareas profesionales, adoptamos la estructura de la lógica de implementación de las tareas según Aké y López Mojica (2020), que comprende las fases antes mencionadas (fase inicial, fase individual, fase grupal, fase teórica, fase de reajuste y la fase de institucionalización). Además, incorporamos algunos elementos que, según Gómez et al. (2018), debe contener una tarea: requisitos, meta, formulación, materiales, agrupamiento y temporalidad. Las fases de la lógica de implementación de las tareas según Aké y López-Mojica (2020), se hallan en el marco de referencia, en el apartado «Metodologías para las tareas profesionales».

A su vez, el diseño de las tareas y algunos de los elementos allí dispuestos están inspirados en los componentes de las «tareas con sentido profesional para la formación de profesores de matemáticas» provistas por el grupo RE-MATE (Research on Mathematics Teacher Education) de la Universidad Pedagógica Nacional. En ese sentido, Rendón et al. (2023) expresan que las tareas profesionales deben favorecer el desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente» la enseñanza de las matemáticas, lo que significa que el futuro profesor debe ser capaz de analizar y reflexionar sobre su práctica, considerando tanto el aprendizaje de los estudiantes como los procesos de enseñanza antes, durante y después de la misma. En la Tabla 12 se presenta el formato de las tareas profesionales utilizada en este trabajo de grado.

Tabla 12

Formato de las tareas profesionales

TÍTULO DE LAS TAREAS	
I- COMPETENCIAS	
Asociadas a la formación de profesores	Asociadas a la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclos

II- OBJETIVO
III- REQUISITOS
IV- DESCRIPCIÓN
V- MATERIALES

VI- FASES
FASE INICIAL/ FASE INDIVIDUAL (tiempo)
FASE GRUPAL (tiempo)
FASE TEÓRICA (tiempo)
FASE DE REAJUSTE (tiempo)
FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN (tiempo)

Nota. Elaboración propia.

Fases de desarrollo del trabajo

El presente trabajo de grado sigue una estructura organizada en seis fases, cada una de las cuales responde a distintas actividades que permitieron abordar el problema planteado. Desde la identificación de los asuntos que motivan nuestra inquietud pedagógica hasta la redacción de las conclusiones, este proceso incluye un análisis de la formación de profesores en Paraguay, la consolidación de antecedentes relevantes y el diseño de tareas profesionales enfocadas en favorecer el conocimiento matemático y didáctico de los profesores paraguayos. A continuación, se presenta la Tabla 13, que detalla las actividades realizadas en cada fase.

Tabla 13

Fases del trabajo de grado

Fases	Actividades
Fase 1	Identificación de los asuntos claves que configuraron nuestra inquietud pedagógica. Estos son: ✓ Necesidad de proponer algunas tareas profesionales que favorezcan el conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido de los profesores paraguayos, que enseñan matemáticas en el primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica, a propósito de las relaciones entre perímetro y área. ✓ Poco material didáctico utilizado por los profesores paraguayos que aporte en la comprensión de la relación entre área y perímetro. ✓ Deseo que este trabajo inicie un camino hacia la investigación en la formación de profesores de matemáticas en Paraguay.
Fase 2	• Contextualización de la formación de profesores en Paraguay, considerando elementos como la estructura del sistema educativo paraguayo, la formación docente inicial y continua en servicio, la educación escolar básica del primer y segundo ciclo. • Caracterización de los profesores de las escuelas de prácticas de los Institutos de Formación Docente Santa Rosa Misiones, Instituto de Formación Docente Mariscal José Félix Estigarribia Boquerón y Nivel de Formación Docente del Centro Regional de Educación Dr. Raúl Peña Amambay, para lo cual se diseñó un formulario en línea aplicado a los profesores de dichas escuelas.
Fase 3	• Consolidación de los antecedentes, lo que permitió cuatro agrupamientos centrados en estudios que abordan: la relación entre perímetro y área, la formación de profesores que enseñan matemáticas, el diseño, la gestión y la evaluación de tareas profesionales y el uso del tangram para la enseñanza de la relación entre perímetro y área, estos son las investigaciones que identificamos de este objeto matemático. • Construcción de los objetivos que orientan este trabajo de grado a partir de los antecedentes, el contexto y la inquietud pedagógica que lo motiva.
Fase 4	Elaboración del marco de referencia la cual se centra en cuatro aspectos principales: el marco matemático, el marco didáctico, la presentación del tangram *ao po'i* como material didáctico construido en el presente trabajo, y la formación de profesores de matemáticas, son estos los fundamentos conceptuales que sustentan el diseño de la secuencia de tareas profesionales.
Fase 5	• Diseño de tres tareas profesionales dirigidas a profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclo, que favorezcan el conocimiento de las relaciones entre perímetro y área, el aprendizaje de las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes y la utilización del método COPISI para la enseñanza, utilizando el tangram *ao po'i*.

Fase 6	• Redacción del marco metodológico (enfoque, aproximación y estrategia) y de los resultados teniendo en cuenta la triangulación entre los datos, la teoría y los objetivos. • Redacción de las conclusiones y la introducción.

Nota. Elaboración propia.

Categorías de reflexión

Es este apartado presentamos la Tabla 14, que organiza las tres primeras etapas de la estrategia «experimento de enseñanza», cuyo producto son las tres tareas profesionales diseñadas, categorizadas según el conocimiento matemático, didáctico y la formación del profesor de matemáticas. Cada categoría y subcategoría describe los aspectos clave que se abordan en cada tarea, y sobre los cuales se atiende en las reflexiones individuales en el capítulo de resultados.

En la categoría de conocimiento matemático, todas las tareas (T1, T2 y T3) se centran en la relación entre perímetro y área, lo que indica que este tema es común a todas las actividades propuestas. En la categoría de conocimiento didáctico del contenido se abordan las etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes, el uso del material didáctico «tangram *ao po'i*"» y el método COPISI. En la tarea 2 (T2) se trabajan las etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes a partir del análisis de las producciones de los niños, centrados en los conceptos de longitud (perímetro) y área. En todas las tareas (T1, T2 y T3) se utiliza el material didáctico «tangram *ao po'i*"», y el método COPISI de manera directa o implícita, como en la tarea 1 (T1).

En la categoría formación de profesores de matemáticas, las tareas profesionales se estructuran según las fases de implementación propuestas por Aké y López Mojica (2020), integrando la teoría y la práctica del quehacer del profesor. Estas fases están presentes en todas las tareas (T1, T2 y T3), mientras que las tareas 2 (T2) y 3 (T3) se promueve especialmente la vinculación entre los conocimientos teóricos y su aplicación en el aula. Esto resalta que estas dos tareas favorecen la integración efectiva de la teoría y la práctica en el desarrollo profesional de los profesores.

En conjunto, esta estructura de categorías y subcategorías muestra cómo las tres tareas profesionales integran los elementos conceptuales del marco de referencia y las primeras tres etapas de un experimento de enseñanza.

Tabla 14

Categoría de reflexión

<table>
<tr><th rowspan="7">Tres primeras etapas del experimento de enseñanza</th><th>Categoría</th><th colspan="2">Subcategoría</th><th>T1</th><th>T2</th><th>T3</th></tr>
<tr><td>Conocimiento matemático</td><td colspan="2">Relación entre perímetro y área</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento didáctico del contenido</td><td colspan="2">Etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes específicamente de longitud (perímetro) y área.</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Material didáctico «tangram ao po'i».</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método COPISI.</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Formación de profesores de matemáticas</td><td rowspan="2">Tareas profesionales</td><td>Fases de implementación: Fase inicial/individual, fase grupal, fase teórica, fase de reajuste y la de institucionalización.</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Vinculación de la teoría y la práctica del hacer del profesor.</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

Nota. Elaboración propia.

Resultados

En este apartado presentamos los resultados de este trabajo, que consiste en las tres tareas profesionales diseñadas con el propósito de promover la construcción del conocimiento matemático y didáctico de las relaciones entre perímetro y área en profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica, 1. ° y 2. ° ciclo, utilizando el tangram *ao po'i* como material didáctico, para favorecer la competencia mirar profesionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, incluimos una reflexión sobre el logro de los tres objetivos específicos de este trabajo de grado, teniendo en cuenta las categorías de reflexión expuestas en el capítulo anterior.

Tareas diseñadas

Las tareas profesionales fueron diseñadas conforme a lo expuesto en el apartado anterior. Están estructuradas en fases y consideran las competencias matemáticas tanto de los profesores en formación como de los estudiantes de sexto grado de Paraguay. Cada tarea tiene un objetivo relacionado con el aprendizaje de los profesores y está orientada a fomentar un conocimiento específico de los subdominios del modelo MTSK. En la Tabla 15 se presenta de manera general algunos aspectos importantes de las tres tareas profesionales y seguidamente las tres tareas diseñadas.

Tabla 15

Resumen de algunos aspectos de las tareas diseñadas

Tarea	Título	Tema	Práctica del profesor que se evidencia	Subdominio del MTSK que favorece
Tarea 1	El tangram *ao po'i* y las relaciones entre perímetro y área	Relaciones entre perímetro y área propuesta por D'Amore y Fandiño (2007).		(KoT) Conocimiento de los temas.
Tarea 2	El tangram *ao po'i* y las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes	Etapas del aprendizaje y enseñanza de las magnitudes.	Analizar e interpretar las producciones de los alumnos.	(KFLM) Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas.

Tarea 3	El tangram *ao po'i* y el método COPISI para la enseñanza	Método COPISI y materiales didácticos.	Planificar una clase.	(KMT) Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.

Nota. Elaboración propia.

En lo que sigue se muestra el desarrollo de cada una de las tareas, con la estructura ya expuesta.

<table>
<tr><th colspan="2">TAREA 1- EL TANGRAM AO PO'I Y LAS RELACIONES ENTRE PERÍMETRO Y ÁREA</th></tr>
<tr><td colspan="2">I- COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td>Asociadas a la formación de profesores</td><td>Asociadas a la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclos</td></tr>
<tr><td>Aplicar teorías y estrategias didácticas de la Matemática en el desarrollo de las clases del 1. ° y 2. ° ciclo de la EEB, para potenciar pensamiento lógico matemático utilizando los recursos didácticos pertinentes al desarrollo cognitivo del niño y el adolescente.</td><td>Creen y resuelvan situaciones problemáticas que involucren la utilización de: Relación entre el perímetro y el área de una figura en función a las medidas de sus lados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">II- OBJETIVO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reconocer las relaciones entre perímetro y área propuestas por D'Amore y Fandiño mediante la manipulación del tangram ao po'i.</td></tr>
<tr><td colspan="2">III- REQUISITOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Nociones sobre perímetro y área.
• Conocimiento intuitivo del proceso de medir (percibir, comparar, ordenar, asignar valor).</td></tr>
<tr><td colspan="2">IV- DESCRIPCIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la fase inicial, se presenta a los profesores una tarea dividida en dos momentos. El primer momento consiste en una actividad de exploración de las piezas del tangram ao po'i para establecer algunas relaciones entre ellas. En el segundo momento, se solicita la construcción de figuras con el tangram ao po'i, con el objetivo de explorar las posibles relaciones entre el perímetro y el área de las figuras construidas, siguiendo las propuestas por D'Amore y Fandiño (2007).
En la fase grupal, los profesores comparten sus respuestas y las fotografías de las construcciones realizadas en la fase individual, sin evaluar si son correctas o incorrectas. El objetivo es dialogar sobre las posibles soluciones, destacando y valorando las opiniones respecto a las relaciones entre el perímetro y el área de las figuras construidas.
En la fase teórica, se entrega a los profesores el documento de D'Amore y Fandiño (2007), titulado «Relaciones entre área y perímetro, convicciones de maestros y de estudiantes», que aborda las relaciones entre perímetro y área. Para fomentar el análisis y la comprensión del tema, los profesores responden a algunas preguntas.
En la fase de reajuste, se formula una pregunta a los profesores para que revisen sus construcciones y las respuestas a las preguntas de la fases individual y grupal, después de haber leído el documento de D'Amore y Fandiño (2007) durante la fase teórica. El objetivo es determinar si desean modificar o reafirmar sus respuestas.
Finalmente, en la fase de institucionalización, el formador de profesores presenta una tabla que muestra las nueve relaciones entre perímetro y área, según lo propuesto por D'Amore y Fandiño (2007), representadas con el tangram ao po'i.</td></tr>
<tr><td colspan="2">V- MATERIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Tangram ao po'i.
• Hojas blancas, lápices y bolígrafos.
• Dispositivos móviles para capturar las imágenes de las construcciones realizadas.
• Documento de D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. Relime, 10(1),39-68. https://www.redalyc.org/pdf/335/33500103.pdf</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>VI- FASES</th></tr>
<tr><td>FASE INICIAL/ FASE INDIVIDUAL (60 minutos)</td></tr>
<tr><td>En la fase inicial, se presenta a los profesores una tarea dividida en dos momentos. El primer momento consiste en una actividad exploratoria para familiarizarse con el tangram ao po'i e identificar las relaciones entre sus piezas. En el segundo momento, se plantean dos actividades de construcción de figuras con el tangram ao po'i, con el objetivo de explorar las posibles relaciones entre el perímetro y el área, siguiendo las propuestas por D'Amore y Fandiño (2007).
En la primera actividad, se utilizan todas las piezas del tangram ao po'i para construir dos figuras de las formas geométricas de los bordados margarita poty y estrella. El objetivo es analizar la relación entre el perímetro y el área de estas figuras.
En la segunda actividad, se realizan construcciones de figuras empleando solamente algunas piezas del tangram ao po'i. El objetivo de cada construcción es representar dos figuras, la segunda figura con respecto a la primera debe tener:
• Perímetro igual y área igual.</td></tr>
</table>

