AMBIENTE INDAGATIVO Y ARGUMENTACIÓN EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA DINÁMICA: UNA EXPERIENCIA EN GRADO SÉPTIMO

JULIÁN ANDRÉS PUENTES DÍAZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2015

AMBIENTE INDAGATIVO Y ARGUMENTACIÓN EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA DINÁMICA: UNA EXPERIENCIA EN GRADO SÉPTIMO

JULIÁN ANDRÉS PUENTES DÍAZ

Tesis presentada al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática.

Directora:
LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2015

En cumplimiento del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad, Artículo 42, parágrafo 2:

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

Julián Andrés Puentes Díaz.

C.C. 14297760

AGRADECIMIENTOS

A Leonor Camargo Uribe, profesora titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Por compartir sus conocimientos durante todo este recorrido por la maestría, por su paciencia, dedicación y ejemplo los cuales han contribuido en la elaboración de este trabajo.

A todos los profesores de la Maestría en Docencia de la Matemática, ya que han generado en mi inquietudes, reflexiones e inspiración para mejorar como profesional de la educación.

A mi familia, en especial a mi esposa, mamá e hijo. Ya que ustedes han sido una constante inyección de ánimo y una motivación para superar las dificultades que se presentaron y que me permitieron alcanzar este logro.

A la Secretaria de Educación Distrital de Bogotá. Por el apoyo económico que me brindó para hacer esta maestría y por creer que capacitar a los profesores es la mejor manera de crear un cambio en la educación.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "***Ambiente indagativo y argumentación en un contexto de geometría dinámica: una experiencia en grado séptimo***", presentado por el estudiante:

Julián Andrés Puentes Díaz - 2013285013 - 14297760

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado,** con 45 Puntos.

Observaciones:
____

En constancia se firma a los 27 días del mes de noviembre de 2015.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesora: Leonor Camargo
LEONOR CAMARGO URIBE

Jurados:

Profesor: Orlando Aya C.
ORLANDO AYA CORREDOR (UPN)

Profesor:
MIGUEL ASTORGA (CHILE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de profundización.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Ambiente indagativo y argumentación en un contexto de geometría dinámica: una experiencia en grado séptimo.
Autor(es)	Puentes Díaz, Julián Andrés
Director	Camargo Uribe, Leonor
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 112 pp.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, UPN
Palabras Claves	Ambiente indagativo, argumentación, actividad demostrativa, argumento sustancial, argumento analítico, gestión del profesor, geometría dinámica.

2. Descripción

Trabajo de grado que se propone mostrar un experimento de enseñanza que pretendía promover la configuración de un ambiente indagativo en la clase de geometría en un curso de grado séptimo del colegio Álvaro Gómez Hurtado IED, institución pública de Bogotá (Colombia). Para lograr esto, se establecieron ciertas condiciones que favorecerían la configuración del ambiente indagativo como lo fueron la argumentación en el contexto de la actividad demostrativa, la geometría dinámica y la gestión del profesor.

En esencia, la propuesta que se presenta muestra cómo se promovió un cambio en la cultura de la clase de geometría, en la que se favoreció el protagonismo de los estudiantes en la clase a través de prácticas que impulsaran la expresión de sus ideas, la argumentación mediante la alusión a hechos geométricos y la resolución de problemas de descubrimiento con un programa de geometría dinámica.

3. Fuentes

El autor presenta 13 referencias relacionadas con la configuración del ambiente indagativo y la argumentación en el contexto de la actividad demostrativa, entre las que se destacan:

- Forman, E. A. (1996). Learning Mathematics as participation in a classroom practice: implications of sociocultural theory for reform educational reform. En L. Steffe, P. Nesher, P.

Cobb, G. Goldin, & B. Greer, *Theories of mathematical learning* (págs. 115-130). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for research in mathematics education*, 35 (4), 258-291.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.).*The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204.
- Samper, C., & Molina, O. (2013). *Geometría Plana, un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

4. Contenidos

El trabajo se presenta a partir de una introducción y cinco capítulos.
En el capítulo uno, se presenta la delimitación del problema, los objetivos y la revisión de la literatura.
En el capítulo dos, se presentan los referentes teóricos en los que la propuesta presentada se sustenta y que posibilitaron la configuración del ambiente indagativo. Estos referentes teóricos se definieron como condiciones que favorecen la configuración del ambiente indagativo, entre los que están la argumentación, la actividad demostrativa, la geometría dinámica y la gestión del profesor.
En el capítulo tres se expone la metodología, que consistió en un Experimento de Enseñanza en el que se describe la planeación y las decisiones que se tomaron para el diseño y ejecución del experimento. Se presenta el contexto experimental, los aspectos de la enseñanza, la experimentación y el análisis retrospectivo.
En el capítulo cuatro, se presenta el análisis realizado a los fragmentos más representativos del trabajo en pequeño grupo y las puestas en común en gran grupo. El análisis de los fragmentos en pequeño grupo muestra estos espacios como una preparación que posibilita a los estudiantes a ser protagonistas de las discusiones en el gran grupo.
En el capítulo cinco, se presentan los resultados principales del análisis y las respectivas conclusiones.

5. Metodología

El presente trabajo de grado corresponde a la metodología Experimento de Enseñanza. En esta metodología un investigador-profesor y un grupo de investigadores diseñan una secuencia de episodios para aplicar a uno o un grupo de estudiantes. Un Experimento de Enseñanza posibilita la captura de los fenómenos en el ámbito real y romper con la distinción del investigador y el profesor, lo que posibilita la recolección de información de primera mano.

El Experimento de Enseñanza pone en juego una hipótesis sobre la enseñanza y el aprendizaje la cual se pone a prueba a partir de un marco de teórico de referencia. Por esta razón, mediante esta metodología se partió de la hipótesis de que es posible promover prácticas como la argumentación, la actividad demostrativa, el uso de la geometría dinámica para resolver problemas y la gestión del profesor favorece la configuración del ambiente indagativo en la que los estudiantes son protagonistas. Para lograr esto, un Experimento de Enseñanza tiene tres fases en las que se intenta desarrollar los presupuestos de la hipótesis: (i) la planeación: se diseña una intervención de enseñanza, con base en la meta del aprendizaje, y se toman decisiones sobre los registros que se van a llevar a cabo al implementar el plan; (ii) la experimentación: se implementa la enseñanza y se determinan posibles modificaciones, según el curso de los acontecimientos; y (iii) el análisis retrospectivo: el equipo investigador, basándose en los datos recolectados, hace un estudio del aprendizaje de los estudiantes.

6. Conclusiones

Algunas de las conclusiones fueron:

- Se observa un mayor protagonismo de los estudiantes en la clase de geometría. Su papel en el desarrollo de las puestas común fue significativo, ya que son los aportes de los estudiantes los que determinan el rumbo de la clase y los resultados que se obtuvieron en la misma.
- Los estudiantes tuvieron una evolución favorable frente a superar el temor por expresar sus ideas en público y además sus intervenciones, al final del experimento, fueron respaldas aludiendo a los hechos geométricos que se estudiaron.
- Se observa a un grupo de estudiantes y un profesor resolviendo problemas matemáticos, haciendo discusiones espontáneas sobre matemáticas y mencionando los hechos matemáticos para corroborar sus argumentos. Una genuina comunidad matemática.
- El uso de la geometría dinámica y las tecnologías audiovisuales jugaron un papel importante en la configuración del ambiente indagativo, ya que se observa un mayor interés de los estudiantes por participar de la clase cuando estas herramientas hacen parte del desarrollo de la misma.
- La cultura de justificar las ideas que se expresan se convirtió en algo más usual para los estudiantes en la clase y de manera general hubo un aumento en la producción de argumentos en los que se insinuaban hechos geométricos para justificar.
- Es necesario fortalecer las habilidades de expresión de los estudiantes y el manejo del lenguaje, ya que se observan dificultades para que los estudiantes intenten exponer de manera clara y concisa lo que piensan.

Elaborado por:	Puentes Díaz, Julián Andrés
Revisado por:	Leonor Camargo Uribe

Fecha de elaboración del Resumen:	18	10	2015

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El punto de partida del presente trabajo de grado fue el desafío asumido por la educación matemática de reflexionar sobre el quehacer del profesor. Este contexto nos llevó a cuestionar nuestra propia práctica como profesores de matemáticas y, como resultado de estas reflexiones, encontrar que nuestras clases de matemáticas no promovían un protagonismo de los estudiantes en la justificación y producción de conocimientos. Un sondeo realizado, al inicio del trabajo, sobre las prácticas usuales que se desarrollan en las clases de geometría de la educación media, mostró que en estas, usualmente, no se involucran la argumentación y la actividad demostrativa. Así, pusimos de manifiesto una problemática digna de estudio por parte de quienes nos desenvolvemos como profesores de matemáticas y que demanda un cambio en los currículos y maneras de desarrollar la clase de matemáticas en las instituciones educativas. Así mismo, el sondeo mostró que las tecnologías digitales no se han incorporado de manera frecuente en las clases de matemáticas lo que hace aún más evidente la necesidad de reflexionar sobre cambios en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la institución donde el autor de este trabajo labora. Con la realización de este trabajo de grado, planteamos una posible ruta para la solución de las dos problemáticas antes mencionadas.

En el primer capítulo delimitamos el problema, presentamos los objetivos, la justificación y la revisión de la literatura. En el segundo capítulo soportamos conceptualmente nuestra propuesta, por tal razón nos apoyamos en los estudios realizados por Goos (2004) sobre la configuración de un ambiente indagativo en la clase de matemáticas y los trabajos de la línea de Argumentación y Prueba, particularmente los desarrollados por el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), en los que precisamos lo que entendemos por actividad demostrativa y como la geometría dinámica posibilita un cambio en la configuración de la clase de geometría. En el tercer capítulo presentamos el diseño metodológico de nuestra investigación, que consiste en un experimento de enseñanza en el cual damos cuenta del contexto experimental, la definición de nuestro caso y las acciones realizadas en cada una de las tres fases del experimento. En el cuarto capítulo presentamos los análisis realizados a los datos recolectados en el experimento, y en el quinto capítulo discutimos los resultados encontrados y presentamos las conclusiones del estudio.

Finalmente, queremos señalar que este trabajo de grado contó con el apoyo financiero de la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá en el programa Orgullosamente Maestros. La iniciativa principal de este programa es que los profesores de los colegios distritales puedan capacitarse para favorecer cambios en las prácticas que se desarrollan al interior de las aulas de clase, lo que posibilitaría una renovación en el aprendizaje y la enseñanza de la educación pública en Bogotá D.C.

CAPÍTULO 1
DELIMITACIÓN DEL ESTUDIO

En este capítulo ponemos de manifiesto el problema que atendimos en este trabajo de grado. Iniciamos con las motivaciones que nos llevaron a realizar este estudio. Luego, presentamos la delimitación del problema; para ello, referenciamos el campo de estudio en el cual se alberga la problemática. Después presentamos la justificación y objetivos del estudio. Finalmente presentamos la revisión de la literatura que usamos para evidenciar que nuestro problema ha sido estudiado anteriormente en la comunidad académica y así establecer la pertinencia de nuestra investigación.

1.1 Planteamiento del problema

A continuación presentamos cuatro elementos que estructuran y evidencian la problemática que nos proponemos abordar en este trabajo de grado.

El primer elemento que nos permitió plantear el problema fue la identificación de una cultura institucional, en el colegio Álvaro Gómez Hurtado IED, en la que los estudiantes se sienten cohibidos para expresarse en público debido al temor a ser señalados y ser sometidos a burlas por sus compañeros; y cuando vencen el temor, tienen dificultades para articular sus ideas ya que no están acostumbrados a comunicarse verbalmente. Este hecho ha promovido cuestionamientos en el equipo de profesores de la institución cuando se hacen evaluaciones del rendimiento académico de los estudiantes, cuando se discuten modificaciones al plan de estudio, y en otros espacios que posibilitan reflexiones sobre la falta de coherencia entre lo establecido por el PEI(2009) de la institución –que gira alrededor de la comunicación y los valores- y las prácticas que se desarrollan en las aulas de clase. En los espacios de discusión mencionados anteriormente, el grupo de profesores ha llegado a la conclusión de que se hace necesario que lo que se establece en el PEI (2009) empiece a ser una realidad en la cultura institucional ya que no se promueven prácticas ni estrategias que posibiliten y contribuyan al cumplimiento de lo instituido en los documentos que rigen la institución. En particular, hemos evidenciado la inconsistencia entre lo que está establecido y lo que se vive en la institución en los siguientes fragmentos del PEI:

- En el Principio Formativo de la institución se hace referencia a que "…la escuela […] es el escenario donde se propende por un desarrollo singular y consciente del ser social en una cultura comunicativa…"(Manual de Convivencia, 2013).
- Entre los objetivos específicos que plantea la institución está "Reconocer y utilizar los medios masivos de comunicación y las nuevas tecnologías de información como herramientas de aprendizaje autónomo" (Manual de Convivencia, 2013).
- En el perfil del estudiante que se quiere formar en la institución se afirma que los estudiantes deben tener "capacidad crítica para percibir el mundo de las comunicaciones y responder a las necesidades del mismo" (Manual de Convivencia, 2013).
- En la Misión Institucional se establece que es necesaria "…la formación de personas autónomas que desarrollen y evidencien competencias en el ser, hacer y saber convivir […] mediante habilidades comunicativas". (Manual de Convivencia, 2013)

El segundo elemento que sustenta la problemática se deriva de una motivación –o una inquietud- originada en la práctica como profesor-en las instituciones Kimy Pernia Domico IED y Álvaro Gómez Hurtado IED- del autor del presente trabajo de grado, quien hace parte del grupo de investigación Argumentación y Prueba de la Universidad Pedagógica Nacional. Un sondeo general de los procesos de aprendizaje y enseñanza usuales que tienen los estudiantes en las clases de matemáticas, y especialmente en las clases de geometría, deja ver que estas se encuentran muy alejadas de prácticas que promuevan la comunicación, una actitud indagativa en los estudiantes, el uso de la argumentación como herramienta para interactuar y construir conocimientos, y mucho más aún de la actividad demostrativa. Este panorama, en cierta medida, se logra explicar, ya que la clase de geometría no trasciende más allá del estudio de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, del dibujo de figuras geométricas y de la referencia a ciertas propiedades que tienen algunas de estas figuras, lo que hace difícil crear un ambiente de intercambio de ideas, confrontación y argumentación.

El tercer elemento que nos ayudó a determinar la problemática, fue el intercambio de ideas con los profesores de la línea de investigación de *Argumentación y Prueba* del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría,* cuando presentamos nuestras inquietudes en el contexto de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. La interacción con este grupo nos permitió evidenciar la importancia que tiene reflexionar sobre condiciones que favorezcan una comunidad indagativa en la clase de geometría para la comunidad académica y las posibles soluciones que se pueden plantear para lograr un cambio de las prácticas mencionadas, en busca de incentivar una actitud indagativa; así, empezamos a estudiar el impacto que tienen los programas de geometría dinámica y la argumentación para favorecer cambios en la cultura de la clase de geometría. Ello sin duda generó una mayor motivación por estudiar la problemática y nos presentó una contextualización más profunda de ella.

El cuarto elemento que contribuyó a estructurar la problemática mencionada y que dio mayor firmeza a nuestras inquietudes iniciales, fue una aproximación empírica a la problemática, realizada el primer semestre de 2014. Para ello aplicamos unos cuestionarios (Anexo 1) tanto a profesores y estudiantes que nos permitió la recolección de información en la institución Álvaro Gómez Hurtado IED, y de esta manera evidenciar que las percepciones generales que teníamos se podrían corroborar a partir de la información que estos cuestionarios nos brindarán. Al aplicar los cuestionarios, tanto a los profesores del área de matemáticas de la institución como a 50 estudiantes de varios cursos de 6° a 11°, encontramos lo siguiente:

- En la Figura 1.1 presentamos los resultados obtenidos a la pregunta: “¿cuál es la actividad que más propone a los estudiantes en la clase de geometría?” respondida por 10 profesores del área de matemáticas. Podemos afirmar que una acción próxima a la argumentación en la clase de geometría, “Estudia definiciones y teoremas planteando verificaciones y demostraciones”, es desarrollada por solo un profesor de los 10. Teniendo en cuenta los resultados, podemos aseverar que en las clases de geometría, al momento de responder las preguntas, los profesores se inclinaban por proponer actividades relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Por tal razón, evidenciamos la ausencia de prácticas usuales que involucren la argumentación y la cultura de la argumentación.

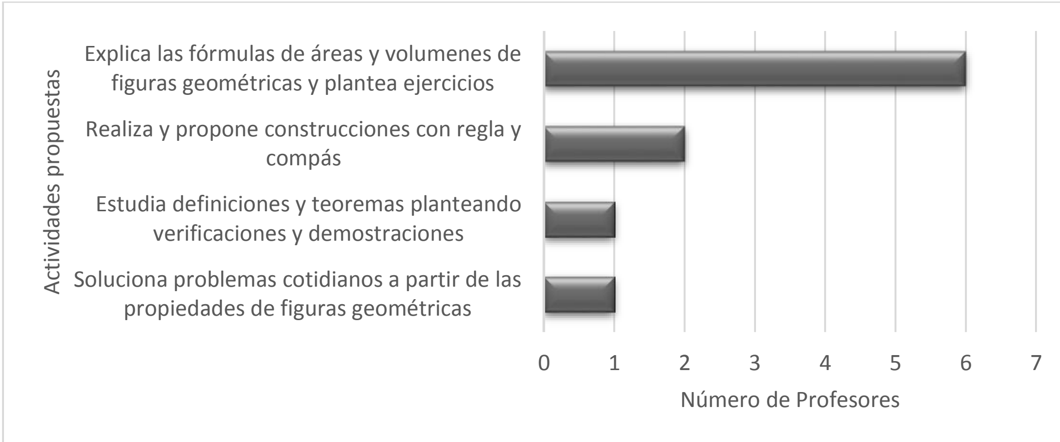


Figura 1.1. Actividades que se realizan en la clase de geometría por los profesores de la institución.

- En la Figura 1.2 presentamos los resultados obtenidos a la pregunta: "¿cuáles son los instrumentos que se utilizan en la clase de geometría?". Podemos evidenciar que en el primer semestre de 2014 sólo uno de los profesores de los 10 a los que se les aplico el cuestionario utilizaba programas de geometría dinámica como instrumentos para el desarrollo de la clase de geometría.

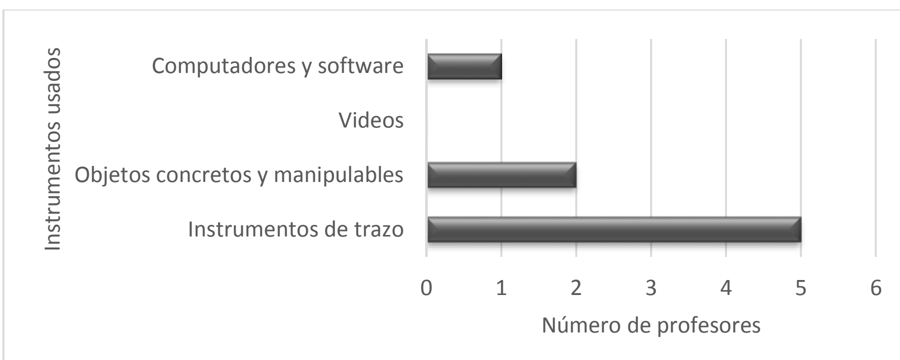


Figura 1.2. Instrumentos utilizados en las clases de geometría de la institución.

- En la Figura 1.3 presentamos los resultados obtenidos a la pregunta: "¿cuál es la actividad que más proponen los profesores de geometría?" respondida por 50 estudiantes de la institución educativa Álvaro Gómez Hurtado IED. Cada barra muestra las actividades propuestas por los profesores del área de matemáticas desde la perspectiva de los estudiantes, al momento de responder. Podemos afirmar por las respuestas de los estudiantes, en las que se reconocen principalmente actividades de cálculo de perímetros, áreas y volumen, que en la clase de geometría no hay prácticas próximas a la argumentación.

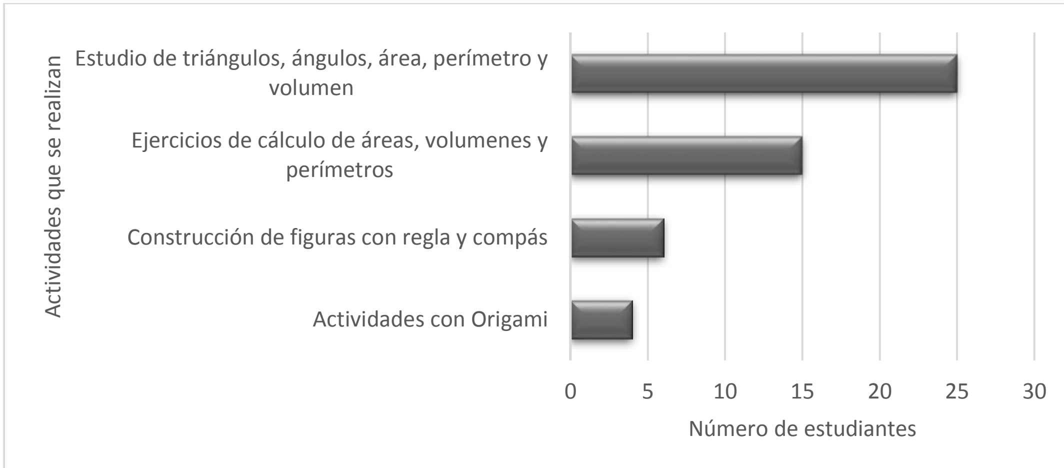


Figura 1.3. Actividades que realizan los estudiantes en la clase de geometría.

• En la Figura 1.4 presentamos los resultados obtenidos a la pregunta: "¿cuáles son las herramientas utilizadas en la clase de geometría?" aplicada a los mismos 50 estudiantes. La respuesta más frecuente (40 estudiantes) hace referencia al uso de instrumentos de trazo como regla, compás, transportador, curvígrafo y escuadra. La primera barra muestra que 10 estudiantes mencionan materiales concretos como hojas, cartón o cartulina para realizar figuras en Origami o construcción de figuras geométricas con estos materiales. Podemos afirmar entonces, que en el primer semestre de 2014 no era reconocido por los estudiantes un uso de los programas de geometría dinámica en la institución educativa.

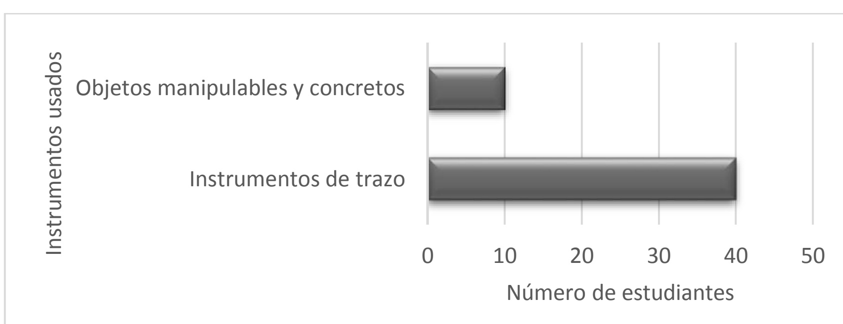


Figura 1.4. Instrumentos utilizados por los estudiantes en la clase de geometría.

En resumen, podemos afirmar que a partir de los resultados de la aproximación empírica evidenciamos la ausencia de la argumentación y el uso de programas de geometría dinámica en la clase de geometría, lo cual desde nuestra perspectiva imposibilitan la configuración de un ambiente indagativo en el desarrollo de la clase y pone de manifiesto la problemática.

Pregunta de investigación

A partir de los cuatro elementos descritos anteriormente, consideramos que nuestro problema consistía en atender la ausencia de la argumentación como práctica usual en el desarrollo de las clases para que los estudiantes expresaran sus ideas y el no uso de programas de geometría dinámica en las clases de geometría. Es decir, consideramos que ni las tareas sugeridas por los profesores ni los instrumentos de apoyo creaban una cultura de la clase de geometría que favoreciera la participación, protagonismo y expresión de las ideas de los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, la pregunta de investigación que concretó el problema y que orientó las acciones para atender este es la siguiente:

> ***¿En la configuración de un ambiente indagativo en la clase de geometría qué papel juegan la argumentación en el contexto de la actividad demostrativa y el uso de programas de geometría dinámica?***

Para enfrentar el problema que planteamos, partimos de una revisión bibliográfica para ver cómo había sido abordado por otros investigadores de la comunidad académica en educación matemática. Cuando revisamos el trabajo realizado por Mariotti fue posible clasificar nuestra trabajo de grado en la línea de "intervenciones de enseñanza" (Mariotti, 2006). En esta línea, Mariotti ubica los diversos estudios que han promovido cambios en las prácticas que se realizan en las clases de geometría. La investigadora se enfoca en el diseño de propuestas para el aula que incentivan la argumentación mediante el uso de programas de geometría dinámica y en las que se intenta favorecer metodologías diferentes a las usuales, para el desarrollo de las clases de geometría en el contexto escolar. Esta ubicación nos permitió ver la pertinencia de nuestro trabajo de grado, ya que nuestro interés no era un caso aislado. Precisamente Mariotti (2006) nos mostró que hay una corriente de investigaciones que intentan promover cambios en las clases de geometría, tal cual es nuestra intención al desarrollar este trabajo, en el contexto de la actividad demostrativa. Dentro de esta línea encontramos sugerencias para favorecer una nueva cultura de la clase de matemáticas, propuestas por autores como Goos (2004), Forman (1996) y Mariotti (2006). La revisión de literatura nos permitió observar que nuestra inquietud inicial es y ha sido objeto de estudio en la comunidad académica, lo cual da soporte al trabajo que desarrollamos.

1.2 Objetivo general

Favorecer la configuración de un ambiente indagativo en la clase de geometría, a partir de la argumentación en el contexto de la actividad demostrativa de estudiantes de grado séptimo de la institución educativa Álvaro Gómez Hurtado IED.

1.2.1 Objetivos específicos

1. Propiciar un cambio en la dinámica de las clases de geometría en donde los estudiantes tengan un mayor protagonismo, puedan expresar sus ideas y argumentar sobre las mismas en el desarrollo de las clases.
2. Impulsar en los estudiantes prácticas de argumentación, en el contexto de la actividad demostrativa, para convencer a otros de sus ideas mediante la alusión a hechos geométricos.
3. Promover en las clases de geometría el uso de programas de geometría dinámica y de esta manera incentivar y aprovechar las herramientas tecnológicas con las que cuenta la institución educativa.
4. Avivar el papel y la importancia de la geometría en el currículo de matemáticas fomentando una aproximación alternativa de la enseñanza y el aprendizaje de está en la institución educativa Álvaro Gómez Hurtado IED.
5. Contribuir a que la filosofía y los objetivos institucionales propuestos en el PEI de la institución educativa Álvaro Gómez Hurtado IED sean evidentes en las prácticas que realizan los estudiantes.

1.3 Justificación

Presentamos la justificación de este trabajo a partir de las siguientes cuatro ideas centrales:
La primera, responde a las inquietudes sobre la práctica profesional del autor del trabajo de grado, identificadas en la problemática. Se hace necesario reflexionar, cuestionar y posibilitar un cambio en la enseñanza de las matemáticas por los desafíos que se plantean a la educación

matemática, y a la educación en general. Esto requiere de una formación continua y una predisposición al cambio, por parte de los profesores, si queremos actuar acorde con las exigencias de nuestra labor en las aulas de clase. En esencia, la primera de las razones que justifica este trabajo de grado es la responsabilidad y la motivación que existe por responder a las necesidades que exige la educación en la actualidad, motivo por el cual la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá ha apoyado a los profesores que queremos impulsar y aportar al cambio que se requiere actualmente.

La segunda idea que justifica el trabajo de grado es que con este estudio intentamos abordar una problemática vigente en la comunidad académica de educación matemática. La problemática es relevante a nivel internacional y que a partir de los resultados que obtuvimos aportamos en el estudio de esta. En particular, hacemos una propuesta que intenta promover un cambio en las clases hacia una interacción continua entre el profesor y entre los estudiantes y en donde la argumentación y la actividad demostrativa en la clase de geometría sean una realidad. En la actualidad existen recursos tecnológicos que pueden posibilitar el cambio en la forma en que se enseñan las matemáticas, para lo cual nuestro trabajo con programas de geometría dinámica hace un aporte para atender la problemática.

La tercera idea, es que existe una necesidad por promover innovaciones metodológicas a la enseñanza de las matemáticas que posibiliten cambios en las dinámicas que determinan el aprendizaje de los estudiantes. Por tal razón, dentro de la propuesta de trabajo se ha dispuesto del uso de programas de geometría dinámica que en gran medida fomentan un cambio en la cultura de la clase, una mejor disposición de los estudiantes hacia los desafíos que se plantean y un aprovechamiento de las nuevas tecnologías con las que cuenta la institución. De esta manera, se presenta una oportunidad para favorecer prácticas de argumentación y participación en los estudiantes lo que contribuye a la formación de estudiantes con un espíritu crítico.

Finalmente, la cuarta idea que justifica nuestro trabajo, es que este pretende contribuir a alcanzar los objetivos enmarcados en el PEI e impulsar un cambio en las prácticas que se desarrollan en el área de matemáticas. Desde esta perspectiva, nuestra investigación tiene pertinencia puesto que al promover actitudes de argumentación y validación de afirmaciones en los estudiantes, se posibilita el desarrollo de habilidades comunicativas enmarcadas en el respeto y la tolerancia, los cuales son los ejes centrales de la formación en la institución. De igual manera, se obtienen beneficios para la institución al promover cambios metodológicos en la clase de matemáticas, promover la utilización de los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución y fomentar nuevos espacios de interacción entre los profesores, los estudiantes y los saberes matemáticos, propiciando reflexiones sobre la importancia de la geometría en el currículo de matemáticas.

