# PARÁBOLAS DE SEGURIDAD: UN ACERCAMIENTO A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DESDE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

**Trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas**


**ISAAC LIMA DÍAZ**
**2001240024**

**Profesor Asesor**
**Mauricio Bautista Ballén**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**



**NOVIEMBRE DE 2006**

## DEDICATORIA

*A mi princesa…*
*TAMI PRINCESA TAMI*

*A mi hermano David*
*Su esfuerzo, su lucha, su vocación*

*A mis padres*
*Su sufrimiento, su sudor*

*A la Madre Tierra*
*Mi hogar*

*Al dios Sol y a la diosa Luna*
*Su luz, su calor*

*A ella, mi princesa*
*Mi alma gemela…*

## AGRADECIMIENTOS

A mi "profe" Mauricio, su visión del ejercicio docente me impactó desde el día que lo conocí, me mostró que las matemáticas siempre son fáciles. Él, junto con toda su paciencia y conocimiento se convirtió en la base para el desarrollo de este trabajo.

A mi hermano David, aunque no estuvo presente, su rastro se percibe en el camino de la vida, en la formación profesional, en el descubrimiento de la vocación. Llego a estas instancias gracias a todas las semillas que el y yo sembramos desde la niñez y que hoy se empiezan a convertir en grandes frutos.

A mi mamá, quien durante la escritura de este texto, mi carrera y mi vida me preparó chocolate caliente y preguntaba constantemente si ya estaba terminando. A mi papá, quien por medio de su arte respetó mi gusto por la educación y por las matemáticas y puso atención a mis explicaciones y se esforzó por entender

A Jorge, Clara, Cecilia L, Cecilia N, Johana, Luís Francisco, Lyda, Carmen, Claudia N, Rodolfo, Benjamín, Iván, José, Rafael, Martha, Luisa, Nubia, Luís Eduardo, Francisco, Claudia O, Edgar, Carlos, Alberto; entre otros tantos que me han regalado su conocimiento para hacer de mi un educador, un maestro

A las deidades, que me dieron el gusto, la capacidad y la oportunidad de realizar mis sueños…

## RESUMEN ANALÍTICO

**Tipo de Documento:** Trabajo de Grado.

**Acceso al Documento:** Universidad Pedagógica Nacional

**Título del Documento:** Parábolas de seguridad: un acercamiento a las ecuaciones diferenciales desde la geometría analítica

**Autor:** Isaac Lima Díaz

**Publicación:** Bogotá, 2006, 100p

**Palabras Clave:** Parábolas de seguridad, Geometría Analítica, Ecuación Diferencial, Vectores, Ecuaciones Paramétricas, Derivada, Didáctica de las Matemáticas, Modelación, Uso de Tecnologías en Educación.

**Fuentes:** CHOW, Tai L. (1995) Integration of Newton's Equations of Motion. En: Classical Mechanics. Editorial Addison Wesley. Nueva York. Estados Unidos. 1995, pp 67 – 73

LEHMANN, Charles. (1996) Geometría Analítica. Limusa Noriega Editores. México D.F. México

MECD (2006). El proyecto Descartes. http://descartes.cnice.mecd.es. Ministerio de Educación y Ciencia Español.

MEN (1998) Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Grupo Editorial Magisterio. Bogotá, D.C

MEN (2003) Estándares Básicos en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Grupo Editorial Magisterio. Bogotá, D.C

MOREIRA, Marco. (2000) Aprendizaje Significativo Crítico. Actas III Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo, p.p. 33-45 con el título original de *Aprendizaje Significativo Subversivo*. Traducción de *Ileana Greca y María Luz Rodríguez Palmero.*

ROIG, A. LLINARES, S. (2004) Dimensiones de la competencia matemática al finalizar la educación secundaria obligatoria. Caracterización y análisis. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante. España

**Descripción:** Se realiza una propuesta didáctica que involucra los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de geometría analítica y de cálculo como vectores, parábola, derivada y ecuaciones diferenciales, y se concluye con una aplicación de esas ramas del conocimiento matemático con el estudio de la cinemática en el área de Física.

La propuesta didáctica se centra en el aprendizaje de las parábolas de seguridad y de los conceptos previos para este tema de la física en el estudio del lanzamiento de proyectiles. Introduce a los estudiantes de undécimo grado en el aprendizaje de las parábolas, ecuaciones diferenciales lineales y uso de software educativo como lo es Cabrí Geometre, y Descartes. Mediante el estudio de las parábolas de seguridad se aborda la enseñanza y el aprendizaje del concepto de parábola e introduciendo algunas nociones básicas del concepto de ecuación diferencial lineal, en estudiantes de último año de educación media.
**Contenidos:** Vectores en el plano, parábola, derivada, antiderivada, funciones en varias variables, cinemática lineal, cinemática en dos dimensiones y lanzamiento de proyectiles, parábolas de seguridad. Aprendizaje mecánico, aprendizaje significativo, didáctica de las matemáticas, uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase.
**Conclusiones:** La importancia de las matemáticas en otras ciencias ha tenido gran acogida en los procesos de enseñanza y aprendizaje durante la educación básica, tanto los docentes como los estudiantes reclaman la posibilidad de aplicar el conocimiento adquirido en otras áreas en el contexto de resolución de problemas. Bajo esta afirmación, la física es la rama por excelencia en la cual se pueden ilustrar algunas de las aplicaciones de la teoría estudiada en los diferentes tópicos de la matemática escolar; específicamente, aplicaciones de la geometría analítica como el estudio del concepto de parábola; y aplicaciones del cálculo fundamentado en las disertaciones sobre ecuaciones diferenciales son dos de los grandes candidatos para mostrar al estudiante las relaciones existentes entre las matemáticas y otras ramas del conocimiento como lo es la física. A partir de esta idea, el estudio de las parábolas de seguridad generadas por la teoría del lanzamiento de proyectiles en el estudio de la cinemática se convierte en una herramienta potente para lograr el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de educación básica.

Fecha Elaboración Resumen: 16 de Noviembre de 2006

## TABLA DE CONTENIDO

# 1. PRELIMINARES

## 1.1 INTRODUCCIÓN

La planificación de actividades para las clases de Matemáticas es una competencia fundamental de la labor del profesor que se debe forjar durante su formación profesional. Barrios y Guerrero (2005) afirman que las unidades didácticas son los instrumentos con los que el docente puede planificar para concretar reflexiones en la manera de presentar contenido, la secuencia y la forma de trabajar.

Por otro lado, es menester reconocer la importancia de las matemáticas en el aula de clase porque éstas se constituyen en una valiosa herramienta para el desarrollo del pensamiento, y además, en el caso de los estudiantes de último año de educación media, el aprendizaje de ésta área puede implicar el buen desarrollo de una carrera que involucre conocimiento matemático.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) plantea en sus estándares que formular problemas a partir de de situaciones cotidianas y matemáticas para lograr experiencias en el reconocimiento de las alternativas de desarrollo es una opción de la actividad matemática. En la escuela, la relación entre las matemáticas y el mundo real se lleva a cabo con más intensidad por medio de las actividades de resolución de problemas contextualizados en situaciones reales, siendo el uso de herramientas tecnológicas como el computador y software educativo en matemáticas instrumentos adecuados para la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

En este documento se estructura una unidad didáctica con el propósito de introducir a los estudiantes de último año de educación media con el concepto de ecuación diferencial lineal. Esta idea fue seleccionada a partir del interés propio del autor que se generó en los cursos de Geometría Analítica y Ecuaciones Diferenciales correspondientes al plan de estudios del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y su desarrollo en esta monografía se concreta mediante la formulación de una situación problema y una manera de ser abordada, que se puede estudiar desde la geometría y desde el cálculo, permitiendo a los docentes encontrar algunas relaciones elementales entre esas dos ramas de las matemáticas a partir de temas de física para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los alumnos por medio de la interacción con herramientas tecnológicas.

Una de las visiones de las matemáticas que adquiere la propuesta, es aquella que la percibe como ciencia dinámica, cambiante, que se adapta a las situaciones de los seres humanos; siendo éste uno de los principales problemas de su enseñanza y de su aprendizaje: encontrar situaciones con las que los estudiantes puedan interactuar, con las que puedan relacionarse, las puedan visualizar, y que las hagan parte de su entorno, de tal manera que apropien las temáticas con las que se abordan los distintos temas, dejando a un lado aquella idea que considera que el único objeto de la actuación del alumno en la clase de matemáticas es contestar las preguntas que el profesor hace sin interesar su coherencia.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

El estudio de la parábola, se realiza en noveno y undécimo grado e involucra dos tipos de pensamiento propuestos por los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional. En primer lugar se encuentra el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, debido a que el estudiante debe afianzar más allá del plano, en este caso del plano cartesiano, todo tipo de conocimiento concerniente con la parábola, de lo contrario no va a ser capaz de identificar conceptos relacionados tales como el movimiento parabólico, situación que se presenta en el espacio, porque los sistemas geométricos, en particular el relacionado con la parábola, se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento (MEN, 1998) y se pueden complementar con el estudio del cálculo.

En esa línea, se encuentra el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, en el cual se pueden hacer exploraciones a partir de la variación de las constantes que identifican las ecuaciones y la evaluación en puntos notables de la misma. La teoría afirma que "*Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter-estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas*" (MEN, 1998). La geometría analítica y el cálculo ubican en el mismo dominio conceptos y procedimientos de algunos contenidos de estas ramas de las matemáticas que por mucho tiempo estuvieron separados para el educando; con la aplicación en el tema de cinemática en física, el estudiante puede analizar, organizar y seguramente modelar matemáticamente situaciones propias de su entorno y de las ciencias.

## 1.3 OBJETIVOS

**OBJETIVO GENERAL**

Elaborar una unidad didáctica para estudiantes de último año de secundaria en la cual se puedan integrar tópicos del conocimiento matemático, específicamente el concepto de parábola y el estudio de ecuaciones diferenciales lineales a partir de los conocimientos de los estudiantes, que refleje la importancia de la aplicación de las matemáticas en otras áreas del conocimiento.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Profundizar en el estudio de tópicos de matemática aplicada, específicamente el concepto de parábola y las nociones básicas del estudio de las ecuaciones diferenciales lineales vistos desde el estudio de las parábolas de seguridad tema de estudio de la cinemática en el área de física a partir de los conocimientos adquiridos en los diferentes cursos del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas.

Integrar el estudio de tópicos de matemáticas escolares (concepto de parábola) con el estudio de matemáticas universitarias (concepto de ecuación diferencial lineal), a partir del análisis de situaciones que pueden ser estudiadas en otras áreas del conocimiento.

Generar una propuesta alternativa de enseñanza de matemáticas universitarias para estudiantes undécimo grado de educación media.

Involucrar herramientas tecnológicas, en especial el uso de software educativo como Cabrì Geometre y Descartes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares y su aplicación en otras áreas del conocimiento

# 2. MARCO TEÓRICO

## 2.1 MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO

### 2.1.1 Conocimientos Básicos

El sistema de coordenadas se ha ordenado de tal manera que los valores positivos en el eje x correspondan al lado derecho del plano cartesiano, de igual manera, los valores positivos del eje y son los que se ubican en la parte superior.

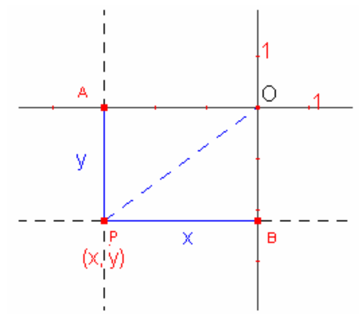


Figura No. 1

En el plano cartesiano está garantizada la localización de todo punto P imitando el proceso realizado para encontrar la distancia entre dos puntos en el sistema lineal, es decir, trazando rectas perpendiculares al eje x y al eje y, notando con A y B la intersección entre las nuevas rectas y los ejes, y midiendo la longitud entre los segmentos. La longitud del segmento PB se denomina abscisa de P y la longitud del segmento PA es llamada ordenada de P.

En el caso de la figura No 1, el segmento PB tiene longitud x y el segmento PA mide y. Por lo que al punto p le corresponde la pareja ordenada (x, y).

### 2.1.2 Vectores

Los vectores son segmentos que señalan un sentido y representan una dirección. Se caracterizan por tener un punto inicial, un punto final, una longitud y la dirección

De manera escrita, los vectores se representan con letras minúsculas y una flecha encima. Por ejemplo, en física, el vector velocidad se representa: $\vec{v}$

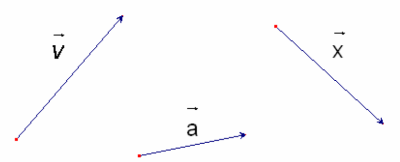


Figura No 2

Los vectores se pueden representar de manera gráfica con una flecha.

Al igual que con las rectas, semirrectas y segmentos, existen vectores paralelos y perpendiculares a un vector dado y es por eso que se hace importante considerar a los vectores en el plano cartesiano:

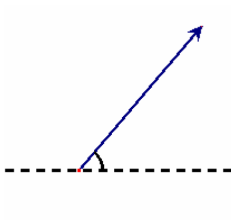


Figura No 3

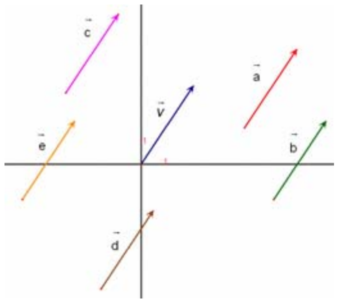



Figura No 4

Al igual que la longitud de los segmentos, la longitud de los vectores se determina al encontrar la distancia entre el punto inicial y el punto final, y para determinar si dos vectores son paralelos, se encuentra el ángulo que determina el vector respecto a la horizontal

La afirmación anterior permite discernir que existen muchos vectores paralelos que tienen la misma longitud, por lo que se hace importante caracterizar dicha familia de vectores con un solo vector.  Esa caracterización se hace con el vector que tiene el punto inicial al origen:

En la figura anterior, los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ son paralelos y tienen la misma dirección que el vector $\vec{v}$ por lo que $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ se representan con el vector $\vec{v}$.  Al vector $\vec{v}$ se le denomina vector de posición

### 2.1.2.1 Norma de un vector

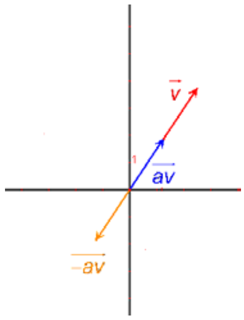
La norma del vector $(a,b)$ se nota por $\|(a,b)\|$ y se determina por:

$$\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{[EC 01]}$$

Si $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ se dice que $(a,b)$ es un vector unitario

#### 2.1.2.2 Producto Escalar

Para todo número real $a$ y todo vector $\vec{v} = (x, y)$, el producto $a\vec{v}$ se define por $a\vec{v} = a(x, y) = (ax, ay)$ La Figura No. 5 ilustra la situación de manera gráfica:




a>0

Figura No 5

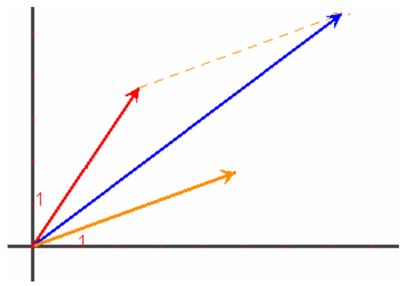



Figura No 6

#### 2.1.2.3 Suma de Vectores

Sean $\vec{v} = (x, y)$ y $\vec{w} = (r, s)$, entonces, $\vec{v} + \vec{w} = (x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$. En la figura 6 se puede observar la forma geométrica para sumar vectores.

Como las componentes de un vector son números reales, todo vector se puede expresar como la suma de dos vectores, ya que todo número real se puede representar como la adición de dos números reales.

### 2.1.3 La parábola

#### 2.1.3.1 Lugar Geométrico

Se define un lugar geométrico como la representación que conforma un conjunto de puntos bajo una condición. Por ejemplo, la recta es el lugar de todos los puntos (x, y) tales que $y = mx + b$ con m y b números reales.

#### 2.1.3.2 Parábolas

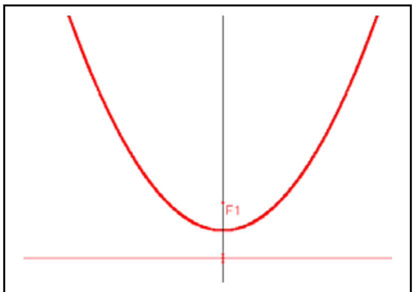



Figura No 7

Se define a la parábola como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta y un punto fuera de ella, llamados directriz y foco respectivamente.

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina eje de la parábola. Además, el punto medio entre el foco la intersección de la directriz y el eje de la parábola, por definición pertenece a la curva; éste punto se denomina vértice de la parábola.

**2.1.3.2.1 Parábola con vértice en el origen y directriz paralela a un eje coordenado**

Bajo el supuesto de que el vértice de la parábola es el origen, la directriz es la recta $y=-f$ con $f \neq 0$. De aquí se puede deducir que el foco está situado sobre el eje y.

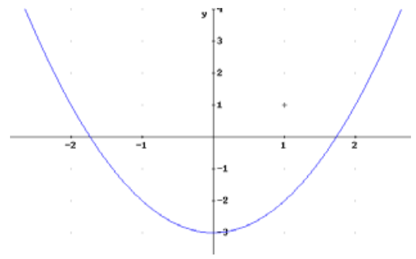


Figura No 8

La distancia entre $y=-f$ y el origen es $|-f|$, por lo que el foco será el punto F con coordenadas $(0,f)$. Sea $P(x,y)$ un punto que pertenece a la parábola, eso significa que $d(F,P)=d(y=-f,P)$. Por definición de distancia entre dos puntos, $d(F,P)=\sqrt{x^2+(y-f)^2}$, y $d(y=-f,P)=\sqrt{(y+f)^2}=|y+f|$, de lo que se puede concluir:

$$\sqrt{x^2+(y-f)^2}=|y+f|$$
$$x^2+(y-f)^2=(y+f)^2$$
$$x^2+y^2-2yf+f^2=y^2+2yf+f^2$$
$$x^2=4fy$$

[EC 02]

De la última igualdad se puede deducir que la parábola no interseca ninguno de los ejes en otro punto distinto al origen y además es simétrica respecto al eje y.

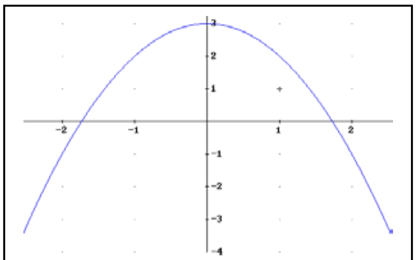


Figura No 9

Si $f<0$, los valores que le corresponden a y son los menores o iguales a cero, hecho que se observa en la figura No. 8

Si por el contrario, $f > 0$, entonces los valores para y necesariamente serán los valores mayores o iguales a cero, siendo su gráfica la ilustrada en la figura No. 9:

De la misma manera se hace la deducción de la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz paralela al eje y. En este caso la directriz tendrá como ecuación $x = -f$, el foco F tendrá coordenadas $(f,0)$ y la ecuación será de la forma

$$y^2 = 4fx \qquad \text{[EC 03]}$$

**2.1.3.2.2 Ecuación de la parábola con vértice en el punto (h, k) y directriz paralela a un eje coordenado**

Generalmente se presenta el caso que en el que la parábola objeto de estudio tenga la directriz paralela a alguno de los ejes, pero cuyo vértice no coincide con el origen.

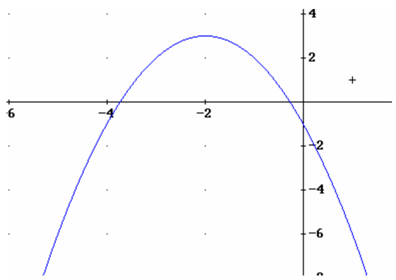


Figura No 10

Para solucionar la situación y poder encontrar la ecuación en el plano cartesiano, se hace menester emplear un sistema de coordenadas auxiliar en el que el nuevo vértice sea el vértice de la parábola dada.

Si en el plano cartesiano la parábola tiene vértice en el punto $V(h,k)$, la parábola, con referencia al nuevo sistema de ejes, tendrá alguna de las ecuaciones:

$$y'^2 = 4fx'$$
$$x'^2 = 4fy'$$
$$\text{[EC 04]}$$

Caso en el que las coordenadas del foco son $(0,f)$ si $x'^2 = 4fy'$, o $(f,0)$ si $y^2 = 4fx$.

Haciendo cambio de coordenadas, se tiene:

$$x = x'+h;$$
$$y = y'+k$$
$$\text{[EC 05]}$$

Dónde

$$x' = x - h;$$
$$y' = y - k$$

[EC 06]

Así:

$$y'^2 = 4fx' \qquad x'^2 = 4fy'$$
$$(y-k)^2 = 4f(x-h) \qquad (x-h)^2 = 4f(y-k)$$

Las dos ecuaciones

$$(x-h)^2 = 4f(y-k)$$
$$(y-k)^2 = 4f(x-h)$$

[EC 07]

Son las formas más comunes de identificar una parábola. Estas expresiones permiten identificar el vértice: V(h, k), el sentido en el que se abre: sentido positivo si f es positivo, sentido negativo si f es negativo, distancia del vértice a la directriz y distancia del foco a la directriz: $|-f|$.