- Perímetro menor y área mayor.
- Perímetro igual y área mayor.
- Perímetro mayor y área mayor.

Primer momento

1. Manipula las piezas del tangram ao po'i y responda las preguntas

a) ¿Cuáles figuras geométricas reconoces en las piezas del tangram?
b) ¿Cuáles relaciones entre los elementos (lados, ángulos y tamaños) de las piezas del tangram *ao po'i* encuentras?
c) Teniendo en cuenta el tamaño de las piezas. Ordénalas de menor a mayor tamaño.
d) Compara la superficie entre:
   - el triángulo y el cuadrado.
   - el triángulo y el paralelogramo.
   - el triángulo y el trapecio.

   ¿Cuáles son las relaciones que encuentras entre esas superficies para cada uno de los casos?
e) Compara la longitud de los lados de las siguientes piezas:
   - el triángulo con el cuadrado.
   - el triángulo con el paralelogramo.
   - el triángulo con el trapecio.

   ¿Cuáles son las relaciones que encuentras entre esas longitudes para cada uno de los casos?

Segundo momento

2. Con el tangram ao po'i realiza las siguientes actividades

2.1. Dadas las imágenes 1a (bordado margarita *poty*) y 2a (bordado estrella), utiliza todas las piezas del tangram *ao po'i* para construir sus formas geométricas. Asegúrate de que las piezas no se sobrepongan y mantén la ubicación de las dos piezas propuestas en las imágenes 2a (representación geométrica del bordado margarita *poty) y* 2b (representación geométrica del bordado estrella*)*, y toma foto de tus construcciones.

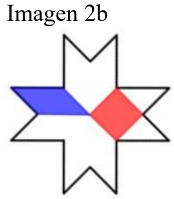
Imagen 1a

Imagen 1b

Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

Imagen 2a

Imagen 2b



Nota. Fotografía del archivo personal de los autores.

2.2. Teniendo en cuenta las construcciones realizadas, responda a las siguientes preguntas:

a) Compara el área de la forma geométrica del bordado estrella con el área de la forma geométrica del bordado margarita *poty.* ¿Es menor el área de la primera forma geométrica respecto al de la segunda o son iguales? Explica el motivo de tu respuesta.

b) Compara el perímetro de la forma geométrica del bordado estrella con el perímetro de la forma geométrica del bordado margarita *poty.* ¿Es menor el perímetro de la primera forma geométrica respecto al de la segunda o son iguales? Justifica tu respuesta.

2.3. Con algunas piezas del tangram *ao po'i*, realiza las siguientes construcciones y toma fotografías de cada una de ellas.

a) Usa las siguientes piezas del tangram *ao po'i*: dos cuadrado y cuatro triángulos, para construir dos figuras que tengan la misma área y el mismo perímetro.

b) Construya dos figuras usando las siguientes piezas del tangram *ao po'i:* dos paralelogramos, dos triángulos y un trapecio. La segunda figura debe tener un perímetro menor y un área mayor que la primera.

c) Utilizando las siguientes piezas del tangram *ao po'i*: dos paralelogramos, cuatro triángulos y un cuadrado, construya dos figuras. La segunda figura debe tener el mismo perímetro y un área mayor que la primera.

d) Con las siguientes piezas del tangram *ao po'i:* dos paralelogramos, un cuadrado y un trapecio, construya dos figuras. La segunda figura debe tener un perímetro y un área mayor que la primera.

2.4. Considerando las figuras que has construido, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál relación te resultó más fácil construir? ¿Por qué?

b) ¿Cuál relación te resultó más difícil construir? ¿Por qué?

c) Explica si hay una relación de dependencia entre el perímetro y el área en todas las figuras que construiste.

FASE GRUPAL (25 minutos)

En esta etapa, los profesores deben presentar las fotografías de sus construcciones y compartir las respuestas de las preguntas de la fase individual. El objetivo es dialogar sobre las posibles soluciones, destacando y valorando las diferentes construcciones y las justificaciones sobre si se satisfacen las relaciones solicitadas. La consigna que se entrega a los profesores es la siguiente:

Presenta las fotografías de las construcciones solicitadas en las actividades anteriores y comparta las respuestas a las preguntas planteadas.

FASE TEÓRICA (40 minutos)

En la fase teórica, se entrega a los profesores el documento de D'Amore y Fandiño (2007), titulado «Relaciones entre área y perímetro, convicciones de maestros y de estudiantes». El objetivo de esta fase es abordar la idea de que las relaciones entre perímetro y área no siempre son tan estrechas y directas como muchos estudiantes, e incluso profesores, suelen pensar. Para fomentar el análisis y la comprensión del tema, se plantea a los profesores la siguiente consigna:

Analiza el documento de D'Amore y Fandiño (2007), titulado «Relaciones entre área y perímetro, convicciones de maestros y de estudiantes» y responda a las siguientes preguntas:

a) Según la lectura ¿por qué es común que tanto estudiantes como profesores consideren que hay una relación directa entre área y perímetro?

b) ¿Cuáles son las relaciones entre perímetro y área, propuestas por D'Amore y Fandiño (2007), que faltaron representar con el tangram *ao po'i*?

c) Según la investigación reportada por D'Amore y Fandiño (2007), ¿cuál relación resultó más difícil de ejemplificar? ¿Coincide con las dificultades que encontraste en esta tarea?

FASE DE REAJUSTE (15 minutos)

En esta etapa, se formula una pregunta a los profesores para que, en equipos de trabajo, revisen sus respuestas de las fases individual y grupal, después de haber leído el documento durante la fase teórica. El objetivo es determinar si desean modificar o reafirmar sus respuestas. La consigna que se entrega a los profesores es la siguiente:

De acuerdo con la lectura de D'Amore y Fandiño (2007), ¿se modificaron sus consideraciones iniciales sobre las relaciones entre perímetro y área? Expliquen su respuesta.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN (20 minutos)

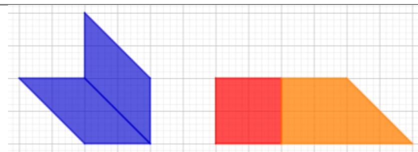
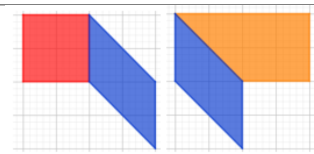
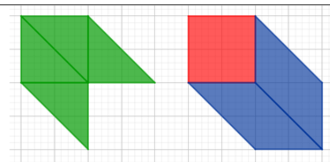
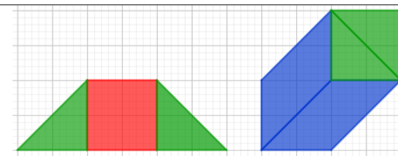
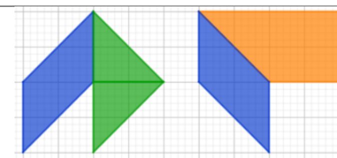
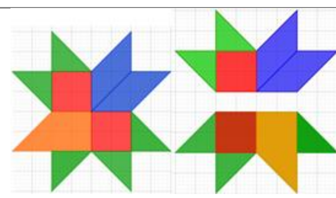
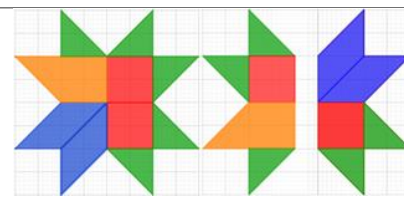
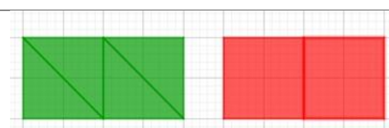
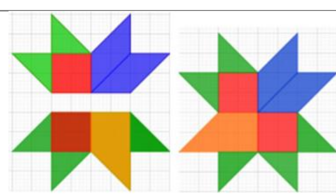
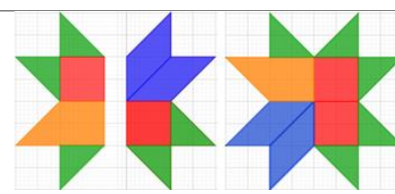
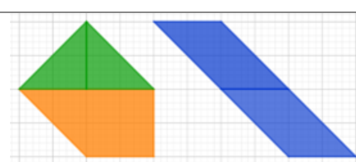
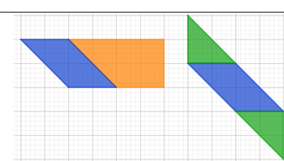
En esta fase, el formador de profesores puntualiza lo siguiente:

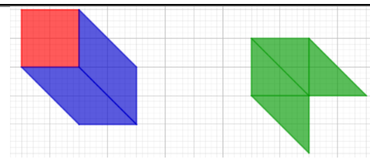
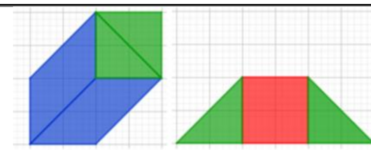
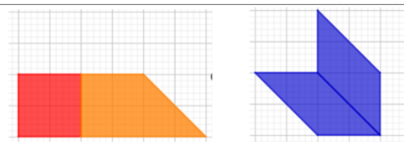
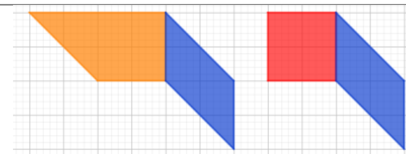
1. Relación entre área y perímetro no es una relación directa. Lo que implica que existan 9 relaciones posibles, entre estas dos magnitudes.
2. Las nueve relaciones entre área y perímetro se pueden sintetizar y ejemplificar con el *ao po'i.*

Luego, el formador construye junto con los profesores una tabla en la que se incluyen las fotografías de las construcciones realizadas en las fases anteriores. Un ejemplo de esta tabla es la siguiente:

Para representar la primera relación entre área y perímetro se han utilizado dos paralelogramos congruentes, un cuadrado y un trapecio rectángulo; con dichas piezas se construyen dos ejemplos con dos figuras cada uno.

En el primer ejemplo, la primera figura está compuesta por dos paralelogramos y la segunda figura, por un cuadrado y un trapecio; con la cual se evidencia que la segunda figura tiene mayor perímetro y mayor área con respecto a la primera figura. En el segundo ejemplo, la primera figura está compuesta por un cuadrado y un paralelogramo, y la segunda, por un paralelogramo y un trapecio; en este segundo ejemplo también se evidencia que la segunda figura tiene mayor perímetro y mayor área con respecto a la primera figura. De forma análoga se representan las demás relaciones.