1.4 Revisión de literatura

Un último aspecto que posibilitó la delimitación del problema, que es objeto de estudio en nuestro trabajo, fue la revisión de literatura relacionada con los objetivos y temática principal y que en este apartado ponemos de manifiesto. Para ello, mencionamos estudios e investigaciones relevantes que han aportado referentes teóricos y metodológicos a nuestro estudio. Uno de los primeros referentes teóricos revisados, y que proporciona en gran medida la base conceptual de nuestro trabajo, son los planteamientos que Goos (2004) presenta en su trabajo. Esta autora afirma que se hace necesario generar un cambio en la cultura de la clase de matemáticas, de tal modo que los estudiantes tomen un mayor protagonismo en la construcción y validación del saber matemático. Para Goos (2004) se hace necesario promover una comunidad de indagación en las clases de matemáticas, en la que los estudiantes adopten un rol activo y el profesor sea un representante del saber matemático que ayuda a promover escenarios en los que los estudiantes validan el conocimiento matemático que se estudia. Esta nueva cultura de la clase de matemáticas genera un desafío para los profesores ya que representa cambiar las prácticas usuales de la clase. Si estos planteamientos pudiesen ser llevados a cabo en la clase de matemáticas, propiciarían la argumentación en la clase de geometría. Por tal razón, las ideas de Goos (2004) y Forman (1996)aportan fundamentos teóricos que permiten analizar cómo crear espacios en los que la argumentación sea una realidad en la clase de geometría.

Un segundo referente teórico el cual hace parte esencial de la fundamentación teórica de nuestro trabajo de grado, son las investigaciones hechas por Krummheuer (1995) en las cuales se pone de manifiesto lo que se entiende por argumentación. Para Krummheuer la argumentación se define como las acciones que van encaminadas a convencer a otros de la validez de sus afirmaciones, las cuales se pueden tipificar en virtud de las características del discurso proporcionado para convencer a otro u otros. Para Krummheuer se pueden observar dos tipos de argumentos: los sustanciales y los analíticos (Toulmin, 1969; citado en Krummheuer, 1995). Los argumentos analíticos poseen una estructura ternaria que consta de unos datos, una aserción y una garantía que permite asegurar la aserción, con base en un conjunto de conocimientos aceptados por el grupo social. Por su parte, los argumentos sustanciales carecen de esta estructura, ya que se caracterizan por ser argumentos informales que se derivan de la experiencia empírica de interacción con las diversas situaciones o problemas. La diferenciación entre estos dos tipos de argumentos también es uno de los referentes principales de nuestro estudio, ya que intentamos favorecer la participación de los estudiantes en las clases de geometría, pero nuestros esfuerzos están encaminados a lograr que los estudiantes transiten desde argumentos sustanciales hacia el uso de argumentos analíticos.

El tercer referente teórico que utilizamos son las investigaciones realizadas por los miembros del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$, de la Universidad Pedagógica Nacional. Este colectivo ha publicado una serie de estudios en los cuales se pueden evidenciar las características de las experiencias en las que buscan promover innovaciones en la clase de geometría, tanto en niveles escolares como universitarios. Este grupo hace especial énfasis en el hecho de generar una cultura de la argumentación matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Particularmente, en nuestro trabajo de grado hemos usado los estudios descritos en Samper & Molina (2013) y en Perry, Samper, Camargo, Echeverry, & Molina (2012) en los cuales se describe la esencia de la actividad demostrativa y la acción de argumentar matemáticamente. De igual manera, otros estudios del grupo de investigación han proporcionado algunos elementos teóricos que respaldan el trabajo con programas de geometría dinámica para favorecer la argumentación. Por ejemplo, Camargo & Samper (2012) ponen de manifiesto las bondades que tienen estos programas en el estudio de la geometría y en el acercamiento a la argumentación que se puede lograr a partir de estos programas en la clase.

Finalmente, otro de los elementos teóricos que se tuvieron en cuenta en nuestro trabajo fueron los planteamientos que hacen Laborde (2001) y Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer

(2006) acerca de las bondades de trabajar con programas de geometría dinámica en clase. Para estos investigadores, las herramientas que poseen dichos programas permiten la interacción de los estudiantes con los objetos geométricos, de manera que, con herramientas como el arrastre o la traza, se pueden identificar y explorar invariantes de estos objetos. Encuentran beneficios y resultados positivos muy diferentes al acercamiento con lápiz y papel, que los profesores de matemáticas deberían aprovechar. Dentro de las bondades que estos autores manifiestan están el ahorro de tiempo para descubrir y analizar propiedades, además de la identificación de la dependencia de propiedades, que da lugar a enunciados condicionales y favorece la argumentación y la justificación. A partir de las bondades que referencian estos autores, y otros como Camargo & Samper (2012), se pueden impulsar interacciones entre los estudiantes y los objetos geométricos, de manera que se posibilite la argumentación.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

La presentación de los referentes teóricos que estructuran nuestra propuesta la hemos dividido en dos apartados que fundamentan el trabajo realizado. De este modo, en el primero, planteamos la definición de ambiente indagativo que adoptamos en la investigación y, en el segundo, aludimos a las condiciones que, desde nuestra perspectiva, posibilitan la creación de un ambiente indagativo.

La Figura 2.1ilustra el papel que juegan los referentes teóricos y su relación con los objetivos de la investigación, en el sentido de promover un cambio de las clases usuales hacia un ambiente indagativo:

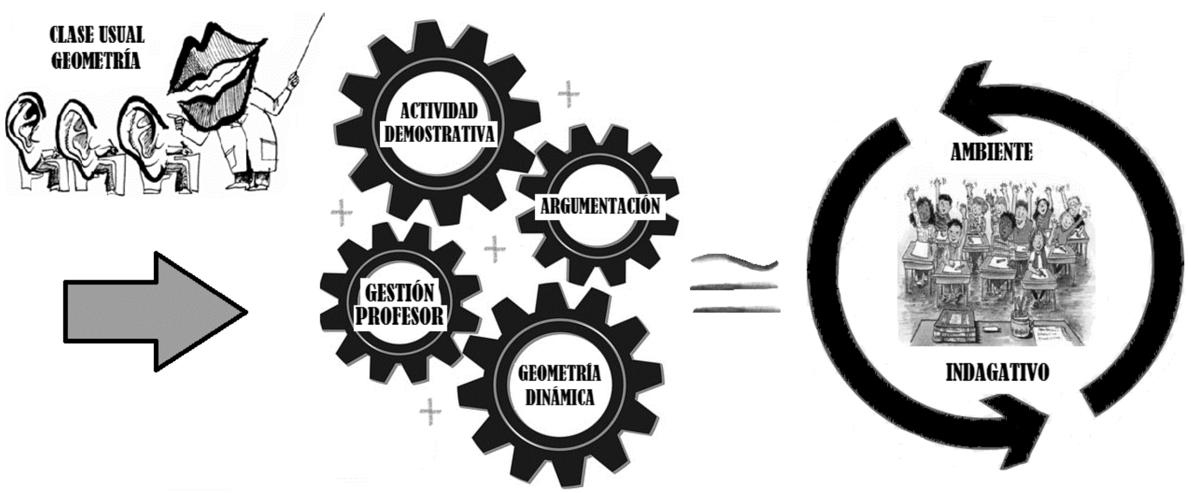


Figura 2.1: **Condiciones que favorecen la configuración de un ambiente indagativo en la clase de geometría.**

Observamos a la izquierda de la Figura 2.1 una ilustración que representa lo que consideramos una clase usual de geometría, en la que el profesor tiene el protagonismo y los estudiantes juegan un papel secundario, de manera que escuchan lo que el profesor dice, generándose una dinámica en un solo sentido: profesor→estudiantes. Los engranajes en el centro de la figura representan que mediante la combinación dela actividad demostrativa, el impulso a la argumentación, el uso de un programa de geometría dinámica y una gestión del profesor enfocada en la participación de los estudiantes, podemos promover un cambio en la clase de geometría. Concebimos que este cambio permite una dinámica en la que los estudiantes sean protagonistas en el desarrollo de la clase, generando un ambiente indagativo, que ilustramos al lado derecho de la figura. En los siguientes apartados definimos y caracterizamos cada uno de estos elementos.

2.1 Ambiente indagativo

Definimos *ambiente indagativo* (i. e., ambiente para indagar en la clase de matemáticas) como el conjunto de circunstancias que propicia el profesor para que los estudiantes, a partir de la resolución de problemas, puedan llegar a participar en la clase de matemáticas mediante la expresión de ideas, la argumentación, la refutación y la gestión de acuerdos y reflexiones que apunten a la generación de conocimientos matemáticos (Goos, 2004). Consideramos que en la configuración de un ambiente indagativo el profesor interactúa con sus estudiantes en ambos sentidos: profesor→ estudiantes, estudiantes →profesor y también hay una interacción estudiantes → estudiantes. Desde el punto de vista de Forman (1996), un incremento en la participación y la interacción de los estudiantes en la comunidad de indagación promueve el aprendizaje de las matemáticas. Como el ser humano es inherentemente social, este tipo de prácticas y de ambientes promueven una nueva cultura en la clase de matemáticas en la que se construye una comunidad que está interesada en hacer matemáticas.

A partir de esta definición, caracterizamos un ambiente indagativo a partir de lo siguiente:

- Se observa que los estudiantes participan en la clase (i) expresando ideas que provienen de las experiencias propias que resultan de resolver problemas que se les plantean y justificando dichas ideas con el conocimiento matemático que tienen (ii) mostrando a sus compañeros y al profesor sus producciones sobre cómo enfrentaron la resolución de los problemas y las soluciones que encontraron. (iii) reaccionando y aportando a los cuestionamientos que plantean el profesor y los demás miembros de la comunidad. En nuestra propuesta, el ambiente indagativo se concreta involucrando a los estudiantes en la actividad demostrativa (definida más adelante) la cual realizan con el apoyo de un programa de geometría dinámica.

- Los estudiantes formulan argumentos con el fin de convencer a otros o a sí mismos de la validez de la solución dada a un problema. Es decir, la argumentación se convierte en una actividad natural en la clase de matemáticas.
- Los estudiantes interactúan entre ellos y con los demás integrantes de la comunidad para (i) aprobar o rechazar las afirmaciones que hacen sus compañeros o el profesor, afirmando porque están en acuerdo o desacuerdo. (ii) Para complementar la afirmación hecha por otro miembro de la comunidad o utilizar sus afirmaciones para llegar a acuerdos o conclusiones;(iii) para plantear contra argumentos o refutar las afirmaciones que se plantean de manera que se enriquezca la indagación sobre el saber matemático y (iv) para la gestión de acuerdos y reflexiones que apunten a la generación de conocimientos matemáticos.
- Los estudiantes formulan preguntas a partir de inquietudes genuinas que resultan de la interacción con los problemas que se plantean, las intervenciones de otros miembros de la comunidad o los resultados obtenidos a partir de las discusiones que se dieron en la clase.

2.2 Condiciones que favorecen la creación del ambiente indagativo

Presentamos a continuación una serie de planteamientos que fundamentan la investigación y que muestran las condiciones que, desde nuestro punto de vista, pueden hacer que se configure un ambiente indagativo.

2.2.1 Argumentación y actividad demostrativa

Siguiendo a Krummheuer (1995), el acto de argumentar, entendido en un sentido amplio, refiere a un fenómeno social de interacción, que solo se hace evidente cuando se expresa de manera verbal y/o escrita, en el que una persona intenta convencer a otros de la validez de sus afirmaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, el que los estudiantes puedan argumentar repercute en la configuración del ambiente indagativo, ya que si los estudiantes pueden expresar sus ideas y argumentar estas, se promueve un ambiente de indagación en la clase de matemáticas. Uno de las contextos que favorece la argumentación es la actividad demostrativa, que involucra los procesos de conjeturación y justificación relacionados entre sí de manera que algunas de las conjeturas que se formulan se justifican (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012). El proceso de *conjeturación* involucra acciones como detectar propiedades, buscar regularidades mediante el apoyo que brinda el proceso de exploración de las situaciones planteadas –que usualmente se da a partir de un programa de geometría dinámica, para luego pasar a la formulación de las conjeturas y una verificación empírica de estas. El proceso de *justificación* incluye acciones como buscar ideas para organizar un argumento, elaborar un argumento y producir una justificación. En este trabajo nos enfocamos en que el proceso de justificación sea a partir de la producción de cierto tipo de argumentos por parte de los estudiantes. En este contexto de actividad demostrativa se posibilita la argumentación como herramienta para pasar del proceso de construcción de la conjetura a la justificación y se hace evidente su repercusión en un ambiente de interacción e intercambio de ideas como lo es un ambiente indagativo.

Para efectos analíticos usamos la siguiente clasificación de argumentos, que es una adaptación de la propuesta de Krummheuer (1995) quien referencia a Toulmin (1969): argumento sustancial, argumento analítico y argumento mixto. A continuación explicamos cada uno.

Argumento sustancial

A partir de la idea de Toulmin (1969; citado en Krummheuer, 1995), entendemos por argumento sustancial aquel que carece de rigor matemático; es decir, en la estructura ternaria datos–garantía–aserción, las garantías no provienen de un hecho geométrico[1] sino de información proveniente de la resolución empírica del problema planteado con el uso del programa de geometría dinámica; en esencia, reconocemos un argumento sustancial cuando la garantía utilizada para pasar de los datos a las aserciones no es un hecho geométrico. Por ejemplo, la Figura 2.2 muestra la estructura ternaria de un argumento sustancial, en el que la garantía resulta de una situación empírica como lo es la medición de los segmentos

[1] Entendemos por hecho geométrico un enunciado, bien sea postulado, axioma, definición o teorema de la geometría euclidiana plana.

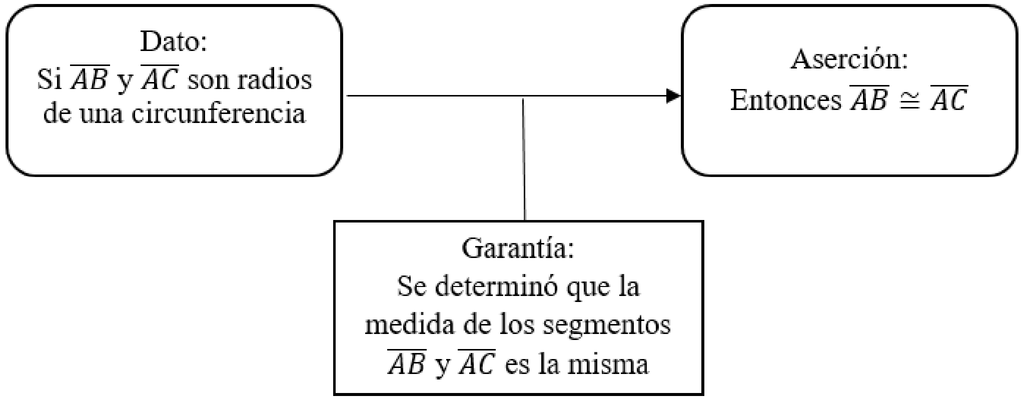


***Figura 2.2*: Estructura ternaria de un argumento sustancial**

Argumento Analítico

El argumento analítico posee la estructura ternaria mencionada anteriormente pero, a diferencia del argumento sustancial, la garantía utilizada para pasar de la premisa a la consecuencia es un hecho geométrico. Un ejemplo de argumento analítico se presenta en la Figura 2.3.

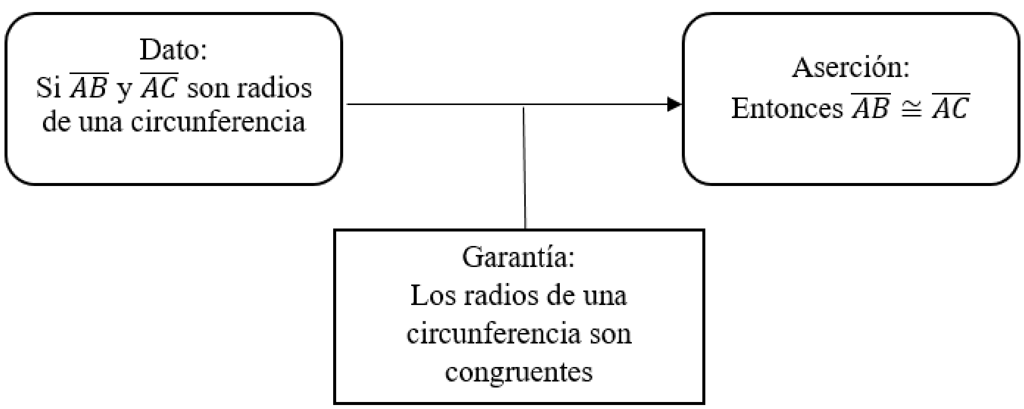


***Figura 2.3*: Estructura ternaria de una argumento analítico**

La producción de este tipo de argumentos por parte de los estudiantes, es en esencia el objetivo de la intervención didáctica ya que presupone que su participación en la comunidad matemática será respaldada por el uso de hechos geométricos, lo cual proporciona validez a las indagaciones que se producen.

Argumento Mixto

Aunque Krummheuer (1995) solo tipifica dos clases de argumentos, nosotros incluimos un tercero, que emergió de los datos de la investigación. Para nosotros, el argumento mixto es aquel que toma como garantía una mezcla de información empírica y hechos geométricos; Por ejemplo, en la Figura 2.4 presentamos una garantía que está compuesta por la referencia a un hecho geométrico de la geometría y a la alusión a resultados de la experiencia particular de la medida de dos segmentos. Como hay una ambigüedad entre el uso de información empírica y teórica No podemos afirmar que se trate de un argumento sustancial o analítico y por eso introducimos este tipo.

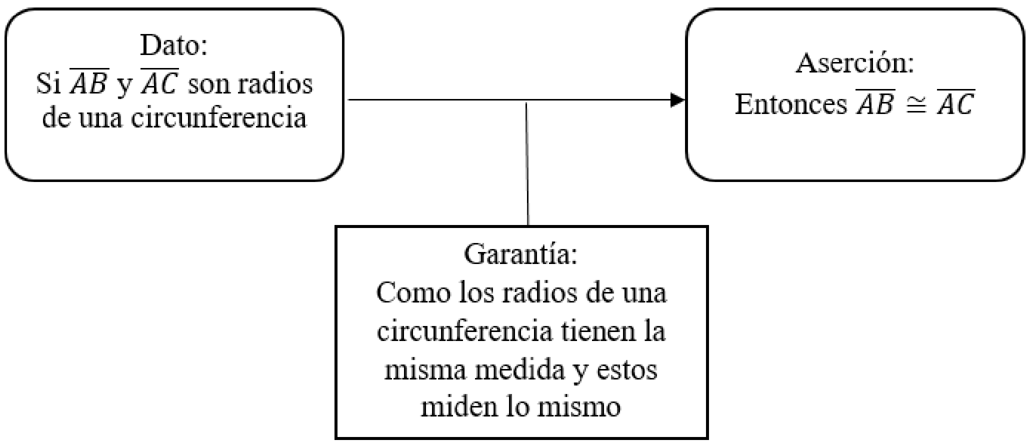


***Figura 2.4*: Estructura ternaria de un argumento mixto**

Una de las hipótesis del estudio es que inicialmente los estudiantes utilizan argumentos sustanciales para justificar, pero luego de la interacción en la clase, la introducción de normas para uso del lenguaje matemático y la gestión del profesor pueden dar argumentos analíticos, quizás, con una transición a argumentos mixtos.

2.2.2 Geometría dinámica

La mediación de la geometría dinámica en la construcción de ambientes indagativos es primordial puesto que, desde nuestra perspectiva, favorece los procesos de conjeturación y justificación; en ese sentido favorece a la argumentación ya que proporciona a los estudiantes herramientas para validar sus afirmaciones.

Desde nuestro punto de vista, y tal como lo señalan diversos investigadores (Laborde, 2001 y Mariotti, 2006), las bondades del uso de un programa de geometría dinámica como Cabri-Geometry, van desde el ahorro de tiempo y la facilidad de hacer construcciones con el uso de las herramientas del programa, hasta el descubrimiento de propiedades geométricas que en un ambiente de papel y lápiz no se evidencian, a menos que se expliciten verbalmente. Los programas de geometría dinámica posibilitan el diseño de tareas que apuntan a la interacción entre los estudiantes y que promueven su participación en la clase intentando resolver los problemas. Además de esto, brindan herramientas deconstrucción, verificación y control, con las cuales se posibilita el descubrir, verificar y justificar propiedades. Este tipo de tareas en la clase de geometría promueve la interacción entre los estudiantes y el intercambio de argumentos y reflexiones, lo que es fundamental en el ambiente indagativo que se quiere fomentar.

2.2.3 Gestión del Profesor

En un sentido muy general, definimos la gestión del profesor como el conjunto de acciones que el profesor realiza para articular las condiciones, descritas anteriormente, que favorecen la configuración de un ambiente indagativo. Goos (2004) considera que el profesor debe realizar acciones específicas que contribuyan a la configuración de un ambiente indagativo. En particular queremos destacar las siguientes:

- Genera un ambiente de escucha, es decir invita a los estudiantes a prestar atención a las afirmaciones que hace el profesor y los demás estudiantes, para poder aprobar, complementar o refutar las diversas intervenciones que se hacen y así ser parte de la comunidad indagativa.
- Fomenta el lenguaje adecuado, es decir impulsa a los estudiantes a usar un lenguaje matemático preciso que permita que sus demás compañeros le entiendan, se genere ambiente discursivo, se presenten ideas claras y completas. Cuando estas prácticas

no se presentan en la clase, el profesor debe hacer grandes esfuerzos para lograr que los estudiantes se expresen adecuadamente.

- Actúa como un canal de comunicación de la expresión de los estudiantes; es decir, por un lado contribuye a aclarar las afirmaciones de un estudiante, repitiendo lo que dice para que todos los estudiantes lo escuchen, y, por otro lado, da cierto énfasis a un aspecto de la afirmación de algún estudiante para promover la discusión, la participación de los demás estudiantes o encaminar las reflexiones hacia la presentación de argumentos.
- Propicia la argumentación, es decir realiza preguntas del porqué, de manera que los estudiantes sean impulsados a presentar argumentos en sus afirmaciones. También, cuestiona a los estudiantes e invita a los otros estudiantes a aprobar, complementar o refutar las afirmaciones con argumentos. Finalmente, induce a los estudiantes a producir argumentos que cumplan con la estructura ternaria datos–garantía–aserción. Particularmente, hace esfuerzos para que las garantías sean hechos geométricos conocidos.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

La metodología utilizada en el desarrollo de la investigación se presenta en los siguientes apartados. En estos, hacemos explícitos tanto la perspectiva investigativa como la planeación metodológica que utilizamos para estructurar el estudio. También presentamos las particularidades de nuestra investigación definiendo el caso y presentando en detalle cada una de las fases de estas.

3.1 Perspectiva investigativa

La investigación se ubica en una perspectiva sociocultural de la educación matemática en la que se reconoce la incidencia de factores sociales y culturales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Blanco Álvarez, 2011). Según esta perspectiva, se afirma que las interacciones entre las personas los modifican mutuamente, produciendo caracteres nuevos y transformaciones en sus maneras de pensar (Rocher, 1996; citado en Blanco Álvarez, 2011). Teniendo en cuenta estas características, la investigación partió de la hipótesis de que es posible promover un ambiente indagativo en la clase de matemáticas (Goos, 2004) mediante una enseñanza que tenga como protagonistas a los estudiantes, las interacciones entre ellos, entre ellos y el profesor. De acuerdo a nuestro marco de referencia este ambiente es posible en un contexto de actividad demostrativa en el que se impulsa el uso de un programa de geometría dinámica. Para poner en funcionamiento la hipótesis vimos necesario diseñar una intervención de enseñanza en la que buscamos propiciar un cambio en la cultura de la clase de geometría, en la que los estudiantes tuvieran una mayor participación en la construcción y validación de los resultados que se obtienen en las diferentes tareas propuestas en la clase. En ese sentido, nuestra investigación se considera como una investigación aplicada(Schoenfeld, 2000) y cualitativa (Miles & Huberman, 1994), en la que se busca capturar la esencia de los fenómenos del aula en el ámbito real. Esta perspectiva metodológica va acorde con el objetivo planteado para nuestra investigación.

3.2 Contexto experimental

Un aspecto importante de toda investigación, que tiene relación directa con el diseño y los resultados que se obtienen, es el contexto en el que se desarrolla. Así pues, dentro de las características que tiene el contexto en el que se desarrolló la intervención de enseñanza, mencionamos que se llevó a cabo en la Institución Educativa Distrital Álvaro Gómez Hurtado de la ciudad de Bogotá D.C. El colegio se encuentra ubicado en el barrio Aures 2 de la localidad de Suba, el cual se categoriza como un barrio de estrato socioeconómico dos. Este hecho nos sugiere que una gran mayoría de los estudiantes tienen acceso limitado a computadores en su casa. Además, como lo describimos en la formulación del problema señalamos que no es usual que en el desarrollo de las clases de matemáticas, en la institución, se promueva el uso de herramientas audiovisuales y medios digitales y el uso de programas de geometría dinámica era nulo. Este hecho, en cierta medida, jugó a nuestro favor porque el uso del programa de geometría dinámica Cabri generó expectativa en los estudiantes al desarrollar las clases con esta herramienta.

La institución pregona, dentro de los objetivos fundamentales del PEI, la formación de estudiantes con valores y exigencias para la excelencia y con una especialidad en comunicación y medios, lo que determina un perfil esperado del estudiante como alguien con capacidades para el manejo de medios de comunicación, el diseño gráfico y la expresión de ideas. Sin embargo, el contexto socio cultural de los estudiantes, el cual influye en la cultura institucional, no contribuye al cumplimiento de lo establecido. Difícilmente los estudiantes expresan sus ideas verbalmente, por temor al rechazo o señalamiento por parte de sus compañeros difícilmente los profesores y las dinámicas de clase posibilitan interacciones comunicativas.

3.3 Experimento de enseñanza

La metodología utilizada en nuestra investigación se corresponde con un Experimento de Enseñanza (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). Un Experimento de Enseñanza se enfoca en una secuencia de episodios de enseñanza, diseñada con fines de aprendizaje específicos y dirigidos a uno o más estudiantes, en cuya planeación participan un investigador-profesor y un grupo de investigadores. Una de las principales características de un Experimento de Enseñanza es el papel que tiene el investigador-profesor en el desarrollo del mismo, ya que su rol como investigador y profesor le posibilita experimentar de primera mano los efectos del diseño de la enseñanza, a la vez que participa en el análisis de esta. Al ser participante directo de la enseñanza que se está investigando rompe con la habitual distinción entre profesor e investigador. Este hecho posibilita una dinámica de reformulación del diseño planteado inicialmente, lo que da un gran dinamismo a la intervención de enseñanza. Este es un aspecto característico de estos experimentos. Generalmente, en un Experimento de Enseñanza se recopila y analiza la información a partir de registros de entrevistas, clases completas, o producciones de los estudiantes, para determinar los efectos del experimento (Molina et. al, 2011).Un Experimento de Enseñanza tiene como objetivo evaluar el aprendizaje de los estudiantes que resulta de la aplicación de una enseñanza en un contexto real y eventualmente proponer un modelo efectivo de enseñanza.

Un Experimento de Enseñanza se estructura en tres fases: (i) planeación y diseño, (ii) experimentación y (iii) diseño retrospectivo. Para Molina et al. (2011) en cada una de esta fases se pueden reconocer unas acciones que configuran las particularidades de cada fase. En la fase de diseño y planeación, se define el problema y los objetivos de investigación, se identifica la metodología de enseñanza adecuada para los contenidos elegidos en función de los objetivos planteados, se diseña de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización, se prevé la recogida de datos y se delinea una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje. Tras esta fase inicial de planeación y diseño, está la fase de experimentación. En este, se procede a ejecutar el diseño inicial y poner en juego el experimento. En esta fase se recoge la información que puede ser de interés para el análisis y se desarrollan micro análisis de los datos recogidos en la intervención para, en caso de que sea necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la investigación. Finalmente, se pasa a la fase de análisis retrospectivo de la información recolectada, que incluye una depuración de la información para determinar los datos necesarios que son analizados y que dan cuenta de las hipótesis trazadas en la investigación y que, por tanto, revelan los efectos que el experimento de enseñanza tuvo.

3.4 Definición del caso

Para realizar el Experimento de Enseñanza se hizo necesario definir el caso, es decir, el estudiante o grupo de estudiantes y los momentos de la clase en los que se enfocó la atención y que determinaron el registro de los datos en el experimento. Decidimos que en el experimento participaran 32 estudiantes del curso 701 de la jornada tarde, con edades entre los 12 a 14 años. El curso 701 fue escogido debido a que el profesor/investigador era el director del curso y tenía a cargo las asignaturas de aritmética y geometría, lo cual le permitió interactuar con los estudiantes en la clase de geometría y en momentos adicionales cedidos por otros profesores, que se gestionan más fácilmente al ser director del curso. Este hecho también posibilitaba tener un mejor conocimiento de los estudiantes, lo que le permitía diseñar las actividades teniendo en cuenta sus potencialidades. Además, tenía una relación cercana con los estudiantes lo que favorecía el motivarlos y comprometerlos a participar en el experimento.

Una vez definido el grupo de estudiantes con los que íbamos a trabajar, nuestro caso se definió a partir de dos momentos: (i) trabajo de actividad demostrativa en *pequeño grupo*[2] y (ii) puesta en común en gran grupo. De este modo, en el primer momento intentamos rastrear a grupos pequeños que tuvieran un acercamiento significativo a la actividad demostrativa, en el que se evidenciara la alusión a los hechos geométricos para argumentar porqué las construcciones tenían ciertas propiedades y hubiera riqueza en las afirmaciones con las que soportaban dichas construcciones. Este seguimiento al trabajo realizado en pequeño grupo, deja ver con qué recursos expresivos pueden actuar luego en gran grupo. En el segundo momento, en el gran grupo, recogimos información para identificar el efecto del trabajo realizado en pequeño grupo y determinar si este posibilitaba a los estudiantes ser partícipes del reporte de los resultados de los problemas planteados, de las discusiones que se

[2] Llamamos "pequeño grupo" a un conjunto de dos, tres o cuatro estudiantes quienes se agrupan para resolver un problema propuesto. Y llamamos "gran grupo" al conjunto de todos los estudiantes del curso, cuando interactuaban bajo la orientación del profesor.

generaban, y de sus intentos de convencer al profesor y a los demás compañeros de la validez de sus afirmaciones. En esencia, en el segundo momento se debía poder reconocer si la gestión promovida por el profesor favorecía la configuración de un ambiente indagativo.

3.5 Fases del experimento de enseñanza

En este apartado describimos en detalle las decisiones que se tomaron y las acciones que se realizaron en cada una de las fases del experimento de enseñanza.

3.5.1 Fase de planeación

En la fase de planeación y diseño se estructuró el experimento buscando cumplir con los objetivos propuestos en la investigación. A continuación presentamos aspectos que se tuvieron en cuenta en el diseño, que no se mencionaron detalladamente en el capítulo 1.