#### 2.1.3.2.3 **Ecuación general de la parábola**:

Las parábolas no solo se pueden escribir por medio de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}(x-h)^2 &= 4f(y-k)\\(y-k)^2 &= 4f(x-h)\end{aligned}\right\} \quad \text{[EC 08]}$$

Debido a que los valores h, k, f son constantes se puede desarrollar cada una de las ecuaciones de la siguiente manera:

$$(y-k)^2 = 4f(x-h) \qquad (x-h)^2 = 4f(y-k)$$
$$y^2 - 2yk + k^2 = 4fx - 4fh \qquad x^2 - 2hx + h^2 = 4fy - 4fk$$
$$y^2 - 2yk - 4fx + k^2 + 4fh = 0 \qquad x^2 - 2hx - 4fy + h^2 + 4fk = 0$$

Generalizando:

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0 \qquad Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

#### 2.1.3.2.4 Ecuación paramétrica de la parábola

Si $\theta$ es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x, y), entonces, se tiene que $\tan\theta = \dfrac{2p}{y}; y \neq 0$ donde $y^2 = 2p\cot\theta$. Sustituyendo en la ecuación dada de la parábola, se tiene que $x = p\cot^2\theta$

Por lo tanto, la parábola se puede expresar por medio de la ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= p\cot^2\theta \\ y &= 2p\cot\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{[EC 09]}$$

### 2.1.3.3 Cálculo

#### 2.1.3.3.1 Derivada

Sea *f* es una función definida en un intervalo abierto (a, b) al que pertenece el número real x. En la figura No 11 se ilustra la gráfica de *f* y varias rectas secantes $l_{P1Q1}$, $l_{P2Q2}$ y $l_{P3Q3}$ que pasan respectivamente por $P1(x_{11}, f(x_{11}))$ y $Q1(x_{12}, f(x_{12}))$, $P2(x_{21}, f(x_{21}))$ y $Q2(x_{22}, f(x_{22}))$, y por $P3(x_{31}, f(x_{31}))$ y $Q3(x_{32}, f(x_{32}))$

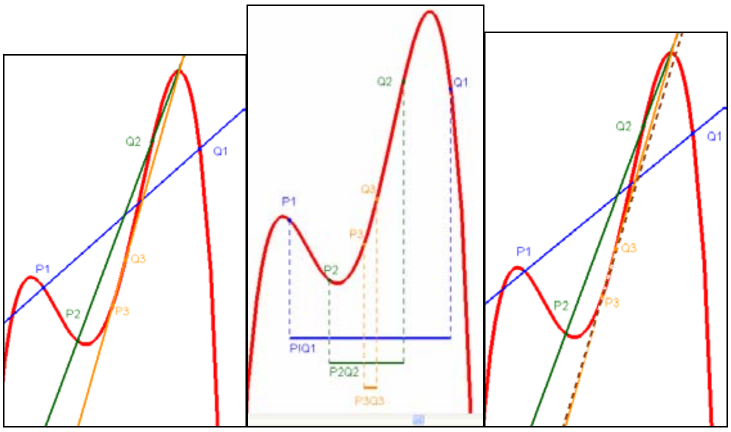



Figura No 11

La recta $l_{P1Q1}$ pasa por los puntos $P1(x_{11}, f(x_{11}))$ y $Q1(x_{12}, f(x_{12}))$ tiene pendiente

$$m_1 = \frac{f(x_{12}) - f(x_{11})}{x_{12} - x_{11}}, \quad \text{[EC 10]}$$

La recta $l_{P2Q2}$ pasa por los puntos $P2(x_{21}, f(x_{21}))$ y $Q2(x_{22}, f(x_{22}))$ tiene pendiente

$$m_1 = \frac{f(x_{22}) - f(x_{21})}{x_{22} - x_{21}}. \quad \text{[EC 11]}$$

La recta $l_{P3Q3}$ pasa por los puntos $P3(x_{31}, f(x_{31}))$ y $Q3(x_{32}, f(x_{32}))$ tiene pendiente

$$m_1 = \frac{f(x_{22}) - f(x_{21})}{x_{22} - x_{21}}. \qquad [EC\ 12]$$

Si la distancia PnQn con n = 1, 2 y 3 es igual a h, y esta distancia tiende a cero, la recta L (figura No. 11 - derecha) se determina por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad [EC\ 13]$$

*La* función que determina todas las posibles rectas tangentes a la función *f* se llama función derivada de *f* y se denota *f'.* Así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad [EC\ 14]$$

Siempre y cuando el límite exista.

**2.1.3.4.2 Antiderivada: Integral**

Por algunos métodos sencillos y/o algunos algoritmos es posible determinar la función derivada de una función dada; no obstante, surge la pregunta ¿Qué ocurre si en vez de tener la función *f* se conoce la función *f'*? ¿Es posible determinar *f* a partir de *f'?*

La función F es la antiderivada de una función *f* si y solo si F'=*f.* Con respecto a la definición de antiderivada y del ejemplo trabajado anteriormente, se puede llegar al siguiente resultado: Si F y G son funciones derivables tales que para todo x del intervalo [a, b] F'(x) = G'(x), entonces F(x) = G(x) + C, con C un número real.

Demostración:

Sea *g* = F – G; eso significa que para todo x que pertenece a [a, b], $g(x) = F(x) - G(x)$; por lo tanto $g'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$. Necesariamente, *g(x)* es igual a una constante, de no serlo existe z en [a, b] tal que $g'(z) \neq 0$ y por tanto $F'(x) \neq G'(x)$. Sea esta constante C.

Aquí se tiene que $g(x) = g(z)$ para todo x en [a, b], por lo que $g(z) = F(x) - G(x)$ y así:

$$\begin{aligned} G(x) + g(z) &= F(x) - G(x) + G(x) \\ G(x) + g(z) &= F(x) \qquad [15] \\ G(x) + C &= F(x) \end{aligned}$$

#### 2.1.3.4.3 Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparecen derivadas o diferenciales. En este trabajo se hace un estudio superficial de las ecuaciones ordinarias, es decir, aquellas que contienen solo derivadas de una función de una variable, específicamente ecuaciones diferenciales separables de orden 1. La intención de este estudio es introducir al alumno de último año de educación media en este tema, importante en ramas del conocimiento como la matemática abstracta, la física y la química.

##### 2.1.3.4.3.1 Ecuaciones Diferenciales Separables

La intención aquí no es trabajar de manera general este tipo de ecuaciones, sino identificar la noción de ecuación diferencial y empezar a resolver ecuaciones sencillas como:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad [EC\ 16]$$

Si $g(x)$ es una función continua es posible integrar con respecto a x en la ecuación anterior, eso es:

$$\int dy = \int g(x)dx = G(x) + k \qquad [EC\ 17]$$

Dónde *G(x)* es la integral indefinida de g(x) y k es una constante

La ecuación (1) y el método de solución es un caso especial cuando en la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad [EC\ 18]$$

Es posible encontrar un producto de dos funciones, una en x, otra en y, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)h(y) \quad [EC\ 19]$$

A las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)h(y)$ se les denomina ecuaciones diferenciales de variables separables.

Para encontrar la solución general de las ecuaciones diferenciales de variables separables se prosigue con el siguiente algoritmo:

Sea $p(y) = \frac{1}{h(y)}$.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$
$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$
$$p(y)dy = g(x)dx$$
$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$
$$P(y) + c_1 = G(x) + c_2$$
$$P(y) = G(x) + c_2 - c_1$$
$$P(y) = G(x) + k$$

[EC 20]

Donde *P(Y)* y *G(x)* son las antiderivadas de $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ y $g(x)$ respectivamente.

**2.1.3.4.4 Funciones en varias variables.**

La noción de función en varias variables se da de manera similar a la de función en una variable, no obstante, el tratamiento se traslada a otros espacios; por ejemplo, las funciones en dos variables se trabajan en el espacio $\mathbb{R}^3$, las funciones en n variables se trabajan en el espacio $\mathbb{R}^{(n+1)}$; eso es:

Si O es un conjunto de pares ordenados de números reales y n un número natural, entonces una función $f$ que asocia a $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ en O un único número real denotado por $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, es una función en varias variables. En particular, la función $f_1$ que asocia a $(x, y)$ en $\mathbb{R}$ un único número real denotado por $f_1(x, y)$ es una función de dos variables.

**2.1.3.4.4.1 Derivada parcial y diferencial de una función en varias variables**

La definición de derivada de una función *f* de una variable se estableció así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{[EC 21]}$$

En las funciones de varias variables, este razonamiento se puede aplicar de manera análoga. Sea $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ una función de n variables; se estudia el incremento de la función en una de sus variables, por ejemplo $a_1$, en una cantidad $\Delta a_1$ que tienda a cero. Luego de observar el incremento correspondiente a $f(a_1 + \Delta a_1, a_2, a_3, ..., a_n) - f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

se hace la división por h. Ese límite se denomina derivada parcial $f_{a_1}\left(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\right)$ con respecto a $a_1$. De manera general:

$$f_{a_k}\left(a_1,a_2,\ldots a_k,\ldots,a_n\right)=\lim_{\Delta a_k\to o}\frac{f\left(a_1,a_2,\ldots a_k+\Delta a_k,\ldots,a_n\right)-f\left(a_1,a_2,\ldots a_k,\ldots,a_n\right)}{\Delta a_k}\qquad [EC\ 22]$$

Para $k=1,2,\ldots,n$

La derivada parcial $f_{a_k}\left(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\right)$ con respecto a $a_k$ se nota $\frac{\partial f}{\partial a_k}$.

Si w = $f\left(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\right)$, se define la diferencial de w así:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial w}{\partial a_2}da_2+\cdots+\frac{\partial w}{\partial a_n}da_n\qquad [EC\ 23]$$

### 2.1.3.4.4.2 Funciones Vectoriales

Teniendo en cuenta la definición de función, se definen funciones vectoriales de la siguiente manera. Sea D un conjunto de números reales. Una función vectorial $t$ con dominio D es una correspondencia que asocia a cada número d en D un vector único *t(d)* en $\mathbb{R}^3$.

De acuerdo a la definición anterior, teniendo en cuenta que para cada d en D se determina uno único vector, las componentes de *t(d)* se determinan de manera única para *d* lo que implica que dichas componentes se determinan por funciones escalares *f, g, h* de la variable *d.* Eso es:

$$t(d)=f(d)\hat{i}+g(d)\hat{j}+h(d)\hat{k}\qquad [EC\ 24]$$

Ahora, si x, y, z son funciones con dominio D, la ecuación $t(d)=x(d)\hat{i}+y(d)\hat{j}+z(d)\hat{k}$ define una función $d$ con valores vectoriales.

### 2.1.3.4.4.3 Gradiente y derivada direccional

Las funciones de varias variables, específicamente las funciones de dos y tres variables se pueden relacionar con las funciones vectoriales por medio de dos definiciones importantes.

La primera de ellas es la definición de gradiente. Si *f* es una función de tres variables, el gradiente de *f* es la función vectorial:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \qquad \text{[EC 25]}$$

Por otro lado, si *f* es una función de tres variables y $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de *f* , $D_u f(x,y,z)$ está dada por:

$$D_u f\left(x,y,z\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+hu_1,y+hu_2,z+ha_3\right)-f\left(x,y,z\right)}{h} \qquad \text{[EC 26]}$$

Considerando ahora, que x, y, z son fijos, considerando a *g* como función de una variable h que se define por.

$$g(h)=f\left(x+hu_1,y+hu_2,z+ha_3\right) \qquad \text{[EC 27]}$$

Ahora:

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h-0}$$
$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)=f\left(x+hu_1,y+hu_2,z+ha_3\right)-f\left(x,y,z\right)}{h} \qquad \text{[EC 28]}$$
$$g'(0)=D_u f(x,y,z)$$

Considerando a *g* como una función compuesta tal que $g(s)=f(a,b,c)$ con $a=x+hu_1,b=y+hu_2,c=z+hu_3$, y aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$g'(h)=\frac{\partial w}{\partial a}\frac{da}{dh}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{db}{dh}+\frac{\partial w}{\partial c}\frac{dc}{dh}$$
$$g'(h)=\frac{\partial w}{\partial a}u_1+\frac{\partial w}{\partial b}u_2+\frac{\partial w}{\partial c}u_3 \qquad \text{[EC 29]}$$
$$g'(h)=f_a(a,b,c)u_1+f_b(a,b,c)u_2+f_c(a,b,c)u_3$$

Si h=0, entonces a=x, b=y, c=z, por lo que:

$$g'(0)=D_u f(x,y,z)=f_x(x,y,z)u_1+f_y(x,y,z)u_2+f_z(x,y,z)u_3$$
$$D_u f(x,y,z)=f_x(x,y,z)u_1+f_y(x,y,z)u_2+f_z(x,y,z)u_3$$
$$D_u f(x,y,z)=\left(f_x(x,y,z)\hat{i}+f_y(x,y,z)\hat{j}+f_z(x,y,z)\hat{k}\right)\cdot\vec{u} \qquad \text{[EC 30]}$$
$$D_u f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\vec{u}$$

De esta forma se puede escribir la derivada direccional en términos del gradiente.

#### 2.1.3.4.4.4 Curvatura de una curva

De las funciones vectoriales y las ecuaciones paramétricas se pueden encontrar algunas características de las curvas planas. En primer lugar se define la curvatura K de una curva C en un punto P de coordenadas (x, y). Esto es: si C es una curva plana con ecuación paramétrica x = *f(t)* y = *g(t)*, donde el parámetro *t* es la longitud de arco y siendo $\theta$ el ángulo entre los vectores $\hat{i}$ y el vector unitario tangente T(t), entonces la curvatura K de C en P es:

$$K = \left|\frac{d\theta}{dt}\right| \qquad \text{[EC 31]}$$

En particular, si C es una curva de una ecuación y = *g(t)* con *g'* es continua en algún intervalo y sea $\theta$ el ángulo entre los vectores $\hat{i}$ y el vector unitario tangente T(t). Como *y'* es la pendiente de la recta tangente en (x, y), por tanto:

$$\begin{matrix} y' = \tan\theta \\ \theta = a\tan y' \end{matrix}, \quad \text{[a][EC 32]}$$

La longitud de arco *s* se define por:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad \text{[b]} \qquad \text{[EC 33]}$$

Con a, abscisa de un punto fijo A que pertenece a la curva C. Si y'' existe, se tiene, por la regla de la cadena:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dx} \qquad \text{[EC 34]}$$

De lo que se obtiene:

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta/dx}{ds/dx}\right| \quad \text{[c]} \qquad \text{[EC 35]}$$

De [a] y [b] se tiene:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+(y')^2} \text{ y } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2} \qquad \text{[EC 36]}$$

Es decir, si una curva regular C es la gráfica de y = *f(x)*, entonces la curvatura K en P(x, y) es:

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} \quad \text{[EC 37]}$$

Si C está descrita en términos del parámetro *t*; es decir: x = *f(t)* y = *g(t)*. Donde *f'', g''* están definidas. Si se deriva respecto a t la ecuación [c] queda:

$$K = \left| \frac{d\theta/dt}{ds/dt} \right| \qquad [EC\ 38]$$

Es importante recordar que la pendiente de la recta se da por $\frac{g'(t)}{f'(t)}$ , es decir, $\tan\theta = \frac{g'(t)}{f'(t)};\ \theta = a\tan\frac{g'(t)}{f'(t)}; f'(t) \neq 0$ . De esta manera:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]^2} = \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2} = \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2} \quad [EC\ 39]$$

Y por la definición de diferencial de longitud de arco, $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}$

Por lo tanto:

$$K = \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{\left[[f'(t)]^2+[g'(t)]^2\right]^{3/2}} \qquad [EC\ 40]$$

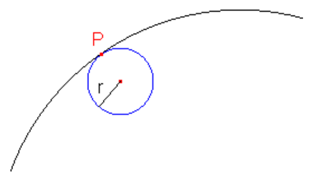



Figura No 12

Si la curvatura K de la curva C en un punto P no es cero, entonces, la circunferencia de radio $r = \frac{1}{K}$ se llama circunferencia de curvatura de P. A r se le denomina radio de curvatura.

## 2.2 MARCO TEÓRICO FÍSICA

### 2.2.1 Cinemática en una dimensión

Cinemática es la rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, aunque sin interesarse por las causas que originan dicho movimiento. Un estudio de las causas que lo originan es lo que se conoce como dinámica.

Las magnitudes que define la cinemática son principalmente tres, la posición, la velocidad y la aceleración.

Posición: Es el lugar en que se encuentra el cuerpo en un cierto instante de tiempo t, por lo que se convierte en una función en el tiempo. Generalmente se denota por $\vec{x}$ o $\overrightarrow{X}(t)$

Velocidad: Es la variación de la posición con el tiempo. Indica si un cuerpo está en movimiento, es decir, si varía su posición a medida que varía el tiempo.

La velocidad media de un cuerpo está dada por la variación existente entre la diferencia de la posición inicial y la posición final sobre la diferencia entre el tiempo inicial y el tiempo final.

$$v_m = \frac{x_f - x_o}{t_f - t_o} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{[EC 41]}$$

En la anterior igualdad, $x_o$ representa la posición inicial, de la misma forma, $t_o$ indica el tiempo inicial.

No obstante, aunque la velocidad media es una magnitud útil, es importante tener en cuenta que su cálculo deja mucha información sin precisar, por ejemplo, si se conoce la velocidad media de un cuerpo desde un instante $t_o$ a otro $t_1$ ha sido ``tantos'' metros por segundo, no es posible determinar si los ha hecho de forma constante, o si ha ido muy lento al principio y rápido al final, por lo que se hace necesario definir una magnitud que exprese la velocidad en un determinado momento, dicha velocidad es conocida como velocidad instantánea, la cual es calculada de manera similar a la velocidad media, pero en intervalos demasiado pequeños para encontrar la velocidad de cada instante. Es fácil darse cuenta de que esta definición se logra tomando a partir de la definición de velocidad instantánea:

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{[EC 42]}$$

Expresión que coincide con la definición de derivada de x respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{[EC 43]}$$

Aceleración: Indica cómo varía la velocidad respecto al tiempo, lo que significa que es una función en el tiempo; la aceleración es la variación de la velocidad en la unidad de tiempo. De manera similar que la velocidad media, la aceleración media entre dos instantes, inicial y final se define como

$$a_m = \frac{v_f - v_o}{t_f - t_o} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{[EC 44]}$$

Por lo que se puede encontrar la aceleración de un cuerpo en cualquier momento los instantes inicial y final muy cerca uno del otro, hasta tener así que la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad \text{[EC 45]}$$

Hecho que deja ver claramente que la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo.

### 2.2.2 Movimiento Rectilíneo

#### 2.2.2.1 Movimiento rectilíneo uniforme

Un movimiento rectilíneo uniforme es aquél en el que la velocidad es constante, por tanto, la aceleración es cero. La posición *x* del móvil en el instante *t* se puede calcular por medio del desarrollo de la ecuación diferencial

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = v \\ dx = vdt \\ \int dx = \int vdt \qquad \text{[EC 46]} \\ \int_{x_o}^{x_f} dx = \int_{t_o}^{t_f} vdt \\ x_f - x_o = v\left(t_f - t_o\right) \end{gathered}$$

Normalmente el instante inicial $t_o$ se toma como cero, por lo que las ecuaciones del movimiento uniforme resultan

$$\begin{gathered} a = 0 \\ V \text{ Constante} \qquad \text{[EC 47]} \\ x = x_o - vt \end{gathered}$$

#### 2.2.2.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

En un movimiento uniformemente acelerado la aceleración es constante. Dada la aceleración es posible obtener el cambio de velocidad $v_f - v_o$ entre dos momentos:

$$\frac{dv}{dt} = a$$
$$dv = adt$$
$$\int dv = \int adt$$
$$\int_{v_o}^{v_f} dx = \int_{t_o}^{t_f} adt$$
$$v_f - v_o = a(t_f - t_o) \qquad \text{[EC 48]}$$

Así, $v = v_o + at$ debido a que normalmente el instante $t_0$ se toma como cero, por lo que:

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dx}{dt} = v_o - at$$
$$dx = (v_o - at)dt$$
$$\int dx = \int (v_o - at)dt$$
$$\int_{x_o}^{x_f} dx = \int_0^{t_f} (v_o - at)dt$$
$$x_f - x_o = v_o t_f - \frac{at^2}{2}$$

[EC 49]

Al igual que el tiempo, normalmente se asume $x_o = 0$, por lo que $x = v_o t - \frac{at^2}{2}$

Habitualmente, el instante inicial $t_0$ se toma como cero, quedando las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, las siguientes.

$$a : Constante$$
$$v = v_o + at \qquad \text{[EC 50]}$$
$$x = v_o t + \frac{at^2}{2}$$

Despejando el tiempo $t$ en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, se relaciona la velocidad con la posición:

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \qquad \text{[EC 51]}$$

### 2.2.3 Cinemática en dos dimensiones

#### 2.2.3.1 El movimiento de un proyectil.

Una partícula de masa **m** es lanzada con una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ y un ángulo **α** sobre la horizontal.

**El vector de posición r(t) en cualquier momento**.

La ecuación de movimiento de la partícula es

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mg\hat{j} \qquad \text{[EC 52]}$$

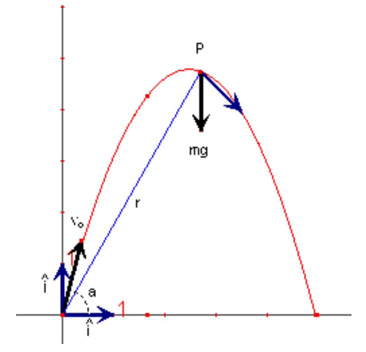


Figura No 13

donde

$$r = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Integrando [EC 52] con respecto al tiempo se obtiene:

$$v = \frac{dr}{dt} = -gt\hat{j} + c_1 \qquad \text{[EC 53]}$$

donde es la constante de integración. Teniendo como condiciones iniciales $v = v_0$ cuando $t = 0$ se tiene

$$c_1 = v_0 = v_0\cos\alpha\hat{i} + \text{sen}\,\alpha\hat{j}$$

Combinando lo anterior con [EC 53], se obtiene:

$$v = \frac{dr}{dt} = -gt\hat{j} + v_0\cos\alpha\hat{i} + \text{sen}\,\alpha\hat{j} = v_0\cos\alpha\hat{i} + (\text{sen}\,\alpha - gt)\hat{j} \qquad \text{[EC 54]}$$

Integrando [EC 54] con respecto a tiempo, se tiene:

$$r = v_0\cos\alpha\hat{i} + \left(v_0 t\,\text{sen}\,\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{j} \qquad \text{[EC 55]}$$

donde la constante de integración $c_2$ se ha igualado a cero. Teniendo como condiciones iniciales r=0 cuando t=0. Refiriéndose a los componentes del plano cartesiano, se tiene:

$$x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = v_0 t\,\text{sen}\,\alpha - \frac{gt^2}{2} \qquad \text{[EC 56]}$$

**El tiempo $t_h$ que demora en alcanzar la altura máxima.**

En el punto más alto de la trayectoria, el componente de la velocidad v en la dirección vertical es nula, luego, de [EC 54] se obtiene:

$$v_0\,\text{sen}\,\alpha - gt_h = 0$$

$$t_h = \frac{v_0\,\text{sen}\,\alpha}{g} \qquad \text{[EC 57]}$$

**La altura máxima.**

Eliminando t a partir de [EC 56] y [EC 57], se obtiene la altura máxima h que alcanza el proyectil:

$$h = y_{max} = \frac{v_0^2\,\text{sen}^2\alpha}{2g} \qquad \text{[EC 58]}$$

**El tiempo de vuelo**.

Al final del vuelo, y=0, por lo que y de [EC 56] se iguala a cero:

$$0 = v_0 t \text{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = v_0 \text{sen}\alpha - \frac{gt}{2}$$

$$t = \frac{2v_0 \text{sen}\alpha}{g}$$

[EC 59]

que es dos veces el tiempo que gasta en alcanzar el punto más alto encontrado en [EC 57]

**El rango.**

Eliminando t con [EC 59] y [EC 56] se tiene que el rango horizontal R es:

$$R = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g} \quad \text{[EC 60]}$$

Es fácil de ver que R puede lograrse a partir de dos ángulos, uno complemento del otro, por lo que se puede ver que el máximo valor que alcanza R es cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$

**La ecuación de trayectoria.**

Eliminando t entre las dos componentes de las ecuaciones [EC 56], se obtiene,

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \text{[EC 61]}$$

que es la ecuación de la trayectoria del proyectil, esta ecuación se puede reescribir así:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R^2}{4}\right)\left(\frac{1-y}{h}\right)$$

## 2.3 LAS PARÁBOLAS DE SEGURIDAD

### 2.3.1 Contextualización

Un proyectil es lanzado desde el origen con rapidez inicial $v_o$, formando un ángulo $\alpha$ con respecto a la horizontal, ¿cuáles son los puntos del plano que alcanza? La envolvente de todos los puntos que alcanza se denomina Parábola de Seguridad.