Relaciones	Posibles representaciones con piezas del tangram *ao po´i*	
	Ejemplo 1	Ejemplo 2
$P >$ $A >$		
$P =$ $A >$		
$P <$ $A >$		
$P >$ $A =$		
$P =$ $A =$		
$P <$ $A =$		
$P >$ $A <$		

$P =$ $A <$		
$P <$ $A <$		

Nota. Elaboración propia.

TAREA 2 - EL TANGRAM *AO PO'I* Y LAS ETAPAS DE LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MAGNITUDES

I- COMPETENCIAS

Asociadas a la formación de profesores	Asociadas a la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclos
Aplicar teorías y estrategias didácticas de la Matemática en el desarrollo de las clases del 1. ° y 2. ° ciclo de la EEB, para potenciar pensamiento lógico matemático utilizando los recursos didácticos pertinentes al desarrollo cognitivo del niño y el adolescente.	Creen y resuelvan situaciones problemáticas que involucren la utilización de: Relación entre el perímetro y el área de una figura en función a las medidas de sus lados

II- OBJETIVO

Identificar las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes específicamente de longitud (perímetro) y área por medio del análisis de una situación de aula.

III- REQUISITOS

- Noción sobre las fases de la construcción de la magnitud.
- Conocimiento intuitivo sobre las operaciones fundamentales en el proceso de medida (conservación y transitividad).

IV- DESCRIPCIÓN

La tarea se organiza en varias fases, comenzando con la fase inicial/individual, en la que se presenta a los profesores una situación de aula ficticia en la que seis estudiantes de sexto grado (Juan, Mathías, Andrea, Martha, Pedro y María) abordan un problema vinculado con la relación entre el perímetro y el área en figuras bordadas del *ao po'i*.

Luego, los profesores analizan las soluciones propuestas por los tres pares de estudiantes (Juan y Mathías, Andrea y Martha, Pedro y María) y realizan algunas actividades basadas en este análisis.

Posteriormente, en la fase grupal, los profesores comparten las respuestas elaboradas durante la fase individual con el objetivo de debatir sus ideas y alcanzar consensos. En la fase teórica, se les entrega un documento que aborda los siguientes temas: las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, las operaciones fundamentales en el proceso de medida, las etapas en la construcción del concepto de medida, así como las etapas para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes. Para el análisis del documento, los profesores deben responder preguntas relacionadas con el aprendizaje de las magnitudes.

En la fase de reajuste, se plantea a los profesores una pregunta que deben responder tras la lectura del documento propuesto en la fase teórica. Luego, deben revisar sus respuestas de las fases individual y grupal, e identificar las etapas para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes de longitud (perímetro) y área en las soluciones de los estudiantes.

Finalmente, la fase de institucionalización concluye la tarea. En esta etapa, el formador de profesores recoge las discusiones y análisis de los profesores en formación y a partir de ello, ejemplifica cada una de las etapas para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes propuestas por Belmonte (2005), centrándose específicamente en las magnitudes de longitud (perímetro) y área, utilizando las piezas del tangram *ao po'i*.

V- MATERIALES

- Hojas blancas, lápices y bolígrafos.
- Documento que aborda: las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, las operaciones fundamentales en el proceso de medida, las etapas en la construcción del concepto de medida, así como las etapas para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes.
- Tarea impresa con un caso (el problema y las soluciones de los estudiantes).
- Documento Ministerio de Educación y Cultura. (2008c). Programa de estudio del sexto grado de Educación Escolar Básica. Ministerio de Educación y Cultura. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/19143?1671730419

VI- FASES

FASE INICIAL/INDIVIDUAL (45minutos)

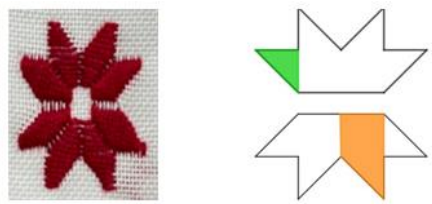
En la fase inicial/individual, se presenta a los profesores una situación de aula en la que seis estudiantes de sexto grado (Juan, Mathías, Andrea, Martha, Pedro y María) abordan un problema relacionado con la relación entre el perímetro y el área de las figuras de dos bordados del *ao po'i*. La consigna que se entrega a los profesores es la siguiente:

Analiza el desarrollo del siguiente problema propuesto a un grupo de estudiantes de sexto grado

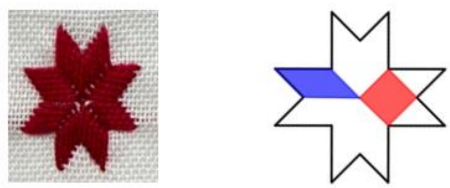
Las artesanas tejedoras de *la Cooperativa Multiactiva de Producción Artesanal Ao po'i Servicios Yataity Ltda.* están desarrollando una nueva colección para la 27. ° Expo Feria del Ao po'i. Para esta colección, las artesanas han decidido emplear dos tipos de bordados del *ao po'i*, margarita *poty* y estrella; con el objetivo de reducir los gastos al utilizar menor cantidad de hilo.

Ayudemos a las artesanas a analizar los bordados utilizando las piezas del tangram *ao po'i*.

a) Utiliza todas las piezas del tangram *ao po'i* para construir la forma geométrica del bordado margarita *poty* y la forma geométrica del bordado estrella del *ao po'i*, como se muestra en las imágenes. Asegúrate de que las piezas no se sobrepongan y mantén la ubicación de las dos piezas propuestas en las imágenes.



Bordado margarita *poty*

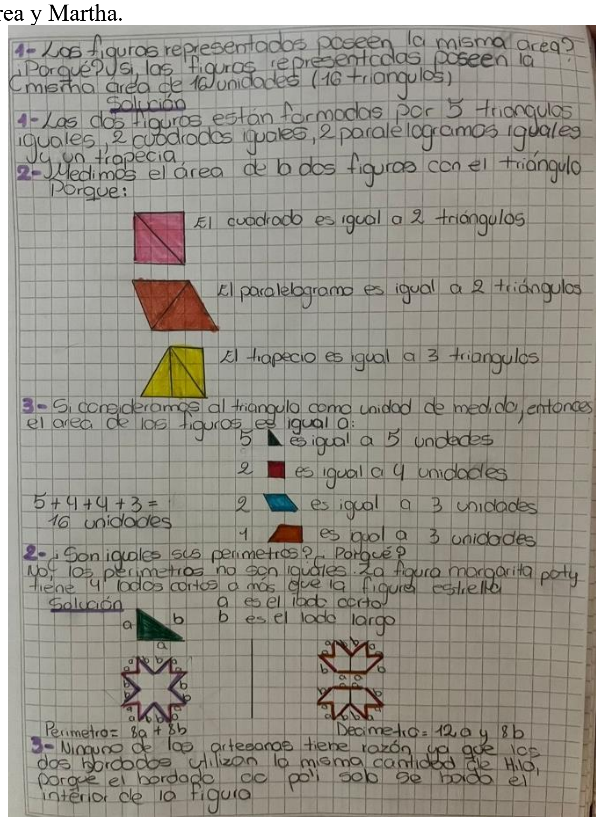


Bordado estrella

b) Teniendo en cuenta las construcciones realizadas, responda a las siguientes preguntas:
1. ¿Las figuras representadas poseen la misma área? ¿Por qué?
2. ¿Son iguales sus perímetros? ¿Por qué?
3. Doña María hizo el bordado margarita *poty* y dice que se debe escoger su diseño, porque al tener un espacio intermedio se gasta menos hilo al recubrir la tela, mientras que Doña Juana dice que su bordado estrella es mejor, porque al no haber espacio intermedio se debe bordar menos área de la tela. ¿A quién le da usted razón?

Las parejas de estudiantes solucionaron así el problema planteado:

- Andrea y Martha.



1- Los figuras representados poseen la misma area? ¿Porqué? Si, las figuras representadas poseen la misma área de 16 unidades (16 triangulos)

Solución

1- Las dos figuras están formados por 5 triangulos iguales, 2 cuadrados iguales, 2 paralelogramos iguales y un trapecio

2- Medimos el área de la dos figuras con el triángulo porque:

El cuadrado es igual a 2 triángulos

El paralelogramo es igual a 2 triángulos

El trapecio es igual a 3 triangulos

3- Si consideramos al triangulo como unidad de medida, entonces el area de los figuras es igual a:

5 es igual a 5 unidades

2 es igual a 4 unidades

2 es igual a 3 unidades

1 es igual a 3 unidades

5+4+4+3 = 16 unidades

2- ¿Son iguales sus perimetros? ¿Porqué?

No, los perimetros no son iguales. La figura margarita poty tiene 4 lados cortos a más que la figura estrella

Solución

a es el lado corto

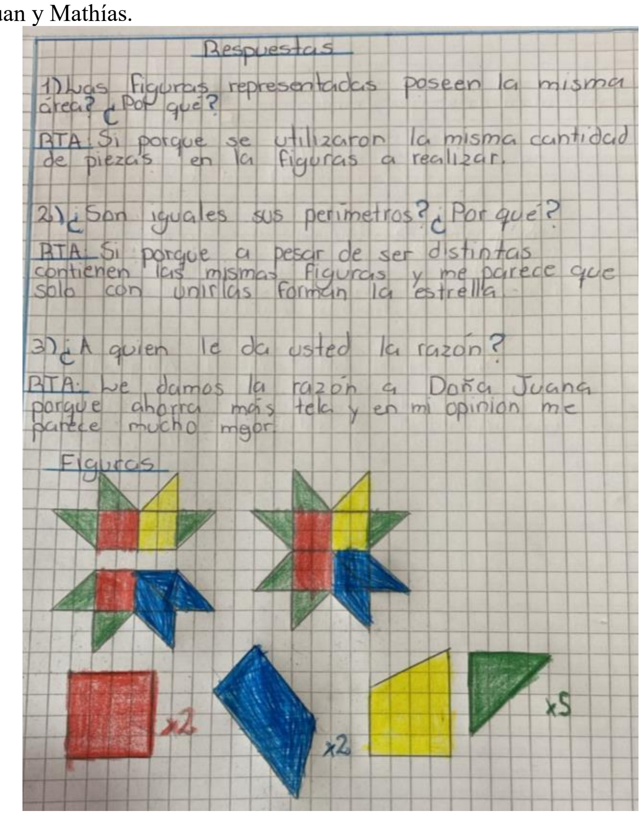
b es el lado largo

Perimetro= 8a + 8b

Perimetro= 12a y 8b

3- Ninguno de las artesanas tiene razón ya que los dos bordados utilizan la misma cantidad de Hilo, porque el bordado de poli solo se borda el interior de la figura

- Juan y Mathías.



Respuestas

1) ¿Las figuras representadas poseen la misma área? ¿Por qué?

RTA: Si porque se utilizaron la misma cantidad de piezas en la figuras a realizar.

2) ¿Son iguales sus perimetros? ¿Por qué?

RTA: Si porque a pesar de ser distintas contienen las mismas figuras y me parece que solo con unirlas forman la estrella

3) ¿A quien le da usted la razón?

