UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Diseño de un laboratorio virtual para el desarrollo del pensamiento variacional en la educación media

Laura María Monroy Hoyos
Andrés Felipe Carvajal Gómez

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Maestría En Docencia de la Matemática

Bogotá, D. C.
2025

Diseño de un laboratorio virtual para el desarrollo del pensamiento variacional en la educación media

Laura María Monroy Hoyos
Andrés Felipe Carvajal Gómez

ASESOR:
Mg. César Guillermo Rendón Mayorga

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Maestría En Docencia de la Matemática
Bogotá, D. C.
2025

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

Dedicatoria

A mi mamita linda, y

A ti, que me acompañas desde el cielo

Laura Monroy

A mi familia:

Yolis, Carlos, Angie, Anita y Carlitos.

Andrés Carvajal

Agradecimientos

A Dios por absolutamente todo.

A mi mamita por ayudarme a ser la mujer que soy, por su amor tan especial, por su apoyo incondicional y la sabiduría que me ofrece en cada consejo.

A Jonathan quien me ha acompañado en este camino y ha sido mi refugio en las alegrías y tristezas.

A mi compañero Andrés quien, por segunda vez, quiso compartir conmigo este reto lleno de alegrías y aprendizajes.

A nuestro asesor César, quien nos acogió en un momento complejo, nos enfocó, apoyó y empujó a mejorar cada vez.

A la UPN, lugar lleno de personas valiosas que aportaron a mi formación académica y personal.

Laura Monroy

A Dios,
luz eterna que sostuvo mis pasos.

A mi familia,
voces que alientan,
hogar que nunca se apaga.

A Laura,
compañera del arduo caminar, de alegrías y esperanzas.

Al profesor César,
faro cuando el sendero se volvía incierto.

A la UPN,
madre sabia que cobijó mi espíritu
y sembró en mí la pasión por enseñar.

Andrés Carvajal

TABLA DE CONTENIDO

Índice de Tablas

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de Anexos

GLOSARIO

D

Dirección del cambio:
Tendencia que indica si una variable aumenta o disminuye al cambiar otra. · p. 88
Dovela:
En el contexto del Metro de Bogotá, una dovela es un elemento prefabricado de concreto que se utiliza para construir el viaducto elevado. Estas dovelas pueden pesar varias toneladas. · p. 84

E

Estructura del metro:
Conjunto de elementos constructivos que forman parte del túnel del metro. · p. 83

P

Peso:
Fuerza ejercida por un objeto debido a la gravedad. En esta situación, el peso se refiere al peso del tren que la estructura debe soportar sin colapsar. · p. 96
Precio:
Cantidad de dinero que se debe pagar por cada dovela, y que varía según su grosor. · p. 96
Presupuesto:
Cantidad limitada de dinero disponible para la construcción de una sección del túnel del metro. · p. 84

R

Resistencia:
Capacidad que tiene la estructura (formada por dovelas) para soportar el peso del metro sin fallar o colapsar. · p. 100

S

Segundas diferencias:
Diferencia entre los incrementos sucesivos de los valores de salida (por ejemplo, la resistencia) cuando los valores de entrada (como el grosor) cambian de forma constante. · p. 129

V

Vano:
Corresponde a la sección del túnel formada por un conjunto de dovelas. · p. 87

Viga:
Elemento estructural horizontal que soporta cargas y distribuye el peso hacia los apoyos laterales. En el contexto del metro y del simulador, la viga está conformada por varias dovelas · p. 84

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo principal valorar de qué forma un Laboratorio Virtual de Matemáticas promueve el desarrollo del Pensamiento Variacional en estudiantes de grado noveno. Para ello se consideran referentes teóricos relacionados con tres aspectos: primero, el Pensamiento Variacional; segundo, la Abstracción Situada para sustentar el uso de tecnología digital; y tercero, el Laboratorio de Matemáticas. Este último aspecto permitió, mediante una revisión documental, conceptualizar la idea de Laboratorio Virtual de Matemáticas. Con lo anterior en mente y bajo la estrategia de experimento de enseñanza, se llevó a cabo el diseño del Laboratorio Virtual de Matemáticas a través de una página web junto con dos secuencias de tareas, las cuales fueron implementadas y posteriormente analizadas. Los resultados muestran que el LVM contribuye positivamente al desarrollo del Pensamiento Variacional de varios estudiantes de grado noveno.

Palabras Clave:

Laboratorio Virtual de Matemáticas, pensamiento variacional, abstracción situada.

ABSTRACT

The main objective of this research is to assess how a Virtual Mathematics Laboratory promotes the development of Variational Thinking in ninth grade students. For this purpose, theoretical references related to three aspects are considered: first, Variational Thinking; second, Situated Abstraction to support the use of digital technology; and third, the Mathematics Laboratory. This last aspect allowed, through a documentary review, to conceptualize the idea of Virtual Mathematics Laboratory. With the above in mind and under the teaching experiment strategy, the design of the Virtual Mathematics Laboratory was carried out through a web page together with two sequences of tasks, which were implemented and subsequently analyzed. The results show that the LVM contributes positively to the development of Variational Thinking of several ninth grade students.

Keywords:
Virtual Mathematics Laboratory, variational thinking, situated abstraction.

INTRODUCCIÓN

En este documento presentamos la investigación realizada en el marco del trabajo de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. El estudio se orientó al diseño de un Laboratorio Virtual de Matemáticas que contribuya a promover el desarrollo del Pensamiento Variacional (PV) en estudiantes de educación básica secundaria, así como a la implementación y análisis de resultados de una secuencia de tareas en el marco del Laboratorio. Enseguida mostramos cinco capítulos que abordan los aspectos relevantes del trabajo llevado a cabo.

El primer capítulo presenta la descripción de la problemática, centrada en la falta de puesta en práctica de las indicaciones dadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) respecto al desarrollo del PV, pues, en algunas instituciones educativas, se evidencia que el desarrollo de dicho pensamiento es equivalente al estudio del cálculo desde una mirada algebraica y procedimental. Para ello realizamos una revisión de la literatura en términos de las disposiciones curriculares colombianas, algunas investigaciones sobre el desarrollo del PV y del Laboratorio de Matemáticas. Con base en lo anterior, se plantean la pregunta de investigación y los objetivos que direccionan esta investigación.

El segundo capítulo presenta los fundamentos teóricos que respaldan la investigación y se constituye en cuatro aspectos. En primer lugar, se alude a tres referentes relacionados con el PV y a partir de su análisis, se propone una serie de indicadores sobre el desarrollo de dicho pensamiento. En segundo lugar, se mencionan referentes sobre el uso de la tecnología digital, de los cuales destacamos el trabajo de Jaimes y Quiroga (2020), quienes proponen una serie de indicadores sobre la abstracción situada, un marco teórico sobre tecnología que será de interés en este trabajo. En tercer lugar, se abordan concepciones sobre el Laboratorio de Matemáticas y con base en su análisis, se desarrolla una caracterización del mismo con el propósito de realizar, en cuarto lugar, una transferencia de estos elementos a un entorno virtual, lo cual da lugar a la conceptualización de Laboratorio Virtual de Matemáticas.

El tercer capítulo expone las estrategias metodológicas empleadas. Por un lado, se emplea una revisión documental para realizar la conceptualización de Laboratorio Virtual de Matemáticas, mientras que para el diseño e implementación del laboratorio y de la secuencia de tareas se implementó un experimento de enseñanza.

El cuarto capítulo presenta el análisis de los resultados a la luz de los indicadores propuestos para el desarrollo del PV y los indicares adaptados sobre la abstracción situada. Allí se categorizan las respuestas y se describe el impacto que tiene el Laboratorio Virtual de Matemáticas en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes que participaron de la implementación.

Finalmente, el quinto capítulo muestra las conclusiones de la investigación en términos del alcance del objetivo general y los objetivos específicos, las consideraciones emergentes del estudio, algunas dificultades que se presentaron, las proyecciones que puede tener la investigación y el impacto en el ejercicio docente de los investigadores.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo presentamos los aspectos generales de la investigación bajo una revisión de la política curricular colombiana para el área de matemáticas, en especial, sobre el PV. Así mismo, se reportan algunas investigaciones sobre dicho pensamiento y sobre la concepción de Laboratorio de Matemáticas. Posteriormente, se describen la problemática y los objetivos que direccionan la investigación.

1.1. Revisión de la Literatura

1.1.1. Política Curricular Colombiana

El currículo de matemáticas colombiano ha evolucionado significativamente en términos de su propia concepción y finalidad. Algunos autores han plasmado en sus investigaciones dicha evolución, un ejemplo de ello es el estudio realizado por Tapiero (2020), en el cual muestra de manera detalla cuáles han sido los cambios que tuvo el currículo después de la primera mitad del siglo XX. En particular, la propuesta contempla la evolución en dos momentos generales.

El primer momento, se caracterizó por el papel predominante del conocimiento durante el acto educativo, pues se priorizaba la enseñanza de una lista de temáticas jerarquizada según su dificultad. Esto ocasionó que los resultados de los estudiantes fueran deficientes, razón por la cual el MEN, bajo la asesoría del Dr. Carlos Vasco Uribe (MEN, 1998), emprendió la construcción de la Renovación Curricular.

Por su parte, el segundo momento, se distinguió por una concepción del currículo de matemáticas enfocada en el desarrollo de competencias propias de un ciudadano actual. Este, toma como punto de partida la expedición de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LC] en 1998 por el MEN, elaborados teniendo en cuenta los avances realizados durante la construcción de la Renovación Curricular y la normativa en educación establecida en la Constitución Política de 1991. De manera particular, vale la pena profundizar en la concepción de currículo propuesta en los LC ya que plantea una perspectiva diferente, esta vez centrada en el papel del estudiante, del profesor, del conocimiento y del reconocimiento de la importancia del uso de tecnologías en el aula. Los LC proponen entonces organizar y entender el currículo de matemáticas a la luz de tres asuntos: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto, teniendo como eje transversal la implementación de tecnologías digitales.

Los procesos generales refieren a cinco procesos de la actividad matemática, estos son: (*i*) formular y resolver problemas; (*ii*) modelar procesos y fenómenos de la realidad; (*iii*) comunicar; (*iv*) razonar y (*v*) formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Por su parte, los conocimientos básicos aluden al desarrollo del pensamiento matemático que se conforma a través de los pensamientos numérico, espacial, aleatorio, métrico y variacional[1]. Finalmente, el contexto refiere a los ambientes en los que se encuentra inmerso el estudiante y le dan sentido a lo que aprende; el MEN (1998) sugiere diseñar situaciones problema a partir de los aspectos de la vida cotidiana de los estudiantes, de las propias matemáticas o de otras ciencias, ya que estos se convierten en microambientes que favorecen el aprendizaje.

A pesar de que la principal finalidad del cambio curricular se centrara en el mejoramiento de la formación de los futuros ciudadanos, su implementación en las instituciones educativas tuvo complicaciones, ya que la naturaleza del cambio implicó que

[1] Cada uno de estos pensamientos se apoyan de los sistemas numéricos, geométricos, de datos, de medida y algebraicos y analíticos, respectivamente.

los profesores reflexionaran sobre su rol y práctica docente, asunto que no fue sencillo. Lo anterior, sumado a la falta de atención a los demás aspectos que eran de vital importancia para la ejecución de la propuesta[2], suscitaron un distanciamiento entre los planteamientos curriculares y lo que sucede en las aulas. Este suceso es denominado por Agudelo-Valderrama (2007) como la brecha entre las disposiciones educativas colombianas y las realidades del aula de clase.

Así mismo, hemos evidenciado en la literatura que los diferentes pensamientos matemáticos no son abordados de la forma en que sugiere el MEN (1998), sino que aún persisten las prácticas que caracterizaron el primer momento de la evolución del currículo, enfocadas en asuntos memorísticos, aplicación de algoritmos y replicación de procedimientos. Por ejemplo, Agudelo (2007) puso en evidencia las dificultades en la implementación del pensamiento algebraico; así mismo, González y Tovar (2017) exponen dificultades en el desarrollo del pensamiento aleatorio; por su parte, Alba y Velandia (2019) manifestaron que no se desarrolla el pensamiento especial, al igual que Jaimes y Quiroga (2020) lo hicieron con el PV. En el siguiente apartado profundizaremos en algunas investigaciones relacionas con el PV y su desarrollo, no sin antes precisar que, aunque en la siguiente sección se aborden investigaciones sobre el PV, el análisis de estas no se desvincula de la política curricular actual, sino que más bien se apoya de ella para comprender cómo se estructura el PV.

1.1.2. Investigaciones sobre el Pensamiento Variacional

En los referentes de calidad del MEN (1998, 2006) se establece que el pensamiento variacional está relacionado con «el reconocimiento, la percepción, la identificación y la

[2] Infraestructura, formación de profesores y asignación de recursos (Agudelo-Valderrama, 2007).

caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos» (MEN, 2006, p. 66). Por su parte, Vasco (2002) menciona que el PV puede entenderse como «una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de esta o distintas magnitudes» (p. 3).

Su desarrollo debe iniciarse de forma paulatina desde los primeros grados de la educación escolar y se deben tener en cuenta, para la implementación de las clases, recursos como material manipulativo, situaciones problema y tecnologías digitales [TD]. Esta última cumple un rol importante en la ejecución de la propuesta impulsada por los LC, dado que ofrece medios alternativos de expresión matemática, de manipulación de los objetos matemáticos y permite simular contextos que favorezcan el aprendizaje, la visualización y manipulación de diferentes representaciones en simultáneo (MEN, 1998; Vasco, 2002).

Vasco (2002) también señala que el desarrollo de este pensamiento no está relacionado con la memorización de definiciones y fórmulas, ni con la elaboración de gráficas en papel, pues esto dificulta la identificación de la covariación entre las variables implicadas ya que, al ser representaciones estáticas, no favorecen el incremento de las habilidades propias de este pensamiento. Tampoco se trata de la explicación de temas que hacen parte una lista de contenidos organizados de forma jerárquica, ni mucho menos se limita a la enseñanza de conceptos del cálculo, que parecen ser exclusivos de la educación media.

De acuerdo con lo anterior, es posible identificar algunos antecedentes de investigación de autores que han trabajado en torno al desarrollo del pensamiento variacional en la escuela. Por ejemplo, Jaimes y Quiroga (2020) identificaron que, en ocasiones, no se llevan a cabo en su totalidad los planteamientos propuestos por el MEN (1998, 2006) para el desarrollo de este pensamiento en el aula escolar. Por tal motivo, desarrollaron una propuesta enfocada en la posibilidad de solución de esta problemática a partir de la clasificación de recursos de GeoGebra y la formulación de tareas que favorezcan el desarrollo de dicho pensamiento. El estudio se fundamentó en la concepción de razonamiento covariacional propuesta por Carlson et al. (2003) y en el marco de la abstracción situada planteado por Noss y Hoyles (1987). Este trabajo se llevó a cabo en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y participaron cinco estudiantes pertenecientes a los grados noveno y décimo.

Por su parte, Castro y Forero (2019) identificaron la misma problemática que Jaimes y Quiroga (2020). Para contribuir a su solución, dichos autores propusieron rastrear las acciones mentales que dan cuenta y razón del razonamiento covariacional, que surgen en un ambiente mediado por TD al momento de resolver tareas de carácter dinámico en las cuales la covariación está presente. La estrategia metodológica implementada fue la entrevista basada en tareas y se abordó un enfoque fenomenológico – interpretativo. Se reportaron las acciones mentales de cuatro parejas de estudiantes de grado noveno y décimo.

A su vez, Villa-Ochoa y Ruiz (2010) muestran cómo a través de la interacción de un colectivo de investigadores con el software GeoGebra surgen algunas ideas para el diseño de estrategias que potencian el desarrollo del PV. Se basan en el constructo teórico de seres-humanos-con-medios propuesto por Borba y Villarreal (2005) para analizar dos episodios de su experiencia como investigadores. Desde dicho análisis se observó cómo a través de las necesidades de la investigación se establecieron algunas «herramientas» del software, que a su vez permitieron verificar la eficacia de este recurso para desarrollar el PV.

Las investigaciones mencionadas con anterioridad evidencian que si bien la política curricular actual establecer ciertos lineamientos para el desarrollo del PV, en la práctica esto no se consolida como se plantea. Por otro lado, los estudios también señalan diversas estrategias efectivas para su promoción. En ese sentido, la TD resulta ser una estrategia prometedora para la superación de estos desafíos , además de contribuir al cumplimiento de las disposiciones de los referentes de calidad del MEN (1998, 2006). Esto pone en evidencia la necesidad de implementar, en el aula de clase, estrategias con un enfoque didáctico conformado por TD y metodologías innovadoras de manera que estos promuevan el PV y su desarrollo.

1.1.3. Investigaciones sobre el Laboratorio de Matemáticas

Con el objetivo de atender las problemáticas que ha traído consigo la implementación de metodologías basadas, casi exclusivamente, en la memorización y la repetición de procedimientos en el marco del desarrollo del PV (Jaimes y Quiroga, 2020), la comunidad de educadores matemáticos se ha encargado de investigar sobre la implementación de metodologías novedosas, que llamen la atención de los estudiantes y a su vez, permitan el desarrollo de las competencias matemáticas de un ciudadano actual. De acuerdo con lo anterior, nos llaman la atención las investigaciones centradas en el laboratorio de matemáticas [LM], pues, según Pabón et al. (2011), el LM se inscribe en una aproximación a la dimensión experimental[3] del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, son los estudiantes quienes desarrollan habilidades y construyen conocimientos matemáticos, a partir de la interacción con recursos didácticos.

Por otro lado, Arce (2004) señala que el LM es «una estrategia pedagógica de utilización del material, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de variados materiales» (p. 2). Por su parte, Maschietto y Trouche (2010), lo conciben como un conjunto de actividades que busca construir significados para los objetos matemáticos, basadas en la experimentación, el desarrollo de procesos y competencias matemáticas. Es decir, el LM se enfoca en el vínculo que existe entre los aspectos manipulativos y el aprendizaje de las matemáticas y, en consecuencia, está relacionado con la tradición pedagógica y didáctica de los métodos activos.

En la investigación realizada por Maschietto y Trouche (2010), se establece que el LM es un buen contexto para la construcción de significados y el desarrollo de determinados procesos matemáticos. Dicha investigación tuvo como objetivo responder a las preguntas: ¿existen buenos contextos para desarrollar instrumentos matemáticos?, ¿existen buenas prácticas docentes que ayuden a la génesis instrumental y a la construcción de significados matemáticos?, y ¿cómo es posible promover dichas prácticas docentes? El estudio se fundamentó en el enfoque instrumental propuesto por Rabardel (1995), así como en el enfoque de la mediación semiótica planteado por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008), y

[3] Entendida como «experimentar con las matemáticas representa, entre otras cosas, inventar, crear a partir de los propios medios para hallar caminos de solución a problemas que se han planteado, generado la opción de realizar descubrimientos» (Pabón et al., 2007, p. 198).

consistió en la revisión documental de los enfoques mencionados y de la historia de las matemáticas.

Así las cosas, tanto la propuesta curricular del MEN (1998, 2006) y la del LM[4] se relacionan toda vez que, por un lado, ambas propuestas ubican al estudiante en el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otro lado, ambas propuestas le dan gran importancia al uso de situaciones problema y de tareas enfocadas en la experimentación que permitan darles sentido a los objetos matemáticos situados en un contexto específico. Por esta razón, consideramos que el uso del LM resulta ser una estrategia innovadora que contribuye a la disminución de la brecha existente entre las disposiciones curriculares y las realidades del aula, en términos del desarrollo del PV.

Ahora bien, teniendo en cuenta que las TD están presentes en la esencia de la política curricular actual por las posibilidades que ofrece, como la visualización en simultaneo de diferentes sistemas de representación de un objeto matemático y su manipulación, consideramos que un Laboratorio Virtual de Matemáticas [LVM] puede contribuir al desarrollo de los procesos matemáticos asociados al PV a partir del trabajo con las TD.

1.2. Problema de Investigación

En la sección anterior se afirmó que la expedición de los LC (MEN, 1998) estableció un antes y un después en la concepción del currículo de matemáticas. No obstante, a pesar de este cambio, evidenciamos una problemática asociada al ejercicio profesional de los profesores de matemáticas, ya que algunas prácticas no siempre reflejan

[4] Por lo menos las concepciones de Arce (2004) y Maschietto y Trouche (2010)

plenamente los planteamientos de los referentes curriculares actuales[5]. Diferentes autores han identificado tal problemática (Castro y Forero (2019) , Jaimes y Quiroga (2020) y Villa-Ochoa y Ruiz (2010)) y han llevado a cabo acciones que posibilitan su disminución a partir del uso de TD.

Ahora bien, teniendo en cuenta que nos enfocaremos en aspectos del meso currículo, enseguida mostramos algunos aspectos que ponen en evidencia consideraciones que identificamos en las instituciones educativas en las que ejercemos, específicamente sobre el desarrollo del PV.

En diversas instituciones educativas, se ha identificado que el PV tiene menor presencia en los primeros niveles de formación. Esto se debe a la percepción de que el PV se desarrolla principalmente en la educación media, pues históricamente este pensamiento, que incluye conceptos como función, dependencia, modelación y generalización, se ha asociado con el álgebra y el cálculo, *temáticas* que tradicionalmente se introducen formalmente en los grados correspondientes a este nivel. Por otro lado, en los planes de estudio, los contenidos suelen estar organizados de forma jerárquica, lo que implica que abordar un contenido, es necesario haber abordado otro específico previamente (Figuras 1 y 2). Si bien la estructuración de los contenidos mencionado previamente es una práctica común en la planificación curricular, se observa que el desarrollo de los pensamientos está vinculado en gran medida al aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Esto presenta, en algunos casos, similitudes con las disposiciones curriculares anteriores a 1998

[5] El desarrollo de ciertas prácticas docentes en matemáticas puede estar influenciado por diversos factores que incluyen condiciones institucionales, formación inicial del profesor de matemáticas y su actualización. No se puede atribuir exclusivamente a los profesores la alineación con los referentes curriculares.

(*e.g*. Resolución 277 de 1975 y Decreto 1419 de 1978), lo que plantea interrogantes sobre la adopción de la propuesta del MEN en la actualidad.

Figura 1

Fragmento de malla curricular de grado undécimo de una institución asociada a uno de los autores del presente trabajo

PENSAMIENTO VARIACIONAL			
	ESTANDARES	LOGROS	CONTENIDOS
	• Calcula el valor del límite de una sucesión y de una función. • Calcula el valor del límite de funciones que tienden a infinito, límite de funciones con indeterminaciones y algunos límites especiales.	• Distinguir las propiedades de los límites Identifica las formas indeterminadas • Calcular el límite de una sucesión • Hallar el límite de una función polinómica • Aplicar las propiedades de los límites para calcularlos de manera ágil • Aplicar los límites especiales en la solución de ejercicios • Determinar la continuidad de funciones • Establecer la continuidad de una función y la relaciona con su límite • Explorar el concepto de límite de una función a partir del análisis intuitivo de su comportamiento. • Evaluar límites laterales Examinar el comportamiento de una función en un punto de discontinuidad	**LÍMITE DE UNA FUNCIÓN** • Idea intuitiva de límite • Definición formal de límite • Límites laterales • Cálculo de límites aplicando propiedades Límites de funciones indeterminadas • Límites de funciones trigonométricas • Límites infinitos • Límites en el infinito • Límites exponenciales • Asíntotas de una función **FUNCIONES CONTINUAS** • Continuidad de una función en un punto • Continuidad de una función en un intervalo • Discontinuidades

Figura 2

Fragmento de malla curricular de grado undécimo de la institución asociada al otro de los autores del presente trabajo

TEMÁTICAS POR COMPONENTE	
COMPONENTE	TEMÁTICAS
NÚMERICO-VARIACIONAL	TRIGONOMETRÍA • Funciones Inversas • Identidades y Ecuaciones trigonométricas • Teoremas de Seno y Coseno NÚMEROS REALES Y FUNCIONES REALES • Números reales. • Densidad • Desigualdades y Valor absoluto. SUCESIONES Y LÍMITES • Progresión aritmética y progresión geométrica • Sucesiones de números reales: monotonía, convergencia, divergencia y límites. • Límites de funciones reales: introducción, teoremas, puntuales, al infinito e infinitos. . Análisis funciones usando límites, asíntotas vertical y horizontal • Continuidad de funciones LA DERIVADA • La derivada: concepto, derivada y continuidad • Reglas para cálculo de derivadas y regla de la cadena • Derivada de orden superior y derivación implícita

De manera partícula, el análisis de los materiales educativos y textos guías que sustentan, a menudo se inclinan por privilegiar los procedimientos algorítmicos. Esta tendencia puede llevar a que los procesos relacionados con el desarrollo del PV como la formulación y resolución de problemas, la modelación, la comunicación y el razonamiento, queden en un segundo plano. Por ejemplo, al abordar el concepto de límite, es frecuente observar que algunos materiales educativos, se le dé un tratamiento centrado en los procedimientos algebraicos para determinar el valor de una función en un punto, lo que puede desviar la atención del carácter naturalmente variacional del concepto. la Figura 3, ejemplifica lo anterior y corresponde al texto empleado en una de las instituciones donde los a uno de los autores del presente trabajo ejerce su labor. La prevalencia de este enfoque puede limitar las oportunidades que tienen los estudiantes para construir una comprensión profunda del cambio y la dependencia.

Figura 3

Facsímil tomado del libro de texto empleado en una de las instituciones educativas.

EJEMPLO 6 ■ Encontrar un límite por racionalización

Encuentre $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar la ley 5 (límite de un cociente) de inmediato, porque el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} \qquad \text{Racionalice el numerador}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t\to 0}(t^2+9)}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

De acuerdo con lo anterior, podríamos confirmar que diversas instituciones educativas presentan retos en torno a la implementación de la propuesta del MEN para el área de matemáticas, específicamente lo referido al desarrollo del PV. En consonancia con lo reportado en la sección 1.1.3. Investigaciones sobre el Laboratorio de Matemáticas, consideramos que un Laboratorio Virtual de Matemáticas (LVM) que atienda a las disposiciones del MEN en términos del uso de TD, el diseño de situaciones problema y la actividad experimental del estudiante en el proceso de aprendizaje, podría aportar a la atención del problema reportado.

Estas realidades se manifiestan particularmente en el desempeño de los estudiantes y en sus concepciones sobre la variación y el cambio. Es en este nivel educativo, donde los conceptos empiezan a tomar más fuerza y las dificultades en su comprensión en grados anteriores puede consolidarse impactando negativamente en el desarrollo del PV. En este orden de ideas, el grado noveno, se presenta como un momento crucial para la investigación, dado que los estudiantes se encuentran en una transición en el currículo donde se espera una mayor formalización y profundización de los conceptos asociados a la variación. Además, el manejo el manejo básico de herramientas tecnológicas que poseen los estudiantes de este grado lo hacen ideal para explorar la contribución de un LVM. Esta aproximación, se alinea también con la posibilidad de intervención directa en un contexto real educativo, permitiendo observar el impacto de un enfoque pedagógico innovador en el desarrollo del PV.

De acuerdo con las ideas comentadas previamente, nos interesa dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera contribuye un LVM al desarrollo del PV en estudiantes de grado noveno?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Establecer de qué manera la implementación de un laboratorio virtual de matemáticas favorece el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Conceptualizar la idea de laboratorio virtual de matemáticas a partir de diferentes concepciones de laboratorio de matemáticas y marcos conceptuales relacionados con entornos virtuales de aprendizaje.
- Diseñar el laboratorio virtual de matemáticas, así como las tareas del laboratorio que apunten a desarrollar el pensamiento variacional.
- Describir el impacto que tiene en el desarrollo del pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno la implementación de las tareas del laboratorio virtual de matemáticas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que sustentan la presente investigación, cuya exposición se enuncia en tres momentos. En el primer momento, se expone una revisión documental centrada en el PV desde dos perspectivas: una curricular y otra teórica. La primera se fundamenta en las directrices curriculares nacionales y se tiene en cuenta una mirada curricular internacional, esto con el propósito de contar con una visión amplia de este pensamiento. La perspectiva teórica se aborda desde el marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003), el cual permite analizar cómo los estudiantes enfrentan situaciones relacionadas con la variación y el cambio. Posteriormente, se establece la postura específica del PV adoptada en el presente trabajo y se profundiza en su desarrollo. Este primer momento finaliza con el contraste de las tres perspectivas del PV, el cual permite la elaboración de una serie de indicadores que orientan el análisis del PV.

En el segundo momento, se presenta la abstracción situada como marco de referencia en relación con el uso de las tecnologías digitales en la educación matemática. Se hace alusión a tal marco desde el enfoque de redes; este permite comprender cómo los estudiantes amplían su conocimiento matemático a partir de la mediación con herramientas tecnológicas, especialmente en ambientes digitales.

En el tercer momento, se lleva a cabo la conceptualización del LM mediante el análisis de definiciones propuestas por diferentes autores. Lo mismo se realiza para conceptualizar el LVM; sin embargo, dada la diferencia entre las definiciones del LVM con el LM, fue necesario proponer una conceptualización propia del LVM que se encontrara acorde con lo establecido para el LM.

2.1. Pensamiento Variacional

En esta sección se exponen los derroteros teóricos sobre el PV bajo los cuales se desarrolla el presente trabajo. En consonancia con la problemática y los objetivos del estudio comentados en el capítulo anterior, se consideró pertinente abordar la concepción de PV desde una perspectiva curricular y otra teórica[6]. Respecto a la primera perspectiva, se alude a la política curricular de matemáticas en Colombia, enfatizando en los aspectos característicos de la propuesta del MEN (1998), en especial, lo relacionado con el desarrollo del PV. Allí mismo se describe la propuesta curricular realizada por el *National Council Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), poniendo el foco, nuevamente, en los aspectos asociados al PV.

En relación con la segunda perspectiva, se aborda el trabajo realizado por Carlson et al. (2003), quienes proponen un marco de referencia para describir las acciones mentales involucradas al aplicar razonamiento covariacional[7][8].

2.1.1. Perspectiva Curricular del Pensamiento Variacional

2.1.1.1. Propuesta Curricular del MEN

El estudio de la variación y el cambio en el currículo de matemáticas comenzó a tomar fuerza durante la década de los años 70, a partir de la elaboración de la Renovación Curricular, que tenía como propósito subsanar las dificultades que habían dejado las

---

[6] Aunque reconocemos que las propuestas curriculares sobre el PV son también propuestas teóricas, con este último nos referimos especialmente a propuestas sobre el PV que son de naturaleza ajena a las políticas curriculares.

[7] En el presente trabajo identificamos al PV y el razonamiento covariacional como semejantes, pues en ambas perspectivas se destacan elementos en común como por ejemplo la comprensión de la variación y el cambio, la modelación de situaciones y el uso de sistemas algebraicos para su descripción.

[8] Si bien tenemos presente que las perspectivas tanto históricas como epistemológicas del pensamiento variacional son importantes y proporcionan ideas clave para su comprensión, este trabajo de grado no se adscribe a un enfoque histórico en relación con la didáctica. Las personas interesadas en este aspecto pueden consultar: Godino et al (2004) o Villa-Ochoa (2007).

corrientes de la «Matemática Moderna» y «Volver a lo Básico». Tal renovación se fundamentó en la teoría de sistemas propuesta por el Dr. Carlos Eduardo Vasco, la cual consiste en acercase a las distintas regiones de las matemáticas desde un enfoque sistémico, que contemple a tales regiones como un todo estructurado con sus elementos, operaciones y relaciones. Para ello, se sugiere explorar los sistemas concretos que ya empleen los estudiantes, de manera tal que estos sean la base para la construcción de los sistemas conceptuales correspondientes (Vasco, 1985). Es en este momento en el que se proponen abordar los conceptos propios del cálculo a partir de los sistemas concretos asociados a las experiencias previas de los estudiantes, específicamente aquellos contextos en los que haga presencia la variación y el cambio, haciendo énfasis en el uso de diversos sistemas de representación (MEN, 2004).

Posteriormente, el MEN complementó la propuesta de la Renovación Curricular incorporando nuevos enfoques, tendencias y perspectivas sobre la matemática escolar. Lo anterior se consolidó en los LC como el Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, el cual caracteriza competencias asociadas al estudio de la variación y el cambio, como analizar, manipular y modelar matemáticamente situaciones de la vida diaria, de la ciencias o de las matemáticas mismas (MEN, 1998). Más adelante, en una publicación sobre Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales, el MEN (2004) conceptualiza este pensamiento como «la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas» (MEN, 2004, p. 17). Posteriormente, en el 2006, con la publicación de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] por parte del MEN, se estableció que el pensamiento en mención está relacionado con «el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos» (MEN, 2006, p. 66).

En este sentido, la primera idea dada por el MEN (1998) sobre el PV no refiere a una definición como tal, sino que muestra la importancia de su desarrollo y da un repertorio de elementos útiles para ello. Se establece que su estudio debe comenzar desde los primeros años de la escolaridad mediante la solución de situaciones problema asociadas a fenómenos de variación y cambio en diversos contextos. Posterior a ello, el MEN (2004) propuso una perspectiva del PV que centra la atención en la interpretación, manipulación y análisis de funciones. Desde nuestra visión, esta perspectiva limita la concepción del PV al estudio de las funciones y su posibilidad de representación de situaciones de variación y cambio. Si bien la función es un objeto que permite modelar situaciones de cambio, de acuerdo con los LC, este no es el único enfoque con el que dicho pensamiento se puede abordar[9]. Más adelante, el MEN (2006) conceptualiza el PV y se puede evidenciar que, en comparación con la perspectiva anterior, existe el reconocimiento de que el estudio de la variación y el cambio no se limita únicamente al manejo de las funciones para modelar situaciones, sino que contempla una serie de objetos matemáticos y procesos que amplían las formas en las que es posible llevar a cabo este estudio.

Teniendo en cuenta lo anterior, a lo largo de las diferentes perspectivas dadas por el MEN sobre el PV, es posible identificar una concreción de dichas perspectivas debido a

[9]Este proceso puede llevarse a cabo también con el estudio de patrones, regularidades, secuencias, proporciones, ecuaciones lineales, entre otros.

que, en un principio no se muestra una definición explícita de este, sino que se expone una idea general. Posteriormente, es definido desde una visión más técnica pero limitada a un objeto matemático especifico. Finalmente, se consolida bajo una perspectiva más amplia que contempla diferentes objetos y procesos matemáticos. Esta evolución pone en evidencia una mayor sofisticación de lo que se concibe curricularmente como PV y de su complejidad. Para efectos de este trabajo, entenderemos el PV bajo la perspectiva del MEN (2006), debido a que esta alude a las posibilidades de estudio de diversos objetos matemáticos asociados a la variación y el cambio, a partir de situaciones de variación y cambio, lo cual resulta pertinente para dar alcance a los objetivos propuestos para este trabajo. En este punto, es importante destacar que lo declarado por el MEN, tanto en 1998 con los LC, como en el 2004 con su visión sobre el PV, aporta ideas clave sobre este pensamiento. Estas ideas sirvieron de base para la formulación los Estándares del MEN (2006) y, en el caso de esta investigación, para el diseño de las tareas que se muestran en capítulos siguientes.