### 2.3.2 Una mirada desde el cálculo

Si nosotros queremos saber la región más lejana de espacio que el proyectil puede alcanzar, es necesario computar los límites de varias trayectorias. Ahora la ecuación [EC 61] es de un parámetro (el ángulo $\alpha$) y la familia de curvas pueden expresarse como $f(x, y, \alpha) = 0$

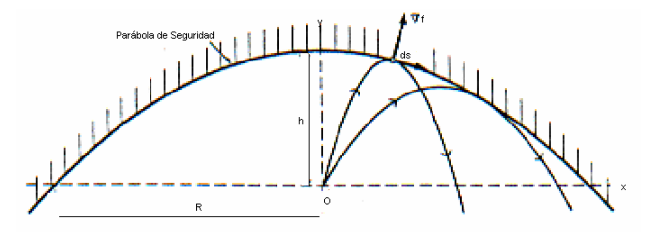


Figura No 14

De lo que se obtiene:

$$df = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy + \frac{\delta f}{\delta \alpha}d\alpha = 0 \quad \text{[EC 62]}$$

Lo que es equivalente con:

$$\nabla f \cdot ds + \frac{\delta f}{\delta \alpha}d\alpha = 0 \qquad \text{[EC 63]}$$

Donde $ds = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ es la tangente a la curva en el punto P(x, y), y $\nabla f = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)\hat{i} + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)\hat{j}$ es perpendicular a la curva en P(x, y) (ver figura 14), de lo cual $\nabla f \cdot ds = 0$, y de acuerdo con que $\frac{\delta f}{\delta \alpha} = 0$ es la condición con la cual la ecuación será computada. Ahora, la ecuación (10) puede volverse a escribir para obtener la forma explícita de f:

$$f = y - x\tan\alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \quad \text{[EC 64]}$$

Diferenciando esta función respecto $\alpha$, se tiene:

$$v_0^2 = gx\tan\alpha \qquad \text{[EC 65]}$$

Eliminando $\alpha$ de las ecuaciones [EC 61] y [EC 65] se tiene:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{v_0^2}\right) \qquad \text{[EC 66]}$$

que es la ecuación de la envolvente, una parábola. La región accesible en el plano xy se limita así por la parábola [EC 66] la cual se denomina parábola de seguridad. Alternativamente, se puede llegar a la [EC 66] de la siguiente manera:

Un punto P con las coordenadas (x, y) es accesible si ahí existe una trayectoria desde el origen y que pase por P. Las coordenadas de p deben satisfacer la ecuación [EC 61] por consiguiente para algún valor real $\alpha$. Si q=tan$\alpha$, y reescribiendo la ecuación [EC 61], se obtiene una ecuación cuadrática en términos de q:

$$q^2 - \frac{2v_0^2}{gx}q + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1 = 0 \qquad \text{[EC 67]}$$

Así el punto que P(x, y) puede ser encontrado mediante la proyección con un ángulo $\alpha$ con la condición que la ecuación [EC 67] tenga por lo menos una raíz real; el punto es inaccesible si [EC 67] tiene solamente raíces complejas. El lugar geométrico de los puntos P simplemente puede localizarse si se examina el caso de raíces iguales en la ecuación [EC 67]. Aplicando en [EC 67] la condición para que las raíces sean iguales en una ecuación cuadrática:

$$\frac{v_0^4}{g^2x^2} = \frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1 \qquad \text{[EC 68]}$$

que puede reestructurarse para dar la ecuación de la parábola de seguridad, [EC 68].

Un punto en la parábola puede alcanzarse por una sola trayectoria, pero los puntos dentro de la parábola pueden ser alcanzados por dos trayectorias que corresponden a dos ángulos diferentes de proyección, uno complemento del otro.

Ahora se calculará el tiempo $t_p$ cuando el proyectil se encuentra en la parábola de seguridad, para este fin, se sustituye la ecuación (5) en (13) y resuelve para t, lo cual tiene como resultado:

$$t_p = \frac{v_0}{g\mathrm{sen}\alpha} \qquad \text{[EC 69]}$$

Es posible notar que

$$t_p - t_h = \frac{v_0 \cos^2\alpha}{g\mathrm{sen}\alpha} \qquad \text{[EC 70]}$$

Si $0 \le \alpha \le \pi$ se obtiene que $t_p \ge t_h$, Así la trayectoria interseca la parábola de seguridad después de que ha alcanzado el punto más alto. Los resultados anteriores se observan en la figura 14

### 2.3.3 Una mirada desde la geometría

Un proyectil es lanzado desde el origen con rapidez inicial $v_o$, formando un ángulo $\alpha$ con respecto a la horizontal, ¿cuáles son los puntos del plano que alcanza?

En primer lugar, la ecuación paramétrica de la parábola que determina la trayectoria del disparo es:

$$\begin{aligned} x &= v_o t\cos\theta \\ y &= v_0 t\sin\theta - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \qquad \text{[EC 71]}$$

De dónde se obtiene

$$t = \frac{x}{v_o\cos\theta} \qquad \text{[EC 72]}$$

De lo cual, reemplazando se deduce

$$y = v_o\left(\frac{x}{v_o\cos\theta}\right)\sin\theta - \frac{g\left(\frac{x}{v_o\cos\theta}\right)^2}{2}$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o{}^2\cos^2\theta} \qquad \text{[EC 73]}$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o{}^2}\left(1+\tan^2\theta\right)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{gx^2}{2v_o{}^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + y + \frac{gx^2}{2v_o{}^2} &= 0 \\ gx^2\tan^2\theta - 2v_o{}^2x\tan\theta + 2v_o{}^2y + gx^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{[EC 74]}$$

El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para *y*=0.

$$R = \frac{v_o^2\sin(2\theta)}{g} \qquad \text{[EC 75]}$$

En el capítulo anterior se determinó que el valor máximo se obtiene para $\theta = \frac{\pi}{4}$; de igual manera, la altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con cuando la velocidad del movimiento es cero, eso es:

$$H = \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g} \qquad [EC\ 76]$$

Siendo el valor máximo cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La intención ahora es determinar la envolvente de todas las trayectorias descritas por los proyectiles cuyo ángulo de disparo está comprendido entre 0 y 180º Esta denominación hace referencia al hecho de que fuera dicha envolvente se esta está a salvo de los proyectiles disparados con velocidad $v_o$.

La conjetura inicial hace pensar que se trata de una parábola simétrica respecto del eje y de ecuación $y = ax^2 + b$ que pasa por los puntos $\left(x = \frac{v_o^2}{g}, y = 0\right)$, y $\left(x = 0, y = \frac{v_o^2}{2g}\right)$ tal como se ve en la figura.

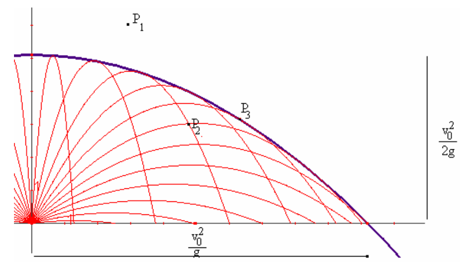


Figura No. 15

Considerando un punto $P(x, y)$ y sustituyendo las coordenadas (x, y) de P en la ecuación de la trayectoria, puede ocurrir:

Que la ecuación de segundo grado en $\tan\theta$ no tenga raíces reales, así P no sería un posible punto de impacto para el proyectil cuya velocidad inicial es $v_o$. En la figura el punto $P_1$ no es un posible punto de impacto.

Que la ecuación de segundo grado tenga dos raíces reales, lo que implicará que el punto P puede será impactado por dos lanzamientos, ya que hay dos ángulos de tiro $\theta_1$ y $\theta_2$ cuya trayectoria pasa por P. En la gráfica se observa que $P_2$ es un posible punto de impacto.

Cuando la raíz de la ecuación tiene una única raíz, en este caso solo hay una trayectoria que pasa por P; en la gráfica únicamente existe una trayectoria que pasa por $P_3$.

En la ecuación 74 se aseguró que:

$$\frac{gx^2}{2v_o^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + y + \frac{gx^2}{2v_o^2} = 0 \qquad [EC\ 77]$$

$$gx^2\tan^2\theta - 2v_o^2 x\tan\theta + 2v_o^2 y + gx^2 = 0$$

Y despejando $\tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{2v_o{}^2x \pm \sqrt{\left(2v_o{}^2x\right)^2 - 4\left(gx^2\right)\left(2v_o{}^2y + gx^2\right)}}{2\left(gx^2\right)}$$

$$\tan\theta = \frac{v_o{}^2 \pm \sqrt{v_o{}^4 - g\left(2v_o{}^2y + gx^2\right)}}{gx} \qquad \text{[EC 78]}$$

$$\tan\theta = \frac{v_o{}^2 \pm \sqrt{v_o{}^4 - 2gv_o{}^2y - g^2x^2}}{gx}$$

Lo que significa que existen dos ángulos de disparo para alcanzar un punto de coordenadas (x, y). Si la cantidad dentro del radical es negativa el punto en mención no es alcanzable. La frontera de la región alcanzable y la no alcanzable la constituyen los puntos para los cuales la cantidad dentro del radical de la ecuación es cero, es decir los puntos para los cuales:

$$v_o{}^4 - 2gv_o{}^2y - g^2x^2 = 0$$

$$y = \frac{g^2x^2 - v_o{}^4}{-2gv_o{}^2}$$

$$y = \frac{v_o{}^4 - g^2x^2}{2gv_o{}^2} \qquad \text{[EC 79]}$$

$$y = \frac{v_o{}^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_o{}^2}$$

La cual es la ecuación de una parábola simétrica al eje y, conocida como parábola de seguridad. Los puntos de esta parábola están determinados por $\tan\theta = \frac{v_o{}^2}{gx}$ [EC 80]

## 2.4 ANÁLISIS DIDÁCTICO
### 2.4.1 ANÁLISIS DE APRENDIZAJE

Antes de entrar a analizar las ideas y las herramientas con las que se pretende que los estudiantes adquieran el aprendizaje de la propuesta planteada es importante tener en cuenta algunos antecedentes que caracterizan los procesos educativos en el aula de clase. Una idea general considera al aprendizaje como un cambio de conducta fomentado por el docente, aspecto que se refleja desde la perspectiva conductista de la labor educativa. Sin embargo, el aprendizaje humano va más allá de un simple cambio de conducta en el que el sujeto adquiere experiencia, más allá de la transformación en el desarrollo del pensamiento

En este sentido una "teoría del aprendizaje" ofrece una explicación sistemática, coherente y unitaria en relación al ¿cómo se aprende?, ¿Cuáles son los límites del aprendizaje?, ¿Porqué se olvida lo aprendido?, preguntas que se complementan por medio de los "principios del aprendizaje" (Novac, 1991), que se ocupan de estudiar los factores que contribuyen al aprendizaje, en los que se fundamenta la labor educativa; si el docente desempeña su labor basado en principios de aprendizaje bien establecidos, podrá elegir técnicas de enseñanza y mejorar la efectividad de su labor para lograr la motivación interna del estudiante.

Las motivaciones no solo son internas en el sujeto cognoscente, pueden ser externos o adaptativos (Llinares, 2000), las motivaciones adaptativas se basan en explotar los temores y ambiciones del estudiante apelando a premios y castigos, similar a cuando se aplica el conductismo; aunque la idea es que el joven se eduque a partir de los factores de motivación interna por encima de los adaptativos.

La entrada de las matemáticas al discurso de aprendizaje se hace de dos maneras; la primera es una visión de las matemáticas como materia integrante del currículo, que necesariamente esta en relación con otras disciplinas. La otra es la motivación interna que lleva el ser humano por solucionar los problemas de conteo y agrupación propios de su naturaleza. Estas dos visiones implican la coordinación de tareas entre todo el conjunto de profesores que lleven el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes. Sin embargo, en las últimas décadas, al analizar el avance de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en la escuela, se observa de manera preocupante que la mayoría de estudiantes no aprenden la matemática que se esperaría. Dicha situación está justificada a partir de la concepción de que los estudiantes tienen conocimientos básicos muy pobres, es decir, sus nociones elementales no son lo suficientemente claras para poder avanzar en procesos de aprendizaje en etapas posteriores, hecho que se agrava culturalmente cuando la sociedad califica a las matemáticas como algo muy difícil válido para personas muy inteligentes.

A lo largo la historia, la educación matemática, en especial el proceso de enseñanza se ha relacionado directamente con la resolución de situaciones problema, hecho que supone que al ser estos últimos usados de manera natural por los seres humanos a través del recorrido por el tiempo, llegan a ser la más importante de las herramientas y recursos para el desarrollo del pensamiento del estudiante. Sin embargo, el uso de situaciones problemas por métodos conductistas, no ha generado cambio en la formación de los alumnos, ya que en general se usan de forma mecánica y rígida, volviendo a la etapa de repetición y memorización de algoritmos que se enseñan y aplican en la solución de la respectiva situación, lo cual trae como consecuencia un manejo estático y restringido al ámbito propio del problema.

La causa primordial de ese fracaso es el rechazo de las matemáticas en la sociedad, problema amplio y complejo que se destila en el núcleo familiar del estudiante que se forma bajo una presión de aprobar – no necesariamente aprender – matemáticas, combinada con frases como: " La matemática es muy difícil de aprender", "sólo los más capaces están en condiciones de dominarla", "la matemática es una ciencia exacta, por tanto es rígida y hay que tener mucha dedicación e inteligencia para calcular", expresiones que fomentan el rechazo y que están enraizadas en la cultura misma, por lo que no se espera una aceptación masiva de las matemáticas por parte de los estudiantes (Corvalán, 2004).

El común de las personas tiene en sus creencias a las matemáticas como un conjunto de conocimientos que son fijos y acabados que tienen como objetivo manipular números y alguna deducción geométrica; se percibe a la matemática como una disciplina fría, alejada de la realidad en la que no es válido pensar de manera distinta y mucho menos tener un poco de creatividad. Ese pensamiento un poco global de las matemáticas se debe en parte al desempeño del docente dentro del aula de clase.

La metodología que emplea el profesor en el aula de clase normalmente se guía por el mecanicismo, es decir, el estudiante aprende una serie procedimientos que se consolidan a partir del esfuerzo y sacrificio que hace. Por ejemplo si se considera el curso de cálculo que se dicta en el último año de educación secundaria, en específico el tema de derivadas, el profesor debe mostrar una serie de algoritmos con el cual encontrar la derivada de un grupo de funciones, dichos procedimientos matemáticos, al parecer no tienen una razón de ser y simplemente el estudiante tiene que repetir lo que se hace en el aula de clase. "*El estudiante se queda sin saber qué es la derivada, cuales son algunas de las aplicaciones que tienen, en general no entiende los procedimientos a seguir, no sabe para qué sirve; únicamente le preocupa saber con qué ejercicios lo van a evaluar, lo van a calificar"* (Santos Trigo, 2000).

Moreira (2000) Asegura que el estudiante que llega a los últimos años de educación básica y primeros de universidad tiende a elegir una carrera a partir del análisis de la cantidad de matemáticas que tendrá que estudiar, factor determinante porque en la mayoría de los casos aprende a odiar las matemáticas sin haberlas conocido, sin conocer las aplicaciones con las que se puede trabajar y su utilidad en la vida diaria y el mundo en el que vive, además, el mismo sujeto desconoce sus capacidades y tiene una autoestima muy devaluada en relación a su capacidad. Lleva alrededor de once años en un mundo en el que aprender matemáticas es sinónimo de sacar la mínima calificación para aprobar; y los años que pasa entre primaria y secundaria son vacíos respecto a los procesos esperados para el aprendizaje de las matemáticas, haciendo que en los últimos años de educación básica y primeros semestres de universidad, las instituciones se vean en la necesidad de repasar las matemáticas escolares desde sus conceptos mas elementales.

Así, la situación actual de la escuela ilustra que las tendencias generales para la enseñanza de la matemática se enmarcan en dos grupos (Posada, 2002):

*"El primero de ellos es el desarrollado por medio de la enseñanza estática, se elige una*

*dirección en la matemática y se conduce al alumno por esa vía, no busca que el estudiante desarrolle el pensamiento en la actividad matemática, no pretende generar la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y aleja a esta ciencia de las necesidades sociales, sólo como ente abstracto y desprovista de todo vínculo con la sociedad".*

El segundo, con enseñanza activa y dinámica sin perder la formalidad necesaria. En este grupo, las matemáticas están definidas como un sistema de conocimientos bien estructurados, poseedoras de un lenguaje propio que se ha desarrollado a través del tiempo y que intenta caracterizar hechos y reglas de razonamiento humano con precisión, de tal manera que se distinga del lenguaje natural. De acuerdo con Vigotsky, el carácter instrumental del lenguaje natural en la formación de las estructuras cognoscitivas del sujeto, es necesario tratar al estudiante y su educación como producto de la cultura, acción que debe imitarse de manera similar por las matemáticas, estas deben ser un producto social en constante evolución que contribuyan al desarrollo cultural, haciendo de la educación matemática y en general de la educación una actividad social en el que se crean entornos alrededor del sujeto que pueden ayudar o pueden perjudicar su aprendizaje. Los entornos descritos por Vigotsky tales como las zonas de desarrollo próximas, no se limitan únicamente a la labor de la escuela en la formación educativa del estudiante, si no que se extienden a entornos como la misma sociedad con sus estereotipos, los medios de información, el entorno familiar, haciendo importante relacionar a las matemáticas con la realidad. La manera más adecuada de acercar a las matematicas con la cotidianeidad del estudiante es por medio de las derivaciones de esta ciencia, tales como la estadística y la geometría fractal y en especial la física. Ésta última saca provecho del cálculo, debilidad de los estudiantes en edad escolar, estructurando conocimientos que difícilmente se sistematizan si no se aplica a las situaciones propias de los jóvenes de acuerdo a la naturaleza abstracta de esa rama de las matemáticas.

Ernest (1997) por su parte plantea algunos puntos de vista para la presentación del contenido matemático. En primer lugar se encuentra el método de resolución de problemas que visualiza a las matemáticas como un conocimiento dinámico que está en expansión y que se ajusta a nuevas situaciones. Luego, se encuentra la visión platónica en la que las matemáticas se descubren pero no se crean, seguido de la visión instrumental en el que las matemáticas son parcialmente útiles gracias a sus reglas que no están lo suficientemente conectadas. Finalmente, la matemática como una práctica social y el producto de dicha práctica.

De la segunda y tercera visión se ha considerado un proceso de aprendizaje de las matemáticas que ya se ha mencionado anteriormente: El mecanicismo (Ausubel, 1963). El aprendizaje mecánico, se produce sin interactuar con conocimientos previos. Un ejemplo de ello es el aprendizaje memorístico del concepto de derivada de la función $f(x) = x^n$ , la cual el estudiante identifica rápidamente como $f'(x) = nx^{n-1}$: la información que es nueva para el estudiante es incorporada a su estructura cognitiva de manera literal y no se asocia con percepciones anteriores, ni se analiza lo que ese conocimiento trae implícito. El aprendizaje no se convierte en una actividad significativa.

Es importante tener en cuenta que el aprendizaje mecánico no se da en un vacío cognitivo total, existen asociaciones pero estas agrupaciones de saberes no se dan en pro de las utilidades que se puedan dar más adelante. También es menester reconocer que este tipo de aprendizaje no es negativo, este tipo de aprendizaje es vital para los estudiantes en los momentos en los que es introducido a conocimientos nuevos, en los que no existen conceptos relevantes con los cuales pueda interactuar. En este caso, si se llegan a presentar irregularidades durante el aprendizaje de las matemáticas en edad escolar, estas difícilmente podrán ser removidas o subsanadas más adelante; más bien servirán de base para nuevas insuficiencias.

Pero se ha mencionado la importancia de que el aprendizaje en matemáticas sea significativo, por lo que se hace menester introducir a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, específicamente para tener una contra posición al aprendizaje mecánico. En la teoría de Ausubel, el alumno relaciona de forma esencial y no arbitraria lo que trata de aprender con lo que ya conoce.

Ausubel (Ausubel, Novak y Hanesian; 1983) sugiere que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa con la cual se relaciona la nueva información, el psicólogo se refiere a estructura cognitiva al conjunto de ideas y conceptos y su organización que una persona posee en un área del conocimiento específica. En el proceso de orientación del aprendizaje, es muy importante que el docente conozca la estructura cognitiva del alumno; no para identificar la cantidad de información que posee, sino para asemejar los conceptos y proposiciones que maneja y su grado de estabilidad. Los principios de aprendizaje que Ausubel propone garantizan el diseño de algunas herramientas metacognitivas que dan a conocer la estructura del pensamiento del educando, permitiendo al docente una mejor orientación dentro del aula de clase, eliminándose la concepción que el trabajo educativo se lleva a cabo con "mentes en blanco" o que el cada curso o nivel el aprendizaje de los estudiantes comienza de cero. Ausubel da la esperanza que las experiencias y conocimientos previos de los jóvenes intervienen en su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

Este último hecho es resumido por el mismo autor en el final de su obra cuando afirma que "s*i tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente*" (Ausubel, Novak y Hanesian; 1983). En otras palabras, para que el proceso educativo de los estudiantes tenga éxito es importante tener en cuenta lo que él ya sabe, generando una relación con lo que ya sabe y lo que va a aprender. Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos ideas, proposiciones, entre otros, estables y definidos, con los cuales la nueva información puede interactuar. A partir de ese momento, el aprendizaje significativo inicia, la información nueva se conecta con un concepto o una noción existente en la estructura cognitiva del estudiante y será claro si en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de enlace con las primeras.

Es importante que los docentes desarrollen en las matemáticas un proceso de enculturación y hagan de las matemáticas escolares una actividad con sentido, de tal manera que el estudiante adquiera una cultura matemática, para que los valores de ésta rama del conocimiento se reflejen en la cotidianeidad, en especial en la resolución de problemas. Las situaciones problemas trabajadas de manera adecuada en el aula de clase pueden influir en los procesos de aprendizaje del estudiante y por tanto modificar aspectos de sus conocimientos, sus sentimientos y su vida diaria. Para que los profesores puedan enculturar las matemáticas es importante identificar algunas de las causas del bajo rendimiento en matemáticas.

Esta propuesta se fundamenta en una enseñanza de temas de matemáticas para grado once a partir de la solución de una situación problema central en el que exista una participación activa del alumno y se encuentran vínculos con el uso de tecnología y de nociones básicas de la física. Aquí, los fundamentos de la educación matemática en Colombia tales como los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos (MEN, 2003), y propuestas en educación matemáticas como el NCTM, ubican como aspectos fundamentales en la resolución de problemas, la necesidad de comunicarse matemáticamente y la búsqueda de las conexiones de las matemáticas con otras disciplinas.

Si se hace la mirada desde la corriente mecanicista, la resolución de problemas es un medio ideal para reforzar la asimilación de las reglas y procedimientos que se han memorizado; no obstante, estos problemas planteados pueden ser tratados como simples ejercicios, organizándose en una secuencia y además tienen la particularidad de ser descontextualizados de la realidad del alumno, careciendo de utilidad práctica para el estudiante que al final se convierten en factor de desmotivación porque el aprendizaje no es significativo. Relacionada con el mecanicismo, la propuesta de las parábolas de seguridad propone utilizar una situación problema con el fin de desarrollar la habilidad en el estudiante en la búsqueda de vías de solución, que en el caso específico se lleva a cabo por un único camino, pero que es posible ser trabajado mediante distintas alternativas, mostrando al alumno que los problemas tienen el carácter instrumental para desarrollar la creatividad y la inteligencia.