RTA: Le damos la razón a Doña Juana porque ahorra más tela y en mi opinion me parece mucho mejor

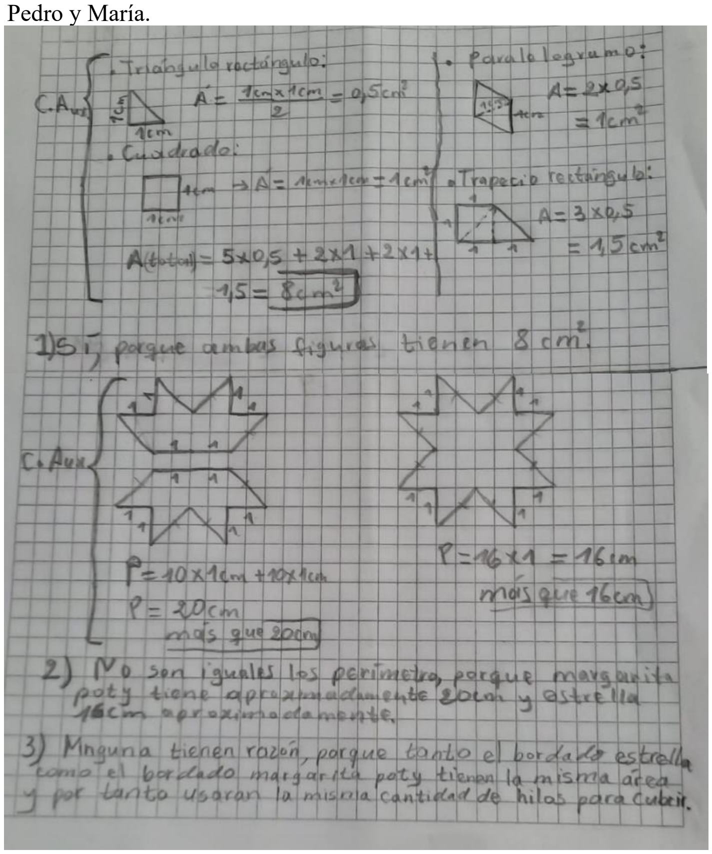
Figuras

x2

x2

x5

- Pedro y María.



1. Realiza las siguientes actividades basándote en las soluciones proporcionadas por los tres pares de estudiantes.
   a) Describa cuáles son las relaciones entre perímetro y área que abordó cada una de las parejas de estudiantes (recuerda lo trabajado en la tarea 1).
      - Andrea y Martha:
      - Juan y Mathías:
      - Pedro y María:
   b) Como profesor en ejercicio, indica cuáles son las fortalezas y las dificultades en relación con el conocimiento sobre las relaciones entre área y perímetro, de cada una de las parejas.
   c) Si tuvieras que evaluar a estas parejas de estudiantes, ¿qué notas les pondrías y por qué?
   d) ¿Qué preguntas le harías a cada pareja, para lograr superar las dificultades que identificaste?
   e) De acuerdo con el Programa de estudio del sexto grado de la Educación Escolar Básica de Paraguay, analiza las respuestas de cada pareja y determina si alcanza las competencias y por qué.

FASE GRUPAL (25 minutos)

En la fase grupal, los profesores presentan las respuestas a las preguntas que respondieron en la fase individual/inicial, con el objetivo de mostrar sus posturas, y llegar a acuerdos si es el caso.

FASE TEÓRICA (40 minutos)

En esta fase, se proporciona a los profesores un documento que corresponde al apartado del marco de referencia de este trabajo, específicamente al marco didáctico, y aborda los siguientes temas:

- Fases piagetianas en la construcción de las magnitudes.
- Operaciones fundamentales en el proceso de medida.
- Etapas en la construcción del concepto de medida.
- Etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes.

La consigna que se entrega a los profesores es la siguiente:

Con base en la lectura del documento que aborda las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, las operaciones fundamentales en el proceso de medida, las etapas en la construcción del concepto de medida y las etapas para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes, responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las etapas que propone Belmonte (2005) para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes? ¿A qué refiere cada una?

2. De acuerdo con la lectura, ¿en qué etapa de aprendizaje se puede ubicar cada una de las parejas del caso presentado? ¿Por qué?
3. Si fueras el/la profesor/a de Juan, Mathías, Andrea, Martha, Pedro y María y les hubieras propuesto esa actividad, ¿en qué etapa de la enseñanza te ubicarías? ¿Por qué?

FASE DE REAJUSTE (15 minutos)

Durante la fase de reajuste, se presenta a los profesores la siguiente actividad:

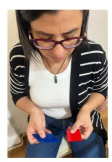
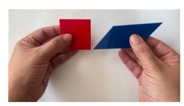
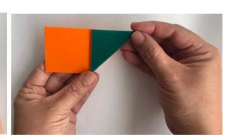
Plantea una actividad que permita avanzar en la siguiente fase de enseñanza y aprendizaje de acuerdo con las identificadas por ti en la fase anterior. Recuerda usar el mismo contexto del tangram ao po'i.

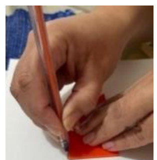
FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN (15 minutos)

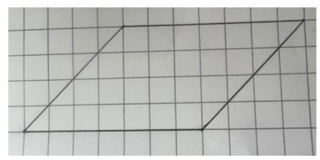
En la fase de institucionalización, el formador de profesores presenta ejemplos de cada etapa para la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes propuestas por Belmonte (2005), centrándose en las magnitudes de longitud (perímetro) y área, utilizando las piezas del tangram *ao po'i;* y retomando lo que los estudiantes realizaron. Esto es:

Etapas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes

Considerando las fases piagetianas en la construcción de las magnitudes, las operaciones fundamentales en el proceso de la medida y las etapas en la construcción de la medida, Belmonte (2005) establece siete etapas en la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes, las cuales son reconocidas a la luz del trabajo con el tangram *ao po'i.*

Etapa 1: Estimación sensorial	
Descripción	En esta etapa, el enfoque principal es permitir que los estudiantes experimenten y perciban las magnitudes utilizando sus sentidos. El objetivo es que puedan distinguir la magnitud específica de otras características de los objetos.
Ejemplos con el tangram ao po'i.	Una actividad interesante sería pedirles que intenten reconocer cuál pieza tiene la mayor y la menor área antes de realizar cualquier medición. Por ejemplo, un estudiante podría decir, de manera errónea, que el cuadrado tiene menor área que el paralelogramo. Este ejercicio permite a los estudiantes utilizar sus sentidos para percibir y comparar las magnitudes de las piezas de manera intuitiva.  
Etapa 2: Comparación directa	
Descripción	La magnitud se aborda a través de la clasificación y ordenación de los elementos dentro de una colección, sin recurrir a intermediarios o elementos externos.
Ejemplos con el tangram ao po'i.	Después de observar y manipular las piezas del tangram *ao po'i*, se puede pedir a los alumnos que las ordenen de menor a mayor según su área. En esta actividad, los estudiantes deben comparar visualmente las piezas y determinar su orden relativo sin utilizar alguna herramienta de medición. También pueden desplazar las piezas, una cerca o sobre la otra para hacer la comparación directa.   Podrían también clasificar aquellas piezas que tengan la misma área o el mismo perímetro, sin importar su forma.
Etapa 3: Comparación indirecta	
Descripción	Se aborda la magnitud mediante la clasificación y organización de los elementos dentro de una colección utilizando un intermediario que facilita la comparación, dado que no es posible hacerlo de manera directa. Al igual que en la fase de comparación directa, el concepto de unidad aún no se ha introducido en esta etapa.

Ejemplos con el tangram ao po'i.	Se puede pedir a los alumnos calcar en una hoja la medida de la longitud de un lado de la pieza (el lado que se quiere comparar), y luego con esa marca, medir el lado de otra pieza, para establecer si es igual o más o menos largo. Comparación indirecta de la longitud del lado   Comparación indirecta del área  
Etapa *Elección de la unidad*	
Descripción	Se mide una magnitud específica utilizando una única unidad de medida no estándar. Si se desea medir la longitud de los lados de una pieza del tangram *ao po'i*, es necesario elegir un objeto que funcione como unidad lineal, como clips, palillos de fósforos, borrador, tajalápiz, entre otros. Esto implica seleccionar un referente para determinar cuántas veces dicho referente se repite en la cantidad a medir. Ese número representa la medida y, lógicamente, depende de la unidad de medida escogida.
Ejemplos con el tangram ao po'i.	Los alumnos pueden elegir una unidad para decir cuántas veces (o sea si se cuenta, se asigna cantidad), cabe en la pieza del tangram que queremos medir, pero la unidad es no estándar, por decir cuántos borradores de lápices caben en la longitud de un lado de la pieza, o cuántos cuadritos caben en el área de la pieza.  
Etapa *Sistemas de medida irregulares*	
Descripción	Se realiza la medición de una magnitud específica empleando varias unidades de medida no estándar que no guardan entre sí una relación de correspondencia o una constante de proporcionalidad.
Ejemplos con el tangram ao po'i.	Se puede pedir a los alumnos que midan la longitud del lado de una pieza del tangram *ao po'i,* por ejemplo, con un borrador de lápiz. Si al medir queda un espacio que no puede cubrirse completamente porque el borrador no alcanza, utilice otra unidad, como un tajalápiz, para medir el espacio restante.  Medida de la longitud de un lado del trapecio es igual a 1 borrador de lápiz y 1 tajalápiz.
Etapa *Sistema de medida regulares*	
Descripción	Se realiza la medición de una magnitud específica empleando varias unidades de medida no estándar que tienen una relación de correspondencia o una constante de proporcionalidad entre sí.

Ejemplos con el tangram ao po'i.	Se puede pedir a los alumnos que utilicen las regletas de Cuisenaire para medir la longitud del lado de una pieza del tangram *ao po'i*, dado que entre las regletas existe una proporción constante. Dos regletas blancas, por ejemplo, equivale a una regleta roja, lo que permite realizar mediciones más precisas y la posibilidad de comparar magnitudes fácilmente.  Medida de la longitud de un lado del paralelogramo es igual a 3 regletas rojas y 1 regleta blanca.
Etapa *Sistema Métrico Decimal*	
Descripción	Se utiliza el sistema métrico decimal.
Ejemplos con el tangram ao po'i.	Se puede pedir a los alumnos que usen una regla graduada o una cinta métrica para medir la longitud de las piezas del tangram *ao po'i* en centímetros o milímetros. Para medir el área, se puede utilizar un cuadrado de un centímetro de lado como unidad de medida, lo que permitirá determinar cuántos cuadrados de un centímetro caben en cada figura. Esta actividad les ayudará a familiarizarse con el sistema métrico decimal y a comprender la relación entre sus unidades.   La longitud del lado de la ficha azul es de $7\ cm$ y su área es de $28\ cm^2$.

Nota. Elaboración propia.

TAREA 3 - EL TANGRAM *AO PO'I* Y EL MÉTODO COPISI PARA LA ENSEÑANZA	
I- COMPETENCIAS	
Asociadas a la formación de profesores	Asociadas a la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclos
Aplicar teorías y estrategias didácticas de la matemática en el desarrollo de las clases del 1. ° y 2. ° ciclo de la EEB, para potenciar pensamiento lógico matemático utilizando los recursos didácticos pertinentes al desarrollo cognitivo del niño y el adolescente.	Creen y resuelvan situaciones problemáticas que involucren la utilización de: Relación entre el perímetro y el área de una figura en función a las medidas de sus lados.
II- OBJETIVO	
Utilizar el método COPISI para la enseñanza de las relaciones entre perímetro y área, empleando el tangram *ao po'i*.	
III- REQUISITOS	
• Conocimiento de los momentos didácticos de una planificación de clase. • Nociones sobre tipos de representación.	
IV- DESCRIPCIÓN	
La tarea se estructura en fases, en la fase inicial/individual se le presenta a los profesores una situación de una profesora del sexto grado de primaria que pretende modificar una guía docente del sexto grado para enseñar la relación entre perímetro y área. Esta fase tiene como objetivo revisar una guía docente e identificar: los propósitos de cada momento didáctico, los tipos de representaciones, las acciones de los estudiantes (de acuerdo con el diseño de las instrucciones) y la relación entre perímetro y área. Además, el objetivo de esta fase es que los profesores identifiquen la diferencia entre la guía docente y la propuesta de una clase ficticia, la de la profesora Laura. Seguidamente, en la fase grupal, los profesores comparten la actividad realizada en la fase inicial/individual con el objetivo de discutir las posturas sobre la revisión de la guía docente y elaboren una planificación coherente a la propuesta de la profesora Laura. Luego, en la fase teórica, los profesores hacen lectura del apartado del marco teórico de una tesis de maestría de	

Maestre y Ruiz (2024); denominado «metodología COPISI», el objetivo de esta fase es vincular el método COPISI con la propuesta de planificaciones realizadas, la guía docente del sexto grado y la relación entre perímetro y área.