2.1.1.2. Propuesta Curricular del NCTM

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas estadounidense, –NCTM, por sus siglas en inglés– es una organización dedicada a promover el mejoramiento de la educación matemática. En 1989 el NCTM inició en Estados Unidos un movimiento con el fin de implementar un currículo de matemáticas basado en estándares denominado *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) –en adelante, PSSM–. La elección de los PSSM como referente de este trabajo de investigación corresponde, por un lado, a su relevancia y reconocimiento internacional en el ámbito de la educación matemática y a su influencia en el desarrollo curricular de múltiples países, incluyendo a

Colombia. Por el otro, al impacto que tienen en diferentes investigaciones y propuestas pedagógicas debido a su enfoque estructurado en la enseñanza de las matemáticas. De manera específica, los PSSM brindan una articulación clara entre principios fundamentales y estándares, constituyendo una base sólida para el diseño de tareas y formulación de objetivos de aprendizaje.

Los PSSM exponen los contenidos y procesos matemáticos que los estudiantes deben aprender a lo largo de su escolaridad a partir de diez estándares, que se organizan de forma tal que cinco de ellos aluden a los contenidos: (*i*) Números y Operaciones, (*ii*) Álgebra, (*iii*) Geometría, (*iv*) Medición y análisis de datos y (*v*) Probabilidad; y los otros cinco a los procesos: (*vi*) resolución de problemas, (*vii*) razonamiento y demostración, (*viii*) comunicación, (*ix*) conexiones y (*x*) representación. De esta manera, el documento describe, para cada grupo de grados (desde prejardín hasta el grado 12), la forma en que los estudiantes pueden comprender, articular y estructurar los distintos conceptos de las matemáticas escolares.

De manera particular, se aborda a continuación lo referido al estándar de Álgebra, pues este centra la atención en las relaciones entre cantidades, en las funciones, en la modelación y en el análisis del cambio, aspectos relacionados directamente con el referente teórico elemental de esta investigación, el PV.

Se espera que durante y al finalizar la etapa escolar, los estudiantes alcancen los objetivos propuestos para el estándar en el marco de cuatro competencias. La primera, *comprender patrones, relaciones y funciones (C1);* la segunda, *representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos (C2)*; la tercera, *utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas (C3)*; y la cuarta, *analizar el cambio en diferentes contextos (C4)*. Para el alcance óptimo de estas cuatro competencias, los PSSM proponen una serie de expectativas específicas dirigidas a cada grupo de grados, tal como se muestra en el Anexo A.

De acuerdo con la información que allí se proporciona, es posible notar que, a grandes rasgos, la *C1* se enfoca en la identificación el análisis y la descripción de las relaciones matemáticas y patrones, se espera que los estudiantes logren reconocer cómo se relacionan unos datos con otros en el marco de una situación en la que haga presencia la variación y el cambio, y se usen funciones para representar dicha relación. La *C2* alude al uso e interpretación de los símbolos y los diferentes sistemas de representación (simbólico, concreto, tabular, pictórico y verbal) de los objetos matemáticos para la expresar y resolver problemas, lo cual se relaciona directamente con la solución de ecuaciones y la manipulación de expresiones algebraicas. La *C3* centra la atención en la utilización, elaboración y análisis de modelos matemáticos con el objetivo de comprender las relaciones existentes entre las variables involucradas en fenómenos de variación asociados tanto a contextos matemáticos, como a contextos de la vida real. Finalmente, la *C4* alude a la comprensión y al análisis de la forma en que cambian las variables asociadas a los fenómenos previamente comentados.

El estándar Álgebra de los PSSM, permite vislumbrar, por medio de las cuatro competencias sintetizadas anteriormente, una apuesta considerable hacia la concepción del álgebra escolar, la cual se contrapone con la visión clásica de la manipulación simbólica. Se reconoce al álgebra como una herramienta poderosa que permite consolidar bases fuertes para el trabajo posterior con los símbolos y expresiones algebraicas (Rojas y Vergel, 2013).

Por otro lado, estos PSSM promueven el desarrollo del razonamiento algebraico[10], el cual implica «representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas» (Godino y Font, 2003. p. 774). De esta forma, la idea de función cobra un papel esencial y transversal en cada uno de los grupos de grados y es por ello que este debe trabajarse rigurosamente y con situaciones que sean significativas para los estudiantes, dejando de lado el tratamiento exclusivo de los objetos matemáticos desde la notación, la terminología y procedimientos que no tengan un objetivo específico como la solución de grandes cantidades de ecuaciones, la elaboración de gráficas de funciones que no tienen contextos definidos e incluso, realizar análisis de estas funciones determinando aspectos como el dominio, rango o las intersecciones con los ejes. Realizar todo ello sin un propósito establecido sobre un contexto específico, no contribuye a la consecución de los objetivos planteados por los NCTM en los PSSM (Godino y Font, 2003).

Ahora bien, es preciso mencionar que el razonamiento o pensamiento algebraico (como señalan varios referentes) difiere en algunos aspectos del PV y se hace importante aludir a ellos, dado que son estas diferencias las que delimitan la relación entre la propuesta colombiana y la americana. Por un lado, es claro que el razonamiento algebraico tiende a acercase a la manipulación simbólica y a las habilidades de resolución de problemas de ecuaciones, mientras que el PV se acerca más fuertemente a la idea del concepto de cambio continuo entre variables y en cómo interpretarlo. Es así como el PV puede beneficiarse del razonamiento algebraico, lo que implica que haya entre estas dos propuestas una especie de complemento. La propuesta colombiana tiene como una de sus principales empresas

[10] En el contexto de este trabajo se puede entender al razonamiento algebraico como similar al pensamiento algebraico.

fundamentar matemáticamente a los estudiantes desde la variación y el cambio para abordar el cálculo. Evidencia de ello es que grupos de investigación como el liderado por Múnera et al. (2005) en la Universidad de Antioquia, en Colombia, formularan una propuesta para el desarrollo del PV desde la perspectiva del razonamiento algebraico.

Esto es así porque el razonamiento algebraico y el PV tienen varios aspectos en común. En primer lugar, se observa en ambas propuestas un aspecto central en lo que refiere al desarrollo progresivo, al enfoque en modelación y a las funciones. Ambas propuestas se esfuerzan por capturar y comprender la forma en la que cambian las variables asociadas a fenómenos de variación y cambio, además de las múltiples formas de representación de estas relaciones, como lo son la gráfica, tabular, simbólica, pictórica o verbal.

Si bien consideramos que es posible llevar a cabo el desarrollo del PV, sin hacer alusión a los objetos simbólicos propiamente (asunto relevante para el razonamiento algebraico), pues las ideas matemáticas se pueden expresar también mediante gráficos o comunicación verbal o escrita; en años posteriores, como la secundaria, el tratamiento simbólico es importante, no porque sea el centro precisamente del PV, sino porque su tratamiento posibilita otras representaciones para plasmar ideas matemáticas. En este sentido, el razonamiento algebraico debe tenerse en cuenta durante el desarrollo del PV, no desde la perspectiva en la que el álgebra resulta ser una traducción de las reglas de la aritmética, sino bajo la mirada en la que esta posibilita una nueva forma de pensar, pues resulta ser un puente que facilita al estudiante reflexionar frente a lo que está cambiando y lo que no, permite que comunique lo que observa y que explicite dichas relaciones, que las transforme, que las exprese de diferentes formas, que haga conjeturas y por tanto, que formule hipótesis sobre una situación (Múnera et al. 2005).

2.1.2. Perspectiva Teórica del Pensamiento Variacional

Anteriormente, se mencionaron diversas interpretaciones del PV desde las perspectivas curriculares nacionales e internacionales, con el propósito de ampliar el marco de referencia de este pensamiento. No obstante, consideramos importante recurrir a propuestas externas al ámbito curricular porque permiten profundizar en la comprensión del PV, más allá de los asuntos curriculares oficiales y aportan perspectivas teóricas que enriquecen la construcción del conocimiento asociado a dicho pensamiento.

Específicamente, nos referimos al trabajo de Carlson et al. (2003), quienes en su investigación proponen un marco conceptual que puede ser empleado para analizar cómo los estudiantes se enfrentan a situaciones en las que dos cantidades cambian simultáneamente[11]. Este estudio se llevó a cabo con 20 estudiantes universitarios que habían culminado con buenas calificaciones un curso de cálculo, mediante la solución de cinco ítems relacionados con la interpretación y representación de situaciones dinámicas.

En su propuesta, los autores describen el razonamiento covariacional como «las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra» (Carlson et al., 2003, p. 124). Con la expresión *coordinación de dos cantidades* hacen alusión al seguimiento que se hace al valor de las magnitudes involucradas que permite advertir que

[11] Aunque los autores, en el marco conceptual que proponen, no hacen referencia explícita al PV sino al razonamiento covariacional, en el presente trabajo entenderemos este último como semejante al PV pues los objetos y procesos matemáticos considerados en ambas perspectivas guardan similitud entre sí.

cuando una magnitud cambia, la otra magnitud también tiene un valor en cada instante. De este modo, Carlson y su equipo proponen un marco conceptual asociado a la descripción de cinco *acciones mentales* acompañadas de comportamientos específicos por parte de los estudiantes al estar inmersos en situaciones relacionas con el razonamiento covariacional. Dichas acciones y comportamientos se describen en la Tabla 1.

Tabla 1
Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. Tomado de Carlson et al. (2003, p. 128).

Acción Mental	Descripción de la Acción Mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables, a partir de otras representaciones (e.g., y cambia con cambios en x). Construcción de una tabla
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Los estudiantes se clasifican en cinco niveles diferentes (Tabla 2) de acuerdo con las acciones mentales que manifiesten en la resolución de situaciones relacionadas con el razonamiento covariacional. Un estudiante puede clasificarse en un nivel cuando es capaz de ejecutar las acciones mentales de ese nivel y de los anteriores. Cuando esto se logra, se dice que el estudiante ha desarrollado parte de la habilidad del razonamiento covariacional. Por lo tanto, a medida que se desarrolla la imagen de covariación con la que cuenta un estudiante, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.

Tabla 2
Marco conceptual para los niveles de la covariación. Tomado de Carlson et al (2003, p. 129).

Niveles del razonamiento covariacional	
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.	
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Bajo este enfoque, los autores señalan que cuando un estudiante se enfrenta a desarrollar una tarea en particular y se clasifica en el nivel 5 del razonamiento covariacional, se debe a que es capaz de razonar bajo las características de la AM5 y por lo tanto también es capaz de razonar a través de las acciones mentales previas, es decir, de la AM1 a la AM4. Adicionalmente, establecen que cuando un estudiante muestra comportamientos que parecen estar relacionados a cierta acción mental, pero al solicitarle que explique o justifique la forma en como abordó la situación propuesta, el estudiante al parecer no tiene una comprensión suficiente de la forma en que abordó la tarea, a esta situación la denominan procesos de pensamiento y comportamientos pseudo-analíticos.

El marco que proponen los autores resulta relevante para el desarrollo del presente trabajo pues permite analizar, caracterizar y clasificar el razonamiento y los comportamientos de un estudiante cuando se desenvuelve en una situación de variación y cambio. Sin embargo, consideramos pertinente realizar una adaptación a ciertos aspectos de la propuesta de Carlson et al. (2003) debido a que su investigación tuvo como población a estudiantes universitarios, caso diferente del presente estudio; más adelante se presenta dicha adaptación.

2.1.3. Desarrollo del Pensamiento Variacional: Perspectiva del MEN

En concordancia con la postura asumida acerca del PV bajo la perspectiva del MEN (2006), se hace importante abordar de manera más profunda este pensamiento, ahora en términos de su desarrollo en los estudiantes. Uno de los objetivos del MEN (2006) para desarrollar dicho pensamiento en las aulas es cultivar, desde los primeros años de la escolaridad, caminos hacia la comprensión de conceptos y desarrollo de procedimientos asociados al estudio de funciones y sus sistemas analíticos, para lo cual se hace necesario involucrar a los estudiantes en situaciones de variación y cambio diseñadas bajo los contextos de la vida cotidiana, de las ciencias y de las propias matemáticas, que tengan como eje central la modelación de la variación y el cambio.

Bajo la propuesta del MEN (2006) se espera que el desarrollo de este pensamiento inicie con el estudio de los patrones y las regularidades, de tal forma que, en la educación básica secundaria, el desarrollo de este pensamiento gire en torno al estudio de patrones y regularidades, pero contemplando los sistemas de representación algebraicos, expresados paralelamente con otros tipos de representaciones como la gestual, tabular, verbal, gráfica e icónica (MEN, 2006). Finalmente, en la educación media, se aborda el estudio de las relaciones funcionales centrando la atención en los fenómenos de la vida diaria.

Así las cosas, las situaciones de variación y cambio adquieren un rol esencial, pues es a partir de ellas que es posible llevar a cabo el desarrollo del PV. Algunas de las situaciones que sugiere el MEN (2004) para este caso, se refieren a aquellas que consideran de manera explícita el tiempo (*e. g.,* el crecimiento de una planta, la velocidad de un vehículo o el crecimiento de una inversión), porque la variación y el cambio ocurren cuando hay una transformación o modificación de un determinado suceso, con el pasar del tiempo[12]. Esta perspectiva evoca dos tipos de variación, la continua y la discreta. La primera consiste en la observación de la situación considerando el tiempo transcurriendo sin interrupciones (*e. g.,* la temperatura de una habitación a lo largo de un día o la presión atmosférica durante un cambio de clima) y la segunda, radica en la observación de la situación en instantes de tiempo igualmente espaciados (*e. g.,* las ventas diarias de una tienda o depósitos semanales en una cuenta de ahorros).

Sumado a lo anterior, los referentes curriculares colombianos hacen hincapié en que para el desarrollo de este pensamiento es necesario estudiar los objetos matemáticos a partir del uso de diferentes sistemas de representación (MEN, 1998, 2004, 2006) pues, además de jugar un papel esencial para su compresión (Godino et al., 2016), estos permiten comparar, interpretar y analizar desde varios puntos de vista la manera en cómo los cambios de una variable repercuten en los cambios de otra. Por lo tanto, consideramos relevante tener

[12] El PV se puede desarrollar abordando situaciones de variación y cambio en la que el tiempo no se considera como una variable de estudio (*e. g.,* en el llenado de un recipiente se puede prestar atención a la relación entre el volumen que ocupa el líquido en el recipiente y la altura de llenado).

presente de qué formas es posible representar las situaciones de variación y cambio, ya que esto permitirá llevar a cabo un diseño apropiado de las tareas que conformarán el LVM y servirá como herramienta para el respectivo análisis luego de su aplicación.

Así pues, en el estudio de una situación de variación y cambio resulta relevante realizar, en un primer momento, la descripción e interpretación cualitativa del fenómeno. Esto mediante la identificación de las magnitudes que intervienen (observando si estas cambian o no y la relación que existe entre ellas) y su descripción verbal y escrita, en la que se reconozca la manera como estas magnitudes se comportan en la situación[13]. Dicho acercamiento posibilitará establecer algunas conclusiones y realizar las primeras predicciones de lo que puede suceder con el fenómeno conforme avanza el tiempo (MEN, 2004).

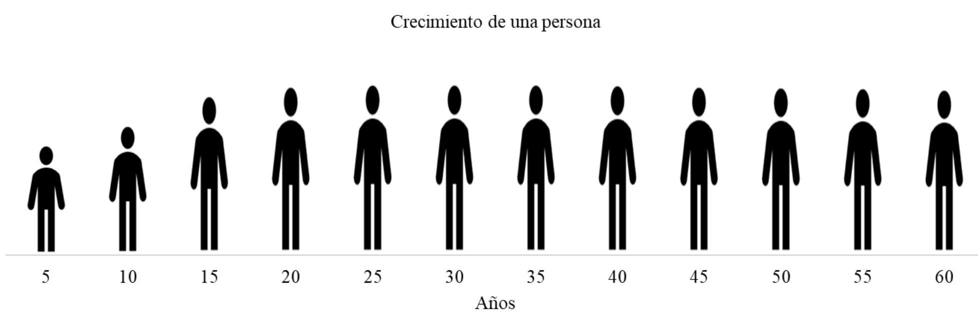
Posterior a la descripción e interpretación cualitativa del fenómeno se considera su representación. Para llevar a cabo lo anterior, es preciso tener en cuenta que para representar las situaciones de variación y cambio se pueden emplear las **formas de representación cualitativa** y las **formas de representación cuantitativa** propuestas por el MEN (2004). En las primeras se alude a las formas de representación *escrita* y *pictórica*; en las segundas, a las formas de representación *geométrica, tabular, algebraica* y *gráfica*. A continuación, se hará una breve descripción de estas formas de representación.

[13] En esta descripción se espera el uso de expresiones como: «tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc.» (MEN, 2004, p. 18)

Representación escrita: se espera que el estudiante exprese con sus propias palabras lo que ocurre en la situación de variación y cambio, señalando las magnitudes que están involucradas, la forma en cómo estas se relacionan y algunas conclusiones.

Representación pictórica: el estudiante debe hacer uso de dibujos o gráficos en los que muestre, de otras formas, cómo es que entiende la situación de variación y cambio, estas ilustraciones pueden ser concretas y mostrar lo que ocurre en distintos momentos de la situación, además, permiten que el estudiante le pueda dar sentido al uso de gráficas cartesianas que describen la situación. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de representación pictórica que relaciona el crecimiento de una persona a lo largo de su vida.

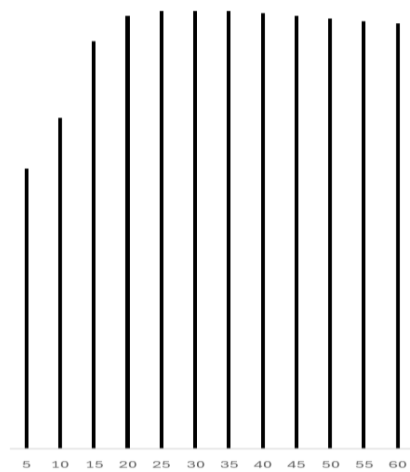
Figura 4
Representación pictórica de una situación de variación y cambio



Representación geométrica: esta representación surge cuando el estudiante asocia las magnitudes involucradas en una situación de cambio con la longitud de segmentos. Esto no es solo una representación gráfica, sino un reconocimiento de las propiedades algebraicas y de continuidad de las magnitudes, similares a las de la longitud de un segmento. Este enfoque permite modelar situaciones de variación y cambio utilizando programas de geometría dinámica (ver Figura 5).

Figura 5

Representación geométrica de una situación de variación y cambio



Representación tabular: se espera que el estudiante sea capaz de tomar diferentes medidas de las magnitudes en estudio. En la Figura 6 se muestra un ejemplo que relaciona la altura de una persona con su edad. Al realizar el análisis de los datos numéricos es posible hallar patrones de regularidades.

Figura 6

Representación tabular de una situación de variación y cambio

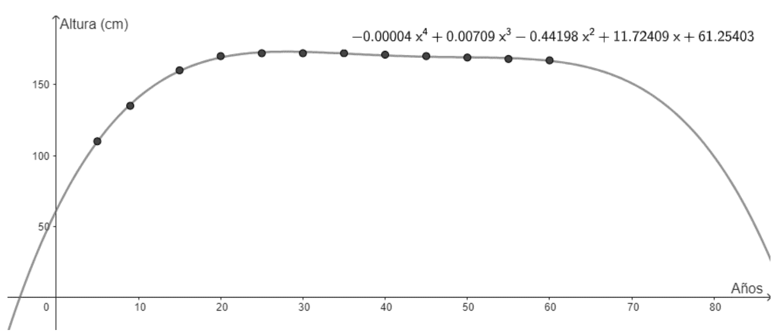
Edad (años)	Altura (cm)
5	110
10	130
15	160
20	170
25	172
30	172
35	172
40	171
45	170
50	169
55	168
60	167

Representación algebraica: el estudiante debe ser capaz de emplear los patrones de regularidad hallados en la representación tabular y establecer expresiones algebraicas, en las que se muestre toda la información de la situación de variación y cambio. Las propiedades de las expresiones algebraicas facilitan la identificación de aspectos relevantes sobre el comportamiento de las variables involucradas en la situación. En el caso del crecimiento de una persona puede determinarse (mediante software, por ejemplo) una función polinómica que se aproxime al comportamiento de las variables en cuestión.

Representación gráfica: el estudiante relaciona, en un plano cartesiano, los datos de la tabla que contiene las mediciones de las magnitudes de estudio, aunque también se puede realizar teniendo en cuenta las expresiones algebraicas halladas a partir de la tabla. La Figura 7 ilustra este tipo de representación para una situación en la que interviene el crecimiento de una persona a lo largo de los años.

Figura 7

Representación gráfica de una situación de variación y cambio



2.1.4. Comparación, análisis y propuesta

Las perspectivas mencionadas tienen en común cuatro aspectos generales: la comprensión de los objetos matemáticos, el énfasis sobre la variación y el cambio, la importancia de los sistemas de representación y la modelación de situaciones. Enseguida, se detalla la forma en que se vislumbran estos aspectos en las perspectivas curriculares seguido de la perspectiva teórica.

En primer lugar, se debe reconocer que las perspectivas le apuestan a la comprensión conceptual de los objetos matemáticos por sobre la memorización de los algoritmos, técnicas y procedimientos. La propuesta curricular colombiana resalta la necesidad de un cambio frente la concepción de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (MEN, 1998), al igual que lo hacen los NCTM. Tal necesidad nace no solo de los bajos resultados que habrían dejado por su paso las «Matemáticas Modernas», sino que también se derivan de la Constitución Política de 1991, de la Ley General de educación de 1994 y de las tendencias internacionales del momento que reportaban cambios frente a la importancia de la educación matemática a finales del siglo XXI.

En segundo lugar, estas perspectivas se consolidan –al menos en lo que respecta a los objetos matemáticos asociados y fundamentales para el Cálculo– en el estudio de la variación y el cambio. Este constituye el segundo aspecto en común entre las propuestas. Las perspectivas curriculares se centran en la exploración de cómo y cuánto varía una magnitud en relación con otra, haciendo énfasis en la comprensión de dicha relación. En este sentido, los PSSM del NCTM fomentan de manera significativa el razonamiento algebraico (Godino y Font, 2003), junto con la idea de función.[14].

En tercer lugar, las perspectivas curriculares advierten la importancia de los sistemas de representación, pues estos permiten cualificar la comprensión de un concepto pues el uso de diferentes representaciones como gráficos de funciones o tablas de valores,

[14] Esto porque los LC hacen énfasis no solo en el objeto matemático función, sino que lo hacen sobre otros más asociados al PV.

permite al estudiante visualizar y comprender estas relaciones de manera más profunda. Estos sistemas de representación se constituyen en herramientas clave para construir significado y establecer relaciones en situaciones de variación y cambio.

En cuarto lugar, la modelación se constituye como un elemento estructurante de las perspectivas, pues este se concibe precisamente como una competencia fundamental de un ciudadano, además de relacionar los tres aspectos anteriores, resulta ser uno de los contactos más directos para entender aquellos fenómenos del mundo que nos rodea protagonizados por la variación y el cambio.

Por otro lado, en la propuesta de Carlson et al. (2003), estos los cuatro aspectos en mención se distinguen con facilidad pues los autores aluden al razonamiento covariacional y este, por su concepción, se relaciona directamente con el estudio de la variación y el cambio. La naturaleza de la propuesta teórica pone en evidencia el primer y el cuarto aspecto porque el contexto en el cual se desarrollan las investigaciones del equipo busca que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda acerca de la razón y las funciones, para lo cual se sugiere el estudio de situaciones de variación y cambio. Respecto al tercer aspecto, es claro que la propuesta teórica considera diferentes sistemas de representación (ver Tabla 1 y Tabla 2).

En su estudio, Jaimes y Quiroga (2020) contrastaron las tres propuestas en mención con el objetivo de determinar qué tanto distaban los planteamientos entre una y otra, asociando algunos estándares de los EBCM con sus correspondientes en las expectativas de los NCTM, además de asignarle a esta relación un nivel de razonamiento covariacional entre el N1 y el N5. Nosotros, basados en este trabajo, relacionamos las perspectivas en mención atendiendo a su naturaleza, para obtener indicadores genéricos del desarrollo del

PV. Esto es así porque, aunque el marco del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2003) esté diseñado para ser referencia sobre el nivel de razonamiento covariacional de un estudiante al resolver una tarea sobre covariación, los comportamientos emergentes de las acciones mentales sí pueden interpretarse como indicadores del desarrollo de una tarea que tiene como objetivo el estándar de los EBCM ya relacionado con una expectativa del NCTM.

Para comprender la relación que proponemos, es fundamental tener en cuenta el trabajo realizado. Por ello a continuación, detallamos el proceso de formulación de los indicadores de desarrollo del PV, particularmente para la formulación de unos indicadores que servirán de insumo para el desarrollo la propuesta que realizamos. Así la cosas, con la propuesta de Jaimes y Quiroga (2020) como referente, realizamos una comparación entre los EBCM y la propuesta curricular elaborada por los NCTM, en términos de sus estándares y sus expectativas, respectivamente. Para realizar esta comparación se asociaron, en primer lugar, los grupos de grados de una propuesta con la otra (ver Tabla 3).

Tabla 3
Comparación entre EBCM y NCTM

Grupos de grados según los EBCM	Grupos de grados según el NCTM
1° - 3°	K - 2°
4° - 5°	3° - 5°
6° - 7°	6° - 8°
8° - 9°	9° - 10°
10° - 11°	11° - 12°

Con el propósito de dar cumplimiento a los objetivos propuestos en el presente trabajo y garantizar su pertinencia, se decidió no abordar las relaciones entre los EBCM y la propuesta del NCTM, para los grupos de grado 1° - 3° y 4° - 5°, en comparación con los grupos K - 2° y 3° - 5° del NCTM. Esta decisión se fundamenta en que la población objeto de este trabajo no pertenece a tales grados y, además, porque el tratamiento de los objetos matemáticos que en estos se aborda requiere de conocimientos didácticos específicos que no forman parte de este estudio. Con este panorama, la comparación entre las propuestas se redujo a analizar lo siguiente (ver Tabla 4).

Tabla 4
Comparación entre EBCM y NCTM educación Básica y Media

Grupos de grados según los EBCM	Grupos de grados según el NCTM
6° - 7°	6° - 8°
8° - 9°	9° - 10°
10° - 11°	11° - 12°

A continuación, se procedió a analizar las correspondencias entre los EBCM y las expectativas del NCTM por grupos de grados, en términos de sus similitudes o equivalencias. Durante este análisis, se encontró que algunas de las expectativas de los NTCM no contaban con un estándar equivalente en los EBCM, por lo que se consideró no incluirlas en el estudio. También fueron descartados otros estándares y expectativas que tenían un enfoque predominante en el razonamiento algebraico, puesto que se consideró que estas distan de una de las premisas centrales de este trabajo: el estudio de la variación y cambio. En el Anexo B se presenta el análisis realizado para el grupo de grados 6° -7°.

Una vez realizado este procedimiento, se identificaron los objetos matemáticos que hacían referencia a cada estándar EBCM y su expectativa asociada de los NCTM. Esta identificación consistió en el análisis de los contenidos explícitos mencionados en los estándares y algunos de los objetos matemáticos a través de los cuales es posible llevar a cabo el desarrollo del estándar. Finalmente, en el marco del desarrollo de este trabajo, se eligieron uno o dos estándares por grupos que se correspondieran con los objetivos del presente trabajo.

Como ya se ha mencionado, la propuesta de Carlson et al. (2003) es relevante en este trabajo pues, además de relacionarse con las propuestas curriculares descritas, en ella se establecen las acciones mentales que ejecuta un estudiante cuando se enfrenta a una situación de variación y cambio. De igual manera, proponen los niveles en los que se puede clasificar un estudiante teniendo en cuenta dichas acciones. Los autores también señalan que un estudiante ha desarrollado su razonamiento covariacional, y se encuentra en un nivel especifico, cuando sustenta las acciones mentales relacionadas a ese nivel y a los anteriores. En consecuencia, las acciones mentales que proponen lo autores, las interpretamos como indicadores que permiten observar cuándo se ha desarrollado el razonamiento covariacional por parte de un estudiante.

Teniendo en cuenta que Carlson et al. (2003) realizan su investigación en un contexto universitario, consideramos necesario realizar una adaptación a su propuesta en aras del alcance de los objetivos del presente trabajo y el nivel escolar de los individuos con los que se aplicará este estudio. En este sentido, analizamos las cinco acciones mentales propuestas por los autores, con el propósito de detectar similitudes entre estas y los estándares específicos elegidos con anterioridad. En caso de encontrar similitudes, adaptamos la acción mental en términos del estándar relacionado. Cabe mencionar que solamente hacemos alusión a las primeras cuatro acciones mentales, debido a que no fue posible identificar alguna similitud entre la acción mental cinco y los estándares seleccionados.

En la Tabla *5* se muestran el grupo de grados, los estándares nacionales e internacionales seleccionados, los objetos matemáticos asociados a los estándares y la consolidación de las adaptaciones de las AM, las cuales denominamos «Indicadores». Cada indicador inicia con un paréntesis en el cual se menciona la acción mental en cuestión y el o los estándares con los que se encuentra relacionado. Por ejemplo, el primer indicador inicia con (AM1-2), esto significa que la AM1 fue adaptada, en términos del estándar seleccionado número dos.

Tabla 5

Indicadores del desarrollo del PV

GRUPO DE GRADO	ESTANDAR NACIONAL	NCTM	INDICADORES	OBJETO MATEMÁTICO
6°-7°	1. Describe y representa situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). 2. Reconoce el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	• Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; • Relacionar y comparar diferentes formas de representación de una relación	• (AM1-2) Establece la correlación de las dos variables que intervienen en una situación. • (AM2-1) Comunica la dirección del cambio del valor de salida considerando los cambios en el valor de entrada, a partir del uso de expresiones verbales, tablas y gráficas. • (AM3-1) Manifiesta la cantidad de cambio del valor de salida en términos del cambio en el valor de entrada, empleando diferentes representaciones (expresiones verbales, tablas y gráficas).	Proporcionalidad directa e inversa Igualdades, ecuaciones e inecuaciones Razones y proporciones Regla de tres simple directa proporcionalidad directa e inversa lenguaje algebraico ecuaciones con estructura multiplicativa ecuaciones con racionales. Término general de una sucesión
8°-9°	1. Identifica relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. 2. Usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. 3. Modela situaciones de variación con funciones polinómicas.	• Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; • Relacionar y comparar diferentes formas de representación de una relación;	• (AM2-1_2) Formula conjeturas sobre la dirección del cambio de las variables implicadas en una situación, a partir de la comparación entre la representación gráfica y algebraica de familias de funciones. • (AM3-3) Elabora modelos sobre situaciones de variación a partir de la coordinación de la razón de cambio de las variables involucradas en la situación.	Teoría polinomios Factorización Ecuaciones de primer grado Dependencia entre magnitudes Función lineal Sistemas de ecuaciones Teoría de funciones (caracterización, cuadrática, polinomial, racional, logarítmica exponencial)
10°-11°	1. Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de recta la tangente a una curva	• Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas;	• (AM4-1) Explica la covariación de las variables implicadas en una situación, a partir de la derivada como razón de cambio	Funciones énfasis trigonometría. Identidades trigonométricas teoría de funciones limites derivadas

	• Relacionar y comparar diferentes formas de representación de una relación.	

2.2. Abstracción Situada

En el desarrollo del presente trabajo se hace pertinente contar con un referente teórico que permita analizar la interacción entre la tecnología digital, los objetos matemáticos que allí se muestran y los sujetos que interactúan con los dos anteriores. De este modo, consideramos que la noción de *red* y los planteamientos sobre la *abstracción situada* representan un referente apropiado que permite llevar a cabo dicho análisis en términos de la interacción de un sujeto especifico con el LVM. Enseguida, se muestran algunas ideas propuestas por Noss y Hoyles (1996) de los elementos mencionados e interpretaciones de los mismos hechas por Jaimes y Quiroga (2020).

Cuando se pretende analizar las acciones que desarrolla un individuo que se enfrenta a una tarea en un entorno de tecnología digital, Noss y Hoyles (1996) establecen que dos recursos teóricos pertinentes para ello son el de *red* y *abstracción situada* pues, a pesar que estos elementos puedan ser abordados de forma independiente, en este caso particular resultan ser complementarios entre sí. Los autores señalan que, al interactuar con el medio, los individuos exponen su propio conocimiento y lo enlazan con los objetos o relaciones digitales que allí se establecen, los significados se construyen cuando existe una interacción entre los objetos y las relaciones digitales, de los cuales algunos se convierten en reales para los individuos, en otras palabras, los significados que construye un sujeto son el resultado de una relación dialéctica entre las acciones que llevan a cabo en el medio digital y el conocimiento.

Esta mirada permite identificar dos asuntos que señalan Jaimes y Quiroga (2020), uno de ellos se centra en la conexión que establece un individuo entre su conocimiento previo, el conocimiento que construye a partir de su interacción con el medio y el conocimiento formal; el otro asunto tiene que ver con las acciones realizadas por un estudiante en un medio digital y la forma en cómo se relaciona con objetos o conceptos matemáticos allí mostrados.

Lo anterior se encuentra relacionado, en cierta medida, con la idea de *red,* la cual se basa en la noción de andamio propuesta por Wood et al. (1976) y la noción de zona de desarrollo próximo desarrollada por Vygotsky (1978; citado por Noss y Hoyles (1996)), pues en las dos nociones es evidente la importancia que tiene el sujeto que cumple el rol de guía en el proceso de aprendizaje de un estudiante. De este modo, la teoría de andamios centra la atención en la interacción graduada que tiene el guía, profesor o tutor con el estudiante y el proceso de construcción de su propio conocimiento, el objetivo de esta interacción es que disminuya hasta el punto de desaparecer y, de manera inversa, la participación y conocimiento del estudiante aumenten.