En el campo de las matemáticas, la problemática en el aprendizaje, además de la situación cultural, se centra en el sistema educativo, en este sentido es importante reconocer que el aprendizaje de las matemáticas no es más importante que el aprendizaje de otras ciencias, pero socialmente se ha reconocido que ésta área del conocimiento es la base del pensamiento humano, además de ser sustento para otros estudios; un aprendizaje mal orientado en matemáticas influye en la calidad del profesional, cualquiera sea su área de conocimiento. Lo anterior se desarrolla dentro de un marco psicoeducativo. La psicología educativa trata de explicar la naturaleza del aprendizaje en el salón de clases y los factores que influyen. Los fundamentos psicológicos proporcionan los principios para que los docentes descubran métodos de enseñanza eficaces (Ausubel, Novak y Hanesian; 1983).

Actualmente la relación aula - vida cotidiana es un elemento que se presta para la enseñanza de las matemáticas escolares. Es indispensable fomentar a los estudiantes el valor que adquieren los conocimientos de las matemáticas en la solución de problemas; la interdisciplinariedad de saberes entre matemáticas y otras áreas de conocimiento permite edificar una sociedad capaz de enfrentar y solucionar retos y dificultades que el desarrollo científico y tecnológico les marque. Actualmente, los estudiantes preguntan ¿Para qué sirven las matemáticas? ¿Para qué se hace esta actividad en clase? (Santos Trigo, 2000) Y una buena respuesta es la aplicación de los conceptos matemáticos en su propio contexto en el mundo en el que vive, en los fenómenos con los que se enfrenta a diario.

Con el fin de llevar a las matemáticas hacia una mejor comprensión y aplicabilidad, la escuela y en especial los educadores matemáticos, deben enfocar su trayectoria por medio de la resolución de problemas sacando provecho de las aplicaciones existentes entre la matemática y la realidad, fomentando el desarrollo del pensamiento matemático de forma dinámica, activa e interrelacionada. Se tiene en el centro de la atención el problema, pero la situación se trabaja desde los diferentes caminos con los que se puede solucionar, dejando entrever que la situación inicial no es el único aspecto a desarrollar, es aquí donde el docente debe tener conciencia que los problemas en matemáticas actúan como medio y como objeto, para poder establecer a la resolución del problema simultáneamente en un método y un objetivo de la enseñanza.

Al parecer, no existe un estímulo a la motivación en el estudiante por parte del profesor, los elementos básicos de matemáticas son percibidos como obstáculos en vez de considerar dichas materias como herramientas para construir las bases del sistema de conocimientos para desempeñarse en vida diaria (NCTM, 1989, Santos Trigo, 2000). El profesor no menciona las bondades del razonamiento lógico para resolver situaciones problema, no interioriza al estudiante en las relaciones con otras disciplinas; por ejemplo la noción de derivada es empleada en conceptos de física: la aceleración es la razón de cambio entre la velocidad y el tiempo, la velocidad es la razón de cambio entre la posición y el tiempo. Algunos docentes en las clases de matemáticas y física ofrecen algunas fórmulas para encontrar la velocidad y la aceleración. Esa omisión de contenido, que aparentemente facilita el trabajo al estudiante – es mejor dar la fórmula y no complicar al joven con el desarrollo de una ecuación diferencial – le quita la oportunidad de involucrarse de manera directa con uno de los lazos más fuertes entre la matemática y la física, el estudiante no percibe esa inmejorable fuente de motivación. Por el contrario la constitución del sistema educativo (MEN, 2003), y por ende el trabajo del docente, dan la impresión de la existencia de materias filtro, entre ellas, las matemáticas, por lo que los estudiantes se ven en la tentación de rechazar las matemáticas puesto que el entorno mismo los considera como una carga, pero una carga que hay que aprobar.

Es importante tener en cuenta que tanto el aprendizaje mecánico como el aprendizaje significativo no son mutuamente excluyentes, es más, la propuesta trabaja en pro de los dos, valorando la importancia del aprendizaje significativo y teniendo en cuenta la situación cultural en la que prima el aprendizaje mecánico. Desplazarse entre significativo y mecánico depende directamente de los conocimientos previos de los estudiantes y de la forma con la que el profesor lleva a cabo el trabajo dentro del salón de clase. Así, el aprendizaje mecánico es acumulativo: Plano Cartesiano, Recta, Vectores, Cónicas, Derivada, Antiderivada, Cinemática, Lanzamiento de proyectiles, Parábolas de Seguridad. Con el aprendizaje significativo se logran realizar análisis de esos conocimientos: ¿Qué pasa si tengo varios sistemas de coordenadas?, ¿En qué situaciones es mejor trabajar y trasladar a distintos sistemas de coordenadas?, ¿Cómo identifico rectas paralelas y perpendiculares a una dada? ¿Cómo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta y un punto dado? ¿Cómo es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a dos puntos fijos siempre es constante? ¿Qué relación hay entre la posición, la velocidad y la aceleración de un cuerpo en movimiento? ¿Qué ocurre cuando lanzo un objeto desde un determinado punto siempre con la misma velocidad y varío el ángulo de lanzamiento? ¿Hasta dónde puede llegar? ¿A qué lugares nunca va a llegar?

En matemáticas, donde la dependencia de conocimientos previos como el grado de interrelación y concatenación entre los diversos conceptos son altos, al igual que las opciones para realizar diferentes análisis, una mezcla entre aprendizaje mecánico y aprendizaje significativo puede traer buenos resultados

## 2.4.2 ANÁLISIS DE ENSEÑANZA

No cabe duda que la importancia de las matemáticas en el aula de clase porque éstas se constituyen en una valiosa herramienta para el desarrollo del pensamiento, y además, en el caso de los estudiantes de último año, el aprendizaje de ésta área puede implicar el buen desarrollo de una carrera que involucre conocimiento matemático.

Vaquero y Fernández (1987) aseguran que el proceso de enseñanza es mucho más profundo que el hecho de brindar herramientas que permitan aprender al estudiante. De acuerdo con esa idea, la enseñanza debe crear estímulos que promuevan el aprendizaje.

El problema central de la propuesta, es un conjunto de preguntas que tienen más razón de ser en la clase de física que en la de matemáticas; son la excusa central para sacar a los estudiantes del carácter abstracto y alejado de la realidad con el que pueden llegar a vivir la clase de matemáticas. La propuesta es la siguiente: Desde un punto en una región plana se lanzan proyectiles similares con la misma velocidad inicial, pero con ángulos que varían entre 0 y 180 grados respecto a la horizontal. ¿Cuáles son los puntos del espacio por los que el proyectil pasa?, ¿A qué puntos no llega? ¿Se puede caracterizar la región del espacio por la que dichos proyectiles pueden pasar?

El desarrollo de dichas preguntas se puede iniciar a partir de la revisión de temas básicos como la noción de plano cartesiano, la noción de recta, el concepto de vector en el plano y la definición de parábola. La presente propuesta está diseñada para estudiantes de undécimo grado, que se suponen ya manejan estos conceptos, aún más, se ha planteado que ya tengan la noción de derivada y puedan encontrar la derivada de funciones polinómicas. Por otro lado, se considera que el estudiante ya maneja los temas de cinemática, en especial la cinemática lineal, conoce algunas expresiones matemáticas para encontrar la velocidad y la aceleración de un cuerpo en movimiento, a partir de conociendo el tiempo y/o la ecuación de posición.

Puesto que la unidad didáctica es una propuesta abierta que se desarrolla en Colombia, el punto de vista principal para tener en cuenta para su tratamiento es aquel que se propone a nivel oficial para la enseñanza de las matemáticas en los diferentes ciclos de educación básica. El Ministerio de Educación Nacional, tanto en los lineamientos como en los estándares propone el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos (MEN, 1998) y ofrece las pautas para que en undécimo grado el estudiante pueda resolver problemas por medio del uso de gráficas de las cónicas, interpretar la noción de derivada e identificar relaciones entre las gráficas de funciones (MEN, 2003).

En la visión dinámica, las matemáticas se adaptan a las situaciones de los seres humanos y en especial del mundo en que viven, y es por ello que uno de los principales problemas de su enseñanza – quizá de su aprendizaje – es encontrar situaciones con las que el estudiante pueda interactuar, que se pueda relacionar, puede visualizar y hagan parte de su entorno, de tal manera que apropien las temáticas que se abordan.

En los últimos años de educación básica y media, el dejar de ver números y empezar a trabajar con las nociones características del estudio del cálculo hace de los procesos de enseñanza y aprendizaje no sean los esperados; es aquí donde se percibe de manera directa el encierro de los temas (Gascón, 1998) causado por la separación del carácter matemático del carácter pedagógico por parte del docente. El profesor debe ofrecer las herramientas didácticas adecuadas para finalizar de manera adecuada los procesos de desarrollo de pensamiento que, desde la teoría (MEN, 1998, 2003).

Tres temas grandes de la educación media son estudiados durante la solución de la situación de esta propuesta: Cónicas, Derivadas y Cinemática. El estudio del cono, se propone en el grado noveno (MEN, 2003), siendo los primeros conceptos los referidos a la construcción y la realización de cálculos sobre el área lateral, área total y el volumen de los mismos, con los que se abordan dos tipos de pensamiento: *Espacial* y sistema geométrico y el *Métrico* y los sistemas de medidas (MEN, 1998); luego su estudio se retoma en undécimo grado (MEN, 2003) para hacer un estudio de los diferentes cortes: las cónicas – parábola, elipse, hipérbola –se llevan a un plano en el que se adecua un sistema de coordenadas rectangulares.

El Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) declara en sus estándares que formular problemas a partir de de situaciones cotidianas y matemáticas para lograr experiencias en el reconocimiento de las alternativas de desarrollo es el centro de la actividad matemática. En Cuba, el Ministerio de Educación propone formular y resolver problemas que se relacionen con el desarrollo pluricultural de la nación y del ser humano (MINED, 1999), es así como la actividad que se propone para que el estudiante reconozca e identifique las parábolas de seguridad se ajustan a los nuevos pensamientos de orden global en relación a la enseñanza de las matemáticas. No obstante, un problema con mayor carácter matemático es el camino a seguir desde la geometría analítica hasta las ecuaciones diferenciales.

La riqueza y la manera de abordar el tema de las ecuaciones que se estudian en geometría analítica son la clave para llegar a la noción de derivada, con la cual se introducen las parábolas de seguridad. De la geometría analítica se han considerado las secciones cónicas, en especial las parábolas; estos objetos matemáticos se pueden trabajar de dos maneras: desde la ecuación canónica y desde la ecuación paramétrica. La doble opción de trabajo y la relación directa con la física, en donde se pueden estudiar las nociones de aceleración y velocidad respecto al tiempo, permite que el estudiante se acerque – de manera intuitiva – a la definición y a la noción elemental de las ecuaciones diferenciales.

El estudio de la derivada se hace en undécimo grado (MEN, 2003), luego de estudiar la noción de límite. Se llega al concepto de derivada mediante la solución de la situación "encontrar una recta tangente a una curva continua en cualquier punto" y se ve que la pendiente de dicha recta se encuentra mediante un límite en relación a la distancia horizontal que existe entre dos de los puntos de intersección de la recta y la curva. Mediante este procedimiento se pretende desarrollar en el estudiante el pensamiento variacional, aunque también se puede llegar a tener un un manejo geométrico y algebraico de la situación (MEN, 1998).

El estudio de la cinemática se hace en los cursos de física, previa introducción del concepto de vector, que a veces se toca de manera simultánea en matemáticas y física. Aquí existe un problema conceptual amplio entre lo que los físicos estudian y lo que se enseña – aprende en la escuela. En la escuela, al estudiante se le ofrecen una serie de fórmulas con las que puede desarrollar algunas de las situaciones planteadas, de manera similar, en la universidad, el estudiante tiene a su alcance un conjunto de ecuaciones diferenciales con las que puede trabajar de manera análoga las situaciones planteadas en la escuela (Posada, 2002).

Ya se ha hecho una descripción general de la manera como se aborda el tema y la secuencia general de dichas nociones y conceptos matemáticos. Sin embargo este trabajo tiene una característica que puede atraer la atención de los estudiantes: el uso de modelos en computador para introducir cada concepto, cada noción. En la mayoría de etapas en las que se trabaja, el estudiante tiene acceso a archivos diseñados en Cabri y a applets de Descartes. El uso de herramientas computacionales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, es un agente motivador para que los estudiantes se acerquen a esta ciencia.

Creencias actuales en la enseñanza de la matemática (Vaquero y Fernández, 1987; Santos Trigo 2000; Acosta, 2005), afirman que durante la educación básica es menester evitar la abstracción precipitada, es importante propiciar referencias a lo concreto para luego interactuar con otras ramas del conocimiento o con materiales que sean atractivos para el estudiante y luego si formalizar. El trabajo previo a las parábolas se hace mediante un acercamiento a la física, con características de movimientos relativamente simples que el estudiante puede ver, los cuales se han llevado mediante modelaciones a programas de geometría dinámica – Cabri Geometre – y de matemáticas en general – Descartes –. Esos materiales se han incorporado para experimentar los fenómenos que ocurren con los objetos matemáticos y físicos.

#### 2.4.2.1 Papel del maestro

En toda actividad escolar el papel del docente es importante, en especial cuando se tiene en medio una situación problema, ya que la intervención del profesor puede servir de puente entre las dificultades de aprendizaje del estudiante, encaminando el proceso hacia la zona de desarrollo próximo del alumno y no de exigirle por encima de sus posibilidades reales.

En párrafos anteriores se ha mencionado de manera indirecta el papel que el maestro puede jugar en el desarrollo de la propuesta, sujeto activo durante la ejecución y la puesta en práctica de la metodología a seguir en la propuesta didáctica, sin que de alguna manera se minimice el papel del sujeto activo, del estudiante. El docente debe tener en cuenta que se está trabajando a partir de una situación problema. Algunas teorías de la educación como la propuesta del Nacional Council of Teachers of Mathematics, y la del Ministerio de Educación cubano mencionan que la enseñanza con problemas se encuentra en etapas iniciales (NCTM, 1989; MINED, 1999) no se ha desarrollado un cuerpo de conceptos que definan su desarrollo y su ejecución.

El maestro debe tener en cuenta que el hecho de enseñar matemáticas en la escuela responde a un conjunto de pensamientos individuales y sociales, que parten desde la necesidad de contar, de medir de ordenar; hasta la necesidad de caracterizar los fenómenos físicos que rodean al ser humano; es por ello que la presencia de las matemáticas en las escuelas es una consecuencia de su presencia en la sociedad y, por tanto, las necesidades matemáticas que surgen en la escuela deben estar subordinadas total o parcialmente a las necesidades de la vida en sociedad (NCTM, 1989; MINED, 1999; MEN, 2003). Pero a veces dicha subordinación se invierte, es decir, las necesidades del saber matemático derivan de la escuela, reduciendo el valor social de las matemáticas al valor escolar, perdiendo y desenfocando todo interés que pueda producir enseñar dicha área del conocimiento convirtiéndolas en un posible obstáculo para salir del sistema educativo, haciendo que el estudio del alumno sea más tradicional que siempre y tomando tres perspectivas distintas (Llinares, 2000). En primer lugar se visualiza al trabajo de los estudiantes como medio auxiliar de enseñanza, en el que el proceso de aprendizaje de las matemáticas se aleja de la propuesta didáctica con la que se enseña. Otra posición ignora la estructura y la función del trabajo matemático del estudiante, donde el proceso de aprendizaje es una actividad propia del mismo y no se puede tomar como un verdadero proceso de desarrollo de pensamiento de las matemáticas; aquí el papel del docente es importante porque puede no dar importancia a la adquisición de habilidades en matemáticas. La última versión, muestra que el estudiante se desempeña con la falta de claridad; aquí el docente ignora la estructura específica del proceso de aprendizaje y no busca que sea relacionado con otras áreas del conocimiento.

Dichas perspectivas del estudio tradicional del estudiante traen una consecuencia: las actividades del docente y del alumno en el área de matemáticas son obra exclusiva para el aula de clase. Las matemáticas son un saber que únicamente existe dentro de la escuela y no existen maneras de que este conocimiento cruce fronteras; el estudiante tiene a su disposición el trabajo en clase, los pocos apuntes que toma y los materiales que ocasionalmente el docente pone a su disposición (Majmutov, 1983).

También es importante el carácter paradigmático de las nociones, definiciones y teoremas relativos a los contenidos que se presentan para formar una estrategia de superación total del problema, hasta llegar a reducir su solución a algoritmos que se pueden relegar a la rutina humana y posteriormente a la mecánica del computador (Laborde, 1996). Pero antes de la formalización, el docente debe experimentar con esos algoritmos, de modo que, aunque el estudiante no adquiera dominio magistral de ellos, él pueda ser capaz de reproducirlos de acuerdo a su comprensión y así adquirir una práctica aceptable de ellos.

Simultáneamente en las actividades que se presentan, se propone al estudiante que diseñe prácticas adecuadas con el computador a fin de hacerse plenamente familiar con su modo de operación y de sus posibilidades con respecto a los contenidos y el problema de estudio. El maestro debe tener especial cuidado con las consecuencias peligrosas para el alumno de este modo de proceder (Acosta, 2005). Si en un curso se estimula a los estudiantes a trabajar con herramientas computacionales y no llegan a poseer la destreza que actualmente se juzga suficiente las rutinas del cálculo (Santos Trigo, 2003), puede suceder que al llegar a un nivel superior se encuentren en desventaja con respecto a los estudiantes que las poseen y fracasen ante otros profesores que no les permitan usar los medios que ellos saben y han podido utilizar en cursos anteriores. Ejemplo de ello es lo que puede ocurrir con estudiante de educación básica cuyo profesor de un curso le permitiera siempre utilizar la calculadora, pero el del curso siguiente no se lo permite o sólo se lo permite en circunstancias especiales (Santos Trigo, 2003).

#### 2.4.2.2 Didáctica de las Matemáticas y recursos didácticos

Chevallard (1991) define a la didáctica como la organización existente entre el contenido matemático que se va estudiar y lo que se pretende enseñar, de tal manera que el estudiante identifique y difunda algunos elementos que permitan el aprendizaje de las matemáticas de manera agradable, acción que implica que el maestro investigue sobre propuestas alternativas para el trabajo en clase; dichas propuestas son la interdisciplinariedad de los conocimientos, es decir, los relacionados con la física y la química y el uso de herramientas tecnológicas

Hasta finales del siglo XX en Colombia, los Profesores de matemáticas y los estudiantes contaban con pocos recursos didácticos esenciales para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos, para el caso de las temáticas relacionadas con las cónicas a veces se empleaba, de manera recursiva, cartón o cartulina para que el alumno pudiese visualizar la forma que estas adquieren sobre un plano; no obstante, estos materiales se restringían de acuerdo a las corrientes que surgieron a partir de las décadas de 1960 y 1970 (MEN 1971, Vasco).

El recurso didáctico permite expresar el método con el que se quiere abordar una situación problema (Chevallard, 1991); sin embargo, la introducción de los recursos didácticos no es sinónimo de enriquecer la clase si no se sabe enfocar el papel del material para las distintas temáticas trabajadas. Enriquecer la clase es un acto tanto del docente como de los estudiantes en el que se busca posibilitar el pensamiento – en este caso pensamiento matemático – de los alumnos. Involucrar física y herramientas tecnológicas permite establecer un vínculo directo entre el objeto de estudio y las generalizaciones y abstracciones que tienen lugar en la mente del alumno, propiciando la relación entre la instrucción, el desarrollo y la educación.

En el caso del tema matemático desarrollado en este trabajo, la física se convierte en una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometría analítica y para profundizar en las primeras nociones de cálculo del estudiante; se inicia la idea a partir de unos conceptos matemáticos clave, importantes para determinar características de hechos físicos que se presentarán al alumno y que por medio de ellos se involucrará a las matemáticas buscando relaciones entre los fenómenos presentados (Chevallard, 1991), y la situación que se presenta en la realidad se convierte en un problema de geometría analítica que después se vislumbrara como un problema de cálculo

## 2.5 LAS MATEMÁTICAS EN OTRAS ÁREAS DEL CONOCIMIENTO

El concepto de interdisciplinaridad se basa en el contacto que existe entre diferentes disciplinas o áreas del conocimiento, sea para resolver una situación problema o para diferenciar y analizar enfoques y metodologías respecto a temas comunes (Nieto, 1999).

El hecho que algunos objetos de la naturaleza manifiesten el mismo comportamiento general, es decir, sin tener en cuenta las particularidades, permite conjeturar la existencia de principios organizativos que pueden ser llevados a las diferentes ramas del conocimiento, logrando integrar los saberes, eliminando problemas que se dieron desde la antigüedad sobre la ambigüedad de cada una de las disciplinas.

El primer tratamiento que se le daba a las disciplinas correspondía al que se refería a su estudio de manera directa. Por ejemplo, la física se ocupaba de los fenómenos de la naturaleza respecto a la materia y a la energía, no obstante la necesidad de medir generó vínculos con las matemáticas que implicaban la creación de distintos modelos que se adecuaran con a la forma de cómo se tratan los objetos físicos. De igual manera ocurre con la química y otras ciencias que han apoyado algunos de sus principios con el estudio de las matemáticas; esto es, existe un principio de universalidad dinámica (Kôppen, Mansilla, Miramontes; 2005) que se describe cuando de un comportamiento general y abstracto de temas matemáticos se puede aplicar a una acción particular y concreta temas en otras ciencias sin importar que ese actuar se repita en otras disciplinas. Lo último se distingue en la relación existente entre economía y matemáticas en la teoría de tipos de cambio, en la que es fundamental la noción de derivada como razón de cambio. No obstante, en el estudio de la cinemática, en física, el modelo con el que se representa la velocidad y la aceleración de un cuerpo respecto al tiempo también se da con la misma noción de derivada.

Según (Kôppen, Mansilla, Miramontes; 2005), si los sistemas se relacionan desde un punto de vista, generalmente matemático, con modelos generales, los límites de las disciplinas se acaban y surge lo que se ha presentado como interdisciplinariedad. La historia de las diferentes ciencias, entre ellas las matemáticas, ha mostrado que cada vez más se necesita de la interacción con otros campos de estudio para formalizar un conocimiento y para desarrollar habilidades en el pensamiento.

Es a través de la interdisciplinariedad que las matemáticas escolares pueden tener más fuerza. Siempre ha existido un rechazo, probablemente injustificado, hacia esta ciencia, algunos autores señalan que ese rechazo se debe a la visión que tienen las matemáticas como conjunto de métodos cuantitativos (Kôppen, Mansilla, Miramontes; 2005), olvidando las características cualitativas en sus objetos; no obstante, las teorías de la ciencia se construyen a partir de las matemáticas, sin tener en cuenta la exactitud – en física el concepto de número irracional no es válido, el número $\pi$ tiene valor decimal finito –, pero teniendo en cuenta las posibilidades de generar hipótesis que construyan esquemas mentales que se pueden elaborar a partir del desarrollo del pensamiento matemático. El proceso de implementar matemáticas en una ciencia y/o en un área del conocimiento se conoce como matematizar. José Luís Gutierrez en (Kôppen, Mansilla, Miramontes; 2005) afirma "*matematizar una ciencia es penetrar los objetos de estudio con las herramientas para el pensamiento que nos proporciona la matemática, es buscar en ellos lo esencial y acotar lo contingente, es aprender a reconocer las relaciones estructurales o dinámicas entre sus diversos elementos para deducir lo que no es evidente*".