Posteriormente, en la fase de reajuste, a la luz de la teoría los profesores deciden ajustar o ratificar sus propuestas de planificaciones. Por último, en la fase de institucionalización, el formador de profesores realiza aclaraciones referentes a las fases anteriores y destaca que no siempre es posible utilizar el método COPISI en todas las situaciones. Además, el formador presenta una tabla describiendo los tipos de representaciones del método COPISI para la enseñanza, ejemplificados con el tangram *ao po'i*.

V- MATERIALES

- Documento Ministerio de Educación y Ciencias, (2022). *Matemática. Guía docente del 6° grado de la EEB*. Ministerio de Educación y Ciencias. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/19481?1677171940
- Tangram ao *po'i*.
- Documento Ministerio de Educación y Cultura, (2008c). *Programa de estudio del sexto grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Ciencias.
- Hojas blancas, bolígrafos, lápices y reglas.
- Documento Maestre Orozco, D. M., y Ruiz Ospino, Y. (2024). *Metodología COPISI para el fortalecimiento del aprendizaje de operaciones básicas con fracciones en octavo grado de la Institución Educativa El Carmelo del municipio de San Juan del Cesar, Guajira.* [Tesis de Maestría en Pedagogía. Universidad Mariana]. (pp. 40-41). https://acortar.link/0BM2DP

VI- FASES

FASE INICIAL/INDIVIDUAL (30 minutos)

En la fase inicial/individual, se presenta a los profesores el caso de la profesora Laura, quién debe analizar y modificar una propuesta de clase. Los profesores deben ayudar a la profesora Laura a reconocer en la propuesta los tres momentos didácticos (inicio, desarrollo y cierre) y los tres tipos de representación (concreto, pictórico y simbólico), con el propósito de diseñar una nueva planificación utilizando el tangram *ao po'i*. La consigna que se entrega a los profesores es la siguiente:

Analiza el caso de la profesora Laura

La profesora Laura enseña matemáticas a un grupo de 25 estudiantes de sexto grado en una escuela de Paraguay. Está planificando una clase sobre la relación entre el perímetro y el área de polígonos regulares e irregulares, de acuerdo con los aprendizajes esperados del currículo. La profesora ha detectado que el contenido sobre la relación entre el perímetro y el área de figuras geométricas es uno de los temas más difíciles para los alumnos.

En sus clases, fomenta principalmente el trabajo en grupo y busca favorecer el desarrollo de las ideas de los estudiantes a través de discusiones y el intercambio de las soluciones de las tareas planteadas.

La profesora Laura ha analizado la guía docente del sexto grado y encontró una propuesta de clase que coincide con los aprendizajes esperados que debe alcanzar. Ella ha decidido realizar algunas modificaciones en la planificación para adaptarla a las necesidades de sus estudiantes y al uso del tangram *ao po'i*. Ayudemos a la profesora Laura a analizar y modificar esta propuesta.
Guía docente del sexto grado

a) Según lo revisado en la guía docente del sexto grado, completa el siguiente cuadro:

Momentos didácticos	*Objetivo*	*Selección de las actividades realizadas por los estudiantes*[17]	*Tipo de representación*	*Relación entre perímetro y área que aborda*
Inicio				
Desarrollo				
Cierre				

b) ¿Existen diferencias entre la forma de trabajar de la Prof. Laura y las actividades propuestas en la guía docente? ¿Cuáles son y por qué?

FASE GRUPAL (60 minutos)

En esta fase los profesores comparten sus respuestas a las preguntas de la fase anterior y presentan sus tablas completadas de acuerdo con lo solicitado en la fase inicial/individual. El propósito de esta fase es que los profesores muestren sus posturas respecto a la revisión de la guía y luego elaboren una planificación sobre relaciones entre perímetro y área. La consigna que se entrega a los profesores es la siguiente:

1. Teniendo en cuenta la siguiente estructura y el método COPISI. Planifica una clase sobre las relaciones entre perímetro y área, utilizando el tangram ao po'i.

- Grado: Ciclo:
- Fecha: Duración:
- Área:

[17] Tipos de actividades: Exploración de única respuesta, exploración de varias respuestas y respuestas a preguntas sobre relación entre perímetro y área.

- Unidad Temática:
- Capacidad:
- Tema:
- Indicadores de evaluación:

MOMENTOS DIDÁCTICOS	TIEMPO
Inicio:	
Desarrollo:	
Cierre:	
Materiales:	
Bibliografía:	

2. De acuerdo con las planificaciones realizadas, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la diferencia entre la planificación de la guía y la propuesta de planificación elaborada?

b) ¿Cuál es la planificación más adecuada para alcanzar el aprendizaje esperado del sexto grado? ¿Por qué?

FASE TEÓRICA (35 minutos)

En la fase teórica se entrega a los profesores un documento que forma parte del apartado del marco teórico de una tesis de maestría de Maestre Orozco, D. M., y Ruiz Ospino, Y. (2024); denominado «metodología COPISI». Teniendo en cuenta la lectura, los profesores responden algunas preguntas. La consigna que se entrega es la siguiente:

Teniendo en cuenta la lectura del documento de Maestre Orozco, D. M., & Ruiz Ospino, Y. (2024) (pp. 40-41), responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo describirías el paso de representaciones entre las fases concreta, pictórica y simbólica del método COPISI?
2. ¿En qué momentos didácticos se evidencia la metodología COPISI en la guía docente revisada y en la propuesta de plan de clase elaborada? Justifica tu respuesta.

FASE DE REAJUSTE (15 minutos)

En la fase de reajuste se plantea a los profesores la siguiente actividad:

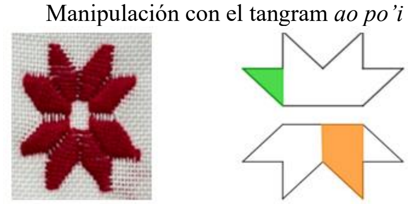
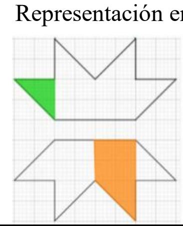
Considerando la propuesta de plan de clase realizada y la teoría analizada, examina si las planificaciones son coherentes con el método COPISI y proponga una actividad para ajustarlas si lo considera oportuno, de lo contrario argumenta la ratificación de la propuesta elaborada.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN (15 minutos)

Durante la fase de institucionalización, se analizan las planificaciones en plenaria, luego el formador puntualiza los siguientes aspectos:

1. Lo fundamental de las planificaciones deben enfocarse a la capacidad que se pretende lograr, en este caso, esencialmente se debe explicitar las actividades que favorezcan el pensamiento matemático en los estudiantes, vinculados a las relaciones entre perímetro y área, a través de los distintos tipos de representaciones (concreto, pictórico y simbólico).
2. Las planificaciones deben contemplar trabajos en equipos, preguntas abiertas y estrategias para que los estudiantes comuniquen y justifique sus respuestas para luego ratificar o modificarlas teniendo en cuenta la capacidad que se propone lograr en la planificación.

Adicionalmente, en esta etapa, el formador aclara que, según Vidal (2024) no siempre es posible emplear los tres modos de representación simultáneamente del método COPISI en la enseñanza de las matemáticas, porque existen algunos conceptos matemáticos, como las estructuras algebraicas, que no pueden partir de la manipulación de un material físico concreto; además lo concreto puede entenderse como algo que ya se conoce desde la concepción del aprendizaje significativo. Posteriormente, el formador de profesores presenta una tabla que describe los tipos de representaciones del método COPISI para la enseñanza, ejemplificados con el tangram *ao po'i*, así:

Método COPISI		
Fases	**Descripción**	**Ejemplos**
Concreto (CO)	• Parte de la experiencia e interacciones específicas con elementos determinados. • Manipulación de materiales concretos.	Manipulación con el tangram *ao po'i* 
Pictórico (PI)	• Permite que, tras una experiencia concreta el estudiante pueda conectar un enunciado o situación con su equivalencia visual. • Puede abarcar una variedad de formas como tablas, gráficos, diagramas, dibujos entre otras.	Representación en hoja cuadriculada 

	• Facilita la comprensión y expansión de una idea o concepto, proporcionando un recurso grafico que refuerza su significado.	
Simbólico (SI)	• Los conceptos abstractos son representados mediante signos. • Finaliza con el pensamiento abstracto.	Representación simbólica Bordado estrella Representación geométrica con el tangram *ao po'i.* | Perímetro  $P = 8 \cdot l + 8 \cdot d$ $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2} \cdot l$ $\rightarrow P = 8 \cdot l + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot l = 8. l(1 + \sqrt{2}) =$ $\mathbf{8(1 + \sqrt{2})l}$ Si $l = 1$, entonces: $P \approx 19{,}31$ unidades de longitud.

Reflexión respecto a los objetivos específicos

Con relación al primer objetivo específico, « Construir un marco de referencia acerca de los aspectos matemáticos y didácticos de las relaciones entre perímetro y área, el tangram y la formación de profesores de matemáticas (tareas profesionales y material didáctico) », podemos concluir que dicho objetivo se logró, tal como se muestra en la Tabla 10, en la que se detallan los principales autores que dieron el sustento teórico al marco de referencia de nuestro trabajo.

Para la redacción del marco de referencia consultamos varios repositorios de investigaciones, entre ellos los de la Universidad de Huelva, la Universidad de los Andes, la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad Nacional de Asunción, la Universidad Nacional de Itapúa y la Universidad Católica «Nuestra Señora de la Asunción», así como los portales bibliográficos: Scielo, Dialnet, MEC Paraguay, Guaraní y Google Académico. Además, revisamos los libros proporcionados por nuestra asesora, Lyda Mora Mendieta, y nuestra coasesora, Elizabeth Torres Puentes.

No obstante, en la categoría del marco matemático y didáctico, consideramos que habría sido deseable disponer más ejemplos de los temas abordados (sistema de medidas, etapas en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes y las relaciones entre perímetro y área) que puedan relacionarse con el tangram *ao po'i*. De igual manera, en la categoría «Formación de profesores de matemáticas», creemos que haber podido considerar información específica sobre la formación de profesores en Paraguay habría enriquecido mucho más el trabajo en términos de situar el contexto. No obstante, no la incluimos porque no encontramos investigaciones que aborden este tema en particular, solo estudios que tratan de manera general la formación de profesores. Esto sugiere una posible carencia en la investigación sobre este aspecto. Así, con el fin de dar a conocer el contexto de la formación de profesores que enseñan matemáticas en la educación básica primaria, incluimos un apartado, titulado «Características del contexto» en el capítulo de Generalidades de este trabajo.

Con relación al segundo objetivo específico, «Crear el material didáctico tangram *ao po'i*, destacando sus características geométricas y métricas, con el fin de utilizarlo como herramienta didáctica para el desarrollo de tareas profesionales en la formación de profesores paraguayos, enfocadas en las relaciones de perímetro y área», podemos concluir que se logró crear el tangram *ao po'i,* destacando sus características geométricas y métricas, tal cual como se muestra en la Figura 36 y en la Tabla 7. Así también se puede evidenciar que se logró utilizar el tangram *ao po'i* como herramienta didáctica en el desarrollo de las tres tareas profesionales diseñadas, como lo muestra la Tabla 14.

Sin embargo, consideramos que la comparación de la magnitud de longitud con las piezas del tangram *ao po'i* presenta una limitación, ya que el triángulo rectángulo isósceles, el paralelogramo y el trapecio rectángulo tienen uno o dos lados que corresponden a la hipotenusa de este triángulo, cuya medida de longitud es un número irracional. Esto genera una dificultad al medir la longitud de los lados de las representaciones geométricas de los bordados del *ao po'i* y dificulta establecer comparaciones entre ellas.

