TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO, CON PROYECCIÓN CULTURAL Y APORTE A LA PAZ

LEIDY PAOLA ARANTXA ROBAYO TORRES

Código 2014140069

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2021

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO CON PROYECCIÓN CULTURAL Y APORTE A LA PAZ

Trabajo asociado al estudio de un asunto de interés del estudiante para optar al título de Licenciado en Matemáticas

LEIDY PAOLA ARANTXA ROBAYO TORRES

Código 2014140069

Asesora:

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2021

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO CON PROYECCIÓN CULTURAL Y APORTE A LA PAZ"**, elaborado por la estudiante **LEIDY PAOLA ARANTXA ROBAYO TORRES,** identificada con el Código **2014140069** y Cédula **1026279423**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cinco** (**45**) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los veinticuatro (24) días del mes de junio de 2021.

Dra. LEONOR CAMARGO URIBE
Directora del Trabajo de grado

Dra. CLAUDIA SALAZAR AMAYA
Jurado del Trabajo de grado

Mg. LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO
Jurado del Trabajo de grado

TABLA DE CONTENIDO

FIGURAS

TABLAS

DEDICATORIA

Dedico con mucho cariño este trabajo de grado a las tres mujeres más importantes de mi vida. A mi mamá Lucía, a mi abuelita Herminda y a mi tía Yadira. Gracias por ser ejemplo de lucha y valentía.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a mi madre por ser mí luz en cada etapa de mi vida.

A Miller Moreno por apoyarme y acompañarme en cada paso que he dado en esta etapa tan importante de mi vida.

A la profesora Leonor Camargo por su tiempo y profesionalismo, por su ayuda para la realización de este trabajo de grado.

A el profesor Andrey Téllez, a la profesora Martha Lucía Rendón, al profesor Leónidas Ospina, al profesor Gerardo y a los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional por ser parte esencial de este sueño.

Por último, a mis amigos y compañeros que contribuyeron de alguna manera en mi formación.

RESUMEN

En este trabajo de grado presento una secuencia de tareas para desarrollar el tema transformaciones geométricas en el aula, haciendo uso de patrones figurales de la manilla Embera. Además de contribuir al aprendizaje de este contenido matemático, el trabajo contribuye a desarrollar conciencia sobre valores culturales colombianos y a construir un país en paz. El documento se compone de tres partes: (1) la fundamentación didáctica, para lo cual tuve en cuenta las perspectivas teóricas de etnomatemática, enculturación matemática, teoría de la objetivación cultural y geometría transcultural. (2) Los referentes matemáticos y los análisis geométricos de algunas figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera y (3) el diseño y la propuesta de una secuencia de tareas, diseñada bajo el marco sugerido por Gómez y Velazco (2018).

PALABRAS CLAVES

Etnomatemática, enculturación matemática, los Embera, la manilla Embera, figuras y tradicionales, transformaciones geométricas, diseño de tareas.

INTRODUCCIÓN

El presente documento es una monografía de Trabajo de Grado, requisito para optar por el título de Licenciada en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Presento una propuesta de enseñanza para introducir las nociones de dos transformaciones en el plano con una perspectiva cultural y de aporte a la paz. La propuesta está dirigida a estudiantes de secundaria, específicamente de grado séptimo.

Por muchos años la educación matemática se ha planteado retos dirigidos a atraer el interés de los estudiantes por construir su conocimiento. En este sentido, señalo que la creación de propuestas de enseñanza enmarcadas en circunstancias o problemas que pertenezcan al entorno de los estudiantes puede contribuir a atraer su interés por esta área del conocimiento. Si pensamos en el entorno de los estudiantes de la ciudad de Bogotá, podemos ver que es rico y diverso; por ende, está lleno de situaciones que pueden servir para crear propuestas de enseñanza que contribuyan al aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, en la ciudad encontramos a miembros de la comunidad indígena Embera, que están allí debido al desplazamiento forzado y a la pobreza en sus territorios y que para sobrevivir venden manillas.

En las manillas Embera podemos identificar diseños que contienen patrones figurales que se configuran a partir de transformaciones geométricas de figuras tradicionales. Estas figuras tradicionales, también tienen un patrón figural que se conforma a partir de traslaciones, simetría axial y rotaciones. En este trabajo uso la expresión "figura tradicional" para hacer alusión a una configuración que Opazo (2017) denomina patrón tradicional porque representa elementos culturales de la cosmovisión de los Embera.

Tres referentes didácticos fundamentan la intención mencionada. En primer lugar, está la Etnomatemática, que es un área con un gran potencial pedagógico para aprovechar el entorno cultural a favor de la enseñanza. Nos invita a reconocer, valorar y comprender las interpretaciones que otras culturas, como la comunidad indígena Embera, tienen sobre el conocimiento matemático. Este reconocimiento nos brinda herramientas para analizar dicha cultura, entenderla, rescatarla, transmitirla y valorarla. En segundo lugar, me refiero a los planteamientos de D' Ambrosio (2008) y Bishop (1991) quienes consideran a la educación matemática como un proceso social y a las matemáticas como un producto cultural, por lo que, desde su punto de vista, no existe una sola matemática sino muchas. Bishop (1991), por ejemplo, plantea cinco actividades esenciales relacionadas con el entorno, que sirven para interpretar el desarrollo del conocimiento matemático en diferentes culturas; estas son: contar medir, localizar, explicar y diseñar. En esta última actividad enmarco la confección de las manillas de la comunidad indígena Embera y uso este legado cultural para crear una propuesta de enseñanza enfocada en las transformaciones en el plano, que permita a los estudiantes aprender geometría a la vez que acceden a la cultura Embera de forma activa y crítica. Además, en la propuesta busco darles a los contenidos matemáticos contexto para promover una pedagogía de la paz donde se respete las diferencias y la diversidad sociocultural. En tercer lugar, menciono las aproximaciones culturales que sugieren Radford (2006) y Aroca (2007). El primero afirma que la educación matemática está dotada de un componente histórico, social y cultural. El segundo, reconoce que además del pensamiento matemático occidental existe una diversidad de pensamientos matemáticos en el mundo y presenta la geometría transcultural (ver más adelante) como una posición política que valora el pensamiento de una cultura que por siglos ha sido oprimida, sin dejar de lado los elementos de la matemática universal.

Este trabajo se compone de cinco capítulos. En el **capítulo 1**, presento la justificación del trabajo de grado, estudios previos, orientaciones curriculares y planteamiento del problema. Para ello, me baso en la importancia que tiene la Etnomatemática, al hacer visible las matemáticas de comunidades indígenas colombianas, como los Embera. En este sentido, me centro en el diseño de las manillas Embera. Estos diseños están conformados por figuras tradicionales que tienen un gran valor tanto cultural como geométrico. Luego, hago énfasis en la importancia de crear una propuesta de enseñanza para estudiantes del aula urbana, que contribuya al aprendizaje de las transformaciones en el plano a través del acceso a la cultura Embera y a su situación actual en el país. Expongo, además, los objetivos generales y específicos del trabajo.

En el **capítulo 2**, presento los referentes conceptuales del trabajo. Este consta de dos partes, el referente didáctico y el referente matemático. En el primero, menciono la Etnomatemática, la enculturación matemática, la teoría de la objetivación cultural y la geometría transcultural. En el segundo, presento algunas definiciones de objetos que intervienen en la caracterización de las transformaciones en el plano junto con su noción. Además, realizo un análisis geométrico de algunas figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera, haciendo uso del método de deconstrucción empleado por Aroca (2007) en su trabajo.

En el **capítulo 3**, presento la metodología llevada a cabo para el desarrollo de este trabajo. Para ello, indico las fases adelantadas para el cumplimiento de los objetivos.

En el **capítulo 4**, describo cada una de las tareas matemáticas de la secuencia de tareas, teniendo en cuenta algunos elementos que describen una tarea matemática sugeridos por Gómez y colaboradores (2018).

En el **capítulo 5**, presento las conclusiones del trabajo. Hago énfasis en el nivel de alcance de los objetivos planteados, las limitaciones y proyecciones de mi trabajo de grado.

CAPÍTULO 1

DELIMITACIÓN DEL TRABAJO

1.1 CONTEXTUALIZACIÓN

La Etnomatemática es la matemática que practican diferentes grupos sociales bien definidos. La palabra etnomatemática está llena de significado, el cual es evidenciable al interpretar sus raíces: **etno** encierra el ambiente natural, social, cultural e imaginario; **matema** hace relación a explicar, aprender, conocer, lidiar con y **tica** hace alusión a modos, estilos, artes y técnicas (D'Ambrosio, 2008). Sin embargo, según Aroca (2016) diferentes investigadores etnomatemáticos han hecho diversas interpretaciones de estas raíces, transformando lo planteado por D´Ambrosio en diferentes direcciones que pueden generar confusiones al investigador y al educador matemático. Por tal razón Aroca (2016) propone dejar de centrarse en la definición etimológica y más bien construir el significado de etnomátematica como una perspectiva que reconoce, valora y comprende las interpretaciones que otras culturas, tienen sobre el conocimiento matemático. Este reconocimiento brinda herramientas para analizar dicha cultura, entenderla, rescatarla y transmitirla. En este sentido la etnomatemática implica asumir una posición política de respeto a los valores producidos en contextos culturales diversos.

La Etnomatemática está tomando fuerza en nuestro país y esto se puede evidenciar en el creciente número de trabajos e investigaciones que se pueden encontrar. En la Revista Latinoamericana de Etnomatemática, publicada por la Red Latinoamericana de Etnomatemática del Departamento de Estadística y Matemáticas de la Universidad de Nariño, que se publica cuatrimestralmente, se divulgan trabajos de investigación en esta área de la Educación Matemática. Una muestra de ello es el trabajo de investigación *Geometría en las mochilas Aruhacas*, realizado por Aroca (2007). Adicionalmente el profesor Aroca ha publicado los libros: *Etnografía del saber matemático de los pescadores de buenaventura. Pacífico colombiano. Elementos para una educación matemática contextualizada.* (2018) y *Matemática de orden social, tensión entre las etnomatemáticas y cambios socioeconómicos del país* (2018). Además, promueve el proyecto de investigación de la Universidad del Atlántico titulado *Producciones audiovisuales para la divulgación de metodologías de investigación*.

La Etnomatemática, a pesar de ser un campo nuevo de investigación, ha permito ver lo rico que es Colombia en diversidad cultural y social. Por ende, es fértil en formas diversas de pensar, desarrollar y aplicar matemáticas. Un ejemplo de ello son las artesanías diseñadas y construidas por la comunidad indígena Embera, en las que se pueden observar diferentes figuras geométricas (**Figura 1**) que son una manifestación artística de su cultura. Además, desde una óptica pedagógica pueden contribuir en la creación de un ambiente propicio para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Figura 1: Manilla comunidad indígena Embera. Fuente: Opazo (2017)

La comunidad indígena Embera es originaria del Chocó; sin embargo, debido a factores asociados a la pobreza y violencia en su territorio, algunos de sus miembros han tenido que salir de allí y desplazarse hacia la ciudad de Bogotá, transformando así su entorno. Para poder adaptarse al nuevo escenario esta comunidad ha optado por diseñar, construir y vender manillas. En este sentido, la venta de manillas se ha convertido en un medio para subsistir obligándolos a elaborar manillas con diseños que tienen un alto valor comercial pero no cultural. Por ejemplo, diseños de equipos de futbol, nombres de personas o de partidos políticos, lo que conlleva a que sus manillas pierdan el valor simbólico que las caracteriza (Opazo 2017).

La realidad que vive actualmente la comunidad indígena Embera desplazada a la ciudad de Bogotá es producto de la violencia y la discriminación que se vive en el país. Teniendo en cuenta esta realidad, es posible contemplar como posibilidad el desarrollo de propuestas de enseñanza de las matemáticas que, a la vez que propendan por el aprendizaje de estas, reivindiquen saberes culturales de poblaciones que han sido afectadas por la violencia, contribuyendo con ello a la toma de conciencia de la necesidad de construir un país más humano y en paz. Autores como D´ Ambrosio (2008) reconocen que la matemática está fuertemente relacionada con la paz.

La creación de una propuesta de enseñanza de las matemáticas en el marco de intereses sobre la formación para la paz me permite, como maestra en formación, reflexionar sobre el rol que juega el educador matemático cuando ve el conocimiento como una estrategia para impulsar cambios en su entorno social. Amplía la percepción que tengo del profesor para no verlo únicamente como alguien que solo tiene conocimiento para ser divulgado y transmitido sino como una persona cuya acción puede generar transformación social.

Con base en los planteamientos previos, la propuesta de enseñanza de geometría que desarrollo en este trabajo está inspirada en el interés de llevar al aula urbana los patrones geométricos que la comunidad indígena Embera pone en juego en sus artesanías, particularmente en la creación de las manillas, y usar tales patrones para que los estudiantes construyan conocimiento. Este conocimiento constituye un legado cultural que desde mi punto de vista personal es importante mantener vivo y contribuye a visibilizar a la comunidad Embera.

El tema elegido para el desarrollo de la secuencia de tareas es "transformaciones en el plano". Opté por este tema luego de identificar algunos patrones que la comunidad indígena Embera usa en sus manillas. Al observarlas se pueden identificar patrones figurales que tienen una lógica de construcción. Si se analizan los patrones figurales, desde una óptica geométrica, podemos observar que las transformaciones geométricas están ahí y contribuyen a configurar las figuras tradicionales que componen los diseños.

Las transformaciones en el plano son un tema importante en diferentes áreas del conocimiento, como por ejemplo la matemática y el arte. Entre las transformaciones podemos encontrar las isometrías (reflexiones, traslaciones y rotaciones) cuyas propiedades sirven para el análisis de patrones figurales de la manilla Embera.