Contenido matemático

Uno de los primeros aspectos que fue necesario definir fue el contenido matemático de la enseñanza. En nuestro caso, buscamos configurar un conjunto de hechos geométricos de geometría euclidiana plana que los estudiantes debían aprender y que les servirían de garantías para respaldar afirmaciones que hicieran al resolver los problemas. Los hechos geométricos que se seleccionaron en la planeación fueron los que se presentan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1
Conjunto de hechos geométricos previstos para configurar el contenido matemático del experimento

Código	Hecho Geométrico
HG1	Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son radios de una circunferencia entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
HG2	Si *B* y *C* están en una circunferencia de centro *A* entonces $AB = AC$.
HG3	Si *A* esta entre *B* y *C* entonces *A*, *B* y *C* son colineales.
HG4	Si $AB = AC$ y *A*, *B* y *C* son colineales entonces *A* es el punto medio de $\overline{BC}$.
HG5	Si $\overleftrightarrow{MO} \perp \overleftrightarrow{AM}, \overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{MO}$ y $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ entonces $\angle CAM, \angle AMO$ y $\angle OCA$ son ángulos rectos.

HG6	Si A es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ entonces $\overleftrightarrow{AM}$ es la mediatriz de $\overline{BC}$.
HG7	Si A es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ entonces C es el simétrico de B respecto a $\overleftrightarrow{AM}$.

Los hechos geométricos están relacionados y pueden encadenarse, de tal modo que existe una dependencia entre las propiedades geométricas y así unos hechos son garantía de otros. Por ejemplo, el hecho geométrico HG2 tiene como premisa que B y C pertenecen a una circunferencia de centro en A y como consecuencia que $AB = AC$.Este hecho es importante, ya que provee a los estudiantes de una forma para justificar que dos segmentos tienen la misma medida, en diversas situaciones.

Teniendo en cuenta el conjunto de hechos geométricos, el siguiente aspecto a definir fueron los problemas en los que los hechos geométricos se pondrían en juego. Es decir, se plantearon y diseñaron seis problemas que posibilitarán el uso de los hechos geométricos para dar solución y tener elementos para argumentar el porqué de las soluciones. En esencia, cada problema fue diseñado para que, mediante la exploración con el programa de geometría dinámica Cabri, los estudiantes hicieran construcciones robustas que tuvieran como resultado el descubrimiento y conjeturación de hechos geométricos a partir de las experiencias vividas en la interacción con el programa de geometría dinámica, sus compañeros de clase y el profesor. Los problemas de la secuencia que se concibieron inicialmente son los que se presentan en la tabla 3.2.

Tabla 3.2
Enunciados y objetivos de los problemas de la secuencia

Código	Enunciado del problema	Objetivo
P1	Construyan dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que sean congruentes y que tengan un extremo común.	Usar una circunferencia para construir segmentos congruentes y usar el HG1 para justificar la congruencia.
P2	Ubiquen varios puntos que estén a la misma distancia de un punto fijo.	Construir una circunferencia como solución al lugar de puntos de equidistantes de un punto fijo y concluir el HG2.

P3	Determinen a partir de un segmento $\overline{AC}$ un punto B de tal manera que C sea el punto medio del segmento $\overline{AB}$.	Descubrir el procedimiento de construcción del segmento AB y usar los hechos geométricos HG1, HG3 y HG4 en la justificación del procedimiento de construcción.
P4	Construyan un rectángulo a partir de un segmento $\overline{AB}$ dado.	Usar rectas perpendiculares para construir ángulos rectos y circunferencias para construir segmentos congruentes. Usar el HG5 para justificar que se tienen ángulos rectos.
P5	Construyan varios puntos que estén a la misma distancia de los extremos de un segmento $\overline{AB}$. ¿Qué característica tienen los puntos encontrados?	Encontrar el lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos dados y caracterizarlo mediante los hechos geométricos HG4, HG5 y HG6.
P6	Construyan una recta *m*, determinen un punto *A* fuera de la recta *m* y determinen el punto *B* simétrico de *A* respecto de *m*. Caractericen lo que ocurre con *A*, *B* y *m* al arrastrar la recta *m*.	Establecer el hecho geométrico HG7 que hace referencia a la simetría axial y usar los demás hechos para garantizar el comportamiento de diversos elementos de la construcción.

Recursos para el desarrollo de las sesiones de clase

Para llevar a cabo el experimento era necesario contar con computadores para el trabajo con el programa de geometría dinámica Cabri. Por tal razón, tener un aula de clase que contará con computadores todo el tiempo facilitaría la configuración de las sesiones de clase. Fue así como pensamos en gestionar una de las dos salas de informática con las que cuenta la institución, para las sesiones en las que se desarrollaría el experimento. Ahora bien, a pesar de que las salas de informática posibilitarían que cada estudiante tuviera su computador, decidimos que los computadores serían dispuestos por grupos de estudiantes para el trabajo en pequeño grupo; de esta manera, decidimos disponer el trabajo en grupos de dos, tres o cuatro estudiantes máximo. En las puestas en común, en gran grupo, pensamos en usar un video beam, además de los computadores, para proyectar las soluciones a los problemas, o usar las imágenes como apoyo para explicar ideas que los estudiantes quisieran exponer a sus compañeros y al profesor, lo que permitiría una mayor interacción entre los estudiantes.

Ambiente y disposición de la clase

En cuanto a lo que tiene que ver con el ambiente y la disposición de la clase, destacamos que en la planeación de la enseñanza consideramos muy importante buscar cómo favorecer un ambiente en el que se pudieran generar intercambios de ideas y argumentos. Por tal razón, uno de los condicionantes para el desarrollo de la clase era la escucha y la atención a lo que dirían los compañeros y el profesor. Esto implicaba establecer normas y acuerdos en los que se promoviera el respeto por lo que decían los compañeros para incentivar la discusión, el diálogo, la refutación, el complemento de ideas o de puntos de vista. La labor del profesor para poder generar este ambiente es indispensable, y por eso el diálogo con los estudiantes y la persuasión deberían ser herramientas claves para poder configurar un clima propicio para la participación e interacción.

En los momentos de trabajo en pequeño grupo, consideramos necesario promover los siguientes aspectos: Por un lado, que los estudiantes intentarán hacer construcciones robustas, es decir que mantuvieran las propiedades al arrastrar los objetos geométricos usados para producirlas, en el programa de geometría dinámica Cabri. Esta es una de las normas que el profesor debería fomentar en los estudiantes, de manera que se posibilitara el uso de los hechos geométricos en la justificación de las construcciones. Por otro lado, se hacía necesario que el profesor hiciera hincapié en que argumentar era una nueva norma de la clase de matemáticas; por tal razón, debía recordar e institucionalizar las conclusiones que se obtuvieran al resolver los problemas ya que con estas herramientas los estudiantes tendrían insumos para poder argumentar. En los momentos de trabajo en gran grupo, para favorecer el ambiente indagativo se pactó con los estudiantes que era necesario escuchar las afirmaciones de los compañeros con respeto y atención, que si habían desacuerdos u observaciones a partir de las afirmaciones de los compañeros era necesario argumentar porque se estaba de acuerdo o porque no. Particularmente, un aspecto en el que el profesor debía tener gran cuidado era en favorecer que una gran mayoría de los estudiantes fueran partícipes de las discusiones en el gran grupo; por tal razón, el profesor estableció que todas las intervenciones eran válidas en las discusiones, que no habría afirmaciones censuradas y que todos los estudiantes al aportar en las discusiones contribuían en el desarrollo de la clase. También, fue importante para el ambiente de la clase organizar a los estudiantes de modo que todos pudieran mirarse el uno al otro, además de que se pudiera observar lo que un estudiante planteaba sobre la solución del problema en el programa de geometría dinámica. Por tal razón, consideramos el uso del video beam y una distribución de los estudiantes que promoviera el contacto visual entre ellos.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

La hipótesis principal del estudio era que un ambiente indagativo y el aprendizaje de la geometría se lograrían si en la clase se propendía por

- Fomentar un ambiente de la clase de geometría en la que los estudiantes jugaran un papel relevante en la validación de los resultados y las conclusiones obtenidas.
- Propiciar en los estudiantes una cultura del respeto, escucha, tolerancia e interés por las afirmaciones propias y las de sus compañeros, lo que permitiría construir colectivamente conocimientos que enriquecieran y posibilitaran la configuración de una comunidad matemática en la clase.
- Promover la resolución de problemas geométricos mediante el uso de programas de geometría dinámica, que posibilitaran construcciones geométricas robustas para dar solución a los problemas propuestos.
- Posibilitar el descubrimiento de un conjunto de hechos geométricos que permitiera a los estudiantes tener insumos para participar y argumentar en las socializaciones de los resultados encontrados a los problemas diseñados en la secuencia.
- Estimular a los estudiantes para que tuvieran una mayor participación en el desarrollo de la clase de geometría, propiciando un ambiente en el que argumentaran, aprobaran, refutaran y complementaran a partir de hechos geométricos que dieran sustento a sus afirmaciones.
- Incentivar en los estudiantes un manejo adecuado del lenguaje matemático utilizado en sus afirmaciones para posibilitar una mejor comunicación con sus compañeros y claridad en la expresión de sus ideas.

- Favorecer la argumentación en la clase de geometría, de manera que los estudiantes produjeran argumentos sustanciales y analíticos aludiendo a hechos geométricos para justificar las construcciones geométricas que realizaran y las afirmaciones que presentan al profesor y a sus compañeros.

Recursos para el registro de la información

Para el desarrollo de la investigación decidimos usar diez cámaras de video que posibilitaran el registro audiovisual, elementos con los que cuenta la institución cuenta dado que su énfasis es en comunicación. Estos dispositivos permitirían registrar los dos momentos de trabajo de los estudiantes: en pequeño grupo y de puesta en común en gran grupo y permitieran la reconstrucción de los sucesos de cada clase. Además, como la institución tiene como énfasis académico el manejo de los medios audiovisuales y habilidades comunicativas, solicitamos a algunos estudiantes de grado once –estudiantes de jornada contraria que tienen un manejo adecuado de los medios audiovisuales- que en las sesiones de clase grabaran a los estudiantes en pequeño grupo y registraran las interacciones entre los estudiantes mientras que el profesor-investigador pasaba por cada uno de los grupos. Por otro lado, en los momentos de puesta en común en gran grupo, se solicitaría a un estudiante de grado once que con la ayuda de un trípode y una cámara registrara lo que sucedía en la clase en dicho momento.

3.5.2 Fase de experimentación

En este apartado presentamos lo que se hizo en el experimento de enseñanza, a partir de lo planeado en la fase de planeación descrita anteriormente y de los cambios a que hubo lugar. La implementación del diseño la llevamos a cabo desde el 31 de julio de 2014 hasta el 13 de noviembre de 2014. Presentamos a continuación los ajustes que se hicieron a la planeación en la implementación.

Ajustes al contenido matemático

En la planeación del contenido matemático se previó el uso de siete hechos geométricos que configurarían el soporte teórico que los estudiantes tendrían en el curso del experimento. Sin embargo, de estos siete hechos geométricos alcanzamos a trabajar solo con los hechos HG1, HG2 y HG4, pues se empleó mucho más tiempo del previsto en los problemas P1 y P2.

Además, fue necesario incluir dos hechos geométricos HGA1: un triángulo ABC es isósceles si dos de sus lados son congruentes, y HGA2: la mediatriz del segmento $\overline{AB}$es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de este. La decisión de incluir estos hechos geométricos fue resultado del micro análisis, en donde vimos necesario promover situaciones en las que los estudiantes tuvieran la oportunidad de usar los hechos en situaciones familiares. Desde nuestra perspectiva, los dos hechos geométricos adicionales podrían generar este ambiente en la clase debido a su relación con los hechos geométricos iniciales HG1 y HG2, los cuales una gran mayoría de los estudiantes habían asimilado fácilmente y aludían a estos para argumentar en las sesiones iniciales.

Ajustes al desarrollo de la secuencia de problemas

En el diseño inicial de la secuencia de problemas, habíamos previsto seis problemas articulados de modo que en el problema seis se pudieran aludir a los resultados de los otros problemas y, de este modo, los estudiantes pudieran hacer uso de los hechos geométricos estudiados. Sin embargo, diversos factores como pérdidas de clase, imposibilidad de tener los computadores para trabajar en el programa Cabri o la falta del video beam para hacer las puestas en común en gran grupo impidieron que esta secuencia fuera aplicada en su totalidad. Los problemas P4 y P6 no se hicieron por los ajustes que hicimos a medida que se realizaban el micro análisis del experimento de enseñanza. Esta situación llevó también a la introducción de un problema adicional en la secuencia para reforzar ideas y favorecer la configuración del ambiente indagativo.

En el primer semestre del año 2014 se hizo un acercamiento informal a algunas de las herramientas del programa de geometría dinámica Cabri. Les propusimos a los estudiantes explorar el programa, dibujar segmentos, determinar su medida, arrastrar el extremo del segmento usando la opción traza del punto que se arrastra de manera que la medida del segmento se mantuviera al arrastrarlo y reflexionar sobre lo que se obtenía; esta actividad tenía como propósito introducir el hecho geométrico HG1.

En la Tabla 3.3presentamos un registro delas sesiones de clase que constituyeron el experimento, los problemas que se trabajaron en cada sesión, presentando el problema adicional que se introdujo, y la fecha de su realización.

Tabla 3.3
Problemas propuestos a los estudiantes en el desarrollo del experimento

Sesión	Actividad Propuesta	Fecha
1	Se resolvieron los problemasP1 y P2	Jul. 31 - 2014
2	Puesta en común 1: Se hace una institucionalización y discusión frente a los resultados obtenidos en la solución de los problemas P1 y P2.	Ago. 25 - 2014
3	Se resolvió el problema P3.	Ago. 28 - 2014
4	Se resolvió el problema P5.	Oct. 16 - 2014
5	Puesta en común 2: Se discutió la resolución de los problemas P3 y P5.	Oct. 23 - 2014
6	Se volvió a resolver el problema P5.	Oct. 27 - 2014
7	Se resolvió el problema adicional PA1: Construyan un triángulo isósceles a partir del uso de la mediatriz de un segmento.	Nov. 10 - 2014
8	Puesta en común 3: Se socializaron los resultados obtenidos a partir de los problemas P5 y PA1.	Nov. 13 - 2014

Ajustes sobre la disposición y ambiente de la clase

En el diseño del experimento se había previsto que las sesiones se llevarían a cabo en una de las dos salas de informática con las que cuenta la institución. Pero no fue posible contar con ninguna de las dos aulas porque en estas siempre había clase de tecnología o informática cuando se planeaba una sesión del experimento. Debido a esta dificultad, fue necesario disponer de una dotación de once computadores portátiles con los que contaba el área de inglés y de esta manera hacer uso de estos computadores para las sesiones. A pesar de esto, se contó con una buena cantidad de computadores lo que nos permitió configurar grupos de máximo cuatro estudiantes en el trabajo en pequeño grupo y utilizar el video beam, en algunas ocasiones, para las puestas en común en gran grupo.

Decisiones sobre el registro de la información

Con respecto al registro de la información experimental, aunque solicitamos a tiempo en la institución el uso de las herramientas audiovisuales para registrar las intervenciones de los estudiantes, debido a las dinámicas que tienen los profesores del área de comunicación y medios en la institución, en la que se solicitan constantemente estas herramientas, y también debido a que el uso de estos recursos requiere de la autorización y préstamo por parte de los profesores a cargo, hubo dificultades por contar con estos materiales en las sesiones del experimento. Por este motivo, solo pudimos disponer de una tablet y la cámara digital del profesor-investigador para hacer el registro de las intervenciones individuales, el trabajo en pequeño grupo y las puestas en común en gran grupo de los estudiantes. Sólo en dos de las sesiones del experimento se pudo contar con el trípode y con las cámaras previstas inicialmente para hacer el registro. Las dificultades para contar con los recursos previstos marcaron una diferencia en la calidad delos registros obtenidos. También, se había previsto la colaboración de algunos estudiantes de grado once en el registro de la información; sin embargo, por cruce de horarios con actividades extraescolares y restricciones de disponibilidad de los estudiantes no fue posible que los que se habían comprometido pudiesen hacer las grabaciones de las sesiones. Por lo tanto, el profesor-investigador tuvo que hacerse cargo de las grabaciones.

3.5.3 Fase de análisis retrospectivo

El análisis que desarrollamos en la investigación se enfoca en tres aspectos fundamentales: (*i*) el actuar de los estudiantes y la forma en que son partícipes de la comunidad indagativa en las puestas en común en gran grupo, (*ii*) la actividad demostrativa que los estudiantes hicieron en el trabajo en pequeño grupo. Y finalmente, (*iii*) la gestión del profesor en la que buscó promover la configuración del ambiente indagativo en las puestas en común en el gran grupo. Estos aspectos configuran las tres categorías de análisis que se utilizan en el siguiente capítulo.

Datos de la investigación

Para efectos del análisis, la información registrada en la fase de experimentación se revisó, se depuró y se organizó para sacar únicamente los fragmentos que se listan en la Tabla 3.4. Estos recogen la interacción alrededor de cinco problemas, en donde es posible capturar lo que los estudiantes hicieron en pequeño grupo y la puesta en común en gran grupo.

Tabla 3.4
Conjunto de datos que son objeto de análisis en la investigación

Problema	Enunciado	Fragmentos	Fecha
P1	Construyan dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que sean congruentes y que tengan un extremo común.	Laura R – Karen C (Pequeño grupo)	Jul. 31 - 2015
		Yeibinson R – Karen O (Pequeño grupo)	Jul. 31 - 2015
		Daniel B – Ronaldo P (Pequeño grupo)	Jul. 31 - 2015
		Puesta en común en gran grupo	Ago. 25 - 2015
P2	Ubiquen varios puntos que estén a la misma distancia de un punto fijo.	Camilo V – Kevin P (Pequeño grupo)	Jul. 31 - 2015
		Puesta en común en gran grupo	Ago. 25 - 2015
P3	Determinen a partir de un segmento $\overline{AC}$ un punto B de tal manera que C sea el punto medio del segmento $\overline{AB}$.	Ronaldo P – Laura R – Karen C – Laura A – Marlon N (Pequeño grupo)	Ago. 28 - 2015
		Camilo V – Karen C (Pequeño grupo)	Ago. 28 - 2015
		Daniel B – Harold G (Pequeño grupo)	Ago. 28 - 2015
		Puesta en común en gran grupo	Oct. 23 - 2015
P5	Construyan varios puntos que estén a la misma distancia de los extremos de un	Laura R – Karen C (Pequeño grupo)	Oct. 16 - 2015
		Camilo V – Kevin P (Pequeño grupo)	Oct. 16 - 2015

	segmento $\overline{AB}$. ¿Qué característica tienen los puntos encontrados?	Puesta en común en gran grupo	Nov. 13 - 2015
PA1	Construyan un triángulo isósceles a partir del uso de la mediatriz de un segmento	Laura A – Paula M (Pequeño grupo) Fragmento 1 y Fragmento 2	Nov. 10 - 2015
		Yeibinson R – Karen O (Pequeño grupo)	Nov. 10 - 2015
		Laura R – Karen C (Pequeño grupo)	Nov. 10 - 2015
		Ronaldo P – Miller L (Pequeño grupo)	Nov. 10 - 2015
		Puesta en común en gran grupo	Nov. 13 - 2015

3.6 Categorías de Análisis

A continuación presentamos las categorías de análisis que utilizamos en nuestra investigación y los códigos que identifican a cada una de ellas, los cuales se observan en los análisis en el capítulo siguiente. Es importante mencionar que las categorías de análisis que propusimos surgieron a partir de una revisión inicial de los fragmentos, es decir, que son emergentes. Las categorías de análisis las hemos dispuesto en dos grupos: categorías para el análisis de la actuación de los estudiantes y categorías para el análisis de la gestión del profesor.

3.6.1 Categorías de análisis de las actuaciones de los estudiantes

En cuanto a las categorías de análisis para las actuaciones de los estudiantes estas corresponden a dos aspectos: el desempeño en el ambiente indagativo y la actividad demostrativa.

Ambiente indagativo

- *Aprobación*: Se utiliza cuando uno o varios estudiantes están de acuerdo con la afirmación hecha por un compañero o el profesor y lo manifiestan verbalmente.

- *Participación en la comunidad indagativa*: Se utiliza cuando uno o varios estudiantes expresan verbalmente alguna idea que aporta a la discusión, intentan responder a un cuestionamiento hecho por el profesor o simplemente se refieren a algún aspecto de la clase.
- *Complementación*: Se utiliza cuando un estudiante intenta clarificar, ampliar o usar una idea dicha por un compañero o el profesor, para participar de la discusión que se propone en la clase.
- *Refutación*: Se utiliza cuando un estudiante manifiesta verbalmente estar en desacuerdo con lo afirmado por un compañero o el profesor e intenta justificar porque no está de acuerdo.
- *Interrogación/inquietud*: Se utiliza cuando un estudiante, genuinamente, manifiesta verbalmente un interés o una inquietud frente a algún resultado que se obtuvo en la clase o a la afirmación de uno de sus compañeros o el profesor.

Actividad demostrativa

- *Exploración*: Se utiliza cuando un estudiante muestra al profesor o a sus compañeros que mediante el uso del programa de geometría dinámica detectó propiedades o encontró regularidades que le permitieron plantear una ruta de solución al problema que se propuso en la clase.
- *Verificación*: Se utiliza cuando un estudiante intenta mostrar al profesor o sus compañeros que solucionó el problema valiéndose del arrastre o de una herramienta del programa de geometría dinámica.
- *Justificación*: Se utiliza cuando un estudiante verbalmente propone un argumento sustancial, analítico o mixto para respaldar sus afirmaciones o la solución del problema planteado. Cuando el argumento es analítico la garantía es la alusión a un hecho geométrico. Si el argumento es sustancia la garantía es resultado su experiencia con el problema planteado y con el uso de la geometría dinámica. Y si el argumento es mixto el estudiante combina información empírica y de los hechos geométricos como garantía para sus afirmaciones.

3.6.2 Categorías para el análisis de la gestión del profesor

Las categorías que utilizamos para analizar la gestión que el profesor hizo en la configuración del ambiente indagativo fueron las siguientes:

- *Ambiente de escucha*: Se utiliza cuando el profesor invita a los estudiantes a prestar atención y escuchar las afirmaciones que se hacen en la clase, para que de esta forma pueda existir la aprobación, complementación o refutación de las diversas intervenciones que se hacen en la clase.
- *Fomento del lenguaje*: Se utiliza cuando el profesor impulsa a los estudiantes a usar un lenguaje matemático preciso que permita que sus demás compañeros le entiendan, se genere ambiente discursivo, se presenten ideas claras y completas.
- *Redirección y amplificación de lo que dicen los estudiantes*: Se utiliza cuando el profesor contribuye a aclarar las afirmaciones de un estudiante, repitiendo lo que dice para que todos los estudiantes lo escuchen; y, por otro lado, da cierto énfasis a un aspecto de la afirmación de algún estudiante para promover la discusión, la participación de los demás estudiantes o encaminar las reflexiones hacia la presentación de argumentos.
- *Fomento de la argumentación*: Se utiliza cuando el profesor realiza preguntas del *porqué* de manera que los estudiantes sean impulsados a presentar argumentos en sus afirmaciones. También, cuando *cuestiona* a los estudiantes e invita a los otros estudiantes a aprobar, complementar o refutar las afirmaciones con argumentos. Finalmente, induce a los estudiantes a *producir argumentos* que cumplan con la estructura ternaria datos–garantía–aserción. Particularmente, hace esfuerzos para que las garantías sean hechos geométricos conocidos.

En la Tabla 3.5 presentamos los códigos, descritos anteriormente, con los que se analizaron los aspectos relacionados con cada una de las categorías de análisis. En general los códigos fueron escogidos por las iniciales del grupo de la categoría que pertenecían. Así, las dos primeras letras se corresponden con ambiente indagativo (AI), actividad demostrativa (AD) o gestión del profesor (GP) y las demás letras del código se relacionan con la inicial de la acción realizada por el estudiante o el profesor.

Tabla 3.5

Códigos de las categorías de análisis de la investigación

Descripción			Código
Categorías para el análisis de las actuaciones de los estudiantes:			
Ambiente indagativo	Aprobación		AIA
	Participación en la comunidad indagativa		AIP
	Complementación		AIC
	Refutación		AIR
	Interrogación/inquietud		AII
Actividad demostrativa	Exploración		ADE
	Verificación		ADV
	Justificación	Argumento Sustancial	ADAS
		Argumento Analítico	ADAA
		Argumento Mixto	ADMX
Categorías para el análisis de la gestión del profesor:			
Ambiente de escucha			GP-AE
Fomento al lenguaje claro			GP-FL
Redirección y amplificación de lo que dicen los estudiantes			GP-RAV
Fomento a la argumentación		Preguntas del por qué	GP-APQ
		Promoción de la participación	GP-PRA
		Propicia la producción de argumentos	GP-AC
		Propicia la confrontación	GP-PC

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS

El capítulo de análisis se centra en lo sucedido alrededor de cinco de los problemas planteados en la secuencia diseñada. Para cada problema realizamos el análisis de las transcripciones del trabajo en pequeño grupo y de las puestas en común en gran grupo, alrededor delas soluciones al problema.

El análisis para el trabajo en pequeño grupo consiste en observar la actividad demostrativa que hacen los estudiantes al resolver el problema y la gestión del profesor para impulsar la identificación de ideas a los estudiantes que les posibilitará participar activamente en las puestas en común. En cierta medida, lo realizado en el pequeño grupo por los estudiantes explica los resultados que observamos en las puestas en común, ya que estos momentos podemos denominarlos como un "entrenamiento" que preparaba a los estudiantes para poder participar en las discusiones del gran grupo. En cuanto al análisis de las puestas en común, nos concentramos en buscar indicios del ambiente indagativo y de la argumentación que los estudiantes hicieron en estos espacios, al interactuar con el profesor y los demás miembros de la comunidad. Además, analizamos las acciones del profesor encaminadas a promover interacción, protagonismo y discusiones entre los estudiantes frente a la solución de los problemas planteados.

4.1 Problema P1: Construyan dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que sean congruentes y que tengan un extremo común.

4.1.1 Fragmentos de trabajo en pequeño grupo[3]

En los siguientes fragmentos presentamos el reporte que hacían los estudiantes al profesor. En cada reporte se puede observar la solución del problema a la que llegaron los grupos con el uso del programa de geometría dinámica. Es importante señalar que en sesiones anteriores donde se trabajó con el programa de geometría dinámica, a modo de inducción al manejo de

[3] En el anexo 2 se encuentra el análisis del fragmento de trabajo en pequeño grupo Yeibinson R – Karen O

las herramientas que este tiene, se plantearon actividades en las que los estudiantes tuvieron un acercamiento a los hechos geométricos relacionados con la circunferencia y por esta razón los estudiantes pudieron traer a colación los resultados del trabajo en esas sesiones y usarlos en la solución del problema planteado.

Pequeño grupo de Laura R - Karen C

Una de las estudiantes del grupo, Laura, toma la vocería del grupo y reporta al profesor la solución del problema.

Laura:	Hacemos un círculo[4].	ADE

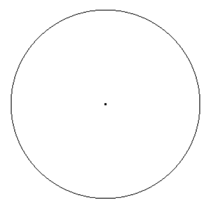


Figura 4.1

Laura:	Entonces aquí [barra de herramientas de Cabri] le pinchamos y le ponemos segmento [construye un radio]… aquí sobre este punto [centro de la circunferencia].	ADE
P:	¿Cómo se llama ese punto?	GP-FL
Laura:	El centro de la circunferencia.	
Laura:	Entonces [después] lo hacemos [un punto] en cualquier lugar de la circunferencia… eso no importa. Y hacemos otro [punto sobre la circunferencia]. [Construye los radios correspondientes a los puntos sobre la circunferencia].	ADMX

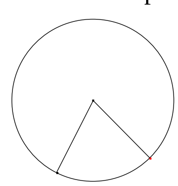


Figura 4.2

[Una vez hecha una construcción como la de la Figura 4.2]. Listo.

Entonces vamos a ver si [los segmentos] son congruentes. Medimos la distancia que hay de este punto [punto sobre la circunferencia] a este [centro de la circunferencia] y de este [centro de la circunferencia] a este [segundo punto sobre la circunferencia]. [Figura 4.3].

[4] Laura se refiere a círculo debido a que el programa de geometría dinámica Cabri hace mención a la circunferencia como círculo. Por tal razón, en otros fragmentos habrán referencias al círculo por parte de los estudiantes.

ADMX

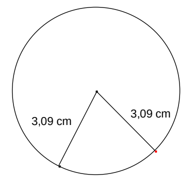


Figura 4.3

	Bueno, pues son iguales [los segmentos] porque este [señala uno de los segmentos] es radio de la	ADMX
P:	Pero entonces primero…esos son dos segmentos que tienen la misma medida ¿Qué significa que tengan la misma medida?	GP-FL
Laura:	Que son congruentes.	
P:	Listo ¿y por qué son congruentes?	GP-APQ
Laura:	Porque es el radio de la esta…de la circunferencia.	ADAS
P:	De la circunferencia ¿Quién es el radio?	GP-FL
Laura:	Estos dos segmentos [señala los segmentos construidos anteriormente].	

Con respecto a la actividad demostrativa en el fragmento observamos que Laura comienza describiendo la construcción hecha. Utiliza una circunferencia y dos radios de esta como segmentos congruentes. En este proceso observamos que la estudiante reconstruye la exploración hecha en la que se evidencia que tiene un buen manejo de la herramienta Cabri, lo cual le permite dar solución al problema en cuestión. Nos muestra la utilidad del programa de geometría dinámica, ya que sin mayores esfuerzos la estudiante presenta una construcción robusta la cual alude a conceptos geométricos, que tal vez con lápiz y papel la estudiante no podría apreciar. Desde nuestro punto de vista, en la construcción la estudiante utiliza implícitamente el hecho geométrico de que los radios de la circunferencia son congruentes. De hecho, sus expresiones “eso no importa”, para referirse a que el punto sobre la circunferencia puede estar en cualquier posición en la circunferencia, “listo” para señalar que ha terminado la construcción que da solución al problema y “bueno” para iniciar el argumento que justifica la construcción que ha realizado, son indicadores de la certeza que ella tiene acercar de la solución del problema y de la seguridad del procedimiento usado. Cuando el profesor pregunta por qué los segmentos son congruentes, Laura esboza un argumento a manera de justificación. A pesar de tener certeza de la congruencia, Laura la verifica usando la medida. Esto nos lleva a afirmar que Laura justifica su construcción a partir de la producción de un argumento mixto, en el que hay evidencia de una alusión al hecho geométrico HG1 pero también hace mención a la medida de los segmentos; encontramos una mezcla de lo teórico con lo empírico propia de este tipo de argumento. Podemos reconstruir el argumento cuando usa la expresión “pues son iguales [los segmentos] porque este [señala uno de los segmentos] es radio de la”, ya que comienza insinuando el hecho geométrico HG1 para afirmar la congruencia de los segmentos. Podría suponerse que ella se refiere a la construcción específica que hizo y no a la regla general pues usa el artículo “la”; pero como acaba de medir los radios, si pensara en el caso específico, se habría referido a la medida. También, podemos afirmar que Laura comienza a apropiarse de formas de actuar propias de una comunidad matemática de indagación. El trabajo realizado en pequeño grupo la motiva a argumentar y a usar un lenguaje matemático apropiado para expresar sus ideas. Como se verá en fragmentos posteriores, esto le posibilitará, su participación en las actividades del gran grupo, en donde la estudiante es protagonista.