Dado que esta teoría no hace referencia al uso de tecnología digital, Noss y Hoyles (1996) proponen una extensión de esta idea en la cual se tenga en cuenta la presencia de entornos digitales. La interacción que realizan los estudiantes con estas herramientas y que los conduce a construir su propio conocimiento es lo que los autores denominan *red*. Con el fin de llevar a cabo lo anterior Noss y Hoyles (1996) se propusieron determinar cuáles ideas sobre andamio se pueden ejecutar en contextos en los que haga presencia recursos digitales. Como respuesta a lo anterior, los autores determinaron tres ideas que se pueden extender y la forma en cómo podrían desarrollarse.

En primer lugar, la idea de andamio es entendida como una estructura establecida alrededor del estudiante en la que intervienen agentes externos y un sujeto que cumple el rol de guía. Esta estructura tiene como punto de encuentro la construcción del conocimiento por parte del estudiante, esto tiene lugar cuando, como se mencionó anteriormente, el estudiante muestra un aumento en su participación en el proceso de aprendizaje y la presencia e intervención del sujeto que cumple el rol de guía disminuye. Para poder extender este elemento, el sujeto que cumple el rol de guía es sustituido por los entornos digitales. Esto tiene como resultado centrar la mirada en las conexiones entre la forma en que el estudiante estructura su propio aprendizaje y la forma en que el entorno lo estructura. Dichas conexiones pueden ser de dos tipos, por un lado, aquellas conexiones que se forman jerárquicamente entre los conocimientos previos del estudiante y los que construye cuando interactúa con el entorno digital y, por otra parte, las conexiones que surgen entre el conocimiento que va construyendo el estudiante y el conocimiento considerado como formal.

En segundo lugar, para la teoría de andamio se alude al término *territorio de aprendizaje* el cual es definido y ejecutado por el sujeto que cumple el rol de guía y su interacción con el estudiante, este proporciona las bases mediante las cuales el sujeto que aprende construye su conocimiento. En el entorno digital, dicho territorio también tiene lugar y se caracteriza por ser abierto; el estudiante ya no es guiado por nadie, sino que es el medio el que interviene entre el estudiante y el conocimiento. En este nuevo territorio, las conexiones se efectúan sin límite y libremente.

En tercer lugar, los autores tienen en cuenta la idea bajo la cual disminuye el apoyo por parte del sujeto que cumple el rol de guía. Dado que en el contexto en el que interviene la tecnología digital, el guía es sustituido por el entorno digital, los autores establecen que no sería coherente que el entorno digital desapareciera total ni parcialmente. Esta idea es sustituida por la conexión que realiza el estudiante con otros significados o sistemas de representación, de modo que se puedan evidenciar las conexiones y el conocimiento construido debido al entorno digital.

Los asuntos descritos con anterioridad conforman la idea de *red* basada en la teoría de andamios. Dicha *red* se conforma por las conexiones que establece un estudiante con su conocimiento previo, el conocimiento que construye interactuando con el entorno y el conocimiento formal; esto mediante el apoyo que brinda la tecnología digital como sustituto del guía. Debido al carácter abierto del *territorio de aprendizaje* dado por el entorno digital, el estudiante lleva a cabo conexiones de forma libre e ilimitada y esto conlleva a que establezca otros sistemas de notación y significados (Jaimes y Quiroga, 2020). De este modo, Noss y Hoyles, (1996) establecen que la idea de *red* es uno de los pilares esenciales en la construcción del significado matemático, permitiendo el desarrollo de la *abstracción situada* debido a que las formas en cómo el estudiante interactúa con el medio, determinan un sistema de soporte para su aprendizaje.

Por su parte Jaimes y Quiroga (2020), muestran la *abstracción situada* como la combinación entre la *abstracción* y la *cognición situada*. La primera se refiere a un proceso de descontextualización en el que un objeto matemático cumple con ciertas características construidas independientemente del contexto en el que se elaboró (Hershkowitz et al., 2001; Jaimes y Quiroga, 2020). La segunda, describe que el conocimiento es situado, esto significa que es resultado de la actividad, contexto y cultura en la que se desarrolla y utiliza, por lo tanto, lo que el estudiante puede aprender depende de las acciones efectuadas en el entorno en el que se encuentre.

En consecuencia, la *abstracción situada* posibilita describir la manera en cómo los estudiantes construyen nociones matemáticas mediante las acciones que realizan en un entorno especifico; este determina la forma de las nociones y su expresión (Noss y Hoyles, 1996). La *abstracción situada* también puede entenderse como una forma de jerarquizar significados a partir de las acciones realizadas por un estudiante en el entorno digital, pues dichas acciones posibilitan, por un lado, describir cómo las transformaciones de sus conocimientos previos en conocimientos más avanzados y, por otro lado, proveen de sentido a las relaciones que establece el estudiante entre los objetos del medio, sus intervenciones y el conocimiento formal. Por lo tanto, las acciones de cada estudiante, las herramientas del entorno que emplea, sus ideas previas y los componentes del objeto matemático en cuestión se interconectan y le permiten establecer relaciones de manera formal. Lo anterior refleja una complementariedad entre la *red* y la *abstracción situada*, la cual se manifiesta en la construcción final de su conocimiento (Jaimes y Quiroga, 2020).

Por otra parte, una de las finalidades de emplear este marco de referencia es analizar las interacciones que realiza un estudiante al resolver tareas del LVM; no obstante, dicho marco no provee indicadores que permitan llevar a cabo dicho análisis. Esta es una limitante del marco que también identificaron Jaimes y Quiroga (2020), quienes proponen un conjunto de indicadores que permiten analizar la interacción de un estudiante con un entorno tecnológico mientras desarrolla una tarea. Para ello tuvieron en cuenta unos indicadores para la noción de *red* y otros para la de *abstracción situada*, estos indicadores se ven relacionados en la Tabla 6

Indicadores de Abstracción Situada Tomado y adaptado de Jaimes y Quiroga (2020, p. 35). De forma horizontal se encuentran las conexiones que conforman la *red* y de forma vertical se muestran los tipos de relaciones establecidas en el entorno (*abstracción situada*). Cabe señalar que para los fines del presente trabajo, cuando en la Tabla 6 se habla del entorno digital GeoGebra (GGB), nosotros haremos alusión al LVM.

Tabla 6

Indicadores de Abstracción Situada Tomado y adaptado de Jaimes y Quiroga (2020, p. 35)

	Formalización de ideas				
Acciones sobre el medio	**Sin conexiones (0)**	**Conexiones nulas (1)**	**Conexiones mediales (2)**	**Conexiones amplias (3)**	**Conexiones formales (4)**
(Z)	**(Z0)** No hay interacción con el recurso del entorno virtual.	**(Z1)** No establece relaciones entre objetos matemáticos	**(Z2)** Establece relaciones entre objetos matemáticos	**(Z3)** Modifica relaciones matemáticas previas	**(Z4)** Formula relaciones matemáticas de manera formal.
Nula (A)	**(A0)** No hay interacción con el entorno virtual.	**(A1)** Hace uso de los elementos interactivos del laboratorio, pero no establece relaciones entre ellos.	**(A2)** Usa las herramientas que ofrece el laboratorio, pero no establece relaciones entre estas. Sin embargo, establece relaciones entre los objetos de la situación.	**(A3)** Usa las herramientas que ofrece el laboratorio, sin establecer relaciones formales entre ellas, pero logra modificar o conectar variables de la situación.	**(A4)** Usa las herramientas del entorno sin establecer relaciones explícitas entre ellas, pero logra establecer relaciones matemáticas cercanas a las formales.
Descubrimiento (B)	**(B0)** A través de la manipulación de variables, se observan efectos, pero sin establecer relaciones.	**(B1)** Establece relaciones entre los elementos visuales o variables del entorno, sin llegar a relacionarlos con ideas matemáticas.	**(B2)** Las relaciones observadas en el laboratorio permiten al estudiante modificar ideas previas o vincular variables, aunque sin formalización.	**(B3)** Las ideas previas del estudiante se transforman por las relaciones establecidas en el entorno virtual.	**(B4)** El estudiante formula ideas matemáticas cercanas a las formales a partir de la manipulación y observación de variables.
Propositiva (C)	**(C0)** Manipula variables o elementos, pero sin propósito definido o sin construir sentido.	**(C1)** Manipula las variables, reconoce relaciones entre ellas, pero no llega a interpretar los resultados en términos matemáticos.	**(C2)** Establece relaciones entre las variables y propone conjeturas a partir de sus manipulaciones.	**(C3)** Modifica sus ideas previas al proponer explicaciones o conjeturas sustentadas en las interacciones con el entorno.	**(C4)** Expresa ideas formales relacionadas con las construcciones y manipulaciones realizadas en el entorno.
Fundamentada (D)	**(D0)** Manipula las variables sin darles un significado matemático.	**(D1)** Reconoce relaciones entre elementos del entorno, pero sin articularlas con conceptos matemáticos.	**(D2)** Relaciona herramientas y variables con situaciones matemáticas que reconoce en el recurso.	**(D3)** Es capaz de modificar sus ideas y reconocer patrones o regularidades gracias al entorno y a sus experiencias previas.	**(D4)** Reconoce el potencial del entorno para formular y justificar relaciones matemáticas formales.
Creación de significados (relación dialéctica entre acciones y formalización)					

2.3. Laboratorio de Matemáticas

A lo largo de la historia, el concepto de laboratorio de matemáticas se ha constituido a partir de diferentes enfoques tanto pedagógicos como filosóficos. Ha pasado por una constante evolución dado que ha sido producto del ‘cruce’ de innovaciones asociadas a la enseñanza de las matemáticas, a la manipulación de materiales didácticos y al reconocimiento de la importancia de la experimentación en el proceso de aprendizaje.

Desde el siglo XVII matemáticos como René Descartes y Blas Pascal hicieron alusión, precisamente, a la importancia de incorporar la experimentación en el aprendizaje de las matemáticas. Ellos intentaban relacionar lo abstracto del conocimiento con los fenómenos físicos. Por otro lado, Johann Heinrich Pestalozzi se enfocaba en la relevancia de la manipulación de materiales para el desarrollo del aprendizaje en los infantes. El trabajo de estos referentes permitiría, más adelante, la consolidación de un enfoque experimental en la educación.

Dos siglos más adelante, Friedrich Fröbel, pedagogo alemán y creador del *Kindergarten*, y Pestalozzi revolucionaron la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para las infancias, promoviendo el uso de materiales manipulativos. Fröbel desarrolló un plan de estudios basados en dones (materiales manipulativos), promoviendo el aprendizaje del conteo, la medición, la comparación, el color y el contraste. Durante ese mismo siglo, la educación pasaba por una crisis en cuanto a la concepción tanto de enseñanza como de aprendizaje, y desde Europa, mayoritariamente, surgieron fuertes críticas hacia el modelo pedagógico predominante: el modelo pedagógico tradicional.

En respuesta a la necesidad subyacente a estas críticas (de cambio en la concepción del cómo se aprende) surgió el concepto de Escuela Nueva para hacer referencia a características importantes del aprendizaje que la pedagogía tradicional no consideraba: la libertad y la autonomía del niño, la experimentación y el descubrimiento. Así las cosas, la

Escuela Nueva no se entiende como un nuevo tipo de metodología, sino más bien como un sistema de principios que se contraponen a la pedagogía tradicional (Narváez, 2006). Lo anterior haría que, años más adelante, se diera lugar a otro tipo de relación entre el maestro y sus estudiantes, un cambio en el centro del proceso educativo y sus finalidades, así como nuevos currículos basados en estas ideas, que modificaban severamente los contenidos.

En el siglo XX, John Dewey influenció el enfoque experimental en Europa y Estados Unidos a partir de su teoría «aprendizaje por experiencia», la cual se caracterizó por la premisa de que el aprendizaje debería ser activo y experimental. Algunas características del enfoque experimental propuesto por Dewey se muestran a continuación:

- Que el estudiante debe tener una situación de experiencia auténtica, lo que implica que exista una actividad continua en la que esté interesado.
- Que haya problemas auténticos como estímulo para el pensamiento.
- Que sea el estudiante quien tenga la información y haga las observaciones para tratarla.
- Que el estudiante tenga la oportunidad de comprobar sus ideas aplicándolas a otras situaciones para descubrir su validez.

Respecto a las matemáticas, de acuerdo con las reformas realizadas a los currículos internacionales y a las tendencias del momento, se observó la necesidad de hacer la matemática accesible y comprensible para todos. Diferentes autores como Kilpatrick, (1981), Freudenthal (1973), o Brousseau (1986) aludieron a la importancia de relacionar la experimentación y la manipulación, para conseguir el aprendizaje. Fue así como el movimiento de la nueva matemática impulsó la experimentación y la introducción de laboratorios con más fuerza, aunque esto ya se venía dando desde al menos 1906 (Maschietto y Trouche, 2010).

En ese orden de ideas, la UMI-CIIM[15] (2004; citado por Grueso y Valencia, 2019) define el LM como «un conjunto estructurado de actividades que tienen como objetivo construir significados para los objetos matemáticos» (p. 11). Por otra parte, para Pabón et al. (2011) el LM es «una estrategia pedagógica de utilización de materiales, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de uso de variados materiales» (p. 192), mientras que Juez (2018) afirma que el LM «es un espacio diferencio e informal, dentro de la escuela, donde se trabaja de manera constructiva. Un lugar, donde se puedan construir conocimientos a través de la propia actividad, tanto a nivel individual como grupal» (p. 21).Así mismo, García et al. (2013) mencionan que el LM

> es un espacio en que los profesores y estudiantes conjuntan sus ideas y esfuerzos para reflexionar y construir la matemática, con el análisis de diversos materiales manipulables, impresos y virtuales; a través de la reflexión personal para elaborar conjeturas, la interacción colectiva para formular planteamientos de solución de problemas, la confrontación de saberes para la validación de los conocimientos elaborados. (p. 36)

Finalmente, Martínez et al. (2017) describen al LM como un espacio donde el alumnado tiene disponible material para experimentar, partiendo siempre de un ambiente de resolución de problemas.

---

[15] Unión Matemática Italiana-Comisión Italiana para la Enseñanza de las Matemáticas

En las concepciones proporcionadas con anterioridad, es posible evidenciar algunos aspectos que son constitutivos de un LM, es por ello que analizamos estas definiciones. De este modo, la definición dada por la UMI-CIIM (2004; citado por Grueso y Valencia, 2019) afirma que el laboratorio de matemáticas es un conjunto estructurado de actividades que tienen una finalidad especifica: construir significados matemáticos a partir de la experimentación. En este momento es importante considerar que, para los autores, las actividades de un LM tienen un objetivo trasversal cada una, la construcción de significados, es decir que dichas tareas deben estar diseñadas de manera tal que permitan la consecución de este objetivo por medio de la interacción social y con los recursos y la experimentación.

En la misma línea Pabón et al. (2011) mencionan que el LM es, también, un conjunto de actividades, pero añaden que estas son desarrolladas autónomamente por los participantes del laboratorio. Los mismos autores mencionan que el fin último del LM es *hacer matemáticas* y que este también contribuye a la construcción de pensamiento matemático. Otras definiciones como la de Juez (2018), García et al. (2013) o Martínez et al. (2017), se refieren principalmente al LM como un espacio físico, un lugar en el que se desarrollan algunas actividades con unos fines específicos. En la Tabla *7*, se organiza la información de manera tal que se visualizan las similitudes y diferencias en cada definición y los aspectos que son constitutivos para un LM. En esta tabla se muestra el referente, se sintetiza la definición propuesta, además de los objetivos, los aspectos constitutivos de forma explícita y algunas características clave.

Tabla 7
Análisis de definiciones de Laboratorio de Matemáticas

Referente	Definición sintetizada	Objetivos	Aspectos constitutivos
UMI-CIIM (2004)	Conjunto estructurado de actividades	Construir significados de los objetos matemáticos	Conjunto de actividades Construcción se significados Recursos
Pabón et al. (2011)	Estrategia que consiste en un conjunto de actividades para ser resueltas con diferentes materiales	Hacer matemáticas Construir pensamiento matemático	Conjunto de actividades Recursos Interacción social
Juez (2018)	Lugar para construir conocimientos con materiales manipulativos	Construcción de conocimientos	Recursos Experimentación Interacción social
García et al. (2013)	Espacio de reflexión entre profesores y estudiantes dotado de diversos materiales	Hacer matemáticas	Recursos Experimentación Interacción social
Martínez et al. (2017)	Espacio para experimentar y solucionar problemas con acceso a materiales	Proporcionar un espacio para la experimentación y la colaboración	Experimentación Conjunto de tareas Interacción social Recursos

En la información presentada en la Tabla *7*, es posible observar que hay cinco aspectos en común en las definiciones analizadas que son interpretados como los elementos constitutivos de un LM: conjunto de tareas, recursos, interacción social, experimentación y construcción de significados. De este modo, entendemos que un LM es un conjunto de actividades que tienen tiene como propósito la construcción de los significados de los objetos matemáticos, a través de la experimentación con recursos didácticos. Dado que en la definición que enunciamos de LM se alude a los «recursos didácticos», a continuación, se procede a comentar qué se entiende por tales recursos.

2.3.1. Recursos Didácticos

Como se mencionó antes, el estudio sobre el uso de materiales didácticos tangibles o digitales ha sido una tendencia investigativa en el campo de la Educación Matemática. Con el paso del tiempo se ha consolidado y reafirmado la importancia de la manipulación de diferentes recursos en la educación infantil, primaria y secundaria. Para abordar este aspecto, en el marco de la definición construida con anterioridad, se aludirá principalmente a la génesis instrumental dado que esta tiene relación directa con aquello que denominamos los recursos didácticos del LM.

La génesis instrumental es un constructo del enfoque instrumental[16] elaborado por Rabardel (1995), que es utilizado para caracterizar el proceso mediante el cual los seres humanos interactúan con objetos cotidianos o *artefactos*[17] que dotan de significados para resolver tareas. Usar artefactos en la solución de una tarea permite que el ser humano le asigne funciones y, con ello, desarrolle formas de uso personal de manera que esos artefactos se vuelven parte de la práctica cotidiana, lo que facilita no solo el desarrollo de la tarea, sino también la adaptación del ser humano a su entorno.

De este modo, al asignar determinadas funciones a un artefacto este se transforma en un *instrumento.* Estas funciones, según Rabardel (1995), son entendidas como esquemas de uso, producidos por la construcción propia o por la apropiación de esquemas de uso sociales ya existentes. De este modo, «un instrumento no está dado, sino que se construye en la acción, cuando se realizan tareas» (Carranza et al, 2019, p. 112).

---

[16] Abordar la relación entre el ser humano y los objetos técnicos al momento de realizar una determinada tarea.
[17] Objeto material o abstracto ya producido por el ser humano.

Convertir un artefacto en un instrumento, requiere, según Rabardel (1995), de dos procesos que son el resultado de la interacción del ser humano y el artefacto. El primero de ellos, la *instrumentalización,* está destinado a identificar en el artefacto sus componentes y determinar en él las limitaciones y potencialidades al momento de realizar una tarea, lo cual implica que el ser humano, primeramente, descubra y seleccione en el artefacto atributos relevantes, que enseguida lo personalice de acuerdo con rasgos característicos personales y que, finalmente, lo transforme. El segundo proceso es la *instrumentación* que consiste en el proceso mediante el cual se hacen presentes los esquemas de uso que el ser humano integra al artefacto para la solución de una tarea. En síntesis, durante este proceso, el ser humano asigna al artefacto un esquema de uso y este –el artefacto– se desliga de su utilidad convencional ya existente y es usado de acuerdo con las necesidades del ser humano.

En el contexto del LM la génesis instrumental toma un papel de vital importancia toda vez que los recursos allí usados, son vistos como artefactos que potencialmente se convertirán en instrumentos luego de que el estudiante asocie a este un esquema de uso para solucionar una actividad de laboratorio.

2.3.2. Interacción social y construcción de los significados

La concepción que proponemos sobre LM muestra una posición distante a aquellas perspectivas en la que se entienden las matemáticas como objetos independientes del sujeto que cumplen con relaciones verdaderas e inmutables, pues esta percepción no admite lugar a ningún tipo de actividad en la que intervenga la interacción con la realidad material ni social y marca una ruptura entre lo científico y lo humanístico (Pabón et al., 2011).

Desde dicha perspectiva, las matemáticas se encuentran ligadas a situaciones y problemas reales en las que cabe la posibilidad de integrar otras disciplinas (*e. g.,* la física, la astronomía o la economía). Esta visión, de acuerdo con Pabón et al. (2011), repercute directamente en las formas de interacción de los elementos que conforman la triada didáctica, es decir, el estudiante, el profesor y el conocimiento; esto debido a que ninguno de ellos se impone sobre el otro. Esto quiere decir que el conocimiento y el profesor no cumplen el rol de ser autoridades absolutas para el estudiante, en su lugar, representan un papel orientador y facilitador que incentiva y posibilita la construcción del conocimiento matemático.

Por su parte, los estudiantes participan activamente en la construcción de su propio conocimiento a partir de las contribuciones en el proceso de negociación de significados, transformación de conceptos y desarrollo de procesos matemáticos; la discusión y planteamiento de problemas; la comunicación de ideas matemáticas y el análisis crítico de estas; la elaboración de argumentos que muestren su posición a favor o en contra de otras ideas; la generación de estrategias o caminos que conduzcan a la solución de situaciones problema. Estas acciones se llevan a cabo en el marco de la *instrumentalización* de aquellos artefactos que conforman el LM.

Adicionalmente, en términos de la construcción de los significados matemáticos es preciso aludir que estos significados se construyen mediante la conformación de signos, entendidos como entidades que engloban las experiencias del sujeto, pertenecen a su cultura y lo trascienden; los signos son entidades que representan algo para alguien (Camargo et al., 2011). En el LM los signos son resultado del uso y las acciones que se llevan a cabo con ciertos artefactos y son de gran importancia debido a que, como lo mencionan Camargo et al. (2011), cuando estos toman una forma de representación externa, es posible socializarlos con otros y transformarse en signos matemáticos pertenecientes a la teoría aceptada por una comunidad. Conforme a lo anterior, cuando un estudiante se enfrenta a una situación problema, en el ámbito de las matemáticas, Mariotti (2009) establece que es posible que él genere tres tipos de signos: del artefacto, matemáticos y pivote. Enseguida profundizaremos en cada uno de ellos.

Signos del artefacto: estos signos surgen de actividad que ejerce el estudiante con el artefacto, es decir, son signos que se relacionan directamente con las acciones que el estudiante efectúa sobre él. Bajo estos signos, el estudiante construye significados matemáticos a partir de las configuraciones realizadas en un contexto especifico, el cual influye directamente con las ideas expresadas por los estudiantes. A pesar de que el uso de un artefacto, en pro de la solución de una situación problema, no garantice que surjan significados compartidos, es seguro que la experiencia común brinda posibilidades de negociación para determinar significados compartidos en la comunidad establecida.

Signos matemáticos: estos signos se relacionan con los significados matemáticos compartidos en la comunidad y se expresan bajo las normas y estándares establecidos allí, hacen parte de la herencia cultural y conforman la meta que se quiere alcanzar por parte del profesor.

Signos pivote: estos signos se producen debido a un proceso complejo que dirige el profesor en el que relaciona los signos del artefacto con los signos matemáticos, estos dan lugar a que el estudiante construya signos mediante su experiencia con el artefacto y con el dominio matemático. Estos signos se caracterizan por su polisemia pues se pueden relacionar con la actividad hecha con el artefacto o al lenguaje natural y al dominio matemático.

La construcción de significados en el LM es un proceso en el que los estudiantes, en primer lugar, construyen signos de carácter individual y subjetivo gracias a los esquemas de uso que realiza con el artefacto, esto signos pueden ser cualquiera de los tres tipos ya mencionados y, en segundo lugar, con la guía o mediación del profesor y la socialización de los hallazgos y signos elaborados por parte de los estudiantes, se genera una negociación en la cual los participantes del LM o comunidad, establecen acuerdos sobre lo que se adoptará como significado matemático.

2.3.3. Experimentación

En el campo de la Educación Matemática el concepto de la experimentación se ha considerado relevante desde alrededor de los años 60, cuando se reconoció la importancia de las experiencias provenientes de la relación entre los conocimientos matemáticos y el entorno (Pérez et al., 2019). Sin embargo, afirman Pabón et al. (2011) , que a pesar de los avances teóricos sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ha sido difícil problematizar desde una perspectiva didáctica lo referido a la naturaleza experimental de dichos procesos. Los mismos autores confirman que a raíz de esto se han generado propuestas como la del LM, que buscan contemplar la *dimensión experimental* en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Cuando se habla de la dimensión experimental, se alude particularmente a aquellos métodos o enfoques que favorecen el aprendizaje activo y exploratorio en aula de clase. Esta dimensión difiere de los métodos tradicionales que se enfocan en la transmisión del conocimiento, en la memorización y en la replicación de algoritmos, pues da un giro al rol que el estudiante desempeña en el aula, siendo este más activo ya que pretende involucrarlo de manera práctica con los objetos matemáticos abstractos, de manera tal que sean ellos mismos quienes los descubran y los validen a través de la experimentación.

De este modo, la experimentación tiene como objetivo desarrollar la capacidad para observar, fortalecer conocimientos, actitudes y habilidades (Cázares, 2014), en el marco de actividades sociales en las que se propone el aprendizaje (Pabón et al., 2011). Así, se reconoce que los contextos significativos y reales juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, pues es en los retos que advierten las situaciones contextualizadas, donde reposa la consecución de las capacidades antes mencionadas.

El trabajo experimental en el aula se constituye, entonces, en la manipulación, los modelos visuales, los esquemas y los diagramas, que pueden ser usados para la institucionalización de los conocimientos que intuitivamente los estudiantes emplean en el marco de la solución de una tarea. No obstante, esto no sería posible si los estudiantes no pueden simular experiencias parecidas las realizadas por los matemáticos que investigan (Pabón et al., 2011). De este modo, experimentar en el aula de clase conlleva el uso de recursos manipulativos, actividades de caracteres abierto y desafiante que tengan múltiples vías de solución e interacción social.

Ahora bien, en el contexto de educación colombiana, el MEN (1998) sostiene que la experimentación puede entenderse de dos formas: la primera se refiere a la experimentación como una actividad científica que busca verificar o refutar teorías y la segunda se refiere a esta como una actividad que permite la construcción del conocimiento científico. En el marco del LM, se asume la segunda forma como principal, dado que los LM deben propender por la construcción de los conocimientos más allá de la verificación acerca de la veracidad de una teoría. Esto no implica necesariamente, que los LM no consideren la primera forma (Pabón et al., 2011), sino que la segunda se prioriza por sobre esta.

2.3.4. Conjunto de Actividades

En un LM, un conjunto de actividades es específicamente, una colección, banco o compilación de *tareas de laboratorio.* Aunque en la literatura especializada sobre el LM no hay una caracterización universal al respecto de este tipo de actividades, es claro que, para efectos del presente trabajo, se deben precisar con detalle los asuntos que deben tenerse en cuenta al momento de diseñar una actividad de laboratorio, toda vez que estas actividades tienen como eje transversal a la experimentación. Por esta razón, en los siguientes párrafos se hará referencia a aquellos aspectos clave que son fundamentales para diseñar una actividad de laboratorio.

Lo primero es tener conciencia de que las actividades de laboratorio, por la misma concepción de LM abordada en este trabajo, tienen como eje transversal a los recursos y a la experimentación y, en consecuencia, la relación entre actividades y materiales manipulativos crea un ambiente para «hacer matemáticas» (Arce, 2004).

Al respecto de las actividades de laboratorio, Pabón et al. (2011) afirman que estas tienen un objetivo y deben estar encaminadas hacia el favorecimiento de los procesos de experimentación e indagación. Así mismo, los autores mencionan que estas actividades se caracterizan por:

- Ofrecer un atractivo a los participantes del Laboratorio, para que puedan integrarlas fácilmente en su mundo y buscarles solución o explicación.
- Generar la posibilidad de provocar el desarrollo de razonamientos propios y creativos.
- Tener un carácter marcadamente abierto para poder acoger distintos caminos de solución, que puedan plantear los distintos participantes.
- Propiciar la oportunidad de expresar de distintas formas las vías de solución y de explicación, utilizando quizás distintos lenguajes.
- Dar la posibilidad de trabajar con distintos tipos de materiales, no únicamente con papel y lápiz.

En este sentido, la información proporcionada por Pabón et al. (2011) se corresponde con lo mencionado por Arce (2004), quien manifiesta que las actividades de laboratorio tienen un carácter experimental, recreativo y lúdico y se desarrollan mediante el uso de materiales manipulativos. Luego, las actividades que han de proponerse en el laboratorio deben también permitir que el estudiante asuma una actitud de investigación, resuelva y formule problemas, experimente y asuma procesos de colaboración y socialización.

Por otro lado, desde la perspectiva de Arce (2004), respecto de la relación entre materiales y actividades, Pabón et al. (2011) señalan unos momentos específicos que caracterizan el aprendizaje dado por dicha relación, que constituyen una actividad de laboratorio. El primero de ellos alude a la recolección de datos, el segundo al descubrimiento de relaciones, el tercero a la discusión de las ideas, el cuarto al planteamiento de conjeturas y el quinto a comprobación o verificación de lo hallado.

A partir de haber precisado los diferentes elementos que configuran la idea de LM, a continuación, se caracteriza el concepto de LVM.

2.4. Laboratorio Virtual de Matemáticas

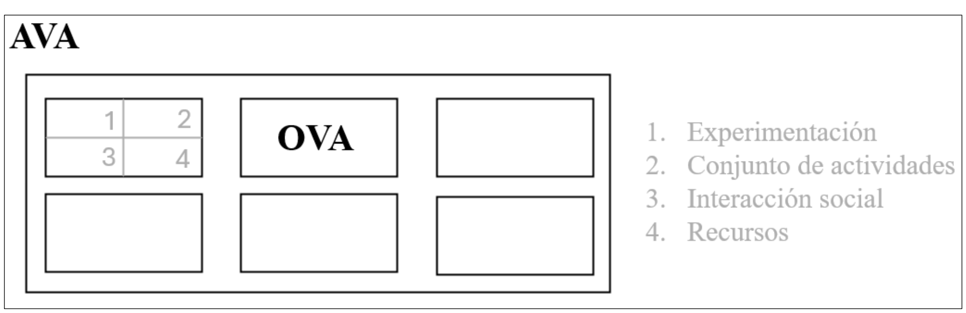
En un mundo que cada vez se digitaliza más, las TIC y otras herramientas tecnológicas han evolucionado de tal forma que, en el campo de la educación, se han incluido nuevas metodologías centradas en el potencial reconocido por los investigadores en educación, de la tecnología a la cual tienen acceso una gran parte de los estudiantes. Es así como, a partir de estas tendencias, surgen los LVM con el fin de promover el aprendizaje y dar a los estudiantes la oportunidad de explorar, interactuar y experimentar a través de simulaciones, softwares, aplicaciones y otras herramientas digitales. Para Biñán (2015) un LVM es un simulador interactivo de objetos de estudio matemáticos. Por otro lado, Infante (2014) define el LVM como un espacio electrónico de trabajo concebido para la colaboración y la experimentación a distancia con objeto de investigar o realizar otras actividades creativas, y elaborar y difundir resultados mediante las TIC.

Al comparar grosso modo estas concepciones con las del LM, es posible determinar algunas diferencias que radican particularmente, en la naturaleza del LM. Es por ello por lo que el propósito de este capítulo es establecer una concepción de LVM, que tenga en cuenta la naturaleza del LM, así mismo se mencionarán aspectos relevantes sobre el funcionamiento del LVM.

Inicialmente, cabe aclarar que aplicaciones o software diseñado con fines educativos (*e. g.*, Geogebra, simulador PhET) no se consideran por sí mismos como LVM. La razón principal de esto radica en que el adjetivo *virtual* que se agrega al LM parece hacer referencia a dos asuntos completamente distintos: el primero es a un LM mediado por tecnologías, en particular digitales, y la segunda, a un LM que integra el uso tecnologías en general. Un software por sí mismo no posee los elementos que caracterizan un LM porque generalmente están diseñados para hacer representaciones de objetos matemáticos, simulaciones a las que se les puede asignar cualquier contexto o exploraciones centradas solamente en el contexto matemático. Estos tienen más sentido para un LM, cuando son considerados como recursos, porque son ellos quienes permitirán la construcción del conocimiento matemático a partir de su manipulación.

De este modo, aquello que se denomine como LVM debe asegurar tanto la presencia de los componentes esenciales del LM (recursos didácticos, interacción social y construcción de significados, experimentación y conjunto de actividades), como su integración y operación coordinada entre ellos, para garantizar un adecuado funcionamiento. Es por ello que un LVM es un LM mediado por tecnologías digitales en el que debe existir una expresión de sus componentes esenciales. En términos más específicos y relacionados con la pedagogía y la tecnología digital, un LVM es un Ambiente Virtual de Aprendizaje constituido por Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) caracterizados según los elementos constitutivos de un LM. De esta manera, se muestra en la Figura 8, nuestra propuesta para la definición de LVM.

Figura 8
Representación de la definición del LVM



A continuación, se detallan los fundamentos de nuestra propuesta explicitando las relaciones entre LVM y LM y sus elementos constitutivos. Por esta razón, se profundizará en los conceptos de AVA y OVA, pues estos son los pilares que sostienen, desde nuestra perspectiva, a un LVM.

2.4.1. Ambiente Virtual de Aprendizaje - AVA

El término AVA se empezó a emplear a mediados de los años 90, debido al incremento del uso de la Internet y de las TD en la educación, pero no fue hasta inicios del siglo XXI que este término empezó a consolidarse con más fuerza, pues diversos expertos en educación desarrollaron investigaciones en las que los AVA hacían presencia (*e. g.*, Castaño y Vásquez 2004; Valencia et al., 2014; o Zurita et al., 2020). Adicionalmente, dada la variedad de perspectivas no existe actualmente una definición única de este término, es así como diferentes autores lo han definido de la manera en que se muestra enseguida.

Por un lado, Perilla (2018) establece que los AVA se constituyen en plataformas mediante las cuales los estudiantes pueden acceder de forma remota desde sus computadores, para encontrar recursos pedagógicos que acompañan el proceso de formación. Parte de estos recursos pueden ser materiales bibliográficos, talleres, actividades de refuerzo, quizzes, retos, entre otras posibilidades. Así mismo, Valencia et al. (2014) señalan la definición propuesta por Dillenbourg et al. (2002) en la que conciben un AVA como un espacio de información digital diseñado para un proceso educativo, en el cual se comunican los actores que intervienen en él de manera efectiva y constante, obedeciendo a unos principios pedagógicos que orientan el desarrollo de las temáticas o procesos establecidos para el aprendizaje. En esta misma línea, Rodríguez y Barragán (2017) entienden AVA como un espacio de comunicación que hace posible la creación de un contexto de enseñanza y aprendizaje en un marco de interacción dinámica, a través de contenidos culturalmente seleccionados y actividades interactivas para realizar de manera individual o colaborativa, utilizando diversas herramientas informáticas soportadas por el medio digital, esto facilita la gestión del conocimiento, la motivación, el interés, el autocontrol, entre otros.