1.2 Estudios previos

Los siguientes trabajos son referentes centrales en mi propuesta. Uno, la investigación de Aroca (2007), ya mencionada. En este trabajo, el autor realiza un análisis geométrico de diferentes figuras de las mochilas Arhuacas y elige 16 a las que denomina figuras tradicionales, en las que evidencia que existe una lógica de construcción. El autor describe esta lógica como un patrón figural en el cual, a partir de trazos mínimos y visibles, de las figuras tradicionales, y por medio de transformaciones geométricas, se construyen otras figuras (**Figura 2**).

Figura 2: Figura tradicionales comunidad indígena Arhuaca. Fuente: Aroca (2007)

En la **Figura 3** presento un ejemplo de análisis geométrico de una de las figuras tradicionales, elaborado por Aroca (2007) en su tesis de maestría.

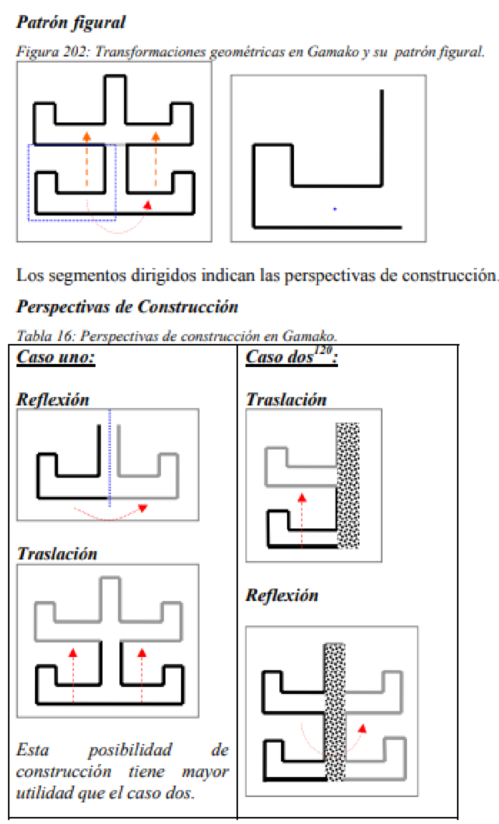
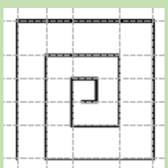
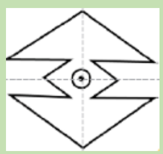
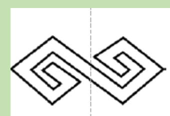
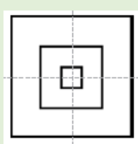
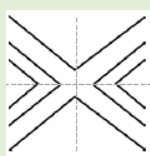
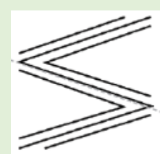
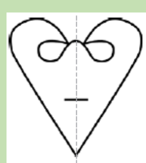
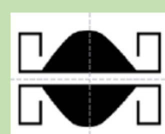
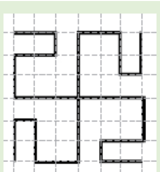
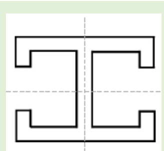
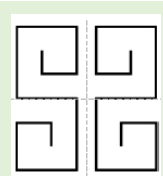


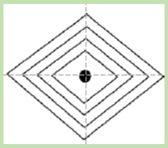
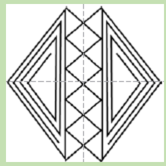
Figura 3: Análisis de un patrón figural de construcción. Fuente: Aroca (2007)

Si bien las figuras geométricas en las artesanías de las comunidades indígenas Arhuacas y Embera difieren en cuanto su significado cultural, se puede ver que la lógica de construcción es similar. Esto es muy importante ya que se puede usar como base el trabajo de investigación realizado por Aroca (2007) para el análisis geométrico de los patrones de representación Embera.

Un segundo referente importante para mi trabajo es el estudio de figuras tradicionales que Opazo (2017) identifica en las manillas de la comunidad indígena Embera (**Tabla 1**). Dicha identificación es producto de la observación en trabajo de campo y análisis de imágenes donde el autor elige las que más se repiten. Esto lo hace con el fin de visibilizar la manera en que las dinámicas socioculturales influyen en la configuración de las manillas Embera. Algunas de estas figuras tradicionales son la base de la propuesta de enseñanza de mi trabajo.

Tabla 1: Figuras tradicionales de las manillas Embera. Fuente: Opazo, 2017

	Representación	Nombre y significado cultural	Representación	Nombre y significado cultural	Representación	Nombre y significado cultural
Elementos naturales		**Caracol** Punto de encuentro para mantener contacto espiritual.		**Rayo solar** Energía y fuente en la que se originan los colores.		**Caballito de mar** Espíritu que protege el mar y todas sus especies.
		**Estrella** Luz y energia.		**Mariposa** Ser de aire, representacion para curar.		**Culebra** Ser maligno y energia negativa.
Concepciones culturales		**Ombligo de la tierra** Representa la fecundidad y el vientre de la mujer.		**Corazón** Vida y respiracion de la tierra.		**Dos mundos** Representa a Caragabi y Trutruica(seres esenciales).
		**Camino** Recorrido que una persona realiza durante su vida.		**Compromiso** Representa una persona casada o comprometida.		**Espíritu del jaibaná** Pensamiento Embera.

Objetos		**Canasto** Herramienta de la mujer para cargar el futuro del mundo.		**Trapiche** Herramienta para extraer jugos naturales.		**Anzuelo** Herramienta espiritual para atraer u obtener beneficios.

1.3 ORIENTACIONES CURRICULARES QUE FUNDAMENTAN LA PROPUESTA

En esta sección presento las orientaciones curriculares que fundamentan la propuesta y que ubican el tema trasformaciones en el plano en el currículo colombiano. Al respecto, en los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) se enuncia que:

> "En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo (p. 40)".

Las transformaciones en el plano se ubican en el contenido relacionado con el pensamiento espacial. Este es considerado en los Lineamientos (MEN, 1998) como

> "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (p.61).

En cuanto a los sistemas geométricos, se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial y se afirma que este se construye a través de la exploración activa y modelación del espacio. Se insiste en que el proceso de construcción del espacio no solo es influenciado por las características cognitivas del individuo sino también por el entorno físico, social, cultural e histórico.

El Ministerio de Educación (MEN) propone, como complemento a los Lineamientos curriculares, los Estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006). Estos son un referente acerca de lo que los estudiantes deben saber y saber hacer. Dentro de los estándares propuestos, se plantea el estudio de las transformaciones geométricas como parte del pensamiento espacial, desde grado tercero hasta grado séptimo, así.

De tercero a quinto

- Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura.
- Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.

De cuarto a quinto

- Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.

De sexto a séptimo

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Debido a factores asociados a la violencia y a la pobreza en los territorios, muchas comunidades indígenas y campesinas han optado por desplazase a la ciudad de Bogotá. El fenómeno del desplazamiento interno ha hecho de esta una ciudad donde concurren diferentes culturas, convirtiendo a la capital del país en una ciudad multicultural. Este fenómeno no es ajeno a las aulas de clase, ya que hace parte del contexto social y cultural de los estudiantes.

En las instituciones educativas muy pocas veces se tienen en cuenta las diferentes conceptualizaciones que ofrece la diversidad cultural. Los docentes no aprovechan las herramientas que ofrece la cultura y que pueden contribuir a que los estudiantes se apropien de los conceptos geométricos. En cambio, optan por situaciones didácticas descontextualizadas, lo que puede llegar a ser contraproducente para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular la geometría. Hago referencia a la importancia del contexto y a la cultural porque hay investigaciones como la realizada por Arceo (1999) quien señala como, a pesar de que los maestros en su mayoría son conscientes de que la geometría está fuertemente relacionada con el medio, esta se enseña como algo estático desligado de la realidad.

Cuando se presentan tareas matemáticas en el aula de clases se suelen usar problemas de textos escolares que muchas veces están enmarcados en contextos y culturas lejanas a las de los estudiantes. Esto puede generar que se perciban las matemáticas como algo que carece de sentido o es irrelevante en el plano personal. En su lugar, si se aprovechan producciones culturales como las de las manillas que elabora la comunidad indígena Embera que habita en Bogotá, en ellas se observa un pensamiento matemático, más específicamente geométrico, que puede ayudar a la creación de tareas basadas en esta cultura, que pueden contribuir al aprendizaje de la geometría y a la vez a tomar conciencia de valores culturales colombianos.

Por todo lo anterior surge la siguiente pregunta ¿Cómo aprovechar las manillas producidas por la comunidad Embera para elaborar una secuencia de tareas que propicie el aprendizaje de las transformaciones en el plano y además contribuya a desarrollar conciencia sobre los valores culturales colombianos?

1.5 Objetivos

General: **C**onstruir una secuencia de tareas para desarrollar el tema de transformaciones geométricas, haciendo uso de patrones figurales de la manilla Embera, que además de contribuir al aprendizaje de este contenido, contribuya a desarrollar conciencia sobre valores culturales colombianos y contribuir a construir un país en paz.

Específicos:

- Realizar un estudio bibliográfico del desarrollo de la Etnomatemática en Colombia que fundamente la secuencia de tareas.
- Construir un marco didáctico basado en los planteamientos de Bishop (2005) sobre la actividad matemática.
- Construir un marco matemático sobre las transformaciones en el plano, dirigido a estudiantes de secundaria.
- Realizar un análisis geométrico de posibles transformaciones geométricas en algunas figuras tradicionales propuestas por Opazo (2017), de las manillas Embera.

- Seleccionar un conjunto de figuras tradicionales y proponer una secuencia de tareas para desarrollar el tema de las transformaciones en el plano, en el que se motive su estudio con información acerca de la comunidad Embera.
- Proponer una secuencia de tareas que contribuya a desarrollar conciencia sobre valores culturales colombianos y contribuir a construir un país en paz.

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA

Propongo el siguiente marco de referencia a partir de un estudio crítico de investigaciones previas y consideraciones teóricas que sustentan y brindan elementos para el diseño y análisis de la secuencia de tareas sobre las transformaciones en el plano, que involucra la geometría con una perspectiva cultural y de paz. Este marco articula tres aproximaciones que se ubican en la línea de investigación de la Etnomatemática: la enculturación matemática, la teoría de la objetivación cultural y la geometría transcultural. Además, incluí en el marco de referencia los fundamentos matemáticos que sustentan, desde un punto de vista matemático, la secuencia de tareas.

2.1 ETNOMATEMÁTICA

La aproximación etnomatemática es parte fundamental en este trabajo porque muestra la pertinencia de la investigación en el campo de la Educación matemática, centrada en lo cultural. En este sentido, vale la pena mencionar aspectos relevantes de esta perspectiva. En primer lugar, me refiero a algunos acontecimientos y autores que dieron origen a la Etnomatemática como campo de investigación en el mundo y en segundo lugar hago una revisión bibliográfica del desarrollo de la Etnomatemática en Colombia.

Después de la segunda guerra mundial, en la década de los cincuenta del siglo pasado, surgió el interés por promulgar y defender los derechos civiles y políticos de los grupos étnicos y minoritarios. Esto dio origen a nuevas diciplinas como Etno-medicina, Etno- música, Etno-filosofía etc. Esas diciplinas están fundamentadas en la Antropología, la Historia, y las diciplinas que aluden a la preposición “etno” (Sánchez, 2003).

La matemática por considerarse “universal” y tener una única forma de desarrollo fue excluida inicialmente de los estudios etnográficos, por lo que la Etnomatemática apareció mucho tiempo después, hacia los setenta del siglo XX. Las conferencias 5 y 6 del Congreso Internacional de Educación Matemática, ICME (por sus siglas en inglés), de los años 1984 y 1988 respectivamente, la visibilizaron y robustecieron (Gavarrete, 2013). Esto permitió sensibilizar a los educadores matemáticos sobre la importancia de tener en cuenta variables socioculturales en sus estudios (Higuera, Caicedo y Campos, 2009).

Rohrer y Schubring (2011; citado en Martínez, 2016), afirman que la palabra "etnomatemática" fue usada por primera vez en la tercera década del siglo pasado por Fettweis y Falsirol. Estos dos autores consideraban la Matemática como elemento cultural que conectaba esa disciplina con otras como la Etnología, la Historia de las matemáticas, la Historia de la cultura y la Educación matemática.

Ubiratán D´Ambrosio es un matemático brasileño dedicado a las disciplinas Educación matemática e Historia de las matemáticas. En la actualidad, es considerado el padre intelectual de la Etnomatemática a pesar de que mucho tiempo atrás, Fettweis y Falsirol ya habían concebido la matemática como elemento cultural. Esto se debe a que él la presentó como un programa de investigación, cuyo objetivo es entender el saber/hacer matemático de diferentes culturas a lo largo de la historia, teniendo en cuenta su contexto natural, social y cultural (D'Ambrosio, 2008).

Según D'Ambrosio (2008) la Etnomatemática es la matemática practicada por grupos culturales bien definidos que se identifican por objetivos o tradiciones comunes. Esta definición es tan solo una de las que se pueden encontrar hoy. Otros investigadores en el área han planteado sus interpretaciones. Por ejemplo, Gilmer (1995; citado en Martínez, 2016) se refiere a la Etnomatemática como el "estudio de las técnicas utilizadas por grupos culturales identificables para entender, explicar y manejar problemas y actividades que nacen en su propio espacio" (p.188). La definición que propone Gilmer varía respecto a la que propone D´Ambrosio. Sin embargo, en ambas definiciones se puede ver, entre otras cosas, que existe la necesidad de comprender lo que caracteriza las matemáticas que grupos culturales identificables han desarrollado.

Otra definición de Etnomatemática es la de Gardez (2007; citado en Martínez, 2016) quien afirma que esta disciplina se origina de la unión de la Antropología cultural, la Matemática y la Educación matemática, por la necesidad de tener conciencia de la existencia de diversas matemáticas, según las diferentes culturas. En este sentido Rohrer y Schubring (2011; citados en Martínez 2003) sugieren que las matemáticas occidentales representan solo una de ellas.