En cuanto a la gestión del profesor, en el fragmento puede observarse que las acciones desarrolladas por este se encuentran encaminadas en promover que la estudiante utilice el lenguaje matemático adecuado. Esto permitirá que la estudiante pueda desenvolverse de manera más fácil en un contexto de gran grupo. También, observamos que el profesor intenta promover, mediante la pregunta del por qué, que la estudiante explicite el hecho geométrico HG1 para que sirva de garantía para el argumento analítico. De este modo, al confrontar a la estudiante y animarla a utilizar esta estructura de argumentación se fomenta en la estudiante una cultura necesaria para interactuar en las puestas en común en el gran grupo.

Pequeño grupo de Daniel B - Ronaldo P

En este fragmento los estudiantes Daniel B y Ronaldo P reportan al profesor la construcción que realizaron y que resuelve el problema P1.

P:	[…] Listo empiecen… ¿Cuál es el problema P1?	
Daniel:	Construir dos segmentos congruentes que tengan un punto en común… Bueno profe mire, se supone que este es un círculo [En Cabri las circunferencias se denominan círculos]	ADE
Ronaldo:	Hacemos dos segmentos.	ADE
Daniel:	Entonces, tenemos que hacer dos segmentos.	ADE
Ronaldo:	Al punto del centro.	ADE
Daniel:	Y tienen que tener el mismo radio.	ADE

P:	¿Qué quiere decir eso?	GP-FL
Ronaldo:	No, la misma medida… Y para saber qué tienen la misma medida tiene que usar distancia [herramienta de Cabri para medir].	ADV
Daniel:	Se supone que tenemos que moverla [arrastrar los segmentos] y que sigan iguales.	ADV
P:	Bueno, veamos qué pasa.	
Daniel:	Listo, entonces muévalo [Los estudiantes arrastran el punto sobre la circunferencia].	ADV
P:	Listo lo movió ¿por qué no cambia la medida? ¿Por qué son congruentes?	GP-AC
Ronaldo:	Porque así lo mueva, tienen la misma circunferencia.	ADAS
P:	¿La misma circunferencia? No entendí… ¿por qué es que son congruentes?	GP-FL GP-AC
Daniel:	Por el radio de la circunferencia.	ADAA
Ronaldo:	Porque tienen la misma distancia.	ADAS
P:	¿Cómo así que tienen la misma distancia?	GP-FL
Ronaldo:	Que tienen la misma distancia del punto del centro a… De acá a acá [señala del centro de la circunferencia al punto sobre ella].	ADV

En la construcción que se reporta, podemos apreciar que los estudiantes tienen como garante para validar su construcción el uso de herramientas del programa de geometría dinámica; en expresiones como: "Se supone que tenemos que moverla y que sigan iguales" y "Y para saber qué tienen la misma medida tiene que usar distancia" apreciamos que los estudiantes hacen mención a las herramientas arrastre y medir distancia para verificar que la construcción es correcta y de esta manera corroborar, empíricamente, que la solución que determinaron es correcta.

Ahora bien en el momento de plantear una justificación para la solución que determinaron, en la transcripción podemos observar, inicialmente, el uso de un argumento sustancial para mostrar que los segmentos son congruentes. Así pues, la garantía que los estudiantes usan para su argumento es que la construcción se conserva a pesar del arrastre; esto se ve cuando Ronaldo afirma: "Porque así lo mueva, tienen la misma circunferencia". Si bien hay imprecisión en el lenguaje manejado por Ronaldo, podemos inferir que la intención del estudiante es hacer mención a que los radios de la circunferencia son invariantes, es decir, al hecho geométrico HG1. Es importante señalar esto último, porque gracias al dinamismo de la herramienta Cabri los estudiantes verifican la congruencia de los dos segmentos, y presentan una garantía que resulta de la interacción con el programa. Sin embargo, gracias a que el profesor intenta favorecer la producción de un argumento analítico, es posible observar que los estudiantes responden al profesor haciendo alusión al hecho geométrico HG1, más allá de que el lenguaje que manejan para referirse a este no es el adecuado. El hecho de que los estudiantes hagan alusión, por la gestión del profesor, a la congruencia de los segmentos por ser radios de la circunferencia a la vez que usan el arrastre, puede configurar lo que hemos definido como argumento mixto, ya que no es posible juzgar como sustancial o analítico el argumento cuando se presentan aspectos teóricos y empíricos en las garantías que los estudiante presentan al justificar.

En cuanto a la gestión del profesor, nuevamente, observamos su interés por favorecer el manejo del lenguaje que los estudiantes utilizan. Principalmente, en este grupo, observamos un intento por hacer alusión al hecho geométrico HG1 y de usarlo para argumentar. El manejo del lenguaje condiciona los desempeños que pueden llegar a tener los estudiantes, por lo que es necesaria la intervención del profesor. De igual modo, el profesor, mediante la pregunta del porqué, intenta promover el uso del hecho geométrico HG1 en la argumentación de los estudiantes; sin embargo no consigue que hagan alusión explícita al hecho geométrico para argumentar la congruencia de los segmentos, ya que los estudiantes hacen mención a que la construcción conserva al arrastre y que la distancia del centro de la circunferencia a los puntos es la misma, como ya hemos mencionado.

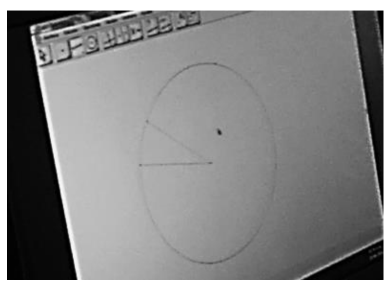
4.1.2 Puesta en común en gran grupo

La siguiente transcripción corresponde a la primera puesta en común, en gran grupo, que se realiza para presentar los resultados de la solución del problema P1. Tiene como propósito institucionalizar el hecho geométrico HG1, que era la garantía teórica para la solución de un problema trabajado en una sesión anterior del experimento. Para llevar a cabo esta puesta en común en gran grupo, el profesor cuenta con un computador con el programa de geometría dinámica Cabri, y un televisor que proyecta a los estudiantes la pantalla Cabri. El objetivo de esta sesión era consignar, formalmente, además del hecho geométrico, la definición de congruencia, para que los estudiantes las usen en futuras sesiones.

En el análisis nos enfocamos en el ambiente indagativo y la gestión del profesor para promoverlo.

Tabla 4.1

Fragmento de la puesta en común en gran grupo del problema P1

1	P:	[…] El problema que trabajamos fue el siguiente [El profesor escribe en el tablero el problema P1]… Entonces, el problema era construir dos segmentos congruentes que compartan un punto…Entonces, lo primero que yo quiero acá es clarificar cosas, ¿quién me dice qué es un segmento congruente? […]	GP-PRA GP-FL
2	Laura R:	Un segmento que sea igual.	AIP
3	P:	Que sea igual… ¿Qué más?	GP-FL
4	Yeibinson:	Que concuerde con	AIP
5	Ronaldo:	Que cuando uno lo mueve siga midiendo igual.	ADE AIP
6	Laura R:	Que tengan la misma medida.	AIP
7	P:	Que tengan la misma medida, eso era lo que habíamos dicho: congruente es que tengan la misma medida. Entonces, si nos dicen aquí, construya dos segmentos congruentes, es decir dos segmentos que tengan la misma medida, y que compartan un punto […]. Entonces, aquí está el Cabri ¿Quién quiere pasar a resolverlo? Aquí vamos mirando a ver qué sugerencias hay u observaciones frente a lo que hagan ¿Alguien quiere pasar? [Nadie levanta la mano]… No todos a la vez… [Camilo levanta la mano] ¡Camilo! Por favor, entonces pase y nos explica cómo es que va a hacer para resolver el problema… Entonces vaya diciéndonos, por favor.	GP-RAV GP-PRA
8	Camilo:	Primero hago una circunferencia y después con el segmento los uno… [Usa la herramienta “segmento” para construir un radio de la circunferencia pero cancela esta operación]…el punto… hago los dos puntos sobre la circunferencia… se pone segmento, se une [uno de los puntos de la circunferencia] con el centro y se une el otro [punto sobre la circunferencia] con el mismo centro y ya…tienen la misma medida [Ver Figura 4.5].  Figura 4.5	ADE ADV
9	P:	¿Y por qué son congruentes esos dos segmentos?	GP-AC GP-APQ
10	Camilo:	Porque tienen el centro como un mismo punto y…o sea están en el mismo radio de la circunferencia.	ADAA
11	P:	[El profesor se dirige ahora a los demás estudiantes] ¿Por qué son congruentes?	GP-AC GP-APQ
12	Ronaldo:	Porque tienen la misma medida.	AIP ADAS

13	P:	Pero ¿Por qué?	GP-APQ
14	Yeibinson:	Porque [los segmentos] son radios de la circunferencia.	ADAA
15	P:	¡Correcto! Son los radios de la circunferencia, recuerden ese hecho que es el que hemos utilizado bastante. Entonces esos dos segmentos son congruentes, porque son radios de la circunferencia así como decía Yeibinson. Ahora…esa era la solución del problema. Por esa razón, en las clases que siguieron seguimos trabajando con ese hecho. Gracias Camilo. Ahora…este problema [P1] tiene la solución a partir de eso [HG1]: los radios de la circunferencia son congruentes. Esa es la manera en que ustedes justificaron que esos segmentos son congruentes.	GP-RAV GP-FL

Sobre el ambiente indagativo, en este fragmento observamos, primero, que los estudiantes que participaron en la discusión planteada fueron aquellos que se destacaron por su trabajo en el pequeño grupo; es decir, estaban en los grupos de Laura R, Camilo, Ronaldo y Yeibinson [2, 4, 5, 6, 8, 10, 14]. Desde nuestra perspectiva, esta situación no es fortuita, sino que la exploración con el programa de geometría dinámica y la gestión del profesor para promover argumentos en pequeño grupo, permitió que tuvieran elementos para discutir en la puesta en común. Por esta razón, pudieron comenzar a superar temores para expresarse en público y ser partícipes de la discusión planteada. Segundo, podemos observar protagonismo de los estudiantes en la discusión. Sus intervenciones y afirmaciones son las que llevan el rumbo de la discusión y el profesor es un agente que intenta promover la claridad del lenguaje y la participación para responder las preguntas que se plantean. Por último, frente al ambiente indagativo podemos mencionar que se ve a un grupo de estudiantes y un profesor discutiendo sobre matemáticas, en la que se intentan clarificar conceptos [1, 2, 3, 4, 5, 6] y argumentar la solución de un problema de matemáticas [10, 12, 14]. Esta situación es de resaltar porque observamos una dinámica diferente a la usual; los estudiantes tienen participación relevante y si bien no son todos los estudiantes que intervienen, en futuras puestas en común vemos que esta situación se modifica positivamente.

Con respecto a la actividad demostrativa que observamos en el fragmento, podemos resaltar que los estudiantes Camilo y Ronaldo intervienen en la discusión presentando resultados de la exploración que hicieron al trabajar con el programa de geometría dinámica en el pequeño grupo. En la intervención de Ronaldo podemos apreciar que cuando dice: “Que cuando uno lo mueve siga midiendo igual” [5] su afirmación apunta a verificar la congruencia de dos segmentos como un invariante arrastre en el programa Cabri. Esta situación nos parece muy interesante, ya que nos muestra que este tipo de exploración provee a los estudiantes de elementos que les posibilitan reflexionar sobre los objetos geométricos y participar en la puesta en común.

Específicamente, en cuanto a la intervención de Camilo [8], podemos observar que el estudiante presenta el reporte de la construcción que realizó en el pequeño grupo, de manera que mediante el uso del programa de geometría dinámica muestra a sus compañeros y al profesor la solución del problema. En el reporte podemos inferir que el estudiante está seguro de que su construcción es correcta, ya que con la expresión "y ya…tienen la misma medida" [8], muestra, sin necesidad de medir, que su afirmación es válida. Esta situación es diferente a la de los reportes que dieron los estudiantes en pequeño grupo, pues es netamente analítica. El estudiante no tiene necesidad de medir para confirmar la congruencia.

En las intervenciones de Camilo y Yeibinson se produjeron argumentos analíticos [10, 14]ya que ambos estudiantes hacen alusión a los radios de la circunferencia como garantía para la congruencia de los segmentos. También, observamos la producción de un argumento sustancial [12] en la que la garantía presentada por Ronaldo es la medida, ya que el estudiante hace mención a la "misma medida" de los segmentos. Sin embargo, observamos que Ronaldo hace mención a ello para reportar la exploración en el pequeño grupo, ya que Camilo no se refirió a ello y quizás Ronaldo quería ser fiel a lo trabajado en grupo.

En cuanto a la gestión del profesor, observamos que, en un sentido general, intentó promover la participación de los estudiantes en la discusión que se propuso y así hacerlos protagonistas de la discusión. En cuanto a aspectos más específicos, vemos un esfuerzo del profesor por impulsar el manejo del lenguaje matemático y por institucionalizar la definición de congruencia [1, 3, 7] y la garantía que daba solución al problema, es decir el hecho geométrico HG1 [15]. Esta es una práctica que repercutirá en futuras sesiones del experimento. Finalmente, observamos como el profesor intenta gestionar la producción de argumentos en los estudiantes de modo que justificaran la construcción realizada por Camilo [9, 11, 13]. De esta manera, mediante las preguntas del porqué, intenta que los estudiantes hagan explícito el hecho geométrico HG1 consiguiendo que Yeibinson haga alusión a que los segmentos son congruentes porque son radios de la circunferencia.

Comentario adicional

Consideramos unas reflexiones adicionales sobre tres aspectos en los que no se enfocó el análisis, pero que, desde nuestro punto de vista, vale la pena mencionar por la influencia en el ambiente indagativo. El primero, tiene que ver con el papel de la geometría dinámica en la configuración de una cultura de la clase –diferente a la usual- en la que se posibilita el protagonismo de los estudiantes. Como hemos observado en los fragmentos que se analizaron, una de las razones por la que los estudiantes pudieron ser partícipes de las discusiones y de reportar al profesor la solución del problema es la interacción que los estudiantes tienen con el programa. Desde nuestra perspectiva, la exploración que realizan les proporciona elementos para resolver el problema propuesto y motiva a los estudiantes a presentar al profesor y sus compañeros la solución que determinaron. Probablemente esta oportunidad no se presentaría de esta manera si se trabajara en un contexto de lápiz y papel.

El segundo aspecto es la disposición del ambiente de la clase. Consideramos que el uso de la herramienta audiovisual, que en este caso fue el televisor, influye significativamente en la disposición de los estudiantes para participar y estar atentos a la discusión que se plantea. Con un video beam se presenta lo que hacen los estudiantes de manera amplia y clara, mientras que en este caso, el uso del televisor generó limitaciones visuales para algunos estudiantes. Si se hubiera trabajado con un *video beam*, quizás se habría promovido la participación de más estudiantes. Finalmente, el tercer aspecto a señalar es la dificultad comunicativa de los estudiantes, por la pobreza en su lenguaje. Como indicamos en la formulación del problema, es una preocupación el hecho de que los estudiantes tengan dificultades en la expresión y articulación de sus ideas. En el análisis de estos fragmentos podemos observar que, a pesar de que los estudiantes conocen el hecho geométrico HG1, el lenguaje usado para hacer alusión a este no es el más adecuado. Este hecho confirma la preocupación señalada y será motivo de reflexión en los demás fragmentos y puestas en común para observar su evolución en el experimento.

4.2 Problema P2: Ubiquen varios puntos que estén a la misma distancia de un punto fijo

4.2.1 Fragmento de trabajo en pequeño grupo

A continuación presentamos el fragmento del trabajo en pequeño grupo en el que consideramos hay evidencias de argumentación a partir del uso del programa de geometría dinámica en el curso de la resolución del problema P2. Acerca de este problema solo presentamos el reporte del grupo conformado por Camilo V. y Kevin P. Ya que los demás grupos llegaron a la solución del problema solo cuando observaron el trabajo que ellos hicieron. Esta situación trajo como consecuencia que no encontráramos variaciones en las expresiones y argumentos presentados en los reportes de los demás grupos.

Pequeño grupo de Camilo V – Kevin P

Camilo reporta al profesor la solución del problema P2. Los estudiantes tenían representada una circunferencia en la pantalla de Cabri, su centro, y varios puntos en ella para reportar al profesor la solución que determinaron.

P:	Bueno, explíqueme.	
Camilo:	[Dirigiéndose a Kevin]. Mire, usted no más une los puntos [señala los puntos que hay sobre la circunferencia y hace gestos en dirección hacia el centro de la circunferencia. Ver figura 4.6]	ADE

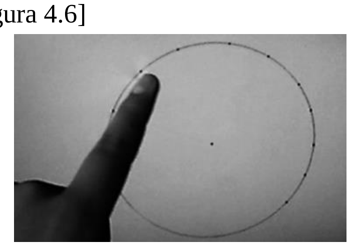


Figura 4.6

P:	Pero ¿Por qué construyó la circunferencia?	GP-APQ
Camilo:	Para poder poner los puntos.	ADE
P:	¿Y qué quiere decir eso? ¿Por qué la circunferencia le garantiza resolver el problema?	GP-FL GP-AC
Camilo:	Porque al poner un punto sobre la circunferencia se queda ahí grabado, no queda sobre otro lado no más, sino que queda ahí.	ADV
P:	Listo… ¿Y qué más garantiza eso [haber construido la circunferencia]?	GP-AC
Camilo:	Pues que los…garantiza que los segmentos al unirlos con el punto central del círculo sean congruentes.	ADAS
P:	Hágale a ver… confírmelo.	

Camilo:	[El estudiante hace la construcción que muestra la Figura 4.7 y mide los segmentos]	ADV

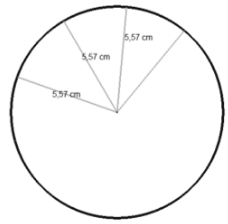


Figura 4.7

P	Entonces son congruentes ¿Por qué?	GP-APQ GP-AC
Camilo:	Porque están en el mismo radio de la circunferencia [El estudiante sigue el contorno de la circunferencia con su dedo].	ADMX
P:	Porque están en la circunferencia y tienen el mismo radio.	

Con respecto a la actividad demostrativa, observamos que Camilo presenta al profesor la construcción que resuelve el problema planteado. En esta construcción el estudiante usa una circunferencia para garantizar varios puntos que equidisten de un punto, que en este caso es el centro de la circunferencia. Si bien el estudiante es su reporte no menciona porqué surge la idea de usar la circunferencia podemos inferir que el estudiante recuerda algunos de los resultados del trabajo inicial[5] que se planteó a los estudiantes antes de empezar a proponer los problemas de la secuencia; a partir de estos surge la idea de usar la circunferencia. De lo anterior, observamos como el estudiante intenta mostrar al profesor porqué su construcción es válida y con expresiones como “Para poder poner los puntos” y “Porque al poner un punto sobre la circunferencia se queda ahí grabado, no queda sobre otro lado no más, sino que queda ahí” indica al profesor, implícitamente, que haciendo la circunferencia los puntos quedan a la misma distancia del centro, aunque se arrastren. Para confirmarlo, Camilo mide los segmentos para verificar que tienen la misma medida. Aunque esto no habría sido necesario si el estudiante hubiese hecho mención al hecho geométrico HG1.

En el proceso de justificación observamos que Camilo, en un sentido general, configuró, con sus afirmaciones un argumento mixto para argumentar porque su construcción era correcta. Con expresiones como “garantiza que los segmentos al unirlos con el punto central del

[5] Como se mencionó en el capítulo de metodología, se propusieron actividades a los estudiantes relacionados con el HG1 en el que se mencionaba a la circunferencia y algunas características de esta.

círculo sean congruentes" y "Porque están en el mismo radio de la circunferencia" combina los resultados que obtuvo de la exploración y verificación con el programa de geometría dinámica y hace una alusión implícita al hecho geométrico HG1. A pesar de que hemos identificado el argumento mixto, señalamos que hay que hacer un esfuerzo interpretativo para extraer la idea que quiere manifestar el estudiante. Particularmente, podemos observar un intento del estudiante por mencionar que los radios de la circunferencia son congruentes y que por esta razón los puntos de una circunferencia equidistan del centro. Pero, debido a un manejo inadecuado del lenguaje sus argumentos pierden la estructura que configuraría un argumento analítico y no permiten hacer explícitas las garantías en sus afirmaciones.

En lo que respecta a la gestión del profesor, en el fragmento observamos el esfuerzo que el profesor hace para que Camilo pueda justificar porqué utilizó la circunferencia para resolver el problema. Su intención es lograr que Camilo haga alusión al hecho geométrico HG1 Para argumentar porqué la circunferencia garantiza la solución del problema. Por tal razón, cuestiona al estudiante con preguntas "del porqué", intentado que el estudiante logre hacer mención del hecho geométrico y producir el argumento analítico. Sin embargo, su esfuerzo no es suficiente y por esta razón Camilo produce un argumento mixto para justificar su construcción.

Finalmente, destacamos otros aspectos sobre el episodio. Primero, y como ya hemos mencionado, el papel que el programa de geometría dinámica tiene en este tipo de actividades; este posibilita en gran medida una interacción, diferente de la usual, de los estudiantes con las propiedades y los objetos geométricos. Es interesante ver como Camilo intenta animar a su compañero Kevin para que haga el reporte, ya que, desde su punto de vista, el programa le brinda elementos para hacerlo; con su expresión "usted no más une los puntos" nos muestra como la herramienta puede generar interacciones entre los estudiantes, las cuales no se tendrían sino contamos con esta. Segundo, observamos la dificultad de Camilo para expresarse en un lenguaje apropiado y comunicar claramente sus ideas. A pesar de que se reconoce en el estudiante un manejo parcial de los hechos geométricos, y un avance en su participación, es evidente la dificultad que tuvo para poder justificar y expresar sus ideas claramente al profesor.

4.2.2 Puesta en común en gran grupo

La siguiente transcripción corresponde a la puesta en común, en gran grupo, de la solución del problema P2. Es importante señalar que esta puesta en común hace parte de una puesta común general en la que se discutió sobre las soluciones de los problemas P1 y P2. Por tal razón, esperábamos que los estudiantes pudieran hacer mención al hecho geométrico HG1 para argumentar en la solución del problema P2. Por ello en la transcripción se encuentran algunas menciones del profesor sobre lo discutido en la solución del problema P1.

Tabla 4.2
Fragmento de la puesta en común en gran grupo del problema P2

1	P:	¡Bien!, ahora miremos el problema dos [El profesor escribe en el tablero el enunciado del problema P2]… el problema dos decía lo siguiente… recuerden que ese ya lo habíamos trabajado también, y que ya ustedes en su mayoría lo solucionaron. Recuerden, acá dice: construir varios puntos que estén a la misma distancia de un punto fijo. Traten de recordar cómo fue que lo solucionaron y alguien que pase y nos explique.	GP-PRA
2	Nicolás:	Diez puntos que estén en la misma [el estudiante lee el problema del tablero]… ¡venga profe yo!	AIP
3	P:	¿Va a pasar Daniel?... ¿Va pasar Nicolás?	
4	Nicolás:	Venga… ahí me ayudan ¿no? [Nicolás se dirige al frente de salón donde está el televisor que proyecta a sus compañeros la pantalla Cabri].	AIP
5	P:	Ahí está el programa [Cabri], para que el que esté interesado en hacerlo, simplemente nos diga cómo fue que solucionó esto [El problema P2] y que utilizó del programa, para ver si podemos hacerlo… ¿Cómo fue que hizo Nicolás?	GP-PRA
6	Nicolás:	Hago la circunferencia [El estudiante construye una circunferencia y ubica unos pocos puntos sobre esta].	ADE
7	P:	Entonces hace la circunferencia ¿Por qué la circunferencia?¿Recuerda?... [Pregunta se dirige a todo el grupo]... ¿Por qué Nicolás usa una circunferencia? ¿Quién me puede decir? ¿Por qué la circunferencia?	GP-AC GP-PC
8	Camilo:	Porque eso ayuda que los puntos queden fijos…que no se muevan.	ADAS
9	P:	¿Qué los puntos queden fijos? ¿Alguien más está de acuerdo con lo que dijo Camilo o va a decir algo diferente?	GP-PC
10		[…]	
11	P:	¿Alguien recuerda?… lo que dice Camilo está cerca a lo que es la razón por la que se usa la circunferencia…recuerden ¿Por qué Laura?	GP-PC GP-AC
12	Laura A:	Porque…¡Ay profe! Me da pena.	AIP
13	P:	¡No! Dígalo tranquila ¿Por qué?	GP-AE GP-APQ
14	Nicolás:	¡Profe ya! [Muestra la construcción terminada]. ¡Ahí están los puntos! [Figura 4.8]	AIP

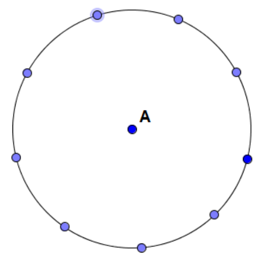


Figura 4.8

15		[Murmullos].	
16	P:	Entonces explíquenos qué hizo Nicolás ¿Por qué cree que la circunferencia es la…?	GP-AC GP-APQ
17	Nicolás:	Porque tiene un punto… Un punto en que se puede…en el que la misma medida esta…	AIP ADAS
18	P:	¿Por qué sabe que [los puntos sobre la circunferencia] están a la misma medida de ese punto [*A*]?	GP-AC GP-APQ
19	Nicolás:	Porque la circunferencia ayuda a que sean de la misma medida.	ADAS
20	P:	¿Por qué? …Lo acabamos de decir.	GP-AC GP-APQ
21	Nicolás:	Porque los segmentos son congruentes.	ADAS
22	P:	Porque son radios de la circunferencia.	

En cuanto al ambiente indagativo, en esta transcripción es importante mencionar que esta sesión fue la primera puesta en común que se hizo durante el experimento. Por tal razón, se puede observar poca participación de los estudiantes. Solo dos estudiantes muestran interés por participar espontáneamente en la discusión que el profesor promueve. También vemos que Laura A quién tal vez podría haber aportado a la discusión manifiesta temor para hablar en el gran grupo [12]. Señalamos este hecho porque creemos que a medida que los estudiantes son partícipes del experimento y adquieren información para desenvolverse en este tipo de discusiones, habrá una mejoría que deberá evidenciarse posteriormente. También, destacamos que hay estudiantes, como Nicolás y Camilo que intentan proponer argumentos para justificar sus afirmaciones. Si bien se presenta un manejo del lenguaje que dificulta la expresión de ideas, es un avance positivo el que haya estudiantes que intentan participar de la discusión con argumentos e intentan hacer uso de un lenguaje matemático. Estos son dos elementos claves para la configuración del ambiente indagativo en la clase de matemáticas.

En cuanto a la actitud de los estudiantes, en la puesta en común se aprecia que la mayoría de estudiantes escuchan y están atentos al reporte que Nicolás presenta. También este hecho es fundamental para la configuración del ambiente indagativo, ya que el poder crear un ambiente de confianza y respeto para que más estudiantes puedan ser partícipes de la nueva cultura de la clase de matemáticas es indispensable.

Respecto a la actividad demostrativa, en esta transcripción no hay evidencias de la exploración que Nicolás hizo para llegar a la solución del problema porque sólo mostró la solución al problema. Sin embargo, puede inferirse de la actitud del estudiante y de las expresiones como: "¡venga… profe yo!" [2], "Hago la circunferencia" [6] y "¡Profe ya, ahí están los puntos!" [14], que el estudiante en el pequeño grupo dio solución al problema. Gracias a la interacción con el programa Cabri le posibilitó participar y lo motivó a querer hacer el reporte a sus compañeros y al profesor; lo anterior muestra una disposición positiva del estudiante para la configuración del ambiente indagativo, de cara a futuras sesiones.

En cuanto al proceso de justificación, mencionamos el uso de argumentos para justificar porque usaron la circunferencia para dar solución al problema que se presentó en la puesta en común [8, 17, 19, 21]. Uno es sustancial, elaborado por Camilo y uno es mixto, sugerido por Nicolás. El argumento de Camilo es sustancial debido a que el estudiante usa como garante el haber utilizado la circunferencia para asegurar que la distancia de los puntos sobre está al centro de la misma no cambia; es decir, Camilo hace mención al arrastre como garante al expresar "Porque eso ayuda que los puntos queden fijos…que no se muevan" [8]. El argumento de Nicolás es mixto porque menciona la congruencia de los segmentos, sin dejar de lado que los puntos conservan la misma medida. Nicolás parece tener una idea que le ayudaría a justificar la equidistancia; sin embargo tiene muchas dificultades para expresarla y se refiere al HG1, pero a su vez hace mención a la misma medida de los puntos al centro de la circunferencia, a pesar de que no midió esta distancia. Consideramos que la intervención del estudiante deja ver un conflicto entre lo teórico y lo empírico, a la hora de presentar el argumento.

En cuanto a la gestión del profesor, en la puesta en común son evidentes los esfuerzos que el profesor realiza para generar un ambiente de clase en es que los estudiantes participen y lleguen a exponer los resultados del trabajo realizado [1, 3, 5, 13].Sin embargo, pocos estudiantes participan en la discusión. Esta es una práctica a la que los estudiantes no se encuentran habituados por las dinámicas usuales de la clase de matemáticas y en general de la institución.