Por otra parte, González y Granera (2021) proponen una definición en compañía de cuatro características: un AVA es un espacio educativo alojado en la web, conformado por un conjunto de herramientas informáticas que posibilitan la interacción didáctica. Un AVA cuanta con cuatro características básicas. En primer lugar, es un ambiente electrónico, no material en el sentido físico, creado y constituido por tecnologías digitales. En segundo lugar, se encuentra alojado en la red y se puede tener acceso remoto a sus contenidos a través de algún tipo de dispositivo con conexión a Internet. En tercer lugar, las aplicaciones o programas informáticos que lo conforman sirven de soporte para las actividades formativas de docentes y alumnos. Por último, la relación didáctica no se produce en ellos de forma presencial, sino mediada por tecnologías digitales. Por ello el AVA permite el desarrollo de acciones educativas sin necesidad de que docentes y alumnos coincidan en el espacio o en el tiempo.

A pesar de que las definiciones mostradas con anterioridad proceden de años y autores diferentes, los asuntos o características a las que refieren muestran puntos con algún nivel de similitud. En consecuencia, evidenciamos cuatro aspectos comunes entre las definiciones mostradas sobre AVA:

- Su implementación se lleva a cabo con apoyo de la TD y permite que su ejecución se logre realizar de manera asincrónica[18].
- Su uso tiene como propósito facilitar u orientar procesos educativos.
- Son espacios que permiten diferentes tipos de interacción: estudiante y docente, estudiante y estudiante, estudiante y medio en el que hacer presencia el conocimiento.
- Ofrecen un conjunto variado de recursos, materiales y actividades que favorece el aprendizaje autónomo, pero también colaborativo y muestra oportunidades de personalización.

Teniendo en cuenta los aspectos comunes anteriormente mencionados sobre AVA y bajo la mirada del LVM como una extensión del LM, consideramos que un AVA es un espacio ubicado en la web diseñado con fines educativos, que cuenta con un conjunto de OVA que permiten el acceso a recursos y materiales (*e. g.,* aplicaciones que dan lugar a las tareas, talleres, actividades, situaciones problema contextualizadas o simulaciones) con los que el estudiante puede interactuar o experimentar y a partir de esto construir significados; en este espacio los participantes pueden interactuar entre sí y acceder a él desde cualquier dispositivo con conexión a internet.

Desde esta perspectiva, nos interesar determinar de qué manera los elementos que constituyen el LM se pueden llevar a cabo en el LVM, esto con el fin de que el uso de TD no resulte en un distanciamiento entre este último y la naturaleza del LM. De este modo, evidenciamos que uno de los elementos que se puede vislumbrar con mayor facilidad, de

[18] Esto no deja de lado la posibilidad de ejecutarla también de manera sincrónica.

acuerdo con la definición de AVA que establecimos, es el que denominamos Interacción Social y Construcción de los Significados (sección 2.3.2). Por un lado, la interacción social ya sea entre estudiante-profesor o estudiante-estudiante puede llevarse a cabo mediante cualquiera de las herramientas que ofrece las TD y esta puede darse de forma sincrónica o asincrónica. Ejemplos de la primera son chats y videoconferencia. De la segunda, pueden ser foros, correos, debates. Cabe señalar que debido al carácter del presente trabajo existe la posibilidad de que no se pueda llevar a cabo esta interacción debido al límite de los tiempos.

Por otra parte, desde la perspectiva de la abstracción situada la construcción de significados se lleva a cabo a partir de las relaciones que se establecen entre las acciones que realiza el estudiante, sus ideas previas, los materiales y recursos del AVA, entendidos también como artefactos, y los componentes del objeto matemático que se muestra allí. En este proceso el estudiante realiza la construcción de significados matemáticos mediante la transformación de sus conocimientos previos en conocimientos más avanzados interactuando con situaciones contextualizadas mostradas en el AVA. Adicionalmente, desde el enfoque de la construcción de significados matemáticos como conformación de signos construidos mediante la interacción del estudiante con los artefactos digitales, es posible establecer que los tipos de signos propuestos por Mariotti (2009) también se pueden generar en el contexto del LVM como se muestra enseguida.

Signos del artefacto: los signos del artefacto provienen de la interacción directa del estudiante con las aplicaciones o simuladores. Cuando el estudiante manipula o experimenta con un recurso digital, generan signos basados en interpretaciones personales y contextualizadas.

Signos matemáticos: los signos matemáticos son aquellos conocimientos formales aceptados y compartidos por una comunidad matemática. En el LVM en estudiante puede construir el conocimiento formal a partir de la visualización y manipulación de diversas representaciones de un objeto matemático en concreto.

2.4.2 Objetos Virtuales de Aprendizaje - OVA

Según Callejas et al. (2011), el MEN establece que un OVA es un «material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo (en este caso para la educación superior) y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través de la Internet» (p. 178). . De manera similar, la perspectiva de Rengifo (2015, p. 121), afirma que una OVA es «un conjunto de recursos digitales, autocontenible y reutilizable, con un propósito educativo y constituido por tres componentes internos: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización». La concepción de Massa y Pesado (2012), integra asuntos que las concepciones anteriores tienen en cuenta, definiendo OVA como una mínima estructura independiente que contiene un objetivo, un contenido, una actividad de aprendizaje, un metadato y un mecanismo de evaluación.

Basados en esta última perspectiva sobre OVA, se adaptará su enfoque frente a la concepción de LVM, ya que la definición proporcionada por los autores permite identificar los elementos constitutivos del LM. Como se mencionó con anterioridad que, bajo nuestra concepción de LVM, los OVA deben garantizar la experimentación, el conjunto de actividades, los recursos y la interacción social, se procederá a continuación a mostrar con detalle cómo una OVA, desde la propuesta de Massa y Pesado (2012), se corresponde con la naturaleza del LM. En primer lugar, los autores confirman que un OVA es un conjunto estructurado conformado por cinco aspectos: (i) un objetivo, (ii) un contenido, (iii) una actividad de aprendizaje, (iv) un metadato y (v) un mecanismo de evaluación. Estos cinco aspectos tienen su respectiva representación en los elementos constitutivos del LM, así: por un lado, el conjunto de actividades puede agrupar los aspectos i, ii, ii dado que estos son inherentes a una actividad de laboratorio, de acuerdo con lo planteado en la sección anterior. Inclusive, el elemento experimentación también está allí involucrado.

A modo de síntesis, en este capítulo se ha establecido nuestra perspectiva sobre el PV y su desarrollo, a partir de la comparación de tres referentes teóricos: los documentos curriculares nacionales vigentes (LC y EBCM), los PSSM del NCTM y la propuesta teórica de Carlson et al (2003) para el razonamiento covariacional. Con base en ello, se formularon indicadores para el desarrollo del PV. Por otro lado, se construyó un marco de referencia marco de referencia para analizar las interacciones que realiza un estudiante al resolver tareas del LVM, con base en la teoría de la abstracción situada y el trabajo realizado por Jaimes y Quiroga (2020) y, finalmente, se estableció la concepción de LVM identificando sus elementos y relación con el LM, así se precisaron los asuntos clave que demarcan su funcionamiento dentro de un AVA y su configuración mediante OVAs. Con esta base conceptual definida, en el siguiente capítulo se representará la metodología de la investigación, evocando el enfoque y los procedimientos empleados para el desarrollo de la misma.

CAPÍTULO 3. MÉTODOLOGÍA

Describimos en este capítulo las bases metodológicas que sustentan nuestra investigación y nos permiten dar respuesta a las interrogantes que la motivan. Teniendo en cuenta lo anterior, fue necesario emplear dos enfoques metodológicos. En primer lugar, se llevó a cabo una revisión documental que permitió consolidar aspectos necesarios para este estudio, los cuales se ven reflejados en una parte considerable del marco teórico y representan una de las bases empleadas para el diseño de las tareas. En segundo lugar, se ejecutó un experimento de enseñanza, el cual sirvió como guía para el diseño de las tareas y el correspondiente análisis de resultados. Estas dos estrategias serán detalladas más adelante.

Para efectos de este trabajo, se entenderá como metodología de investigación, la perspectiva asumida por Sampieri et al. (2016), en la cual se refieren a esta como un conjunto de procesos, técnicas y estrategias utilizadas para llevar a cabo ciertas acciones que permitan el alcance de objetivos específicos. De la misma manera, Camargo (2019) coincide con esta idea y profundiza en que la metodología está relacionada con el problema a investigar, con la pregunta problema que dinamiza el estudio, con el marco de referencia conceptual y con las estrategias investigativas que son usadas con el objetivo de recolectar información y analizarla.

Dada la naturaleza, la pregunta y los objetivos de la investigación, el enfoque asumido es cualitativo de tipo fenomenológico toda vez que el propósito de esta investigación busca entender cómo las personas perciben y experimentan su entorno (Sampieri, 2010, Punch, 2014; Lichtman, 2013; Morse, 2012;). En palabras más específicas, según Camargo (2019) el enfoque fenomenológico pretende «obtener descripciones, explicaciones e inferencias, fundamentadas y suficientemente significativas de los fenómenos en estudio, que permiten establecer relaciones entre eventos, derivar esclarecimientos útiles y convincentes, hacer hallazgos novedosos» (p. 16). Desde este punto de vista, el enfoque seleccionado se alinea con los objetivos y la pregunta de investigación que subyacen del estudio, porque será a partir de tales descripciones detalladas sobre las experiencias de los estudiantes al interactuar con la plataforma, las que facilitarán la comprensión de la manera en la que los estudiantes desarrollan el PV mediante el uso de la plataforma.

En consonancia con lo anterior, la aproximación metodológica adoptada es la interpretativa o hermenéutica. Como lo menciona Camargo (2021), el principal propósito de esta aproximación es «rastrear, sin juzgar, las diversas "capas" de significado que subyacen a las acciones, las interacciones y los discursos de las personas vistos como signos» (p. 18). En dicha aproximación, el investigador está interesado en estudiar los significados construidos por los agentes educativos (profesores, estudiantes u otros), sobre los objetos y procesos propios de las matemáticas (Camargo, 2021). Dicha aproximación es adecuada puesto que, el principal objetivo del LVM, es aportar a la construcción de significados matemáticos. Por ello, la aproximación interpretativa, bajo un enfoque interaccionista, es decir, que refiere a la interpretación de grupos de acciones e interacciones con un interés particular (solucionar una tarea), permitirá alcanzar los objetivos de la investigación, siempre que proporciona herramientas para comprender y abordar los resultados obtenidos en la interacción de los estudiantes con el laboratorio virtual.

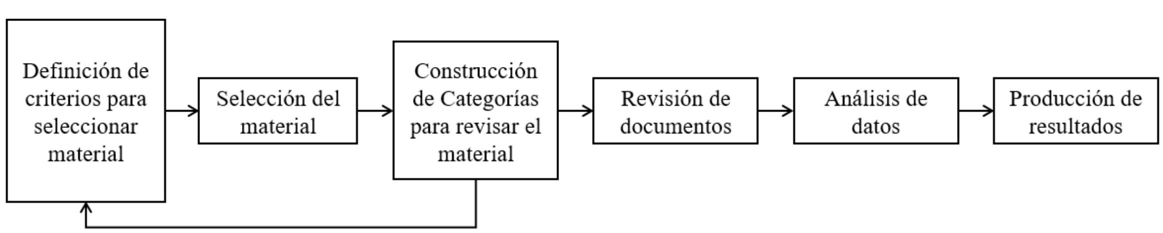
3.1. Revisión Documental

La revisión documental es un proceso sistemático de indagación, recolección, organización, análisis e interpretación de información en torno a un determinado tema, que tiene como meta principal la producción de conceptualizaciones, clasificaciones y enfoques que se reflejen en los materiales escritos revisados (Camargo, 2021).

Teniendo en cuenta que nuestro campo de estudio de la educación matemática está en constante desarrollo y es relativamente nuevo, no hay una cantidad significativa de investigaciones previas sobre los LVM y tampoco hay un consenso en la comunidad de investigadores en Educación Matemática al respecto de la concepción de LM. Una revisión documental permite, en primer lugar, identificar teorías, enfoques pedagógicos, metodologías previas que funjan como referente para la generación de un constructo teórico robusto sobre el LVM, estipulando una ruta que garantice la elaboración de una plataforma con base en los enfoques pedagógicos asociados al LVM.

En este orden de ideas, adoptamos el plan de ejecución propuesto por Camargo (2021) para la estrategia investigativa de revisión documental. A continuación, presentamos el esquema diseñado por la autora y mencionamos los detalles de cada una de las etapas allí propuestas (ver Figura 9):

Figura 9
Plan de ejecución de la estrategia de revisión documental modificado Camargo (2021)



Etapa 1: Definición de criterios para seleccionar el material.

Se establecieron cuatro criterios para asegurar que los materiales seleccionados sean relevantes, actuales y estén alineados con los enfoques contemporáneos en la educación matemática. El primero de ellos es el criterio de relevancia, que requiere que el material sea pertinente y esté relacionado directamente con los objetivos de la investigación, además debe proporcionar explícita o implícitamente la concepción de LM o LVM. El segundo criterio, la adecuación al contexto, que indica que el material debe estar relacionado exclusivamente con los niveles de la educación escolar. El tercer criterio es la calidad, lo que significa el material debe ser preciso, actualizado y provenir de fuentes confiables. El cuarto criterio es la temporalidad, que prioriza materiales publicados a partir del año 2000[19] para incorporar investigaciones, teorías y metodologías que vislumbren los más recientes avances.

Etapa 2: Selección del material.

En esta etapa se seleccionó el material teniendo en cuenta los criterios previamente mencionados. La búsqueda de los documentos se realizó en las bases de datos académicas Google Scholar, SciELO y ERIC; en los repositorios de la Universidad Pedagógica Nacional y de la Universidad del Valle y en la Organizaciones Internacional de la UNESCO. Las palabras claves utilizadas para la búsqueda fueron “Laboratorio de matemáticas”, “Laboratorio Virtual de Matemáticas”, “*Math Lab*”, “*Mathemathics Laboratory*”, “*Virtual Math Lab*”. La selección de cada material implicó una primera revisión global de los documentos para garantizar la existencia de los tres criterios señalados.

[19]En un primer momento consideramos en el criterio de Temporalidad materiales publicados después del año 2015, pero debido a que no hay literatura exhaustiva sobre el LM y el LVM, se tomó la decisión de modificar el periodo de tiempo para obtener más resultados, de manera que se pudiera enriquecer el análisis.

Etapa 3: Construcción de categorías para revisar el material:

Para guiar la revisión documental, se crearon dos categorías principales: Concepciones sobre el LM o LVM y Elementos constitutivos del LM o LVM. La primera se refiere a cómo los autores conciben el LM o LVM, sus propósitos y aspectos pedagógicos. La segunda se enfoca en identificar los elementos necesarios para su implementación. Estas categorías facilitarán la organización del análisis y permitirán extraer elementos esenciales para crear un LVM.

De este modo, se construyó un libro en la aplicación de Excel de Microsoft con dos hojas: una llamada LM y la otra LVM. En cada hoja se construyó una tabla similar a la que se muestra a continuación para organizar la información (Tabla 8).

Tabla 8
Organización de la información producto de la revisión documental

LM / LVM	PRIMERA CATEGORÍA			SEGUNDA CATEGORÍA
REFERENTE	CONCEPCIÓN	PROPÓSITOS	ASPECTOS PEDAGÓGICOS	ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

Etapas 4, 5 y 6: Revisión de documentos, Análisis de datos y Producción de resultados.

Durante estas etapas se lleva a cabo un proceso sistemático y riguroso para extraer, organizar y sintetizar la información relevante de los materiales seleccionados. En este sentido, en la *Etapa 4*, se analizaron a profundidad los documentos utilizando las categorías mencionadas para la extracción de los datos, que fueron organizados posteriormente en el libro de Excel y en cada hoja respectivamente. En la *Etapa 5*, se analizó la información organizada y clasificada para identificar patrones, coincidencias y divergencias entre las posturas de los autores, destacando las ideas que contribuyen al desarrollo del constructo teórico. Finalmente, en la *Etapa 6* se presentan los hallazgos obtenidos a partir del análisis previo y se propone un constructo teórico de LVM destacando las contribuciones de los autores revisados (secciones 2.3 y 2.4).

3.2. Experimento de Enseñanza

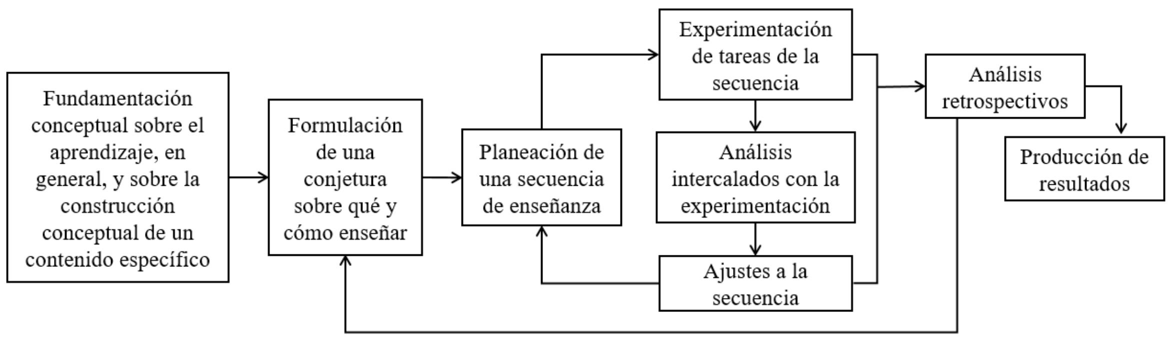
Según Camargo (2021), el experimento de enseñanza es una estrategia investigativa que consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada, con el fin de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico. Un experimento de enseñanza busca determinar si ocurre un desarrollo relevante en contextos enriquecidos mediante el diseño y estudio sistemático de formas y oportunidades de aprendizaje. En el marco de esta investigación los productos derivados de la aplicación de esta estrategia serán: una secuencia de enseñanza implementada, evaluada y mejorada (Anderson; 2007; citado por Camargo, 2010) y las pruebas de existencia al respecto de los efectos deseados.

En un experimento de enseñanza participan diversos sujetos: los investigadores principales, quienes diseñan la secuencia didáctica y recopilan los datos para su análisis; un docente que forma parte del equipo de investigación y se encarga de implementar dicha secuencia; otros investigadores que asisten como observadores sin intervenir directamente en la clase; y los estudiantes del grupo en el que se desarrolla la experiencia, quienes son considerados colaboradores en el proceso investigativo. En el presente estudio, los investigadores principales son los autores quienes se encargan de diseñar, implementar y observar la secuencia de tareas. Los colaboradores del proceso investigativo son 24 estudiantes de grado noveno pertenecientes al Colegio Calasanz Bogotá (CCB).

En este orden de ideas el experimento de enseñanza se propuso para evidenciar, en este caso, el desarrollo del PV en los estudiantes cuando interactúan con la plataforma diseñada a la luz del constructo teórico del LVM. El plan de ejecución llevado a cabo en esta investigación, al igual que en la revisión documental, fue el establecido por Camargo (2021) el cual se muestra en la Figura 10.

Figura 10

Plan de ejecución de la estrategia de experimento de enseñanza Camargo (2021)



En la anterior figura también se vislumbran las fases del experimento de enseñanza propuestos por Cobb y Gravemeijer (2008, en Molina et al., 2011), A continuación, se describen cada una de dichas fases dentro de la investigación.

Fase 1: preparación del experimento

Para esta fase Cobb y Gravemeijer (2008, en Molina et al., 2011) establecen una serie de acciones como, por ejemplo, definir el problema, los objetivos de investigación y realizar una contextualización sobre el lugar y los participantes del estudio, estas dos acciones se ven reflejadas en el primer capítulo en el cual se describe la problemática, se traza el objetivo general junto con los objetivos específicos y se realiza la descripción de la población con la que se llevará a cabo esta investigación. Es preciso mencionar que el experimento se llevó a cabo en las instalaciones del Colegio Calasanz Bogotá (CCB) y la muestra está compuesta por 24 estudiantes pertenecientes al grado noveno; se tuvieron criterios para la inclusión de participantes como la paridad de género con una proporción equilibrada, contar con una matrícula vigente en el CCB y contar con consentimiento informado por padres o representantes legales y del propio estudiante para participar en el trabajo.

En esta fase también se realiza la ubicación del experimento dentro de un contexto teórico más amplio, lo cual se expone con mayor detalle en el capítulo correspondiente al marco teórico, allí se mencionan aspectos relevantes sobre el desarrollo del PV, la conceptualización del LVM y una mirada sobre la abstracción situada.

Las acciones como la selección de estrategias de enseñanza apropiadas para los contenidos propuestos, considerando características de los estudiantes; el diseño justificado de una secuencia de intervenciones y su respectiva distribución temporal; y, el proceso de recopilación de información necesaria para verificar el desarrollo del aprendizaje, son detalladas en la sección del diseño de las tareas. En esta sección, las tareas se enmarcan dentro de la conceptualización del LVM desarrollada en la sección 2.4, en la que se toma como referencia las acciones que, según Pabón et al. (2011), caracterizan las actividades propias de un laboratorio vinculadas con las sugerencias hechas por el MEN (1998, 2004, 2006) para el desarrollo del PV. De este modo, la secuencia de enseñanza se estructuró a partir de dos marcos de referencia. El primero de ellos es el del LVM y el segundo es el del PV. Por un lado, el primer marco proporcionó los aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje que sustentan la metodología de la secuencia de enseñanza y, por el otro, el segundo marco se utilizó para determinar los aspectos curriculares de la misma. Esta fusión permitió consolidar las dos secuencias de tareas.

Fase 2: Experimentación

Teniendo en cuenta que un experimento de enseñanza se enmarca en una conjetura o hipótesis general sobre un aprendizaje específico (Camargo, 2021), en esta fase se plantea la conjetura que da marcha al experimento, se realiza la intervención en el aula y la recopilación de información y, posteriormente, se ejecuta el análisis de los datos y si es necesario se reformula la hipótesis. En seguida se alude a cada una de estas acciones:

- Conjetura que se pone a prueba:

La implementación de tareas sobre variación y cambio en el marco de un laboratorio virtual de matemáticas promueve el desarrollo del pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno.

- Intervención en el aula y la recopilación de información

En este experimento se plantea el diseño de dos componentes. El primero corresponde a la elaboración de una página web que aloje al LVM. El segundo tiene que ver con la construcción de una secuencia conformada por dos tareas, enfocadas en el estudio de una situación de variación y cambio; esta secuencia se encuentra encaminada a favorecer el desarrollo del PV (más adelante se detalla el diseño cada tarea). En cuanto a la recopilación de información, la página web está diseñada para que los estudiantes accedan mediante el inicio de sesión personalizado, empleando un correo electrónico y una contraseña previamente asignados. En cada pregunta de las tareas se incluye un cuadro de texto en el cual los estudiantes tienen la posibilidad de registrar sus ideas o resultados. Estas respuestas se almacenan automáticamente en una base de datos vinculada al usuario correspondiente, lo que permitirá un seguimiento individual y una recolección sistemática de datos.

- Análisis de los datos

De acuerdo con lo mencionado por Camargo (2021) el experimento de enseñanza se caracteriza por su estructura cíclica, en la que cada fase de implementación es seguida por una etapa de análisis y ajuste que pretende servir de insumo para mejorar el diseño de las tareas posteriores. De este modo, se tendrá en cuenta los resultados y las posibilidades de mejora procedentes a la aplicación de la primera tarea, para realizar modificaciones en el diseño y aplicación de la 3.3.3 Tarea 2.

Fase 3: Análisis retrospectivo

En esta fase se realiza la recolección, organización y análisis de los datos obtenidos en la aplicación de las tareas. El CAPÍTULO 4. RESULTADOS muestra la forma como se recolectó y organizó la información suministrada por los estudiantes al abordar cada una de las preguntas de las dos tareas, también se muestra el análisis de la información a luz de los indicares propuestos para el PV y la abstracción situada.

3.3. Diseño de Componentes

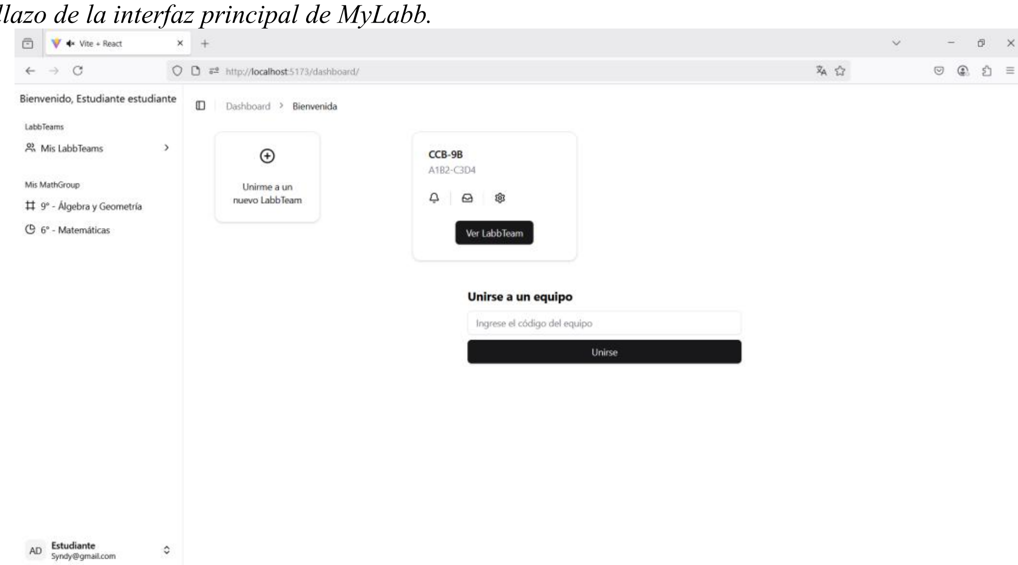
Para la planificación e implementación del experimento de enseñanza fue necesario diseñar no solo la secuencia de tareas de aprendizaje, sino también desarrollar y construir el portal web que alberga el LVM. En este sentido, enseguida se presenta primero el diseño de la plataforma digital, seguido de la descripción detallada de las dos tareas elaboradas para promover el PV.

3.3.1 Portal del Laboratorio Virtual de Matemáticas

MyLabb es una aplicación web que está diseñada para ser una ofrecer una experiencia educativa innovadora y dinámica centrada la enseñanza de las matemáticas y, particularmente, del desarrollo del PV (Figura 11). La aplicación fue construida a partir del marco de referencia relacionado con el LVM. En este orden de ideas, cumple un papel importante en el desarrollo de investigación ya que se constituye como el AVA y, en consecuencia, determinará el medio con el que interactuará el estudiante. A continuación, detallamos la estructura de la aplicación, los aspectos técnicos, el proceso de diseño y desarrollo.

Figura 11

Pantallazo de la interfaz principal de MyLabb.



Aspectos técnicos

La aplicación web está desarrollada bajo una arquitectura de cliente-servidor con una estructura basada en la librería React de JavaScript para construir interfaces de usuario (*frontend*[20]) y Django, un *framework* de desarrollo web para Python (*backend*[21]). La base de datos en la que se guardó la información está gestionada con PostgreSQL en SUPABASE[22] y el despliegue del se realizó en RENDER[23], para el *backend*, y en VERCEL[24], para el

---

[20] Se refiere a la parte de una aplicación web con la cual los usuarios interactúan directamente. Es la interfaz que permite la presentación del contenido.

[21] Consiste en el núcleo que maneja la lógica el sistema, la gestión de los datos y la comunicación con el servidor.

[22] Plataforma de desarrollo que ofrece herramientas para construir aplicaciones modernas y en particular, alojar bases de datos.

[23] Plataforma de alojamiento web que permite desplegar el *backend*.

[24] Plataforma de alojamiento web dedicada a aplicaciones desarrolladas con librerías como React.

frontend, asegurando un rendimiento estable y tiempos de carga optimizados ya que tendrá una cantidad considerable de usuarios conectados simultáneamente.

El LVM cuenta con diferentes características clave para su funcionamiento como un sistema de autenticación de usuarios con registro e inicio de sesión. Se utiliza RBAC (*Role-based Access Control*) para la gestión de los tipos de usuarios “administrador”, “profesor” y “estudiante” con permisos diferenciados según el nivel de acceso. También cuenta interactividad avanzada, integración de sonido y video, *Drags and Drops*, animaciones y efectos dinámicos que mejoran la experiencia del usuario.

Proceso de diseño y desarrollo

El desarrollo del LVM sigue una metodología definida, basada en las buenas prácticas de la construcción de software y centrado en el usuario final (estudiantes). Para el desarrollo se llevaron a cabo las siguientes fases.

1. Análisis y planificación.

   Después de haber conceptualizado el LVM en el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO, se definieron las necesidades de la aplicación web y los requisitos funcionales. Entre ellos, se realizó un estudio de las tecnologías adecuadas, de las cuales se seleccionaron las tecnologías previamente señaladas, es decir, React, Django y PostgreSQL. Se definió que la organización interna del desarrollo fuera basada en una arquitectura modular, permitiendo una implementación simultanea tanto del *backend* como del *frontend*.

2. Desarrollo del *backend* y del *frontend*.

   En este orden de ideas, se programaron, desde el *backend* y el *frontend*, los módulos que se presentan en la siguiente lista, en orden: módulo de gestión de usuarios:

registro e inicio de sesión; módulo de gestión de roles y permisos, asignar a un usuario un rol y un conjunto de permisos de acuerdo con dicho rol; módulo de gestión de *LabbTeams*[25]; módulo de gestión de tareas: crear y asignar tareas por parte del profesor; módulo de la 3.3.2 Tarea 1 y 3.3.3 Tarea 2, componentes dinámicos, simuladores, interactividad.

3. Pruebas y optimización.

   Se realizaron pruebas de usabilidad y rendimiento de la aplicación.

4. Despliegue

   Se desplegó la aplicación web en el sistema gratuito de VERCEL y SUPABASE, y de pago en RENDER.

3.3.2 Tarea 1

El diseño de esta tarea tuvo como propósito encaminar a los estudiantes en la construcción, análisis y validación de un modelo lineal que representara el comportamiento de dos variables en un contexto específico. En particular, se le apuntó al desarrollo de los indicadores **(AM1-2)**, **(AM3-1)** y **(AM2-1_2)**. La situación planteada se enmarca en el proyecto de construcción del metro de Bogotá, para ello en el LVM se integraron 13 preguntas orientadoras, acompañadas de un simulador que permitía representar y manipular la estructura. Además, se incorporaron momentos clave para la observación y exploración de representaciones de una función lineal. Cada pregunta incluía un cuadro de texto en el cual los estudiantes tenían la posibilidad de ubicar sus ideas y resultados.

[25] Los LabbTeams son equipos creados por el profesor en el LVM. Al ser generado, el profesor comparte con sus estudiantes un código de 6 dígitos que se mostrará al finalizar esta acción, para que ellos puedan a ese equipo.

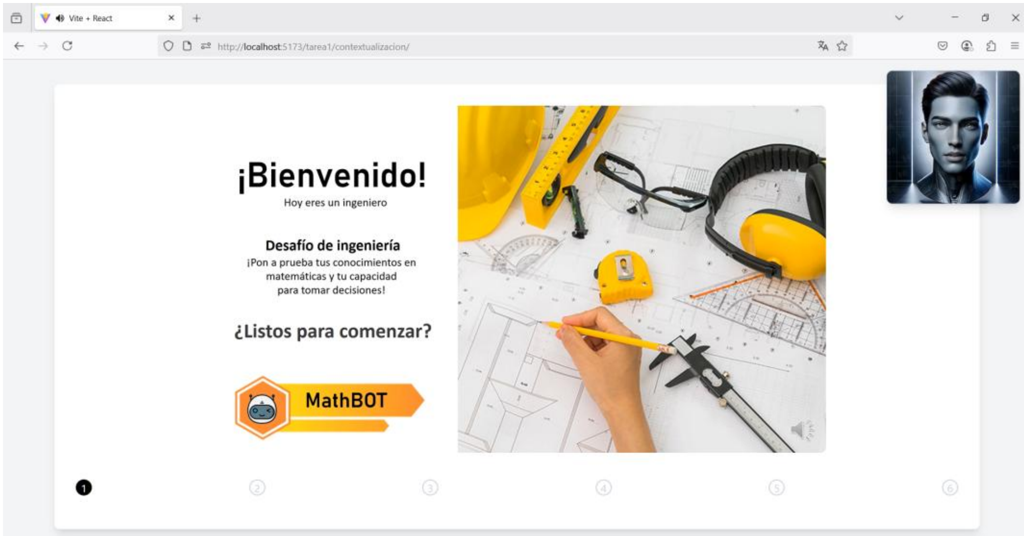
Se espera que los estudiantes no requieran numerosas interacciones con los investigadores debido a que el LVM cuenta con la asistencia de un *bot* nombrado MatBOT y caracterizado con rasgos humanos (Figura 12), el cual se encarga, mediante comandos de voz y gesticulaciones, de contextualizar a los estudiantes y darles las indicaciones para que interactúen con los elementos de la página. En el

Anexo ***C*** y el

Anexo ***D*** se encuentra la información que suministra MatBOT.

Figura 12

Pantallazo de la interfaz de la tarea 1 y MatBot



Para esta tarea se tuvieron en cuenta los indicadores propuestos anteriormente para el PV. Cada uno de ellos se muestra en la Tabla 9:

Tabla 9

Indicadores del PV a los que se le apunta en la tarea 1

Indicador	Descripción
(AM1-2)	Establece la coordinación de las dos variables que intervienen en una situación.
(AM3-1)	Manifiesta la cantidad de cambio del valor de salida en términos del cambio en el valor de entrada, empleando diferentes representaciones (expresiones verbales, tablas y gráficas).
(AM2-1_2)	Formula conjeturas sobre la dirección del cambio de las variables implicadas en una situación, a partir de la comparación entre la representación gráfica y algebraica de familias de funciones.

Esta tarea es diseñada bajo las consideraciones hechas en primer lugar por el MEN (1998, 2004, 2006), en cuanto al desarrollo del PV en las que se destaca la importancia de trabajar con situaciones contextualizadas y de favorecer la transición entre distintos tipos de representaciones de relaciones entre variables. Aunque el enfoque principal de nuestra investigación se centra en la identificación y el tratamiento de la variación y el cambio, esto no excluye el componente algebraico. Por el contrario, la representación algebraica no solo permite condensar la información de la situación, sino que, a través de sus propiedades, posibilita identificar aspectos del comportamiento de las variables que podrían pasar desapercibidos en otras representaciones.