Mientras en el mundo se cimentaba las bases de la Etnomatemática Colombia también lo hacía, pero a un ritmo diferente. Después de realizar una revisión bibliográfica del desarrollo de la Etnomatemática en Colombia, en el sistema de información científica Redalyc y en repositorios de diferentes universidades como la Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica

Nacional, Universidad de Antioquia entre otras, encontré que los inicios de la Etnomatemática en el país se remontan a los años 80 del siglo pasado.

En la época de los 80 se destacan las contribuciones hechas por tres principales pioneros: el profesor de matemáticas Víctor Samuel Albis, quien desarrolla su trabajo en relación con la geometría subyacente en la ornamentación de la cerámica de las culturas ancestrales de nuestro país; el antropólogo Guillermo Páramo, quien se enfoca en el mito y su relación con las matemáticas; y el profesor German Mariño, quien hace énfasis en los saberes matemáticos de personas iletradas (Blanco 2006). El proceso de institucionalización del campo se da gracias a la cofinanciación que Colciencias hace a las investigaciones de estos pioneros y a la participación de D' Ambrosio en el Simposio Internacional de Historia de las Ciencias, llevado a cabo en 1984 por la Academia Colombiana de Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.

Según una revisión realizada por Blanco (2006), en 1988, Evidalia Molina y Luis Ángel Diaz, estudiantes de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional, realizan el primer trabajo de grado en Etnomatemática titulado *Algunos aspectos de los numerales en la familia lingüística macrochibcha*. En el año 2003, Aldo Iván Parra Sánchez, estudiante de matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, realiza el trabajo de grado *"Acercamiento a la Etnomatemática".* En el año 2005, en la Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática, en la línea Historia y Educación Matemática de la Universidad del Valle, se adelantan trabajos enfocados en la Etnomatemática. Armando Aroca Araujo escribe *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural, comunidad indígena Ika, Sierra Nevada de Santamarta* y Hilber Blanco Álvarez escribe *Análisis comparativo de los sistemas de numeración Inca, Yovuba y Maya.*

En la actualidad, en Colombia ha venido creciendo el número de trabajos enfocados en la Etnomatemática y en los elementos que esta línea de investigación aporta a la historia de la matemática y a la educación matemática. A pesar del creciente interés por esta línea de investigación solo existe una revista especializada en etnomatemática, *La Revista Latinoamericana de Etnomatemática* publicada por la Red Latinoamericana de Etnomatemática y el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

En la Universidad Pedagógica Nacional, estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencia y Tecnología han empezado a interesarse por la línea de investigación de la

Etnomatemática. Esto se puede evidenciar en los trabajos de grado: *Interpretación matemática situada de tejidos en croché. Un estudio exploratorio*, elaborado por Edwin Mauricio Pinilla Silva y Jorge Armando Sánchez Cruz (2009); *El juego de la capoeira: en un grupo de la ciudad de Bogotá*, realizado por Jacobo Sánchez (2019); y *Un estudio desde las matemáticas y desde la Etnomatemática y la acción el docente de matemáticas en un aula multicultural,* desarrollado por Ángela Ariza (2019).

Después de realizar la revisión bibliográfica del desarrollo de la Etnomatemática en Colombia, concluyo que los diferentes trabajos desarrollados durante las últimas cuatro décadas no solo se centran en el análisis de la actividad matemática de comunidades indígenas y afrodescendientes. También se enfocan en los saberes y técnicas matemáticas de comunidades iletradas o en la utilización de instrumentos autóctonos de las comunidades indígenas o negras, como herramientas pedagógicas para la enseñanza de la matemática occidental.

2.2 La enculturación matemática desde la perspectiva de Bishop

Otra de las aproximaciones que sustentan mi trabajo de grado es la perspectiva de enculturación matemática de Alan Bishop. Las actividades esenciales basadas en el entorno, que propone este autor sirven para interpretar el desarrollo del conocimiento matemático en diferentes culturas. Además, el proceso de educación es visto como una vía de acceso a la cultura y por ende a la cultura matemática. En este trabajo haré énfasis en la actividad esencial de diseño, pues esta actividad es fundamental para el estudio del pensamiento geométrico en las manillas de la comunidad indígena Embera.

En consonancia con D´Ambrosio, Bishop (1991) considera la educación matemática como un proceso social y las matemáticas como un producto cultural. Desde esta perspectiva se deja atrás la idea de que las matemáticas son un conocimiento desligado del entorno cultural. Además, el autor afirma que diversas investigaciones antropológicas y estudios comparativos dan cuenta de que las matemáticas son un hecho cultural y por ende no existe una sola matemática, sino que por el contrario son muchas.

Bishop (1991) entiende las matemáticas como una tecnología simbólica, que resulta de seis tipos de actividades esenciales relacionadas con el entorno. Para el autor estas actividades esenciales son universales y cada una de ellas desarrolla ideas importantes para las matemáticas. Están divididas en tres grandes grupos: el primero está relacionado con el número y está compuesto por las acciones de contar y medir, ligadas a lo concreto y lo continuo respectivamente; el segundo, está relacionado con jugar y explicar y hace referencia a reglas y procedimientos sociales, investigar y conceptualizar el entorno y compartir esas conceptualizaciones.

El tercer grupo de actividades esenciales lo componen localizar y diseñar. Estas actividades están relacionadas con el espacio y el mundo geométrico respectivamente. Esto conduce a la idea fundamental de forma. Localizar se refiere principalmente a la propia posición y orientación de objetos o personas, de acuerdo con estrategias propias del entorno cultural.

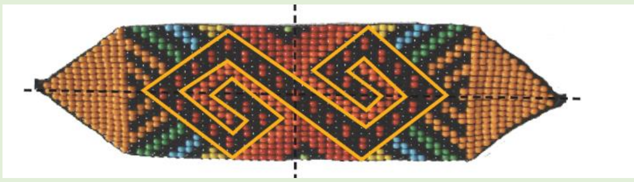
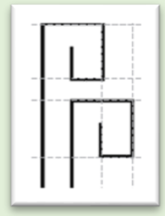
La actividad de diseñar, según Bishop (1991), se ocupa, entre otras cosas, de todos los objetos manufacturados que crean las culturas para su vida cotidiana. Esta actividad también tiene que ver con el espacio a gran escala, como es el caso de las casas, calles y poblados. Diseñar implica imaginar formas, figuras y pautas en el entorno. En este sentido, la matemática se ocupa esencialmente de la imaginación espacial.

La actividad de diseño está directamente ligada al desarrollo de patrones figurales. En dicha actividad, esencial y común a todas las culturas, ubico las manillas de la comunidad indígena Embera, las cuales son objetos producto de un proceso artesanal, cuyo uso dentro de la cultura está ligado tanto a lo material como a lo espiritual.

Los usos que la comunidad indígena Embera les atribuye a las manillas son las siguientes: la manilla como adorno, se usa para embellecer. La manilla como manifestación, se usa como instrumento de expresión del pensamiento simbólico. La manilla como amuleto, se usa para la protección; en este caso, se tienen en cuenta figuras que están asociadas al cuidado espiritual. Y la manilla como aprendizaje heredado, tiene que ver con la materialización de la cultura (Opazo, 2017)

En la manilla Embera, además de encontrar patrones con diferentes significados asociados a su uso dentro de la cultura, podemos reconocer la configuración de patrones que son resultado de un proceso de geometrización. Por ejemplo, en las figuras Caballo de mar y Anzuelo (ver **Tabla 2**, **Figuras 4** y **5**) se pueden apreciar traslaciones, reflexiones, rotaciones y deslizamientos, transformaciones isométricas que hacen parte de la geometría transformacional.

Tabla 2: Manilla Embera con figura tradicional Caballo de mar y figura tradicional Anzuelo

Caballo de mar	***Anzuelo***
 Figura 4: Caballo de mar. Fuente: Opazo (2017)	 Figura 5: Anzuelo. Fuente: Opazo (2017)

2.3 ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN DE RADFORD

En este trabajo tengo en cuenta algunos elementos de la teoría de Radford (2014) que me permiten enfocar el aprendizaje desde una perspectiva social y que encajan en el área de la Etnomatemática, en la que está centrado este trabajo. Según este autor, la educación matemática está dotada de un componente histórico, social y cultural y el acto de aprender deja de significar un acto de sumisión o subordinación: "la teoría de la objetivación plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, cultural e histórico cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas construidas histórica y culturalmente" (p.137).

La teoría de la objetivación nace como una alternativa a las corrientes educativas que reducen la educación matemática a su dimensión puramente instrumental y dejan de lado su dimensión humana. En el marco de dicha teoría aprender no es solamente la adquisición de saberes, sino también la producción de subjetividades (Radford, 2006). En este sentido el autor asegura que el pensamiento es una práctica social y no algo meramente cerebral. En palabras del autor "el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con las formas o modo de la actividad de los individuos" (p. 107).

La teoría de la objetivación da cuenta del componente antropológico del pensamiento y de una concepción esencialmente social del aprendizaje. De este modo la teoría sugiere que los objetos matemáticos son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos, contrario a las posturas del racionalismo que consideran la existencia de los objetos matemáticos como independientes de la actividad de los individuos.

Radford (2006) distingue dos fuentes de elaboración de significados. La primera hace referencia a los artefactos culturales; al interactuar con ellos se convierten en un medio para la adquisición del saber. El mundo de los artefactos por sí solos no expresan la inteligencia histórica manifestada en ellos. Para ello se requiere de su uso en actividades y del contacto con otros individuos que sepan traducir y transmitir esa inteligencia.

La segunda fuente de elaboración de significados que Radford (2006) sugiere, tiene que ver con la dimensión social en la interacción en el aula de clase. El autor afirma que la interacción en el aula no puede verse como un espacio cerrado; en cambio, sugiere que dicha interacción es intrínseca del aprendizaje. El aula en este sentido es el lugar donde el estudiante reflexiona sobre su realidad histórico-cultural.

De lo anterior se puede concluir que hay dos elementos en la adquisición del saber que son: los artefactos y la dimensión social. Estas dimensiones son importantes en la medida que posibilitan tomar conciencia de conceptos culturales y procesos de formación de las capacidades específicas del individuo. Dentro de esta perspectiva aprender no es apropiarse de algo, sino que es el proceso mismo en que se forman nuestras capacidades humanas (Radford, 2006).

Lo que la teoría de la objetivación aporta al aula de clase es la concepción de la enseñanza y aprendizaje como una labor conjunta entre estudiantes y profesores, cuyo propósito es tratar de producir saberes matemáticos colectivamente. Esta concepción de las actividades enseñanza y aprendizaje puede contribuir, entre otras cosas, a crear sujetos reflexivos y críticos de su contexto social y cultural.

2.4 LA GEOMETRÍA TRANSCULTURAL COMO PUNTO DE CONTACTO ENTRE CULTURAS

En este trabajo tendré en cuenta la visión que Armando Aroca tiene de la enseñanza de la geometría, pues me brinda elementos para crear una conexión entre la cultura indígena Embera y la cultura del aula. Desde este enfoque el docente es un mediador que conecta al estudiante con su contexto y dota la geometría de un significado cultural.

Antes de abordar la geometría transcultural, es necesario mencionar que el concepto transculturalidad es entendido como un proceso de encuentro entre culturas diferentes. Este proceso tiene como objetivo principal aprender y reflexionar en conjunción, de tal manera que se forme una comunidad de experiencias que permita la creación de nuevos elementos culturales (Hidalgo, 2017).

Según Aroca (2007), la gran mayoría de las culturas, por no decir todas, han sido influenciadas por otras; es decir, que las culturas son producto del cruce entre dos o más culturas diferentes. Si bien es difícil hablar de culturas puras, si es posible mencionar que hay culturas con mayor identidad que otras. Algunas son dominadas por otras, como es el caso de la cultura occidental que ha predominado en la historia de muchos países.

Es claro que occidente desarrolló su propia geometría, la cual se ve representada en los Elementos de Euclides y se institucionalizó en los textos escolares. Aunque existen geometrías diversas, estas no tienen la misma relevancia en la enseñanza. En este sentido, Aroca (2007) afirma que los estudiantes en las aulas de clase, cuando se enfrentan a la geometría, no encuentran una conexión con su contexto social y en muchos casos, como lo mencioné en el Capítulo 1, no logran una apropiación de los objetos matemáticos.

Con el propósito de responder a la pregunta ¿cómo hacer para que estudiantes y maestros se apropien de sus prácticas y saberes ancestrales reafirmando su identidad y a la vez conozcan la geometría occidental? Aroca (2007) propone lo que él denomina geometría transcultural. Según el autor, esta postura no es neutral sino política, en el sentido en que busca pretender valorar el pensamiento de culturas que por siglos han estado oprimidas.

Si bien la pregunta está dirigida a los individuos de una comunidad indígena, esta se puede trasladar a las aulas de clase urbanas. En esta cohabitan estudiantes de diferentes regiones pero que pertenecen a un mismo país y por ende es necesario que reconozcan que esos saberes ancestrales que las comunidades indígenas y campesinas han desarrollo, también hacen parte de su identidad.

La geometría transcultural que propone Aroca (2007) es la parte del saber donde habitan conceptos comunes de la geometría que son independientes de la cultura. Es decir, refiere a conceptos matemáticos, en particular geométricos, que se pueden encontrar en diversas culturas, pero con significados culturales diferentes.

Aroca (2007) descarta una etnomatemática indigenista que solo pretenda enseñar lo que se sabe y se desarrolla dentro de una comunidad. En cambio, ve la posibilidad de usar esos conocimientos para ser llevados a otras culturas. Incluye en ellas al aula de clases, con el fin de dotar de significado social y cultural a la geometría, sin dejar de lado la geometría occidental que desde el punto de vista etnomatemático es una de muchas otras que existen.