También, podemos observar esfuerzos del profesor por hacer hincapié en que los estudiantes Camilo y Nicolás presenten los argumentos para justificar por qué la circunferencia da solución al problema [5, 11, 16, 18, 20]. Sin embargo, los estudiantes no logran elaborar un argumento Además, podemos ver que el profesor intenta promover discusiones a partir de las afirmaciones de Camilo y Nicolás [7, 9, 11] pero no logra generar un intercambio de ideas y argumentos entre los estudiantes. Sin embargo, sus acciones van encaminando a los estudiantes que participaron de la discusión hacia una nueva cultura de clase, en donde se debe justificar lo que se afirma y en donde es necesario hacer alusión a los hechos geométricos conocidos.

4.3 Problema P3: Determinen a partir de un segmento $\overline{AC}$ un punto B de tal manera que C sea el punto medio del segmento $\overline{AB}$

4.3.1 Fragmentos de trabajo en pequeño grupo

Presentamos a continuación tres fragmentos del reporte al profesor de la solución que los estudiantes encontraron para el problema P3. El segundo y tercer reporte presentan una dinámica similar a la de los reportes en los anteriores problemas. El primero tiene una variación en la dinámica ya que la interacción que se presenta sucede una vez los estudiantes han hecho un intento de solución al problema, pero no lo han resuelto.

Pequeño grupo de Ronaldo P – Camilo V – Laura R – Karen C – Zully C – Marlon N

En la clase en la que se resolvió el problema P2, dado que los grupos conformados por Laura R, Karen C, Camilo V, Ronaldo P, Zully C y Marlon N terminaron más rápido que los demás, el profesor les dio el enunciado del problema P3 y les pidió comenzar a resolverlo. Los estudiantes avanzaron hasta un punto y el profesor tomó registro de algunas de sus acciones. El siguiente fragmento corresponde a la interacción en la clase en la que todos los grupos estaban trabajando el problema P3, y este grupo en particular estaba volviéndolo a realizar. El profesor usa el tablero, pero sólo dirigiéndose a este grupo. Incluimos en el análisis aspectos del ambiente indagativo, pues se generó, con los estudiantes de este pequeño grupo, una puesta en común, aunque restringida a los estudiantes de este grupo.

P:	La clase pasada yo les dije que construyeran un segmento con dos puntos *A* y *B* de tal manera que *A* o *B* fueran el punto medio. Entonces hay dos condiciones para que estos puntos fueran el punto medio: la primera era que […] la distancia fuera igual entre los puntos que estaban de *A* a *B* […] y lo otro es que los tres puntos estuvieran en la misma línea recta. Dentro de las soluciones que yo observe ese día, hubo una en la que unos hicieron lo siguiente: yo voy a dibujar aquí, esto [el profesor dibuja una circunferencia en el tablero], lo que ustedes intentaron hacer fue una circunferencia… Y por acá unos pusieron un punto acá otro punto por acá [dibuja puntos sobre la circunferencia. Ver Figura 4.9] y utilizaron ¿qué hecho aquí para hacer esto? ¿Quién recuerda de los que estuvieron trabajando? Que fueron varios ¿Por qué utilizaron la circunferencia ahí? ¿Por qué Ronaldo?	GP-PRA GP-RAV GP-APQ

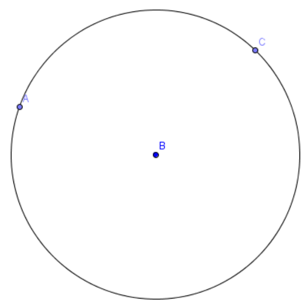


Figura 4.9

Ronaldo:	Profe porque pues…	AIP
P:	¿Por qué Camilo?	GP-APQ
Camilo:	Porque estaban en el mismo radio	ADAS
P:	¿En el mismo radio? ¿Cómo así en el mismo radio?	GP-FL
Camilo:	…ay profe…	
P:	Pues es que, eso es lo que yo necesito que ustedes vayan clarificando. Ya la vez pasada trabajamos también sobre eso. ¿Por qué hizo eso Ronaldo? ¿Por qué hicimos eso de trabajar sobre eso? ¿Sobre la circunferencia?	GP-PRA GP-APQ
Laura R:	Profe, porque la circunferencia, si uno hace uno o dos puntos ahí entonces las distancias son iguales.	ADAS
P:	Porque la medida del radio es la misma. Entonces ¿están de acuerdo con lo que dice Laura R?... Quiero escuchar aquí algunos para que comenten, porque esto todos lo hemos trabajado. Laura R está diciendo que se utilizó la circunferencia porque con la circunferencia se garantiza que estas dos distancias son iguales [el profesor señala los radios de la circunferencia] ¿están de acuerdo con ella?	GP-RAV GP-PC
Coro:	¡Sí!	AIA
P:	¿Por qué? ¿Por qué están de acuerdo?... Esto ya lo hemos trabajado. Ustedes lo han hecho en el Cabri. Traten de recordar ¿por qué esta distancia [el profesor señala de un punto en la circunferencia al centro de la circunferencia] de este punto acá y esta distancia de aquí acá [centro de la circunferencia a otro punto sobre la circunferencia] es la misma?	GP-APQ GP-PC
Karen C:	Profe, porque tienen el mismo radio.	ADAS

Laura R:	Tienen la misma medida.	ADAS
P:	Tienen la misma medida, pero ¿por qué?	GP-APQ GP-AC
Laura R:	Porque es el radio y los radios siempre son congruentes.	ADAA
P:	¡Correcto! Eso es lo que… Como [señala los segmentos dibujados] son radios de la circunferencia, lo que está diciendo Laura R, entonces siempre los radios de la circunferencia tienen la misma medida, o sea son congruentes. Entonces lo que hicieron acá, algunos, fue hacer precisamente los segmentos así como está acá [El profesor dibuja dos radios de la circunferencia] ¿alguien de los que está aquí hizo… la construcción que está aquí, para que nos comente aquí cómo fue que hizo? Yo recuerdo quienes lo hicieron, así que coméntenlo […]	GP-RAV GP-PRA GP-FL
Ronaldo:	Hicimos igual a como está en el tablero.	AIP
Zully:	Pues usamos la circunferencia [La estudiante se cohíbe de seguir hablando por timidez]	AIP
P:	Cuénteme tranquila. Usted lo único que me iba a decir cómo fue que empezaron a hacer la solución de este problema.	GP-PRA
Zully:	Pues así como está ahí…hicimos la circunferencia y luego se hacían los dos segmentos.	ADE
	[Murmullos].	
P:	Bien, entonces vean […]. Lo que ellos hicieron fue construir los dos segmentos para garantizar que de estas dos condiciones [condiciones para ser un punto medio], que la distancia fuera la misma, pero para hablar de punto medio necesitamos que cumpla las dos condiciones a la vez: que la distancia sea la misma y que [los puntos] estén en una misma línea recta. Entonces… por ejemplo… Marlon usted en la clase pasada propuso una forma interesante para solucionar esto ¿puede venir acá por favor? Para que venga y aquí lo haga […] Laura A usted también lo hizo ¿puede venir acá a recordarnos cómo fue que lo hizo? Pasen… que ustedes lo hicieron…	GP-PRA GP-FL
Marlon:	[Pasa al tablero]. Primero pues, hice la circunferencia.	ADE
	[Murmullos]	
P:	Por favor, pongan atención a lo que dice Marlon porque puede servirles para solucionar ahora el problema.	GP-AE
Marlon:	Luego puse los puntos y se hacen los segmentos, y como está el punto en la mitad pues los segmentos tienen la misma medida…y digamos ahí usábamos medida y empezábamos a moverlo y pues no cambiaba [Ver Figura 4.10]	ADE ADV

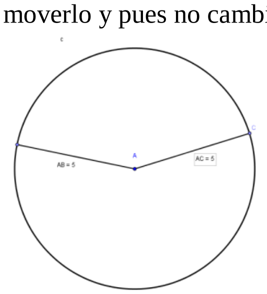


Figura 4.10

P:	¿Y por qué era eso? Ya lo mencionaron.	GP-APQ
Marlon:	Porque… [El estudiante duda y mira a sus compañeros].	

P:	¿Por qué se da eso que está diciendo Marlon ahí? [Hace mención a la Figura 4.10]	GP-APQ GP-PC
Karen C:	Porque tienen el mismo radio…y porque son congruentes.	ADAA
P:	O sea esa es la razón, lo que está diciendo Marlon, es por esa razón [por la intervención de Karen]. Eso es lo que quiero que ustedes vayan conociendo y teniendo ya claro. Bien, entonces siga explicando lo que usted hizo.	GP-RAV
Marlon:	No, pues ahí termina… Porque digamos mediamos de acá a acá [puntos de la circunferencia al centro] y movíamos y tienen la misma medida.	ADE

De la actividad demostrativa hacemos mención a que inicialmente el profesor quiere reconstruir lo que los estudiantes hicieron, por lo que el profesor es quien reporta la exploración que observó en la que los estudiantes intentaron dar solución al problema P3. Consideramos interesante el hecho de que, a pesar que no se hizo el reporte con el uso de la geometría dinámica, sino con representaciones en el tablero, los estudiantes hicieron mención a las herramientas del programa, como “distancia” y “arrastre”. Observamos esta situación en expresiones de Marlon como “Porque digamos, mediamos de acá a acá y movíamos y tienen la misma medida” o en la expresión “y digamos ahí usábamos medida y empezábamos a moverlo y pues no cambiaba” en la que hay una clara alusión al arrastre y a que se conserva la medida. Esta situación nos muestra el efecto que tiene el programa de geometría dinámica, ya que posibilita a los estudiantes proponer construcciones y responder a los cuestionamientos que se hacen en la clase. Los estudiantes intentaron satisfacer una condición de las establecidas para la definición de punto medio, la equidistancia. Por eso usaron la circunferencia que en las sesiones anteriores les había sido útil para lograr la equidistancia.

En cuanto a lo que tiene que ver con los argumentos, algunos estudiantes intentaron hacer alusión al hecho geométrico HG1. Sin embargo, por las dificultades en el lenguaje usado para referirse a este, como ya hemos hecho mención antes, identificamos argumentos sustanciales. En este fragmento encontramos garantes para los argumentos sustanciales que van desde la referencia al arrastre hasta la alusión a la igualdad de las medidas de los radios para justificar. En el reporte de su construcción Marlon hace mención al arrastre y al uso de la medida y en expresiones como “y digamos ahí usábamos medida y empezábamos a moverlo y pues no cambiaba” para justificar la equidistancia. En expresiones como “Porque estaban en el mismo radio”, “porque la circunferencia, si uno hace uno o dos puntos ahí entonces las distancias son iguales”, “porque tienen el mismo radio” o “tienen la misma medida” nos muestran que los estudiantes intentaban usar como garante de sus afirmaciones el HG1 pero las dificultades con el lenguaje trunca en cierta medida la alusión explícita al hecho geométrico. Sin embargo, la estudiante Laura R logró romper con esta dificultad y al mencionar “Porque es el radio y los radios siempre son congruentes” alude al hecho geométrico HG1 para justificar por qué se cumplía la equidistancia entre los puntos, y de esta manera logra configurar un argumento analítico en el que la alusión al hecho geométrico es la garantía.

En el análisis del ambiente indagativo, a pesar de que no se presentó como tal una puesta en común en gran grupo, podemos observar esfuerzos por parte del profesor para generar participación y protagonismo de los estudiantes en las discusión planteada. Esta situación es favorable para la configuración del ambiente indagativo, ya que presupone que los estudiantes se irán adaptando a las nuevas dinámicas de la clase y será natural para ellos expresar sus ideas al profesor y demás compañeros. En el fragmento podemos observar una genuina interacción de los estudiantes con el profesor acerca de matemáticas, en donde algunos intentan aludir a hechos geométricos para justificar, convencer al profesor de que sus afirmaciones son correctas y aprobar las afirmaciones que se discuten. Estas, situaciones evidencian una evolución positiva en la configuración del ambiente indagativo.

A pesar de lo mencionado anteriormente, también observamos inseguridad y timidez de algunos estudiantes, lo que les impide ser partícipes de la cultura de la clase. Es el caso de Camilo, quien ante el cuestionamiento del profesor contesta “!Ay profe!”. O Zully, quien duda en expresar lo que piensa. Lo anterior nos muestra que la configuración del ambiente indagativo requiere de más tiempo para que una mayoría de estudiantes empiecen a adaptarse a la nueva dinámica de clase.

En cuanto a la gestión del profesor, resaltamos, de manera general, los esfuerzos por propiciar la participación de los estudiantes y que las intervenciones sean respaldas por argumentos que aludan a hechos geométricos. Es importante señalar que el profesor tenía como propósito, al trabajar con este grupo pequeño, destacar los resultados parciales que ellos obtuvieron en la solución del problema P3 y así impulsarlos a la solución definitiva del problema. Probablemente consideró necesario dar un mayor impulso a estos estudiantes para que se pudieran lograr avances en la solución del problema. Para lograr esto, en reiteradas ocasiones el profesor incentiva la mención a los resultados que los estudiantes han obtenido hasta ahora, incentiva la alusión al hecho geométrico HG1 para justificar los resultados de la construcción que Marlon presenta, y señalando que les falta una condición.

Pequeño grupo de Camilo V – Karen C

El estudiante Camilo reporta a su compañera Karen C la construcción que hizo y que da solución al problema P3. En este registro no hay presencia del profesor en el reporte que presentó Camilo ya que otra estudiante del curso fue quien hizo la grabación de los estudiantes. Por tal razón, esta transcripción da cuenta del trabajo de exploración que Camilo hizo para resolver el problema y que explica la participación de posterior de Camilo, en gran grupo.

Camilo:	Bueno, yo lo resolví de la siguiente manera. Se hace la circunferencia, se ponen puntos [sobre la circunferencia] uno acá y otro acá calculando que queden colineales [Ubica los puntos como se observa en la Figura 4.11].	ADE

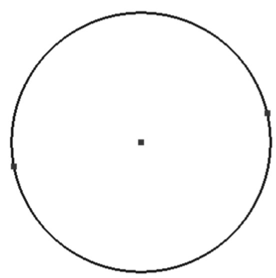


Figura 4.11

	Después se hace la semirrecta, se ponen sobre este punto [punto sobre la circunferencia] y este otro punto [centro la circunferencia] y sale la semirrecta [Borra en punto que no queda en ella]. [Figura 4.12].	ADE

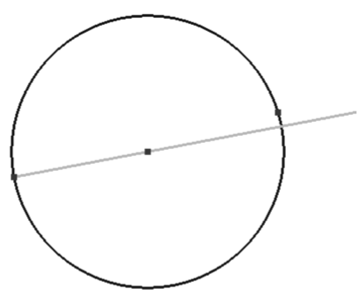


Figura 4.12

Camilo:	Entonces, se pone punto sobre intersección [de la semirrecta y la circunferencia] y listo. Ahora se hace un segmento que se pone de este punto a este punto [que va desde el punto de intersección al punto donde inicia la semirrecta] y listo. ¡Ah! Se oculta la semirrecta y listo ya queda el segmento [Figura 4.13]. [El estudiante arrastra un punto para verificar que la construcción mantiene sus características].	ADE ADV

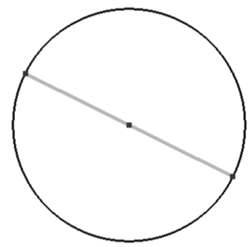


Figura 4.13

Debido a la naturaleza del reporte que se presentó en este fragmento, analizamos principalmente la exploración y la verificación que Camilo realizó en el contexto de la actividad demostrativa, mediante el uso del programa de geometría dinámica. En primera instancia, es interesante ver que Camilo rehízo paso a paso la construcción que, desde su perspectiva, daba solución al problema en cuestión. Esto nos muestra las ventajas del programa de geometría dinámica el cual posibilita a los estudiantes usar su iniciativa para resolver problemas y tener prácticas genuinas con propiedades de los objetos geométricos. Señalamos este hecho, ya que consideramos positivo que Camilo haga uso de la geometría dinámica de una manera tan fluida y eficiente, haciendo uso de herramientas como semirrecta y punto de intersección para resolver el problema, lo que le permite explicar a Karen los resultados de su construcción, de manera muy concreta, segura y sin evidenciar inseguridad de la validez de la misma.

En segundo lugar, destacamos que, sin importar que el profesor no esté presente, Camilo verificó su construcción a partir de la herramienta arrastre, moviendo uno de los puntos y observando que se mantienen las condiciones del punto medio, lo que sin duda da cuenta de la importancia que el programa tiene en este tipo de contextos en los que se incentiva la argumentación. En esencia, queremos destacar la autonomía y seguridad que el estudiante tiene para hacer el reporte y que evidenciamos en expresiones como “entonces” y “listo”; el estudiante está seguro de que con la construcción que reportó se resuelve el problema.

Pequeño grupo de Daniel B - Harold G

El siguiente fragmento de trabajo en pequeño grupo presenta el reporte que los estudiantes hicieron para determinar la construcción de un segmento a partir delos puntos A y B de tal manera que A o B sean el punto medio de dicho segmento. Aunque en el reporte los estudiantes no tienen en cuenta de dónde hay que partir, esta cumple con las dos condiciones que establece la definición de punto medio, que fueron señaladas por el profesor.

Daniel:	Bueno, entonces hacemos un círculo […] y se busca una semirrecta que es la que nos va ayudar a que el segmento se mueva en círculo, así	ADE ADV
P.	O sea, ¿qué garantiza?	GP-AC
Daniel:	Que no se vaya el segmento a otro lado, sino que se mantengan en el círculo	ADV
P:	O sea, que estén en la misma línea recta los tres puntos.	GP-FL
Harold:	Si profe, eso.	
Daniel:	Entonces, cogemos un punto que nos va garantizar que eso [el segmento] no se va mover. [Construcción que muestra la Figura 4.14].	ADE ADV

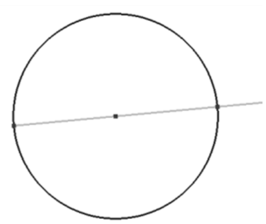


Figura 4.14

	Y ahora cogemos un segmento y lo ponemos hasta acá [desde el punto que inicia la semirrecta hasta la intersección de esta con la circunferencia]… Ahí ya garantizamos que no se va mover […].	
P:	Bien, pero ahora ¿cuál es el punto medio?	GP-FL GP-AC
Daniel:	Ese [señala el centro la circunferencia].	ADE
P:	¿Por qué es el punto medio?	GP-APQ
Daniel:	Pues… porque está en la mitad.	ADAS
P:	Bueno sí… ¿pero por qué razón exactamente?... ya ustedes dijeron algo ahorita de por qué ese es el punto medio.	GP-AC
Harold:	Porque ahí empieza el radio de la circunferencia.	ADMX
P:	¿Y qué pasa que sean radios?	GP-AC
Harold:	Pues que son congruentes.	ADAA
P:	Entonces, de esa forma ustedes garantizan que ese punto es…	GP-FL GP-AC
Daniel:	Es congruente.	
P:	No, un punto no es congruente… Este es el punto medio porque está a la misma distancia de los otros puntos y están en la misma línea recta.	GP-FL

En cuanto a la actividad demostrativa, observamos que Daniel hace el reporte de la construcción que da solución al problema, a pesar de que su construcción partió de los puntos *A* y *B*, como lo enuncia el problema. Su reporte evidencia la producción de una construcción robusta que soporta el arrastre, tal cual lo mencionan los mismos estudiantes. En este pequeño grupo también se hacen verificaciones usando el arrastre.

En cuanto a los argumentos que sustentan la construcción que los estudiantes presentaron, observamos que los estudiantes tienen dificultades para expresar una idea clara que les permita justificar que *B* es punto medio del segmento *AC*. Los estudiantes intentaron mostrar que su construcción era correcta porque esta se conservaba al usar la herramienta arrastre, pero no elaboraron argumento sustancial en el que el garante sea el invariante que muestra la construcción al usar el arrastre. Sin embargo, podemos observar una alusión al hecho geométrico HG1, cuando Harold expresa que los radios son congruentes lo que nos permite inferir que los estudiantes tienen presente, implícitamente, que este hecho justifica la equidistancia, a pesar de que no hacen uso de este para argumentar. Por esta razón, creemos que, de manera general, el tipo de argumento que presentaron los estudiantes se configura como un argumento mixto, en el que se aprecia que, principalmente, los estudiantes se valen de la herramienta arrastre para justificar que su construcción es correcta, pero que, en cierta medida y con dudas, intentan aludir al hecho geométrico HG1 para respaldar porqué su construcción es correcta.

En cuanto al papel del profesor, evidenciamos un esfuerzo de él por favorecer el lenguaje que los estudiantes utilizan en su reporte. Además, intenta que aludan explícitamente al hecho geométrico HG1 para argumentar. Sin embargo no lo logra. Por otra parte, consideramos que hubiese sido interesante que el profesor cuestionara a los estudiantes frente al uso de la semirrecta para solucionar el problema de la colinealidad de los puntos, ya que los estudiantes enfocaron su reporte mostrando que su construcción era robusta, pero no explicaron por qué esta solucionaba el problema en cuestión.

4.3.2 Puesta en común en gran grupo

La siguiente transcripción corresponde a la puesta en común, en gran grupo, de la solución al problema P3. El propósito de esta puesta en común era institucionalizar la definición de punto medio y generar interacciones entre los estudiantes para favorecer un ambiente indagativo. En esencia, el problema tenía como objetivo determinar una construcción robusta que cumpliera con las dos condiciones de la definición de punto medio. Para llevar esta clase a cabo, el profesor presenta los resultados de las construcciones obtenida por los estudiantes en la sesión de trabajo en pequeño grupo, y se apoya en la proyección mediante un *video beam*, del programa de geometría dinámica Cabri.

Tabla 4.3
Fragmento de la puesta en común en gran grupo del problema P3

1	P:	La idea era que ustedes arrancaban con un punto aquí *A* y con un punto *B*. Voy a darles nombres a estos [etiqueta los puntos con la opción de Cabri]; este [punto] *A* y este [punto] *B* y la idea era construir un segmento donde *A* o *B* fueran el punto medio del segmento que se forma ahí con esos puntos. Entonces ¿quién quiere pasar a hacerlo?... Pasen que aquí vamos ayudándoles, no hay problema. Ya una vez que ustedes estén aquí [frente al programa] van recordando cómo fue que hicieron. [Luego de unos minutos de persuasión se anima a hacer el reporte el estudiante Camilo]. Entonces, pongan atención acá… ¿qué es lo que está haciendo Camilo acá? [el profesor se dirige al grupo para que su atención se centre en torno a la construcción que hace Camilo; Figura 4.15]	GP-PRA GP-AE

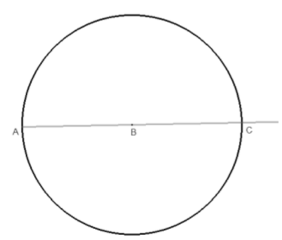


Figura 4.15

2	Daniel:	Para que […] para que tenga la misma medida siempre.	AIP
3	P:	¿Qué debe tener la misma medida?	GP-FL
4	Daniel:	Los segmentos.	AIP
5	P:	¿Cuál segmento?... ¿Laura?	GP-FL
6	Laura R:	Que el punto *B* como es la mitad entonces el [punto] *A* esta en la circunferencia entonces tienen que medir lo mismo.	ADAS
7	P:	Pero ¿cuál es la mitad? ¿Cómo así?	GP-FL
8	Laura R:	El punto *B*… Si porque es el centro de la circunferencia.	AIP ADAS
9	P:	B es el centro de la circunferencia ¿qué tiene que ver eso para decir que es el punto medio? Entonces vea, Laura está diciendo que	GP-FL GP-PC
10	Nicolás:	Tienen la misma medida ahí.	AIP AIC

11	P:	¿Cuáles tienen la misma medida? ¿Este punto de aquí B?... B es el punto medio ¿por qué es el punto medio?	GP-RAV GP-PRA GP-APQ
12	Clara:	Porque es el centro	AIP
13	P:	¿Y por qué?... ¿Qué garantiza ser el centro de la circunferencia [que también sea] el punto medio?	GP-APQ GP-AC
14	Nicolás:	Porque tienen la misma medida.	AIP
15	P:	¿Qué tiene la misma medida?	GP-FL
16	Nicolás:	El círculo.	AIP
17	P:	¿Este círculo tiene la misma medida?	GP-FL
18	Nicolás:	¡No!, que por ejemplo A y B…	AIP
19	Clara:	Porque de B a A tiene la misma medida.	ADAS
20	P:	No esperen, uno por uno… ¡Nicolás!	GP-AE
21	Nicolás:	A y B tienen la misma distancia porque.	AIP
22	P:	A y B, o sea esta distancia de aquí acá [señala la distancia de B a A].	GP-RAV
23	Daniel:	Es la misma…y la de B a C.	AIP
24	Nicolás:	Y de B a C también.	AIC
25	P:	[…] Entonces dice Nicolás y Laura que B es el punto medio ¿por qué?	GP-FL
26	Nicolás:	Porque es el punto medio de $\overline{AC}$	ADAS
27	P:	Es el punto medio del segmento $\overline{AC}$, pero ¿por qué?	GP-APQ GP-AC
28	Laura A:	Porque ahí [en B] se colocó el punto para hacer la circunferencia.	ADAS
29	P:	Y eso quiere decir ¿qué? O sea ése es el centro [el punto B], ¿eso es lo que usted está diciendo?	GP-RAV
30	Daniel:	¡Sí! Como está en el centro, entonces tienen la misma medida de A a B y de B a C.	ADAS
31	Nicolás:	Eso, toca medirlo…	AIC ADV
32	P:	¿Por qué? [El profesor se dirige a Daniel].	GP-APQ
33	Coro:	Por el radio.	AIP
34	P:	A ver, están diciendo cosas que son. Pero necesito que lo digan completo. De nuevo, B es el punto medio ¿todos están de acuerdo que B es el punto medio de $\overline{AC}$?	GP-RAV GP-AC
35	Coro:	¡Sí!	AIA
36	P:	¿Por qué? ¿Quién me dice?	GP-APQ
37	Nicolás:	Porque $\overline{AC}$ tienen los radios… […]	AIP
38	P:	Entonces, lo que yo quiero que digan es que B es el punto medio de $\overline{AC}$ ¿por qué?	GP-FL GP-AC
39	Karen O:	Porque el radio siempre hace que dé A a C tengan la misma medida.	ADMX
40	P:	[De] A a C no tienen la misma medida ¿qué tienen la misma medida?	GP-PC

41	Laura R:	¡Profe! Que dé B a C y de A a B tienen la misma medida.	ADAS
42	Daniel:	No, profe, ya le dijimos.	AIP
43	P:	[…] pero yo quiero que lo digan completo, bien.	GP-AC GP-FL
44	Nicolás:	Porque son congruentes.	ADAS
45	P:	¿Cuáles son congruentes?	GP-FL
46	Laura A:	Los segmentos.	AIP
47	P:	¿Cuáles segmentos? Porque aquí hay que tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$	GP-FL
48	Daniel:	Hay dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.	AIP
		[Murmullos].	GP-RAV GP-AE
49	P:	Bien, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ ¿qué pasa con ellos?	GP-AC
50	Nicolás:	Son dos radios congruentes.	AIP
51	P:	Porque son radios de la circunferencia es que son congruentes [Murmullos]. Como $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son radios de la circunferencia ¿qué pasa?	GP-AC
52	Daniel:	Qué son congruentes.	AIC
53	P:	Por lo tanto ¿qué pasa con B?	GP-AC
54	Karen C:	Es el punto medio.	AIP
55	P:	Es el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Listo, entonces ya hemos mencionado lo necesario, por partes ¿quién se anima a decirlo completo?	GP-AC GP-PRA

En cuanto al ambiente indagativo, observamos que en esta puesta en común, de manera general, hay indicios de una mejor predisposición de los estudiantes por ser partícipes de la discusión que se desarrolla en la clase. Este es un hecho a destacar, no solo porque durante la puesta en común son varios los estudiantes, y diferentes a los que han participado antes, que participan en la discusión propuesta por el profesor en torno a la construcción hecha por Camilo. Este hecho es un avance positivo respecto de las dos puestas en común anteriores. Además, es importante resaltar que observamos que la participación de los estudiantes hace alusión, a los resultados de su propio trabajo con Cabri a lo que observaban de la construcción que hizo Camilo y a la insinuación implícita al hecho geométrico HG1 [2, 4, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 33, 35, 37, 42, 46, 48, 54]. Este hecho nos muestra que se presenta una genuina comunidad de indagación sobre matemáticas, y que a pesar de que encontramos dificultades en la precisión del lenguaje que los estudiantes utilizan para expresar sus ideas, existe un avance importante en la configuración del ambiente indagativo.

Además, las intervenciones dan cuenta de que los estudiantes son protagonistas en la clase, y que a partir de sus intervenciones es que se construye esta. El profesor es un mediador que promueve los temas sobre los que va a girar la clase, pero son las intervenciones y afirmaciones de los estudiantes los que determinan el curso y resultados de la clase. Este hecho es un aspecto importante para la configuración del ambiente indagativo, que muestra que es posible generar esta dinámica en la clase de matemáticas, y que los estudiantes van adoptando la nueva cultura de la clase. Particularmente, se puede percibir en esta puesta en común, que la dinámica de clase se presta para que los estudiantes escuchen lo que tiene que decir el otro, aprueben las afirmaciones [35] e intenten complementar la afirmación de otro compañero [10, 31, 52] y así enriquecer la discusión que se propone.

Respecto de la actividad demostrativa, señalamos que el reporte de la construcción que hizo Camilo, la cual se observa en la Figura 4.15, da cuenta de la exploración hecha con el programa de geometría dinámica en la sesión en pequeño grupo, en la que Camilo dio solución al problema P3. A partir de esta construcción, que es la que suscita las discusiones de la puesta en común, podemos evidenciar la importancia del trabajo de los estudiantes en el pequeño grupo, ya que les permite hacer una construcción e intentar construir un argumento que justifique la validez de la misma. Son diversas las ocasiones en que los estudiantes intentan responder las preguntas del profesor mediante argumentos sustanciales [6, 8, 19, 26, 28, 30, 39, 41, 44]. En las participaciones de los estudiantes se observan comunes denominadores, como por ejemplo, que implícitamente y con dificultades en la articulación de sus ideas, hacen alusión al hecho geométrico HG1 como garante de sus afirmaciones. En las intervenciones de los estudiantes podemos observar expresiones como: “miden lo mismo”, “tienen la misma medida” o “son congruentes”, las cuales dan cuenta de que aluden al hecho geométrico HG1. Por ello, decimos que para los estudiantes es claro que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son radios de la circunferencia y que por tal razón son congruentes, pero existen dificultades para hacer explícito el HG1, a pesar de la insistencia del profesor en que lo hagan. A pesar de que encontramos situaciones como las que se observan en [50] en donde los estudiantes empiezan a hacer explícitos los hechos geométricos para validar o soportar sus respuestas, la generalidad en cuanto al argumento que se configura para justificar es lo que denominamos argumento mixto. Si bien, hay alusiones al hecho geométrico HG1, varias intervenciones no dejan de lado los resultados que obtuvieron por el arrastre o la medida de los segmentos. A pesar de que el profesor intentó hacer explícita la estructura del argumento analítico, no fue posible que los estudiantes dejaran de referenciar la medida, el arrastre o lo que observaban de la construcción presentada. En resumen, este hecho nos llevó a mencionar que se presentó un argumento mixto para justificar la construcción realizada por Camilo.