En segundo lugar, se tuvo en cuenta los momentos característicos que proponen Pabón et al. (2011) para la actividad en el un laboratorio. Dichas consideraciones son articuladas en los siete momentos que conforman las tareas del LVM, estas son: *i*. Contextualización, *ii.* Recolección de datos, *iii.* Descubrimiento de relaciones, *iv*. Discusión de ideas, *v*. Planteamiento de conjeturas, *vi*. Comprobación de lo hallado y *vii.* Reflexiones finales. Estos momentos se detallan en seguida:

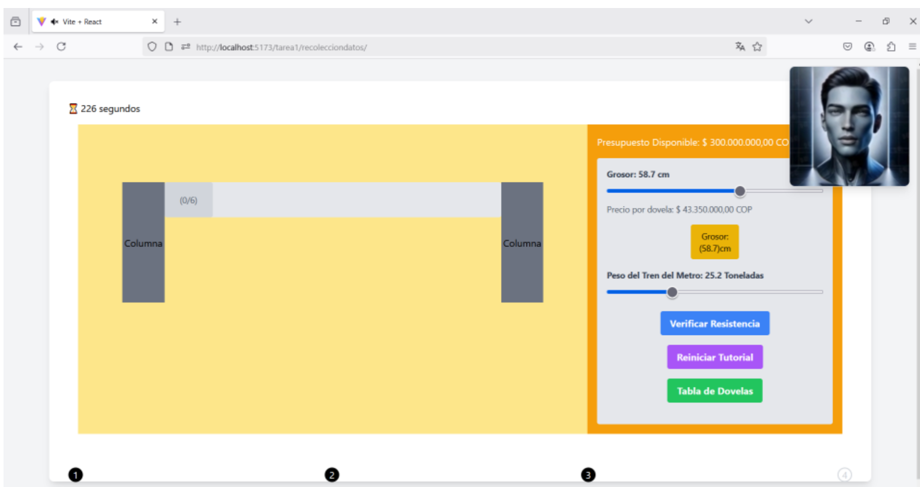
i. Contextualización

Al iniciar esta tarea, los estudiantes se encuentran con MatBOT el cual les da la bienvenida y los sitúa en el rol de ingenieros, les muestra la forma en la que se tiene planeada la construcción del metro de Bogotá mediante una secuencia de video y expone el suceso ocurrido en la ciudad de México en la cual la Línea 12 del Metro, en la alcaldía Tláhuac, se derrumbó y tuvo como consecuencia varios heridos y pérdidas de vidas. De este modo se sensibiliza al estudiante sobre la importancia de contar con un buen diseño de este tipo de estructuras antes de su respectiva construcción y puesta en marcha. También se les muestra cuáles son las partes que componen la estructura del metro y se invita a interactuar con el entorno. También se menciona que, para desarrollar esta tarea, se debe establecer un plan de trabajo que consista en: hacer recolección de datos, descubrimiento de relaciones, discusión de las ideas, planteamiento de conjeturas, comprobación de lo hallado y reflexiones finales.

ii. Recolección de datos (y experimentación)

Posteriormente, se muestra el simulador en el que se encuentran las variables que se estudiaran en la tarea, es decir, la estructura del metro. En esta parte el estudiante podrá modificar el grosor de las dovelas, el peso de la estructura y verificar el presupuesto con el que cuenta (Figura 13).

Figura 13
Pantallazo de la interfaz del Simulador de la Tarea 1



El objetivo de este momento es que los estudiantes observen cómo las variables se relacionan entre sí (se tienen preestablecidas unas configuraciones de relación grosor de la dovela-peso de la estructura, específicas). En la interfaz se les solicitará a los estudiantes iniciar con la recolección de información, para esto será necesario que el estudiante arreste el grosor y peso; con los valores que desee se produce una animación en la que se le informa si la estructura colapsa o no. Si el estudiante usa un grosor exageradamente grueso, no le alcanzará para conectar con vigas ambas pilas pues no tendrá dinero suficiente. Si el estudiante usa un grosor exageradamente delgado, le sobrará dinero, pero no garantizará la seguridad de los pasajeros ya que la estructura colapsará. Aquellos datos (seis en total) con los que la estructura no colapse serán ingresados por parte de los estudiantes en una tabla como la que se muestra enseguida (Tabla 10):

Tabla 10

Momento de recolección de datos: grosor y peso que resiste

Grosor de las vigas	Peso soportado

En este momento se realizan las tres primeras preguntas que se muestran en la Tabla 11 junto con una descripción de los indicadores del PV a los que le apuntan:

Tabla 11

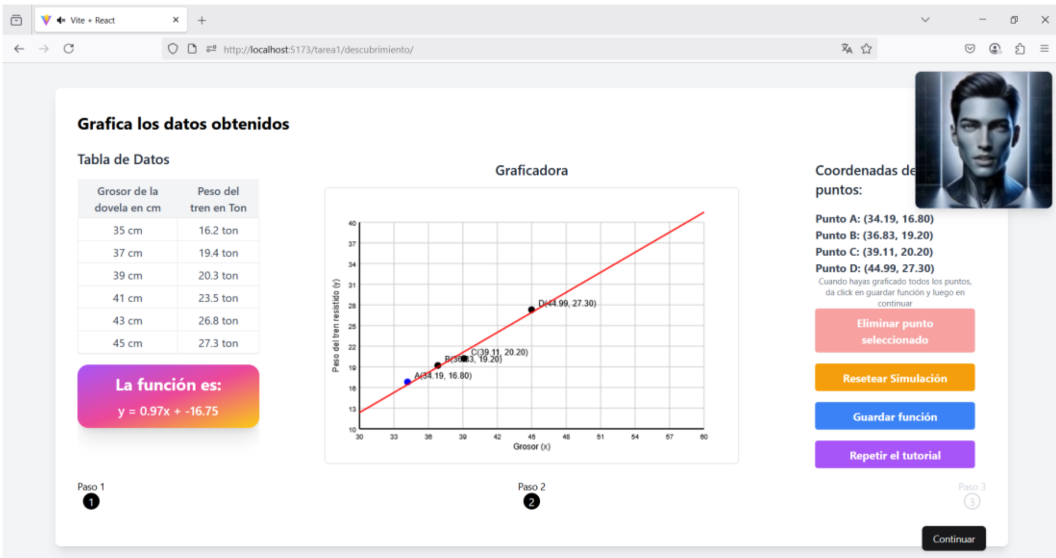
Preguntas 1, 2 y 3 e indicadores del PV T1

Pregunta	Indicador de PV
1. ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación?	**(AM1-2)** Establece la correlación de las dos variables que intervienen en una situación. **Nota:** con esta pregunta se esperaba conseguir la identificación de las variables involucradas en la situación.
2. ¿Qué sucede con la resistencia del vagón cuando la dovela tiene un grosor muy grande?	**(AM1-2)**: en términos de identificar la correlación que hay entre las variables. **(AM2-1):** dependencia de las variables y la forma en que cambian
3. ¿Cuánto peso crees que resistirá una dovela si su grosor es de 35 cm?	**(AM3-1)**: Establecer el valor que produce en una variable (resistencia) da partir del cambio en otra (grosor).

iii. Descubrimiento de relaciones

En este momento se dirige a los estudiantes a un plano cartesiano en el cual se les pedirá que ubiquen datos recolectados previamente, o puntos, en un plano cartesiano (x, y) de modo que la variable x sea el grosor de las vigas y la variable y sea el peso que soporta ese determinado grosor. A través de la visualización de la tendencia de los datos, se introducirá la noción de regresión lineal mediante una explicación hecha por MatBOT, posteriormente se indicará el modelo lineal que se ajusta al comportamiento de los datos recolectados (Figura 14).

Figura 14
Pantallazo de la interfaz que alude al graficador de la Tarea 1.



iv. Discusión de ideas

En este momento se dirigirá al estudiante a la discusión de ideas mediante la resolución de las preguntas desde la 4 hasta la 10, las cuales se muestran en la Tabla 12.

Tabla 12
Preguntas de la 4 a la 10 e indicadores del PV T1

Pregunta	Indicador de PV
4. ¿Cuál es la pendiente de tu función? **5.** ¿Cuál es la fracción de ese decimal que representa la pendiente?	**(AM3-1)**: determinar de qué forma se relacionan las variables teniendo en cuenta su expresión algebraica.
6. En términos del cambio en x y en y ¿qué puede decir acerca de la razón de cambio/pendiente de la recta?	**(AM3-1)**: manifestar la forma en cómo cambian las variables en relación con la razón de cambio.

7. ¿Qué puede decir acerca del valor de b? ¿Tiene sentido?	**(AM3-1)** Interpretar la situación en términos de que para un valor especifico en x se obtiene un valor en y.
8. ¿Qué peso resiste un vano con dovelas de 60 cm de grosor? **9.** ¿Qué peso resiste un vano con dovelas de 36 cm de grosor? **10** ¿Cuál es el grosor que deben tener las dovelas de un vano para que resista 33,2 Ton?	**(AM3-1)** Utilizar la expresión algebraica (o el modelo lineal) establecido con anterioridad para calcular el peso que resiste. **(AM3-1)** Usar el modelo en sentido inverso. Si se conoce la resistencia, cuál sería el grosor.

Con las preguntas anteriores se pretende que el estudiante haga el estudio del modelo lineal, que interactúe con él mediante la asignación de valores y que también haga un análisis crítico del mismo bajo el contexto de la situación en la que se enmarca. A partir de lo anterior, se espera que el estudiante se dé cuenta si la predicción hecha en la pregunta 3 fue acertada o no y si esta se encuentra en el rango de validez en el que se encuentra el modelo.

v. Planteamiento de conjeturas

Se pedirá al estudiante que plantee una conjetura sobre lo que ha encontrado hasta el momento. En caso de que no logre realizarla se le darán caminos para su formulación. Se espera que realice un acercamiento a lo siguiente:

Si x es el grosor de la dovela y y es el peso del vagón, entonces La función de la forma $f(x) = mx + b$ representa la resistencia de la estructura ante un grosor determinado.

vi. Comprobación de lo hallado (y reflexiones)

En este momento se le pedirá al estudiante que ponga a prueba su intuición con la conjetura planteada. El estudiante pondrá a prueba su conjetura, evaluando en la función el último grosor de la tabla que él mismo predijo: "proponga cuántos vagones resistirán si el grosor es ____."

Al principio, si los estudiantes observan pequeños cambios en el grosor de las vigas, la resistencia parece aumentar de manera constante. Esto puede hacerles creer que el modelo lineal es correcto.

Posteriormente se les pedirá que, prueben con valores más grandes para el peso del vagón. En este instante los estudiantes se darán cuenta de que aumentar un poco el grosor genera un aumento mucho mayor en la resistencia. En otras palabras, la relación no es lineal. Se realizarán las preguntas 11, 12 y 13 que se muestran en la siguiente Tabla 13.

Tabla 13

Preguntas de la 11 a la 13 e indicadores del PV T1

Pregunta	Indicador de PV
11. ¿Dónde comienza a fallar nuestro modelo?	**(AM2-1_2)** Reflexionar sobre la validez o pertinencia del uso de un modelo lineal para la situación.
12. ¿Qué ocurre si duplicamos o triplicamos el grosor de las dovelas que conforman una viga? ¿la resistencia aumenta en la misma proporción?	**(AM2-1_2)** Formula conjeturas sobre la dirección del cambio de las variables implicadas en una situación.
13. ¿Cuáles son las limitaciones del modelo lineal?	**(AM2-1_2)** Establece razones por las cuales el modelo lineal no es óptimo para esta situación.

Con estas preguntas se espera que el estudiante se dé cuenta que cambios pequeños en el grosor producen grandes cambios en la resistencia y que las variables no aumentan en la misma proporción; es decir, que la razón de cambio no es constante en todos los casos y que el modelo lineal no es confiable para retratar esta situación.

3.3.3 Tarea 2

El diseño de esta tarea tuvo como propósito continuar con el estudio de la situación mostrada en la 3.3.2 Tarea 1. En este caso evaluando la pertinencia del uso de otro modelo que pueda representar de mejor manera el comportamiento de las variables implicadas en la situación. Para ello se realizaron un total de 14 preguntas orientadoras, acompañadas de un simulador que permitía representar y los datos. Del mismo modo que en la 3.3.2 Tarea 1 cada pregunta incluía un cuadro de texto en el cual los estudiantes tenían la posibilidad de ubicar sus ideas y resultados.

Para la 3.3.3 Tarea 2 se pretendía desarrollar los indicadores propuestos anteriormente para el PV. Cada uno de ellos se muestra en la Tabla 14:

Tabla 14
Indicadores del PV a los que se le apunta en la tarea 2

Indicador	Descripción
(AM1-2)	Establece la coordinación de las dos variables que intervienen en una situación.
(AM2-1)	Comunica la dirección del cambio del valor de salida considerando los cambios en el valor de entrada, a partir del uso de expresiones verbales, tablas y gráficas.
(AM3-1)	Manifiesta la cantidad de cambio del valor de salida en términos del cambio en el valor de entrada, empleando diferentes representaciones (expresiones verbales, tablas y gráficas).
(AM3-3)	Elabora modelos sobre situaciones de variación a partir de la coordinación de la razón de cambio de las variables involucradas en la situación.

Esta tarea también se encuentra estructurada bajo los siete momentos que conforman las tareas del LVM, estas son: *i*. Contextualización, *ii.* Recolección de datos, *iii.* Descubrimiento de relaciones, *iv*. Discusión de ideas, *v*. Planteamiento de conjeturas, *vi*. Comprobación de lo hallado y *vii.* Reflexiones finales. Estos momentos se detallan en seguida:

i. Contextualización

En este momento se lleva a cabo la contextualización por parte de MatBOT (

Anexo ***C***), en la cual se menciona un resumen de la tarea anterior y se realizan una serie de preguntas orientadoras que encaminan a los estudiantes regresar a los detalles más importantes de la 3.3.2 Tarea 1. Las preguntas que se realizan son:

- ¿Qué falló?
- ¿Por qué el modelo lineal podría fallar al predecir la resistencia de la dovela?
- ¿Cómo se podría corregir esto?

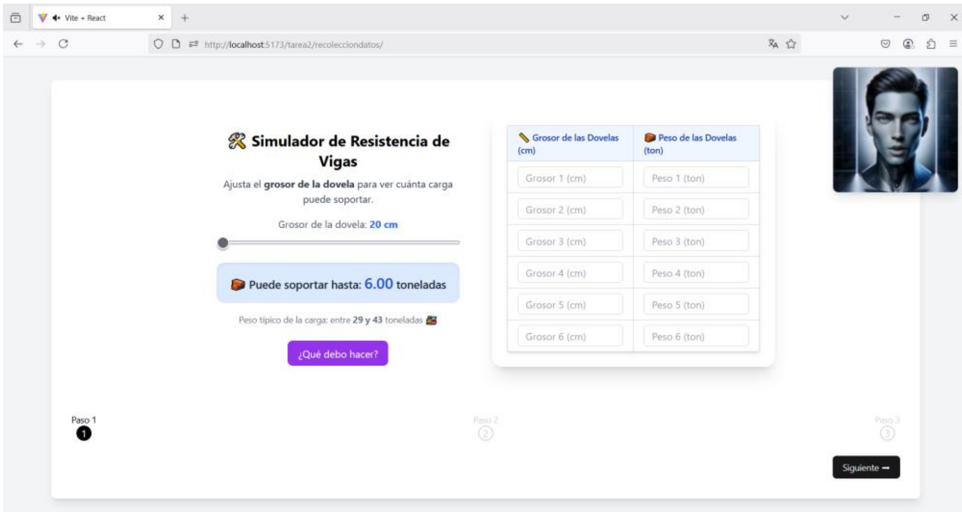
Los estudiantes podrán ingresar sus respuestas en el cuadro de texto asignado a cada una de las preguntas.

ii. Recolección de datos (y experimentación)

MatBOT menciona a los estudiantes que para el desarrollo de esta tarea será necesario contar con un apoyo de colegas expertos en el tema. Dichos colegas proporcionaron un simulador especializado, en el cual es posible ajustar el grosor de la dovela para verificar el peso que puede soportar la estructura. El grosor de la dovela se podrá modificar mediante el arrastre de un deslizador y con cada valor que se pruebe se muestra en pantalla la cantidad de carga o peso que puede soportar la estructura. Se le solicitará al estudiante ingresar estos datos en una tabla que se muestra en simultáneo para las medidas del grosor de las dovelas y el correspondiente peso que resiste la estructura (Figura 15). Deberá ingresar un total de seis parejas.

Figura 15

Pantallazo del simulador especializado de la Tarea 2.



iii. Descubrimiento de relaciones

Con los datos anteriores se direcciona a los estudiantes a realizar el análisis de los mismos. Se plantean las siguientes preguntas:

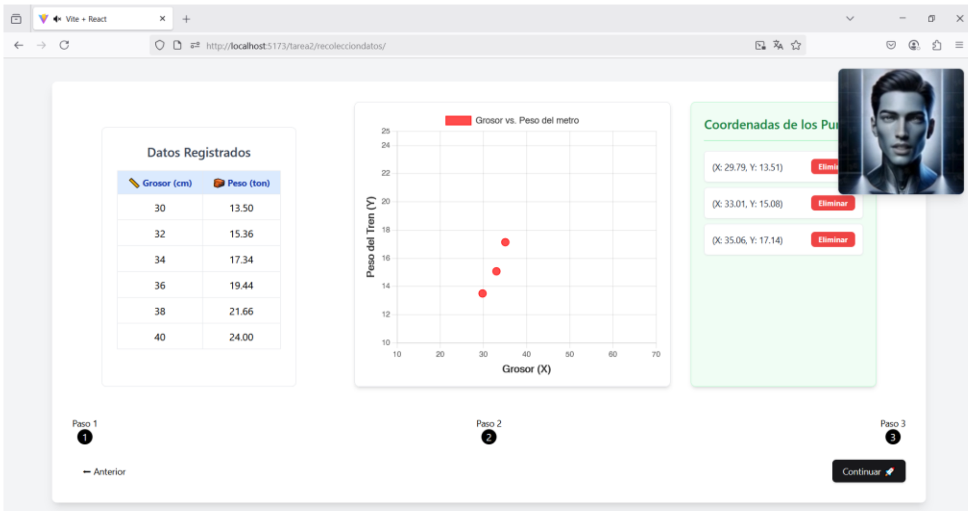
Tabla 15

Preguntas 4 y 5 e indicadores del PV T2

Pregunta	Indicador de PV
4. ¿Aumenta la carga de manera proporcional al grosor? **5.** ¿Por qué los datos no aumentan de forma proporcional?	**(AM1-2)**: en términos de identificar la correlación que hay entre las variables. **(AM2-1):** dependencia de las variables y la forma en que cambian

Posteriormente se muestra, en simultaneo, la tabla de valores registrada por el estudiante junto con un plano cartesiano en el cual se le solicitará ingresar, a modo de coordenadas, los valores recolectados. Posteriormente se le indicará al estudiante observar el tipo de figura que se forma con los puntos de la gráfica y que, de este modo, se dé cuenta que el modelo no corresponde a una línea recta, en su lugar, representa una curva. En seguida MatBOT realiza una breve introducción sobre los aspectos importantes que se deben tener en cuenta al emplear un modelo cuadrático. Muestra la forma general de este tipo de modelo señala qué representa cada término bajo la situación estudiada.

Figura 16
Pantallazo del graficador de la Tarea 2.



Adicionalmente se propone un método para confirmar si se trata de un modelo cuadrático, específicamente se alude al cálculo de las segundas diferencias. En este momento se muestra un nuevo simulador en el cual el estudiante podrá ingresar los valores recolectados con anterioridad y calcular las primeras diferencias, con estos resultados podrá calcular las segundas diferencias y verificar que efectivamente se trata de un modelo cuadrático. En pantalla se mostrará la tabla de valores recolectados, las primeras y segundas diferencias y, el modelo algebraico correspondiente en su expresión algebraica.

iv. Discusión de ideas

En este momento se discute sobre la diferencia del modelo lineal y el modelo cuadrático bajo el contexto de la situación presentada, se les solicitará a los estudiantes asignar los mismos valores para las variables independientes en las dos funciones y que, de este modo, puedan verificar de, forma algebraica, la disparidad entre los resultados.

v. Planteamiento de conjeturas

Se pedirá al estudiante que plantee una conjetura sobre lo que ha encontrado hasta el momento. En caso de que no logre realizarla se le darán caminos para su formulación. Se espera que realice un acercamiento a lo siguiente:

> Si x es el grosor de la dovela y y es el peso del vagón, entonces La función de la forma $f(x) = ax^2$ representa la resistencia de la estructura ante un grosor determinado.

vi. Comprobación de lo hallado (y reflexiones)

En este momento se verificará la pertinencia del modelo cuadrático, mientras se presentan en pantalla tres elementos. En primer lugar, el modelo algebraico que representa la situación. En segundo lugar, una sección compuesta por dos preguntas que se muestran en la Tabla 16. En tercer lugar, el simulador que representa la resistencia de las vigas; con este, el estudiante podrá responder las preguntas y comprobar, ingresando un valor específico para el grosor de las dovelas, si el modelo resulta confiable o no.

Tabla 16

Preguntas 7 y 8 e indicadores del PV T2

Pregunta	Indicador de PV
7. ¿Aumenta la carga de manera proporcional al grosor? **8.** ¿Por qué los datos no aumentan de forma proporcional?	**(AM3-1)** Utilizar la expresión algebraica (o el modelo cuadrático) establecido con anterioridad para calcular el peso que resiste.

Finalmente, se propone la resolución de una serie de preguntas orientadas a fomentar la reflexión de los estudiantes en torno a la pertinencia del uso de un modelo frente a otro, considerando las características de la situación planteada (ver Tabla 17).

Tabla 17

Preguntas de la 9 a la 11 e indicadores del PV T2

Pregunta	Indicador de PV

9. ¿Por qué el modelo lineal falló al predecir la resistencia de las vigas? **10.** ¿Qué ventajas ofreció el modelo cuadrático en este caso? **11.** ¿será el modelo cuadrático el mejor modelo para este problema?	**(AM3-3)** Elaborar, evaluar y comparar modelos matemáticos en relación con la situación real

Con estas preguntas se espera que el estudiante identifique que el modelo lineal supone una razón de cambio constante, lo cual no se ajusta a la forma en que varían las magnitudes estudiadas. Por su parte, el modelo cuadrático se ajusta mejor a los datos observados en el simulador, pues permite predecir con mayor precisión cómo varía la resistencia cuando cambia el grosor. Sin embargo, esto no significa que sea el único modelo que se pueda emplear, ya que podría haber otros modelos que se ajusten mejor a la situación y tengan un rango mayor de precisión en cuanto a la predicción. También se espera que el estudiante reconozca la importancia de haber recolectado y organizado la información dado que, sin estos, o con datos errados, el estudio actual no tendría sentido.

3.4 Implementación de las Tareas

Para este experimento de enseñanza se planeó una secuencia de dos tareas, dirigidas a estudiantes de grado noveno. Se tenía presupuestado que la aplicación de cada tarea sería en dos fechas con una semana de diferencia. Cada aplicación debía durar alrededor 45 minutos. Sin embargo, esto no fue posible; enseguida se especifica la forma en que se llevó a cabo cada aplicación.

La implementación de la 3.3.2 Tarea 1 se ejecutó con un total de 24 estudiantes. Cada estudiante contaba con un par de audífonos y un computador para que ingresaran a la página web del LVM mediante un usuario y contraseña, los cuales fueron compartidos a los estudiantes con antelación. La aplicación de la tarea fue dirigida por uno de los autores, mientras que el otro autor se encontraba bajo el rol de observador. Los estudiantes tuvieron interacción con los investigadores solamente en los casos que presentaron dudas frente al iniciar sesión y los espacios a los que debían dirigirse en la página web. Al cabo de los 45 minutos, fue posible observar que ninguno de los estudiantes había culminado la tarea, por lo tanto, fue necesario dar cierre a la sesión y planificar otro encuentro para la culminación.

Dando cumplimiento al carácter cíclico del experimento de enseñanza, luego de la aplicación de la 3.3.2 Tarea 1, se identificaron aspectos que se debían mejorar para el diseño y posterior aplicación de la 3.3.3 Tarea 2. Estos aspectos tienen que ver con los tiempos destinados a cada momento de la tarea, a la especificidad de las indicaciones dadas en la página web y al mejoramiento de la formulación de algunas preguntas orientadoras. Cabe señalar que las respuestas de los estudiantes se guardaron en un sitio en la red en el cual era posible identificar las respuestas dadas por cada uno de los estudiantes, esto facilitó la recopilación, organización y análisis de la información.

Para la implementación de la 3.3.3 Tarea 2, se tuvieron en cuenta los aspectos a mejorar identificados en la 3.3.2 Tarea 1, por lo tanto esta se llevó a cabo en dos sesiones para la cuales los investigadores desempeñaron los mismos roles que en la 3.3.2 Tarea 1.

A continuación, en el CAPÍTULO 4. RESULTADOS se describen los resultados derivados de la implementación de las Tareas 1 y 2.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

A continuación, se presenta el análisis de los resultados luego de la implementación de las dos tareas. El análisis se realiza primero, haciendo un resumen de la tarea; segundo, se muestra en una tabla la pregunta, los indicadores del PV a los que se le apuntó con la pregunta y la respuesta esperada; se realiza un análisis de las respuestas teniendo como referente el marco teórico propuesto en el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO, en términos de los indicadores del PV y el uso de la TD desde la abstracción situada. Uno de los autores de la presente investigación se desempeñó como observador mientras que el otro autor dirigió la sesión indicándole a los estudiantes cómo ingresar al sitio web. En ambas tareas, la interacción entre el autor que dirigió las sesiones y los estudiantes se centró en resolver dudas acerca del funcionamiento de la página como por ejemplo en qué sección dar clic o cómo ingresar las respuestas.

4.1 Tarea 1

Para esta tarea se esperaba que los estudiantes asumieran el rol de ingenieros responsables del diseño de un tramo de la primera línea del metro de Bogotá. Para ello era preciso que interactuaran con el LVM, identificaran las variables involucradas en la situación, recolectaran y analizaran información sobre dichas variables. Todo ello con el propósito de estudiar un modelo lineal y determinar si este es el apropiado para la situación.

Pregunta 1

Tabla 18

Pregunta 1 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
1. ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación?	**(AM1-2)** Establece la correlación de las dos variables que intervienen en una situación. **Nota:** con esta pregunta se	Se espera que el estudiante identifique tres variables: - El **grosor** de las dovelas, en centímetros

	esperaba conseguir la identificación de las variables involucradas en la situación.	- El **peso** del metro, en toneladas - El **precio**[26] que cuesta, en pesos

De acuerdo con la respuesta esperada, lo estudiantes podían identificar ninguna, una, dos o tres variables. Sin embargo, algunos estudiantes aludieron a una cuarta variable que no se había contemplado en la respuesta esperada, esta variable es la cantidad de dovelas, pues en el simulador se observaba que dicha cantidad variaba dependiendo del precio y, por tanto, del grosor de cada dovela. En consecuencia, es posible evidenciar que las respuestas se encuentran divididas en cinco categorías de acuerdo con la cantidad de variables identificadas en la situación.

En primer lugar, en el mayor porcentaje de las respuestas (33,3%) se identificaron tres variables. Para este caso se observó dos tipos de respuestas ya que algunos estudiantes eran explícitos en términos de la magnitud a la que hacían referencia junto con su objeto correspondiente, mientras que otros estudiantes solamente hacían alusión a las magnitudes. Por ejemplo:

- Estudiante que menciona explícitamente la magnitud y el objeto: "*las variables que yo veo son el grosor de cada dovela, el peso del tren y el precio que cuesta cada dovela".*
- Estudiante que menciona solamente las magnitudes: *"el precio, el grosor y el peso".*

[26] En esta tarea, la variable precio de las dovelas funcionó como limitador contextual para enfocar el análisis en las relaciones entre peso y grosor. Se consideró dentro de las variables esperadas porque, si bien no interviene en el desarrollo posterior, su identificación demuestra que el estudiante reconoce variables contextuales, evidenciando competencias de reconocimiento variacional desde una perspectiva didáctica.

A pesar de la diferencia en los detalles de las respuestas, la dos se toman como válidas ya que en las condiciones del simulador no se da margen para que el estudiante se pueda referir, por ejemplo, al peso de un objeto diferente al del metro. Esto muestra que una cantidad significativa de estudiantes logró reconocer la cantidad de variables esperadas. Esta identificación puede estar influenciada por la representación visual y manipulativa de la situación en la cual los estudiantes tuvieron la oportunidad de observar que, al manipular un objeto otro se modifica. Respecto a la diferencia entre las respuestas, puede deberse al nivel de formalización del lenguaje matemático de cada estudiante o al grado de interpretación de la situación presentada.

En segundo lugar, en el menor porcentaje (4,1%) de las respuestas se identificaron cuatro variables[27]. En este caso el estudiante señaló en su respuesta de forma explícita tanto la magnitud como el objeto al que corresponde. La identificación de cuatro variables puede deberse a habilidades desarrolladas de exploración digital o un buen nivel de visualización e indagación de la interfaz, lo cual el LVM favorece al permitir una manipulación libre y la observación de variaciones.

En tercer lugar, se observa que el porcentaje de estudiantes que identificaron dos variables es el mismo que el de aquellos estudiantes que identificaron una variable, es decir el 25 % cada caso. Estas respuestas tienen en común la variable del grosor, esto puede ser resultado de que, en el simulador, el primer deslizador que aparece es el del grosor de la dovela. Además, estas respuestas pueden estar asociadas a una interpretación limitada de la

[27] Precio, grosor, peso y cantidad de dovelas que se pueden colocar en el vano.

situación o que su atención se enfocó solamente en uno de los objetos mostrados en el LVM.

Finalmente, el 12,5% de los estudiantes no responde o dice explícitamente que no entiende. Esto puede reflejar dificultades para interpretar el entorno digital y el contexto de la situación, desconocimiento del concepto de variable o baja motivación en el desarrollo de la tarea.

Enseguida se muestra la Tabla 19 en la cual se relaciona la categoría de las respuestas, una descripción de estas y su respectiva clasificación en términos de los indicadores de abstracción situada propuestos en el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.

Tabla 19
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P1

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B2	Tres variables (33,3%)	- Algunos identifican magnitudes y objetos; otros, solo magnitudes. - Estudiantes que muestran relaciones entre variables. - Diferencias entre explicitar el objeto o no.
D2	Cuatro variables (4,1%)	- Añaden la variable "cantidad de dovelas" a las tres esperadas. - Refleja una visualización y exploración detallada y un razonamiento más profundo.
B0	Dos variables (25%)	- Principalmente grosor y peso. - Establece relaciones parciales.g Influenciados por la disposición de los elementos del simulador.
	Una variable (25%)	- Solo mencionan el grosor. - Se limitan a lo más visible. - Atención poco exploratoria.
A1	Sin respuesta / no entiende (12,5%)	- No identifican variables o manifiestan no entender la situación. - No hay interacción significativa.

Lo anterior permite identificar que los estudiantes, en el desarrollo de la primera pregunta, se encuentran ubicados en variados indicadores de abstracción situada. Se evidencian estudiantes con una comprensión superficial, intermedia o sofisticada a partir de la interacción y exploración hecha en el LVM. El primer grupo de estudiantes, ubicado en el indicador **B2** logró establecer relaciones entre las variables manipuladas en el simulador, aunque no siempre explicitaron con claridad los objetos asociados a las magnitudes. El segundo grupo, ubicado en el indicador **D2** fue más allá y añadió una cuarta variable no prevista, la cantidad de dovelas; esto puede dar cuenta de una exploración más detallada del entorno, pues el estudiante no solo observa, sino que reconoce nuevas variables mostrando una comprensión más profunda de la situación. El tercer grupo, ubicado en el indicador **B0** se divide entre quienes identificaron una o dos variables; sus respuestas ponen en evidencia una interacción limitada, posiblemente, a lo más visible o del simulador lo que sugiere una interacción pasiva y poco exploratoria. El último grupo, ubicado en el indicador **A1** refleja un nivel bajo de interacción con el entorno y una posible desconexión tanto con la tarea como con las herramientas del LVM.

Pregunta 2

Tabla 20

Pregunta 2 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
2. ¿Qué sucede con la resistencia del vagón cuando la dovela tiene un grosor muy grande?	**(AM1-2)**: en términos de identificar la correlación que hay entre las variables. **(AM2-1):** dependencia de las variables y la forma en que cambian	Se espera que el estudiante aluda a que la estructura colapsa pues no alcanza el dinero para comprar las dovelas necesarias

En estas respuestas fue posible evidenciar las siguientes cuatro categorías. En primer lugar, el 12,5% de los estudiantes respondieron de acuerdo con lo esperado ya que reconocen que un grosor muy grande genera un aumento de resistencia, pero que el dinero no alcanza para comprar las dovelas requeridas y por los tanto no hay estructura. Un ejemplo de esto se muestra a continuación:

- Estudiante: "*resiste mucho mas pero no se puede es que no alcanzaría ya que se necesita mas dinero no se puede poner una muy gruesa por eso*" [sic][28].

Estos estudiantes demuestran una apropiación del contexto de la situación pues articulan la relación entre el grosor, el precio y la cantidad de dovelas junto con la resistencia total. Reflejan análisis completo, en términos de lo esperado, del comportamiento de las variables.

El 4,16% de los estudiantes reconoció que hacía falta el dinero para comprar las dovelas, pero no señalaron que esto implicaba que no se podía construir la estructura. En este caso, los estudiantes parecen haber identificado un aspecto importante de la situación como lo es el presupuesto; sin embargo, no establecieron la relación entre esa limitación y la falla estructural del sistema. Es posible que hayan interpretado los datos del LVM de forma aislada o sin comprender todas sus implicaciones.

La mayoría de los estudiantes, es decir, el 66,6% respondió que la estructura resiste más cuando la dovela tiene un grosor muy grande. Estas respuestas posiblemente se basan en asumir que la situación se comporta de forma directamente proporcional en la que, si el grosor aumenta, también lo hace la resistencia, lo anterior se puede observar en las siguientes respuestas:

[28] La transcripción de las respuestas se realizó de forma literal, razón por la cual pueden presentar inconsistencias gramaticales.