Este hecho brinda riqueza a las matemáticas escolares si se pueden enfocar algunos de los temas a estudiar con el aprendizaje propio de los estudiantes, este éxito se puede dar agregando al lenguaje de las matemáticas el lenguaje de otras disciplinas que permitan descubrir estructuras y pautas, que complementen el principio básico de contar y medir y den riqueza a los diferentes métodos y herramientas con los que se cuentan en la vida diaria, en otras áreas del conocimiento.

Al parecer la labor de interdisciplinariedad se da en las matemáticas puras y poco tiene en cuenta a la educación matemática, la relación de ésta con otras disciplinas se distingue desde el punto de vista didáctico. Higginson en Godino (2003) propone a la matemática, la psicología, la sociología y la filosofía y sus interacciones como las cuatro disciplinas fundacionales de la enseñanza de las matemáticas; no obstante, visiones epistemológicas de la didáctica de las matemáticas aseguran la existencia de teorías científicas – en el caso de este documento, la física – que no llegan a ser actos aislados (Godino, 2003), por lo que debe haber un grupo de personas que logren acuerdos sobre las situaciones problemas y la manera de proceder que se deben plantear dentro del aula de clase. Eso significa que en la enseñanza de las matemáticas, además de las cuatro disciplinas que propone Higginson (Citado en Godino, 2003) es menester incluir otras que puedan facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes dentro del aula de clase.

Para ello, Romberg (1988, citado por Godino, 2003) plantea algunos requisitos para introducir las distintas ciencias en los procesos de enseñanza de las matemáticas. En primer lugar asegura la existencia de investigadores que tengan intereses comunes de los fenómenos matemáticos del mundo real, es decir, tiene que haber un objetivo común para introducir disciplinas en la clase de matemáticas, dicho objetivo se puede plantear en pro del desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. A partir de ello, las explicaciones que da la teoría deben ir en torno a la causalidad de los distintos modelos y se debe enfocar la enseñanza de las matemáticas alrededor de las predicciones del fenómeno que se estudia. Finalmente el lenguaje utilizado debe estar combinado entre el lenguaje matemático y el lenguaje común del estudiante y su formalización se puede dar a partir de modelos que presenten criterios particulares que lleguen a los generales

### 2.5.1 Modelos matemáticos

En la escuela, la relación entre las matemáticas y el mundo real se lleva a cabo con más intensidad por medio de las actividades de resolución de problemas contextualizados en situaciones reales. Distintos estudios muestran que en las situaciones problemas reales los resultados numéricos pueden no tener un sentido sin el contexto propio (Roig, Llinares, 2004), ello implica que el docente debe involucrar a los estudiantes a poner de manifiesto las soluciones de las distintas problemáticas, debe plantear momentos en los que el alumno visualice y se integre con la propuesta, la mejor manera de hacerlo, a veces sin tener que salir del salón de clase es por medio de un modelo.

Un modelo es una alternativa de abordar un problema cuando se llevan procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; la construcción de modelos reales de situaciones matemáticas, permite al estudiante la interpretación de los resultados para poder contestar los interrogantes planteados inicialmente.

Los modelos permiten que el trabajo convierta el “estudio de un sistema no matemático” en el estudio de problemas matemáticos que se resuelven adecuadamente si el docente enfoca así la enseñanza. Para la implementación Chevallard (1991) propone tres tipos para el uso de los modelos: la utilización rutinaria de los modelos matemáticos ya conocidos por los docentes, el aprendizaje de modelos de enseñanza y de la manera de utilizarlos, y la creación de conocimientos matemáticos, es decir de nuevas maneras de modelar los sistemas de los estudiantes. En matemáticas, los modelos y la modelización se puede entender como el procedimiento por el cual se interpretan situaciones para tomar decisiones (Roig, Llinares, 2004), hecho que permite al estudiante ubicarse en los elementos de la situación, incluidas sus relaciones, patrones y características. De acuerdo a las propuestas educativas nacionales, los estudiantes deben desarrollar algunos conocimientos y destrezas para desenvolverse en la educación superior y la vida profesional (MEN, 2003; Roig, Llinares). Modelar una situación permite considerar relaciones sistemáticas con los sistemas de representación que determina el desarrollo del pensamiento del estudiante. Específicamente en la educación matemática, esa propuesta se adecua con las necesidades sociales y culturales gracias a la acogida de la tecnología, la información y la relación de las matemáticas con otras disciplinas.

## 2.6 USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

El auge del uso de nuevas tecnologías en el aula de clase ha tenido éxito en los programas relacionados con matemáticas. Software como Cabri Geometre y Descartes han dado un nuevo significado a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría y el cálculo escolar. Actualmente, el trabajo utilizando como herramientas tecnológicas la regla y el compás, se ha complementado y/o trasladado directamente con el uso del computador o de la calculadora, ofreciendo nuevas alternativas a los estudiantes para la comprensión de los postulados y teoremas.

El estudio de objetos geométricos realizado con lápiz, regla y compás trae consigo algunas limitaciones tales como la imprecisión y la dificultad al explorar los objetos geométricos, factor que con el uso de Cabri Geometre se reduce; la navegación que ofrece el programa hace posible que el estudiante visualice en una misma hoja electrónica una familia de objetos tan solo con mover un punto, de tal manera que discierna sus características geométricas. El profesor Martín Acosta (2005) afirma: "*la figura dinámica, es decir, la que se realiza en Cabri Geometre puede llegar a constituir una demostración en la que no es necesario apagar el computador o la calculadora*", hecho ratificado por Laborde (1996) cuando asevera que las tareas ideales para desarrollar en Cabri Geometre son los problemas de producción de dibujos y los problemas de demostración, los cuales adquieren otra naturaleza, "*en la medida en que permite explicar fenómenos visuales o incluso la imposibilidad de fenómenos visuales*"

El uso de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ofrece un número amplio de posibilidades para el acercamiento de la geometría dinámica y el cálculo, los estudiantes y el desarrollo de su pensamiento (Santos Trigo, 2003; Moreno, 2003). No obstante, la mayoría de veces se enfrenta al alumno al aprendizaje de programas computacionales, negando algunas de las oportunidades que puede ofrecer el estudio de las matemáticas bajo la orientación tecnológica, para implementar la creatividad en el alumno. Programas de educación matemática como Derive, Cabri y Descartes permiten graficar y manipular funciones que se pueden utilizar en la resolución de problemas como instrumentos que muestren a los jóvenes algunas regularidades o particularidades útiles en el momento de determinar la heurística (Santos Trigo, 2000) adecuada para seguir con el desarrollo de una estrategia de solución, la graficación puede hacerse sin computadoras, pero su empleo facilita enormemente el trabajo en cuanto al gasto en recursos y tiempo (Acosta, 2005). También existen programas cuya orientación se basa en el mecanicismo, en este caso también se puede incluir Descartes adicionado con el manejo de páginas Web, elaboradas para la ejercitación o la introducción de una noción básica inducida por el paquete y complementada por el docente a cargo.

El uso eficiente de la tecnología computacional no implica que el estudiante tenga que aprender a manejar un software en específico. En la actualidad el auge por las nuevas tecnologías ha permitido que los programas para educación matemática se difundan.

Enseñar por medio de la tecnología computacional trae como resultado que la misma estructura del instrumento tecnológico se convierta en una aplicación de las matemáticas en otras áreas del conocimiento. Desde la mirada de la resolución de problemas (MEN, 2003; NCTM, 1988) *¿Es la enseñanza mediante herramientas tecnológicas perjudicial para la enseñanza de las matemáticas?* (Santos Trigo, 2000). Una de las razones del peligro del uso de programas consiste en que el computador proporciona la respuesta demasiado pronto, no insiste en la necesidad de que el estudiante piense antes de. Despojar a un estudiante del placer de encontrar por si mismo la solución y del gozo de hallar por sí mismo la victoria ante la dificultad es un mal proceso de aprendizaje. Aquí es importante reconocer que no todos los recursos didácticos van encaminados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El hecho de ser didáctico no es una condición para que se asimile permanentemente el conocimiento en los niveles de desarrollo (NCTM). el mundo físico y social que rodea al estudiante, se convertirá en una herramienta clave para el aprendizaje (Santos Trigo). Una de las características importantes que debe reunir el recurso didáctico es la de tomar en cuenta la etapa de desarrollo por la que atraviesa el alumno.

Dorfler, (1993) menciona que las herramientas tecnológicas pueden están diseñadas para satisfacer la mentalidad de no esfuerzo en la sociedad si el proceso de enseñanza no se lleva a cabo detenidamente. En esta situación, el aprendizaje se puede volver “más fácil” porque se hace clic y cosas maravillosas suceden como por magia, pero ese volver “más fácil" puede traer como consecuencia la ausencia absoluta de pensamiento matemático en el estudiante; el trabajo en el aula se debe fomentar de tal manera que el alumno pueda asimilar las formas de pensar ante retos difíciles y originales que generen saber en el sujeto cognoscente. Emplear tecnología en clase implica cambiar el tipo de preguntas y esperar respuestas más potentes.

En este punto el docente juega un papel importante cuando aclara al estudiante dichas dificultades. Al tratar sobre los peligros de la naturaleza que el uso del computador causa sobre la matemática, se acentúa el énfasis sobre la matemática discreta como opuesta al cálculo; es decir, el computador trabaja con el conjunto de los números racionales – en algunas oportunidades de manera parcial – cada una de las situaciones que trabaja; las curvas están conformadas a partir de trozos de segmentos y dependiendo la escala, se píxela en mayor o menor medida.

El uso adecuado de herramientas tecnológicas, especialmente calculadoras y computadores facilita los procesos de recepción de los estudiantes, los acerca al conocimiento matemático. En Colombia este fenómeno toma fuerza (Acosta, 2005) y un importante ejemplo se da en Bogotá, sitio en el que la mayoría de instituciones educativas han adecuado salas de informática que incluyen paquetes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, además de elementos didácticos en materiales como el papel, la cartulina y la madera, ya disponen de software de geometría, Internet o calculadoras graficadoras que permiten al profesor utilizarlos como herramientas didácticas y a los estudiantes como mediación instrumental (Posada, 2002). Para hacer construcciones, comprobar definiciones, aplicar las ecuaciones canónicas correspondientes, deducir las ecuaciones para construcciones particulares, calcular áreas y hacer inferencias respecto a las familias de cónicas, encontrar la derivada de una función en un punto y calcular la velocidad y la aceleración media e instantánea de un cuerpo en movimiento.

### 2.6.1 El proyecto Descartes

El Ministerio de Educación y Ciencia de España ha promovido durante más de 20 años un proyecto que tiene como finalidad innovar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el sistema escolar Enseñanza Secundaria Obligatoria ESO y el bachillerato con ayuda del computador y el Internet (MECD, 2006). Este proyecto, denominado Proyecto Descartes pretende promover nuevas técnicas de trabajo dentro del aula de clase, generando motivación a los estudiantes.

El proyecto inicia con la puesta en marcha de la creación e implementación de materiales construidos con el fin de generalizar el uso de tecnologías de la información y comunicación bajo una serie de condiciones: que el docente pueda controlarlo en tiempos moderados, que los estudiantes lo puedan usar fácilmente, que se acomode a los distintos temas del plan de estudios, que sea una herramienta didáctica y que se pueda implementar en cualquier lugar. Luego de ello, en junio de 1998 con la iniciativa del Ministerio de Educación Español y su programa Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (MECD, 2006), se consolidó el primer prototipo en el que se elaboraron y aplicaron algunas unidades didácticas. El mundo conoció el proyecto Descartes en el evento español “Madrid en Aula 99” en el que se presentaban ideas para el avance en el desarrollo de los diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en la península Ibérica.

A partir de ese evento, surgen las versiones Descartes 2D y Descartes 3D que se apoyan en el lenguaje JAVA y HTML para el diseño de páginas web. En estas presentaciones se ha venido perfeccionando la edición del programa y se ha logrado que cualquier docente pueda generar situaciones para llevar al aula de clase. El proyecto Descartes tiene una herramienta muy importante para desarrollar las distintas situaciones: el generador de escenas. Este permite construir cada uno de los applets, incluye la opción de trabajar en el espacio – si es Descartes 3D – y en el plano, puede hacer acercamientos y desplazamientos en el plano, al igual que muchos de los lenguajes de programación, ejecuta comandos como algoritmos, funciones y eventos, puede graficar curvas a partir de la ecuación canónica o de las ecuaciones paramétricas y se pueden hacer animaciones.

El programa se puede distribuir libremente, así mismo las aplicaciones que tiene prediseñadas, las cuales se pueden descargar desde la página Web http://descartes.cnice.mecd.es/. Requiere que el computador tenga un software de navegación en Internet y la máquina Java instalada.

Es con ayuda del programa Descartes con el que se han diseñado la mayoría de las actividades propuestas en cada una de las etapas de la enseñanza de la presente propuesta didáctica.

# 3. ACTIVIDADES

En esta parte se desarrolla la propuesta para ser ejecutada en el aula de clase. Las actividades involucran al estudiante en una serie de contenidos que pretenden llegar a la noción de Parábolas de Seguridad. Se plantea un conjunto de preguntas que tienen más razón de ser en la clase de física que en la de matemáticas y pretenden sacar a los alumnos del carácter abstracto y alejado de la realidad con el que pueden llegar a vivir la clase de matemáticas. La pregunta fundamental en relación a las parábolas de seguridad es la siguiente: Desde un punto en una región plana se lanzan proyectiles similares con la misma velocidad inicial, pero con ángulos que varían entre 0 y 180 grados respecto a la horizontal. ¿Cuáles son los puntos del espacio por los que el proyectil puede pasar?, ¿A qué puntos no puede llegar? ¿Se puede caracterizar la región del espacio por la que dichos proyectiles pueden pasar?

El desarrollo de dichas preguntas se inicia a partir de la revisión de temas básicos como la noción de plano cartesiano, la noción de recta, el concepto de vector en el plano y la definición de parábola. Las siguientes etapas y actividades están diseñadas para estudiantes de undécimo grado, de los cuales se espera que manejen la noción de derivada y puedan encontrar la derivada de funciones polinómicas. Se espera también, que el estudiante maneje los temas de cinemática, en especial la cinemática lineal, conociendo algunas expresiones matemáticas para encontrar la velocidad y la aceleración de un cuerpo en movimiento, a partir de conociendo el tiempo y/o la ecuación de posición.

El desarrollo de las actividades está enmarcado en el uso de programas de matemática educativa como Cabri Geometre y Descartes, bajo la idea que el uso de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas permite que el estudiante se acerque a la geometría dinámica y el cálculo, y permiten el aprendizaje significativo de los alumnos en el trabajo que se pretende abordar

En relación a los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se pueden dar, las siguientes actividades están diseñadas para mostrar al estudiante que las matemáticas no son un conjunto de conocimientos fijos y acabados, tienen la intención que el alumno perciba a las matemáticas como una disciplina que se acerca a la realidad y de esta manera logre tener un aprendizaje significativo, pero teniendo en cuenta que habrá oportunidades en las que tenga que mecanizar. Las tareas propuestas conducen al estudiante a conocer las parábolas de seguridad, el maestro, debe generar incertidumbre sobre los distintos fenómenos que logren mayor espontaneidad por parte del estudiante y menor participación del profesor en la construcción del conocimiento.

## 3.1 ETAPA 1
## EL PLANO CARTESIANO Y LA RECTA

**Propósito:** En esta etapa se propone que el estudiante identifique algunas de las características más importantes del plano cartesiano y de la recta. Para ello, se integra al estudiante con el plano cartesiano, la ubicación de puntos en el mismo y la obtención de rectas.

**Desarrollo**

Actividad 1.1

1. Abra el archivo E1 A1 Ejercicio1. Verá una imagen como la siguiente:

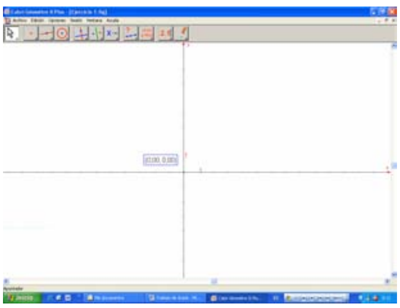


Figura No 16

a. ¿Qué visualiza?

b. ¿Qué significan los 1 rojos que aparecen en las dos rectas?

c. ¿Qué significa la x y la y ubicadas en la parte derecha y superior de la pantalla?

d. ¿Qué significa la pareja de números encerradas en el recuadro azul?

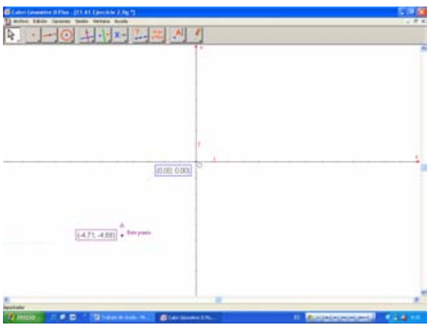


Figura No 17

2. A continuación, abra el archivo E1 A1 Ejercicio2,

Con la herramienta mover, cambie de lugar el punto A, se dará cuenta que los valores del recuadro violeta cambiará.

a. ¿Qué significan los números del recuadro violeta?

b. ¿Coincide su respuesta con la que planteó en la pregunta c del numeral anterior?

c. Acerque el punto A al eje x, ¿Qué ocurre?

d. ¿Sucede lo mismo si acerca el punto A al eje y?

e. ¿Su opinión ha cambiado su opinión respecto a la pregunta a? ¿Por qué?

f. Deje en un lugar del plano el punto A y mueva ahora el punto O, origen del plano cartesiano; ¿Qué observa?

3. Ahora, abra el archivo E1 A1 Ejercicio 3:

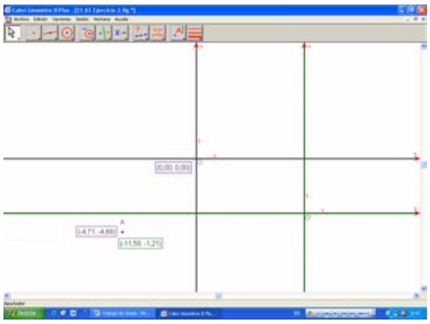


Figura No 18

La imagen muestra la existencia de dos sistemas de coordenadas: el negro, con el cual se han trabajado los ejercicios anteriores, el verde ubicado en un punto aleatorio del plano. Se percibe que las coordenadas de cada punto del recuadro verde son distintas a las del recuadro violeta.

a. ¿Cuál de las dos coordenadas es la verdadera?

Mueva el punto A, de tal manera que las dos componentes de las coordenadas dentro del recuadro verde sean positivas

b. ¿Si tuviera que hacer operaciones como suma o multiplicación, en cuál de los dos sistemas sería más fácil?

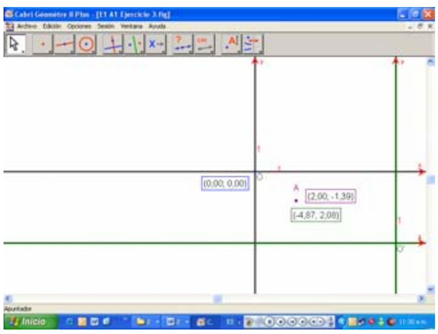



Figura No 19

c. Mueva el punto A y a continuación escriba sus propias conclusiones

Se pueden considerar varios sistemas de coordenadas para la ubicación de un lugar geométrico.

Actividad 1.2

A continuación el estudiante hará un reconocimiento de la recta en el que identificará sus propiedades y ecuaciones características.

1. En el archivo E1 A2 Ejercicio 1:

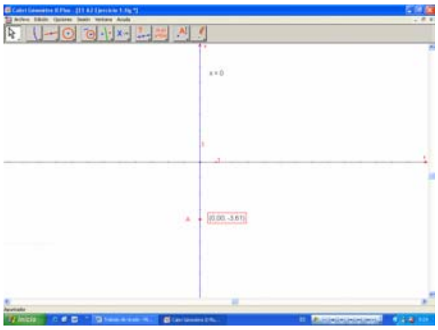


Figura No 20

En la pantalla aparecen los ejes coordenados, una recta sobre el eje y, la igualdad $x = 0$ y el punto A con sus coordenadas. El punto A está ubicado sobre la recta azul únicamente se puede mover de "arriba abajo". Al mover el punto A, se observa que la componente de la abscisa siempre es igual a cero.

a. ¿Se relaciona este hecho con la igualdad $x = 0$?, ¿Cuál es la ecuación de la recta vertical en este sistema de coordenadas?

b. Encuentre la ecuación de la recta que contiene al eje x.

c. Luego, con la herramienta recta paralela trace una recta paralela al eje x que pase por B[1].

d. Con la herramienta punto sobre objeto, ubique un punto en la nueva recta, nombre a ese punto C y ayudándose de la herramienta Coord. o Ecuación, determine las coordenadas del punto

Si la ecuación de la recta le aparece de la forma $y = \frac{a}{b}$ con a y b números enteros, transforme dicho número a expresión decimal.

e. Mueva el punto C sobre la recta y observe el comportamiento de las coordenadas, ¿cuál es la ecuación de la recta? Verifique su respuesta usando la herramienta Coord. o Ecuación, esta vez sobre la recta.

[1] Seleccione la herramienta Recta paralela, de clic en el punto B y posteriormente clic en el eje x.

f. ¿Si en vez de haber trazado la recta paralela al eje x la hubiera trazado sobre el eje y, cuál sería la ecuación de la recta supuesta?

2. La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que se forma entre el eje x y la recta en sentido contrario a las manecillas del reloj.

a. ¿Cuál es la pendiente de la recta x = 0?

b. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 0?

c. En el cuaderno haga la gráfica de las x = 3, x = $-\frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{5}$, y = -3, y = $\frac{1}{2}$, $y = -\frac{7}{5}$ y encuentre sus respectivas pendientes.

d. Si a es un número real, ¿Cuál es la pendiente de la recta x = a? y, ¿la pendiente de la recta $y = a$?

3. Abra el archivo E1 A2 Ejercicio3, en el plano se visualiza el sistema de ejes coordenados, una recta l que pasa por el origen, el punto A que pertenece a la recta l, las coordenadas del punto A dentro del recuadro rojo, el cociente entre la abscisa y la ordenada de A en el recuadro verde, la medida del ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal y la tangente de la medida de dicho ángulo en el cuadrilátero azul

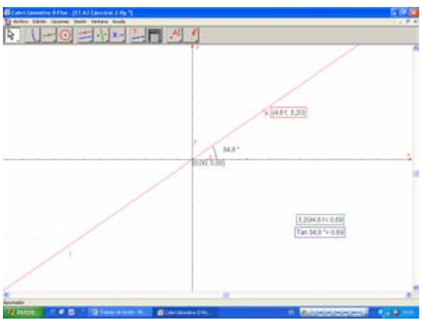


Figura No 21

a. Inicialmente los valores para el cociente de la abscisa y la ordenada de A son iguales. Mueva el punto A de tal manera que no se ubique en el origen, ¿Qué observa entre los valores del recuadro verde y el recuadro azul?

b. Ahora mueva la recta de tal manera que el ángulo respecto a la horizontal varíe, ¿se mantiene la igualdad en los recuadros azul y verde?

c. ¿A qué es igual la pendiente de una recta que pasa por el origen y de la cuál conoce otro punto?

4. Abra el archivo E1 A2 Ejercicio4, esta vez se muestra una recta que no pasa por el origen, dos puntos A y B que pertenecen a la recta con sus respectivas coordenadas, el

cociente de la diferencia de las abscisas y las ordenadas, recuadro verde y tangente del ángulo de la recta respecto a la horizontal, recuadro azul .