2.5 REFERENTE MATEMÁTICO

Esta sección se divide en tres partes. En la primera, expongo algunas definiciones de objetos matemáticos que intervienen en la caracterización de dos transformaciones en el plano: traslación y simetría axial. En la segunda, presento la noción de transformación geométrica en el plano y defino tres transformaciones que son mencionadas en el trabajo. Uso como referentes las propuestas de Clemens, O' Daffer y Cooney (1998), Lehmann (1989), y Jaime y Gutiérrez (1996). En la tercera, realizo un análisis geométrico de algunas figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera desde el punto de vista de las transformaciones en el plano. Para ello, me valgo del método de deconstrucción propuesto por Aroca (2007), quien hace un análisis de figuras tradicionales de la cultura Arhuaca presentes en sus mochilas.

2.5.1 NOCIONES GEOMÉTRICAS DEL CONCEPTO TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Un **segmento,** AB. es el conjunto de los puntos A y B y de todos los puntos que están entre A y B (**Figura 6**).

Figura 6: Segmento

Un **ángulo** es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo.

Un **ángulo** recto es un ángulo que mide 90° (**Figura 7**).

Dos Figuras son **Congruentes** si son iguales en forma y en tamaño.

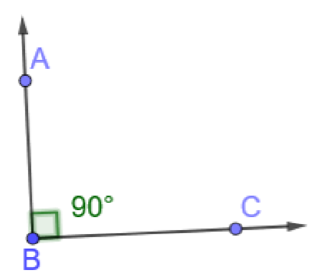


Figura 7: Ángulo recto

Dos rectas son **paralelas** si son coplanares y no se intersecan (no tienen puntos en común) (**Figura 8**).

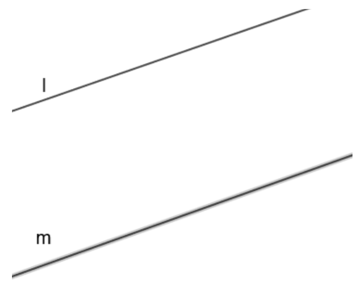


Figura 8: Rectas paralelas

Dos rectas son **perpendiculares** si al intersecarse forman ángulos rectos congruentes (**Figura 9**).

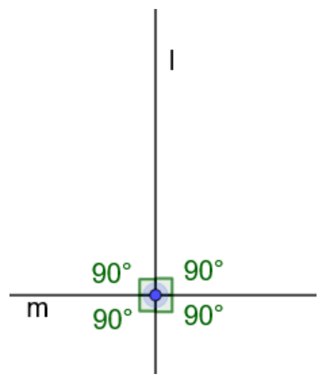


Figura 9: Rectas perpendiculares

M es **punto medio** del $\overline{AB}$ si se cumplen las siguientes condiciones (**Figura 10**):

I. $A - M - B$

II. $AM = MB$

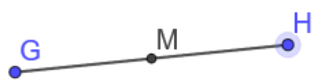


Figura 10: Punto medio

Dado un plano β y un punto P en este, una **Circunferencia** es el conjunto de todos los puntos X del plano β que equidistan del punto P una distancia r. El punto P es el centro de la circunferencia. Para referirnos a la circunferencia con centro P se usa la notación $\odot P$ (**Figura 11**).

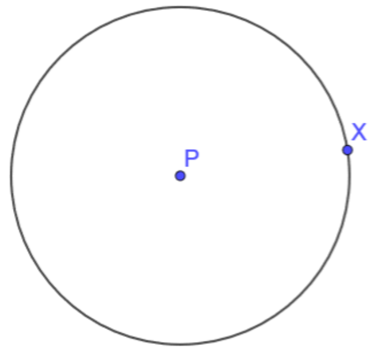


Figura 11: Circunferencia

Un **vector** $\vec{u}$ es un segmento orientado, es decir un segmento determinado por un par ordenado (A, B) de puntos. El punto A se llama origen y el punto B se llama extremo del vector (**Figura 12**).

En un vector se distinguen tres elementos:

Dirección, que está dada por la recta que lo contiene.

Sentido, que está dado por la orientación de la flecha (cada dirección tiene dos sentidos).

Magnitud, es la longitud del segmento orientado que define el vector.

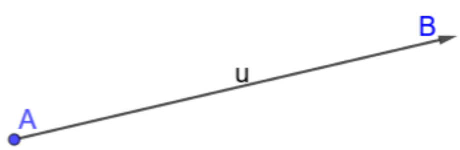


Figura 12: Vector

Dos figuras son **congruentes** si y sólo sí, una figura es la imagen de la otra mediante un movimiento rígido.

2.5.2 TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Según Clemens, O' Daffer y Cooney (1998) y Lehman (1989), la palabra transformación implica que un objeto (relación, expresión o figura) cambia de alguna manera, pero dicho cambio debe estar sujeto a una ley por medio del cual se rija ese cambio. En una transformación se debe tener en cuenta lo siguiente: el objeto original, una regla u operación que describa el cambio y el objeto que resulta después del cambio. Ambos autores hacen explícita la importancia de la existencia de una ley que rija el cambio.

Godino y Ruiz (2002), refiriéndose a figuras en el plano, introducen el concepto de movimiento rígido afirmando que: "una transformación del plano se dice que es un movimiento rígido si y solo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación, esto es, $PQ = P'Q'$, para todo par de puntos P y Q. Según estos autores los movimientos rígidos también son llamados isometrías, ya que en el proceso de transformación conservan la forma y el tamaño de la figura, solo cambia la posición. Los movimientos rígidos más importantes son: traslación, simetría axial y rotación. Estos se describen a continuación. Cabe resaltar que, si bien describo la rotación para hacer el análisis geométrico de algunas figuras de la comunidad indígena Embera, este movimiento no se trabaja en la secuencia de tareas por limitaciones de espacio.

Traslación

Según Jaime y Gutiérrez (1996), una traslación $\boldsymbol{t_a}$ de vector $\vec{a}$es un movimiento del plano de forma que un punto A se mueve en línea recta hasta el punto A' tal que $\overrightarrow{AA'}$=$\vec{a}$. En una traslación no hay ningún punto invariante (**Figura 13**).

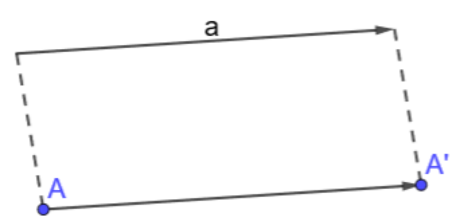


Figura 13: Traslación

Simetría axial

Según Jaime y Gutiérrez (1996), una simetría axial $\boldsymbol{s_e}$ de eje la recta e es un movimiento del plano que lleva a cada punto A hasta el punto A'situado de manera que (**Figura 14**):

- El segmento $\overline{AA'}$es perpendicular al eje de simetría e.

- La distancia entre el punto A y el eje de simetría es igual a la distancia entre el punto A' y el eje, es decir que $d(A,e) = d(A',e)$.

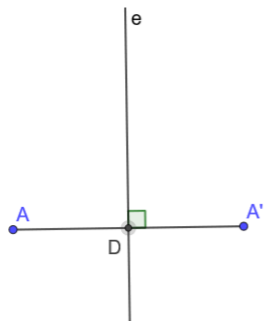


Figura 14: Simetría axial

Rotación

Según Jaime y Gutiérrez (1996), una rotación con centro en O y ángulo α es una transformación que representa cada punto A del plano en un punto A', tal que (**Figura 15**):

- Si O es el punto central $OA' = OA$.
- Si $A \neq O$ entonces $A'O = AO$ y $m\angle AOA' = \alpha$.

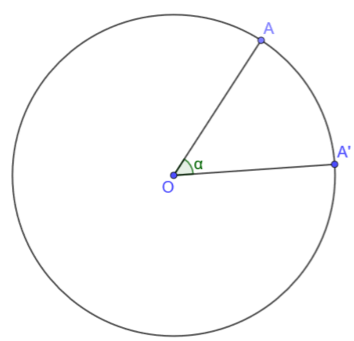


Figura 15: Rotación

2.5.3 Análisis geométrico de algunas figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera

En este apartado expongo el análisis geométrico de algunas figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera. Para dicho análisis, tengo en cuenta el método de deconstrucción empleado por Aroca (2007). Este método consiste en recrear visualmente, paso a paso, cómo va apareciendo cada figura, de tal forma que se revele el patrón figural. Es decir, el conjunto de trazos mínimos y visibles de la figura tradicional que permite, por medio de algunas transformaciones geométricas, generar toda la figura en sí (Aroca, 2007). A continuación, describo los elementos que considero para el análisis de las figuras tradicionales de los Embera:

- Análisis simbólico: explico el significado cultural de algunas figuras tradicionales. Para ello, usó el significado cultural que Opazo (2017) recogió en su trabajo.
- Análisis geométrico: uso el método de deconstrucción, en el que explico, paso a paso, como van apareciendo, en el proceso de tejido de la manilla Embera, las figuras tradicionales Embera que elegí para la secuencia de tareas. Luego, doy a conocer el patrón figural y las transformaciones geométricas que sufre dicho patrón para generar toda la figura.

Figura tradicional Anzuelo

La figura tradicional Anzuelo, representa para la comunidad indígena Embera herramienta espiritual para atraer u obtener beneficios y es muy utilizada en los diseños de las manillas Embera (**Figura 16**).

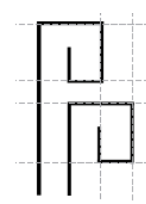
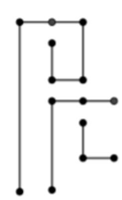
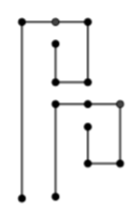


Figura 16: Figura tradicional Anzuelo

En la **Tabla 3**, presento la deconstrucción figural que hice de la representación tradicional Anzuelo. Esta corresponde a la recreación, paso a paso, que muestra cómo se teje la figura tradicional en la manilla Embera, considerando que la construcción de esta figura es de forma vertical, comenzando de izquierda a derecha.

Tabla 3: Deconstrucción figura tradicional Anzuelo

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6	Paso 7
						

A partir de la deconstrucción de la figura tradicional obtuve el patrón figural que puede verse en la **Figura 17**. Elegí este patrón, ya que es el trazo mínimo, pues al aplicar transformaciones genera casi por completo la figura tradicional Anzuelo. Haría falta una prolongación del segmento vertical en el anzuelo de la izquierda para obtener la figura tradicional exacta.

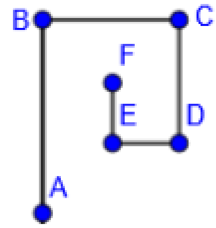


Figura 17: Patrón figural Anzuelo en GeoGebra

En el patrón figural de la figura tradicional Anzuelo, puede verse que este está formado por la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DF}$ y $\overline{EF}$. También puede verse que algunos segmentos están relacionados por medio de la perpendicularidad, es decir, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{BE}$, $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ y otros por medio del paralelismo $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\overline{FE} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$.

En la **Tabla 4** presento la transformación geométrica traslación que identifiqué durante el proceso de tejido de la manilla Embera, a partir del patrón figural.

Tabla 4: Traslaciones geométricas en la figura tradicional Anzuelo

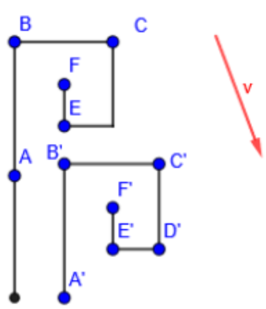
Representación gráfica	Traslación
	Traslación oblicua del patrón figural de acuerdo con $\vec{v}$

Figura tradicional Rayo Solar

La figura tradicional Rayo solar, representa para la comunidad indígena Embera energía y fuente en la que se originan los colores (**Figura 18**).

En la **Tabla 5** presento la deconstrucción figural que realicé de esta representación. Esta corresponde a la recreación, paso a paso, de cómo se teje la figura tradicional en la manilla Embera, considerando que la construcción de esta figura es de forma vertical, comenzando de izquierda a derecha.

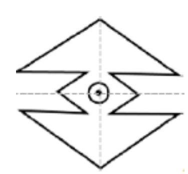
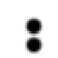
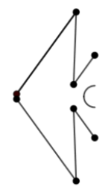
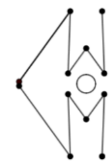
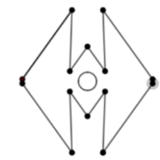


Figura 18: Figura tradicional Rayo solar

Tabla 5: Deconstrucción de la figura tradicional Rayo Solar

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6	Paso 7
						

A partir de la deconstrucción de la figura tradicional Rayo Solar obtuve el patrón figural que puede verse en la **Figura 19**, el cual es el trazo mínimo que, a partir de transformaciones, permite que se genere la figura completa:

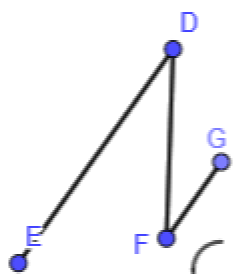


Figura 19: Patrón figural Rayo solar en GeoGebra

En el patrón figural de la figura tradicional Anzuelo de los Embera, representado en GeoGebra, se puede observar que está conformado por la unión de los segmentos $\overline{ED}$, $\overline{DF}$, $\overline{FG}$. Los segmentos $\overline{ED}$ y $\overline{DF}$ determinan el ángulo agudo $\angle EDF$ y los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{FG}$ forman el ángulo agudo $\angle DFG$. También, podemos observar un arco de circunferencia como parte del patrón figural.

En la **Tabla 6** presento las transformaciones geométricas que van apareciendo en la figura tradicional Embera durante el tejido de la manilla a partir del patrón figural.