- Estudiante: *“entre mas grueso mas resiste el peso”* [sic].
- Estudiante: “*resiste un mayor peso*”

No obstante, estos estudiantes pasan por alto un aspecto importante de la situación ya que el aumento en el grosor de las dovelas implica un aumento en el precio y esto impide la construcción de la estructura. Este grupo parece centrarse solo en una parte de la situación, pero no relacionan esto con los datos mostrados en el simulador.

Un 16,6% de los estudiantes no respondió o manifestó explícitamente que no sabía. Esto podría estar relacionado con dificultades para comprender la tarea, para interpretar el simulador o para establecer relaciones entre las variables presentadas. También podría deberse a inseguridad frente a una pregunta que presenta una situación no evidente.

Estos resultados muestran que, a pesar de que algunos estudiantes lograron integrar ciertas variables de la situación, una parte considerable respondió desde una perspectiva lineal o incompleta, lo cual es consecuente con los propósitos de la tarea, provocar un cuestionamiento en el que se establezca si un modelo lineal es suficiente para explicar el comportamiento de la situación.

En la Tabla 21 se relaciona la categoría de las respuestas, una descripción de estas y su respectiva clasificación en términos de los indicadores de abstracción situada:

Tabla 21
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P2

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
D2	La estructura colapsa pues no alcanza el dinero para comprar las dovelas necesarias (12,5%)	- Reconocen relaciones significativas entre las variables - Tienen presente el hecho de que, aunque haya más resistencia, el aumento del grosor

		implica mayor precio, lo cual impide completar la estructura.
C1	No alcanza el dinero para comprar las dovelas necesarias (4,16%)	- Reconocen la limitación del presupuesto, pero sin vincularla con la falta de la estructura. - Identifica relaciones entre variables del entorno, pero sin determinar consecuencias.
B2	Resiste más peso / no colapsa (66,6%)	- Se relacionan de forma proporcional las variables. - Se reconocen efectos, pero sin relacionarlos con condiciones.
A1	No sabe / no responde (16,6%)	- No responden. - Expresan no comprender la situación. - Interacción limitada o sin sentido.

De la información anterior se puede determinar que los estudiantes ubicados en el indicador **D2** interactuaron de forma activa con el simulador, reconocieron no solo las variables y relaciones visibles como peso y grosor de las dovelas, sino también el efecto que provoca el cambio de estas en el presupuesto. Esta interacción puede catalogarse como profunda con el entorno, pues les permitió ver más allá de lo literal.

Los estudiantes ubicados en el indicador **C1** posiblemente hayan observado el en el simulador el gasto excesivo del dinero, pero no vincularon esta información con la propia existencia de la estructura. Esto sugiere, al parecer, una interacción parcial con el entorno digital, ya que se percibe un dato relevante, pero sin integrarlo con las consecuencias de su cambio. El grupo de estudiantes ubicado en el indicador **B2** quizás enfocaron su atención principalmente en el efecto directo que producía cambiar el grosor de las dovelas sobre la resistencia de la estructura, sin atender el cambio de otras variables (el precio); es posible que estos estudiantes hayan usado el entorno de forma unidimensional, fijándose en una sola relación, la del grosor y la resistencia, sin explorar cómo otras variables se ven afectadas por los cambios de estas.

Por último, aquellos estudiantes que se encuentran en el indicador **A1** parece que no lograron identificar cómo emplear el simulador o que la interacción con el entorno no les proporcionó información clara para establecer una respuesta.

Pregunta 3

Tabla 22

Pregunta 3 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
3. ¿Cuánto peso crees que resistirá una dovela si su grosor es de $35\ cm$?	**(AM3-1)**: Establecer el valor que produce en una variable (resistencia) da partir del cambio en otra (grosor).	Se espera que el estudiante establezca que la resistencia es de cero ya que con el mínimo de grosor (40 cm) y el mínimo de toneladas (29) la estructura colapsa.

Antes de responder a esta pregunta los estudiantes tenían que interactuar con el simulador recolectando los valores del grosor de las dovelas y el valor correspondiente a la resistencia de la estructura, estos valores se ubicaban en una tabla. De acuerdo con esta información, se esperaba observar el nivel de interpretación de los estudiantes sobre la situación bajo los valores estudiados y la posibilidad de resistencia con un valor que no se encontraba en el rango del simulador. En este caso ningún estudiante dedujo que la resistencia debía ser cero, lo cual indica que, a lo mejor, ninguno logró hacer una interpretación apropiada del contexto del modelo más allá de la forma lineal; esto tiene sentido debido al gran porcentaje de estudiantes, observados en la pregunta anterior, que interpretó que las variables de la situación se comportaban de forma directamente proporcional. De este modo, se observó que las respuestas reportaban un rango de 5 a 43 toneladas, estas fueron agrupadas de la siguiente manera:

Respuestas que reportan entre 5 a 12,5 toneladas refieren a estudiantes que, tal vez, suponen una tendencia decreciente en la cual, si el grosor disminuye la resistencia también, pero sin llegar a cero, es decir, no identifican el límite del contexto. Las respuestas que reportan entre 15 a 25 toneladas pertenecen a estudiantes que realizaron estimaciones numéricas por debajo del mínimo mostrado en el simulador (29 toneladas) resultado de, tal vez, identificar una relación proporcional entre el grosor y la resistencia, pero sin identificar el límite del contexto. Las respuestas que reportan entre 36 a 43 toneladas corresponden a estudiantes que, posiblemente, asociaron directamente que a menor grosor hay una mayor resistencia.

Dado que, ninguno de los estudiantes logró llegar a la respuesta esperada, se puede establecer que el total de estudiantes se ubican en el indicador **A2** pues hacen uso de las herramientas del LVM e identifican relaciones entre las variables, pero no lograron integrar el comportamiento del entorno como un todo.

Pregunta 4 y 5

Tabla 23
Preguntas 4 y 5 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
4. ¿Cuál es la pendiente de tu función? **5.** ¿Cuál es la fracción de ese decimal que representa la pendiente?	**(AM3-1)**: determinar de qué forma se relacionan las variables teniendo en cuenta su expresión algebraica.	Se espera que el estudiante establezca que el valor de la pendiente es el número decimal que acompaña a la variable x y convertirlo en fraccionario.

La totalidad de estudiantes indicaron en su respuesta lo que se tenía esperado, es decir, identificaron correctamente el valor de la pendiente en la expresión algebraica de la función y convirtieron este valor en un decimal de forma adecuada. Esto indica que, en términos algebraicos, los estudiantes tenían claridad de la relación entre las variables implicadas en la situación.

En términos de los indicadores de la abstracción situada, es posible ubicar a los estudiantes en el indicador **B4**, esto debido a que, a partir de la interacción con el entorno mediante la manipulación de las variables, la recolección de datos y la regresión lineal lograron identificar el valor de la pendiente, es decir, identificaron una propiedad matemática mediante la manipulación del LVM.

Pregunta 6

Tabla 24

Pregunta 6 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
6. En términos del cambio en x y en y ¿qué puede decir acerca de la razón de cambio/pendiente de la recta?	**(AM3-1)**: manifestar la forma en cómo cambian las variables en relación con la razón de cambio.	Se espera que el estudiante exprese la razón de cambio bajo el contexto de la situación, es decir, que aluda a que, por cada cm de grosor, se aumenta cierta cantidad de toneladas de resistencia.

En las respuestas de los estudiantes fue posible observar formas variadas en la que se interpretaron la pendiente. De este modo, se identificaron cuatro categorías que se describen enseguida. En primer lugar, el 62,5% de los estudiantes respondieron de acuerdo con lo esperado señalando, por ejemplo:

- Estudiante: "*esto es como por cada cien del grosor le aguanta 41 en peso*"
- Estudiante: "*por cada 100 de grosor agunata 29 ton*"

Posiblemente estos estudiantes reconocieron que el grosor es la variable independiente y que la resistencia depende de él, esto les permitió expresar una relación en la que se aluda a que los cambios del grosor de las dovelas producen cambios en el peso que resiste la estructura. Adicionalmente, algunos de estos estudiantes se refirieron a la pendiente en su expresión decimal y relacionaron este valor a la interpretación de la pendiente como razón de cambio, por ejemplo:

- Estudiante: "*Por cada cm que aumenta el grosor el peso que resiste aumenta como 0.80 toneladas*"
- Estudiantes: "*es como por cada cm de grosor el peso que resiste sube como 1.36*"

Por otra parte, $8{,}33\%$ de los estudiantes suministraron respuestas en las que se evidencia una interpretación descontextualizada sobre el valor de la pendiente pues aludieron, en otros términos, que por cada x se produce cierto cambio en y, por ejemplo:

- Estudiante: "*por cada 100 x los y cambian 3*"
- Estudiante: "*significa que por cada 100x aumentan los y 23*"

A pesar de que este tipo de respuestas no resultan ser erradas, se esperaba que los estudiantes mostraran cierta apropiación del contexto de la situación. Lo anterior puede deberse a la forma en cómo se estructuró la pregunta, pues no se aludió a las variables de la situación, sino que estas se mencionaron bajo las expresiones x e y.

El $29{,}16\%$ de los estudiantes hacen una interpretación equivocada, poco clara de la pendiente o manifiestan no entender. Esto podría indicar una falta de comprensión sobre el papel funcional de la pendiente en una situación contextualizada

En la Tabla 25 se muestra la categorización de las respuestas teniendo en cuenta los indicadores de la abstracción situada:

Tabla 25

Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P6

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B4	Por cada cm de grosor, se aumenta cierta cantidad de toneladas de resistencia (62,5%)	- Expresan correctamente una relación funcional entre x e y en lenguaje contextualizado. - Establecen relaciones claras entre variables del entorno.
A2	Interpretación descontextualizada (8,33%)	- Mencionan cantidades sin relacionarlas directamente con las variables del contexto. - Usan herramientas del entorno, pero las relaciones que establecen son diferentes a lo esperado.
A1	Interpretación equivocada o poco clara (29,16%)	- Respuestas vagas, erradas, o sin evidencia de comprensión de la relación entre las variables implicadas.

Gran parte de los estudiantes se ubican en el indicador **B4** ya que no solo identificaron la pendiente como un valor, sino que la interpretaron de forma en que se esperaba, es decir, como la razón de cambio entre las variables involucradas. Los estudiantes ubicados en el indicador **A2** muestran un uso del entorno, pero sin lograr establecer relaciones contextualizadas. A pesar de emplear valores tomados del simulador, no los conectaron con el significado de las variables. Este comportamiento sugiere que su interacción con el entorno fue algo superficial, pues extrajeron datos pero no los articularon con el contexto. Los estudiantes que se ubican en el indicador **A1** muestran la ausencia de relaciones entre las variables, para este caso el uso del entorno virtual no cumplió un papel activo en la identificación de relaciones.

Pregunta 7

Tabla 26

Pregunta 7 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
7. ¿Qué puede decir acerca del valor de b? ¿Tiene sentido?	**(AM3-1)** Interpretar la situación en términos de que para un valor	Se espera que el estudiante exprese rechazo frente al valor de

	especifico en x se obtiene un valor en y.	b, debido a que, en la situación, este valor no tiene sentido.

El mayor porcentaje de los estudiantes $(33{,}33\%)$ respondió en conformidad con lo esperado, pues cuestionaron el significado del valor de b dentro del contexto, concluyendo que no tiene sentido que la estructura soporte algún peso sin grosor. Este tipo de respuesta indica que existe una comprensión del papel de b como el valor de la resistencia cuando x es igual a cero. Muestra también la capacidad de los estudiantes para interpretar críticamente la representación algebraica de la función.

El $20{,}83\%$ de los estudiantes muestran incredulidad o contradicción frente al valor de b, pero no lo hacen con una argumentación explícita, sino desde la sorpresa o la intuición de que algo no es correcto, Estas respuestas pueden indicar que los estudiantes tienen cierto nivel de apropiación del contexto, pero a lo mejor les faltan herramientas de lenguaje matemático para justificar el rechazo, por ejemplo:

- Estudiante: "*eso ya se me hace raro, pero si es como la base inicial no se podría*"
- Estudiante: "*sin grosor aguanta 53... raro pero uno ya no sabe*"

El $12{,}5\%$ de los estudiantes hacen referencia a la expresión algebraica reconociendo que el valor de b representa un valor para y en el caso de que a x se le asigne el valor de cero. Por ejemplo:

- Estudiante: "*cuando x es 0 entonces resiste 28.2*"
- Estudiante: "*como 9 toneldas en cero cm...*" [sic].

Otro $12{,}5\%$ de los estudiantes aceptan el valor de b como un punto de partida o como lo que resiste sin poner nada, sin cuestionar si algo así tiene sentido en el contexto de la situación. En otras palabras, estos estudiantes asumen que el modelo es válido en $x = 0$. Por otra parte, el 20,83% de los estudiantes está compuesto por aquellos que manifiestan no entender la pregunta o simplemente no responden.

Tabla 27
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P7

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B4	Rechazo al valor de b (33,33%)	- Argumentan que no tiene sentido que sin grosor la estructura resista peso. - Reflexión crítica basada en la exploración y manipulación del entorno virtual
A2	Interpretación como base o inicio / sin cuestionar (12,5%)	- Aceptan el valor de b como punto de partida sin poner en duda su validez en el contexto. - Usan elementos del entorno, pero no establecen relaciones significativas con el contexto.
B1	Incredulidad o contradicción (20,83%)	- Muestran sorpresa frente a valor de b, pero suministran una argumentación clara sobre su interpretación.
A1	Expresión algebraica (12,5%)	- Mencionan a b como el número que aparece en la expresión algebraica, sin interpretación en el contexto.
A0	No entiende / no responde / dice que es posible (20,83%)	- No dan respuesta significativa o manifiestan confusión.

Con esta información es posible establecer que solo quienes se ubicaron en el indicador **B4** logran articular la interpretación algebraica con el contexto y la información mostrada en el LVM. Los demás estudiantes muestran diversas formas de interacción con el entorno y de comprensión de situación, pues se evidencia una interpretación solamente algebraica (**A2**), algunas reacciones que no cuentan con argumentación alguna (**B1**), una lectura sin comprensión (**A1**) o falta de interacción (**A0**).

Preguntas 8, 9 y 10

Tabla 28

Preguntas 8, 9 y 10 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
8. ¿Qué peso resiste un vano con dovelas de 60 cm de grosor? **9.** ¿Qué peso resiste un vano con dovelas de 36 cm de grosor? **10** ¿Cuál es el grosor que deben tener las dovelas de un vano para que resista 33,2 Ton?	**(AM3-1)** Utilizar la expresión algebraica (o el modelo lineal) establecido con anterioridad para calcular el peso que resiste. **(AM3-1)** Usar el modelo en sentido inverso. Si se conoce la resistencia, cuál sería el grosor.	Se espera que el estudiante hiciera uso del modelo en su expresión algebraica, asignando los valores dados y hallando los resultados correspondientes.

Para esta pregunta, la totalidad de estudiantes respondió conforme a lo esperado. Esto demuestra que cuentan con un manejo adecuado de las expresiones algebraica y que, al parecer, tienen cierta claridad sobre las variables implicadas en el modelo; es decir, comprendieron que el valor de x señalaba el grosor de las dovelas, mientras que el valor de y indicaba la resistencia de la estructura. Además, para la pregunta 10 era necesario determinar en la ecuación el valor de x, esto demuestra que no tienen dificultad en resolver una ecuación de primer grado.

En relación con los indicadores de la abstracción situada, es posible ubicar a los estudiantes en el indicado **B4** pues a pesar de que para resolver estas preguntas no hubo manipulación directa del simulador, las respuestas correctas implican que los estudiantes usaron el modelo construido previamente mediante la interacción con el entorno. Esto significa que no emplearon un modelo algebraico cualquiera, sino uno que resulta del comportamiento de la situación a partir del uso que le dio el estudiante.

Pregunta 11

Tabla 29

Pregunta 11 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada

11. ¿Dónde comienza a fallar nuestro modelo?	**(AM2-1_2)** Reflexionar sobre la validez o pertinencia del uso de un modelo lineal para la situación.	Se espera que el estudiante se de cuenta que el modelo tiene un fallo ya que cambios pequeños en el grosor producen grandes cambios en la resistencia.

De acuerdo con esta pregunta los estudiantes suministraron tres tipos de respuesta, en las cuales el 75% de los estudiantes respondieron de acuerdo con lo esperado pues mencionaron, en otras palabras, que el modelo deja de funcionar con datos lejanos a los estudiados previamente. Esto puede mostrar cierto nivel de comprensión sobre la limitación del modelo lineal.

El 25% de los estudiantes expresaron que los resultados mostrados por el simulador carecen de sentido, pero lo hacen, al parecer, desde una mirada intuitiva pues mencionan frases como: "*son raros*" o "*me parecen extraños*". En este sentido, los estudiantes reconocen que algo no está bien, pero no lo explicaron en términos de la situación.

Tabla 30

Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P11

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B3	El modelo deja de funcionar con datos lejanos a los estudiados previamente (75%)	- Observan que el modelo falla con valores muy grandes o muy pequeños. - Reconocen la falla en el modelo lineal
A2	Los resultados carecen de sentido (25%)	- Afirman que el modelo "da errores", "no predice bien" o "se inventa números". - No señalan alguna justificación.

Los estudiantes que se ubican en el indicador **B3** pareciera que interactuaron de forma activa con el entorno, pues relacionaron la información que ofrece el modelo respecto a la predicción y lo que ocurre realmente al manipular los valores en el simulador, fijándose que al usar valores muy grandes este arrojaba valores que no parecían verídicos. Por otra parte, los estudiantes ubicados en el indicador **A2** también interactuaron con el entorno, pero tal vez de una forma menos precisa ya que identificaron que algo fallaba, pero no mostraron una justificación para esta.

Pregunta 12

Tabla 31

Pregunta 12 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
12. ¿Qué ocurre si duplicamos o triplicamos el grosor de las dovelas que conforman una viga? ¿la resistencia aumenta en la misma proporción?	**(AM2-1_2)** Formula conjeturas sobre la dirección del cambio de las variables implicadas en una situación.	Se espera que el estudiante mencione que las variables no aumentan en la misma proporción.

Para esta pregunta los estudiantes mostraron información que se clasifican en tres categorías. En primer lugar, el 54,16% de los estudiantes manifestaron lo esperado, es decir, rechazan la proporcionalidad reconociendo que el comportamiento de las variables no es lineal, un ejemplo de ello es:

- Estudiante: "*No es una línea recta, ya que no es proporcional, toca ajustarla*"

Estos estudiantes muestran un razonamiento en el cual contrastaron el modelo algebraico con lo observado en el entorno y notaron que, para ciertos valores del grosor, la resistencia crece de manera acelerada. En este caso específico el estudiante asocia la idea de línea recta con proporcionalidad, y sugiere que hay que cambiar el modelo.

El 29,16% de estudiantes intuyen que no es proporcional empleando palabras como "supongo", "creo" o "imagino" y no muestran una justificación clara para su respuesta. Por ejemplo:

- Estudiante: "*no creoo que aumentee igual siempre por el simulador*" [sic].
- Estudiante: "*no se bien pero supongoo que no es tan sencilloo como una multiplikasion directaa.*" [sic].

En este caso los estudiantes hacen suposiciones correctas, sin embargo, no lograron determinar una justificación válida del por qué deja de ser una relación proporcional. Posiblemente, los estudiantes no realizaron una observación o interacción sistemática con el entorno o requieren una mayor familiarización con el mismo. Los estudiantes que se encuentran en el 16,66% señalaron no comprender la pregunta.

Bajo la mirada de la abstracción situada es posible ubicar a los estudiantes en los siguientes indicadores (Tabla 32):

Tabla 32
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P12

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B3	Rechazan la proporcionalidad y reconocen no linealidad (54,16%)	- Observan que el modelo falla con valores muy grandes o muy pequeños. - Reconocen la falla en el modelo lineal
A2	Intuyen que no es proporcional, pero no justifican (29,16%)	- Afirman que el modelo "da errores", "no predice bien" o "se inventa números". - No señalan alguna justificación.
A1	No comprenden la pregunta (16,66%)	- No logran interpretar la pregunta

Los estudiantes que alcanzan el indicador **B3** emplearon de forma óptima las funciones del entorno. Estos estudiantes, mediante la manipulación de valores, observaron, interpretaron y cuestionaron la validez de la suposición hecha en el transcurso de la tarea; el comportamiento lineal de las variables. En consecuencia, su respuesta probablemente da cuenta un uso reflexivo del entorno. Los estudiantes posicionados el indicador **A2** llevaron a cabo una interacción con el entorno, pero esta fue parcial debido a que no establecieron una relación concreta entre lo observado a partir de la manipulación y el cambio de las variables en un sentido matemático. Quienes se ubican en el indicador **A1** no lograron interactuar activamente con el entorno, ya sea por falta de comprensión de la pregunta o porque no relacionaron lo visto en el entorno con el comportamiento de las variables.

Pregunta 13

Tabla 33

Pregunta 13 T1 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
13. ¿Cuáles son las limitaciones del modelo lineal?	**(AM2-1_2)** Establece razones por las cuales el modelo lineal no es óptimo para esta situación.	- El modela no sirve o presenta errores cuando se ingresan valores muy altos o muy bajos. - La razón de cambio no es constante todos los casos. - El modelo sirve solamente para ciertos valores.

Para la pregunta final un 45.83% de los estudiantes señalaron en sus respuestas información relacionada con lo que se esperaba pues reconocen limitaciones del modelo. Estos estudiantes indican que el modelo solo es válido valores específicos. Por ejemplo:

- Estudiantes: "*Que solo funciona bien para un rango de grosores y pesos, si te sales de ahí ya no es confiable*"

Por otra parte, el 33.33% de los estudiantes afirman que el modelo lineal no representa generalmente la realidad o que las cosas no siempre siguen una línea recta. Estos estudiantes muestran una mirada crítica frente al modelo, pero no argumentaron su respuesta desde una mirada contextual. Finalmente, el 20,83% de los estudiantes establecen que el modelo no tiene en cuenta otras variables importantes en la situación, como por ejemplo el material o la mano de obra. Estos estudiantes posiblemente razonaron en dirección al realismo del modelo y no en un sentido matemático.

En cuanto a la abstracción situada es posible realizar la siguiente categorización:

Tabla 34
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T1_P13

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B3	El modelo no sirve en todos los casos (45.83%)	- Reconocen que el modelo solo funciona para algunos valores.
A2	Cuestionan la linealidad en términos realista (33.33%)	- Afirman que en la realidad no todo es lineal.
	El modelo no tiene en cuenta otras variables (20,83%)	- Señalan la importancia de observar otras variables.

Los estudiantes que se ubican en **B3** hicieron un uso activo del LVM ya que observaron los límites de la función representada expresando ideas como “no es confiable si te sales del rango” o “tiene límites”. Esto puede indicar que el LVM tuvo un papel mediador para modificar sus concepciones previas. Los estudiantes en el indicador **A2** probablemente también interactuaron con el entorno y mostraron una postura de desconfianza frente al modelo, ya sea por su acercamiento a la realidad o por la falta de consideración de otra variable que pueden influir.

4.1.1. Balance de los resultados de la Tarea 1

Enseguida se sintetizan los principales hallazgos obtenidos mediante el análisis realizado de cada una de las respuestas a las preguntas que conformaron la 3.3.2 Tarea 1. En este se señalan algunas tendencias, logros y aspectos por mejorar.

En primer lugar, se observan diferentes niveles de alcance en cuanto a los indicadores del PV, pues en algunas preguntas los estudiantes muestran un alto nivel de alcance; sin embargo, en otras preguntas se evidencian ciertas dificultades. Por ejemplo, en las preguntas 4, 5, 8, 9 y 10 la totalidad de los estudiantes respondieron de acuerdo con lo esperado, recordemos que en estas preguntas se requería el uso o análisis del modelo en su expresión algebraica. Los resultados no son sorprendentes, al contrario, ratifican lo mencionado en la descripción de la problemática y se encuentra en concordancia con lo que indica Vasco (2002) ya que en algunas instituciones se privilegia el estudio de las reglas y procedimientos algebraicos y en este caso se evidencia que, por parte de los estudiantes, existe un buen manejo de dichas expresiones.

En las preguntas la 6, 11 y 12, el porcentaje de respuestas esperadas se encuentra entre 54% y 75%, es decir, más de la mitad de los estudiantes logra establecer conjeturas sobre la dirección del cambio entre las variables implicadas. Recordemos que en estas preguntas se pretendía que los estudiantes interpretaran las relaciones entre las variables o que identificaran la pertinencia del uso de un modelo. En este caso, se observan resultados alentadores frente al desarrollo del PV pues estas preguntas le apuntaban a lo establecido por el MEN (2004) en cuanto al estudio de la variación y el cambio a partir de una situación contextualizada. Al observar las respuestas de las preguntas 1, 7 y 13 pareciera que menos de la mitad de los estudiantes alcanzó la respuesta esperada, sin embargo, dentro del conjunto de categorías identificadas para cada pregunta, estos porcentajes representan el grupo mayor. Esto podría indicar que estas preguntas generaron caminos para el desarrollo del PV.

En segundo lugar, desde la mirada de la abstracción situada, un grupo de estudiantes se ubicó en el indicador **B3**, específicamente en las preguntas 6, 11 y 13. Esto puede indicar que el entorno sirvió para transformar ideas previas sobre proporcionalidad y el comportamiento lineal entre dos variables. Sin embargo, una cantidad considerable de estudiantes se ubicó en el indicador **A2** ya que usan el simulador, manipulan los elementos e identifican variables, pero no logran establecer relaciones entre lo observado y los conceptos matemáticos involucrados. Un número menor de estudiantes se encuentra en el indicador **A1** o **B0**, especialmente en preguntas que implican una interpretación conceptual como, por ejemplo, las preguntas 3, 7 y 12. En estos casos, no se evidencia una comprensión clara de la variación ni de la función representada, lo cual sugiere la presencia de dificultades con el uso del entorno y su conexión con conceptos matemáticos.

4.2 Tarea 2

Luego de que los estudiantes reconocieran que un modelo lineal no es apropiado para representar una situación en la que el cambio de las dos variables no es constante, se procedió a presentarles la 3.3.3 Tarea 2 realizando antes una retroalimentación de lo realizado en la 3.3.2 Tarea 1.

Pregunta 1

Tabla 35
Pregunta 1 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
1. ¿Qué falló? (En relación con lo hecho en la tarea 1)	**(AM1-2)** Establece la correlación de las dos variables que intervienen en una situación.	Se espera que el estudiante reporte que el fallo consistió en considerar un modelo de lineal, aun cuando los valores no tenían un comportamiento lineal.

De acuerdo con la pregunta, los estudiantes debían reportar la razón por la cual ellos consideraban que había fallado el ejercicio realizado en la 3.3.2 Tarea 1, especialmente, con la elaboración del modelo lineal. Las respuestas reportadas por los estudiantes a esta pregunta se clasificaron en cuatro categorías: aquellos que manifestaron reconocer que la relación no era lineal, aquellos qué manifestaron que el modelo no era adecuado sin especificar demasiado, aquellos que asumieron que la recolección de los datos no fue precisa y, por lo tanto, el modelo tampoco lo sería y aquellos que no sabían o no contestaron.

En este orden de ideas, el 43.5% de los estudiantes reportaron que el error se había dado por qué los datos recolectados no demostraban un comportamiento lineal. Algunas de las respuestas proporcionadas por estudiantes que se categorizaron en este grupo, fueron: "*la relacion entre el grosorr y la resitencia n era lineaal el modlo lineaal no coincidia con los daatos reales llevando a predicciones erróneas"* [sic], "*los datos no seguian una línea*" [sic]. Esto permite concluir que una buena parte de los estudiantes reconocieron que lo realizado en la 3.3.2 Tarea 1 (determinar un modelo para la relación entre las variables en juego), falló porque se tuvo en cuenta un modelo lineal. El reconocimiento de esto hecho por parte de los estudiantes, tiene que ver con varios asuntos: el primero, es que en el graficador de la 3.3.2 Tarea 1, era posible evidenciar que los puntos no seguían una tendencia lineal. El segundo, es que al probar el modelo y comparar los resultados con los datos arrojados en la experimentación con el simulador, estos no coincidían. El tercero, está relacionado con el hecho de que los estudiantes reconocieron que el cambio en la variable del grosor y el cambio de la variable del peso del tren del metro, no era constante. Aunque este último no se reporta explícitamente en las respuestas, las intervenciones posteriores de los estudiantes permiten afirmarlo.

Por otro lado, el 21.7% de los estudiantes respondieron a la pregunta indicando que ese modelo no era el adecuado y su respuesta se limitó a ello, pues no hubo explicación adicional. Respuestas como: "*la formula que usamos no era la adecuada para esta situación*" o "*estabamos usando una formula equivocada no era la que se usa para este tipo de estructuras”* [sic], sugieren que los estudiantes reconocieron la ineficacia del modelo planteado. Sin embargo, la no justificación de sus afirmaciones podría deberse a que aún no cuentan con las herramientas conceptuales suficientes para justificar, en este caso, por qué no es pertinente el modelo lineal.

El 17.4% de los estudiantes cuestionaron los datos y se preguntaron sobre su calidad y aludieron a que el fallo se debía a la forma en la que estos fueron recogidos. Por ejemplo:

- Estudiante: “*fallo por que probablemente las mediciones iniciales del grosorno fueron tan precisas*” [sic].
- Estudiante: *“la s medidas no se tomaron bien por y eso afecto el resultado”* [sic].

Estas consideraciones por parte de los estudiantes muestran que su atención no estaba precisamente el modelo, sino más bien en los datos que se tuvieron en cuenta. Es posible que hayan asumido que la causa del problema no está realmente ligada al modelo utilizado, sino que subyace de problemas asociados a la fiabilidad de los datos.

Finalmente, el 10% de los estudiantes no respondieron o mencionaron que no sabían, lo cual podría estar relacionado con dificultades para comprender la situación o al establecer la relación entre las variables involucradas en los fenómenos de variación.

Respecto de la abstracción situada, se muestra en la Tabla 36 la categoría de las respuestas, una descripción de estas y su respectiva clasificación en términos de los indicadores:

Tabla 36
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P1

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
C2	La relación entre las variables no era lineal (43.5%)	- Reconocen que el problema fue no tener en cuenta que la relación entre las variables en cuestión no es lineal. - Reconocen que el comportamiento de los datos, basándose en la representación gráfica, no sigue una tendencia lineal. - Identifican que el modelo no corresponde con los datos arrojados por el simulador.
B1	Modelo no adecuado / sin detalles (21.7%)	- Reconocen que el modelo utilizado no es adecuado y no justifican por qué
D1	Errores en los datos (17.4%)	- Mencionan que hay errores en la toma de los datos
A1	No sabe / No responde (21.7%)	- No responden. - Expresan no comprender la situación. - Interacción limitada o sin sentido.

Lo anterior sugiere que los estudiantes ubicados en el indicador **C2** lograron establecer relaciones entre las variables del grosor de la dovela y del peso del tren, a partir de la internación con el entorno y, con base en este, pudieron establecer conjeturas como "*si en la representación gráfica los puntos no tienen una tendencia lineal, entonces no se puede usar un modelo lineal*" o "*establece relaciones entre las variables y propone* *conjeturas a partir de sus manipulaciones"*, aunque no se explicitaron. Los estudiantes ubicados en el segundo grupo **B1** lograron reconocer que el modelo lineal no era el apropiado para la situación; sin embargo, las respuestas proporcionadas por los estudiantes carecen de sustento matemático, lo cual indica que este grupo de estudiantes logró establecer relaciones entre los elementos del LVM, pero no al punto de justificarlas o relacionarlas con ideas matemáticas. Los estudiantes ubicados en el indicador **D1**, manipulan elementos, relacionan variables y reconocen relaciones entre los elementos del entorno, aunque sin tener en cuenta asuntos propiamente matemáticos. El último grupo de estudiantes, es decir, los clasificados en el indicador **A1**, demuestran una interacción limitada con el entorno, escasa asimilación de las herramientas del LVM y una comprensión reducida de la tarea.

Pregunta 2

Tabla 37

Pregunta 2 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
2. ¿Por qué un modelo lineal podría fallar al predecir la resistencia de una dovela?	**(AM1-2)** Establece razones por las cuales el modelo lineal no es óptimo para esta situación.	Se espera que el estudiante reporte que el modelo lineal puede fallar en predecir la resistencia de una novela, ya que, por lo menos en este caso, el cambio de cada variable no es contante.

En esta pregunta los estudiantes debían registrar la razón por la cual para ellos un modelo lineal puede fallar al predecir la resistencia de una dovela. Como se esperaba que las respuestas de los estudiantes estuviesen relacionadas con la identificación de una relación no lineal o la no proporcionalidad en las variables, se clasificaron en cuatro categorías.

La primera categoría corresponde a aquellas respuestas que aluden a la no linealidad de las variables. La segunda categoría incluye las que mencionan que el modelo *falla*, pero sin explicar la razón. Por último, la tercera categoría comprende aquellas respuestas son del estudiante manifiesta no saber o simplemente no respondió.

De este modo, el primer grupo de estudiantes, que corresponde a la primera categoría y al 66.7% del total del curso, se refieren explícitamente la no linealidad o a la no proporcionalidad de la relación entre el grosor de las dovelas y el peso del tren del metro. Los estudiantes identificaron correctamente que la resistencia no sigue una relación directamente proporcional con el grosor, asunto primordial para considerar un modelo lineal. A continuación, se muestran algunas respuestas de los estudiantes que permiten evidenciar una comprensión adecuada de por qué un modelo lineal no es oportuno en ese contexto.

- Estudiante: "*no es una relación proporcional entre el grosor y el peso que soporta*" [sic].
- Estudiante: *"el cambio de los y con respecto a los x no es el mismo todo el tiempo"* [sic].
- Estudiante: *"porque hay una relación no lineal lo dice el gráfico, los puntos no son colineales"* [sic].

El 12.5%% de los estudiantes identificaron que el modelo no es pertinente sin proporcionar una justificación clara. Respuesta como "*no predice bien y puede ocasionar accidentes*" [sic] o "*porque no es seguro para esta situacion*" [sic], indican que los estudiantes logran percibir que el modelo lineal no es el adecuado, pero no ahondan en los motivos de carácter matemático que subyacen a sus afirmaciones. Parece que, intuitivamente, los estudiantes reconocen los peligros de utilizar un modelo poco preciso, esto es lo que les hace relacionar la falla del modelo con los riesgos de seguridad que se pueden presentar. Las respuestas dan cuenta de una comprensión parcial de la situación. Aunque los estudiantes reconocen que el modelo no funciona adecuadamente, no justifican matemáticamente la razón por la cual fallaría.