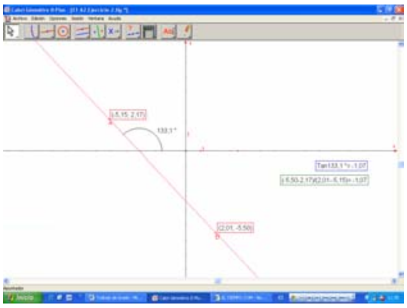


Figura No 22

a. Sin mover la recta, desplace los puntos A y B y observe lo que pasa en el recuadro verde. ¿La igualdad se modifica?

b. Mueva ahora la recta. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, ¿cuál es la pendiente de la recta que pasa por A y B?

Si una recta l pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces, la pendiente $m$ de l se expresa como: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

La ecuación general de la recta es $Ax + By + C = 0$

## 3.2 ETAPA 2
## LA PARÁBOLA

**Propósito:** Se pretende que el estudiante identifique algunos de los rasgos más significativos de las componentes de las parábolas; para ello se llevará a cabo una actividad en la que involucre las habilidades manuales y herramientas computacionales en el estudio de las matemáticas.

**Desarrollo**

Actividad 2.1

1. A cada estudiante se de darán dos hojas de papel calcante de forma rectangular del mismo tamaño:

a. Escoja una de las dos hojas

b. Con un esfero, marque un punto en cualquier parte de la hoja.

c. Elija un lado recto del papel y haga un doblez, tal como lo indica la figura No. 23

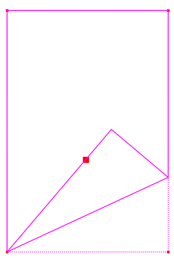


Figura No 23

d. Repita este proceso bastantes veces, haciendo el doblez por partes diferentes de la hoja

e. ¿Qué forma tiene la figura resultante?

f. Con la segunda hoja repita los pasos del a al e, con la condición de que el punto señalado sea distinto con relación al de la actividad anterior

Al final de la actividad, se pide a los estudiantes socializar los resultados obtenidos.

2. Con ayuda del archivo E2 A1 Ejercicio2, se pueden ver una recta definida por los puntos A y B, el punto F fuera de la recta AB, una curva a la cual pertenece el punto P; los segmentos FP y PA con sus respectivas medidas. Realice las siguientes actividades:

a. Cuando el archivo se abre, las medidas de los segmentos AP y FP son iguales. Mueva el punto A. ¿Sigue siendo el punto P parte de la curva?, ¿Se mantiene la igualdad entre AP y FP?

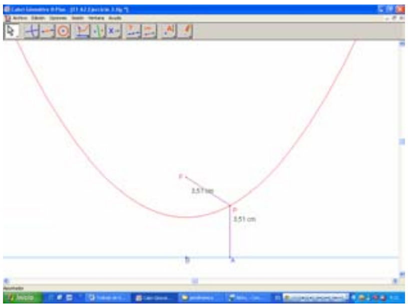


Figura No 24

b. ¿Qué ocurre si mueve el punto B? Describa el comportamiento de la curva

c. Escriba su definición de la curva en relación a lo observado en el archivo E2 A1 Ejercicio2

Se define a la parábola como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto (Foco) y una recta dados (Directriz)

El segmento paralelo a la directriz que pasa por el foco y tiene extremos en la parábola se denomina lado recto

Las ecuaciones generales de la parábola son: $Ay^2 + By + Cx + D = 0$; y $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

## 3.3 ETAPA 3
## LOS VECTORES

**Propósito:** Se introduce al estudiante con la noción de vector en el plano. Se rescata la importancia del sentido y el ángulo de inclinación, así como la expresión de vectores en términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

**Desarrollo**

1. Abra el archivo E3 A1 Ejercicio1; aparecerá un aplett de Descartes en el que se pueden observar el plano cartesiano, una flecha de color azul y los controles de magnitud e inclinación en la parte inferior:

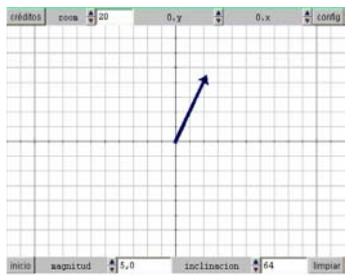


Figura No 25

a. ¿Qué objeto matemático representa la flecha?

b. Modifique los valores, ¿Qué pasa con el valor de inclinación? ¿Qué significa el valor de inclinación?,

c. Modifique el control de magnitud, ¿Qué ocurre cuando los valores del control de magnitud son positivos? ¿Qué ocurre cuando son negativos?

Los vectores son segmentos que señalan un sentido y representan una dirección. Se caracterizan por tener un punto inicial, un punto final, una longitud y una dirección.

Los vectores en el plano cartesiano:

2. Abra el archivo E3 A1 Ejercicio2; en el que aparecen seis vectores - $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e},\vec{f}$ - en el plano cartesiano, unos botones cerca de cada vector y el botón origen en la parte superior derecha.

a. Con la herramienta apuntador presione el botón que se encuentra cerca de cada vector. Encontrará la inclinación y la longitud en centímetros de cada vector. Modifique la inclinación y la longitud de cada vector. ¿Existe una manera de caracterizar cada uno de esos vectores?

b. Haga clic en el botón origen. Describa lo que observa en la pantalla.

c. ¿Puede modificar algún vector?

d. Mueva el vector $\overrightarrow{b'}$ - no punteado de color verde -, ¿qué pasa con el vector punteado de color verde? E. ¿Ocurre de igual manera con los vectores punteados, cuando mueve el vector no punteado de color correspondiente?

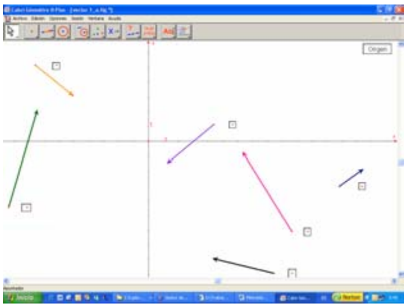


Figura No 26

e. Modifique la longitud y la inclinación del vector no punteado de color verde, ¿qué pasa con el vector punteado de color verde? ¿Ocurre de igual manera con los vectores punteados $\overrightarrow{a'},\overrightarrow{c'},\overrightarrow{d'},\overrightarrow{e'},\overrightarrow{f'}$ , cuando modifica la longitud y la inclinación del vector no punteado de color correspondiente?

f. En los vectores punteados $\overrightarrow{a'},\overrightarrow{b'},\overrightarrow{c'},\overrightarrow{d'},\overrightarrow{e'},\overrightarrow{f'}$, al final, sobre la flecha, aparecen unas coordenadas de la forma $(a,b)$ donde a y b son números racionales; en cada caso efectúe $\sqrt{a^2+b^2}$ ; ¿Qué resultado obtiene?

Al igual que la longitud de los segmentos, la longitud de los vectores se determina al encontrar la distancia entre el punto inicial y el punto final, y para determinar si dos vectores son paralelos, se encuentra el ángulo que determina el vector respecto a la horizontal

Sean $A=(a_1,b_1)$ y $B=(a_2,b_2)$ Todo vector $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ tiene un vector paralelo que se expresa como $\overrightarrow{v'}=(a_2-a_1,b_2-b_1)$

Multiplicación por un escalar:

3. En el archivo E3 A1 Ejercicio3 se pueden ver dos escenas en el applet Descartes como las que se pueden observar a continuación. La segunda (figura No 27 derecha) corresponde a la situación del applet E3 A1 Ejercicio1 trabajado anteriormente. La primera, es una modificación a la escena anteriormente descrita a la que se le ha agregado el controlador dirección.

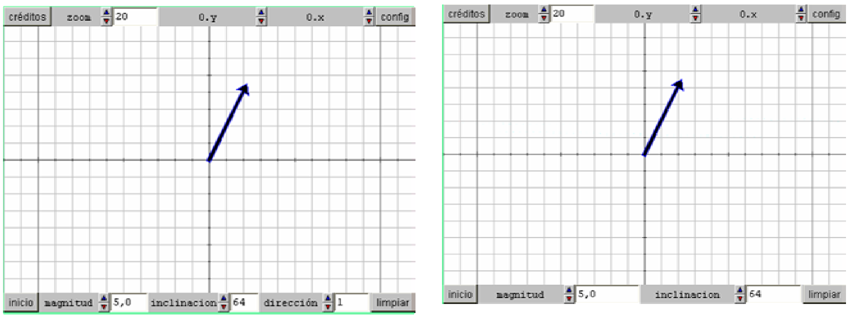



Figura No 27

a. ¿Qué valores toma el controlador dirección?, ¿Qué ocurre cuando el valor de dirección es negativo?

b. Con ayuda del segundo aplett, obtenga el mismo vector de la primera escena. ¿Cuánto varía la inclinación del vector resultante en relación al original?

c. ¿Se puede afirmar que la longitud de los vectores en el archivo E3 A1 Ejercicio3 ha sido multiplicada por 1 y por -1? Si es así, justifique

| |
|---|
| Para todo número real $a$ y todo vector $\vec{v}=(x,y)$, el producto $a\vec{v}$ se define por $a\vec{v}=a(x,y)=(ax,ay)$. $\vec{v}$ y $a\vec{v}$ son paralelos |

4. Para complementar la idea anterior, abra el archivo E3 A1 Ejercicio4. Encontrará un vector $\vec{v}$ de color rojo y el vector $\vec{w}$ de color rosa, distintos controladores: magnitud, inclinación y escalar.

a. Haga una descripción de la escena.

b. Modifique el controlador magnitud. ¿Cuál de los vectores cambia?

c. Modifique el controlador inclinación. ¿Si trazara una recta que uniera los extremos de los vectores, pertenecerían los vectores a dicha recta?

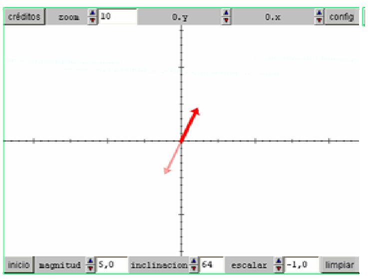



Figura No 28

d. Cambie de valores el controlador escalar, ¿qué ocurre?

e. Modifique el controlador escalar de tal manera que tenga los valores 2; 3; 1,5; 0,5; -2; -3; -1,5; -0,5. Describa cómo es el vector $\vec{w}$ en comparación al vector $\vec{v}$

f. ¿Qué relación hay entre el vector $\vec{v}$ y el vector $\vec{w}$ ?

Suma de vectores:

5. Con ayuda del aplett de Descartes E3 A1 Ejercicio 5 y E3 A1 Ejercicio 5a, teniendo en cuenta que los controles mag[1] e incl[1] corresponden al vector $\vec{v}$ - azul - y los controles mag[2] e incl[2] son los del vector $\vec{w}$ - amarillo -.

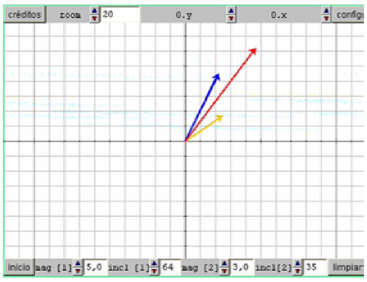



Figura No 29

a. Encuentre las propiedades del vector $\vec{z}$ de color rojo.

b. ¿Qué características tienen los dos vectores $\vec{w}$ y $\vec{w}'$ de color amarillo?

c. Viendo el aplett E3 A1 Ejercicio 5a, ¿tiene el vector $\vec{z}$ las mismas propiedades que las encontradas en el ejercicio 4?

d. Escriba una caracterización de lo que muestra la escena

6. Para complementar el trabajo realizado, abra el archivo E3 A1 Ejercicio6; el cual se encuentra diseñado en Cabri Geometre. La situación es la misma que el aplett E3 A1 Ejercicio5a.

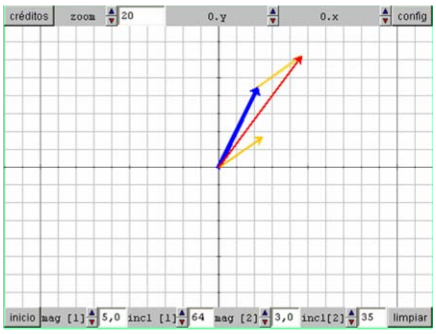



Figura No 30

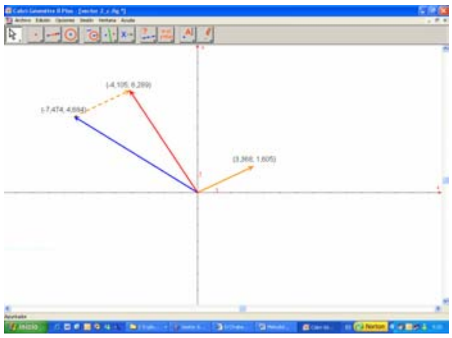


Figura No 31

a. ¿Qué vectores se pueden modificar?, ¿Cómo?

b. Encuentre las relaciones numéricas entre las parejas ordenadas que caracterizan los vectores.

Sean $\vec{v}=(x,y)$ y $\vec{w}=(r,s)$, entonces, $\vec{v}+\vec{w}=(x,y)+(r,s)=(x+r,y+s)$

Vector Horizontal y Vertical

7. En el aplett de Descartes E3 A1 Ejercicio7 se observa un vector de longitud 5 paralelo al eje horizontal.

a. ¿Puede cambiar la inclinación de ese vector?

b. Modifique la longitud del vector de tal forma que sea igual a 1; ¿Qué observa?

c. Modifique la longitud del vector de tal forma que sea igual a -1; ¿Qué observa?

*El vector horizontal de longitud 1 se conoce como el vector* $\hat{i}$

*El vector horizontal de longitud a se conoce como el vector* $a\hat{i}$

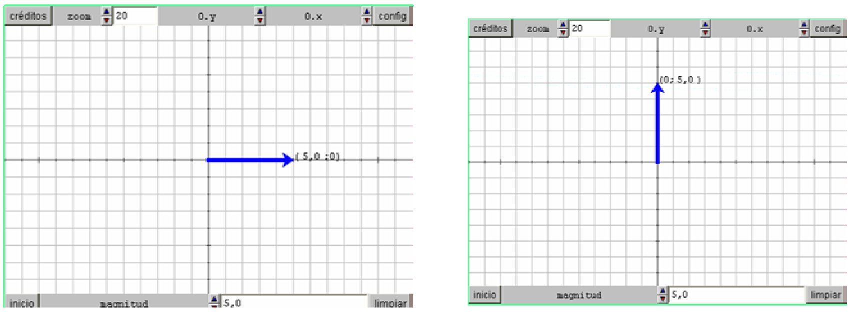


Figura No 32

8. En el aplett de Descartes E3 A1 Ejercicio8 se observa un vector de longitud 5 paralelo al eje vertical.

a. ¿Puede cambiar la inclinación de ese vector?

b. Modifique la longitud del vector de tal forma que sea igual a 1; ¿Qué observa?

c. Modifique la longitud del vector de tal forma que sea igual a -1; ¿Qué observa?

*El vector vertical de longitud 1 se conoce como el vector* $\hat{j}$

*El vector vertical de longitud a se conoce como el vector* $a\hat{j}$

d. ¿Será posible expresar cualquier vector como la suma de un vector horizontal y otro vertical?

9. En el archivo E3 A1 Ejercicio9, en el que se observa la siguiente situación:

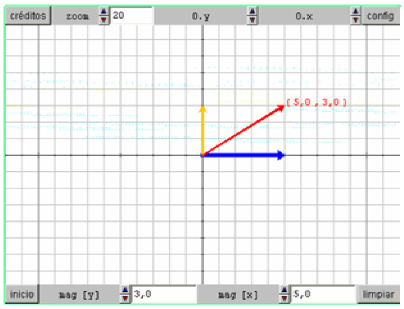


Figura No 33

a. Nombre los vectores amarillo y azul.

b. ¿Cómo se obtiene el vector rojo? ¿Existe otra manera de escribir y/o caracterizar el vector rojo?

c. Conociendo las componentes horizontal y vertical de un vector, ¿es posible obtener su longitud?, ¿cómo?, ¿se puede encontrar el ángulo de inclinación con respecto al eje horizontal?. ¿de qué forma?

*El vector es caracterizado por una pareja ordenada* $(a,b)$ *o por las componentes horizontal y vertical* $a\hat{i}+b\hat{j}$ *su norma* $\|(a,b)\| = \|a\hat{i}+b\hat{j}\|$ *se expresa* $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$

## 3.4 ETAPA 4

## CINEMÁTICA LINEAL

**Propósito:** La Cinemática permite la descripción del movimiento sin tener en cuenta su causa, es decir, la cinemática proporciona el lenguaje necesario para describir cómo se mueven los objetos. Un objeto puede moverse básicamente de dos modos diferentes: puede cambiar únicamente su orientación o cambia su localización. Las magnitudes que define la cinemática son principalmente tres, la posición, la velocidad y la aceleración.

**Desarrollo:**

**Posición:** Es el lugar en que se encuentra el cuerpo en un cierto instante de tiempo t, por lo que se convierte en una función en el tiempo. Generalmente se denota por x o $x(t)$

1. Con ayuda del archivo E4 A1 Ejercicio1 determine la posición de los puntos que aparecen en cada uno de los applets presentados.

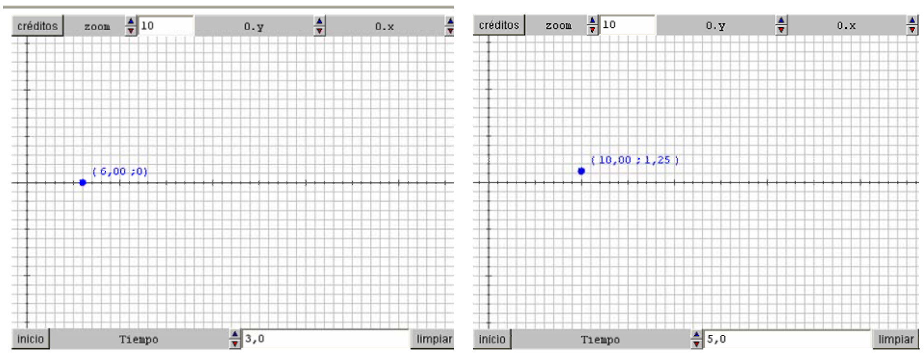



Figura No 34

2. Ubique cada uno de los puntos en el origen del plano cartesiano, Determine la relación que existe entre las coordenadas de los puntos y la cantidad de pulsaciones que se dan.

**Velocidad**: Es la variación de la posición por unidad de tiempo. Indica si un cuerpo está en movimiento, es decir, si varía su posición a medida que varía el tiempo. La velocidad en física se corresponde al concepto intuitivo y cotidiano de velocidad.

3. En cada uno de los applets del archivo E4 A1 Ejercicio3 se ha construido un punto que se desplaza en función del tiempo desde un determinado lugar de origen. Cada una de las gráficas permite visualizar la distancia que se recorre y la velocidad con la que se “mueve” cada punto.

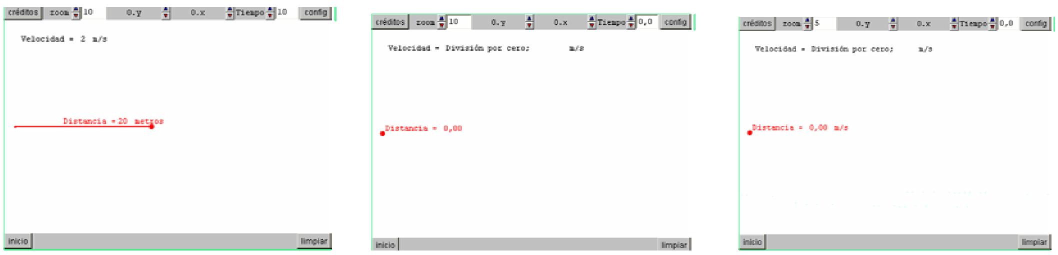


Figura No 35

4. Observe las relaciones que existen entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida que puedan llevarlo a determinar la velocidad de cada uno de los puntos.

La velocidad media de un cuerpo se expresa por la variación existente entre la diferencia de la posición inicial y la posición final sobre la diferencia entre el tiempo inicial y el tiempo final.

$$v_m = \frac{x_o - x_f}{t_o - t_f} \text{ [EC 81]}$$

En la anterior igualdad, $x_o$ representa la posición inicial, de la misma forma, $t_o$ indica el tiempo inicial.

No obstante, aunque la velocidad media es una magnitud útil, es importante tener en cuenta que su cálculo deja mucha información sin precisar, por ejemplo, si se conoce la velocidad media de un cuerpo desde un instante $t_o$ a otro $t_1$ ha sido ``tantos'' metros por segundo, no es posible determinar si los ha hecho de forma constante, o si ha ido muy lento al principio y rápido al final, por lo que se hace necesario definir una magnitud que exprese la velocidad en un determinado momento, dicha velocidad es conocida como velocidad instantánea.

**Aceleración**: Es la variación de la velocidad respecto al tiempo.

5. Alguna vez ha escuchado la palabra aceleración o acelerado; ¿bajo qué contextos los ha escuchado?

6. ¿Qué puede decir cuando un vehículo acelera?, ¿Qué significa que desacelere?

7. En cada uno de los applets del archivo E4 A1 Ejercicio7 se ha construido un punto que se desplaza en función del tiempo desde un determinado lugar de origen. Cada una de las gráficas permite visualizar la distancia que se recorre y la medida de la velocidad y la aceleración con la que se "mueve" cada punto.

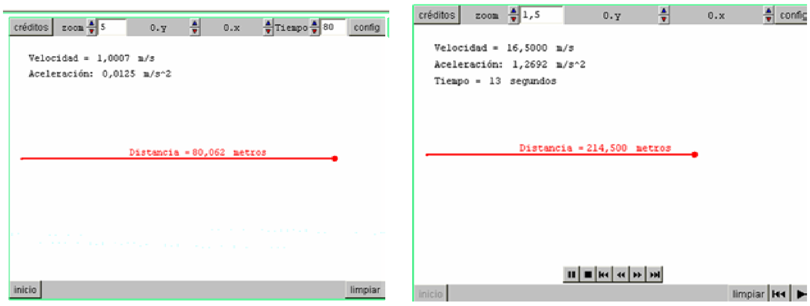



Figura No 36

8. Observe las relaciones que existen entre el tiempo transcurrido, posición y la velocidad a cada momento que puedan llevarlo a determinar la aceleración de cada uno de los puntos.