Respecto de la gestión del profesor que observamos en la puesta en común, una vez más, es un aspecto a señalar, debido a la importancia que tiene su desempeño en la configuración del ambiente indagativo. El profesor intenta promover el protagonismo y participación de los estudiantes en la discusión e intenta llevar la clase a partir de las intervenciones de los estudiantes. Principalmente, en este episodio se evidencian una constancia y perseverancia por promover un manejo adecuado del lenguaje matemático en los estudiantes. Tal fue su insistencia en este aspecto en particular, que Daniel muestra su impaciencia frente a lo que el profesor insiste porque para él había suficientes referencias para que el profesor no preguntara más al respecto [42]. En cierto grado, se ve disposición de los estudiantes para hacer el uso de argumentos para respaldar sus afirmaciones, ya que la constancia del profesor por crear la cultura de argumentar y cuestionar con las preguntas del por qué [13, 27, 32, 36], no solo en las puestas en común sino también en los trabajos en pequeño grupo. Empiezan a evidenciarse resultados favorables en los estudiantes.

En este fragmento destacamos los esfuerzos del profesor por reproducir las afirmaciones de los estudiantes para que los demás presten atención [11, 22, 29, 34, 56]. Esta característica del rol del profesor ha sido importante para que los estudiantes escuchen y puedan reaccionar a las intervenciones de sus compañeros, y también, para que estos sientan que sus intervenciones son valiosas y que el profesor procura hacer de estas un motivo de discusión, lo cual es muy relevante en el ambiente indagativo. También, es importante señalar que el papel del profesor en la creación de un contexto en el que existe confianza, escucha y respeto promueve herramientas claves para el ambiente indagativo, y que el hecho de que el profesor confronte las afirmaciones de los estudiantes con discreción promueve una mejor disposición de los estudiantes a participar de la nueva cultura de la clase de matemáticas.

Un último aspecto a destacar de esta puesta en común, tiene que ver con los recursos utilizados en esta sesión, los cuales generan unas dinámicas que involucran la atención de la mayoría de los estudiantes y que posibilitan extraer la información precisa de cada intervención de los estudiantes y el profesor. Podemos afirmar, que al comparar la puesta en común del problema P3, en la que había un *video beam* en el cual se pudiese proyectar el trabajo en el Cabri, con las puestas en común de los problemas anteriores, en las que no se contaba con esta herramienta, observamos una disposición más favorable para el ambiente indagativo, y que en cierto grado, contribuye a tener elementos de la exploración y el dinamismo del Cabri que en sesiones anteriores se habían perdido por la ausencia de la herramienta audiovisual. El hecho de que todos los estudiantes puedan observar de manera clara lo que se propone en el programa de geometría dinámica brinda una mayor atención y motivación por parte de los estudiantes, lo que repercute en la interacción que se pueda llegar a tener en la clase.

4.4 ProblemaP5: Construyan varios puntos que estén a la misma distancia de los extremos de un segmento $\overline{AB}$. ¿Qué característica tienen los puntos encontrados?

4.4.1 Fragmentos del trabajo en pequeño grupo

En los siguientes fragmentos analizamos el reporte de la exploración que los estudiantes hicieron para resolver el problema P5. Los fragmentos muestran las dos formas en que es resuelto el problema por los grupos. El problema se propuso a los estudiantes para tener un acercamiento a la mediatriz y que en la puesta en común el profesor institucionalice la definición.

Pequeño grupo de Laura R – Karen C

P:	[…] Bueno, cuénteme qué hizo	
Laura R:	Pues ahí, como el ejercicio decía […] tenía que hacer un segmento donde fueran punto *A* y *B* [los extremos del segmento] y en donde hubieran puntos que estuvieran a la misma distancia; por ejemplo, el punto medio sirve porque pues ahí [el punto medio] está a la misma distancia [de *A* y *B*][Ver Figura 4.16].	ADE ADAA

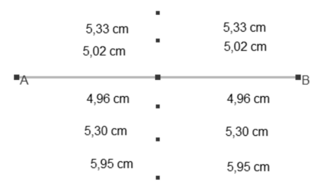


Figura 4.16

	Aquí este [Señala uno de los puntos que no están en el segmento $\overline{AB}$] porque también está a la misma medida… porque mide 5,95…[Señala los demás puntos que construyó que están a la misma distancia porque los acomodó arrastrándolos hasta que tuvieran la misma distancia de *A* y *B*]	
P:	¿Qué se le está formando ahí con los puntos que usted ubicó?	GP-AC
Laura R:	Una cruz.	ADE
P:	Solo mire los puntos que usted ubicó.	
Laura R:	¡Ah¡…una línea recta.	
P:	Entonces, si quisiera encontrar otro punto que estuviera a la misma distancia [de *A* y *B*] ¿Dónde lo ubicaría?	GP-AC
Laura R:	En el medio de cada uno [Se refiere al punto medio entre los puntos que ubicó y que ya saben que están a la misma distancia de *A* y *B*]... y así podemos encontrar otros, haciendo punto medio y conseguir una serie de puntitos…	ADV
P:	Bueno bien…dígame ¿Cómo iniciaron la construcción? ¿Con cuál punto iniciaron?	
Laura R:	Ah pues…midiendo así [arrastra] y haciendo una línea, quedaba derecha.	ADE
P:	Una línea que quedaba derecha…Bueno, unan los puntos que tienen con una línea recta […] entonces que quiere decir ¿Qué pasa con los puntos que están en esa línea recta?	GP-AC
Laura R:	Tienen la misma distancia entre *A* y *B* […] tienen la misma medida del punto *A* y el punto *B*.	ADV

Pequeño grupo de Camilo V – Kevin P

P:	[…] ¿Qué hizo entonces Camilo?	
Camilo:	Pues hice el segmento y entonces empecé a cuadrar [arrastrar los puntos] para que quedaran a la misma medida [Los segmentos dispuestos entre el punto y los extremos de *A* y *B*. Figura 4.17] cada uno y después utilice una recta y se la pase así [Figura 4.17].	ADE

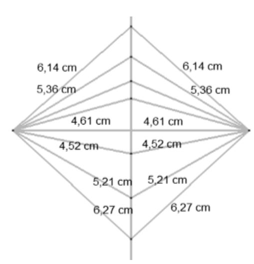


Figura 4.17

P:	¿Y para qué esa recta?	GP-APQ
Camilo:	Para poder hacer…o sea para que queden igual.	ADE
P:	¿O sea que usted hizo primero la recta o arrastró y midió los puntos?	
Camilo:	No, primero medí los puntos para luego hacer la recta.	ADE
P:	¿Y cómo hizo para llegar a que los puntos quedarán de la misma medida?	
Camilo:	Pues los cuadré [arrastre los puntos] para que quedarán todos iguales [la misma distancia a los extremos del segmento] y después le tracé la recta [que une a los puntos que el estudiante ubicó mediante el arrastre y que están a la misma distancia de *A* y *B*]	ADV
P:	Pero entonces, si yo quisiera otro punto qué esté a la misma distancia de los extremos del segmento ¿Dónde los ubico?	
Camilo:	Acá [el estudiante ubica un punto en la recta que construyó]	

Respecto de la actividad demostrativa, señalamos que se enfoca en la exploración; la intención del profesor al plantear el problema no era que los estudiantes lograrán una construcción robusta que estuviera respaldada por hechos geométricos, sino introducir la imagen de mediatriz. En los dos reportes, los estudiantes presentan un manejo adecuado del programa de geometría dinámica, el cual les permite plantear una solución haciendo uso de las herramientas medida y arrastre y sin la ayuda del profesor. Además muestran seguridad en la solución que presentan; es algo que no es usual en las prácticas que se desarrollan en el contexto escolar, y menos aún en la clase de matemáticas, por lo que resulta muy satisfactorio observar este tipo de comportamientos en los estudiantes.

Otro aspecto a destacar en la actividad demostrativa, es que los estudiantes verifican y justifican sus construcciones y encuentran un mecanismo de localización de otros puntos. En primer lugar, podemos observar que tanto Camilo como Laura corroboran con otros puntos alineados que su construcción es correcta. En segundo lugar, queremos destacar que Laura hace explícita la definición de punto medio, para argumentar porqué el punto medio cumple la condición del enunciado. Desde nuestra perspectiva, Laura justifica el uso del punto medio con un argumento analítico en el que la garantía es la definición. Esta situación es un indicio positivo de los resultados del experimento, porque Laura propone un argumento, espontáneamente, para respaldar su afirmación, lo que nos muestra que hay una influencia de la cultura de clase que se ha venido implementando y que empieza a ser natural para los estudiantes. Finalmente, señalamos que en los dos fragmentos los estudiantes hacen mención a la recta como resultado del problema, lo cual es útil para la introducción a la definición de mediatriz.

En cuanto a lo observado de la gestión del profesor, es evidente que sus intervenciones se centran en llamar la atención de los estudiantes sobre la recta que se obtuvo. Su intención es usar el resultado del problema para introducir la definición de mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento. Por tal razón, al preguntar a los estudiantes "si quisiéramos ubicar otro punto que estuviera a la misma distancia de los extremos del segmento ¿dónde lo ubicarían?" su propósito es generar la imagen conceptual de mediatriz.

4.4.2 Puesta en común en el gran grupo

La siguiente transcripción corresponde a la puesta en común, en gran grupo, que tenía como propósito socializar los resultados de la exploración del problema P5e introducir la definición de mediatriz. Para llevar a cabo esta sesión el profesor dispone del *video beam* para presentar los resultados del trabajo en pequeño grupo, y de esta manera tener la atención de los estudiantes sobre los aspectos a tener en cuenta para institucionalizar la definición de mediatriz. En esta sesión hubo un cambio en la dinámica de las puestas en común, ya que el profesor intentó hacer la construcción a partir de los aportes que los estudiantes hacían sobre la misma. Infortunadamente esta dinámica generó desatención y pérdida de interés de los estudiantes, lo que llevó al profesor a presentar la definición de mediatriz sin tener presentes los resultados de la exploración de los estudiantes.

Tabla 4.4
Fragmento de la puesta en común en gran grupo del problema P5

1	P:	Ahora, vamos a ir al otro problema [P5]: al de construir los puntos que equidistan. Entonces, yo les voy a ayudar para que hagamos la construcción, y entonces ustedes me van diciendo qué vamos haciendo… Entonces, escuchen acá y presten atención. Tenemos a A y B aquí [y el segmento $\overline{AB}$]; lo que queremos construir son todos los puntos que estén a la misma distancia de A y B ¿cuál será entonces el primer punto que cumple esta condición?	GP-PRA
2	Daniel:	El de la mitad.	AIP
3	Coro:	El punto medio.	AIP

4	P:	El punto medio. Entonces acá hay una herramienta [de Cabri] que dice punto medio… dice punto medio de este segmento y lo hace. Entonces, como es el punto medio […] ¿Qué quiere decir eso?	GP-PRA GP-PC
5	Laura R:	Profe, que del punto medio a *A* y del punto medio a *B* tienen la misma medida.	ADAA
6	P:	Vea, escuchen. Laura está diciendo que como es el punto medio, la distancia que hay de *A* a ese punto medio es la misma que de *B* al punto medio ¿están de acuerdo?	GP-RAV GP-PC
7	Coro:	Sí	AIA
8	P:	Bien, entonces esa es la definición de punto medio. Ahora, quiero construir otros puntos que cumplan esa condición. ¿Quién pasa y lo hace? Así como en la clase pasada […] recuerden que la clase pasada lo solucionaron	GP-RAV GP-PRA
		[Daniel alza la mano]	ADE
9		Entonces pongan cuidado aquí, que Daniel va pasar a hacer la construcción que da solución al problema. Entonces escuchamos aquí por favor. Entonces Daniel está poniendo el punto medio que es el primero que cumple la condición, ya que está a la misma distancia de A y de B. Ahora él va a construir otros ¿cómo los hizo?	GP-AE GP-RAV
10	Daniel:	Mire profe, así fue como hice [el estudiante hace la construcción que muestra la Figura 4.18, acomodando los puntos a ojo encima y debajo del punto medio].	ADE

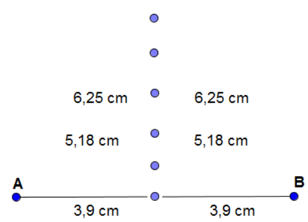


Figura 4.18

11	P:	[Señala uno los puntos están fuera del segmento]. Entonces pregunto ¿este punto está a la misma distancia de este [*A*] y de este [*B*]	GP-PC
12	Coro:	Sí.	AIA
13	P:	¿Por qué sabe?	GP-APQ
14	Daniel:	No se sabe.	AIP
15	Camilo:	Tiene que medirlos.	ADV
16	Daniel:	[Mide la distancia que hay entre algunos puntos y los extremos *A* y *B*].	
17	P:	Listo, midió esos y le dio la misma medida… Ahora mida otros puntos [el estudiante mide la distancia entre los puntos con la herramienta Cabri]… Entonces tienen la misma medida. En teoría está correcto ¿qué se formaba ahí Daniel?... ¿Qué pasa si hiciéramos más puntos que cumplan esa condición?	GP-RAV GP-PC
18	Camilo:	Se forma una recta.	AIP
19	P:	[El Profesor hace una recta que pasa por los puntos construidos por Daniel] Hasta ahí está bien, pero el problema es que si yo lo arrastró se nos daña la construcción. Entonces, lo que ustedes ahorita me van a ayudar a hacer es una construcción que no se dañe cuando se arrastre,	GP-PRA

		porque si yo arrastro a *B* ahí se nos daña [La medida cambia], ¿Ven? Y lo mismo si arrastro a *A*.	
20	Daniel:	¿Pero por qué ese no se daña cuando se arrastra [Señala el punto medio]?	AII
21	P:	Porque ese es el punto medio. Las otras medidas sí cambian porque no hay la construcción que soporte el arrastre. Entonces ustedes me van a ayudar a construirla. […] Entonces, para resolver el problema y que no se dañe cuando se arrastre, lo que tenemos que hacer es utilizar lo que hemos venido trabajando en las clases pasadas. ¿Qué es lo que más hemos trabajado?	GP-PRA
22	Camilo:	La circunferencia.	AIP
23	P:	Entonces, la circunferencia es aquí la clave para poder solucionar este problema. Es decir, sobre todos los puntos que equidisten de los extremos del segmento. […]Lo que yo quiero es hacer una construcción con las circunferencias de tal manera que a pesar de que yo mueva a *A* o *B*, todos los puntos que se construyan permanezcan a la misma medida de *A* y *B*. […] Entonces, el día lunes yo les puse una actividad con circunferencias, varios de aquí se dieron cuenta de una característica de unos puntos que aparecían y desaparecían ¿Cuál era la razón para que esos puntos aparecieran y desaparecieran? ¿Por qué era eso Camilo?	GP-PRA
24	Camilo:	Porque estaban todos sobre unas circunferencias.	AIP
25	P:	Estaban todos sobre la circunferencia.	
26	Nicolás:	Pero habían unos puntos que no están en la circunferencia	AIR
27	P:	Sí es cierto, habían unos que estaban en la circunferencia y otros que no ¿pero qué característica tenían los que aparecían y desaparecían?	GP-PC
28	Karen O:	Que estaban los puntos sobre dos circunferencias.	AIP
29	Yeibinson:	Sobre una intersección.	AIP
30	P:	Correcto, entonces el problema que estamos solucionando se resuelve en parte con esa misma propiedad, es decir con intersecciones de circunferencias. Entonces, como tengo que construir circunferencias ¿Dónde creen que debería construir la circunferencia para resolver el problema?	GP-PRA
31	Karen O:	Sobre los dos puntos.	AIP
32	P:	¿Cuáles puntos?	GP-FL
33	Karen O:	*A* y *B*.	AIP
		[Murmullos y falta de atención de los estudiantes]	
34	P:	Dalas indicaciones para que esta construcción se use en la siguiente sesión de trabajo en pequeño grupo, con lo cual termina la puesta en común.	

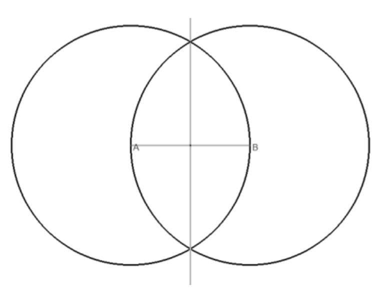


Figura 4.19

En cuanto al ambiente indagativo podemos señalar que mientras que los estudiantes tuvieron el protagonismo de la puesta en común y la discusión giró en torno a sus intervenciones estaban atentos a la discusión, respondían las preguntas del profesor, aprobaban y argumentaban sus afirmaciones. Todo esto debido a que tenían una "preparación", resultado del trabajo en pequeño grupo, que los posibilitaba a ser partícipes de la discusión. Sin embargo, cuando la dinámica de la puesta en común cambió y los estudiantes no tuvieron elementos para participar de manera segura en la discusión, su interés y atención por lo que hacía el profesor fue disminuyendo y fue configurando, indirectamente, una clase usual de matemáticas en donde los estudiantes parecen escuchar lo que el profesor intenta explicar. Este hecho nos muestra la importancia que tiene el trabajo en el pequeño grupo, ya que en esos espacios los estudiantes pueden adquirir elementos teóricos, empíricos y la confianza suficiente para participar en gran grupo.

Con respecto a aspectos específicos del ambiente indagativo cuando este se dio, podemos observar afirmaciones en las que los estudiantes describen o aprueban la construcción que el profesor hace lo que evidencia su participación en la discusión [2,3, 7, 12, 14, 18, 22, 24, 28, 29, 31, 33].También notamos un interés genuino de Daniel por el resultado del arrastre hecho por el profesor lo cual lo impulsa a preguntar al profesor [20] por la invariancia en la medida, para el caso del punto medio y una refutación de Nicolás ante la afirmación de Camilo y del profesor mostrándose en desacuerdo con lo afirmado [26]. A pesar de que esta afirmación no trascendió en la discusión, resaltamos el hecho de que el estudiante se anime a estar en desacuerdo con lo que se afirme y exprese esto verbalmente.

Respecto de la actividad demostrativa se presentan algunas interacciones en las que los estudiantes hacen un reporte de la exploración que realizan, verifican o proponen justificaciones para respaldar sus afirmaciones. Esta situación se presenta, en gran medida, porque la interacción tenía como propósito que la participación de los estudiantes fuera para sugerir ideas para producir una construcción robusta de la mediatriz. Solo encontramos un momento en el que el estudiante Daniel reporta al grupo los resultados de la exploración [10]. Se produjeron en esta interacción intentos de verificar la construcción a través del uso de la geometría dinámica [15], ya que en esta situación en particular no había manera de validar la construcción mediante hechos geométricos. Tanto Camilo como Daniel usan en sus afirmaciones menciones a las medidas para corroborar sus afirmaciones frente a la construcción [14, 15]. Finalmente, podemos observar un argumento analítico utilizado por Laura para responder la pregunta del profesor [5]. Cuando alude que el punto ubicado por el profesor en el segmento garantiza cumplir con la condición del problema, debido a que es el punto medio, Laura usa como garante la definición de punto medio estudiada anteriormente.

En cuanto a la gestión del profesor, evidenciamos los esfuerzos que hace para mantener el interés y atención de los estudiantes [1, 4, 8, 19, 21, 30]. Como el profesor tenía un mayor protagonismo, esto trajo como consecuencia que se perdiera el ambiente de escucha y atención. También, observamos cansancio de los estudiantes frente a la actividad propuesta, ya que esta puesta en común se hizo en la misma sesión que la puesta en común del problema P5.Por tal razón, esta puede ser una explicación al desinterés y falta de atención que los estudiantes mostraron al final de la sesión. Sin embargo, observamos también momentos en que el profesor pudo disponer de la atención de los estudiantes e intentó confrontar sus afirmaciones [4, 6, 11, 17, 21, 27] y redireccionar las afirmaciones que los estudiantes proponían para determinar la construcción que se estaba haciendo [6, 8, 9, 17].

4.5 Problema PA1: Construyan un triángulo isósceles a partir del uso de la mediatriz de un segmento

4.5.1 Fragmentos del trabajo en pequeño grupo[6]

Los siguientes fragmentos del trabajo en pequeño grupo muestran los reportes que los estudiantes hicieron al profesor sobre la solución al problema PA1. Destacamos el hecho de que el grupo de Laura A y Paula M presentó dos soluciones al problema. A pesar de que en la primera solución (Fragmento 1) no se usó la mediatriz nos pareció importante resaltar lo realizado por la estudiante debido a la manera en que justificaron su construcción.

Pequeño grupo de Laura A –Paula M fragmento 1

Laura A presenta la construcción de un triángulo isósceles a partir del uso de la circunferencia y los radios de esta.

[6] En el anexo 2 se encuentra el análisis del fragmento del trabajo en pequeño grupo Ronaldo P – Miller L

Laura:	[…] Y después si se hacía el círculo… Y he colocado dos puntos [sobre la circunferencia como se observa en la Figura 4.20]… Los mido…[toma tres medidas: 4, 38 cm para los lados que son radios de la circunferencia y 5, 61 cm para el lado restante del triángulo]	ADE

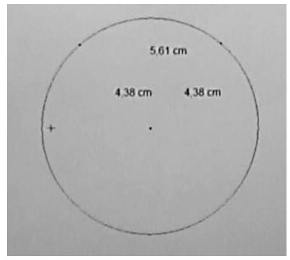


Figura 4.20.

P:	Los está midiendo, listo… ¿Qué vio? ¿Qué pasó? ¿Dio la misma medida?	GP-AC
Laura:	No, pues o sea en estos dos sí [señala los puntos que van de la circunferencia al centro de esta] pero en este no [señala la distancia que hay entre los dos puntos que están en la circunferencia].	ADV

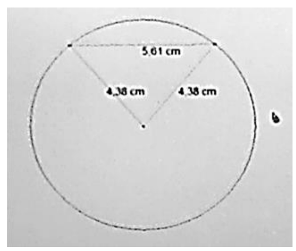


Figura 4.21

P:	Entonces ¿hay formó un qué?	GP-AC
Laura:	Un triángulo isósceles.	
P:	¿Por qué es un triángulo isósceles?	GP-APQ
Laura:	Porque hay dos partes que tienen la misma medida, son congruentes.	ADAA
P:	Dos lados, que tienen la misma medida.	GP-FL
Laura:	Son congruentes. Y este no [señala el lado del triángulo que no es radio de la circunferencia. Ver Figura 4.21]. Eh…porque desde el punto del centro al lado quedarían como dos radios.	ADMX
P:	Correcto… ¿Y qué pasa con los radios en una circunferencia?	GP-AC
Laura:	Pues dan la misma medida.	ADAS
P:	O sea son…	GP-FL
Laura:	Congruentes…Y este no [Señala de nuevo el lado del triángulo que no es un radio de la circunferencia] porque este no va al punto del centro, este no sería radio por eso no da la misma medida.	ADMX

El grupo, en cabeza de Laura, resuelve el problema de manera espontánea y justifica la construcción a partir de la alusión al hecho geométrico HG1. A pesar de que el propósito al sugerir el problema PA1 era que los estudiantes aludieran al hecho geométrico HGA2, el fragmento es importante porque las estudiantes tienen la iniciativa y habilidad suficiente de presentar una solución. El hecho de que Laura y Paula hayan presentado esta solución es un avance positivo que nos permite inferir que comienza a instaurarse una cultura indagativa en la clase. Creemos que las estudiantes alcanzaron un nivel de significación del hecho geométrico HG1 que les permitió relacionarlo con el problema. También señalamos que la interacción con la geometría dinámica posibilita a las estudiantes mostrar sus avances, ya que cuando Laura reporta la construcción que hace da cuenta de la exploración que efectúa para llegar esta y de la idea que tuvo para precisar que el uso de la circunferencia le ayudaría a construir un triángulo isósceles.

Es interesante observar que a pesar de que la estudiante está segura que su construcción da solución al problema, hace una verificación mediante la toma de medidas para mostrar al profesor el resultado. Este hecho nos remarca una vez más la tensión entre el apoyo en hechos empíricos o teóricos en la actividad demostrativa, ya que no es suficiente para los estudiantes conocer y aplicar los hechos geométricos en la justificación, sino que necesitan de elementos empíricos como medir o arrastrar para verificar que sus conjeturas son correctas. Laura alude al hecho geométrico HG1 para argumentar cuando el profesor le hace preguntas aunque también mide las distancias, para justificar que el triángulo es isósceles lo cual nos lleva a considerar que Laura construyó, en general en el fragmento, un argumento mixto para respaldar la construcción que hizo.

En cuanto a la gestión del profesor, observamos la persistencia que tiene para que los estudiantes consigan expresar correctamente sus afirmaciones. Para ello, se vale de preguntas del por qué y de cuestionamientos a lo que dicen.

Pequeño grupo de Laura A – Paula M Fragmento 2

En este fragmento el grupo presenta la solución del problema PA1, de nuevo con Laura tomando la vocería, pero esta vez aludiendo a la definición de mediatriz. Si bien en el primer fragmento el grupo presenta una solución al problema, el profesor invita a las estudiantes a intentar resolver el problema usando la mediatriz y lo que se reporta son los resultados de esta nueva construcción.

P:	Listo, empiecen entonces.	
Laura:	Hago un segmento…voy a utilizar la mediatriz y pues me va a dar el punto medio que está en la mediatriz. La mediatriz está en la mitad del segmento $\overline{AB}$. Entonces, lo que haría para hacer un triángulo isósceles es un punto en la mediatriz y ahora hago un segmento para que se vea que es un triángulo isósceles [La construcción que reporta Laura se observa en la Figura 4.22].	ADE ADAA

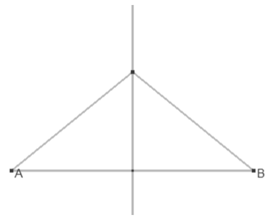


Figura 4.22

P:	¿Por qué podríamos garantizar que ese es un triángulo isósceles?	GP-APQ
Laura:	Porque la mediatriz está en la mitad del segmento $\overline{AB}$ entonces no importa en qué lugar nosotros hagamos este punto [Punto sobre la mediatriz] porque donde nosotros lo hagamos va a salir congruente.	ADAA
P:	¿Qué va a ser congruente?	GP-FL
Laura:	Los segmentos que van desde el punto hasta A y B. La verdad no importa la localización del punto [Sobre la mediatriz] sino como ya está el segmento y hacemos la mediatriz y la mediatriz pasa por el punto medio no hay necesidad de medirlo ¿Por qué? Porque pues yo puedo medirlo pero pues no hay necesidad porque van a ser congruentes estos dos segmentos.	ADAA
P:	Lo que usted ha dicho es correcto, pero solo para que quede más claro: esos segmentos son congruentes porque el punto está en la mediatriz y como está en la mediatriz equidista de los puntos A y B.	GP-FL

En cuanto a la actividad demostrativa, podemos observar que Laura usa la mediatriz como el garante de la congruencia de los lados del triángulo. Podemos inferir certeza en la estudiante frente a la construcción que hace y con expresiones como “voy a utilizar la mediatriz y pues…” y “Entonces, lo que haría para…”. Esta situación la observamos también cuando justifica la construcción que realizó. Consideramos que la estudiante justifica con argumentos analíticos, hace mención a la definición de mediatriz para garantizar que los segmentos del triángulo son congruentes. Además, hace afirmaciones de carácter general cuando dice “no importa en qué lugar nosotros hagamos este punto” o “no importa la localización del punto” presuponemos un uso de la definición de mediatriz. A diferencia del fragmento anterior, Laura manifiesta cierto privilegio por hacer uso de la teoría cuando dice que “no hay necesidad de medirlo” o “yo puedo medirlo pero pues no hay necesidad porque van a ser congruentes”. Sin embargo, podemos observar que en sus afirmaciones hay cierta imprecisión en el lenguaje utilizado para aludir a la mediatriz como garantía de la congruencia pues se refiere a que está en "la mitad del segmento".

Respecto de la gestión del profesor, en este fragmento es importante señalar, que su papel en el favorecimiento de la actividad demostrativa, es el de escuchar la explicación de Laura. No hace muchos esfuerzos para lograr la producción del argumento. Su intervención estuvo presta a resumir lo que la estudiante afirmaba de una manera más concreta y con un lenguaje adecuado. Sin embargo, queremos hacer mención a un aspecto de la gestión del profesor que en el siguiente fragmento se puede observar. Este fragmento, hace parte de la transcripción anterior, pero que se suprimió de esta por no referirse específicamente a la actividad demostrativa, pero en el que observamos lo siguiente:

P:	¿Y por qué de esos dos [segmentos] si [son congruentes]?
Laura:	Porque estos dos [segmentos]…no se profe…ay profe para que me graba si yo le dije [le pregunte] que si estaba bien… [Pasa un momento en que la estudiante no dice nada, pero termina de hacer la construcción que se observa en la Figura 4.22]

Resaltamos este hecho, debido a que el profesor muestra paciencia y confianza con Laura, ya que no cuestionó o presionó a la estudiante para que superara el obstáculo que ella presento, por el contrario, debido al conocimiento que el profesor tiene de la estudiante espero a que ella retomara sus ideas y presentara su reporte de la manera en la que lo hizo. La actitud del profesor frente a esta situación es clave para generar confianza en los estudiantes, lo que posibilitará en estos seguridad de que pueden equivocarse en la clase y que hay oportunidades para corregir los errores. Finalmente, se observa un interés del profesor por fomentar un manejo adecuado del lenguaje en las afirmaciones que Laura presentó, lo cual es clave para cuando los estudiantes se encuentren en las puestas en común, y como hemos observado en otros fragmentos ha sido una labor reiterada del profesor.