Además, creemos importante profundizar en la búsqueda de las representaciones de las nueve posibles relaciones entre perímetro y área propuestas por D'Amore y Fandiño (2007), utilizando diversas combinaciones de las piezas del tangram *ao po'i.* En este trabajo presentamos dos representaciones de cada relación, como se muestra en la Tabla 5. Estas representaciones fueron seleccionadas con base en las construcciones solicitadas a los profesores en la Tarea 1, pero creemos que sería interesante explorar más combinaciones. Por ejemplo: una pieza con una pieza, dos piezas con dos piezas, tres piezas con tres piezas, y así sucesivamente, hasta encontrar todas las combinaciones posibles de las relaciones entre perímetro y área propuestas por D'Amore y Fandiño (2007). También consideramos relevante explorar más representaciones geométricas de los bordados del *ao po'i* para identificar las nueve posibles relaciones entre perímetro y área.

Finalmente, con relación al tercer objetivo específico: «Elaborar tres tareas profesionales dirigidas a profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica 1. ° y 2. ° ciclo, asociadas a las relaciones entre perímetro y área, el aprendizaje de las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes y la utilización del método COPISI para la enseñanza, utilizando el tangram *ao po'i*», podemos concluir que se logró, porque diseñamos las siguientes tareas profesionales:

- El tangram *ao po'i* y las relaciones entre perímetro y área
- El tangram *ao po'i* y las etapas de enseñanza – aprendizaje de las magnitudes
- El tangram *ao po'i* y el método COPISI para la enseñanza

Para cumplir con este objetivo específico, las tareas se fundamentaron en los componentes del dominio del conocimiento matemático, del conocimiento didáctico del contenido y en las creencias de los profesores (se tuvieron en cuenta en la fase individual de cada tarea), atendiendo al modelo del conocimiento especializado del profesor MTSK. Todos estos elementos conceptuales se engloban en las tareas profesionales con el propósito de desarrollar la competencia «mirar profesionalmente», que implica articular la teoría con la práctica. La teoría está representada por los documentos que abordan la relación entre perímetro y área, las etapas en la enseñanza de las magnitudes y el método COPISI. La práctica, por su parte, se centra en el hacer del profesor, como analizar e interpretar las producciones de los alumnos (propuesta en la Tarea 2) y planificar una clase (propuesta en la Tarea 3).

En particular, la segunda tarea se centra en el análisis de las producciones de los alumnos del sexto grado para identificar las diferentes formas en que resuelven un problema. El profesor debe ser capaz de reconocer en qué nivel de aprendizaje se encuentra cada alumno y tomar decisiones sobre las acciones necesarias para que aquellos que aún no han alcanzado el nivel esperado, puedan progresar.

Por otro lado, la tercera tarea parte del análisis de un caso, en la cual los profesores deben planificar una clase utilizando el método COPISI y el tangram *ao po'i*. En esta planificación, el profesor debe proponer actividades para que el estudiante avance en la construcción de significados a través de los tipos de representaciones (concreto, pictórico y simbólico), lo que le permitirá alcanzar un mayor nivel de abstracción.

Conclusiones

En este apartado presentamos las conclusiones de nuestro trabajo de grado, organizadas en tres aspectos: una reflexión respecto al objetivo general, reflexiones individuales acerca de la experiencia de formación y el objeto de estudio, y las perspectivas futuras del trabajo.

Reflexión respecto al objetivo general

Con relación al objetivo general, «diseñar tareas profesionales que promuevan la construcción del conocimiento matemático y didáctico de las relaciones entre perímetro y área en profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica, 1. ° y 2. ° ciclo, utilizando el tangram *ao po'i* como material didáctico, para favorecer la competencia mirar profesionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas», concluimos que dicho objetivo se logró al contar con tres tareas profesionales en este momento.

La primera tarea favorece que los profesores reconozcan las relaciones entre perímetro y área, mientras vivencian de manera implícita el método COPISI con el uso del tangram *ao po'i*, promoviendo así el conocimiento matemático en los profesores paraguayos en ejercicio de la Educación Escolar Básica, del primer y segundo ciclo.

La segunda tarea promueve el conocimiento didáctico de los contenidos matemáticos, en particular el subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, como las etapas de la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes. En esta tarea se favorece en los profesores la competencia «mirar profesionalmente» el aprendizaje de los estudiantes, ya que, a partir del análisis de las diferentes formas (ficticias) en que los estudiantes resolverían un problema sobre la relación entre perímetro y área usando el tangram *ao po'i*, los profesores deben identificar en cuál etapa de aprendizaje de las magnitudes se encuentran los estudiantes y cuáles acciones proponer para ayudarlos a alcanzar la etapa correspondiente según del currículum de sexto grado.

La tercera tarea, al igual que la anterior, favorece el conocimiento didáctico de los contenidos, específicamente el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, así como la competencia «mirar profesionalmente» la enseñanza. Esto se pretende lograr al proponer que los profesores analicen una guía docente del Ministerio de Educación y Ciencias de Paraguay (Ministerio de Educación y Ciencias, (2022). *Matemática. Guía docente del 6° grado de la EEB*.) y planifiquen actividades adaptando las propuestas de dicha guía, utilizando el método COPISI y el tangram *ao po'i* para la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones entre perímetro y área.

En conclusión, las tareas profesionales diseñadas cumplen con el objetivo de promover el conocimiento matemático y didáctico en los profesores paraguayos, ya que, a través del uso del tangram *ao po'i*, inspirado en la cultura paraguaya, y el método COPISI, se favorece la construcción de significados asociados a la relación entre perímetro y área, integrando la teoría con la práctica. Además, con el tangram *ao po'i*, es posible representar geométricamente ocho tipos de bordados del *ao po'i* (estrella, margarita *poty*, *ysyry*, *meró ra' ỹi*, *tipo'y jegua*, *kamba resa*, jazmín *poty* y montañita), lo que busca resaltar la identidad cultural paraguaya y entender su relación con las matemáticas.

Reflexiones individuales sobre la experiencia de formación y el objeto de estudio

A continuación, compartimos nuestras reflexiones individuales sobre nuestra experiencia de formación en la Maestría en Docencia de la Matemática, teniendo en cuenta la categoría de reflexión presentada en la Tabla 14.

Reflexiones personales sobre mi desarrollo profesional y la formación docente en Paraguay

María Carolina Giménez Quiñónez

Antes de iniciar este posgrado, ya consideraba la formación de profesores como uno de los elementos clave para lograr una educación de calidad en Paraguay. Desde mi perspectiva, esta formación comienza en las instituciones formadoras de docentes y se fortalece con las experiencias en el aula y los programas de formación docente continua. Tanto la formación inicial como la de servicio deben favorecer el conocimiento de los temas matemáticos y su didáctica. En cuanto al conocimiento didáctico, al principio lo concebía de manera general, considerando aspectos como los momentos didácticos de una clase y el proceso de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos.

A lo largo de este proceso de formación en la Maestría de la Docencia de la Matemática, ratifiqué la relevancia de la formación del profesor para impulsar la calidad educativa en Paraguay. Así mismo, profundicé en aspectos que considero esenciales para mi trabajo, como el modelo del conocimiento del profesor de matemáticas, las tareas profesionales y el uso de materiales didácticos en la formación de profesores. Estos elementos han ampliado mi visión sobre la enseñanza de las matemáticas, más allá de los aspectos generales que manejaba al principio. Esta nueva visión me ha permitido construir un marco de referencia coherente a las inquietudes pedagógicas y los objetivos propuestos para este trabajo de grado.

Uno de los aspectos que más me impactó fue el descubrimiento de la riqueza y complejidad de las investigaciones en Educación Matemática. A través de la revisión de varios artículos investigativos, comprendí que la formación de profesores en esta área es mucho más amplia de lo que inicialmente creía. Un aspecto particularmente enriquecedor fue el estudio del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), el cual me permitió comprender los tipos de conocimientos que un profesor necesita para enseñar matemáticas de manera más específica o especializada. A partir de este modelo, comprendí que, para la enseñanza y el aprendizaje de la relación entre perímetro y área, es necesario considerar algunos aspectos iniciales, como los conceptos fundamentales de la medida (magnitud, cantidad de magnitud y medida), el aprendizaje de perímetro y área, así como las etapas involucradas para la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes.

Una de las principales ventajas en la realización de este trabajo de grado ha sido mi experiencia como formadora de formadores. Esto me permitió conocer de cerca los desafíos y oportunidades del sistema educativo en Paraguay, así como las características profesionales y personales de los profesores paraguayos. Gracias a este conocimiento, pudimos diseñar tres tareas profesionales adaptadas a nuestra realidad educativa. Además, mi compromiso con la educación, fortalecido por los programas de formación docente continua en los que he participado, ha sido valioso, ya que me proporcionaron los conocimientos necesarios para fortalecer mi competencia profesional.

En el ámbito personal, considero que una ventaja importante fue haber recibido la beca otorgada por el gobierno de Paraguay, a través del programa BECAL (Becas Carlos Antonio López). Esta beca no solo me brindó la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado en Colombia, sino que también me permitió dedicarme exclusivamente en mi formación académica, lo que facilitó un avance más eficiente y con mayor tranquilidad.

Por otro lado, también experimenté algunas desventajas, como la dificultad para realizar actividades vinculadas a la investigación académica, tales como efectuar revisiones sistemáticas, la competencia limitada en lectura crítica y escritura, el uso de recursos tecnológicos, como bases de datos y los gestores bibliográficos, y la escasa profundización en algunos conceptos matemáticos relacionados al objeto matemático (relación entre perímetro y área).

Afortunadamente, pude superar estos obstáculos gracias a las orientaciones y retroalimentaciones de mis asesoras.

Además, estudiar en un país extranjero, lejos de mis familiares y amigos, representó un reto significativo. No obstante, esta experiencia me ha permitido crecer tanto en lo personal como en lo profesional, y llevo conmigo el gran compromiso de aplicar lo aprendido en mi hacer como formador de formadores.

Reflexionando sobre el potencial de las tareas profesionales para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la experiencia de cursar una maestría en el extranjero

Ismael Galeano Araujo

Al iniciar la Maestría en Docencia de la Matemática, en el año 2023, se nos comunicó que el núcleo problemático de nuestra cohorte corresponde a «Diseño de tareas o material didáctico para desarrollar el pensamiento matemático». Hasta los primeros tres meses de comenzar mi maestría aún no tenía claro en qué consistían y cómo se diseñaban las tareas profesionales, tenía otras concepciones, pero a través de los seminarios, de las lecturas y los aprendizajes en las asesorías del trabajo de grado pude comprender el potencial que tienen las tareas profesionales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en este caso, vinculado a las relaciones entre perímetro y área. Considero importante destacar el papel central que tienen las tareas en el desarrollo de un conocimiento matemático especializado para la enseñanza.

En ese sentido, pude notar que las tareas profesionales promueven dos aspectos fundamentales en los profesores, por un lado, sirven como herramientas para abordar y entender significados de los contenidos, y por otro lado se convierten en un medio para que los profesores en formación (inicial o en ejercicio) se apropien de una comprensión más profunda y estructurada de las matemáticas conectando con su didáctica. Por tanto, comprendí que las tareas profesionales para la enseñanza de las matemáticas son un componente esencial en la formación de profesores, porque propician la articulación de la teoría y la práctica. Los profesores pueden aprender haciendo y reflexionando sobre su propia práctica; esta integración entre teoría y práctica impulsa un proceso formativo más completo, que responde tanto a los desafíos de la educación actual como a las necesidades de desarrollo profesional de los profesores.

Por otro lado, puedo testimoniar que la experiencia vivida cursando una maestría fuera de mi país (Paraguay), desde el primer momento me resultó muy desafiante, tanto en lo personal como en lo profesional. En lo personal, porque hice el esfuerzo de dejar toda mi familia, mi cultura y mi comodidad para dedicarme a estudiar; y en lo profesional, porque son otras perspectivas investigativas, otro nivel de exigencia y otra cultura institucional. No obstante, siempre tengo la idea de profundizar y actualizar todo lo referente a las matemáticas, y esos retos asumidos me sirvieron para ampliar mis conocimientos matemáticos (vinculados a nuestro marco de referencia). Específicamente, no sabía que existen nueve posibles relaciones entre perímetro y área; además comprendí que la magnitud (matemáticamente) es una estructura algebraica específica. Asu vez, amplié mis conocimientos didácticos, referentes al proceso de medir y sobre las etapas de enseñanza-aprendizaje de las magnitudes.