La aceleración es la variación de la velocidad en la unidad de tiempo. De manera similar que la velocidad media, la aceleración media entre dos instantes, inicial y final se define como

$$a_m = \frac{v_f - v_o}{t_f - t_o} \quad \text{[EC 82]}$$

**Movimiento Rectilíneo**

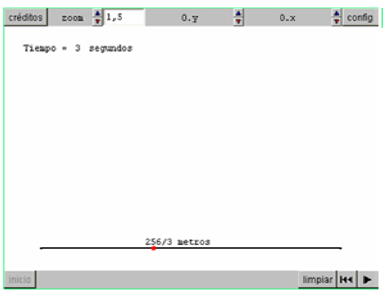



Figura No 37

Se hace la representación del movimiento en el plano cartesiano teniendo en cuenta únicamente el recorrido lineal que éste hace; por ejemplo:

En una competencia, un atleta corre $\frac{256}{3}$ metros en 9 segundos

No obstante, las situaciones que se presentan en la vida cotidiana permiten ver que a pesar de que la velocidad media se puede determinar, normalmente no es constante. Ejemplo claro de eso, es el recorrido que hace un carro por la carrera séptima desde el centro hasta el norte de la ciudad. En este caso se puede calcular la velocidad media, pero por situaciones como los semáforos, los otros vehículos y los peatones, entre otros, la velocidad del automóvil no siempre es constante. La velocidad puede variar de un momento a otro, tal como se puede apreciar en el siguiente relato:

9. En el gran prix de atletismo de la ciudad de Bogotá, un atleta corre $85\frac{1}{3}$ metros en 8 segundos.

a. Determine la velocidad media con la que el atleta recorre la distancia en la competencia

No obstante, los jueces, gracias a la implementación de tecnología determinaron que el movimiento realizado por el atleta durante la competencia se describe por la función $x(t) = 4t^2 - \frac{t^3}{3}$ Donde t varía entre 0 y 8, y es el tiempo empleado en la prueba.

b. Determine la distancia al punto de salida cuando ha transcurrido:

1 segundo, 2 segundos, 3,5 segundos, 4 segundos, 7,6 segundos

c. Con ayuda del aplet E4 A1 Ejercicio9c , es posible ver la gráfica de posición – tiempo del atleta en la situación descrita.

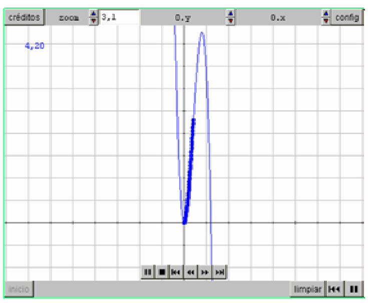


Figura No 38

d. Por medio de la gráfica posición – tiempo y de la ecuación de movimiento, ¿puede analizar cómo fue el comportamiento de la velocidad y la aceleración del atleta?

10. En el applet E4 A1 Ejercicio 10 se encuentra la gráfica de la trayectoria – tiempo que empleó el atleta. Se encuentran dos puntos, el punto A que se determina por el tiempo T0 e indica la posición X0 del atleta en un determinado momento; igualmente el punto B determinado

por el tiempo T1 e indica la posición X1 del corredor en otro momento.  A y B pueden ser el mismo punto.

Este subprograma determina, en el renglón morado, la velocidad media cuando el atleta recorre de A a B o de B a A, según sea el caso.

a. Determine a T0 = 3.50 y a T1 = 4.50; observe la posición X0, X1 y la distancia recorrida desde que el atleta pasó por el punto A hasta cuando pasó por el punto B, que se puede encontrar en $X1 - T0$.  ¿Qué valor toma la velocidad media entre A y B?

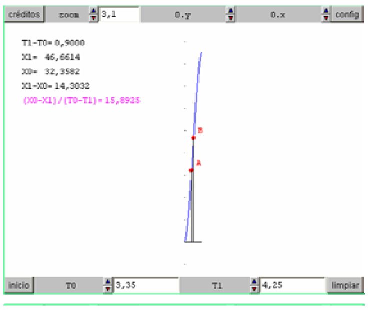


Figura No 39

b. Ubique ahora a T0 = 3.75 y a T1 = 4.25.  ¿Qué ocurre con X1 – X0? ¿Qué valor toma la velocidad media entre A y B?

c. Asigne los siguientes valores para T0 y T1 respectivamente: (3.80; 4.20), (3.85; 4.15), (3.90; 4.10), (3.91; 4.09), (3.92; 4.08), (3.93; 4.07), (3.94; 4.06), (3.95; 4.05), (3.96; 4.04), (3.97; 4.03), (3.98; 4.02), (3.99; 4.01).  ¿Qué ocurre con X1 – X0 a medida que T0 aumenta y T1 disminuye?

d. En cada uno de los casos del literal anterior, ¿Qué valor toma la velocidad media entre A y B?

e. ¿Puede determinar la velocidad del atleta cuando han transcurrido 4 segundos?  Si es así, ¿cuál es la velocidad del corredor en ese momento?

f. Calcule: $\lim_{h \to 0} \frac{x(4+h) - x(4)}{h}$, donde $x(t) = 4t^2 - \frac{t^3}{3}$; Compare su respuesta con la obtendia en el literal e.

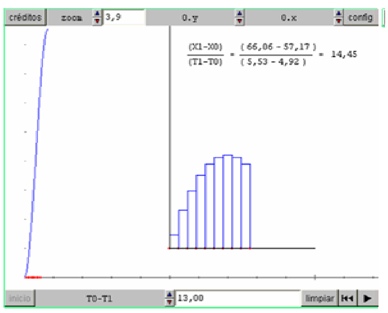


Figura No 40

11.  En el aplet E4 A1 Ejercicio11 se encuentra la gráfica de la trayectoria – tiempo que llevó a cabo el atleta.  Se observa, además, un plano cartesiano en otra escala y el pulsador Tn – T(n-1).  Este subprograma divide el tiempo en la cantidad de intervalos que aparecen en el pulsador y determine la velocidad media entre cada uno de esos momentos.

a. Iguale el valor del pulsador Tn – T(n-1) a 1, observe el texto que aparece en pantalla.
b. Iguale el valor del pulsador a 8. ¿Qué significa esto?, ¿Qué comportamiento tiene la gráfica?
c. Iguale el valor del pulsador a 80. Observe lo que ocurre
d. Iguale el valor del pulsador a 1000. ¿Qué ocurre? ¿Qué gráfica se forma?
e. Podría determinar la ecuación de la gráfica resultante
f. Encuentre x'(t) cuando $x(t) = 4t^2 - \frac{t^3}{3}$. Compare su respuesta con la del literal anterior

Se denomina a velocidad instantánea $\langle v \rangle$ a la velocidad que tiene un cuerpo en movimiento. La velocidad instantánea se determina por la igualdad:

$$\langle v \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ [EC 83]}$$

Donde x representa posición. De esta manera, la función velocidad es $v(t) = \frac{dx}{dt}$

12. Teniendo en cuenta que la velocidad inicial y la velocidad final del atleta en el gran prix de atletismo fue 0, determine la velocidad media con la que el atleta recorre la distancia en la competencia

No obstante, los jueces, gracias a la implementación de tecnología, y quienes desarrollaron los ejercicios anteriores determinaron que la velocidad del atleta durante la competencia estaba determinada por la función $v(t) = -t^2 + 8t$ Donde t varía entre 0 y 8, y es el tiempo empleado en la prueba.

a. Determine la velocidad media respecto al punto de salida cuando ha transcurrido:
1 segundo, 2 segundos, 3,5 segundos, 4 segundos, 7,6 segundos
b. Por medio de la función velocidad, ¿ cómo fue el comportamiento de la aceleración del atleta?

13. En el Applet E4 A1 Ejercicio13 se encuentra la gráfica de la trayectoria – tiempo que llevó a cabo el atleta. Se encuentran dos puntos, el punto A que se determina por el

tiempo T0 e indica la velocidad V0 del atleta en un determinado momento; igualmente el punto B determinado por el tiempo T1 e indica la velocidad V1 del corredor en otro momento. A y B pueden ser el mismo punto.

Este subprograma determina, en el renglón morado, la aceleración media cuando el atleta recorre el tiempo de A a B o de B a A, según sea el caso.

a. Determine a T0 = 3.50 y a T1 = 4.50; observe la velocidad V0, V1 y la distancia recorrida desde que el atleta pasó por el punto A hasta cuando pasó por el punto B, que se puede encontrar en $V1 - V0$. ¿Qué valor toma la velocidad media entre A y B?

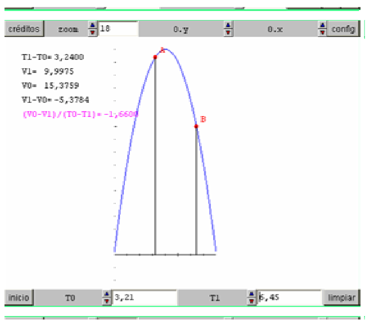


Figura No 41

b. Ubique ahora a T0 = 3.75 y a T1 = 4.25. ¿Qué ocurre con V1 – V0? ¿Qué valor toma la velocidad media entre A y B?

c. Asigne los siguientes valores para T0 y T1 respectivamente: (3.80; 4.20), (3.85; 4.15), (3.90; 4.10), (3.91; 4.09), (3.92; 4.08), (3.93; 4.07), (3.94; 4.06), (3.95; 4.05), (3.96; 4.04), (3.97; 4.03), (3.98; 4.02), (3.99; 4.01). ¿Qué ocurre con V1 – V0 a medida que T0 aumenta y T1 disminuye?

d. En cada uno de los casos del literal anterior, ¿Qué valor toma la aceleración media entre A y B?

e. ¿Puede determinar la aceleración del atleta cuando han transcurrido 4 segundos? Si es así, ¿cuál es la velocidad del corredor en ese momento?

f. Calcule: $\lim_{h \to 0} \frac{v(4+h) - v(4)}{h}$, donde $v(t) = -t^2 + 8t$; Compare su respuesta con la dada en el literal e.

En el aplet E4 A1 Ejercicio14 se encuentra la gráfica de la velocidad – tiempo que llevó a cabo el atleta. Se observa, además, un plano cartesiano en otra escala y el pulsador Tn – T(n-1). Este subprograma divide el tiempo en la cantidad de intervalos que aparecen en el pulsador y determina la aceleración media entre cada uno de esos momentos.

a. Iguale el valor del pulsador Tn – T(n-1) a 1, observe el texto que aparece en pantalla, ¿A qué es igual?

b. Iguale el valor del pulsador a 8. ¿Qué significa esto?, ¿Qué comportamiento tiene la gráfica?

c. Iguale el valor del pulsador a 80. Observe lo que ocurre

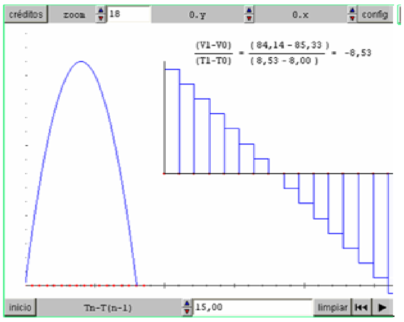



Figura No 42

d. Iguale el valor del pulsador a 1000. ¿Qué ocurre? ¿Qué gráfica se forma?

e. Podría determinar la ecuación de la gráfica resultante

f. Encuentre a'(t) cuando $v(t) = -t^2 + 8t$. Compare su respuesta con la del literal anterior

Se denomina a velocidad instantánea $\langle a \rangle$ a la velocidad que tiene un cuerpo en movimiento. La velocidad instantánea se determina por la igualdad:

$$\langle a \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_n - v_{n-1}}{t_n - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ [EC 84]}$$

Donde v representa velocidad. De esta manera, la función aceleración está dada por $a(t) = \frac{dv}{dt}$

## 3.5 ETAPA 5

## DE LA ACELERACIÓN A LA VELOCIDAD, DE LA VELOCIDAD A LA POSICIÓN, DE LA CINEMÁTICA A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

**Propósito:** En la etapa anterior, luego de haber adquirido la noción de posición, velocidad y aceleración, se llegó a un método matemático para pasar de la función posición a la función velocidad y de la función velocidad a la función aceleración.

Se hace necesario determinar si existe un proceso que permita el proceso inverso del que se ha trabajado; es decir, si conociendo la aceleración, es posible determinar la velocidad y la posición de un cuerpo en movimiento. Para dar respuesta a esta pregunta, es importante partir nuevamente de la función posición.

**Desarrollo:**

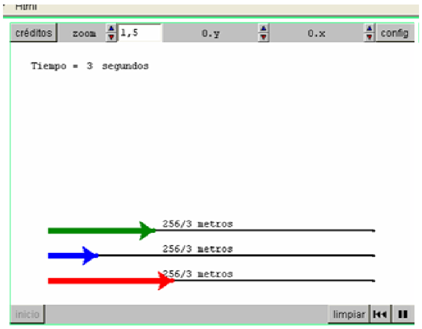
Actividad 5.1

La situación que se plantea, es la misma con la que se llegó a los resultados para determinar la velocidad y la aceleración instantáneas luego de conocer la función posición: En el gran prix de atletismo de la ciudad de Bogotá, un atleta corre 85 metros y $\frac{1}{3}$ en 8 segundos.

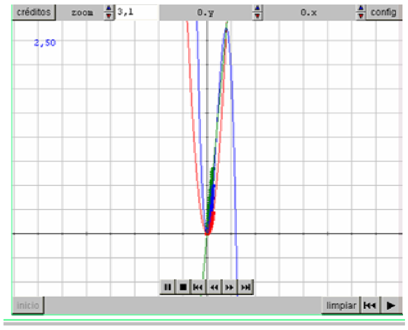
Esta vez, se van a mirar 3 posibilidades para la función que determina la posición respecto al tiempo:

$$\overrightarrow{x_1(t)} = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\hat{i}$$
$$\overrightarrow{x_2(t)} = \left(\frac{4}{3}t^2\right)\hat{i} \qquad \text{[EC 85]}$$
$$\overrightarrow{x_3(t)} = \left(\frac{256}{24}t\right)\hat{i}$$

La animación a esta situación se puede observar en el applet E5 A1 Ejercicio1




E5 A1 Ejercicio 1




E5 A1 Ejercicio 2

Figura No 43

En esa animación es posible observar que las velocidades son distintas y que en algunos momentos, la velocidad del corredor es mayor en las otras dos posiciones.

La visualización de la posición – tiempo se da en el applet E5 A1 Ejercicio2

De acuerdo a la definición de función velocidad, se tiene, para cada una de las situaciones lo siguiente:

$$\overrightarrow{v_1(t)} = \overrightarrow{x_1'(t)} = \left(8t - t^2\right)\hat{i}$$
$$\overrightarrow{v_2(t)} = \overrightarrow{x_2'(t)} = \left(\frac{8}{3}t\right)\hat{i} \quad [EC\ 86]$$
$$\overrightarrow{v_3(t)} = \overrightarrow{x_3'(t)} = \left(\frac{256}{24}\right)\hat{i}$$

Esas expresiones permiten analizar que la velocidad $\overrightarrow{x_1}$ alcanza un máximo y regresa a cero, tal como se estudió en la etapa anterior, la velocidad $\overrightarrow{x_1}$ crece de manera constante y la velocidad en $\overrightarrow{x_3}$ es la misma en cualquier momento.

Nuevamente, de acuerdo a la definición dada para la función aceleración, se tiene, en cada una de las situaciones, lo siguiente:

$$\overrightarrow{a_1(t)} = \overrightarrow{v_1'(t)} = (8-2t)\hat{i}$$
$$\overrightarrow{a_2(t)} = \overrightarrow{v_2'(t)} = \left(\frac{8}{3}\right)\hat{i} \qquad \text{[EC 87]}$$
$$\overrightarrow{a_3(t)} = \overrightarrow{v_3'(t)} = 0\hat{i}$$

Estas tres funciones de aceleración, permiten leer que la aceleración $\overrightarrow{a_3(t)}$ es constante a cero; $\overrightarrow{a_2(t)}$ es constante, diferente a cero y que la aceleración en $\overrightarrow{a_3(t)}$, crece y decrece de acuerdo a lo estudiado en la etapa anterior.

Al movimiento en una dimensión en que la aceleración se comporta de manera similar a $\overrightarrow{a_2(t)}$ , es decir, aceleración constante diferente a cero, se le denomina movimiento uniformemente acelerado.

Al movimiento en una dimensión en que la aceleración es constante a cero, es decir, con velocidad constante se le denomina movimiento rectilíneo uniforme.

A partir de ahora, se va a trabajar con aceleración constante diferente a cero, teniendo en cuenta, para algunos ejercicios la función de posición determinada por $\overrightarrow{x_2}$

1. Determine la velocidad media del atleta que corre en el gran prix de atletismo de Bogotá
2. Evalúe $\overrightarrow{x'_2(8)} = \overrightarrow{v_2(8)}$
3. Encuentre la relación numérica que existe entre la respuesta del numeral 1 y la respuesta del numeral 2.
4. considere un cuerpo cualquiera que se mueve con la ecuación $\overrightarrow{x(t)} = (mt^2)\hat{i}$ , donde m es un real distinto de cero.

a. Encuentre la forma general del vector velocidad $\overrightarrow{v(t)}$ y del vector aceleración $\overrightarrow{a(t)}$del cuerpo en cualquier tiempo t

b. Determine la velocidad media del cuerpo cuando ha transcurrido t tiempo.

c. ¿Encuentre la relación entre la velocidad media y el componente escalar del vector velocidad?

El desarrollo de los ejercicios anteriores deja como resultado que a partir de la ecuación de la trayectoria de un cuerpo en movimiento de la forma $\overrightarrow{x(t)} = \left(zt^2\right)\hat{i}$ , donde z es un real distinto de cero, la velocidad media se determina por:

$$v_m = \frac{\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{x(0)}}{t-0} = \frac{\overrightarrow{x(t)}}{t} = \left(\frac{zt^2}{t}\right)\hat{i} = z\hat{i} \qquad \text{[EC 88]}$$

En la última igualdad, de acuerdo a la manera de trabajar en la etapa anterior, se tiene que

$$\frac{\overrightarrow{x(t)}}{t} = \frac{\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{x(0)}}{t-0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_m \qquad \text{[EC 89]}$$

Así:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x(t)} &= \Delta x \\ t &= \Delta t \end{aligned} \qquad \text{[EC 90]}$$

Por otro lado, el vector velocidad se determina por:

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{x'(t)} = \left(2zt\right)\hat{i} = 2v_m \quad \text{[EC 91]}$$

Y la aceleración está dada por

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{v'(t)} = \left(2z\right)\hat{i} \qquad \text{[EC 92]}$$

Por lo que

$$\overrightarrow{v(t)} = \left(at\right)\hat{i} = 2v_m \qquad \text{[EC 93]}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{at}{2} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Delta x &= \frac{at}{2}\Delta t \qquad \text{[EC 94]} \\ x(t) &= \left(\frac{at}{2}\right)t = \frac{at^2}{2} \end{aligned}$$

5. Sea un cuerpo cualquiera que se mueve con aceleración constante a, la velocidad incrementa o disminuye uniformemente de acuerdo con at a partir de un valor inicial $v_i$. Lo anterior significa que el valor instantáneo de la velocidad v se da por la ecuación

$$\overrightarrow{v(t)} = \left(v_i + at\right)\hat{i} \text{ [EC 95]}$$

. a) Encuentre la forma general del vector aceleración $\overrightarrow{a(t)}$ del cuerpo en cualquier tiempo t

b) Determine $\overrightarrow{v(0)}$

c) Determine la velocidad promedio del cuerpo cuando ha transcurrido t tiempo. Tenga en cuenta que la media entre dos valores a y b se determina por $\frac{a+b}{2}$

d) ¿Encuentre la relación entre la velocidad promedio y el componente escalar del vector velocidad?

El desarrollo de los ejercicios anteriores permite escribir la velocidad promedio del cuerpo en movimiento como:

$$v_m = \frac{v_i + v_i + at}{2} = v_i + \frac{at}{2} \qquad \text{[EC 96]}$$

Teniendo en cuenta el tratamiento dado en la etapa anterior, $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, es posible tener presente que:

$$\Delta x = v_m \Delta t$$
$$\Delta x = \left( v_i + \frac{at}{2} \right) \Delta t \qquad \text{[EC 97]}$$

Esta vez, se supone que $\Delta x = x - x_i$, teniendo en cuenta que la velocidad en $v_i$ es distinto a cero, por lo que:

$$x - x_i = \left( v_i + \frac{at}{2} \right) t \qquad \text{[EC 98]}$$

Ya que el tiempo inicial si se ha considerado nulo. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{x(t)} = \left( x_i + v_i t + \frac{at^2}{2} \right) \hat{i} \qquad \text{[EC 99]}$$

Con a constante, $x = x_i ; v = v_i ;$ cuando t=0.

En notación del cálculo diferencial, el proceso de la etapa anterior y el trabajo desarrollado en esta primera parte de esta sección, se puede resumir de la siguiente manera:

Actividad 5.2 Ecuaciones Diferenciales

Las expresiones [1] $\frac{dv}{dt} = a$ [2] $\frac{dx}{dt} = v$ se denominan ecuaciones diferenciales.

| Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparecen derivadas o diferenciales |
|---|

El método más práctico para resolver las ecuaciones diferenciales [1], y [2] consiste en utilizar la operación inversa a la integral. Es importante reconocer que al integrar una función que se ha derivado previamente no necesariamente, el resultante es la función inicial.

Sin embargo, tal como se ha mostrado en la conclusión anterior, a veces se mencionan algunas condiciones. Anteriormente se dijo:

[1] $\frac{dv}{dt} = a$; con velocidad inicial $v_i$; constante [EC 100]

$$\begin{aligned} dv &= adt \\ \int dv &= \int adt \\ v &= at + C \end{aligned} \quad \text{[EC 101]}$$

C, constante. Como la condición inicial es que la velocidad es $v_i$ constante, encontrando solución a la ecuación planteada. Eso es:

$$v = at + v_i \quad \text{[EC 102]}$$

En la que a y $v_i$ son reales conocidos.

Si $g(x)$ es una función continua es posible integrar con respecto a x en la ecuación anterior, eso es:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dx} dx &= \int g(x) dx \\ \int dy &= \int g(x) dx = G(x) + k \end{aligned} \quad \text{[EC 103]}$$

Dónde *G(x)* es la integral indefinida de g(x) y k es una constante.

A las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ se les denomina ecuaciones diferenciales de variables separables.

Para encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de variables separables se prosigue con el siguiente algoritmo:

Sea $p(y) = \frac{1}{h(y)}$.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$
$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$
$$p(y)dy = g(x)dx \qquad \text{[EC 104]}$$
$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$
$$P(y) = G(x) + k$$

Donde *P(Y)* y *G(x)* son las antiderivadas de $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ y $g(x)$ respectivamente. Si se da una condición inicial, por ejemplo la velocidad inicial o la posición inicial en las ecuaciones expresiones [1] $\frac{dv}{dt} = a$ [2] $\frac{dx}{dt} = v$ la constante K se reemplaza por dicho valor. De lo contrario se asume como un número real cualquiera.

## 3.6 ETAPA 6
## CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

**Propósito:** A continuación se va a iniciar el estudio del movimiento de cuerpos que son lanzados por el aire con una velocidad inicial y un ángulo respecto a la horizontal.

**Desarrollo:**

1. Abra el archivo E6 A1 Ejercicio1. En este aparece un aplett de Descartes en el que se pretende que a partir del lanzamiento de un proyectil le de a una zona cercana al cuadrado.

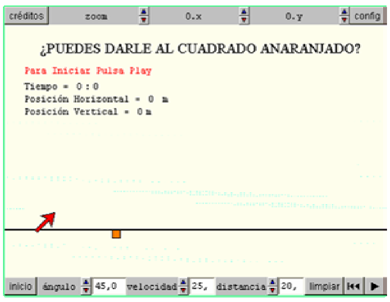



Figura No 44

En las etapas anteriores se trabajó con el movimiento de un cuerpo sobre el piso o sobre el aire, pero nunca se hizo alguna combinación, como la que se obtiene en la actividad anterior. La línea horizontal representa el piso, lo que está por encima de ella es aire y lo que está por debajo de ella está dentro del piso, en el subsuelo.

a. ¿Qué pasa con la trayectoria de un objeto cuando usted lo lanza al aire?

b. ¿Conoce usted un objeto que con sólo lanzarlo no caiga? Si su respuesta es afirmativa, ¿Tiene ese objeto algún tipo de propulsión o mecanismo que la mantiene en el aire?, ¿Qué pasaría si dicha propulsión o mecanismo falla?