Tabla 6: Transformaciones Geométricas Rayo Solar

Representación gráfica	Transformaciones geométricas

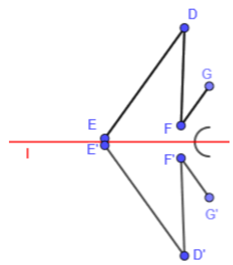
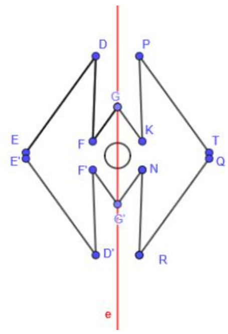
	Simetría axial de eje horizontal: Se presenta simetría axial del patrón figural $EDFG$ de acuerdo con el eje de simetría (l). En este caso, si tenemos en cuenta la perspectiva de construcción de la figura en la manilla Embera se genera una línea de referencia imaginaria horizontal la cual resulta ser el eje de simetría.
	Simetría axial de eje vertical: Se presenta simetría axial de la figura de acuerdo con el eje de simetría (e). En este caso, si tenemos en cuenta la perspectiva de construcción de la figura en la manilla Embera se genera una línea de referencia imaginaria vertical.

Figura tradicional Espíritu del Jaibaná

La figura tradicional Espíritu de Jaibaná representa para la comunidad indígena Embera pensamiento Embera (**Figura 20).**

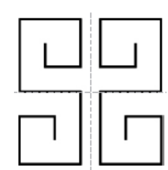
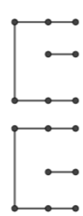
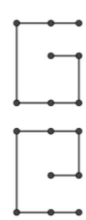
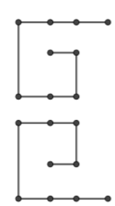
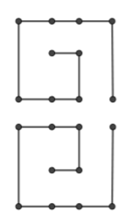
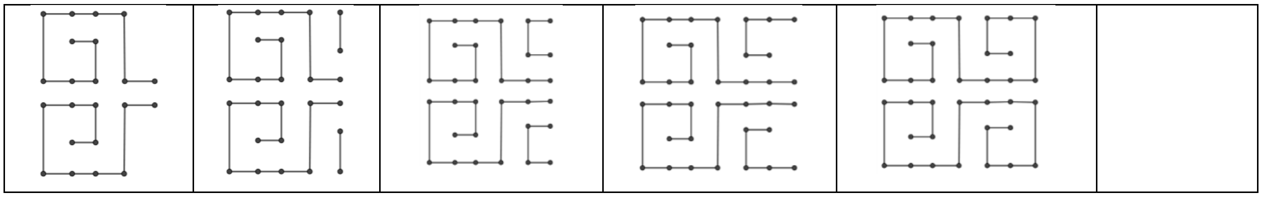


Figura 20: Figura tradicional Espíritu de Jaibana

En la **Tabla 7**, presento la deconstrucción figural que realicé de la representación tradicional Espíritu de Jaibaná. Corresponde a la recreación, paso a paso, de cómo se teje la figura tradicional en la manilla Embera, considerando que la construcción de esta figura es de forma vertical, comenzando de izquierda a derecha.

Tabla 7: Deconstrucción de la figura tradicional Espíritu Jaibaná

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
					
Paso 7	Paso 8	Paso 9	Paso 10	Paso 11	



A partir de la deconstrucción de la figura tradicional Espíritu de Jaibaná obtuve el patrón figural, ver **Figura 21**:

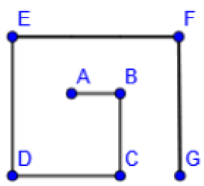
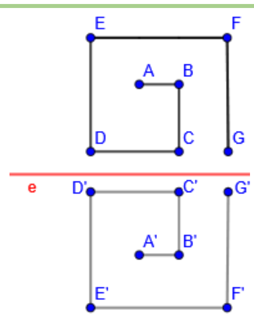


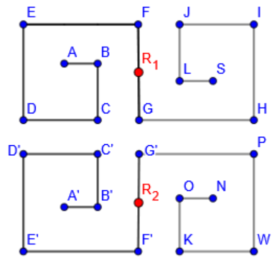
Figura 21: Patrón figural Espíritu de Jaibaná en GeoGebra

En el patrón figural de la figura tradicional Espíritu de Jaibaná de los Embera, puede observarse que está conformado por la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$. Como en el patrón figural de la figura tradicional Anzuelo, puede verse que algunos segmentos están relacionados por medio de la perpendicularidad, es decir, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ $\overline{DE} \perp \overline{EF}$, $\overline{EF} \perp \overline{FG}$ y otros por medio del paralelismo $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.

En la **Tabla 8** presento las transformaciones geométricas que van apareciendo en la figura tradicional Embera durante el tejido de la manilla a partir del patrón figural.

Tabla 8: Transformaciones geométricas Espíritu de Jaibaná

Representación gráfica	Transformaciones geométricas
	Simetría axial: Se presenta simetría axial del patrón figural $ABCDEFG$ de acuerdo con el eje de simetría (e).

	Rotación: En este caso se pueden observar dos rotaciones: **Primera rotación:** si tomamos la figura $ABCDEFG$, al rotarla 180° con centro de rotación el punto medio de $\overline{FG}$, es decir R_1, y en el sentido de las manecillas del reloj (o al contrario), obtenemos la figura $FGHIJLS$. **Segunda rotación:** Si tomamos la figura $A'B'C'D'E'F'G'$, al rotarla 180° con centro de rotación el punto medio de $\overline{F'G'}$, es decir R_2, , y en el sentido de las manecillas del reloj (o al contrario), obtenemos la figura F'G'PWKON.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

La metodología para el desarrollo de mi trabajo tuvo en cuenta tres líneas de la perspectiva teórica de la Etnomatemática (D'Ambrosio, 2008): enculturación matemática (Bishop,1991), teoría de la objetivación cultural (Radford, 2014) y geometría transcultural (Aroca, 2007). Estas perspectivas fundamentaron el diseño de tareas. A continuación, describo cada una de las fases que llevé a cabo para el desarrollo de este estudio.

Fase 1: ***Construcción de un marco teórico***. En esta fase, realicé una revisión de literatura que, dada la naturaleza de este trabajo, se centró en buscar referentes conceptuales relacionados con la Etnomatemática (a nivel mundial y al desarrollo de esta área en Colombia), la enculturación matemática y la geometría transcultural. A partir de esta revisión construí un marco didáctico. Luego, busqué trabajos relacionados con la comunidad indígena Embera, en los que se hacía alusión a su situación en el país, sus prácticas y sus costumbres. Esto con el fin de construir un marco referencial relacionado con el grupo indígena al que se refiere el trabajo. Además, busqué referentes matemáticos sobre las transformaciones en el plano, de tal forma que sustentaran, desde un punto de vista matemático, la secuencia de tareas. Finalmente, realicé un análisis geométrico de algunas figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera, encontradas en Opazo (2017). Para dicho análisis empleé el método de deconstrucción usado por Aroca (2007) en su trabajo de investigación. El producto de esta fase corresponde al Capítulo 2 del presente documento.

Fase 2: ***Diseño de la secuencia de tareas***. En esta fase, construí la secuencia de tareas. Usé algunos de los elementos que describen una tarea matemática propuestos por Gómez y colaboradores (2018).

Según Gómez y Romero (2015; citados en Gómez y colaboradores, 2018) y Radford (2014) los estudiantes aprenden matemáticas cuando se enfrentan a tareas que implican situaciones o problemas contextualizados. Estas tareas deben promover la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesor de tal manera que conlleven a acuerdos sobre su solución, así como a comunicar los procesos de solución y a justificarlos. Para dichos autores, la tarea matemática escolar es una demanda estructural, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje.

El diseño de tareas desde mi punto de vista personal es una oportunidad para que el profesor use su ingenio en la creación de demandas para los estudiantes que contribuyan de manera significativa al proceso de aprendizaje de las matemáticas. Desde este enfoque busqué crear una secuencia de tareas, entendida esta como una ordenación de tareas para promover el aprendizaje de las transformaciones en el plano con una perspectiva cultural y de paz.

A continuación, describo los elementos que según Gómez y colaboradores (2018) se incluyen en el diseño de una tarea matemática escolar. Estos elementos conllevaron a un análisis previo a la instrucción y fueron más allá de la formulación de un enunciado.

Requisitos

Los requisitos son los conocimientos y destrezas que los estudiantes deben tener para el desarrollo de la tarea matemática (Gómez y colaboradores, 2018). En la secuencia de tareas que construí, estos tienen que ver con nociones matemáticas que intervienen y con algunas habilidades y destrezas manuales.

Metas

Las metas son los propósitos que el profesor asigna a la tarea. Estos propósitos se construyen teniendo en cuenta las expectativas de aprendizaje a las que la tarea pretende contribuir. También tienen en cuenta los errores y dificultades que se pretenden superar con la tarea. En la secuencia de tareas, las metas que formulé tienen que ver no solo con aprender de las transformaciones en el plano, sino también con aprender de la cultura Embera.

Formulación de la tarea matemática

Este elemento constituye el alma de la tarea matemática, en la que se expone las actividades que el estudiante debe desarrollar y brinda información de los productos que el estudiante debe entregar. En la secuencia de tareas que construí, las formulaciones están relacionadas con: conocer elementos de la cultura Embera (prácticas y costumbres), conocer la situación actual de los Embera en el país, tejer manillas Embera, reconocer figuras tradicionales en las manillas, y conceptualizar las transformaciones involucradas. De esta manera busqué darle un significado social y cultural a la geometría, de tal forma que el estudiante además de aprender transformaciones en el plano aprenda a valorar el pensamiento de una cultura que por muchos años ha sido oprimida, en este caso los Embera (Aroca, 2007).

Recursos y materiales

Estos elementos que hacen parte de la descripción de la tarea difieren uno del otro. Los recursos son aquellos medios que se pueden emplear para el aprendizaje o procedimiento matemático. En este caso nos referimos a las manillas Embera. Los materiales, en cambio, son diseñados específicamente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este caso son algunas guías en las que muestro las figuras tradicionales de los Embera y propongo a los estudiantes la realización de actividades de conceptualización.

Agrupamientos, interacción y temporalidad de la tarea matemática escolar

En Gómez y colaboradores (2018) se presentan el agrupamiento, la interacción y la temporalidad de la tarea matemática de manera separada. Sin embargo, en este trabajo consideré pertinente mencionar estos elementos en un solo bloque, por sus estrechas relaciones.

El agrupamiento hace referencia a la forma como el docente va a organizar a los estudiantes para resolver la tarea. Las formas más comunes de organizar a los estudiantes son en parejas, grupos pequeños, individualmente y en grupo grande; este último se usa principalmente en la puesta en común que se deriva del trabajo en grupos pequeños. Según Gómez y colaboradores (2018) diferentes formas de organizar a los estudiantes generan diferentes interacciones entre estudiantes y estudiantes y profesor. En el diseño de las tareas procuré principalmente un trabajo en grupo, con el fin de promover el trabajo colaborativo (Radford, 2006) que sentará las bases para la puesta en común y un trabajo en puesta en común en la que los estudiantes intercambien ideas sobre lo que sucedió en los grupos.

La interacción y la comunicación en clase, es un elemento importante en la tarea matemática, pues lleva al profesor a planificar y prever las diferentes interacciones que se dan durante a el desarrollo de esta. El profesor establece las formas de interacción de acuerdo con los agrupamientos que genere. La planificación y previsión de la interacción fomenta el aprendizaje y permite que el profesor constate en la práctica, cómo se desarrolla el aprendizaje, y cómo él puede intervenir en ese proceso (Gómez y colaboradores, 2018). En la planificación de la interacción, me enfoqué en introducir elementos de la teoría de la objetivación de Radford (2014), de tal manera que el proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano se diera como una labor conjunta entre estudiantes y estudiantes y profesor. Esto lo hice con el propósito de producir colectivamente saberes matemáticos y crear sujetos reflexivos y críticos de su contexto social y cultural. Además, procuré hacer un énfasis en cómo favorecer la interacción para atender a los errores que se podrían presentar cuando los estudiantes resuelvan la tarea matemática.

La temporalidad hace referencia a la descripción de las etapas en las que se divide una tarea. En cada etapa el profesor puede establecer qué parte de la formulación se realiza, los materiales y recursos que se usan y la interacción que se quiere desarrollar. En el diseño de la secuencia de tareas propuse organizar la secuencia de acuerdo con el tiempo que el profesor considere necesario para su desarrollo, fraccionando las tareas según los bloques de clase en una institución educativa.

Previsiones de una tarea

Las previsiones que el profesor haga de la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesor, durante el desarrollo de la tarea matemática, brindan información importante para anticipar situaciones que puedan darse en el curso del desarrollo de la tarea. Es decir, son un apoyo para que el profesor tenga en cuenta aspectos que no pueda dejar pasar o en los que deba hacer énfasis. En la secuencia de tareas que construí, procuré hacer énfasis en prever las posibles respuestas que los estudiantes podrían dar a la tarea y en mencionar diferentes estrategias que le sirven al profesor para alcanzar las metas propuestas.

Fase 3: ***Conclusiones****.* En esta fase, escribí las conclusiones que se derivan de este trabajo. Para ello, tuve en cuenta los objetivos planteados al inicio del trabajo, las limitaciones que observé y las proyecciones del ejercicio.

CAPÍTULO 4

SECUENCIA DE TAREAS

La secuencia consta de cinco tareas. Los propósitos de cada tarea se encuentran en la **Tabla 9**.

Tabla 9: Resumen secuencia de tareas

Tarea	Nombre	Propósitos
1	Conozcamos a los Embera	Promover el reconocimiento de la comunidad indígena Embera y algunas de sus problemáticas.
2	Anzuelo	Tejer una manilla Embera y promover el reconocimiento de relaciones geométricas en la figura tradicional Anzuelo.
3	Traslaciones en la figura tradicional Anzuelo	Introducir el concepto de traslación por medio de la visualización de la manilla tejida en la Tarea 2 y el análisis de la figura tradicional Anzuelo.
4	Rayo Solar	Tejer una manilla Embera y promover el reconocimiento de relaciones geométricas en la figura Rayo Solar.
5	Reflexiones en la figura tradicional Rayo Solar	Introducir el concepto de simetría axial, por medio de la visualización de la manilla tejida en la Tarea 4 y el análisis de la figura tradicional Rayo solar.