Reflexión sobre el material didáctico tangram ao po'i y las relaciones entre perímetro y área

Víctor Raúl Ferreira Pérez

Como estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática, la experiencia de trabajar con materiales didácticos ha sido un proceso transformador. Al inicio reconocía la importancia del material concreto en la enseñanza de las matemáticas, pero lo veía como un complemento para apoyar la comprensión de los estudiantes, ahora mi postura ha evolucionado significativamente, entiendo que el material didáctico no solo es un recurso, sino que también cumple un papel esencial en el desarrollo del pensamiento matemático y en la formación de profesores. A través de este trabajo de grado, he comprendido que el tangram *ao po'i*, no solo facilita el aprendizaje de conceptos abstractos, sino que también promueve una reflexión más profunda sobre el acto de enseñar y sobre las relaciones entre lo concreto y lo simbólico en la matemática. En la formación continua de profesores, el uso de material didáctico como el tangram *ao po'i* se convierte en una herramienta poderosa para explorar y construir de manera tangible conceptos geométricos fundamentales, como las relaciones entre perímetro y área.

Durante el diseño del material tangram *ao po'i*, logré comprender algunos conceptos matemáticos, como magnitud y cantidad de magnitud, que anteriormente no consideraba esenciales para el aprendizaje del proceso de medir. En particular, esta experiencia me permitió distinguir con mayor claridad entre los conceptos de perímetro y área.

Gracias a las diferentes tutorías durante el proceso del trabajo de grado, que me ayudó a poder reflexionar y buscar vincular la matemática con la identidad paraguaya, la inclusión de la cultura en el diseño del tangram *ao po'i*, sin duda, fue unos de los aspectos más reveladores. En lugar de utilizar un tangram clásico, decidimos incorporar elementos culturales propios, como el *ao po'i*, aprovechando la riqueza que tiene la cultura local para conectar a los estudiantes con las matemáticas de una manera más sencilla. Al integrar algo que les es familiar, generamos un ambiente de aprendizaje que no solo busca desarrollar competencias matemáticas, sino que también refuerza su identidad cultural y su sentido de pertenencia. El tangram clásico habría funcionado, sin duda, pero al hacer esta adaptación, pudimos acercar las matemáticas a la realidad cotidiana de los estudiantes paraguayos, haciéndolas más accesibles y notables.

Como paraguayo, esta experiencia me ha permitido ver nuestro propio patrimonio cultural como una fuente de riqueza pedagógica, algo que quizás no habría valorado de la misma manera antes de iniciar este proceso.

Perspectivas

La implementación de las tareas diseñadas en este trabajo de grado se realizará en el contexto de los profesores que enseñan en las escuelas de aplicación de los Institutos de Formación Docente de los departamentos de Misiones, Amambay y Boquerón, en Paraguay. Consideramos que llevar a la práctica las tareas diseñadas permitirá evaluar la eficacia de estas en contextos reales de la formación continua de profesores. Esperamos que las informaciones recogidas en esta etapa nos proporcionen retroalimentación valiosa para ajustar y optimizar las tareas según las necesidades identificadas en la implementación. A su vez, ideamos modificar las tareas para vincularlas con mayor intencionalidad en la resolución de situaciones problemáticas, ya que las competencias de los ciclos o cursos en el currículo paraguayo se centran en resolución de problemas.

Por otro lado, proyectamos la escritura de un artículo, dicho artículo se centraría en el análisis de las informaciones obtenidas durante la implementación de las tareas diseñadas, permitiendo evaluar de manera rigurosa el desarrollo del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido (vinculados a las relaciones entre perímetro y área) de los profesores paraguayos.

Adicionalmente, después de la implementación de las tareas, creemos oportuno realizar entrevistas o cuestionarios a los profesores con los cuales fueron implementadas las tareas. Dichos procedimientos se enfocarían en recoger percepciones, experiencias y reflexiones personales de los profesores sobre la efectividad, aplicabilidad y desafíos que encontraron en las tareas. Las entrevistas o cuestionarios a los profesores nos permitirían profundizar en la comprensión del impacto que las tareas profesionales han tenido en sus prácticas pedagógicas, dando voz a los actores clave del proceso, los profesores. Asimismo, los resultados derivados de las voces de los profesores podrán contribuir al diseño de futuras estrategias de formación y retroalimentación, tanto a nivel institucional como en redes de colaboración de profesores.

Además, prevemos la creación de una red colaborativa de formadores de profesores de matemáticas, con el propósito de compartir experiencias, promover el desarrollo profesional continuo, generar posibles investigaciones conjuntas y fomentar transformaciones pedagógicas. Esta red se constituiría como un espacio de intercambio para que los profesores puedan reflexionar sobre sus prácticas, explorar nuevas metodologías, las tareas profesionales y materiales didácticos; contribuyendo al fortalecimiento de la enseñanza de las matemáticas en Paraguay. Para el funcionamiento de la red de formadores, se realizará un consejo de profesores para establecer reuniones virtuales o presenciales, también para gestionar la realización de seminarios, conferencias o talleres con invitados referentes en Educación Matemática.

Posteriormente, proyectamos el uso del tangram *ao po'i* como material didáctico para favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en la formación de futuros profesores. Creemos que este material didáctico, con sus características geométricas y métricas; puede promover la apropiación de conceptos geométricos (como perímetro, área, semejanza de triángulos, proporcionalidad geométrica, entre otros) y permitir la conexión de las matemáticas con la identidad cultural paraguaya.

Finalmente, contemplamos la posibilidad de patentar el tangram *ao po'i,* creado por los autores de este trabajo de grado, con el fin de comercializarlo. Esto permitiría su uso masivo, no solo en instituciones educativas, sino también en espacios extracurriculares, contribuyendo a su divulgación y acceso como un material didáctico innovador y culturalmente significativo.

Referencias

Aké, L. P., y López-Mojica, J. M. (2020). Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas. *Páginas De Educación*, *13*(1), 58-81. https://doi.org/10.22235/pe.v13i1.1919.

Alsina, Á. (2001). Matemáticas y juego. *Revista Uno*, *26*(3).

Alsina, Á., y Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. NARCEA, S. A. de Ediciones.

Alfonso, H. (1997). *Geometría plana y del espacio*. *Desde un punto de vista euclidiano.* Universidad Pedagógica Nacional.

Andrada, M., y Bernabeu, M. (2022). Método COPISI para la construcción del proceso de adición a través de Next 1.0. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (96), 45-50. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/123849/1/Andrada_Bernabeu_2022_Uno.pdf

Arteaga, B., y Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*. Editorial UNIR.

Barriga, F. (2021). *COPISI: Enseñar a través de representaciones concretas, pictóricas y simbólicas*. Umáximo. https://www.umaximo.com/post/copisi-ensenar-a-traves-de-representaciones-concretas-pictoricas-y-simbolicas

Belmonte, J.M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En Chamorro, C. (Coord.). *Didáctica de las matemáticas* (pp. 315-345). Pearson Educación.

Caggiani, I., Pastrana, N. y Alliaume, J. (2015). *Magnitud y medida. El lugar de las ideas previas de los niños en la estimación; la experimentación y las prácticas de medidas.* https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Magnitud+y+medida.+El+lugar+de+las+ideas+previas+de+los+ni%C3%B1os+en+la+estimaci%C3%B3n%3B+la+experimentaci%C3%B3n+y+las+pr%C3%A1cticas+de+medidas&btnG=

Camargo Abello, M., Calvo M., G., Franco Arbeláez, M. C., Vergara Arboleda, M., Londoño, S., Zapata Jaramillo, F., y Garavito Prieto, C. (2004). Las necesidades de formación permanente del docente. *Educación y Educadores, (7)*, 79-112.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y para el análisis*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Carta Orgánica del Ministerio de Educación y Ciencias, 5749. (2017, 24 de enero). Congreso de la Nación Paraguaya. https://www.bacn.gov.py/archivos/5260/20170511100602.pdf

Castillo, J., y Manso, J. (2020). Aproximación a los principales desafíos de la Formación Docente Inicial en Paraguay. *Revista Paraguaya de Educación, 9* (1), 83-100. https://www.researchgate.net/profile/Jose-Castillo-Vega-3/publication/368751943_Aproximacion_a_los_principales_desafios_de_la_Formacion_Docente_Inicial_en_Paraguay/links/63f7eb590cf1030a56463661/Aproximacion-a-los-principales-desafios-de-la-Formacion-Docente-Inicial-en-Paraguay.pdf

Cayo, H., y Contreras, L. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación Matemática, 32* (2), 39-68. https://doi.org/10.24844/em3202.02

Cortínez, C., y Castro, F. (2008). Un tangram dorado. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4*(13). Recuperado a partir de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1210

Chamorro, M. del C., y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis.

Chamorro, C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En Chamorro, C. (Coord.). *Didáctica de las matemáticas* (pp. 221-243). Pearson Educación.

Curi, E. (2004). Formación de profesores que enseñan matemáticas: investigación colaborativa, producción y socialización de saberes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*. 384-390. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1216837/CuriFormacionAlme2004.pdf

D'Amore, B., y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime, 10*(1),39-68. https://www.redalyc.org/pdf/335/33500103.pdf

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor S.A.

Escudero-Avila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. PNA. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 10*(1), 53-77. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6095

Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: Práctica e investigación. *Realidad y Reflexión*,53 (53), 40-60. https://camjol.info/index.php/RyR/article/view/10887

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., y Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 204-221. https://www.scielo.br/j/bolema/a/6SyKkvkDmvg8TgSfDpBRQQk/?lang=es

Fuentes Caucalí, J. T. (2020). *El Tangram, un objeto dinámico para la enseñanza de la geometría en grado 5* [Tesis de Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79138

García, G., y Carrillo, J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones [Simposio]. *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huesca, España. https://www.researchgate.net/publication/28240104

Godino, J. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. *Actas do ProfMat*, *98*, 117-124.

Gómez, P., Mora, M.F. y Velasco, C. (2018). Análisis de Instrucción. En Gómez, P. (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Ediciones Uniandes.

Instituto Paraguayo de Artesanía. (2011a). Conociendo el ao po'i. *Portal Guaraní, 2* (2), 2-7. https://www.portalguarani.com/detalles_museos_exposiciones.php?id=88&id_exposicion=252

Instituto Paraguayo de Artesanía. (2011b). Conociendo el ao po'i. Portal Guaraní, 7 (7), 1-11. https://www.portalguarani.com/detalles_museos_exposiciones.php?GuSeuYdoiR98302wKjlF=ODg=&Hufy762Mjsr889Nbdt=MjU3

Ley General de Educación, 1264. (1998, 26 de mayo). Congreso de la Nación Paraguaya. https://www.bacn.gov.py/archivos/3766/ley+1264+1998.pdf

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional [conferencia invitada]. *XII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas-JAEM*, Granada, España. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/853/1/llinares-jaem-granada07.pdf

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros: Caracterizando perspectivas. *Revista Números, 78*, 5-16. https://rua.ua.es/dspace/handle/10045/20321

Llinares, S. (2013). Conocimiento de matemáticas y tareas en formación de maestros [conferencia]. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe-I CEMACYC*, Santo Domingo, República Dominicana. https://ciaem-iacme.org/memorias-icemacyc/Conferencia_plenaria,_Llinares.pdf

Luque, C., Mora, L. y Páez, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*. Universidad Pedagógica Nacional.

Maestre Orozco, D. M., y Ruiz Ospino, Y. (2024). *Metodología COPISI para el fortalecimiento del aprendizaje de operaciones básicas con fracciones en octavo grado de la Institución Educativa El Carmelo del municipio de San Juan del Cesar, Guajira.* [Tesis de Maestría en Pedagogía. Universidad Mariana]. Repositorio Institucional. https://repositorio.umariana.edu.co/handle/20.500.14112/28493

Marmolejo, G., y González, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 10(1)*, 45-57.