Finalmente, el 20.8% de los estudiantes respondieron que no sabían o no respondieron. Esto puede ser reflejo de dificultades relacionadas con la comprensión de la situación, carencia de herramientas conceptuales o desmotivación para el desarrollo de la tarea.

A la luz de la abstracción situacional, es posible ubicar a los estudiantes en los siguientes indicadores (Tabla 38).

Tabla 38

Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P2

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B4	Aluden a la no proporcionalidad directa o a la no linealidad entre las variables (66.7%)	- Reconocen que el modelo falla y explican por qué
B2	Intuyen que el modelo lineal falla, pero no justifican (12.5%)	- No señalan justificación. - Afirman que “no es seguro” o que “no predice bien”.
Z1	No saben / no responden (20.8%)	- No responden la pregunta. - Responden no saber explícitamente.

Los estudiantes clasificados en el indicador **B4**, justificaron sus afirmaciones refiriéndose a ideas matemáticas cercanas a las formales, asunto que se dio junto con la interacción y manipulación de los elementos del LVM. Los estudiantes del indicador **B2** interactuaron con el LVM y observaron relaciones entre las variables, pero no las formalizaron. Los demás estudiantes fueron ubicados en el indicador **Z1**, dado que a pesar de su interacción con los elementos del LVM, parece que no reconocen relación entre las variables.

Pregunta 3

Tabla 39

Pregunta 3 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
3. ¿Cómo se podría corregir esto?	**(AM2-1_2)** Formula conjeturas sobre la dirección del cambio de las variables, a partir de la representación gráfica y algebraica.	Se espera que el estudiante mencionase que esta situación se puede estudiar con otros modelos.

De acuerdo con la pregunta y las respuestas de los estudiantes, el 62.5% de los estudiantes respondieron en concordancia con lo esperado ya que se refieren explícitamente a usar otro modelo. Las respuestas incluyen:

- Estudiante: "*usando otro modelo*".
- Estudiante: "*con una funcion que no sea lineal*" [sic].
- Estudiante: "*con tras funciones*" [sic].

Lo anterior muestra que los estudiantes han identificado que el problema requiere trabajarse desde una perspectiva diferente a la lineal, lo que sugiere que han logrado reconocer características de la relación entre las variables y comprender que el modelo trabajo previamente no era adecuado. Sin embargo, aún podrían precisar qué otros tipos de modelos alternativos pueden resultar efectivos para el desarrollo del problema.

El 8.3% de los estudiantes aludieron a que, para corregir el error, se debían corregir las mediciones o tener “tener datos exactos”. Entre las respuestas se pueden observar las siguientes: “*tomar mejor los datos*” y “*con datos exactos para saber bien que es lo que hay que hacer*”. Estos estudiantes perciben el problema como un error en los datos y en la recolección más que en la elección inadecuada del modelo. Dicho de otra forma, consideran que la precisión de los datos es indispensable para mejorar la predicción, en lugar de aludir a que el modelo por sí mismo no es apropiados para la situación.

Por otro lado, el 12.5% de los estudiantes proporcionó respuestas en las que, no lograron ser interpretadas por los investigadores, puesto que, debido a su estructura o contenido, no ofrecían elementos suficientes para establecer un significado como parte del análisis, lo que llevó a una categorización propia. A continuación, se muestran algunas de las respuestas:

- Estudiante: “*se podria corregir si hay mas informacion”* [sic].
- Estudiante: “*conociendo mejor el problema*”.

Finalmente, el 16.7% de los estudiantes no responden, es decir, dejan en blanco, o señalan explícitamente no saber, lo cual podría estar relacionado con la no comprensión de la tarea. En la Tabla 40 se exponen los indicadores de la abstracción situada bajo los cuales se clasificaron a los estudiantes, de acuerdo con las categorías de sus respuestas:

Tabla 40
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P3

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
C2	Usar otros modelos (62.5%)	- Reconocen que el modelo lineal no aplica para esta situación - Mencionan que se debe usar otro modelo

		- No específica que otro tipo de modelo usar.
A2	Los datos no son exactos (8.3%)	- El fallo de debe a la toma de los datos o a que son “inexactos”
	Respuestas atípicas (12.5%)	- Respuestas que no lograron ser clasificadas en ninguna categoría.
Z1	No sabe / No responde (16.7)	- No responden

Los estudiantes ubicados en el indicador **C2**, muestran que tuvieron una interacción activa con el LVM, debido a que lograron establecer, por medio de la interacción y manipulación de los elementos que componen dicho entorno, que la solución consistía en probar con un modelo diferente. Por otro lado, los estudiantes ubicados en **A2**, que corresponden como tal a dos categorías, reflejan que hubo interacción parcial con las herramientas del LVM, aunque sus respuestas sugieren que no hubo posibilidad de establecer relaciones entre las mismas. Finalmente, los estudiantes ubicados en **Z1**, no establecieron relaciones ente los objetos matemáticos involucrados en la situación.

Las preguntas anteriores tuvieron como objetivo principal reforzar la idea de que la selección del modelo es fundamental según el tipo de situación, y en particular, según la forma en la que cambian una variable con respecto de la otra. Además de ello, también se trabajó en la compresión de las características del modelo lineal, favoreciendo en análisis de sus propiedades y también de sus limitaciones.

A partir de este trabajo, las preguntas que se muestran a continuación están relacionadas específicamente con aspectos específicos que aborda un modelo cuadrático. Este cambio de enfoque favorecerá la comprensión de nuevas relaciones matemáticas y comparar ambos modelos. Los estudiantes, en este punto, comienza la experimentación con un simulador que les indica exactamente cuánto peso resisten las dovelas.

Preguntas 4 y 5

Tabla 41

Preguntas 4 y 5 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
4. ¿Aumenta la resistencia de manera proporcional al grosor? 5. ¿Cuándo duplicamos el grosor de 20 a 40 cm, el peso que resiste se duplica también?	(**AM2-1)** Comunica la dirección del cambio del valor de salida considerando los cambios en el valor de entrada, a partir del uso de expresiones verbales, tablas y gráficas. **(AM3-1)** Manifiesta la cantidad de cambio del valor de salida en términos del cambio en el valor de entrada, empleando diferentes representaciones (expresiones verbales, tablas y gráficas).	Como respuesta se esperaba que se dijera que no, que una crece más rápido que la otra.

Para las preguntas 4 y 5, el 95.8% de los estudiantes respondieron que la carga no aumenta de manera proporcional al grosor mientras que el 4.8% no respondió la pregunta. Aunque la gran mayoría de los estudiantes respondió “*no*”, ninguno de ellos hizo alusión a que una de las variables crece más rápido que la otra. Lo anterior indica una comprensión adecuada de la variación entre estas dos variables. Sin embargo, es importante considerar que las respuestas de los estudiantes pudieron estar influenciadas por la intervención del profesor, dado que algunos de ellos manifestaron experimentar dificultades para responder la pregunta, lo que llevo a los estudiantes a solicitar orientación.

En este orden de ideas, se categorizaron a los estudiantes que respondieron “*no*” en el indicador **C2** de la abstracción situada ya que se evidencia articulación entre la respuesta y su interacción con los elementos del LVM. Por otro lado, los estudiantes que no respondieron se ubicaron en el indicador **A0**, pues las respuestas sugieren falta de comprensión o falta de interacción con el entorno.

Pregunta 6

Tabla 42

Pregunta 6 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
6. ¿Por qué ocurre esto, es decir, por qué no se duplica?	**(AM1-2)** Establece la correlación de las dos variables que intervienen en una situación.	Repuesta esperada: el cambio no es contante, no hay una relación proporcional entre grosor y peso.

En esta pregunta, el 66.7% de los estudiantes aludieron en sus respuestas a la proporcionalidad o al cambio, un ejemplo de ello es:

- Estudiante: “*por que el cambio de las variables no es contante*” [sic].
- Estudiante: “*no se duplica porque uno cambia más rápido que el otro*”.

Este grupo de estudiantes demuestra una comprensión adecuada de la situación, la cual se ha venido construyendo a partir de las preguntas anteriores. Indican, además, que hay análisis completo de la situación de la forma en las que cambian las variables. Por otro lado, el 16.7% de los estudiantes, aludieron a que los valores de las variables no se duplican porque no corresponde a un modelo lineal. Algunas de sus respuestas se muestran continuación: “*no es una funcion lineal*” [sic] y “*no es una linea recta exacta*” [sic]. Si bien en las respuestas de los estudiantes se puede rastrear que hacen referencia a que como el modelo no es lineal, entonces los datos de ciertos valores no se duplican. Este reconocimiento es significativo y sugiere que los estudiantes han interiorizado algunas de las limitaciones del modelo lineal, comprendiendo que este modelo no es aplicable para todas las situaciones.

Finalmente, 16.6% de los estudiantes respondieron explícitamente que no sabían o no respondieron.

En la Tabla 43, se muestran los indicadores de la abstracción situada en los que clasificaron a los estudiantes de acuerdo con sus repuestas.

Tabla 43
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P6

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
C3	Aluden al cambio o a la proporcionalidad (66.7%)	- Reconocen que la relación entre las variables no es lineal por la forma en la que cambian la variable dependiente e independiente.
B3	Aluden directamente al modelo (16.7%)	- Reconocen las limitaciones del modelo desarrollado en la tarea 1.
A1	No sabe / no responde (16.6%)	- No responden - Responden explícitamente “no sé”

De la información anterior, es posible determinar que los estudiantes clasificados en el indiciador **C3** tuvieron una interacción con el LVM que les permitió reconocer el cambio entre las variables o modificar sus ideas previas sobre por qué no se duplican. Fue mediante esta iteración que pudieron observar directamente cómo el cambio en las variables afectaba el comportamiento de la estructura, lo que les ayudó a construir una comprensión basada en la evidencia. Caso similar sucedió con los estudiantes categorizados en el indicador B3, pues, a pesar de que su respuesta no está relacionada directamente con la esperada, puede que la intención fue comunicar que el cambio de las variables no era constante.

Hasta este punto, los estudiantes han desarrollado como tal una experimentación en la cual realizaron una recolección de datos con el simulador que arroja exactamente el peso que resisten las dovelas, han encontrado las primeras y segundas diferencias de la variable independiente y se percataron de que el modelo que mejor se ajusta a la situación era el modelo cuadrático.

Preguntas 7 y 8

Tabla 44
Preguntas 7 y 8 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
7. ¿Cuál es el peso que resiste una dovela de 38 cm de grosor? 8. ¿Y una dovela de 54 cm de grosor?	**(AM3-1)** Utilizar la expresión algebraica establecido con anterioridad para calcular el peso que resiste.	Se esperaba que el estudiante hiciera uso del modelo encontrado, en su representación algebraica, y comprobara con el simulador si los resultados era los mismos, es decir, si la predicción era exacta.

La totalidad de los estudiantes respondieron correctamente a esta pregunta, lo cual muestra un manejo adecuado de las expresiones algebraicas. Esto les confirmó a los estudiantes que se trataba del modelo adecuado para la situación, ya que las predicciones que se realizaban con este coincidían con los datos arrojados por el simulador.

En relación con los indicadores de la abstracción situacional los estudiantes se clasificaron en el B4 dado que sus respuestas implican un uso del modelo que se construyó previamente durante la interacción con el LVM.

Pregunta 9

Tabla 45
Pregunta 9 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
9. ¿Qué ventajas ofreció el modelo cuadrático en este caso?	**(AM1-2)** Establece correlación entre las variables y reconoce que la curvatura de los datos se capta mejor con un modelo lineal.	Se espera que el estudiante responda que el modelo cuadrático ofreció una mayor precisión en el ajuste de los datos y que se ajusta mejor a la situación que se aborda.

De acuerdo con la pregunta, los estudiantes debían responder sobre las ventajas que ofreció el modelo cuadrático para el desarrollo de la tarea. Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en cinco categorías diferentes: aquellas que afirman que la predicción mejoró, aquellas que mencionan que el modelo permitió comprender mejor la relación entre los datos, aquellas que señalan que los puntos se ajustan mejor a una curva, aquellas que quedan en blanco y manifiestan no saber la respuesta y, finalmente, aquellas que no lograron ser clasificadas en ninguna de cuatro categorías mencionadas previamente porque lo que se reporta en ellas no es interpretable en el contexto de la pregunta.

En este orden de ideas, el 12.5% de los estudiantes se ubican en la primera categoría, es decir que, en sus respuestas a la pregunta, se refieren particularmente a que el modelo permitió comprender mejor la relación entre los datos. A modo de ejemplo, se muestran a continuación algunas de las respuestas:

- Estudiante: “*que la prediccion es mejor*” [sic].
- Estudiante: “*que es mas preciso*” [sic].

En las repuestas, es posible observar que, aunque los estudiantes explícitamente mencionaron que la predicción era mejor, no profundizaron en aspectos propios de la situación y como este se ajustaba a la misma. Es posible que, por la forma en la que está formulada la pregunta, haya inducido a respuestas breves, lo cual sugiere que se debería reformular. La falta de profundidad en las repuestas no indica que necesariamente haya desconocimiento frente a las herramientas conceptuales, sino más bien una posible limitación en la especificidad o claridad del enunciado de la pregunta.

El 20.8% de los estudiantes se refirieron a que el modelo permitió comprender mejor la relación entre las variables. A continuación, se muestran algunas de sus respuestas:

- Estudiante: "*saber cual era la relacion entre las dos variables*" [sic].
- Estudiante: "*que permitio saber como se relacionaban las variables*" [sic].

En lo anterior, es posible observar que, aunque los estudiantes explícitamente mencionaron saber cómo se relacionaban las variables, ninguno profundizo en describir como se manifestaban los cambios de dicha relación. En otras palabras, se puede evidenciar que las respuestas se limitan a afirmar que se obtuvo información sobre, dejando de lado una explicación específica en la forma de cambio. Es posible que estas respuestas se deban a que los estudiantes se sientan inseguros acerca de cómo expresar los cambios a los que se refieren. Para fomentar respuestas más precisas, se podría solicitar a los estudiantes que expliquen con ejemplos la forma en que se reflejan los cambios.

El 33.3% de las respuestas corresponden a la tercera categoría, es decir, a aquellas que mencionan que los puntos se ajustan mejor a la curva. Por ejemplo: "*los puntos cuadraban en la grafica*" [sic], "*el modelo cuadratico hacia q los puntos se vieran bien ubicados*" [sic] y "*se veia que el modelo cuadratico funcionaba mejor q la recta*" [sic]. Lo anterior, sugiere que los estudiantes se limitaron a evaluar de forma descriptiva cómo los datos se veían en el gráfico, sin hacer énfasis en análisis de las ventajas que el modelo cuadrático ofreció. Esto puede indicar que se hizo especial énfasis en la identificación visual del ajuste sin abordar aspectos analíticos que enriquecieran la comprensión del modelo.

El 16.7% de los estudiantes respondieron a la pregunta indicando "*no sé*" o no respondieron, lo que indica que para este grupo el enunciado pudo no haber sido lo suficientemente claro o que se no tenían. Finalmente, el 16.7% restante, en sus repuestas manifestaron asuntos que fueron difíciles de interpretar: por ejemplo: "*saber cuanto* *soporta realmente*" [sic]. "*ese modelo iba mas con los puntos que teniamos*" [sic], "*que el cambio no era igual*" [sic] y "*porquese veia una forma curvada y no recta*" [sic]. Sus explicaciones carecen de precisión toda vez que no se refieren a las ventajas que ofrecía el modelo en términos de la situación planteada en la tarea.

En conclusión, los resultados de esta pregunta hacen reflexionar sobre dos oportunidades: la primera, se refiere a la clarificación del enunciado y la segunda, al fortalecimiento de las herramientas conceptuales implicadas en la tarea.

Al respecto de los indicadores de la abstracción situada, se muestra a continuación la forma en la que se clasificaron a los estudiantes de acuerdo con las categorías de respuestas (Tabla 46).

Tabla 46
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P9

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
B2	Mejoró la predicción (12.5%)	- Reconocen que el modelo mejoró la predicción
B0	Permitió comprender la relación entre los datos (20.8%)	- Indican identificar la relación real entre los datos - No profundizan en sus explicaciones
	Mejoró el ajuste de los puntos a una curva (33.3%)	- Indican que los puntos se ajustan a la curva - No profundizan en sus explicaciones
A1	No sabe / No responde (16.7%)	- No responden Responden explícitamente "*no sé*"
A2	Repuestas atípicas (16.7%)	- Respuestas que no lograron ser clasificadas en ninguna categoría.

Basados en lo anterior, los estudiantes ubicados en el indicador **B2** interactúan con el LVM de una forma parcial, pues, aunque sus respuestas están cerca de lo esperado, se evidencia que no hay una formalización, por lo limitadas que fueron. Los estudiantes del indicador **B0**, muestran uso del entrono sin lograr establecer ventajas explicitas generadas por el uso de un modelo cuadrático. Esto es que se utilizó el entorno para extraer información peor no para analizar de forma contextualizada los resultados que obtenían con la experimentación. Los estudiantes agrupados en el indicador **A1**, revelan la poca interacción con el LVM, sin que logren establecer relaciones entre los elementos interactivos. Finalmente, los estudiantes del indicador **A2**, manipulan los elementos del entorno, pero no establece relaciones entre ellas lo que puede conducir al expresar ideas salidas del contexto de la pregunta o que no son claras.

Pregunta 10

Tabla 47

Pregunta 10 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
10. ¿Será el modelo cuadrático el mejor modelo para este problema?	**(AM1-2)** Establece relación entre el modelo cuadrático y el conjunto de datos proporcionado, reconociendo que para esos datos, el modelo se ajusta adecuadamente.	Se espera que los estudiantes digan que sí hay coincidencia (por lo menos con el conjunto de datos que se estudiaron) entre el modelo y los datos que se proporcionaron.

Para esta pregunta los estudiantes se categorizaron en tres grupos. El primero de ellos, que corresponde al 37.5%, reporta en sus respuestas que el modelo sí funciona con los datos, pero que se debe probar con otros más allá de los proporcionados. Algunas de sus respuestas fueron: "*no se sabe, puede que si pero falta ver mas*" y "*puede que si pero falta ver con otros datos*". Lo anterior sugiere que los estudiantes reconocieron que, aunque el modelo funciona para los datos que se proporcionaron en el simulador, es necesario probar con otros datos diferentes para garantizar que el modelo es la mejor solución para el problema. Esto quiere decir que los estudiantes entienden la importancia de la selección de un modelo, mostrando una actitud crítica que evita conclusiones apresuradas como lo que sucedió con el modelo lineal construido en la 3.3.2 Tarea 1.

Por otro lado, se encuentran los estudiantes que respondieron que "*sí*", es decir la segunda categoría, pero no justificaron por qué (41.7%). Aunque este tipo de respuesta es correcta, resulta superficial ya que no se explicitan los argumentos o evidencias que la respalden. Esto puede deberse a una compresión parcial del análisis pues a pesar de saber conceptualmente que el modelo parece apropiado, no se evidencia la capacidad de cómo y porque llegan a esa conclusión. Finalmente, la tercera categoría agrupa a aquellos estudiantes que reportaron no saber o simplemente no respondieron (20.8%).

Tabla 48
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P10

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
C4	Responde que sí e indican que se deben observar otros datos.	- Son críticos en la funcionalidad del modelo - Reportan que sí y van más allá proponiendo explorar más datos.
B2	Responden que sí pero no profundizan.	- Afirman que si funciona - No señalan justificación alguna.
A1	No sabe / No responde	- No responden - Responden "*no sé*"

Pareciera que los estudiantes que se ubican en el indicador C4, logran expresar sus ideas relacionadas con el trabajo realizado en el LVM de manera formal. La interacción que tuvieron, tanto en la 3.3.2 Tarea 1 como en esta, con los simuladores y demás elementos interactivos, les permitió configurar sus ideas al respecto de la selección de un modelo adecuado para el desarrollo de alguna situación de variación. Por otra parte, quienes respondieron que sí pero no justificaron, revelan una interacción con el entorno, quizá de una forma menos precisa que los que se ubicaron en C4.

Pregunta 11

Tabla 49
Pregunta 11 T2 – Indicador del PV – Respuesta esperada

Pregunta	Indicador de PV	Respuesta esperada
11. ¿Existen otros modelos que podrían funcionar aún mejor?	**(AM2-1_2)** Formula conjeturas sobre la dirección del cambio de las variables, a partir de la comparación entre diferentes representaciones.	Se esperaba que el estudiante respondiera que no se sabe porque no hay información de más datos fuera de los proporcionados por la Tarea.

Para esta pregunta, la información proporcionada por los estudiantes fue clasificada en las siguientes categorías: la primera, que corresponde al 54.2% de los estudiantes, alude a aquellas respuestas que afirman mencionar que es posible que sí haya otros modelos que funcionen mejor, pero que habría que tener información sobre más datos. Por ejemplo:

- Estudiante: "*no se sabe pq no hay mas datos. si funciona con estos datos pero no se sabe si con otros tambien*" [sic].

Estas expresiones reflejan que los estudiantes reconocen las limitaciones que tiene la información disponible además de ser críticos ante la precisión del modelo. Esta postura demuestra un razonamiento crítico que va más allá de un simple ajuste a un conjunto de datos reducido.

La segunda categoría agrupa al 33.3% de los estudiantes quienes manifestaron que no es necesario otro modelo porque como la predicción del modelo cuadrático coincidía con los datos arrojados por el simulador, la situación ya estaba completamente resuelta. Puede que los estudiantes de este grupo hayan prescindido de la posibilidad de la existencia de limitaciones del modelo actual, sin considerar las necesidades de validación con datos adicionales y diferentes.

Finalmente, el 12.5% de los estudiantes, que corresponde a la tercera categoría, mencionaron no saber o no respondieron.

Tabla 50
Indicadores Abstracción Situada relacionados y Categoría de respuestas T2_P11

Indicadores de Abstracción Situada relacionados	Categoría de respuestas	Descripción de las respuestas
D4	Puede que se necesite otro modelo, pero se requieren más datos.	- Reconocen que el modelo actual funciona - Reconocen que se requieren más datos para concluir si el modelo se adapta completamente a la situación.
B0	No hay necesidad de otro modelo	- No se requiere de otro modelo ya que este es exacto para los datos dados.
A1	No sabe / No responde	- Responde "*no sé*" - No responde

Los estudiantes ubicados en el nivel **D4**, muestran una interacción profunda con el entorno que quiere decir que no solo manipulación de los elementos interactivos y simuladores, sino que usan estos recursos para comprender las relaciones matemáticas involucradas en la situación de manera formal. Quienes se clasificaron en **B0**, reconocen empíricamente que el modelo es adecuado, pero su respuesta no va más allá de una observación sin fundamento. Esto indica que los estudiantes interactuaron con el LVM, manipulando sus elementos y variables de la tarea, pero no lograron establecer relaciones subyacentes entre dichos elementos que permitan explicar el comportamiento de ese modelo.

4.2.1. Balance de los resultados de la Tarea 2

A continuación, se resumen los hallazgos encontrados a partir del análisis realizado a cada una de las preguntas que constituyeron la 3.3.3 Tarea 2. En primer lugar, es importante mencionar la tarea tenía como propósito que los estudiantes utilizaran el LVM para explorar, aplicar y justificar la pertinencia de un modelo cuadrático en una situación de variación. Es importante mencionar que, en el desarrollo de esta tarea, los investigadores, en ocasiones, intervinieron puntualmente realizando la contextualización y retroalimentación de la situación problema al comienzo de la tarea y respondiendo preguntas que se generaban en los estudiantes, al respecto de asuntos puntuales del contenido.

De manera general, el alcance de los indicadores del PV resulta aceptable, a pesar de observar que en ciertos casos no se logró lo esperado. Algunos estudiantes lograron establecer relaciones destacables y explicar relaciones matemáticas derivadas a partir de la manipulación e interacción con el LVM. De la misma manera que en la 3.3.2 Tarea 1, aquellas preguntas relacionadas con el manejo de expresiones algebraicas como las preguntas 7 y 8, nuevamente confirman el enfoque, por lo menos en la institución donde se llevó a cabo la investigación, en los contenidos asociados a los procedimientos algebraicos, porque las respuestas correctas fueron proporcionadas por más del 90% de los estudiantes.

En otras preguntas, se logra evidenciar que algunos estudiantes de forma empírica reconocieron que el modelo cuadrático coincidía con los datos proporcionados por la tarea, lo que sugiere que identificaron la correlación entre las variables del grosor de las dovelas y el peso del tren del Metro. Este hallazgo deja ver luces del desarrollo del PV ya que los estudiantes no solo perciben la relación entre las variables, sino que muestran un nivel inicial de crítica al respecto de la selección de un modelo oportuno para una situación que involucre la variación y el cambio. No obstante, en ocasiones, las explicaciones quedaron en niveles descriptivos sin profundizar mucho en la dirección o la cantidad de cambio cuando la pregunta lo requería.

Ahora bien, bajo la luz de la abstracción situada, los estudiantes se ubicaron en el indicador B2, por lo menos en las preguntas 2, 10 y 11, lo que indica que el entorno permitió a los estudiantes para transformar sus ideas iniciales, basadas en la manipulación e interacción con el LVM, y que a través de ellos vincularan elementos de la situación. Se evidencia un cambio significativo en la capacidad para modificar concepciones previas, abriendo camino hacia una comprensión más consolidada de la variación y el cambio que involucre un modelo cuadrático. No se puede dejar de lado que un cierto porcentaje menor del grupo de estudiantes se ubicó en los niveles A1 y B0, nuevamente con las preguntas que implicaban una comprensión clara de la variación, lo cual indica que hay dificultades para la con el uso del entorno y con las herramientas conceptuales asociadas a la tarea.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones que emergen del trabajo realizado. En primer lugar, se hace alusión al nivel de alcance de los objetivos trazados en el primer capítulo, se da respuesta a la pregunta de investigación y se realiza la verificación de la conjetura del experimento de enseñanza. En segundo lugar, se mencionan aspectos emergentes de la investigación y futuras proyecciones.

El objetivo general de esta investigación fue establecer de qué manera la implementación de un laboratorio virtual de matemáticas favorece el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. El nivel de alcance de este se expondrá enseguida, teniendo en cuenta el alcance de los objetivos específicos.

El primer objetivo específico se centró en conceptualizar la idea de LVM a partir de las concepciones de LM y de marcos conceptuales relacionados con entornos virtuales de aprendizaje. Este objetivo se cumplió a plenitud pues se llevó a cabo una revisión documental, ubicada en el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO, en la cual se detallaron los aspectos característicos del LM los cuales fueron adaptados a un entorno virtual, para dar lugar a la conceptualización del LVM que permitió el diseño de la página web y la secuencia de tareas que conformarían el LVM.

El segundo objetivo específico, se enfocó en diseñar el laboratorio virtual de matemáticas, así como las tareas del laboratorio que apunten a desarrollar el pensamiento variacional. Este objetivo se cumplió ya que con la conceptualización realizada del LVM, fue posible concretar los aspectos y momentos que caracterizan la actividad que se lleva a cabo en un LM, estos fueron trasladados a los momentos que conforman una tarea del

LVM; adicionalmente, los elementos teóricos relacionados con el PV, señalados en el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO, también permitieron tener un camino a seguir para la formulación de la situación estudiada en las dos tareas, junto con el diseño de las preguntas orientadoras que conducen a los estudiantes al desarrollo del PV.

Además, fue diseñada una página web en la cual se ubicaron las dos tareas. Para el diseño y construcción de esta página se tuvo en cuenta el marco de la abstracción situada en términos de la interacción del estudiante con el entorno digital pues, en efecto, la página permitió que el estudiante pudiera desarrollar las tareas únicamente interactuando con los objetos allí mostrados. Dichas interacciones consistieron en manipular deslizadores, completar tablas, observar en simultaneo diferentes representaciones de un mismo objeto matemático y en escribir sus ideas o resultados en un cuadro de texto.

El tercer objetivo específico, tuvo que ver con describir el impacto que tiene en el desarrollo del pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno la implementación de las tareas del laboratorio virtual de matemática. Este objetivo se cumplió puesto que las dos tareas fueron implementadas con 24 estudiantes de grado noveno, los resultados fueron analizados en el CAPÍTULO 4. RESULTADOS a la luz de los indicadores sobre el PV y de la abstracción situada.

Finalmente, podemos afirmar el objetivo general de esta investigación se cumplió pues, gracias a la ejecución de los objetivos específicos, se valoró como un LVM permitió promover el desarrollaron del PV de varios estudiantes de grado noveno. Recordemos que el propósito de ambas tareas fue principalmente evaluar la capacidad de los estudiantes para modelar situaciones de variación utilizando un entorno interactivo diseñado bajo los principios de una conceptualización propia de un LVM. Se buscaba que, a partir de la interacción con los diferentes elementos del entorno, los estudiantes lograran identificar relaciones entre las variables y elaboraran conjeturas sobre el comportamiento de este fenómeno. Cada una de las preguntas de ambas tareas, fueron diseñadas para profundizar en aspectos específicos del PV, permitiendo que no solo los estudiantes reconocieran empíricamente las relaciones, sino que formalizaran sus ideas mediante diferentes representaciones de los objetos matemáticos abordados.

La implementación de un LVM contribuyó a que los estudiantes manipularan y observaran cambios en la situación estudiada en tiempo real. En particular hubo un avance significativo en aquellos casos en los cuales los estudiantes se posicionaron en los indicadores B2 y B3 lo que demuestra una transformación en su pensamiento, producto de la interacción directa con el entorno. El laboratorio demostró ser un medio efectivo para promover el PV, ya que permitió centrar la atención en los procesos de cambio y no únicamente en la precisión algebraica o en la identificación de modelos formales. Aunque algunas tareas presentaron limitaciones en su diseño, los estudiantes lograron identificar críticamente las simplificaciones de los modelos propuestos, lo que evidencia avances importantes en el desarrollo del PV crítico.

Por otro lado, también es importante considerar que en varias preguntas se logró evidenciar que las explicaciones se limitaron a ser descriptivas sin profundizar en los procesos formales. Lo anterior resalta la necesidad de fortalecer la capacidad para transformar observaciones empíricas en argumento matemáticos más formales. Adicionalmente, se observó que algunos estudiantes mostraron un desarrollo del PV crítico, aludiendo a la falta de consideración de otras variables para el estudio de la situación, esto refleja una visión más allá de lo literal ya que, según sus afirmaciones, para estudiar este tipo de situación es importante tener en cuenta otras variables.

Entre las principales limitaciones observadas en las implementaciones, se destacan lo que previamente se venía mencionando y que está relacionado con el nivel descriptivo que una parte considerable de los estudiantes demostró en sus explicaciones. Como oportunidad de mejora, se recomienda ampliar las tareas con ejemplos complementarios o tareas adicionales para promover niveles superiores de formalización, (por ejemplo, alcanzar indicadores de la abstracción situada tipo C o D). También es posible mejorar el énfasis de las preguntas en términos del razonamiento de los cambios producidos entre las variables implicadas.

Respecto a los asuntos teóricos y prácticos, es posible afirmar que los hallazgos indican que las tareas favorecen la transición de las ideas empíricas a los conceptos más abstractos. Pues el hecho de que los estudiantes se ubicaran en el indicador B2 y B3, evidencia que la manipulación e interacción con el entorno facilitó la modificación de las ideas previas, aunque sin llegar a una formalización completa. A pesar de las deficiencias respecto a la formalización de las ideas, las tareas muestran avances significativos en la capacidad de relacionar variables, comprender representaciones y sus propiedades y formular conjeturas en un entorno interactivo. Los resultados y el análisis sugieren la necesidad de trabajar en actividades que favorezcan la transición y el vínculo entre la experiencia empírica y la formalización.

Por lo tanto, el uso del LVM, además de resultar llamativo y novedoso para los estudiantes, permitió que estos manipularan directamente el grosor de las dovelas y observaran, en tiempo real, los cambios en la resistencia. Esta interacción activa generó un alto nivel de motivación, concentración e inmersión por parte de los estudiantes lo cual sugiere que el uso de herramientas digitales como esta puede contribuir a reducir la brecha entre la abstracción matemática y el compromiso del estudiante. Asimismo, el LVM facilitó la transición entre distintos sistemas de representación de una función: la "concreta" (al modificar el grosor y obtener cierta resistencia), la tabular, la gráfica y la algebraica. Promovió la identificación de un modelo lineal, así como la observación de una falla de dicho modelo. No obstante, se evidencian aspectos que pueden mejorarse, como incluir más preguntas orientadoras y brindar indicaciones más claras y precisas.

En este orden de ideas, es posible responder a la pregunta de investigación indicando que el LVM contribuye de forma positiva al desarrollo del PV de estudiantes de educación básica y media, específicamente de grado noveno. Esto debido a que el LVM, además de ser un espacio en el que el estudiante pueda desarrollar tareas de forma casi que autónoma, permite, por un lado, el estudio de situaciones que en la cotidianidad resultan difíciles, como el caso de la construcción de Metro de Bogotá. Por otra parte, facilita la manipulación de las variables y observar, en tiempo real, lo efectos que provoca en otra; sin dejar de lado la facilidad en la que se transita entre las representaciones de un objeto matemático.

Ahora bien, para la verificación de la conjetura planteada en el experimento de enseñanza, se hace preciso recordarla:

> *La implementación de tareas sobre variación y cambio en el marco de un laboratorio virtual de matemáticas promueve el desarrollo del pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno.*

De acuerdo con los resultados de la presente investigación es posible afirmar que esta conjetura fue verificada, pues los estudiantes lograron desarrollar el PV en números casos, aunque se presentaron algunas dificultades las cuales son señaladas en el CAPÍTULO 4. RESULTADOS. Allí también se señala que varios estudiantes lograron identificar las variables implicadas en la situación, mostraron un buen manejo de ciertas expresiones algebraicas e interpretaron, analizaron y cuestionaron modelos.

En cuanto a los aspectos subyacentes de la investigación, consideramos pertinente hacer alusión a las dificultades que se presentaron durante la elaboración del presente estudio. Por un lado, en un punto avanzado de este se presentó la necesidad de reconsiderar el marco de referencia sobre el uso de la TD en la educación matemática. Este fue un momento importante, ya que pusimos en juego el rol que iban a cumplir los elementos principales del proceso de aprendizaje a nuestro cargo: el entorno, el estudiante, el docente y el conocimiento. Para nosotros era fundamental, dada la problemática, que el estudiante, el conocimiento y el entorno fueran los principales protagonistas de este proceso. Por lo tanto, nos dispusimos a estudiar nuevamente estos marcos de referencia, esta vez bajo una mirada diferente; la abstracción situada resultó ser el que mejor se acomodaba a nuestras necesidades y permitió llevar a cabo el análisis de los resultados de una manera natural.