4.1 TAREA 1: CONOZCAMOS A LOS EMBERA

Requisitos

Para los estudiantes

Para desarrollar esta tarea es importante que los estudiantes tengan habilidades relacionadas con la comunicación, entre las que se destaquen la comprensión lectora y la comunicación de ideas. Estas habilidades son necesarias para que puedan extraer información relevante de una lectura y hacer una representación visual de información procedente de esta. También, es necesario que tengan conocimientos relacionados con la geografía de Colombia, ya que será necesario para que puedan localizar la cultura Embera en el espacio geográfico y reconocer las principales características físicas de su entorno.

Para los profesores

Para resolver la tarea se requiere que los profesores tengan disposición para gestionar trabajo colectivo entre los estudiantes y promover construcción social del conocimiento. También deben ser hábiles en favorecer la expresión de ideas entre los estudiantes.

Metas

Las metas que se buscan alcanzar con el desarrollo de esta tarea son:

- Identificar aspectos relevantes de la cultura Embera. Por ejemplo, su localización en el país, su idioma, su vestimenta tradicional, su cosmovisión y sus artesanías.
- Ubicar a la comunidad indígena Embera como parte del contexto y de la identidad colombiana.
- Favorecer el desarrollo de competencias comunicativas y proveer un espacio en el que los estudiantes puedan opinar respecto a la cosmovisión de la cultura Embera.
- Favorecer el desarrollo de competencias ciudadanas referidas al respeto por pluralidad.
- Establecer rasgos comunes en las actividades de diseño, en las que se involucra la geometría, que practica la cultura Embera y actividades propias del entorno sociocultural de los estudiantes.

Formulación

1. En grupos de tres estudiantes y haciendo uso de sus dispositivos móviles vean el siguiente video https://semanarural.com/web/articulo/video-kundrara-kurisia-bia-el-pensamiento-bueno-de-los-jovenes/312. Luego, lean detenidamente el siguiente texto.

LOS EMBERA

Los Embera son un pueblo indígena originario del actual Departamento del Chocó. Se dividen en tres grupos dependiendo del lugar que ocupen: Embera Dobidá (gente de río), Embera Katío (gente de selva) y Embera Chamí (gente de montaña).

Con la llegada de los españoles a Colombia alrededor de 1511, los Embera se desplazaron a diferentes departamentos del país con características similares a donde vivían. Actualmente los Embera se distribuyen en tres países: Colombia, Panamá y Ecuador.

En Colombia, esta etnia está conformada por 182.335 individuos aproximadamente y se ubican en trece departamentos: Chocó, Antioquia, Córdoba, Risaralda, Caldas, Quindío, Santander, Valle del Cauca, Cauca, Nariño, Putumayo, Caquetá y Meta. Además, por el desplazamiento causado por el conflicto armado y la pobreza en sus territorios han migrado a ciudades principales como Medellín y Bogotá.

Una de las características de la cultura Embera es su forma de vida: la tierra pertenece a todos, allí cazan pescan y cultivan. Viven en zonas húmedas con muchos árboles, con mucha agua y generalmente en clima cálido.

COSMOVISIÓN

Los Embera son una comunidad de tradición oral, su forma de pensar es compartida y enseñada por medio de mitos, relatos y leyendas. Los Embera piensan que hay tres mundos que conforman el universo: el de arriba donde esta Karagabí (creador de los Embera); el de los humanos, que es la tierra donde viven los Embera; y el de Trutruica, que se encuentra debajo de lo humano. La única persona que puede relacionarse con los mundos de Karagabi y Trutruica es el Jaibaná o medico tradicional, quien en los rituales y ceremonias controla las esencias para curar enfermedades gracias a sus conocimientos.

LENGUA

Los Embera tienen una lengua propia, esta se divide en dos: la primera se habla en Panamá y Antioquia y la segunda se habla en el sudeste de Panamá, en Antioquia y en la Serranía del Darién. Debido a la estigmatización y discriminación de su lengua, algunas comunidades la han perdido poco a poco. Sin embargo, en otras comunidades se ha mantenido sólida como parte importante de su identidad y como principal vehículo de comunicación en las interacciones cotidianas.

CULTURA

Por medio de artesanías los Embera se expresan, nos muestran sus costumbres y el uso que le dan a los instrumentos que utilizan. Las artesanías no solo son un elemento de decoración, también expresan su cultura y la forma como viven, por ejemplo: cómo cazan, cómo siembran, cómo pescan y sus ritos.

La principal artesanía son los tejidos, algunos de ellos son: canastas, tejidos, vestuario, collares y manillas. Las manillas muestran diferentes formas. Por ejemplo, hay manillas que tienen forma de Anzuelo que para la cultura Embera significa herramienta espiritual para atraer u obtener beneficios (**Figuras 22 y 23**) o la figura Canasto que para ellos significa herramienta de la mujer para cargar el futuro del mundo (**Figuras 24 y 25**)

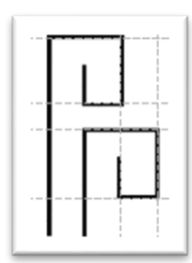
Manilla	***Figura***
 Figura 22: Anzuelo. Fuente: Opazo (2017)	 Figura 23: Figura tradicional Anzuelo. Fuente: Opazo (2017)

Figura 24: Canasto en manilla Embera. Fuente (2017)

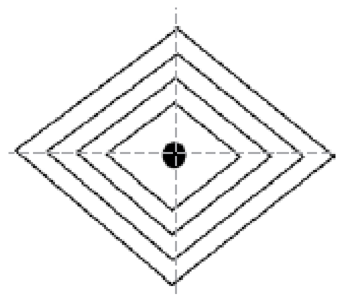


Figura 25: Figura tradicional Canasto. Fuente: Opazo (2017)

La información de la lectura proviene de: DANE (2018), Mora y colaboradores (2016) y Opazo (2017).

2. De acuerdo con el video y la lectura anterior, con un color sombreen los países en donde se encuentra el pueblo Embera y con otro color sombren los departamentos en los que se encuentre el pueblo Embera en Colombia (**Figura 26**).

Figura 26: Mapa de Colombia

3. En papel, dibujen cómo se imaginan el territorio de los Embera Dobidá, Embera Katío y Embera Chamí.

4. Escriban en un párrafo cuáles actividades realizan los Embera que también son propias de la cultura en la que ustedes viven.

5. Escriban en un párrafo, con sus propias palabras, qué significa para la cultura Embera la manilla.

6. En la cultura Embera, la figura Canasto significa herramienta de la mujer para cargar el futuro del mundo. Observen la figura y escriban en un párrafo que podría significar para ustedes dicha figura.

Materiales y recursos

Los materiales y recursos que se necesitan para el desarrollo de esta tarea son:

- Guía: contiene la formulación de la tarea y espacios para responder las preguntas 4, 5 y 6.
- Colores: los colores son necesario para realizar los puntos 2 y 3.
- Mapa de Colombia: es un croquis que estará en la guía para que los estudiantes resuelven el punto 2.
- Papel periódico: se utilizará para que los estudiantes realicen el dibujo del punto 3.
- Videos.

Agrupamientos, temporalidad e interacción en la tarea matemática escolar

Esta tarea se desarrolla en dos momentos: primero, la resolución de los puntos de la guía en grupos de tres, esto con el objetivo de promover el trabajo colaborativo que siente las bases para la puesta en común. Segundo, una puesta en común en la que los estudiantes intercambien ideas sobre lo que sucedió en los grupos, esto con el fin de que el profesor oriente una discusión sobre las respuestas dadas por los grupos.

En cuanto a la temporalidad, en la tarea se deja un tiempo para el trabajo en grupo, en el que los estudiantes definen en que orden realizan los puntos de la guía. Para la puesta en común se prevé que el profesor oriente una conversación espontanea en la que los estudiantes se refieran a los puntos de la guía en el orden que quieran según sus intereses.

Antes de iniciar el trabajo con la guía, es importante que los estudiantes escuchen y vean a los Embera hablar de sus tradiciones, de su historia y de sus prácticas. Para ello, el uso de videos es una herramienta fundamental. Propongo el siguiente vínculo a un video: https://app.box.com/s/4swry1c8zxn6e9ubad3s16qal06shoyv/file/231085963663, donde una mujer Embera nos habla sobre el significado de la práctica de tejer. También sugiero el video cuyo vinculo es: https://www.youtube.com/watch?v=19qmBos_nfo, donde hablan algunos Embera Chamí del Caquetá sobre la importancia que tiene para ellos mantener viva su cultura. Si bien, este video tiene una duración de 25 minutos vale la pena que los estudiantes lo vean. Por ello, le propongo al profesor dejarlo para que los estudiantes lo vean en la casa y en la siguiente sesión discutir en torno a este.

Durante el desarrollo de la tarea en el primer momento, el profesor pasa por cada grupo y recoge información que le sirva para hacer preguntas en la puesta en común. También le sugiero observar si cada grupo logra acceder al video; si este no es el caso, se puede proyectar el video en una pantalla donde todos los estudiantes lo puedan ver. Para ello tiene en cuenta, entre otras cosas, si los estudiantes se refieren a los Embera como parte de los habitantes de Colombia o si mencionan que hay rasgos de su cultura que son comunes a los de ellos y cuáles son esos rasgos. También tiene en cuenta qué interpretaciones hacen de la figura Canasto para escoger aquellas que mencionen figuras geométricas y para hablar de ellas en la puesta en común.

El profesor estimula a los estudiantes para que discutan entre ellos cada ítem y lleguen a soluciones que sean del consenso del grupo. Si el profesor observa que los estudiantes no logran llegar a un consenso para responder las preguntas de la guía, les dice que escriban las diferentes respuestas y realicen las respectivas justificaciones. Esto es importante para promover el trabajo en grupo y el intercambio de ideas entre ellos.

En la puesta en común, el profesor impulsa la discusión y la reflexión entre los estudiantes. Para ello, tiene en cuenta la información recolectada durante el trabajo en grupos. La interacción se prevé de la siguiente manera:

En el **punto 2**, uno o más grupos presentan sus mapas a los demás estudiantes y el profesor puede preguntar si colorearon los mismos departamentos y países. Con el objetivo de generar discusión sugiero hacer preguntas que cuestionen nuestras prácticas culturales y sociales que dejen ver la manera como se excluye a la comunidad Embera en nuestras acciones y nuestro lenguaje. Por ejemplo: ¿cómo debemos transformar nuestros comportamientos y nuestras maneras de referirnos a ellos para que los Embera sientan nuestro respeto como compatriotas? Además, es importante que en medio de la discusión sobre este punto se hagan afirmaciones como "los Embera son colombianos como nosotros y por ende tienen los mismos derechos". Con ello se busca siempre visibilizar a cultura Embera en la comunidad colombiana y generar un ambiente dentro del aula en el que los estudiantes reflexionen sobre su realidad histórico-cultural (Radford, 2006).

En el **punto 3**, el profesor puede solicitar a los grupos que peguen en las paredes del salón sus dibujos a modo de exposición. Luego, les da tiempo para que observen las producciones de los demás. Finalizada la observación se sugiere que haga preguntas como: ¿De acuerdo con los dibujos presentados por los grupos, qué rasgos del entorno físico son comunes en los Embera Chamí, Katío y Dobidá? ¿Por qué, a pesar de que sus territorios se caracterizan por tener mucha agua y selva, hoy vemos Embera en la ciudad de Bogotá? La respuesta que den los estudiantes a las preguntas debe invitar al profesor a generar un ambiente de reflexión en torno a las difíciles condiciones que los Embera tienen que enfrentar en la ciudad y la necesidad de respetarlos y valorarlos como un grupo indígena que hace parte fundamental del país.

En el **punto 4**, después de que uno o más grupos lean el párrafo que construyeron para responder la pregunta, el profesor conduce la discusión en torno a identificar actividades similares entre las comunidades indígenas y las comunidades en la que los estudiantes viven. Particular atención debe prestar a la actividad esencial de diseño (Bishop, 1991). En relación con la pregunta, los estudiantes pueden contestar que la actividad de pesca es común porque en algún momento tuvieron un acercamiento a dicha actividad. También se puede presentar que algún grupo responda que la elaboración de manillas es una actividad común porque alguien cercano a ellos o ellos mismos realizan manillas. En ese caso, es importante preguntarles a los estudiantes ¿qué tipo de diseños se construyen en esas manillas?, ¿los diseños tienen algún significado cómo los diseños de los Embera?, ¿qué los motiva a realizar estas manillas? Seguramente los estudiantes van a responder que los diseños corresponden a equipos de futbol, corazones o nombres de personas. En tal caso, es importante reflexionar en torno a las diferencias que existen, aun cuando la práctica de tejido es común. Esto último es muy importante porque muestra la transculturalidad de ciertas actividades (Aroca, 2007).

En el **punto 5** se propone que un estudiante lea la respuesta que él y su grupo dieron a la pregunta. Luego, los demás grupos reaccionan sobre si contestaron igual o diferente. Con el objetivo de dirigir la discusión en torno a la manilla y a la actividad de diseño como actividad común entre culturas, se sugieren preguntas como: ¿Qué ideas o pensamiento de los Embera se representan en las manillas? ¿Qué dibujos le pondrían a la manilla? ¿Creen que los Embera utilizan formas geométricas como las que nosotros conocemos? ¿En Bogotá hay personas que usan manillas Embera? ¿Saben dónde las consiguieron? Durante la conversación, el profesor explica que los Embera que viven en Bogotá realizan manillas como medio para subsistir. En algunos casos, ellos dejan de elaborar manillas con figuras tradicionales y elaboran manillas con figuras que tienen nombres de personas o escudos de equipos de fútbol para poderlas vender y hacer frente a las difíciles condiciones en las que viven en la ciudad. La sugerencia de hacer esta explicación tiene como propósito sensibilizar a los estudiantes sobre la vida de los Embera en la ciudad y señalar la pérdida de identidad derivada de estas condiciones.