Pequeño grupo de Yeibinson R - Karen O

Yeibinson:	[Yeibinson reporta al profesor la construcción que se observa en la Figura 4.23]. Bueno, primero colocamos el segmento, después le colocamos la mediatriz…y se hace un punto que al unirlo con el segmento forma el triángulo.	ADE

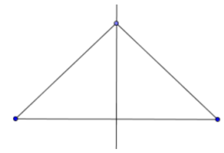


Figura 4.23

P:	Por favor, nombre los extremos del segmento y el punto para identificarlos fácilmente…Bueno, entonces ahora si dígame, usted construyó la mediatriz ¿De cuál segmento?	GP-FL
Yeibinson:	De $\overline{AB}$.	
P:	[…] Bueno ¿Y ese es un triángulo isósceles?...o primero ¿Qué es un triángulo isósceles?	GP-FL GP-APQ
Yeibinson:	Que tiene dos lados congruentes.	
P:	¿Cuáles serían los lados congruentes?	GP-AC
Yeibinson:	$\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.	
P:	¿Y por qué son congruentes?	GP-APQ
Yeibinson:	Porque tienen la misma medida.	
P:	Es cierto, ¿pero por qué tienen la misma medida?	GP-AC
Karen O:	Porque están saliendo de la mediatriz y la mediatriz es toda la mitad del segmento por lo tanto tienen la misma medida.	ADMX
P:	Ustedes han mencionado algunas cosas que son ciertas que nos sirven en este caso, pero necesito que lo digan mejor. Entonces, el punto *C* está en la mediatriz.	GP-FL
Coro:	Sí.	
P:	¿Qué cumple ese punto al estar en la mediatriz?	GP-AC
Karen O:	Nos está señalando la mitad, por eso está a la misma distancia de *A* y *B*.	ADAS

Respecto de la actividad demostrativa señalamos que los estudiantes hacen uso de la mediatriz explícitamente para solucionar el problema. Esto no habría sido posible si en las sesiones anteriores y en las puestas en común previas, no se hubiera institucionalizado la definición de mediatriz. Sin embargo, Karen y Yeibinson no aluden a la definición de mediatriz para argumentar que $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son congruentes, lo que hubiera configurado un argumento analítico. En lugar de esto, hacen mención a características visuales de la mediatriz que se observan en la construcción. Cuando Karen dice “Porque están saliendo de la mediatriz y la mediatriz es toda la mitad del segmento por lo tanto tienen la misma medida” está aludiendo a aspectos teóricos y empíricos, lo que configura de manera general el argumento mixto, y que se hace aún más evidente por las imprecisiones en el lenguaje que los estudiantes usan para presentar sus ideas.

Es importante señalar que los estudiantes tienen claridad acerca de los conceptos triángulo isósceles y congruencia de segmentos, ya que responden adecuadamente al profesor, las preguntas hechas sobre estos, lo cual es una situación que favorece en las puestas en común en el gran grupo. Más allá de que los estudiantes tuvieron dificultad para aludir la definición de mediatriz para argumentar, es posible observar que en sus justificaciones se mencionan los hechos geométricos que se han venido estudiando.

En cuanto a lo realizado por el profesor en el fragmento, se observan los esfuerzos del profesor por promover que los estudiantes insinúen la definición de mediatriz para justificar por qué el triángulo es isósceles. Sin embargo, no logra promover un argumento analítico, en donde la garantía sea la definición de la mediatriz. También, resaltamos los esfuerzos que el profesor hace para que los estudiantes intenten ser más precisos con el lenguaje matemático al referirse a los objetos matemáticos.

Pequeño grupo de Laura R - Karen C

P:	Bueno explíqueme ¿Cómo lo hizo?	
Laura:	Entonces aquí hacemos un segmento. A este [extremo] lo nombramos *A* y a este [extremo] lo nombramos *B*. Aquí, con la ayuda de una herramienta que se llama mediatriz le pinchamos y ahí ya aparece. Entonces ¿cómo hacemos para saber si esa mediatriz nos sirve? Pues hacemos punto medio del segmento [en Cabri] y entonces la mediatriz sí pasa por ahí [por el punto medio]. [La Figura 4.24 muestra la construcción que Laura reportó al profesor].	ADE ADMX

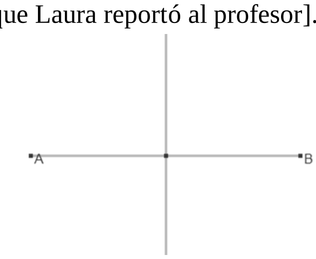


Figura 4.24

P:	¿Lo que usted quiere decirme es que la mediatriz está bien porque pasa por el punto medio del segmento? ¿Y por qué cree que pasa eso?	GP-AC
Laura:	Porque la mediatriz es como la línea que traza la mitad del segmento.	ADAS
P:	Más o menos, lo que pasa es que como el punto medio está a la misma distancia de *A* y *B* y la mediatriz son todos los puntos que equidistan de *A* y *B*, por eso pasa por el punto medio. Listo, pero bueno, continúe.	GP-FL
Laura:	Entonces, para hacer el triángulo cogemos un punto sobre la mediatriz y queda así [La Figura 4.25 muestra el resultado final de la construcción].	ADE

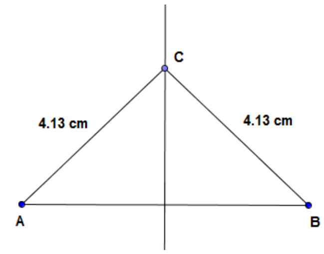


Figura 4.25

P:	Pero no lo mida porque no hay necesidad. Bueno usted lo midió, si no pudiéramos medir ¿Qué nos garantiza que esos dos segmentos miden lo mismo?	GP-AC
Karen:	La línea…que se puede empezar un segmento de acá [Punto *C*] a acá [señala el punto *A*].	ADV
Laura:	Y también con la ayuda de la mediatriz uno puede sacar puntos que están a la misma medida de *A* y *B*.	ADAA
P:	Entonces ¿Qué significa que un punto esté sobre la mediatriz con respecto *A* y *B*?	GP-AC
Laura:	Que está a la misma medida.	ADAA
P:	Entonces si yo quisiera hacer otro triángulo isósceles ¿Qué debería hacer?	GP-AC
Laura:	Pues entonces hago otro, poniendo otro punto acá [sobre la mediatriz] y haciendo otro triángulo más pequeño.	ADE
P:	Bueno, entonces sin medir ¿Por qué ese triángulo es isósceles?	GP-APQ
Karen:	Profe porque estos dos [segmentos] tienen la misma medida.	ADAS
P:	¿Y por qué?	GP-APQ
Laura:	Porque de *A* a este puntico [señala al nuevo punto sobre la mediatriz] tienen la misma medida y de *B* a acá también.	ADMX

El análisis de la actividad demostrativa centra nuestra atención en el reporte que Laura hace para presentar su construcción. La estudiante usa la función del programa para trazar la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Resulta interesante el hecho de que verifique, mediante la opción punto medio, que efectivamente es correcta. Esta situación evidencia, como ya destacamos anteriormente, una dualidad entre el apoyo en procesos empíricos y teóricos, que configura el argumento mixto que hemos definido. A pesar de que Laura conoce la definición de mediatriz y parece aplicarla, necesita hacer una verificación empírica para corroborar que el objeto construido cumple con la definición. En esencia, esto nos indica que Laura aún no es consciente de la suficiencia de los hechos geométricos para argumentar o respaldar sus afirmaciones y que por tal razón necesita verificar estos hechos.

Un aspecto a resaltar es la alusión a la definición de mediatriz que las estudiantes usan para respaldar la construcción hecha del triángulo isósceles. Observamos que Laura y Karen mencionan la definición al argumentar porqué los lados del triángulo son congruentes. A pesar de que hay algunas imprecisiones en la forma en que se refieren la definición, podemos observar como aluden a esta como la garantía de su afirmación. Pero, el hecho de que Laura mida los segmentos y de que Karen se refiere a la medida igual de los lados del triángulo nos vuelve a mostrar la necesidad que tienen las estudiantes en apoyarse en lo empírico para verificar la validez de sus afirmaciones, lo cual nos lleva a afirmar que durante todo el proceso de justificar las estudiantes produjeron un argumento mixto para evidenciar que su construcción era válida.

En cuanto a la gestión del profesor para favorecer la actividad demostrativa, podemos observar que, a pesar de que Laura hace uso de la medida para respaldar su construcción, gestiona preguntas que promueven el uso de la definición de la mediatriz para argumentar porqué el triángulo es isósceles, favoreciendo la producción del argumento mixto por parte de las estudiantes. Podemos observar también, que el profesor intenta mediar en la dualidad que Laura tiene sobre el apoyo en lo empírico o lo teórico, haciendo evidente para la estudiante que el hecho de que la recta construida fuera la mediatriz del segmento garantizaba pasar por el punto medio. Consideramos que el profesor pudo haber hecho una mayor reflexión sobre este asunto, y así impulsar a las estudiantes a salir de la dualidad entre el apoyo en lo empírico y lo teórico, sin embargo el profesor sugirió a Laura para que continuara con el reporte, perdiéndose la oportunidad que las estudiantes entiendan que la definición de mediatriz garantizaba el cumplimiento de la condiciones que se establecía en el problema y que por eso no era necesario medir.

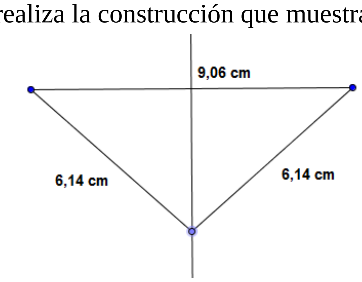
4.5.2 Puesta en común en gran grupo

La siguiente transcripción corresponde a la última sesión del experimento en la que se realizó una puesta en común en gran grupo. Esta sesión tenía como propósito discutir las soluciones del problema PA1. Para llevar a cabo esta sesión el profesor dispuso del *video beam* para presentar los resultados del trabajo que se hizo en Cabri y de tres computadores portátiles que permitieran a los estudiantes interactuar con el programa de geometría dinámica. Buscaba promover una discusión entre los estudiantes a partir de los reportes presentados. Como en esta sesión queríamos observar los resultados del experimento con mayor detalle, decidimos dividir el curso en dos grupos. El primer grupo se organizó con los estudiantes que no habían tenido mucha participación en las discusiones en pequeño y en gran grupo, durante el experimento. El segundo grupo se organizó con los estudiantes que tuvieron una participación activa en el ambiente indagativo y de los cuales hemos analizado varios fragmentos en este capítulo. Por este motivo el análisis de la puesta en común se divide en dos fragmentos, que intentan dar cuenta de los resultados del experimento, con diferentes matices para cada grupo.

Puesta en común en gran grupo de la solución del problema PA1 por parte del grupo 1: estudiantes con poca participación en el ambiente indagativo.

Tabla 4.5

Fragmento de la puesta en común en gran grupo del problema PA1 Grupo 1

1	P:	La clase pasada trabajamos un problema ¿Alguien lo recuerda o hay necesidad de escribirlo? [Algunos estudiantes leen el enunciado] Entonces, había que construir un triángulo isósceles [a partir de un segmento dado]. Entonces, como tienen computador van a intentar hacerlo para recordarlo y para que alguno de ustedes nos diga cómo lo hizo […].Entonces, lo primero que van a hacer es construir el segmento, pónganle nombres a los puntos del segmento […]. Entonces veo que por aquí varios lo han solucionado, entonces vamos a ver el que está proyectado aquí en el tablero […] ¿Quién quiere pasar entonces a decirnos cómo lo hizo?... ¿Quiere pasar Paula? Listo, entonces pase y nos explica.	GP-PRA
2	Paula:	[La estudiante realiza la construcción que muestra la Figura 4.27].  Figura 4.27. Entonces, hago el segmento… Le doy mediatriz acá… y medimos	ADE
3	P:	Póngale nombres a los puntos del segmento.	GP-FL
4	Paula:	Bueno… Entonces la mediatriz pasa por aquí por la mitad.	ADE
5	P:	¿En la mitad de qué?	GP-FL
6	Paula:	Del segmento.	AIP
7	P:	¿Todos están de acuerdo que la mediatriz pasa por la mitad del segmento?	GP-RAV GP-PC
8	Coro:	¡Sí profe!	AIP

9	Paula:	Bueno entonces aquí no hay necesidad de medir [La estudiante elimina la medición que había hecho en la construcción].	ADAS
10	P:	Espere Paula, primero ¿ya termino la construcción?	
11	Paula:	Sí.	AIP
12	P:	Listo, entonces cuéntenos por qué le da la solución al problema.	GP-AC
13	Paula:	Pues profe, como se tiene la mediatriz, no hay necesidad de medir porque los segmentos [lados del triángulo] son congruentes… porque siempre pasa [la mediatriz] por la mitad [del segmento].	ADAS
14	P:	¿Están de acuerdo con lo que dice Paula?	GP-PC
15	Harold:	Sí profe, siempre pasa por el punto medio.	ADAS
16	P:	¿Qué garantiza solucionar el problema que pase por el punto medio?	GP-AC
17	Nataly:	Es porque por ser la mediatriz los lados del triángulo miden lo mismo.	ADAS
18	P:	Eso es cierto ¿Pero por qué?... Mire, vuelva a medir los segmentos […].Aquí todos están viendo que la distancia [de los dos lados del triángulo] es la misma ¿cierto? ¿Por qué se da eso?	GP-PC GP-AC
19	Harold:	Por la mediatriz…porque la mediatriz está en el medio.	ADAS
20	P:	¿Y eso que quiere decir?	GP-AC
21	Alejandro:	Que tienen la misma medida.	AIP
22	P:	¿Qué tienen la misma medida?	GP-FL
23	Zully:	Los segmentos [señala los lados congruentes del triángulo isósceles].	AIC
24	P:	Es cierto, pero lo que yo quiero que me digan es precisamente por qué se da eso. Por aquí Paula y Nataly han dicho algunas cosas ¿Así que díganme por qué?	GP-RAV GP-AC
25	Alejandro:	Porque están a la misma distancia.	ADAS
26	P:	Sí, es cierto…Aquí Alejandro está diciendo que están a la misma distancia pero ¿por qué están a la misma distancia? Bueno mire, algunos de ustedes [El profesor se dirige a una de las estudiantes que tiene el computador que se proyecta con el *video beam*]…van a arrastrar cualquier punto A o B ¿Qué está pasando ahí? ¿Qué cambia y qué no cambia?	GP-RAV GP-AC
27	Zully:	Que quedan dos lados de la misma medida y otro no.	ADV
28	P:	¿Cuáles son los lados que no cambian?	GP-PC
29	Paula:	Los que salen de la mediatriz.	AIP
30	P:	¿Y por qué se da eso?	GP-AC
31	Nataly:	Porque el punto que está en la mediatriz mide lo mismo a los puntos del otro lado [Extremos del segmento $\overline{AB}$].	ADAA
32	P:	Más o menos por ahí es, pero dígalo mejor	GP-AC
33	Paula:	Porque los puntos de la mediatriz están a la misma distancia.	ADAA
34	P:	¿De quién?	GP-FL
35	Coro:	De los puntos del segmento.	AIC
36	P:	Correcto…entonces vean. La idea es así: los lados del triángulo son congruentes porque el punto que construyó Paula es punto de la mediatriz. Por tal razón, ese punto está a la misma distancia de los	GP-PRA GP-AC

		extremos del segmento… ¿y entonces ese por qué es un triángulo isósceles?	
37	Coro:	Porque tiene dos lados congruentes.	ADAA
38	P:	¿Y por qué son congruentes?	GP-AC
39	Paula:	Porque sale de la mediatriz.	ADAS
40	P:	Bien, porque el punto que se construyó pertenece a la mediatriz luego la distancia a los extremos es la misma.	GP-FL

Frente al ambiente indagativo, en términos generales podemos observar, como era nuestra intención, estudiantes que no habían sido partícipes de las discusiones anteriores pero que en esta puesta en común toman el protagonismo de la discusión. A pesar de que hubo estudiantes que no participaron, queremos destacar que los que sí intervinieron evidencian la influencia que ha tenido la cultura de la clase que se ha querido promover durante el experimento. El uso de la geometría dinámica les posibilita presentar los reportes de su trabajo. Hacen intentos por justificar mediante la alusión a la definición de la mediatriz. Y fundamentalmente, observamos como los estudiantes tienen el protagonismo en la clase de matemáticas además de que sus intervenciones se soportan en hechos matemáticos. Consideramos que lo observado en este fragmento es un resultado positivo de la cultura que se quiso promover. Si bien encontramos dificultades en la expresión de las ideas por parte de los estudiantes, el hecho de que algunos superen sus temores por expresarse en público e intenten convencer al profesor y a otros estudiantes de sus afirmaciones, es algo que nos da la confianza para asegurar que el experimento ha tenido resultados positivos.

En cuanto a los aspectos específicos del ambiente indagativo, observamos a estudiantes que intentaron ser partícipes y protagonistas de la discusión propuesta por el profesor, en la mayoría de ocasiones, haciendo alusión a la definición de la mediatriz, para soportar sus afirmaciones [15, 17, 19, 25, 31, 33, 39].

Podemos observar el liderazgo y protagonismo de varios estudiantes durante el ejercicio, lo que da cuenta de que su poca participación en otras puestas en común responde a otros factores diferentes a la comprensión de los hechos geométricos o a la cultura de clase implementada. Podríamos inferir que, al no encontrarse los “buenos” o “mejores” estudiantes entre ellos, hay cierta libertad entre los estudiantes que no se destacan, y que esto propicia un escenario que los incentiva a ser partícipes de la comunidad sin temores e inhibiciones. O tal vez la necesidad de responder a los desafíos de la clase los obliga a salir de su estado de confort, en el que usualmente se encuentran, debido a que esas responsabilidades las asumen los "buenos" estudiantes cuando están presentes. Son cuestionamientos que nos inquietan y que proporcionan nuevas hipótesis a tener en cuenta para futuros estudios.

Respecto de la actividad demostrativa, uno de los hechos que resaltamos es que en las afirmaciones de los estudiantes, en gran medida, se alude a la definición de la mediatriz [9, 15, 17, 25, 31, 39]. Por ejemplo, Paula utiliza la expresión "como se tiene la mediatriz no hay necesidad de medir" [9, 13]. Dicha expresión da cuenta, implícitamente, de que Paula sabe que los segmentos que construyó a partir del punto que está en la mediatriz son congruentes, pero que en su afirmación no pudo articular adecuadamente de esta idea. Los estudiantes procuran argumentar sus afirmaciones mencionando la definición de mediatriz como garante de sus afirmaciones. Sin embargo, debido a la dificultad de expresión y el hacer mención a la medida decimos que se produjeron argumentos mixtos para justificar. A pesar de esto, podemos observar el acercamiento a un argumento analítico [33, 37], ya que Paula intenta ser más explícita en cuanto que señala que debido a que el punto está sobre la mediatriz esto determina la congruencia de los lados del triángulo isósceles, lo cual se reitera luego por todos los estudiantes con a la mediación del profesor [37].

En cuanto a la gestión del profesor, es importante señalar que él es el responsable de instaurar una nueva cultura de la clase de matemáticas. En este fragmento, observamos muchas de las acciones, que reiteradamente, el profesor ha venido desarrollando buscando que los estudiantes argumenten sus afirmaciones con los hechos geométricos estudiados. En este fragmento, encontramos resultados favorables frente la configuración del ambiente indagativo gracias a que el profesor ha sido muy perseverante en el cuestionamiento de las afirmaciones de los estudiantes [7, 10, 14, 18, 28], incitándolos, guiándolos y casi que forzándolos a referirse a los hechos geométricos para sustentar sus afirmaciones [16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38]. También, hemos evidenciado los esfuerzos del profesor por fomentar un manejo adecuado del lenguaje matemático que repercuta en una mejoría en la articulación de las ideas y afirmaciones de los estudiantes [3, 5, 22, 34, 40].Pero es claro que una evolución en este aspecto requiere de un mayor tiempo y esfuerzos de otros profesores para crear dicha cultura en los estudiantes.

Puesta en común en gran grupo de la solución del problema PA1 por parte del grupo 2: estudiantes con una participación activa en el ambiente indagativo.

Tabla 4.6

Fragmento de la puesta en común en gran grupo del problema PA1 Grupo 2

1	P:	[…] Entonces van a solucionar todos, el problema de nuevo ahí en el computador que tienen […].Recuerden el problema era construir un triángulo isósceles con un lado que ya nos dan. Entonces lo primero que deben hacer es el segmento, entonces nombramos los extremos de ese segmento […] Listo, entonces ahí ya lo solucionó Laura A. Entonces coméntenos cómo lo solucionó y miramos si los demás están de acuerdo.	GP-PRA
2	Laura A:	Primero hice un segmento…coloco la opción mediatriz y hago un punto en cualquier lado de la mediatriz…no importa cuál, que punto de la mediatriz escoja este va a dar siempre la misma medida, porque la mediatriz está en la mitad del segmento $\overline{AB}$. [El reporte de Laura produce la construcción de la Figura 4.28].	ADE ADAS

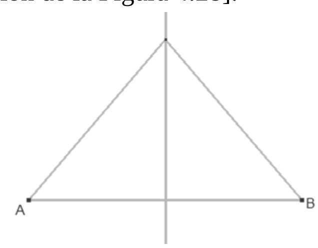


Figura 4.28

3	P:	¿Están de acuerdo con lo que está diciendo Laura A?	GP-PC
4	Coro:	¡Sí!	AIA
5	P:	¿Por qué pasa eso que dice Laura A?	GP-AC GP-APQ
6	Laura R:	Porque en la mediatriz todos los puntos están a la misma medida de los segmentos [a los extremos del segmento] *A* y *B*.	ADAA
7	P:	¿Están de acuerdo con lo que dice Laura R? Ella está diciendo que ese punto que está allá dibujado se encuentra a la misma distancia de *A* y *B* ¿Están de acuerdo?	GP-PC GP-RAV
8	Coro:	¡Sí!	AIA
9	P:	¿Por qué? Veamos por aquí Ronaldo ¿está de acuerdo?	GP-PC
10	Miller:	Porque en la mediatriz, cualquier punto que se coja va a medir lo mismo de *A* y *B*.	ADAA
11	P:	Bien, entonces ese punto que está ahí van a arrástralo. Por favor Laura arrastre el punto que esta sobre la mediatriz, ahora mida los lados del triángulo… Entonces, observen ¿qué pasa cuando se arrastra el punto? ¿Qué pasa con las medidas? ¿Qué cambia? ¿Qué no cambia?	GP-PRA GP-AC
12	Laura A:	Cambia la medida pero siguen siendo iguales [las dos].	ADV
13	Kevin:	Siguen siendo iguales [las medidas de los dos lados congruentes del triángulo isósceles].	ADV
14	P:	¿Qué tiene que decir Laura R?	GP-PC

15	Laura R:	Que cambian de tamaño los segmentos que vienen del punto de la mediatriz.	ADE
16	P:	¿Y qué no cambia? Arrástrelo Laura A por favor.	GP-PC
17	Karen C:	El triángulo.	AIP
18	P:	¿Qué exactamente del triángulo no cambia?	GP-FL
19	Karen C:	El segmento $\overline{AB}$.	AIP
20	P:	¿Ahora qué pasa si se arrastra A o B? Arrástrelo Laura A por favor… ¿qué cambia ahí?	GP-PRA GP-PC
21	Angie:	Se mueve todo.	AIP
22	Laura A:	Se mueve la mediatriz.	ADE
23	Kevin:	Cambian las medidas.	ADE
24	P:	¿Qué medidas cambian?	GP-PC
25	Camilo:	La de todos los segmentos.	ADE
26	P:	¿Pero sigue siendo un triángulo isósceles?	GP-PC
27	Coro:	¡Sí!	AIA
28	Camilo:	Porque mantiene las mismas medidas en los dos lados.	ADAS
29	Nicolás:	Porque los dos puntos son congruentes.	AIP
30	P:	No espere, ¿los dos puntos son congruentes?	GP-FL
31	Camilo:	No, los dos lados son congruentes.	AIC
32	Daniel:	Los dos lados no pierden la medida.	ADAS
33	P:	¿Y por qué no pierden las [mismas] medidas?	GP-AC GP-APQ
34	Nicolás:	Porque los lados son congruentes.	ADAS
35	Daniel:	Pues porque los lados son congruentes.	ADAS
36	Ronaldo:	Porque el punto de la mediatriz está a la misma medida.	ADAS
37	Karen C:	Por la mediatriz.	AIP
38	P:	¿Por la mediatriz qué? ¿Qué exactamente de la mediatriz hace que no se pierdan las medidas?	GP-AC
39	Laura A:	Que sea la mitad del segmento.	AIP
40	P:	No exactamente, ¿pero qué tiene que ver que el punto esté en la mediatriz?	GP-AC
41	Nicolás:	Que hace que la medida entre los puntos A y B sea la misma.	ADAA
42	P:	¿Están de acuerdo con lo que dice Nicolás?	GP-PC
43	Coro:	¡Sí¡	AIA
44	P:	Bueno, entonces tenemos ahí un triángulo isósceles ¿por qué es un triángulo isósceles?	GP-AC GP-APQ
45	Coro:	Porque tienen dos lados congruentes de la misma medida.	ADAA
46	P:	Laura, pónganle un nombre al punto sobre la mediatriz... Listo C y díganme ahora ¿cuáles serían los lados congruentes de ese triángulo isósceles?	GP-FL GP-PRA
47	Laura R:	C y B y A y C [$\overline{CB}$ y $\overline{AC}$].	AIP

48	P:	¿Cuáles?	GP-FL
49	Coro:	$\overline{CB}$ y $\overline{AC}$.	AIP
50	P:	Bien, como esos dos son los lados congruentes entonces el triángulo es isósceles. Ahora voy […] a proyectar aquí para que todos vean. [Construcción de Daniel y Nicolás. Figura 4.29].	GP-RAV GP-PRA
51	P:	Entonces, inicié con el segmento y para la construcción que mencionó [el profesor se dirige a Nicolás y Daniel].	GP-PRA
52	Daniel:	Se hace el segmento … Hago la mediatriz y saco una circunferencia [el estudiante produce la construcción que se muestren la Figura 4.29]	ADE

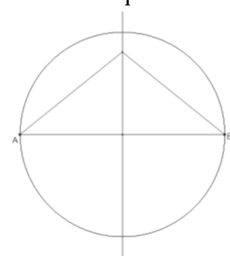


Figura 4.29.

53	Nicolás:	No, así no se puede [el estudiante se dirige a Daniel], sí ve que el punto no se pega la circunferencia	AIR
54	P:	¿Qué pasa ahí?	GP-PC GP-PRA
55	Ronaldo:	No miden lo mismo.	AIP
56	P:	¿No miden lo mismo?... Bueno, ¿qué busca con esta construcción Daniel? Explíquenos para saber si los demás están de acuerdo.	GP-PC
57	Ronaldo:	Así uno lo mueva como lo movió él [Daniel arrastra el punto sobre la mediatriz para que se intercepte con la circunferencia] No va a medir lo mismo.	ADV
58	P:	¿Qué no va a medir lo mismo?	GP-PC
59	Laura A:	Los puntos no están en la circunferencia… Están A y B pero C [hace mención al punto sobre la mediatriz] no está.	ADE ADAS
60	Nicolás:	Venga mejor yo lo hago que yo tengo otra [el estudiante se dirige a Daniel y presenta la construcción de la Figura 4.30]	AIC

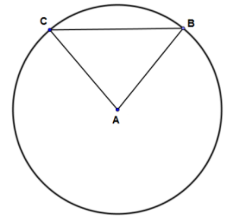


Figura 4.30

61	P:	¿Qué diferencia hay entre esta construcción que está haciendo Nicolás y la que habíamos hecho anteriormente?	GP-PC GP-PRA
62	Camilo:	Que acá los radios de la circunferencia garantizan que la distancia sea la misma	ADAA
63	P:	¿Y por qué sería la misma distancia?	GP-AC

64	Laura A:	Porque los dos [segmentos] van desde el radio.	ADAS
65	Camilo:	Porque son radios de la circunferencia.	ADAA
66	P:	¿Están de acuerdo? Camilo está diciendo que la construcción que Nicolás está haciendo también garantiza construir un triángulo isósceles ¿por qué?	GP-RAV GP-PC GP-APQ
67	Camilo:	Porque son radios de la circunferencia.	ADAA
68	P:	¿Quiénes son los radios de la circunferencia?	GP-FL
69	Coro:	$\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ [ver Figura 4.30].	AIP
70	P:	[…] entonces vea, lo que Nicolás acaba de presentamos aquí es otra construcción que permite hacer un triángulo isósceles. Sólo que aquí no se usó la mediatriz sino que la garantía eran los radios de la circunferencia. Ahora, sí tenemos un segmento dispuesto de la siguiente forma [Figura 4.31: un segmento dispuesto verticalmente] ¿podríamos construir un triángulo isósceles con él? ¿Cómo haríamos?	GP-RAV GP-PRA

Figura 4.31

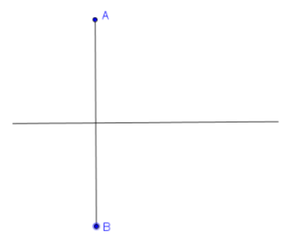


Figura 4.32

71	Nicolás:	Una mediatriz.	AIP
72	P:	¿Una mediatriz? ¿Cómo? …¿cómo lo haríamos Laura R?	GP-PC
73	Laura R:	Una mediatriz así [la estudiante hace una señal que indica en sentido horizontal]… Sí así como está ahí [Laura señala que Nicolás construyó la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ de la Figura 4.31]	ADE
74	P:	¿Con eso que está ahí [Figura 4.32] podríamos construir un triángulo isósceles?	GP-PC
75	Coro:	¡Sí!	AIA
76	P:	¿Por qué?	GP-APQ GP-AC
77	Karen C:	Porque es lo mismo que sí está de la otra forma [se refiere al segmento dispuesto horizontalmente].	ADAS
78	P:	Miren, Nicolás ya ubicó en punto sobre la mediatriz y construyó el triángulo ¿este es un triángulo isósceles?	GP-PC
79	Coro:	¡Sí!	AIA
80	P:	Entonces arrástrelo y miremos a ver qué pasa con las medidas que usted ha hecho… Entonces lo arrastra ¿qué pasa? ¿Se mantiene o no se mantienen las medidas?	GP-PRA
81	Coro:	¡Sí!	AIA
82	P:	¿Entonces es un triángulo isósceles? ¿Por qué?	GP-AC GP-APQ
83	Ronaldo:	Porque tienen la misma medida.	ADAS

84	P:	¿Qué tienen la misma medida?	GP-AC GP-FL
85	Coro:	El $\overline{AC}$ y el $\overline{BC}$ [El punto *C* es el que está sobre la mediatriz].	AIP
86	P:	¿Qué pasa si se arrastra a *C*?... ¿Por qué se mantiene la misma distancia de los segmentos?	GP-PRA GP-AC GP-APQ
87	Coro:	Porque *C* está sobre la mediatriz.	ADAS
88	P:	¿Y qué cumple un punto que está sobre la mediatriz?	GP-AC
89	Coro:	Que están a la misma medida de *A* y *B*.	ADAA
90	P:	Entonces vean, que con esta construcción a pesar de que el segmento y el triángulo tienen una diferente posición, siguen manteniendo las mismas propiedades.	GP-RAV GP-FL

Iniciaremos nuestro análisis haciendo mención a aspectos generales del ambiente indagativo y luego destacando aspectos específicos del mismo. En primer lugar, queremos resaltar que en este fragmento podemos observar a un grupo de estudiantes y un profesor discutiendo e interactuando mediante afirmaciones que se soportan en hechos geométricos. Además, las intervenciones de los estudiantes se producen de manera natural y espontánea, ya que el profesor no tiene que hacer esfuerzos para que los estudiantes participen e intenten justificar las ideas que expresan. Este hecho nos hace considerar que hay una genuina comunidad que discute sobre matemáticas, en la que las intervenciones de los estudiantes predisponen el rumbo que lleva la clase. Con esta puesta en común se abordan tres temas diferentes de discusión sobre los resultados de las construcciones que los estudiantes hicieron. Afirmamos que esta puesta en común puede ser una muestra de lo que puede considerarse un ambiente indagativo, en una clase de matemáticas en donde los estudiantes tienen el protagonismo, validan, discuten, argumentan y llegan a obtenerse resultados de las discusiones que se plantean.