Ministerio de Educación y Cultura. (2008a). *Programa de estudio del tercer grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Cultura. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/19086?1671726940

Ministerio de Educación y Cultura. (2008b). *Programa de estudio del cuarto grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Cultura. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/9600

Ministerio de Educación y Cultura. (2008c). *Programa de estudio del sexto grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Cultura. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/19143?1671730419

Ministerio de Educación y Cultura. (2008d). *Programa de estudio del primer grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Cultura.

Ministerio de Educación y Cultura. (2008e). *Programa de estudio del segundo grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Cultura.

Ministerio de Educación y Cultura. (2008f). *Programa de estudio del quinto grado de Educación Escolar Básica*. Ministerio de Educación y Cultura.

Ministerio de Educación y Cultura. (2013). *Diseño Curricular. Profesorado de Educación Escolar Básica Primero y Segundo Ciclos*. Ministerio de Educación y Cultura. https://mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/10963

Ministerio de Educación y Ciencias. (2020). *Diseño Curricular. Profesorado de Educación Escolar Básica para el 1. ° y 2. ° ciclo*. Ministerio de Educación y Ciencias. https://renuevo.edu.py/pdf/Prog/Profesorado_EEB_1_2_Ciclo.pdf

Ministerio de Educación y Ciencias. (2022). *Matemática. Guía docente del 6° grado de la EEB.* Ministerio de Educación y Ciencias. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/19481?1677171940

Ministerio de Educación y Ciencias. (2023). *Ejecución del plan de divulgación para el uso de resultados de las evaluaciones educativas implementadas por el INEE. Informe Nacional de Paraguay*. Ministerio de Educación y Ciencias. https://www.mec.gov.py/cms/?ref=301664-memoria-anual-de-implementacion-del-plan-del-divulgacion-de-las-evaluaciones-educativas-del-inee

Moreno, C. M., y González, N. R. (2019). Evaluación de una unidad didáctica sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de perímetro y área. *Estudios Pedagógicos (Valdivia), 45*(1), 23-39. https://doi.org/10.4067/s0718-07052019000100023

Nührenbörger, M. y Steinbring, H. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings: examples from students', teachers' and teacher–students' communication about mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(2), 111-132. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9100-9

Olmedo, S. M., Achinelli, M. F., y Ayala, D. E. (2016). Asociatividad en las mujeres tejedoras paraguayas en el distrito de Yataity, Guairá, Paraguay. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, *12*(1), 43-60. http://scielo.iics.una.py/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2226-40002016000100005

Olmo, M.A., Moreno, M.F., y Gil, F. (1989) *Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura [OEI]. (2020). *Educación y Formación Profesional. Programas. Impulsando la Educación*. https://oei.int/oficinas/paraguay/impulsando-la-educacion/componentes

Pascual, M. I., Climent, N., Codes, M., Martín, J. P., y Contreras, L. C. (2023). Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Interuniversitaria De Formación Del Profesorado. Continuación De La Antigua Revista De Escuelas Normales, 98*(37.2). https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99221

Piñeiro, G. (2021). Construcción de polígonos regulares en teselados regulares. *Revista De Educación Matemática, 15*(3). https://doi.org/10.33044/revem.10920

Pizarro, N., Gorgorió, N., y Albarracín, Ll. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Revista Números, 91*, 91-103. https://www.researchgate.net/profile/LluisAlbarracin/publication/296704840_Caracteriza cion_de_las_tareas_de_estimacion_y_medicion_de_magnitudes/links/56d9b69a08aee1aa5f8290ef/Caracterizacion-de-las-tareas-de-estimacion-y-medicion-de-magnitudes.pdf

Programa de Apoyo a la Transformación del Sistema Educativo en Paraguay, 21 de agosto, 2020, https://odd.senado.gov.py/archivos/file/Poder%20Ejecutivo%20Nro%20431.pdf

Rendón, C. G., Mora, L. C. y Morales, N. (2023). Tareas con sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas. Algunos asuntos conceptuales. En P. Caraballo Gracia (Ed.) *Memorias del IV Encuentro Internacional de Investigación e Innovación en Educación Matemática*. (pp. 60-61). Sincelejo: Editorial Unisucre.

Rocha, A. (2021). *Resolver problemas utilizando tecnología y actividades lúdicas para fortalecer el aprendizaje de áreas y perímetros en primer grado de primaria*. [Tesis de licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas, Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí]. Repositorio benece. https://repositorio.beceneslp.edu.mx/jspui/bitstream/20.500.12584/723/1/Arely%20Sarahi%20Rocha%20Garc%C3%ADa.pdf

Serrano, E., (2000). Etimología de algunos términos matemáticos. *Suma, 35*, 87-96. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/etimologia-de-algunos-terminos-matematicos/

Silva, F. (2023). Protección Internacional del Ñanduti y el Ao' poi. Joyas de la Moda. *Cuadernos del Centro de Estudios en Diseño y Comunicación, 26* (181), 59-67. https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&profile=ehost&scope=site&authtype=crawler&jrnl=16680227&AN=163242236&h=DChkD42Qm1ei8jrKGmTBcUFYdQELRig1D7FOhhmj6AMVi7wz0VzNoFUaunHeF7jdveqGVEmUZFWeB87KrTY0DA%3D%3D&crl=c

Speratti, H., Benítez, M., y Romero, S. (2023). Análisis de las necesidades y potencialidades de formación de los Institutos de Formación Docente de gestión oficial de Paraguay, desde los actores, en el año 2021. *Aula Pyahu, Revista de Formación Docente y Enseñanza*. *1(1)*,20-54. https://doi.org/10.47133/rdap2023-11art2

Torres, E., y Casallas, A. (2021). Materiales, recursos y juego: una distinción y relación necesaria en el aula de matemáticas. *Infancias Imágenes, 20*(2), 206-215. https://doi.org/10.14483/16579089.17590

Vidal, R. (2024). Trazando el camino: Integración de la Historia de la Matemática en la formación docente para un cambio de paradigma. *REMATEC*, 19(49), e2024006. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id661

Wahyudi, A. I. H. A., y Aulina, C. N. (2021). Pengaruh media tangram terhadap kemampuan mengenal bentuk geometri anak usia dini. PAUD Lectura: *Jurnal Pendidikan Anak Usia Dini, 4*(02), 8-16. https://journal.unilak.ac.id/index.php/paud-lectura/article/view/6216

Yeap Ban Har. (s.f.). *Aprender matemáticas y divertirse es posible con el Método Singapur*. *Educación 3.0*. https://www.educaciontrespuntocero.com/entrevistas/yeap-ban-har-matematicas-metodo-singapur/

Anexo

INSTITUTO DE FORMACIÓN DOCENTE SANTA ROSA-MISIONES FORMACIÓN DOCENTE CONTINUA

27 Respuestas | 02:07 Tiempo medio para finalizar | Cerrado Estado

1. Cédula de Identidad N°:

27
Respuestas

Respuestas más recientes

"5466816"

"4.504.058 "

"2837255"

2. Institución en donde se desempeña:

27
Respuestas

Respuestas más recientes

"Escuela Básica N° 70 Prof. Luciano Bordón"

"Escuela Prof Luciano Bordón N° 70"

"Esc. Bas. N° 70 Profesor Luciano Bordon"

3. Zona de ubicación de la Escuela

Rural	2
Urbana	25

4. Ciclo/s que enseña:

Primer Ciclo	12
Segundo Ciclo	9
Primer y Segundo Ciclo	6

6/4/24, 13:02 INSTITUTO DE FORMACIÓN DOCENTE SANTA ROSA-MISIONES FORMACIÓN DOCENTE CONTINUA

5. Años de experiencia (enseñando 1° y 2° ciclo de la Educación Escolar Básica)

Entre 1 a 5 años	7
Entre 6 a 10 años	4
Entre 11 a 15 años	3
Entre 16 a 20 años	6
Más de 20 años	7

6. Título máximo alcanzado

- Profesorado en Educación Escol... 9
- Licenciatura (en algunas ramas ... 13
- Especialización (en algunas ram... 5
- Maestría en Educación 0

7. ¿Tiene título de grado (Licenciatura) en Matemática?

- Sí 7
- No 20

INSTITUTO DE FORMACIÓN DOCENTE MARISCAL JOSÉ FELIX ESTIGARRIBIA

9 Respuestas 03:49 Tiempo medio para finalizar Activo Estado

Sincronice los resultados para Excel para la Web automáticamente y analice con más detalle y flexibilidad. Abrir resultados en Excel Vista previa

Resumen de resultados Ver resultados ...

1. Edad

Más detalles

9 Respuestas

Respuestas más recientes

"43"

"31"

"54"

2. Género

Más detalles

- Femenino 9
- Masculino 0

3. Nivel educativo más alto alcanzado

Más detalles

4. Años de antigüedad en la docencia

Más detalles

5. ¿Participas regularmente en capacitaciones de Formación Docente en Servicio?

Más detalles

6. ¿Cuál considera que es la necesidad que enfrenta como profesor al enseñar Matemáticas?

Más detalles

7. ¿Qué tipo de apoyo le gustaría recibir para fortalecer su práctica profesional?

Más detalles

9
Respuestas

Respuestas más recientes

"Que en las Instituciones educativas estén Evaluadores capacitados para orie...

"Conocer a los alumnos, recurso visual y la participación activa de los alumn...

"Materiales didacticos"

8. ¿Cómo integras las tradiciones y costumbres culturales en su enseñanza en el área de Matemáticas?

Más detalles

9
Respuestas

Respuestas más recientes

"Presentando una situación problemática donde se refleje las frutas que se co...

"Escribiendo y cantando en la lengua materna "

"Elaborando los problemas con temas culturales ya sea gastronomia, lugares,...

NIVEL DE FORMACIÓN DOCENTE DEL CENTRO REGIONAL DE EDUCACIÓN "DR. RAÚL PEÑA" - AMAMBAY

6 Respuestas | 06:01 Tiempo medio para finalizar | Activo Estado

Sincronice los resultados para Excel para la Web automáticamente y analice con más detalle y flexibilidad.

Abrir resultados en Excel Vista previa

Resumen de resultados

Ver resultados ···

1. Edad

Más detalles

6
Respuestas

Respuestas más recientes

"41"

"33"

"49"

2. Género

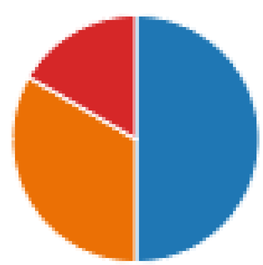
Más detalles

Femenino	5
Masculino	1

3. Nivel educativo más alto alcanzado

Más detalles

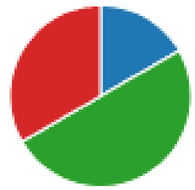
Profesorado - Nivel terciario	3
Carrera de grado	2
Especialización	0
Carrera posgrado	1



4. Años de antigüedad en la docencia

Más detalles

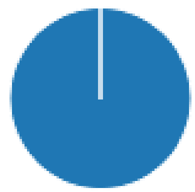
Menos de 5 años	1
De 5 a 10 años	0
De 11 a 20 años	3
De 21 a 25 años	2



5. ¿Participas regularmente en capacitaciones de Formación Docente en Servicio?

Más detalles

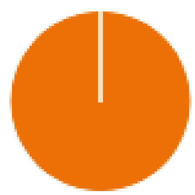
Sí	6
No	0



6. ¿Cuál considera que es la necesidad que enfrenta como profesor al enseñar Matemáticas?

Más detalles

El manejo de los contenidos ma...	0
Selección de materiales didáctic...	6



7. ¿Qué tipo de apoyo le gustaria recibir para fortalecer su práctica profesional?

Más detalles

6

Respuestas

Respuestas más recientes

"Una capacitación continua acorde a mi realidad institucional "

"Capacitaciones con énfasis en lectoescritura "

"Facilitar materiales didácticos y que sean prácticos "

8. ¿Cómo integras las tradiciones y costumbres culturales en su enseñanza en el área de Matemáticas?

Más detalles

6

Respuestas

Respuestas más recientes

"De una manera muy auténtica y eficaz, primeramente socializandonos con l...

"A través de las situaciones problemáticas"

"Utilizando las medidas de capacidades, volumen, longitud "