Por otra parte, durante el diseño de los componentes del experimento de enseñanza –es decir, el sitio web, las tareas y su correspondiente ubicación en la página– habíamos estimado un tiempo específico para su elaboración. Sin embargo, este tiempo resultó ser considerablemente mayor, dado que la programación requirió un nivel de complejidad mucho más alto del que habíamos anticipado. Este aumento en la complejidad, y por tanto en el tiempo destinado, estuvo relacionado con la necesidad de que el entorno digital fuera intuitivo y que el estudiante pudiera interactuar con él de manera fluida. Además, debimos enfrentarnos a desafíos propios de la lógica de programación, lo cual implicó aprender y dominar ciertos principios técnicos. Esta experiencia no solo enriqueció el proceso, sino que también evidencia el compromiso de los autores con la innovación educativa a través del desarrollo de herramientas digitales propias.

Respecto a las proyecciones del trabajo resulta importante, por un lado, mejorar la trazabilidad de la eficacia de las tareas. Si bien se implementaron dos tareas a lo largo de cuatro sesiones, los resultados podrían ser aún más precisos al analizar el papel que desempeña el LVM en el desarrollo del PV con un mayor número de sesiones o de estudiantes. Esto permitiría una evaluación más detallada de su impacto en el desarrollo del pensamiento en mención y la generación de nuevos espacios de exploración y descubrimiento.

Por otro lado, se podría pensar en la generación de otros espacios en los que se pueda ejecutar el LVM bajo el uso de otro tipo de TD como, por ejemplo, la posibilidad de generar una aplicación para celular. Esto permitiría una mejor portabilidad y podría generar una mayor cobertura pues actualmente numerosos estudiantes cuentan con la oportunidad de portar un celular en el entorno escolar, esto podría contribuir también a emplear el celular como herramienta educativa. El desarrollo de una aplicación de este estilo requerirá también un diseño cuidadoso que garantice una interfaz intuitiva y amigable con el estudiante.

Adicionalmente, es posible que en estudios posteriores se puedan diseñar e implementar tareas en el LVM con otros grados, pues recordemos que el MEN propone que el desarrollo del PV debe iniciar desde los primeros años de escolaridad. Esto puede permitir con mayor facilidad el seguimiento de dicha indicación y abre la posibilidad de ampliar nuestra propuesta a otros contextos. También puede abrirse la puerta a incluir tareas que se enfoquen al desarrollo de los otros cuatro pensamientos que propone el MEN para matemáticas. El potencial del LVM para desarrollar el razonamiento matemático resulta relevante por lo tanto se recomendaría invertir más tiempo en este tipo de actividades, evitando límites rígidos de duración (como sesiones de 45 minutos), e integrarlas formalmente al currículo para favorecer una experiencia de aprendizaje más profunda y significativa.

Finalmente, la identificación de la problemática surgió a partir de una mirada retrospectiva sobre nuestro quehacer en el aula. Con este trabajo, buscábamos contribuir a la disminución de dicha problemática y fortalecer nuestro ejercicio como profesores de matemáticas. La elaboración de esta investigación no solo permitió consolidar una postura más reflexiva frente al estudio del cálculo y del desarrollo del PV, sino que también nos llevó a interrogarnos sobre el rol del docente en contextos cada vez más permeados por la tecnología. En un entorno en el que las herramientas digitales adquieren un lugar central, se hace urgente repensar la formación del profesor de matemáticas, no solo como usuario de recursos, sino como diseñador de experiencias que exigen conocimientos básicos de programación. Esta necesidad plantea un desafío para la formación inicial y continua del profesor de matemáticas, que debe responder a las necesidades de la sociedad actual. En este sentido, el núcleo de esta maestría –centrado en el uso de TD en la enseñanza de las matemáticas– resulta un incentivo valioso para abrir espacios de formación, intercambio y construcción, sembrando una semilla que invita a pensar al docente como creador de sus propios entornos de aprendizaje.

CAPÍTULO 6. REFERENCIAS

Agudelo, C. (2007). La Creciente Brecha entre las Disposiciones Educativas Colombianas, las Proclamaciones Oficiales y las Realidades del Aula de Clase: Las Concepciones de Profesores y Profesoras de Matemáticas. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *5*(1), 43-62.

Alba, A., y Velandia, D. (2019). *Doblando papel para desdoblar argumentos* [Tesis de Maestría]. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/10889.

Arce, J. (2004). *Universidad del Valle*. Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Documento Interno de Trabajo.

Bartolini-Bussi, M., y Mariotti, M. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), Handbook of international research in mathematics education (segunda edición revisada; pp. 746-783). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum.*

Biñán, J. (2015). *La utilización del laboratorio virtual de matemática y su incidencia en el rendimiento académico de los alumnos del décimo año A, en los temas de funciones y gráfica de funciones, de la Unidad Educativa Intercultural Oswaldo Guayasamín. Cantón Colta* [Tesis de Maestría]. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Borba, M., y Villarreal, M. (2005). Collectives of humans-with-media in mathematics education: Notebooks, blackboards, calculators, computers and ... Notebooks throughout 100 years of ICMI. *Mathematics Education*, *42*(1), 49-62.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction. Cambridge*. MA: Harvard University Press.

Callejas, M., Hernández, E., y Pinzón, J. (2011). Objetos de aprendizaje: Un estado del arte. *Entramado*, *7*(1), 176-189.

Camargo, L. (2019). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. *XV CIAEM-IACME*, *4*, 338-345.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Editorial Universidad de Antioquia y Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P., Molina, O., y Echeverry, A. (2011). Las conjeturas y la construcción del conocimiento en clase de geometría. *12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 654-660.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. *8*(2), 121-156.

Castaño, C., & Vásquez, J. (2004). Ambientes virtuales de aprendizaje en educación superior: Usos y posibilidades. *Revista Iberoamericana de Educación*, *35*(2), 25-42.

Castrillón, A., González, A., Arango, S., y Rendón, P. (2022). Modelar y experimentar en clases de matemáticas: Una propuesta con el uso de tecnologías digitales. En *Serna, Edgar (Ed.) Situaciones de modelación matemática para el aula: Aportes para diferentes niveles formativos* (pp. 60-71). Editorial Instituto Antioqueño de Investigación.

Castro, L., y Forero, C. (2019). *Razonamiento covariacional con tecnologías digitales, un camino hacia el cálculo* [Tesis de Maestría]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/11412

Cázares, A. G. L. (2014). La actividad experimental en la enseñanza de las ciencias naturales. Un estudio en la escuela normal del estado de México. *Ra Ximhai*, 135-148. https://doi.org/10.35197/rx.10.03.e1.2014.09.ac

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task. Dordrecht*. The Netherlands: Reidel.

García, G., Alcaraz, B., y Morales, E. (2013). "Laboratorio de Matemática: Un espacio de reflexión y construcción de la matemática. *Primer Congreso de la Enseñanza de las Ciencias*, 34-38.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada.* Granada, España. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Godino, J., y Font, V. (2003). RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS. *Universidad de Granada.* Granada, España.

Godino, J., Wilhelmi, M., Blanco, T., Contreras, Á., y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 91-110.

González, J., y Granera, J. (2021). Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Revista Científica de FAREM-Estelí*, 49-62. https://doi.org/10.5377/farem.v0i0.11607

González, J., y Tovar, J. (2017). *Propuesta para promover la educación estadística crítica en estudiantes de secundaria a través de la cultura mediática* [Tesis de Maestría]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/9454

Grueso, D. S. G., y Valencia, J. (2019). *Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del isomorfismo de medida: Una experiencia en el laboratorio de matemáticas* [Maestría]. Universidad del Valle.

Infante, C. (2014). Propuesta Pedagógica para el Uso de Laboratorios Virtuales como Actividad Complementaria En Las Asignaturas Teórico-Prácticas. *RMIE*, *19*(62), 917-937.

Jaimes, F., y Quiroga, S. (2020). *Tipos de recursos en GeoGebra y su incidencia en el desarrollo del Pensamiento Variacional* [Tesis de Maestría]. Universidad Pedagógica Nacional. http://hdl.handle.net/20.500.12209/12389

Juez, A. (2018). *Laboratorio de Matemáticas Manipulativas en Tercero de Primaria: Aprender y Disfrutar Tocando* [Tesis de Maestría]. Universida Internacional de la Rioja.

Kilpatrick, J. (1981). The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, *2*, 22-28.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 427-440. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0199-z

Martínez, M., Font, J., y Grau, R. (2017). El Laboratorio de Matemáticas como Entorno de Aprendizaje. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 239-250.

Maschietto, M., & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: The productive notion of mathematics laboratories. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 33-41.

Massa, S., y Pesado, P. (2012). Evaluación de la usabilidad de un Objeto de Aprendizaje por estudiantes. *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación*, *8*, 65-76.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.*: https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-339975_matematicas.pdf

MEN. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Ministerio De Educación Nacional.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación.

Múnera, J., Posada, M. E., Marín, A., Cárdenas, M., y Carvajal, B. (2005). Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En *Interpretacion e implementacion de los estandares basicos de matematicas*. Gobernacion de Antioquia. Secretaria de Educacion para la Cultura.

Narváez, E. (2006). Una mirada a la escuela nueva. *Educare*, *10*(35), 629-636.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics).

Noss, R., y Hoyles, C. (1987). Seeing What Matters: Developing an Understanding of the Concept of Parallelogram Through a Logo Microworld. *Archaeological News Letter*, *4*, 57-60.

Noss, R., y Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers. Mathematics education library*. https://doi.org/10.1016/0304-3894(93)E0048-7

Pabón, Arce, J. H., Vega, M. y Garzón, D. (2011). *El Laboratorio de Matemáticas: Una estrategia de producción y uso de recursos pedagógicos en la clase de matemáticas*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.

Pabón, O., Arce, J., Myriam Belisa y Garzón, Diego (2011). El laboratorio de matemáticas: una estrategia de producción y uso de recursos didácticos en la clase de matemáticas. En CIAEM (Ed.). Formação de professores na Educação Matemática (pp. ´1-13). Recife, Brasil: CIAEM.Pérez, G., Martínez, P., y Valdés, R. (2019). Experimentos matemáticos para enseñar las magnitudes en el primer ciclo de la educación primaria. *Revista Conrado*, *15*(70), 226-235.

Perilla, J. (2018). Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) y Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) como estrategias pedagógicas para las nuevas generaciones. En *Las Nuevas Generaciones como un Reto para la Educación Actual* (Dirección de Publicaciones Científicas, pp. 44-55). Dirección de Publicaciones Científicas.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies, Approche Cognitive des Instruments Contemporains*. U. Série Psychologie.

Rodríguez, M., y Barragán, H. M. (2017). Entornos virtuales de aprendizaje como apoyo a la enseñanza presencial para potenciar el proceso educativo. *Killkana Social*, *1*(2), 7-14. https://doi.org/10.26871/killkana_social.v1i2.29

Tapiero, K. (2020). *Análisis de una propuesta para el aprendizaje del concepto de derivada a través de la razón de cambio* [Tesis de Maestría]. Universidad del Valle.

Valencia, N., Huertas, A., y Baracaldo, P. (2014). Los ambientes virtuales de aprendizaje: Una revisión de publicaciones entre 2003 y 2013, desde la perspectiva de la pedagogía basada en la evidencia. *Revista Colombiana de Educación*, *1*(66), 73-102. https://doi.org/10.17227/01203916.66rce73.102

Vasco, C. (1985). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. *Revista de la Universidad Nacional*, *1*(2), 45-51.

Vasco, C. (2002). Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1142293/Vasco2002El.pdf

Villa-Ochoa, J. (2007). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional UDEA. https://hdl.handle.net/10495/13

*Villa-Ochoa, J., y Ruiz, M. (2010). Pensamien*to variacional: Seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3), 514-528.

Wood, D., Bruner, J., y Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89-100.

Zurita, C., Zaldívar, A., Sifuentes, A., y Valle, R. (2020). Análisis crítico de ambientes virtuales de aprendizaje. *Utopía y Praxis Latinoamericana*, *25*(11), 33-47.

ANEXOS

Anexo A

Expectativas para el Estándar de Álgebra según Competencia

EXPECTATIVAS PARA EL ESTÁNDAR DE ÁLGEBRA SEGÚN COMPETENCIA	GRUPOS DE GRADOS			
	PRE-K a 2°	**3° a 5°**	**6° a 8°**	**9° a 12°**
C1	- Ordenar, clasificar y ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades. - Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples y traducir de una representación a otra. - Analizar cómo se generan patrones tanto repetitivos como crecientes.	- Describir, ampliar y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos. - Representar y analizar patrones y funciones, utilizando palabras, tablas y gráficos.	- Describir, ampliar y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos. - Representar y analizar patrones y funciones, utilizando palabras, tablas y gráficos.	- Generalizar patrones utilizando funciones definidas explícita y recursivamente. - Comprender relaciones y funciones y seleccionar, convertir de manera flexible y utilizar diversas representaciones para ellas. - Analizar funciones de una variable investigando tasas de cambio, intersecciones, ceros, asíntotas y comportamiento local y global. - Comprender y realizar transformaciones tales como combinar aritméticamente, componer e invertir funciones comúnmente utilizadas, utilizando tecnología para realizar dichas operaciones en expresiones simbólicas más complicadas. - Comprender y comparar las propiedades de las clases de funciones, incluidas las funciones exponenciales, polinómicas, racionales, logarítmicas y periódicas. - Interpretar representaciones de funciones de dos variables
C2	- Ilustrar principios generales y propiedades de operaciones, como la conmutatividad, utilizando números específicos. - Utilizar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar una comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.	- Identificar propiedades como la conmutativa, la asociativa y la distributiva y utilizarlas para realizar cálculos con números enteros. - Representar la idea de una variable como una cantidad desconocida utilizando una letra o un símbolo. - Expresar relaciones matemáticas utilizando ecuaciones.	- Desarrollar una comprensión conceptual inicial de los diferentes usos de las variables. - Explorar las relaciones entre expresiones simbólicas y gráficos de líneas, prestando especial atención al significado de la intersección y la pendiente. - Utilizar el álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que involucran relaciones lineales. - Reconocer y generar formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales.	- Comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, desigualdades y relaciones. - Escribir formas equivalentes de ecuaciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones y resolverlas con fluidez, mentalmente o con papel y lápiz en casos simples y usando tecnología en todos los casos. - Utilizar álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas. - Utilizar una variedad de representaciones simbólicas, incluidas ecuaciones recursivas y paramétricas, para funciones y relaciones. - Juzgar el significado, la utilidad y la razonabilidad de los resultados de las manipulaciones de símbolos, incluidas las realizadas mediante tecnología.
C3	- Modelar situaciones que involucran la suma y resta de números enteros, utilizando objetos, imágenes y símbolos.	- Modelar situaciones problemáticas con objetos y utilizar representaciones como gráficos, tablas y ecuaciones para sacar conclusiones.	- Modelar y resolver problemas contextualizados utilizando diversas representaciones, como gráficos, tablas y ecuaciones.	- Identificar relaciones cuantitativas esenciales en una situación y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelar las relaciones. - Utilizar expresiones simbólicas, incluidas formas iterativas y recursivas, para representar relaciones que surgen de diversos contextos. - Sacar conclusiones razonables sobre una situación que se está modelando.
C4	- Describir un cambio cualitativo, como por ejemplo el crecimiento de la estatura de un estudiante. - Describir un cambio cuantitativo, como por ejemplo que un estudiante crezca dos pulgadas en un año.	- Investigar cómo un cambio en una variable se relaciona con un cambio en una segunda variable. - Identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables y compararlas.	- Utilizar gráficos para analizar la naturaleza de los cambios en cantidades en relaciones lineales.	- Aproximar e interpretar tasas de cambio a partir de datos gráficos y numéricos.

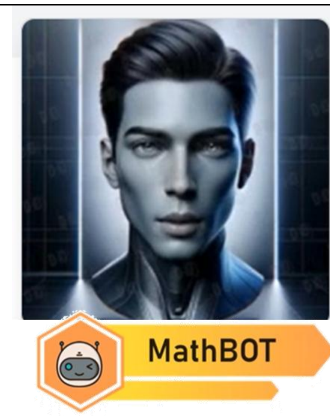
Anexo B

Comparación de los estándares de los EBCM y las expectativas del NCTM para el grupo de grados (6° -7°)

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPENTENCIAS EN MATEMÁTICAS (2006)		**OBJETOS MATEMÁTICOS ASOCIADOS**	**PRINCIPIOS Y ESTÁNDRES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA (2000)**	
Sexto a Sétimo grado (6° - 7°)	• Describe y representa situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). (1) • Reconoce el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Analiza *(cambiar verbo) las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. • Utiliza métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. • Identifica las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.	• Proporcionalidad directa e inversa • Igualdades, ecuaciones e inecuaciones • Razones y proporciones • Regla de tres simple directa • proporcionalidad directa e inversa • lenguaje algebraico • ecuaciones con estructura multiplicativa • ecuaciones con racionales. • Término general de una sucesión	**Sexto a Octavo grado (6° - 8°)**	• Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; (1) • Relacionar y comparar diferentes formas de representación de una relación; (1) • Identificar funciones como lineales o no lineales y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o ecuaciones. • Desarrollar una comprensión conceptual inicial de los diferentes usos de las variables; • Explorar las relaciones entre expresiones simbólicas y gráficas de líneas, prestando especial atención al significado de intersección y pendiente; • Usar álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que involucran relaciones lineales; • Reconocer y generar formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales • Modelar y resolver problemas contextualizados utilizando diversas representaciones, como gráficas, tablas y ecuaciones. (3) • Usar gráficas para analizar la naturaleza de los cambios en cantidades en relaciones lineales. (2)

Anexo C

Intervenciones de MatBOT en la Tarea 1

<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 1</th></tr>
<tr><td>Intervenciones de MatBOT</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Hola a todos, bienvenidos. Mi nombre es MatBOT y hoy vamos a embarcarnos en una tarea de gran importancia. Como futuros ingenieros, están a punto de enfrentarse a un desafío que no solo pondrá a prueba sus habilidades técnicas, sino también su capacidad para gestionar recursos y tomar decisiones críticas. ¿Listos para comenzar? Vamos allá.
Como parte de su formación, han sido contratados por la empresa Metro Línea 1 S.A.S. para participar en el diseño y planificación del tramo de la primera línea del metro de Bogotá, específicamente el que va desde la calle 1 hasta la calle 72 sobre la Avenida Caracas. Su misión será gestionar los estudios necesarios para determinar la resistencia de las vigas que formarán parte de esta infraestructura. Este es un proyecto de gran envergadura, y su trabajo será clave para garantizar que el metro sea seguro, funcional y eficiente.
Pero antes de entrar en detalles, quiero que comprendan la importancia de lo que están a punto de hacer. En el año 2021, la Línea 12 del metro de la Ciudad de México sufrió un colapso en uno de sus tramos elevados, lo que resultó en una tragedia humana y estructural. Este desastre se debió, en gran parte, a fallos en el diseño y la construcción de las vigas. Por eso, su trabajo no es solo un ejercicio académico; es una responsabilidad con la sociedad. Deben asegurarse de que cada decisión que tomen esté respaldada por datos, análisis y reflexiones profundas.
Para que comprendan mejor la magnitud de lo que estamos hablando, vamos a ver un video que resume lo ocurrido en la Línea 12 del metro de la Ciudad de México. Presten atención, porque esto les dará una perspectiva clara de los riesgos que debemos evitar.
Ahora que han visto el video, entienden por qué su trabajo es tan crucial. Para llevar a cabo esta tarea, deberán seguir un plan de trabajo estructurado que incluye

1. Recolección de datos: Deberán recopilar toda la información necesaria sobre las vigas y los materiales.
</td></tr>
</table>

2. Descubrimiento de relaciones: Analizarán cómo interactúan los diferentes elementos de la estructura.
3. Discusión de ideas: Trabajarán en equipo para proponer soluciones y enfoques.
4. Planteamiento de conjeturas: Formularán hipótesis sobre la resistencia y estabilidad de las vigas.
5. Comprobación de lo hallado: Usarán herramientas y simulaciones para verificar sus conclusiones.
6. Reflexiones finales: Evaluarán los resultados y propondrán mejoras o ajustes.

Además, a cada uno de ustedes se le asignará un presupuesto público que deberán administrar de manera eficiente. La idea es que logren una estructura segura y funcional, pero también que sean austeros con los recursos públicos. Cada decisión que tomen tendrá un impacto, así que piensen con cuidado.

Este es un proyecto que requiere dedicación, trabajo en equipo y mucha responsabilidad. Pero estoy seguro de que están más que capacitados para enfrentar este reto. Recuerden que, como ingenieros, no solo están construyendo estructuras; están construyendo el futuro de Bogotá. ¡Manos a la obra y mucho éxito!

Dado que su objetivo en este desafío, será gestionar los estudios necesarios para determinar la resistencia de las dovelas que soportarán esta infraestructura crítica. Nos centraremos específicamente en el vano entre dos columnas, donde la precisión es clave.

Entre cada par de columnas, el vano estará compuesto por un máximo de 7 dovelas. Es decir, 7 dovelas unidas formarán el tramo que analizaremos. Su diseño debe garantizar que soporten no solo el peso propio, sino también las cargas dinámicas del metro.

Recuerden: un tren vacío pesa 29 toneladas, pero con pasajeros puede alcanzar las 41 toneladas. Sus cálculos deben considerar este rango, junto a factores como vibraciones, viento y fatiga de materiales.

El presupuesto para este proyecto es de 300 millones de pesos colombianos. Deberán optimizar recursos sin comprometer la seguridad. Cada decisión —desde el grosor de las vigas hasta el dinero utilizado— afectará el precio y la resistencia de la estructura.

¿Cómo distribuirán las cargas? Los invito a comenzar con el análisis. La sociedad depende de su rigor.

Ahora verás un simulador interactivo donde podrás explorar cómo diferentes variables afectan la resistencia de las dovelas. En esta actividad, tú mismo podrás manipular dos factores clave:

1. El grosor del material de las dovelas.
2. El peso del vagón que deben soportar.

Mi objetivo es que experimentes y descubras cómo se relacionan estas variables. Verás que, dependiendo de qué tan gruesas hagas las dovelas y cuánto peso les asignes, la estructura se comportará de manera diferente.

Pero hay un detalle importante: cada dovela tiene un precio asociado según su grosor. Mientras más gruesas sean, mayor será su resistencia... pero también su precio. Tu desafío es encontrar el equilibrio perfecto:

- No puedes exceder el presupuesto asignado.
- Pero tampoco puedes quedarte corto: si usas dovelas demasiado delgadas, la estructura colapsará.
- Debes garantizar que el grosor elegido soporte el peso del vagón, sin gastar dinero innecesario.

¿Cómo lograrlo? Tendrás que probar diferentes combinaciones y observar los resultados.

Anexo D

Intervenciones de MatBOT en la Tarea 2

<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 2</th></tr>
<tr><td>Intervenciones de MatBOT</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">¡Hola, ingenieros e ingenieras! Recapitulemos lo que hemos aprendido hasta ahora.
Recuerden, nos sumergimos en un desafío crucial: participar en la construcción del metro elevado de Bogotá. Una megaobra que depende de la precisión y el ingenio.
Para asegurar la seguridad y eficiencia de este proyecto, exploramos a fondo las dovelas, esas piezas curvas de concreto que son la base del viaducto. Tuvimos que analizar tres aspectos vitales para su diseño:
• El grosor de las dovelas.
• El peso que pueden resistir sin colapsar.
• Y, por supuesto, el precio de fabricación de cada dovela.</td></tr>
<tr><td colspan="2">"Ahora, quiero que piensen por un momento. Cuando inicialmente enfrentamos este problema, ¿qué creen que falló en nuestra aproximación inicial?
¿Cómo creen que se podría corregir esto?
Y lo más importante, desde su perspectiva, ¿por qué un modelo lineal podría fallar al predecir la resistencia de una dovela en un caso como este?"</td></tr>
<tr><td colspan="2">¡Excelentes reflexiones! Precisamente, ingenieros, ¡bienvenidos de nuevo!
En la actividad pasada, analizamos cómo el grosor de un material afecta su capacidad para soportar peso. Intentamos modelar esta relación con una regresión lineal, pero hubo una revelación clave: un modelo lineal no era suficiente aquí. ¿Por qué? Porque descubrimos que un solo milímetro en el grosor puede cambiar drásticamente la capacidad de carga. Además, la relación entre el grosor y el peso soportado no es siempre proporcional, lo que nos indicaba que había otros factores importantes en juego que un modelo lineal simple no lograba capturar. Estábamos dejando de lado algunos asuntos cruciales.
¿Listos para seguir explorando modelos que sí pueden funcionar y entender cómo esto se aplica a nuestro metro de Bogotá?</td></tr>
</table>

Es cierto que necesitamos ayuda en un problema tan complejo como este. Por eso, un grupo de colegas nos ha enviado una herramienta que podría cambiarlo todo. Es un simulador especializado: les permitirá variar el grosor de una dovela —en centímetros— y observar cuánta carga máxima puede soportar, medida en toneladas. Esto podría ayudarlos a entender mejor cómo se comportan estas estructuras antes de ser construidas.
Para que lo aprovechen al máximo, aquí les explico sus partes clave:

- Deslizador de Grosor: Este es el deslizador que van a mover para cambiar el grosor de la dovela. Pueden ajustarlo entre 26 y 68 centímetros.
- Campo de Resultado: Aquí el simulador les mostrará automáticamente el peso máximo que puede soportar la dovela con el grosor que hayan seleccionado.
- Tabla: Una vez que hayan explorado el simulador, necesitarán registrar sus hallazgos. Escriban 12 valores en la tabla: 6 para el grosor y 6 para el peso que resisten. Asegúrense de que los valores de grosor (sus 'x') estén siempre en orden ascendente.

Al completar la tabla, aparecerá un botón con el que le podrán dar click en enviar, para guardar sus datos.
¡Ahora, exploren este simulador y comiencen a recolectar sus datos!"

¡Excelente trabajo explorando el simulador y recolectando sus datos! Ahora que tienen esa información, analicemos lo que han observado.
Observen detenidamente los datos que registraron en su tabla. Quiero que piensen en lo siguiente:
► ¿Aumenta la carga de manera proporcional al grosor? Es decir, si el grosor se duplica o triplica, ¿la carga soportada hace lo mismo?
► ¿Cuándo duplicamos el grosor de 30 a 40 cm, el peso que resiste se duplica también? Fíjense bien en esos valores específicos en su tabla.
► Y si no se duplica, ¿por qué creen que ocurre esto? Es decir, ¿por qué la carga no se duplica aunque el grosor sí lo haga?
Tómense un momento para reflexionar sobre estas preguntas.

¡Excelentes reflexiones! Esas preguntas nos llevan directamente al siguiente paso. Para descubrir cuál es la relación entre el grosor y la carga que soporta una dovela, primero podemos representarlos gráficamente.
En tu pantalla, verás la tabla con los datos que acabas de registrar, junto con un graficador. Tu tarea ahora es graficar esos puntos sobre el plano cartesiano y analizar con cuidado la 'forma' que esos puntos forman al unirse entre ellos. Presta mucha atención a esa trayectoria.

¡Excelente! Si al graficar los puntos notaron que no formaban una línea recta, sino más bien una curva, ¡están en lo correcto! Y si esa curva les hizo pensar en un modelo cuadrático, ¡mucho mejor!
Como pudieron observar, los puntos claramente no se alinean para formar una línea recta. Esto es una señal inequívoca de que un modelo lineal, como el que intentamos usar al principio, no es el adecuado para predecir la resistencia de estas dovelas. Si lo usáramos, nuestras predicciones serían incorrectas, y eso en ingeniería puede tener consecuencias graves.

¿Qué es un Modelo Cuadrático y por qué es relevante aquí?
Un modelo cuadrático es una relación matemática donde una de las variables (en este caso, la carga o resistencia, R) depende del cuadrado de otra variable (el grosor, t). Su forma general es R=at2+bt+.c
La razón por la que un modelo cuadrático es relevante aquí es que la resistencia de una dovela no solo depende de su grosor, sino de su área transversal. Si la viga es cuadrada, su área es el grosor al cuadrado (área=grosor2). Cuanto mayor sea el área, más material hay para distribuir la carga, y la resistencia aumenta de forma mucho más rápida que el simple aumento lineal del grosor. Es como si cada centímetro adicional de grosor aportara más resistencia que el anterior, porque no solo crece en una dirección, sino en dos.
Para confirmar si una situación se puede modelar con una función cuadrática, hay un truco matemático muy útil: las segundas diferencias.
Si calculas las diferencias entre los valores consecutivos de la carga (lo que llamamos 'primeras diferencias'), y luego calculas las diferencias entre esas 'primeras diferencias' (las 'segundas diferencias'), y estas segundas diferencias resultan ser constantes o muy cercanas a un valor constante, entonces ¡felicitaciones! Estás frente a una relación cuadrática. Esto es una característica distintiva de las funciones cuadráticas.
Ahora, con esta información, ¿qué creen que deberíamos hacer con los datos para confirmar si un modelo cuadrático es el camino correcto?"

Con esa comprensión sobre los modelos cuadráticos y la importancia de las segundas diferencias, es hora de ponerlo en práctica.
Para iniciar esta fase de descubrimiento, encontremos las primeras diferencias de los valores que registraste en tu tabla. Para ello, sigue estos pasos:

1. Ingresa aquí los datos de "Grosor de la dovela" y "Peso" que anotaste en tu tabla.
2. Una vez calculadas las primeras diferencias, observa los resultados y piensa: ¿ves alguna regularidad? ¿Se mantienen constantes o varían?

Puedes agregar más filas si lo necesitas.

¡Excelente trabajo al calcular las primeras diferencias! Como pudieron observar, las primeras diferencias no son constantes, ¿verdad? Esto es una señal importante: si fueran constantes, estaríamos ante un modelo lineal.
Pero como no lo son, significa que la relación entre el grosor y la resistencia no es directamente proporcional. Para entender mejor la 'curva' que vieron en su gráfica, y para confirmar el tipo de modelo que necesitamos, es necesario encontrar las segundas diferencias. ¡Adelante con ello!

Ahora, es momento de que calculen e ingresen las segundas diferencias en la tabla. Una vez que lo hagan, quiero que se pregunten y analicen con detenimiento: ¿son estas segundas diferencias constantes? Observen con cuidado para ver si encuentran esa regularidad."

Excelente observación, ingenieros! Lo han logrado. Debido a que las segundas diferencias nos dieron constantes, esto nos confirma que la relación entre el grosor de la dovela y su capacidad de carga puede ser modelada por una función cuadrática.
El procedimiento para derivar esta función a partir de las segundas diferencias es un poco más complejo y no lo abordaremos en detalle aquí, pero al aplicarlo a sus datos, la función modelada que mejor describe la resistencia de nuestras dovelas es:
Y es igual a cero punto cero uno cinco por equis al cuadrado donde x es el grosor de la dovela e y es el peso del tren del metro que resiste.
Parece que hemos encontrado un modelo que se ajusta a lo que observaron en el simulador!

Hemos llegado a un punto crucial: ahora es el momento de verificar el modelo que acabamos de encontrar. ¿Cómo lo haremos? Usando la función que hemos derivado: y=0.015x2.
En la parte derecha de tu pantalla, en la sección 'Comprueba el modelo con el simulador', encontrarás dos preguntas. Utiliza el modelo y=0.015x2 para calcular las respuestas:

- ¿Cuál es el peso que resiste una dovela de 38 cm de grosor?
- ¿Y una dovela de 54 cm de grosor?

Escribe tus respuestas en los campos correspondientes. Una vez que hayas calculado ambos valores, presiona el botón 'Verificar respuestas' para comprobar la precisión de nuestro modelo. ¡Adelante!"

¡Felicidades, ingenieros e ingenieras! Han verificado nuestro modelo cuadrático y han visto cómo se ajusta a la realidad del simulador. Han pasado de una intuición inicial a un modelo matemático concreto y validado.

Ahora, para cerrar esta importante actividad y consolidar todo lo aprendido, los invito a una reflexión final profunda. Sus respuestas son cruciales para entender el impacto de este conocimiento.

Por favor, tómense un momento para pensar y responder a las siguientes preguntas:

1. Comparación de modelos: ¿Por qué el modelo lineal falló al predecir la resistencia de las vigas en este caso, y qué ventajas ofreció el modelo cuadrático? ¿Qué aprendimos sobre la importancia crítica de elegir el modelo matemático adecuado en ingeniería y más allá?
2. Implicaciones en el diseño: Considerando que la resistencia de las vigas depende de su área transversal (relacionada cuadráticamente con el grosor), ¿cómo cambiaría su enfoque si tuvieran que diseñar una nueva infraestructura para el metro con materiales diferentes o formas no cuadradas?
3. Generalización del aprendizaje: ¿En qué otras situaciones de la vida real o de la ingeniería creen que sería crucial identificar si una relación es lineal, cuadrática o de otro tipo para evitar errores graves o diseñar soluciones eficientes? ¿Pueden dar ejemplos concretos?
4. Limitaciones del modelo: ¿Creen que el modelo cuadrático obtenido es 'perfecto' para todas las situaciones de diseño de dovelas o tiene alguna limitación? ¿Qué otros factores (como el tipo de material, la temperatura, o la forma exacta) podrían influir en la resistencia de una viga que este modelo no considera?
5. El rol de los datos y el método científico: ¿Qué tan importantes fueron los datos recolectados en el simulador para el descubrimiento del modelo cuadrático y su validación? ¿Qué habría pasado si no hubieran tenido suficientes datos o si los datos iniciales hubieran sido erróneos? ¿Cómo este proceso les recuerda la importancia del método científico en la ingeniería?

Hemos llegado al final de esta desafiante y enriquecedora actividad. Lo que han experimentado aquí va más allá de solo números y ecuaciones. Han aprendido que los modelos matemáticos son herramientas poderosas para comprender y predecir el comportamiento del mundo real, pero también que no todos los modelos son adecuados para todas las situaciones.

El caso de las dovelas del metro de Bogotá es un ejemplo perfecto: un modelo lineal, intuitivo en muchos contextos, era catastrófico aquí. Solo al explorar los datos, graficarlos, y aplicar el razonamiento de las diferencias (primeras y segundas), pudimos descubrir la verdadera relación cuadrática. Esto les enseña que en ingeniería y ciencia, la observación crítica, la experimentación y el análisis matemático riguroso son indispensables para construir soluciones seguras, eficientes y confiables.

Cada vez que vean una estructura, piensen en las matemáticas que la sostienen. Su capacidad para elegir y aplicar el modelo correcto puede significar la diferencia entre el éxito y el fracaso de una megaobra.
¡Excelente trabajo, futuros ingenieros del metro de Bogotá!"