En el **punto 6** el profesor privilegia las respuestas en la que los estudiantes aluden a la figura Canasto refiriéndose a figuras geométricas. Puede suceder que los estudiantes respondan que en la figura se ven cuadrados o rombos. En ese caso se sugiere que el profesor pregunte: ¿Es posible que en diferentes culturas se usen figuras geométricas comunes a las que conocemos, pero con diferente significado? Cuando los estudiantes se refieran a que hay formas geométricas que usan los Embera y ellos, están identificando que a pesar de que los significados son diferentes en cada cultura hay formas comunes, así como lo plantea Aroca (2007).

4.2 Tarea 2: Anzuelo

Requisitos

Para los estudiantes

Para desarrollar esta tarea, los estudiantes deben tener habilidades manuales que les permitan manipular objetos pequeños y coordinar sus movimientos para la elaboración de una manilla Embera. En cuanto a geometría, los estudiantes deben ser hábiles para extraer información visual acerca de formas geométricas. Además, deben tener conocimientos de objetos y relaciones geométricas, como: rectas, segmentos, ángulo, paralelismo y perpendicular entre rectas. En esta tarea también se requiere que tengan nociones intuitivas de semejanza y congruencia de figuras.

Para los profesores

Además de los requerimientos consignados en la primera tarea, el profesor debe saber hábil en la elaboración de la manilla Embera, de tal forma que pueda guiar asertivamente al estudiante en los pasos de construcción. También debe conocer la figura tradicional Anzuelo, su representación y significado cultural.

Metas

Las metas que se buscan alcanzar con el desarrollo de esta tarea son:

- Construir una manilla Embera con la figura tradicional Anzuelo.
- Reconocer en la figura tradicional Anzuelo dos anzuelos similares, con las siguientes características: uno de ellos está desplazado con respecto al otro y uno de ellos tiene un segmento vertical más corto que el otro.
- Identificar objetos y relaciones geométricas en la figura tradicional Anzuelo.
- Reconocer que la figura tradicional Anzuelo se reproduce como un patrón geométrico mediante desplazamientos en dos direcciones.

Formulación

1. Para los Embera: *la figura tradicional Anzuelo representa una herramienta espiritual para atraer u obtener beneficios*. En un párrafo escriban por qué creen que para los Embera el Anzuelo tiene este significado.
2. Observen y describan la figura tradicional Anzuelo que aparece ilustrada, considerando en qué se parecen y en qué se diferencian los dos trazos continuos (**Figura 27**).

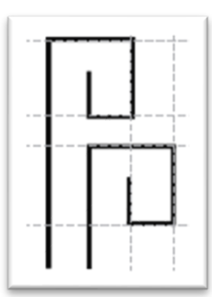
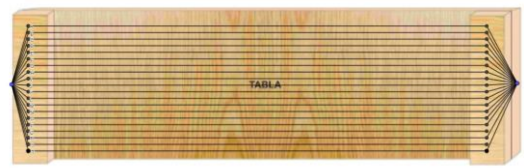
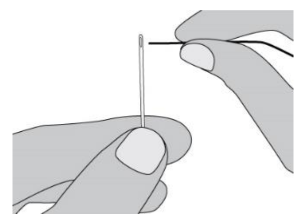
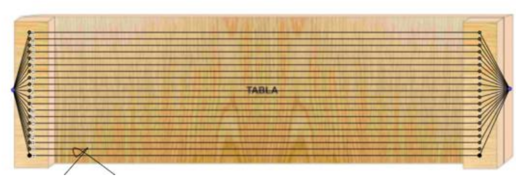
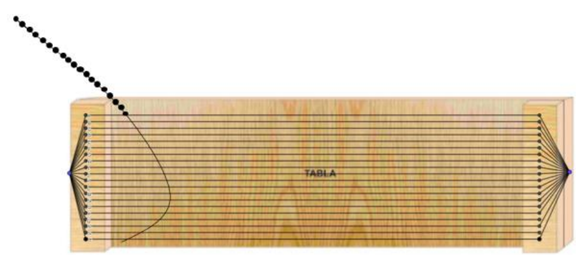
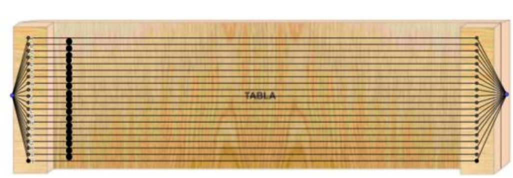
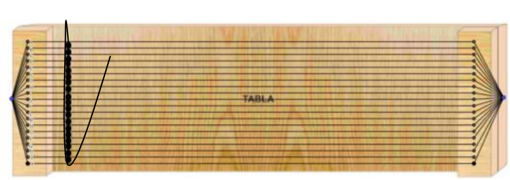


Figura 27: Figura tradicional Anzuelo

3. Realizar en parejas la manilla Embera siguiendo los pasos de construcción (**Tabla 10**).

Tabla 10: Pasos construcción manilla figura tradicional Anzuelo.

Pasos de construcción de la manilla	**Ilustración**
1. Usar un telar con 20 hilos.	
2. Enhebrar la aguja con dos metros de hilo negro.	
3. Tomar dos hilos de los bordes del telar, pasar la aguja por debajo de los hilos y hacer un nudo.	
4. Pasar por la aguja 19 mostacillas negras y luego pasar la aguja por debajo de los demás hilos del telar.	
5. Ubicar en entre cada dos hebras una pepa mostacilla.	
6. Pasar por encima la aguja e introducirla entre las mostacillas.	

7. Repetir los pasos del 3 al 6 teniendo en cuenta que los colores de la mostacilla son los que forman el patrón.	

4. Comparen y describan las similitudes que observen entre la figura tradicional Anzuelo y el diseño de la manilla que elaboraron. Fíjense cómo se reproduce la figura Anzuelo y cada anzuelo en el diseño de la manilla.

Materiales y recursos

Los materiales y recursos que se necesitan para el desarrollo de esta tarea son:

- Telar de tablillas, hilo, aguja, mostacillas y tijeras: estos materiales se usan en la elaboración la manilla Embera. Con estos materiales se busca motivar a los estudiantes para que aprendan geometría con una perspectiva cultural, proponiéndoles una actividad de diseño.
- Guía: contiene la formulación de la tarea, el dibujo de la figura tradicional Anzuelo y los pasos para la construcción de la manilla en la que se reproduce el patrón.

Agrupamientos, temporalidad e interacción en la tarea matemática escolar

Al igual que en la primera tarea, esta se desarrolla en dos momentos. El primero, corresponde a la elaboración, en parejas, de la manilla Embera y la solución a las preguntas de la guía. El segundo, se desarrolla en una puesta en común en la que los estudiantes, con la guía del profesor, podrán intercambiar ideas sobre el proceso que llevaron a cabo en la elaboración de la manilla y sobre la identificación de conceptos y relaciones geométricas en la imagen Anzuelo.

El primer momento de la tarea matemática se realiza en parejas, para promover el trabajo colaborativo en el que los estudiantes se ayuden mutuamente en el proceso de elaboración de la manilla y lleguen a acuerdos para responder las preguntas de la guía. El segundo momento, se hace en puesta en común para que los estudiantes tengan un espacio para compartir su experiencia en el trabajo en grupo y generar un ambiente de discusión donde se produzca un intercambio de ideas, elementos centrales del aprendizaje (Radford, 2006).

En relación con la temporalidad, cada momento de la tarea matemática tiene un tiempo para su desarrollo. En el trabajo en parejas, los estudiantes cuentan con tiempo suficiente para la elaboración de la manilla y para contestar las preguntas de la guía. En la puesta en común, el profesor dispone de tiempo para socializar el trabajo realizado por las parejas. Se recomienda prever tiempo considerable para su implementación, ya que en esta tarea los estudiantes deben realizar todo el proceso de elaboración de la manilla Embera. En caso de que el diseño de la manilla lleve mucho tiempo, se les puede pedir a los estudiantes que la terminen en la casa y la pregunta cuatro de la guía se realice la siguiente clase.

Durante el trabajo en parejas preveo la siguiente interacción: Las parejas podrán determinar la forma de trabajo que mejor les convenga para elaborar la manilla. Si el profesor observa que las parejas no logran organizarse, puede proponerles formas de organización. Por ejemplo, mientras un estudiante está tejiendo, su compañero le ayuda a pasar las mostacillas en el orden que pide el paso de construcción.

En el trabajo en parejas, se puede presentar confusión en el proceso de elaboración de las manillas. Por ello, es importante que el profesor pase por cada pareja monitoreando sus avances y solucionando dudas. Al hacerlo, el profesor debe revisar el trabajo de los estudiantes y recoger información sobre la descripción que hagan de la figura tradicional Anzuelo y de los objetos geométricos que identifiquen. Si el profesor evidencia que, al responder la guía, los estudiantes no están identificando objetos y relaciones geométricas de interés, puede cuestionarlos y hacer que realicen un proceso de visualización para que los identifiquen.

En la puesta en común se promueve la participación de los estudiantes y se recomienda que al final de las intervenciones el profesor presente una breve conclusión. La interacción se prevé de la siguiente manera:

En el **punto 1**, los estudiantes leen la respuesta que dieron a la pregunta. Si el profesor advierte que los estudiantes aún no se han apropiado del significado que tiene para los Embera la figura tradicional Anzuelo, realizará una explicación sobre tal importancia y señalará cómo estas nacen de la percepción que ellos tienen de su entorno físico. Para ahondar en la discusión, el profesor puede preguntar ¿Para qué familia Embera (Katío, Dobidá o Chamí) será más importante la figura tradicional Anzuelo? Se espera que los estudiantes recuerden que los Embera se dividen en tres grupos, dependiendo de su ubicación geográfica, y que los Embera Dobidá son la gente de río. Esta primera discusión es importante para darle un mayor significado cultural a la tarea matemática, pues, como lo señala Bishop (1991), las matemáticas son un producto cultural.

En el **punto 2**, algunos estudiantes exponen la descripción que hicieron de la figura tradicional Anzuelo. Teniendo en cuenta los aportes de los estudiantes, sugiero que las preguntas que realice el profesor se enfoquen en la composición de la figura, es decir, que esta está compuesta por dos anzuelos similares. Las preguntas que se pueden hacer son las siguientes: ¿Qué tienen de parecidos los dos anzuelos? Con esta pregunta, se busca incentivar a los estudiantes para que digan que hay cuatro segmentos de la misma longitud y que hay solo un segmento de longitud diferente. Otra pregunta puede ser ¿Cómo están organizados los segmentos que tienen la misma longitud? Esta pregunta busca que los estudiantes digan que los segmentos están dispuestos de la misma forma o tienen la misma configuración, es decir que los anzuelos tienen la misma forma y el mismo tamaño excepto por uno de los segmentos.

Es importante que los estudiantes reconozcan que las dos figuras que componen la figura tradicional Anzuelo son congruentes salvo por uno de los segmentos. El profesor puede tapar una parte del segmento de longitud mayor en un anzuelo para hacer que se vea de la misma longitud que su correspondiente en el otro anzuelo y de esta manera preguntarles ¿cuál es la relación de tamaño y forma entre los dos anzuelos? El profesor debe buscar que los estudiantes se expresen adecuadamente usando los términos geométricos correctos y siempre que sea necesario corregir el lenguaje. Por ejemplo, si dicen "segmentos iguales" hay que decirles que la forma adecuada de referirse a ellos es segmentos congruentes; si dicen "líneas" deberían usar el término segmento; si dicen "hay dos segmentos verticales" deberían decir hay pares de segmentos paralelos.

En el **punto 3**, el profesor les solicita a los estudiantes que hablen de su experiencia en la elaboración de la manilla. Para ello, puede realizar preguntas como: ¿cómo se sintieron elaborando la manilla? ¿Consideran que fue difícil seguir los pasos de la construcción? ¿Qué sintieron cuando vieron la manilla terminada? ¿Qué fue lo primero que observaron cuando terminaron la manilla? Estas preguntas permiten identificar si fue motivador para los estudiantes el proceso de elaboración de la manilla y buscan mostrarles que lo que ellos hicieron hace parte de la cotidianidad de la comunidad Embera. Además, los estudiantes experimentan una actividad de diseño (Bishop, 1991) que se caracteriza por imaginar formas, figuras y modelos para luego ser plasmados en una manilla.

En el **punto 4,** si los estudiantes relacionan la manilla que construyeron con la figura tradicional Anzuelo, el profesor puede aprovechar el diseño de la manilla en su totalidad para explicar en qué consiste un patrón geométrico y hacerles ver a los estudiantes que en la manilla hay un patrón en el que se reproduce la figura tradicional Anzuelo varias veces.

Es importante que los estudiantes vean que el patrón se reproduce de varias maneras: Primero, si miramos la figura tradicional Anzuelo compuesta por dos anzuelos similares (**Figura 28**), el patrón aparece reproducido, utilizando el anzuelo amarillo para dos parejas. Es decir, el anzuelo amarillo forma pareja con el anzuelo verde generando una figura tradicional Anzuelo (**Figura 29**) que se repite tres veces. Pero el anzuelo amarillo también forma pareja con el anzuelo rojo (**Figura 30**) y este patrón también se reproduce tres veces. Es como si la figura tradicional Anzuelo se desplazara en dirección paralela al borde de la manilla y quedaran marcados tres momentos del movimiento.