Más allá de que este grupo de estudiantes haya sido seleccionado por su buena participación en sesiones anteriores, no deja de sorprendernos los resultados. Consideramos esta sesión como una clase ideal de geometría, en donde los estudiantes, a partir del uso de un programa de geometría dinámica, participan en discusiones en las que se pueden identificar argumentaciones a partir de hechos geométricos. Sin embargo, y a pesar de que nuestras aseveraciones pueden ser ambiciosas, es importante señalar que aspectos del ambiente indagativo como la refutación y la contra argumentación, que no han sido recurrentes durante todo el experimento, deben ser objeto de mayor impulso para poder favorecer estas prácticas en el desarrollo de las clases de matemáticas.

En cuanto a cuestiones específicas del ambiente indagativo, las cuales respaldan lo mencionado anteriormente, observamos diversas intervenciones de los estudiantes que buscan responder las preguntas del profesor que aportan a la discusión planteada [17, 19, 21, 37, 39, 47, 49, 55, 69, 71, 85] y que debido a que se presentaron en gran número, nos muestra indicios de la amplia participación que tuvieron los estudiantes en la discusión planteada. Otra práctica que fue constante en el fragmento es la aprobación que los estudiantes hacían de las intervenciones de un compañero. Un gran número de estas involucró la aprobación por una mayoría de estudiantes del grupo. Esto evidencia la atención e interés que tenía la discusión para los estudiantes. Muestra que es la comunidad la que aprueba, y no el profesor, los resultados que se obtienen [2, 8, 27, 43, 75, 79]. Finalmente, queremos señalar dos aspectos del ambiente que no se presentan mucho, pero que consideramos que con mayores esfuerzos, pueden llegar a ser más espontáneos en la cultura de clase: la refutación de una idea o afirmación [53] y la complementación a partir de la intervención de un compañero [31, 60].

Respecto de la actividad demostrativa, podemos afirmar, que en esta puesta en común se ven resultados positivos en la argumentación de los estudiantes, en la que se alude explícitamente a los hechos geométricos que se han venido estudiando. Estudiantes como Camilo, Laura R, Laura A, Daniel y Nicolás hacen afirmaciones que están respaldadas por hechos geométricos, que de no haber sido por el trabajo individual con el programa de geometría dinámica y la gestión del profesor, quizás no serían evidentes en la puesta en común.

Podemos identificar argumentos analíticos que usan garantes, de manera explícita, como la definición de mediatriz [6, 10, 28, 29, 41, 89], triángulo isósceles [45] y la congruencia de los radios en una circunferencia [62, 65, 67]. Si bien existen algunas dificultades en la articulación de las ideas, el lenguaje utilizado y hay apoyo del profesor los estudiantes hacen explicitas las garantías. En esta puesta en común, ha sido el momento en que más hemos observado a los estudiantes argumentar sus afirmaciones, genuinamente, mediante la alusión a los hechos geométricos.

Durante el desarrollo de este fragmento se produjeron varios argumentos sustanciales que también son respaldo de las afirmaciones de los estudiantes [2, 15, 32, 34, 35, 36, 59, 64, 77, 83, 87], sin embargo, pese a no tener la forma adecuada los destacamos, ya que se observa a los estudiantes haciendo afirmaciones con sentido matemático y en el que sus garantías son experiencias obtenidas de la interacción con los objetos matemáticos.

Finalmente, en cuanto a la gestión del profesor, y para no ser reiterativo basta agregar que durante esta puesta en común el profesor ha cosechado los esfuerzos que hizo durante todo el experimento, para favorecer que los estudiantes tengan participación protagónica. El hecho de que el profesor haga esfuerzos por favorecer la participación de los estudiantes, hacer las preguntas adecuadas que encaminan a los estudiantes a la producción de argumentos sustanciales o analíticos y planear las actividades que contribuyen a una interacción rica entre los estudiantes, son aspectos a mencionar que han contribuido a la configuración del ambiente indagativo y a los resultados que aquí se están exponiendo.

Un asunto más a resaltar frente a esta puesta en común, es el aporte significativo que provee el uso de la geometría dinámica, el uso del *video beam* y los computadores para cada grupo para la configuración del ambiente indagativo. Gracias al dinamismo y precisión con que se pueden evidenciar las propiedades de los objetos geométricos en Cabri, es posible generar discusiones acerca de las propiedades que se observan, además de proveer de herramientas de verificación y argumentación a los estudiantes. Por tal razón, es necesario resaltar que sin esta herramienta tecnológica habrían existido obstáculos para generar discusiones acerca de las propiedades de los objetos geométricos estudiados. Además, que gracias al uso de tecnologías digitales y audiovisuales en el desarrollo de las clases es posible propiciar una mayor motivación de los estudiantes por involucrarse en la comunidad de la clase y una mejor disposición lo que promueve la atención de los estudiantes.

CAPÍTULO 5
RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos una serie de aspectos que se destacaron en el análisis y que desde nuestro punto de vista sintetizan los resultados que obtuvimos. También presentamos las conclusiones que obtuvimos en nuestra investigación y que determinan los alcances que tuvo el experimento de enseñanza que hemos aplicado.

5.1 Resultados que se destacan del análisis

En este apartado queremos referirnos a algunos aspectos que han sido recurrentes y que hemos identificado al hacer el análisis de la información recolectada. Hemos clasificado estos resultados teniendo en cuenta las categorías de análisis que propusimos y algunos aspectos que no hacían parte de estas categorías pero que aparecieron en el análisis.

5.1.1 Ambiente indagativo

Uno de los aspectos que queríamos evidenciar, era la evolución en el ambiente indagativo. Es decir, queríamos evidenciar si mediante las condiciones que establecimos era posible cambiar la cultura de la clase de geometría. Lo que encontramos fue lo siguiente:

- Al comparar la primera puesta en común y la última, evidenciamos que más estudiantes participaron en la discusión propuesta en la última puesta en común. Lo anterior indica una mejoría respecto a que los estudiantes van superando con este tipo de prácticas el temor por expresar verbalmente sus ideas en público. Se puede ver una mayor seguridad por parte de los estudiantes cuando se expresan en comparación con las primeras puestas en común. Un caso de esto lo presenta la estudiante Laura A, ya que en las primeras puestas en común y los reportes de trabajo en pequeño grupo se mostraba tímida e insegura. Sin embargo, durante el desarrollo del experimento no solo evidenció un cambio, sino que empezó a ser protagonista de las puestas en común, expresando sus ideas con un lenguaje adecuado que aportó en gran medida a las discusiones.

- Observamos protagonismo de los estudiantes en las discusiones que se proponían sobre el reporte de las construcciones. La clase de geometría se convirtió en un espacio de discusión e interacción entre estudiantes y profesor y estudiantes y estudiantes. Es decir, se configuró una comunidad de clase que discutía y hacía matemáticas.
- Durante el desarrollo del experimento podemos identificar que en la clase de geometría fue usual identificar prácticas de escucha, interés por lo que dice el profesor y estudiantes, la aprobación y el complemento de ideas y la necesidad de argumentar las ideas que se expresan. Lo que sin duda posibilita un ambiente de indagación y construcción de acuerdos a partir de los resultados obtenidos.
- Destacamos que el experimento ha posibilitado que los estudiantes asuman un protagonismo en el desarrollo de las clases de matemáticas y que este protagonismo esté sustentado en el uso de argumentos matemáticos, o al menos en la alusión a hechos geométricos, ha sido un factor que ha favorecido la confianza de los estudiantes para ser partícipes de la comunidad. De este modo, pensamos que el experimento ha posibilitado la configuración de un ambiente indagativo en donde los estudiantes participan de las discusiones, validan y aprueban las intervenciones de sus compañeros, pero fundamentalmente muestra una predisposición por hacer matemáticas en la clase, lo cual evidencia un cambio en la cultura de la clase de matemáticas. Nos arriesgamos a afirmar que se han obtenido resultados positivos, pero esto no debe sugerir de que no son necesarios muchos más esfuerzos que posibiliten en un ambiente indagativo en donde la refutación, la complementación y la argumentación sean naturales en la clase de matemáticas, por tal razón una cultura de la clase como la que hemos propiciado en este experimento debe ser objeto de análisis y así posibilitar réplicas de este en diferentes contextos en la clase de matemáticas.

En resumen, consideramos que las condiciones que se diseñaron para configurar el ambiente indagativo muestran resultados positivos frente a la configuración del mismo, y si bien la evolución que evidenciamos nos invita a considerar que el objetivo fue cumplido, no podemos negar que mayores esfuerzos son necesarios para cumplir con todos los aspectos que configuran el ambiente indagativo, como lo mencionan Goos (2004) y Forman (1996).

5.1.2 Actividad demostrativa y argumentación

Consideramos que los estudiantes lograron proponer soluciones a los problemas planteados a través de la exploración que posibilita la geometría dinámica. El manejo del programa Cabri les brindó elementos para determinar soluciones a los problemas y para verificar que sus construcciones eran correctas, sin necesidad de esperar la aprobación del profesor. Estas prácticas contribuyen al desarrollo de habilidades en los estudiantes, a tomar la iniciativa y tener la seguridad para presentar reportes a sus compañeros y al profesor.

Otro aspecto a resaltar es que el proceso de justificación de los estudiantes presentó una leve evolución en cuanto a la alusión explícita de los hechos geométricos como garantía de las afirmaciones. Esto indica una mayor aprehensión de los mismos y posibilita que los estudiantes los usen para argumentar y configurar soluciones a los problemas que se presentan. A pesar de esto, tenemos que reseñar la dualidad que muchos estudiantes tuvieron en cuanto al apoyo teórico y empírico para justificar. Como hemos mencionado hay una evolución de los estudiantes en la alusión de los hechos geométricos. Sin embargo muy pocos estudiantes lograron referirse a los hechos geométricos sin necesidad de recurrir a resultados empíricos como la medida o el arrastre, lo que configuró en muchos casos la producción de los argumentos mixtos, y que justificó la necesidad de definirlos dentro de nuestro marco teórico.

5.1.3 Lenguaje usado por los estudiantes

Nos parece necesario resaltar, a pesar de que no era un asunto central de nuestro análisis, el lenguaje que utilizan los estudiantes para expresar sus ideas y que muchas veces se presentó como un obstáculo para que los estudiantes pudieran argumentar o aportar a las discusiones que se presentaban. Consideramos que hubo una evolución en cuanto el manejo del lenguaje que los estudiantes tuvieron. Sin embargo creemos que es necesario un cambio institucional que genere un interés en los estudiantes por superar los temores por hablar en público y promover espacios, en cada una de las áreas del conocimiento, que incentiven en los estudiantes un buen manejo del lenguaje, de tal manera que poco a poco vaya favoreciendo la forma en que los estudiantes se expresen y puedan presentar sus ideas de manera clara y concisa.

5.1.4 Geometría dinámica y tecnologías audiovisuales

El papel de la geometría dinámica y el uso de tecnologías no eran aspectos específicos de nuestro análisis. Sin embargo, estos elementos contribuyeron, significativa y permanentemente, en la configuración del ambiente indagativo. Por ejemplo, la geometría dinámica posibilita a los estudiantes a interactuar con los objetos matemáticos de tal manera que puedan descubrir propiedades de estos que los ayuda a resolver problemas a partir de los hallazgos que se determinaron. Además, el uso de tecnologías digitales y audiovisuales como el *video beam* predispone positivamente a los estudiantes, lo que repercute en un ambiente de clase que invita a los estudiantes a participar y a evidenciar la importancia de sus intervenciones para el desarrollo de la misma. Por tal razón, consideramos que estas herramientas deben ser parte de las clases de matemáticas para configurar un cambio de las prácticas usuales que se desarrollan actualmente en los ámbitos escolares.

5.2 Conclusiones generales de la investigación

En este apartado queremos hacer un análisis frente a los resultados que obtuvimos pero esta vez contrastados con los objetivos que nos habíamos propuesto al iniciar la investigación. Por tal razón, hacemos una comparación en cuanto a los objetivos general y específicos y los impactos que creímos que el experimento iba a tener.

5.2.1 Cumplimiento de los objetivos propuestos

Cuando realizamos la retrospección y observamos los objetivos iniciales que se plantearon en la investigación una mirada muy general a estos nos invita a afirmar que estos objetivos se cumplieron. En primer lugar, al observar nuestro objetivo general, el cual era favorecer la configuración de un ambiente indagativo en la clase de geometría, consideramos que este objetivo fue alcanzado. Como ya mencionamos, contribuimos a un cambio en la dinámica de la clase de geometría y evidenciamos el papel de los estudiantes en esta como protagonistas del desarrollo de la clase. Si bien existen matices que podrían configurar mejores resultados en la configuración del ambiente indagativo, de manera general el cambio es evidente en las transcripciones que presentamos y que fueron motivo de análisis.

En cuanto a los objetivos específicos, consideramos que los tres primeros objetivos específicos, los cuales clasificamos como objetivos a corto plazo, fueron cumplidos. Es posible evidenciar esto en los análisis que hicimos en los fragmentos, ya que creemos que nuestros esfuerzos han repercutido en un cambio en la cultura de la clase de geometría, en la que favorecimos las prácticas de argumentación de los estudiantes creando una cultura de la justificación e intentar convencer a otros de las ideas que se presentan, y como ya hemos mencionado, esto lo conseguimos en cierta medida gracias a que utilizamos tecnologías digitales y audiovisuales. En resumen, estos primeros objetivos los hemos alcanzado gracias al diseño del experimento y los supuestos que tenía nuestra investigación.

En cuanto a los dos últimos objetivos específicos, los que consideramos son a largo plazo, consideramos que la experiencia que registramos y que hemos presentado a los demás compañeros del área de matemáticas y compañeros de otras disciplinas producirá un efecto positivo frente a los cambios que requiere la institución. Nuestra intención al hacer esta investigación, y en general al transitar por la maestría, siempre ha sido la de contribuir con cambios que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere, los cuales creemos favorecerán a los objetivos institucionales y que ayudarán a reflexionar sobre el papel que los profesores y estudiantes jugamos en el cumplimiento de esos objetivos.

5.2.2 Impacto que tuvo la investigación

En cuanto al impacto que creemos tuvo nuestra investigación, hemos considerado dos campos en los que pueden observarse los resultados de nuestro trabajo. El primero, es el campo profesional, y aquí me expreso en primera persona como autor del trabajo, ya que la experiencia vivida a través de la realización de la investigación y en general de la maestría me ha ayudado a cambiar mi perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así que en este sentido, estoy convencido de que mi práctica como profesor se ha visto influenciado significativamente, ya que he entendido mi papel en la educación matemática y que existen un mundo de posibilidades para mejorar y motivarme como profesor de matemáticas, lo que posibilita un cambio en lo que vaya a hacer de aquí en adelante como profesor de matemáticas y como miembro de la comunidad educativa. Particularmente, un aspecto que ha sido motivo de inquietudes por parte de otros compañeros de la institución es sobre cómo puede influir y potenciarse una clase mediante el uso de las tecnologías digitales. Este hecho es uno de los que creemos posibilita mayores inquietudes en la institución y que crea la necesidad de aprovechar las herramientas con que cuenta la institución y de impulsar a la adquisición de más herramientas que posibiliten prácticas diferentes en las aulas de clase. El segundo campo en el que va a tener impacto nuestra investigación, es en las experiencias que tuvieron los estudiantes que participaron de este experimento. No solo porque tuvieron la fortuna de interactuar de una manera diferente con las matemáticas, sino porque las experiencias que vivieron repercuten en la actualidad en el desarrollo de las clases de matemáticas, de la que actualmente soy su profesor. Considero que las experiencias vividas por estos estudiantes pueden motivar a cambios en las prácticas de ellos frente a su vida académica y también sobre las prácticas que los demás profesores que les orienten clases, ya que una experiencia como esta puede ser un hito que contribuya al cambio que necesita la institución. En resumen, consideramos que los resultados de la investigación posibilitan las reflexiones sobre la cultura de la clase en matemáticas y motivan a estudiantes y profesores para intentar cambiar la postura que se tiene de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que sin duda es uno de los objetivos de la educación propiciar reflexiones y cuestionamientos sobre lo que vivimos para cada día poder comprender mejor lo que nos rodea.

BIBLIOGRAFÍA

Blanco Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista educación y pedagogía , 23*(59), 59-66.

Camargo, L., & Samper, C. (2012). Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagogica Nacional.

Colegio Álvaro Gómez Hurtado IED. (2009). *PEI.* Bogotá.

Colegio Álvaro Gómez Hurtado IED. (2013). *Manual de Convivencia.* Bogotá.

Forman, E. A. (1996). Learning Mathematics as participation in a classroom practice: implications of sociocultural theory for reform educational reform. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer, *Theories of mathematical learning* (págs. 115-130). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for research in mathematics education, 35*(4), 258-291.

Krummheuer, G. (1995). The Etnography of Argumentation. En P. Cobb, & H. Bauersfeld (Edits.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 229-269). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry task with Cabry-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 283-317.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with tecnology. En A. Gutierrez, & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (págs. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2006). Demostrar y demostraciones en educación matemática. En A. Gutierrez, & B. P, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 173-204). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *Qualitative Data Analysis. An Expanded Sourcebook.* Londres: Sage Publications.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., & Molina, O. (2012). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para la formación inicial de profesores. En L. Camargo, *Investigaciones en educación geométrica* (págs. 128-148). Bogotá: Publicaciones UD.

Samper, C., & Molina, O. (2013). *Geometría Plana, un espacio de aprendizaje.* Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos en educación matemáticas. *Notices of the AMS, 47*(6).

ANEXO 1

Se presentan a continuación los instrumentos de recolección de información que permitieron delimitar el problema de la investigación presentada.

INSTRUMENTO 1

Encuesta dirigida a docentes del área de matemáticas

1. ¿Cuáles de las siguientes actividades es la que con más frecuencia propone a sus estudiantes en la clase de geometría? (Sólo marque una)

a. Explica propiedades geométricas de figuras, ejemplifica y plantea ejercicios. ☐

b. Propone construcciones geométricas mediante regla y compás. ☐

c. Plantea el estudio de definiciones y teoremas planteando verificaciones y justificaciones. ☐

d. A partir de las propiedades de figuras geométricas soluciona problemas cotidianos. ☐

¿Porqué?____

____

____

2. ¿Qué instrumentos o herramientas ha utilizado para desarrollar la clase de geometría?

____

____

¿Para qué los ha utilizado? ____

____

____

3. ¿Cuáles son los resultados que usted espera obtener en los estudiantes al estudiar la geometría?

____

____

____

¿Por qué? ____

____

____

____

4. Ejemplifique qué tipo de tareas (extra-clase) coloca a sus estudiantes para la clase de geometría

____

____

____

____

INSTRUMENTO 2

Cuestionario dirigido a todos los docentes del colegio Álvaro Gómez Hurtado IED.

Marque con una X la respuesta a la pregunta que se plantea.

1. ¿Con qué frecuencia utiliza las salas de informática en el desarrollo de sus clases?

a. Siempre ☐ b. A veces ☐ c. Nunca ☐

2. ¿Utiliza herramientas tecnológicas o computacionales en el desarrollo de sus clases?

a. Siempre ☐ b. A veces ☐ c. Nunca ☐

Si respondió (a) o (b), ¿Cuáles utiliza?

____

____

____

3. ¿Promueve en los estudiantes la argumentación en el desarrollo de sus clases?

a. Siempre ☐ b. A veces ☐ c. Nunca ☐

Si respondió (a) o (b), ¿De qué manera?

____

____

____

____

____

4. ¿Cree usted que los recursos tecnológicos que brinda la institución son suficientes para el desarrollo de sus clases? SI ☐ NO ☐

¿Por qué? ____

____

____

INSTRUMENTO 3

Encuesta Dirigida a estudiantes de básica secundaria del colegio Álvaro Gómez Hurtado.

1. ¿Cuáles son las actividades que realiza en clase de geometría?

2. ¿Qué herramientas u objetos se utilizan en geometría para el desarrollo de las clases?

3. ¿Para qué actividades utiliza las salas de informática de la institución?

ANEXO 2

Presentamos los fragmentos de trabajo en pequeño grupo que complementan el análisis realizado.

Pequeño grupo de Yeibinson R - Karen O (Problema P1)

El estudiante Yeibinson reporta al profesor la solución a la que el grupo llega a partir del trabajo con el programa de geometría dinámica.

Yeibinson:	Hacemos la circunferencia, y éste punto es el centro la circunferencia [señala al punto que determina el programa de Cabri cuando se hace la circunferencia]… Le colocamos dos puntos sobre la circunferencia, con el segmento [se refiere a la herramienta de Cabri para hacer segmentos] unimos los puntos al centro la circunferencia y ahora usamos la medida [herramienta de Cabri] para saber si son iguales [el estudiante reporta la construcción que aparece en la Figura 4.4].	ADE

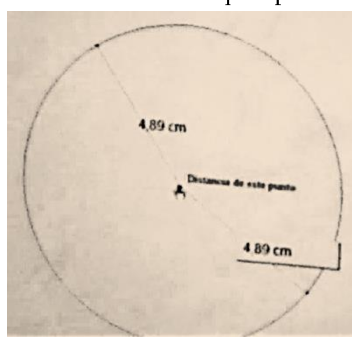


Figura 4.4

P:	¿Son iguales quiénes?	GP-FL
Yeibinson:	Los segmentos	
P:	¿Qué significa que la medida sea igual?	GP-FL
Yeibinson:	Eh… Que sean congruentes	
P:	Listo…Entonces ahí dio la misma medida… ¿por qué tienen la misma medida?	GP-PQ
Yeibinson:	Porque son los radios de la circunferencia	ADAA
P:	¿Cuáles son los radios de la circunferencia?	GP-FL
Yeibinson:	Los segmentos que hice… Los que están en la circunferencia [señala los segmentos de la Figura 4.4]	

En cuanto a la actividad demostrativa, vemos que el estudiante hace un reporte de la construcción que hizo, narrando al profesor paso a paso las herramientas del programa de geometría dinámica que usó para su construcción. De esta manera podemos reconstruir la exploración que hizo el grupo para dar solución al problema planteado. Ahora bien, el estudiante hace mención a que la congruencia de los segmentos que construyó se debe a que son radios de la circunferencia –lo cual podría considerarse como una aproximación a la formulación de un argumento analítico. Sin embargo, hace uso de la herramienta medida para verificar que los segmentos tienen la misma medida, situación que evidencia cierta dualidad entre lo empírico y lo teórico, y que pone de manifiesto lo que hemos definido como un argumento mixto; a pesar de que el estudiante hace alusión a que la congruencia de los segmentos es consecuencia de que sean radios de la circunferencia, hace mención a esto porque el profesor le pregunta y no por una reflexión genuina del estudiante. Además, en el reporte de la construcción hace mención a la medida como garantía de que los segmentos son congruentes y no al hecho geométrico HG1, lo que nos muestra la combinación de los elementos empíricos y teóricos que componen al argumento mixto.

Esta es una situación que se reiteró en varios de los grupos, y que presupone que los estudiantes no han comprendido la suficiencia que puede llegar a tener la alusión al hecho geométrico HG1 para soportar sus afirmaciones; sin embargo, como se verá estudiantes como Yeibinson, en futuras sesiones de puestas en común en gran grupo, hacen mención al hecho geométrico para argumentar diversas situaciones relacionadas a este hecho de una manera más genuina.

En cuanto a la gestión del profesor, observamos su interés por favorecer el manejo del lenguaje que el estudiante utiliza acerca de la congruencia de los segmentos, lo que le posibilitará una mejor participación en las puestas en común. También, observamos que el profesor intenta promover el uso del hecho geométrico en la afirmación de Yeibinson, lo cual es fundamental para la configuración del ambiente indagativo en el que se requiere estudiantes que argumenten sus afirmaciones para contribuir a las discusiones que se realicen. A pesar de este esfuerzo, creemos que el profesor pudo haber contribuido a que el estudiante hubiese mencionado los componentes de la estructura ternaria dato-garantía-aserción de una manera más explícita en la formulación del argumento, ya que fue suficiente para el profesor que el estudiante hiciera alusión al hecho geométrico HG1 como justificación de su construcción.

Pequeño grupo de Ronaldo P– Miller L (Problema PA1)

P:	Bueno, cuéntenme qué hicieron…Pero primero nombren los extremos del segmento para identificarlos en la construcción…Y esa línea recta ¿Qué es?	GP-FL
Miller:	Es la mediatriz.	
P:	La mediatriz […] ¿Y qué es la mediatriz?	GP-FL
Ronaldo:	Es la mitad del segmento.	ADAS
P:	Más bien [la recta] que pasa por el punto medio del segmento, pero bueno ya miramos eso. Continúe.	GP-FL
Ronaldo:	Bueno hicimos el triángulo con la mediatriz; y para que sea isósceles, pues si uno lo mueve tiene que seguir midiendo lo mismo [Ver Figura 4.26].	ADE ADV

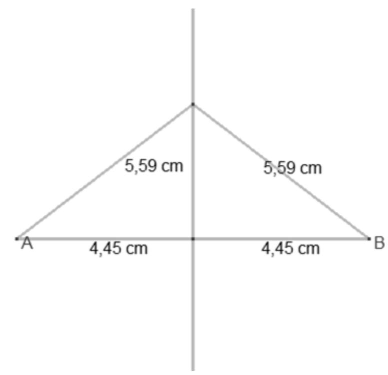


Figura 4.26

P:	¿Y por qué es un triángulo isósceles? ¿Cuáles son los lados congruentes?	GP-APQ
Ronaldo:	Del punto *A* hasta arriba [Punto sobre la mediatriz] y del punto *B* a arriba	ADE
P:	Bueno, ustedes lo midieron pero si no pudiéramos medir ¿Existe alguna manera de justificar porque tienen la misma medida?	GP-AC
Ronaldo:	Sí, la mediatriz.	
P:	¿Qué exactamente de la mediatriz?	GP-AC
Ronaldo:	Pues que es de la misma medida de este a este [Señala del punto *A* y *B* al punto sobre la mediatriz].	ADAS
Miller:	Son congruentes.	
P:	O sea, este punto está aquí en la mediatriz ¿qué cumple al estar sobre la mediatriz?	GP-AC
Ronaldo:	Pues que sería isósceles porque mide lo mismo.	ADMX
Miller:	Porque del punto *A* y *B* al punto medio miden lo mismo.	
P:	Eso es cierto, pero eso no nos interesa en este momento…Fíjense en este punto que está en la mediatriz ¿qué garantiza ese punto en la mediatriz?	GP-AC
Ronaldo:	La medida…la medida que tiene del punto *A* y *B* a arriba es la misma que si lo muevo pues mide lo mismo porque está encima de la mediatriz.	ADAS
Miller:	Que cualquier punto que lo coloque va a medir lo mismo porque está en la mediatriz.	ADAA
P:	Entonces recuerden: la mediatriz son todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento.	GP-FL

En cuanto a la actividad demostrativa, destacamos que el reporte hecho por los estudiantes presenta una construcción robusta en la que utilizan la mediatriz. Sin embargo, como muestra la Figura 4.26 los estudiantes miden los lados del triángulo para verificar que sí lo es y reportar la solución al profesor. Nuevamente, a pesar de conocer la definición de mediatriz hacen uso de la medida y el arrastre, para verificar que su construcción es correcta. En este reporte, podemos identificar una inclinación de los estudiantes por apoyarse en cuestiones empíricas para justificar su construcción. Esto lo vemos cuando Ronaldo hace mención a que su construcción es un triángulo isósceles ya que mantiene las medidas al ser arrastrado. Los estudiantes usan el dinamismo de la representación para verificar sus construcciones, lo que sin duda es una confirmación de las ventajas de la geometría dinámica para promover la argumentación en los estudiantes, aunque en este caso, no analíticamente.

En cuanto a lo que observamos del proceso de justificación, podemos señalar el uso de un argumento analítico por parte de los estudiantes cuando Miller dice "Que cualquier punto que lo coloque va a medir lo mismo porque está en la mediatriz" con esta expresión Miller alude implícitamente a la definición de mediatriz para justificar por qué los lados del triángulo son congruentes. También vemos que los estudiantes usan argumentos sustanciales para justificar, en los cuales aluden a la medida y a que la construcción resiste el arrastre. Hacen varias referencias a la medida que, de alguna manera, muestran que los estudiantes tienen más presente la medida que los mismos hechos geométricos.

En cuanto a la gestión del profesor, sus esfuerzos van encaminados a que los estudiantes aludan a la definición de mediatriz para argumentar el porqué de la congruencia de los lados del triángulo isósceles. El profesor intenta que los estudiantes vayan más allá del uso de la medida y el arrastre para dar validez a su construcción. Y a partir de sus cuestionamientos Ronaldo y Miller aluden a la definición de mediatriz para argumentar. De modo que al final del fragmento se puede observar una mención explícita al hecho geométrico de la definición de la mediatriz.