La Tierra está afectada por una aceleración conocida por todos: La Gravedad. Esta aceleración propia de la Tierra hace que todo cuerpo tienda a caer.

Si se considera un segmento de la superficie de la Tierra y se ubicara en un plano de coordenadas, de tal manera que el suelo coincida con el eje x de dicho sistema:

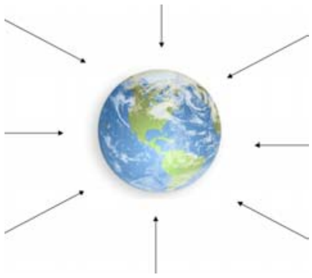


Figura No 45

Figura No 46

Se tendría que la gravedad es una fuerza que actúa en sentido negativo; hecho que se debe tener en cuenta en la ecuación de la posición de un cuerpo.

A partir de la anterior información, el trabajo que se desarrolla a continuación se hace bajo la aceleración constante, y esa aceleración, en el caso del planeta tierra se toma como $9.8\ \frac{m}{s^2}$

2. Abra el archivo E6 A1 Ejercicio2. En el encontrará el vector velocidad inicial con el que se pretende lanzar un objeto, al igual que su inclinación respecto a la horizontal:

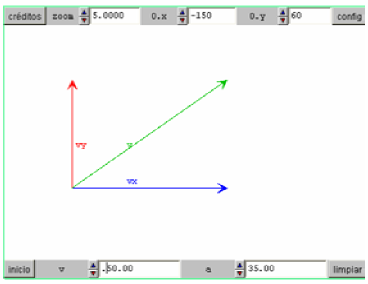



Figura No 47

a. Determine las componentes horizontal y vertical de $\overrightarrow{v_0}$ cuando:

$\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 25$ y $a = 60°$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 25$ y $a = 30°$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 30$ y $a = 45°$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 50$ y $a = 35°$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = v$ y $a = \theta$

b. Determine las componentes horizontal y vertical del vector aceleración. ¿Qué sentido tiene el vector aceleración cuando se hace la representación en el plano cartesiano?

c. Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector velocidad en cualquier momento, teniendo en cuenta que la aceleración es constante, que la posición inicial del objeto que se va a lanzar es el origen del plano cartesiano y que:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \quad [EC\ 105]$$

d. Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector posición en cualquier momento, teniendo en cuenta que la aceleración es constante, que la posición inicial del objeto que se va a lanzar es el origen del plano cartesiano y que:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \quad \text{[EC 106]}$$

En el último ejercicio realizado, se llegó a que con cualquier aceleración constante, y en cualquier momento, las componentes del vector velocidad están determinadas por la ecuación:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + at \\ v_y &= v_{0y} + at \end{aligned} \quad \text{[EC 107]}$$

Igualmente, se determinó que las componentes del vector posición para cualquier momento se encuentran por medio de la ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{at^2}{2} \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} \end{aligned} \quad \text{[EC 108]}$$

Como en la Tierra el vector aceleración natural es la gravedad y además en esta propuesta no se tienen en cuenta otras fuerzas, se asume que el vector aceleración es:

$$\vec{a} = -g \quad \text{[EC 109]}$$

Por su naturaleza, la componente horizontal de la aceleración $a_x$ es nula.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras y el trabajo realizado en la etapa de vectores y en ejercicios anteriores,

$$\overrightarrow{v_o} = (v_o \cos\theta)\hat{i} + (v_o \sin\theta)\hat{j} \qquad \text{[EC 110]}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_{ox}} &= (v_o \cos\theta)\hat{i} \\ \overrightarrow{v_{oy}} &= (v_o \sin\theta)\hat{j} \end{aligned} \quad \text{[EC 111]}$$

De acuerdo a lo realizado en los ejercicios anteriores, y con base a la explicación anterior, determine las ecuaciones de las componentes del vector posición.

De igual forma, determine las componentes del vector velocidad.

3. En el aplet E6 A1 Ejercicio3[2] se puede hacer la simulación del lanzamiento de un objeto, con una determinada velocidad inicial, la cual puede variar y con un ángulo que se modifica entre 0 y 90º. Con ayuda de ese aplet ejecute:

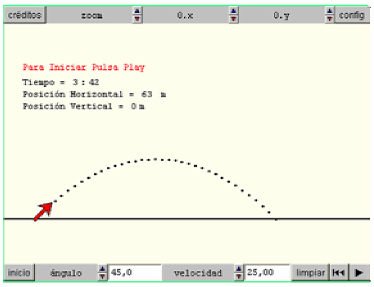


Figura No 48

$\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 25$ y $a = 60º$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 25$ y $a = 30º$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 30$ y $a = 45º$ ;

$\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 50$ y $a = 35º$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 50$ y $a = 55º$ ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = v$ y $a = \theta$

a. Determine la distancia horizontal que recorre el cuerpo desde el instante en que parte hasta el momento en que toma contacto con el piso. ¿Descubre alguna regularidad?

b. Con los datos del ejercicio anterior, determine la altura máxima y el tiempo que se demora cada uno de los objetos en llegar al punto máximo. Recuerde que en ese momento la velocidad es nula

[2] Las actividades E6 A1 Ejercicio1 y E6 A1 Ejercicio3 son modificaciones del aplett Tiro Parábolico diseñado por el profesor José Luís Abreu que se encuentra en la sección de ejemplos de la documentación del paquete de descarga del proyecto Descartes

## 3.7 ETAPA 7
## LAS PARÁBOLAS DE SEGURIDAD

**Propósito:** Se solucionará la siguiente situación: *Desde un punto en una región plana se lanzan proyectiles similares con la misma velocidad inicial, pero con ángulos que varían entre 0 y 180 grados respecto a la horizontal. ¿Por cuáles puntos del espacio puede pasar el proyectil?, ¿A qué puntos no llega? ¿Se puede caracterizar la región del espacio por la que dichos proyectiles pueden pasar?*

**Desarrollo:**

1. Un proyectil es lanzado desde el origen con una velocidad inicial de $30m/s$; determine el ángulo $\theta$ con el cual debe ser lanzado el proyectil para que en su trayectoria se interseque con los puntos $R(20,20)$, $S\left(\frac{300\sqrt{29}}{49},40\right)$ y $T(53,50)$

a. Observe el applet E7 A1 Ejercicio1 En este se puede apreciar la familia de parábolas que son el resultante del movimiento del lanzamiento de un proyectil con velocidad inicial $30m/s$ y ángulo variado entre 0º y 90º

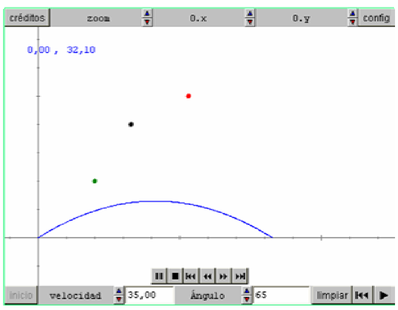



Figura No 49

b. ¿Qué ocurre?

2. Describa que ocurre si un proyectil se lanza siempre con la misma velocidad inicial, pero su ángulo de lanzamiento varía entre 0 y 180 grados, ¿Se podrá determinar la región en la que un objeto puede ser impactado?

En el archivo E7 A1 Ejercicio2 podrá encontrar una ayuda para responder la anterior pregunta; en este, aparece la parábola de la trayectoria de un objeto lanzado con una velocidad inicial aleatoria y un ángulo que varía entre 0 y 180 grados. Si desplaza el punto A alrededor de la circunferencia, verá que la parábola se modifica:

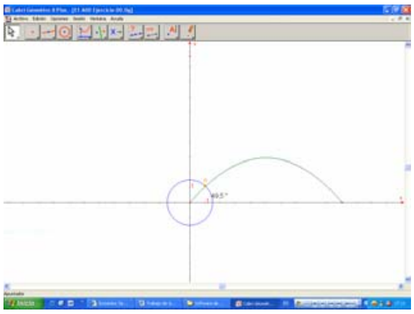


Figura No 50

Con ayuda de la herramienta lugar, determine el lugar geométrico determinado por la parábola:

Para ello, seleccione la herramienta lugar, luego seleccione la parábola y finalmente seleccione el punto A. Aparecerán algunas de las parábolas; lo cual indica que hay puntos en el plano que no serán alcanzados por la trayectoria de los proyectiles.

3. Para complementar el trabajo, en el archivo E7 A1 Ejercicio3 encontrará un applet del proyecto Descartes en el que se visualizan los posibles trayectos de las parábolas que resultan al lanzar un objeto desde un mismo punto con la misma velocidad inicial y con un ángulo entre 0 y 180 grados. Siga las instrucciones propuestas en el archivo y responda la siguiente pregunta:

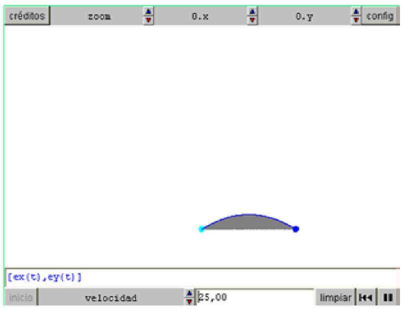


Figura No 51

a. ¿Qué forma toma la región sombreada determinada por el trayecto parabólico de todos los objetos lanzados desde un mismo punto?

4. En el archivo E7 A1 Ejercicio4, se encuentra la envolvente de todas las parábolas que tienen una determinada velocidad inicial; esto es posible visualizar cuando se mueve el punto C:

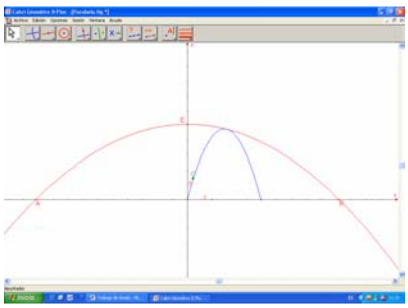


Figura No 52

El punto E corresponde a la intersección de la envolvente de todas las parábolas que representan la trayectoria del lanzamiento de un proyectil con la misma velocidad inicial y el eje y.

a. Trace la circunferencia con centro en E y radio el origen, con ayuda de la herramienta Circulo

b. Con la herramienta recta perpendicular, trace la recta perpendicular al eje y que pasa por E. Denomine a esta recta como recta l.

c. Con la herramienta punto sobre objeto, ubique un punto P en la envolvente, y encuentre la distancia OP y la distancia entre la recta l y el punto P. ¿Qué puede concluir?

5. Verifique ahora que en efecto la envolvente estudiada es una parábola:

Cuando el ángulo de lanzamiento es 45º o 135º, el alcance máximo es $\frac{v_o^2}{g}$, lo cual significa que a esta distancia se encuentra el lugar más lejano que un lanzamiento alcanza horizontalmente; de igual manera, cuando el ángulo de lanzamiento el 90º, la altura máxima que alcanza es $\frac{v_o^2}{2g}$; análogamente, a esta distancia se encuentra el lugar más lejano que un lanzamiento alcanza horizontalmente.

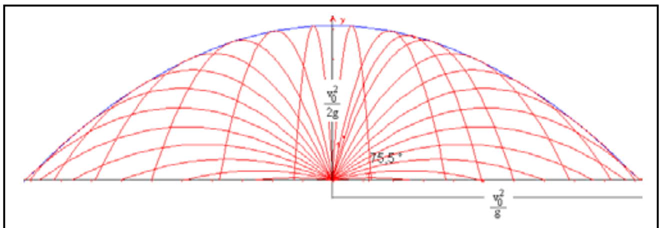


Figura No 53

a. ¿Qué relación hay entre $\frac{v_o^2}{2g}$ y $\frac{v_o^2}{g}$ ?, ¿Tienen estos datos relación con las ecuaciones de las parábolas?

6. ¿Que relación hay entre la parábola de seguridad y la trayectoria de un proyectil?

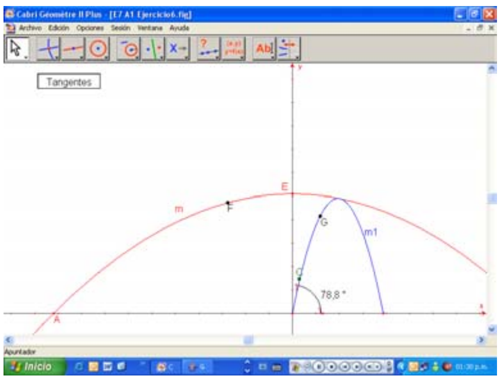


Figura No 54

En el archivo E7 A1 Ejercicio6 están ilustrados el lanzamiento de un proyectil (parábola m1 de color azul) con una determinada velocidad inicial y ángulo que puede variar cuando se modifica el punto C, y la parábola de seguridad (parábola m de color rojo) de los lanzamientos con la misma velocidad.

a. A partir de lo que observa, ¿En cuántos puntos se intersecan la parábola m y la parábola m1?, ¿Cómo lo puede determinar?

b. En la parábola m se encuentra el punto F, de la misma forma, el punto G es un punto sobre la parábola m1. Con el botón Tangentes, encuentre la recta tangente a m por F y la recta tangente a m1 por G

c. Acerque los puntos F y G a la zona de intersección de las parábolas m y m1; ¿Qué observa?, ¿La respuesta a la pregunta del literal anterior ha cambiado?

d. Aleje los puntos F y G de la zona de intersección, y encuentre el o los puntos de intersección de las parábolas m y m1 con la herramienta intersección de dos objetos.

e. ¿En cuántos puntos se intersecan la parábola m y la parábola m1?

f. Acerque los puntos F y G de tal manera que coincidan con el punto E, ¿Qué ocurre con las rectas tangentes? Qué ocurre con las derivadas de las parábolas en el punto E?

7. Derive con respecto a x las ecuaciones

$$y_1 = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o^{\,2}}\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$y_2 = \frac{v_o^{\,2}}{2g} - \frac{gx^2}{2v_o^{\,2}}$$

Dónde $\tan\theta$, g, $v_o^2$ son constantes.

a. Qué relación existe entre $\tan\theta$ y x para que $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$

Pero, ¿será el punto $x = \frac{v_o^2}{\tan\theta}$ el único punto de intersección entre la parábola de seguridad y la trayectoria de un proyectil que se lanza a un ángulo $\theta$ con velocidad inicial $v_o$ ? Use la fórmula cuadrática y encuentre los posibles valores para $\tan\theta$ de la ecuación

$y_1 = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o^{\,2}}\left(1+\tan^2\theta\right)$

**Nota:** Las construcciones realizadas en Cabri Geometre y Descartes que se presentan en este trabajo son propias del autor, a excepción de las actividades E6 A1 Ejercicio1 y E6 A1 Ejercicio3, modificaciones del aplett Tiro Parábolico diseñado por el profesor José Luís Abreu que se encuentra en la sección de ejemplos de la documentación del paquete de descarga del proyecto Descartes

# 4. CONCLUSIONES

La importancia de las matemáticas en otras ciencias ha tenido gran acogida en los procesos de enseñanza y aprendizaje durante la educación básica. Tanto los docentes como los estudiantes reclaman la posibilidad de aplicar el conocimiento adquirido en otras áreas en el contexto de resolución de problemas. Bajo esta afirmación, la física es la rama por excelencia en la cual se pueden ilustrar algunas de las aplicaciones de la teoría estudiada en los diferentes tópicos de la matemática escolar; específicamente, aplicaciones de la geometría analítica como el estudio del concepto de parábola, y aplicaciones del cálculo fundamentado en las disertaciones sobre ecuaciones diferenciales son dos de los grandes candidatos para mostrar al estudiante las relaciones existentes entre las matemáticas y otras ramas del conocimiento como lo es la física. A partir de esta idea, el estudio de las parábolas de seguridad generadas por la teoría del lanzamiento de proyectiles en el estudio de la cinemática se convierte en una herramienta potente para lograr el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de educación básica.

Se pretende que la propuesta sea desarrollada bajo una visión conjunta de la enseñanza y aprendizaje mecanicista y significativo a partir de la interacción de la matemáticas con la física y el uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase, de tal manera que los estudiantes encuentren aplicaciones de las matemáticas en el mundo real, en la situación problema que se plantea. De esta manera se ofrece una visión de las matemáticas como ciencia base y ciencia integradora de conocimientos que se pueden trasladar a contextos que el estudiante tiene a su alcance.

La situación problema permite estudiar diferentes contenidos matemáticos que se abordan en la escuela durante la educación básica y media, con los cuales el alumno de undécimo grado puede recordar y asimilar temas en los que se ha involucrado durante su formación matemática.

Elaborar consideraciones con respecto a la interdisciplinariedad de las ciencias y el uso de tecnología en la formación matemática de estudiantes de educación media, motiva indudablemente una reflexión en torno a las diferentes ramas de las matemáticas que el alumno conoce y le brinda una concepción de la actividad matemática, de la enseñanza y del aprendizaje. Particularmente, el estudio de las parábolas de seguridad por medio de una unidad didáctica hace posible determinar la importancia que tiene el análisis de los contenidos matemáticos, en la actividad reflexiva que desarrolla el estudiante con miras a generar un saber de carácter práctico que lo prepare para su futuro.

La propuesta requiere de computadores que tengan instalados los programas con los que se plantean las actividades: Cabri Geometre y Descartes, exigiendo el conocimiento previo de los docentes y de los estudiantes sobre la manera de trabajar con los paquetes computacionales.

Se sugiere que los estudiantes con los que se trabaje la propuesta planteada en este documento, manejen la noción de derivada y hayan sido introducidos en algunas de las bases del cálculo integral

La propuesta queda abierta para la aplicación en el aula de clase de tal manera que se pueda ampliar, complementar y desarrollar instrumentos evaluativos sobre el aprendizaje de la geometría analítica, el cálculo y, en especial, el desarrollo del pensamiento del estudiante en relación a la noción de ecuación diferencial.

# 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ACOSTA, Martín. (2005) Geometría Dinámica. Exploración y demostración. En: I Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. 2005

APÓSTOL, Tom (1988 a) Calculus Volumen I. Segunda Edición. Editorial Reverté Colombiana. Bogotá, D.C.

APÓSTOL, Tom (1988 b) Calculus Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverté Colombiana. Bogotá, D.C.

AUSUBEL (1963) The psycology of Meaningful Learning. Grune and Stratton. Nueva York.

AUSUBEL, D.P., NOVAK., HANESIAN H., (1983) Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo, Editorial Trillas. México DF México

BARRIOS, GUERRERO (2005) La formulación de unidades didácticas, un propósito de enseñanza en la formación de profesores. *Algunas consideraciones a partir de un estudio de caso.* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.

CHEVALLARD (1991) La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado, Aique, Buenos Aires Argentina

CHOW, Tai L. (1995) Integration of Newton's Equations of Motion. En: Classical Mechanics. Editorial Addison Wesley. Nueva York. Estados Unidos. pp 67 - 73

CORVALÁN, Fernando (2004) Más de lo mismo. En: Suma No. 47 noviembre 2004. Madrid España. PP89 - 92

DORFLER, W. (1993), Computer Use and Views of the Mind, Learning from Computers: mathematics Education and Technology, Keitel, C. & Ruthven, K. (editoress), Nato Asi Series, 121. Berlin: Springer-Verlag,

ERNEST P. (1997). Introduction: Semiotics, mathematics and mathematicas education. Revista *Philosophy of Mathematics Education Journal*, No. 10.

GASCÓN, J (2003) (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1): 7-33.

GODINO, Juan (2003) Perspectivas de la didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática" Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada España.

KÔPPEN, Elke; MANSILLA Ricardo; MIRAMONTES Pedro (2005). La interdisciplina desde la teoría de los sistemas complejos. Revista Ciencias No. 079 Julio – Septiembre. Universidad Autónoma de México UNAM México D.F. México pp 4 - 12

LABORDE Colette. (1998) Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En Puig, Luis. Investigar y Enseñar. Variedades de la educación matemática. Universidad de los Ándes. Bogotá D.C.

LEHMANN, Charles. (1996) Geometría Analítica. Limusa Noriega Editores. México D.F. México

LLINARES, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte y L. Serrazina (Eds.), Educaçao matemática en Portugal, Espanha e italia. Acta da Ecola de Verao-1999. (pp. 109-132). Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao. Lisboa Portugal

MAJMUTOV, M.I. (1983) La Enseñanza Problémica III parte Editorial Pueblo y educación, La Habana Cuba.

MECD (2006). El proyecto Descartes. http://descartes.cnice.mecd.es. Ministerio de Educación y Ciencia Español.

MEN (1998) Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Grupo Editorial Magisterio. Bogotá, D.C

MEN (2003) Estándares Básicos en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Grupo Editorial Magisterio. Bogotá, D.C

MEN (2004) Tecnología Informática: Innovación en el currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media. Bogotá, D.C

MINED (1999) Programas de Matemática para la Educación Secundaria Selccionada. Ministerio de Educación Cubano. La Habana Cuba

MOREIRA, Marco. (2000) Aprendizaje Significativo Crítico. Actas III Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo, p.p. 33-45 con el título original de *Aprendizaje Significativo Subversivo*. Traducción de *Ileana Greca y María Luz Rodríguez Palmero.*

MORENO ARMELLA Luís Enrique (2002) Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Serie Memorias. P. 67,

NCTM. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics. USA

NIETO, José Heber (1999). La matemática y sus relaciones con otros campos del Conocimiento. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas Universidad del Zulía. Maracaibo Venezuela.

NOVAK, J. D. (1991) Ayudar a los alumnos a aprender cómo aprender. La opinión de un profesor-investigador. Enseñanza de las Ciencias, 9, pp. 215-228.

POSADA José María de; (2002) Memoria, Cambio Conceptual y Aprendizaje de las Ciencias, Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias Vol. 1 Nº 2 pp. 1-22

ROIG, A. LLINARES, S. (2004) Dimensiones de la competencia matemática al finalizar la educación secundaria obligatoria. Caracterización y análisis. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante. España

SANTOS TRIGO, Luz Manuel. (2000) Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamericana. México D.F México.

Santos Trigo, Luz Manuel. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.* Vol X, No2. pp. 195-212.

SANTOS TRIGO, M. & BENITEZ D. (2003). Herramientas Tecnológicas en el Desarrollo de Sistemas de Representación para la Resolución de Problemas. *Perfiles Educativos,* Vol. XXV, No. 100, pp. 23-41.

SANTOS TRIGO, M. & VARGAS, C. (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. Avance y Perspectiva, 22, pp. 9-22.

SWOKOWSKI, Earl. (1988) Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamericana. Bogotá D.C

VAQUERO Y FERNÁNDEZ de Ch. C. (1987). *La Informática Aplicada a la Enseñanza.* Eudema. S.A. Madrid P 37

VARGAS DE AVELLA, Martha. CAB (2003) Materiales Educativos. Procesos y Resultados. Convenio Andrés Bello. Bogotá, D.C.

VYGOTSKY, L. S. (1979). El desarrollo de las funciones psicológicas superiores, Editorial Grijalbo. Barcelona España

ZILL, Dennis. (1997) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Tercera Edición. Grupo Editorial Iberoamericana. México D.F: México