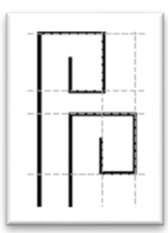


Figura 28: Figura tradicional Anzuelo

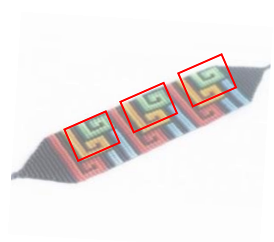


Figura 29: Patrón de pareja anzuelos amarillo y verde

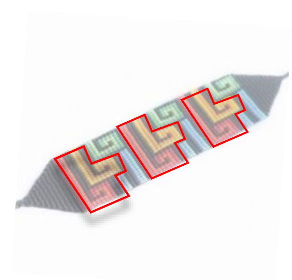


Figura 30: Patrón de parejas de anzuelos Rojos

Segundo, si analizamos un solo anzuelo, por ejemplo, el anzuelo amarillo, se puede ver que se reproduce idéntico tres veces y lo que cambia es la posición (**Figura 31)**. Lo mismo pasa con los anzuelos rojos y verdes. Podemos imaginar que uno de estos anzuelos se desplazó en dirección paralela al borde de la manilla y quedan registrados tres momentos del movimiento.

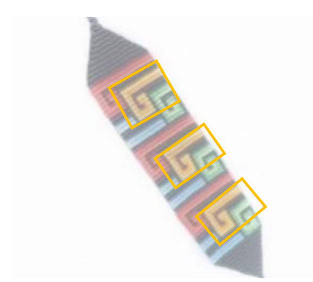


Figura 31: Patrón de anzuelos amarillos

Tercero, si observamos el anzuelo verde (**Figura 32)** podemos imaginar que se desplaza de forma oblicua hacia arriba para formar las cabezas de los anzuelos amarillo y rojo (**Figura 33**)

Figura 32: Anzuelo verde

Figura 33: Anzuelos verde, amarillo y rojo

4.3 TAREA 3: TRASLACIONES EN LA FIGURA TRADICIONAL ANZUELO

Requisitos

Para los estudiantes

Para desarrollar esta tarea, además de los objetos, relaciones y nociones geométricas requeridos en la segunda tarea, los estudiantes deben tener ideas intuitivas relacionadas con magnitud, dirección y sentido de un movimiento.

Para los profesores

Además de los requerimientos consignados en la primera tarea, el profesor debe ser hábil en reconocer dificultades que pueden tener las estudiantes relacionadas con la identificación del vector de traslación, las cuales pueden ser las siguientes:

- Identificación de la magnitud del movimiento, esto tiene que ver con el tamaño del vector.
- Identificación de la dirección del vector, esto tiene que ver con el grado de inclinación de la recta que lo contiene con respecto a un eje x de un sistema de coordenadas de referencia.
- Identificación del sentido, esto tiene que ver con la orientación del vector respecto a la semirrecta que lo contiene.

Metas

- Reconocer los elementos que intervienen en una traslación (magnitud, dirección y sentido del movimiento).

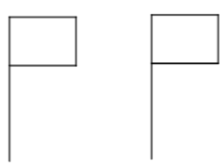
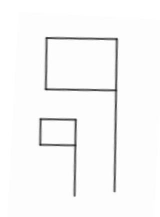
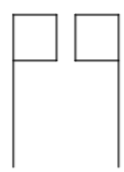
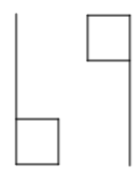
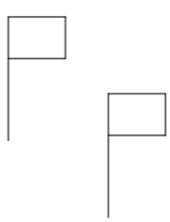
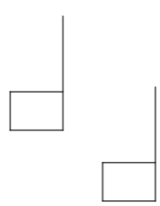
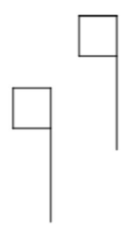
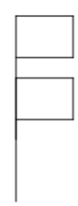
- Visualizar y construir los vectores que representan traslaciones que operan sobre la figura tradicional Anzuelo en la manilla Embera.
- Reforzar el hecho de que una traslación deja invariante la forma y el tamaño de una figura.
- Describir la manilla Embera aludiendo a las traslaciones para identificar la geometría subyacente.

Formulación

Parte 1

1. Observen, comparen y describan las parejas de P que aparecen en cada uno de los siguientes recuadros (**Tabla 11**). Identifiquen en cuales de las parejas podemos suponer que una de las P se movió únicamente mediante un desplazamiento hasta llegar a la posición de la otra P y en cuáles no.

Tabla 11: Parejas de P

1	2	3	4
			
5	6	7	8
			

2. Observen la figura en la que hay una P roja y una P verde, luego resuelvan cada uno de los ítems (**Figura 34**).

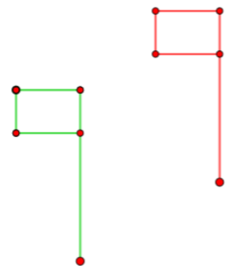


Figura 34: P roja y P verde

a. Describan el desplazamiento más simple que se debería hacer con la P roja para que quede encima de la P verde.

b. Unan con segmentos los cinco puntos de la P roja con sus correspondientes puntos de la P verde, que son aquellos con los que coincidirían si la P roja se desplaza hasta quedar encima de la P verde.

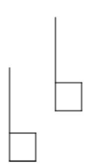
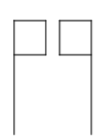
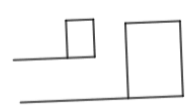
c. Encuentren características comunes de los cinco segmentos.

d. Coloquen una fecha a los segmentos para indicar el movimiento que hicieron para ir de la P roja a la P verde.

Parte 2

3. Observen cada una de las imágenes de los recuadros y de acuerdo con los puntos 1 y 2 indiquen en cuáles recuadros se representa una traslación y en cuáles no. En el recuadro en el que observen una traslación tracen el vector que la determina (**Tabla 12**).

Tabla 12: Parejas de P trasladadas y no trasladadas

1	2	3	4
			

4. Observen los anzuelos amarillos en la manilla Embera y describan en un párrafo el patrón de traslación del anzuelo amarillo, explicando las características del vector de traslación (**Figura 35**).

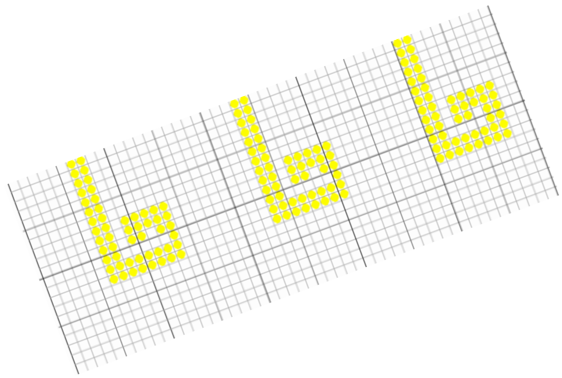


Figura 35: Anzuelos amarillos

5. Construyan el patrón de los anzuelos rojos de la manilla Embera haciendo uso del vector rojo de traslación (**Figura 36 y 37**).

Figura 36: Vector de traslación

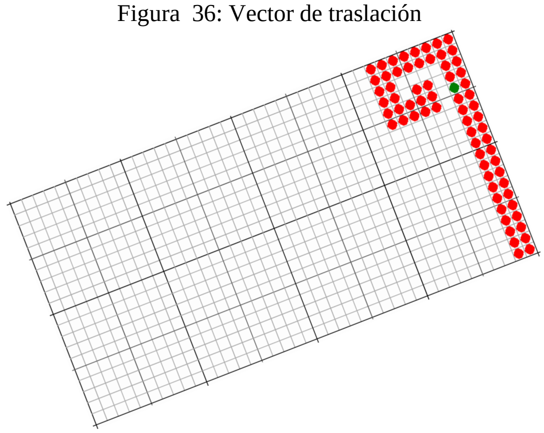


Figura 37: Anzuelo rojo

6. Escriban en un párrafo si consideran que la figura tradicional Anzuelo representa una translación o no y por qué (**Figura 38**).

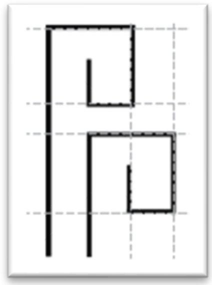


Figura 38: Figura tradicional Anzuelo

7. Escriban en un párrafo si consideran que la comunidad indígena Embera hace geometría cuando elabora las manillas, en particular si hacen traslaciones geométricas. Justifiquen la respuesta.

Materiales

- Guía: contiene la formulación de la tarea y espacios para responder las preguntas.
- Regla graduada: para medir los segmentos.

Agrupamientos, temporalidad e interacción en la tarea matemática escolar

Esta tarea se realiza en cuatro momentos. El primero, corresponde a la solución de la Parte 1 de la guía en grupos de tres estudiantes. El segundo, consiste en una primera puesta en común en la que el profesor explica la definición de traslación y vector de traslación, esto se hace con toda la clase. El tercero, consiste en retomar la guía para responder la Parte 2 de la guía, en los mismos grupos del primer momento. El cuarto, es una segunda puesta en común en la que los estudiantes pueden explicar a toda la clase cómo han resuelto los puntos de la guía.

La solución de la guía se resuelve en grupo de tres estudiantes, esto con el objetivo de promover la construcción social del conocimiento a través del intercambio de ideas y toma de decisiones en consenso sobre la solución de cada una de las preguntas. La primera puesta en común se hace para que los estudiantes construyan, con la guía del profesor, las nociones de traslación y de vector de traslación y de esta manera tengan elementos para analizar y reconocer en la manilla Embera la representación de traslaciones. La segunda puesta en común se hace con el objetivo de generar un diálogo, en torno a la identificación de traslaciones, con puntos de vistas divergentes que permita a los estudiantes analizar bien sus respuestas para expresarlas con orden y claridad.

La temporalidad de cada uno de los momentos la determina el profesor, previendo disponer de tiempo suficiente para el desarrollo de cada una de las mismas. Probablemente se requerirá de más de una sesión de clase.

La interacción de cada momento de la tarea la preveo de la siguiente manera:

En el **primer momento,** cada grupo responde las preguntas de manera ordenada, llegando a acuerdos sobre la solución de cada pregunta. El profesor pasa por cada grupo monitoreando el trabajo de los estudiantes y solucionando dudas al respecto. Al igual que en las dos primeras tareas, el profesor debe recoger información relevante del trabajo de los grupos. Por ejemplo:

- En el punto 1 puede notar si los estudiantes logran identificar en cuáles parejas de P se representa un desplazamiento y en cuáles no. Si el profesor observa que a los estudiantes se les dificulta este punto, debe hacer desplazamientos empleando objetos concretos.
- En el punto 2, el profesor puede observar si los estudiantes trazan correctamente los segmentos y encuentran que tienen la misma magnitud y que hay una relación de paralelismo. Si este no es el caso, debe guiarlos para que visualicen estas propiedades.

La información que el profesor recoja debe servir de base para introducir el concepto de traslación y de vector de traslación en el segundo momento. Este se describe a continuación.

En el **segundo momento**, el profesor usa el primer punto de la guía para explicar la noción de desplazamiento. Puede preguntarles a los estudiantes ¿Será que en la pareja de cada recuadro una de las P se desplazó para llegar a la otra P? Puede suceder que algunos estudiantes contesten que en todos los casos hay un desplazamiento porque tengan la idea de que cualquier movimiento es un desplazamiento. En este caso el profesor, debe aclarar que hay movimientos que no son un desplazamiento como por ejemplo girar o reflejarse.

En relación con el segundo punto de la guía, el profesor podría dibujar en el tablero las dos “P” del punto 2(a) y solicitarle a un estudiante que describa el movimiento que haría la P roja para quedar encima de la P verde. Debe estar atento a que el movimiento descrito sea el más eficiente para que efectivamente sea una traslación, ya que los estudiantes podrían imaginar movimientos curvos o complejos. La participación de los estudiantes se podría usar para concluir que la P roja sufriría un desplazamiento, es decir un cambio de posición, pero su forma, tamaño y orientación no cambian.

Para introducir el concepto de vector y los elementos que lo definen, el profesor le puede pedir a un estudiante que trace los segmentos que se piden en el punto 2(b) y las flechas que determinan la orientación del movimiento, como se pide en 2(d). Luego, promueve una discusión sobre las características encontradas en 2(c) y 2(d). Puede escribirlas en el tablero para que al final los estudiantes vean con mayor claridad que los trazos hechos representan vectores y que además son iguales. Es decir, que las características que deben mencionar son: la igualdad de longitud de los segmentos, la relación de paralelismo entre los segmentos explicando que todos tienen la misma dirección y la igualdad del sentido que determinan las flechas.

La puesta en común se puede orientar con las siguientes preguntas: ¿Será que si trazamos rectas que contengan los segmentos, estas se cruzan en algún punto? ¿Entre los segmentos se puede establecer una relación de perpendicularidad o paralelismo? ¿Podemos decir que si las rectas son paralelas tienen el mismo ángulo de inclinación? ¿En qué se diferencia la dirección del sentido? ¿Puede haber dos vectores con la misma dirección, pero diferente sentido?

Al finalizar la puesta en común el profesor debería explicar que cualquier vector se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido. El profesor puede hacer énfasis en que los vectores que construyeron representan un desplazamiento de cada punto de la P roja en la misma magnitud, dirección y sentido hacia su punto correspondiente en la P verde. Esto representa una traslación, es decir, las "P" roja y verde se relacionan mediante una traslación que se caracteriza por un vector, llamado vector de traslación.

En el **tercer momento,** los estudiantes reanudan el trabajo de la guía en grupos**.** El profesor puede examinar si los estudiantes entendieron la explicación de traslación y de vector de traslación. Para ello, debe observar si logran identificar en las representaciones de la guía cuándo hay una traslación, cuándo no y si trazan correctamente el vector que determina la traslación. Además, debe observar si logran identificar si los anzuelos amarillos representan una traslación o no y si además identifican que en la manilla Embera hay representaciones geométricas como las que ellos estudian

Así, los estudiantes ven que hay conceptos comunes de la geometría que están presentes en diferentes culturas (Aroca, 2007; Bishop, 1991).

En el **cuarto momento,** se sugiere generar una puesta en común en torno a los puntos 3 a 7 de la guía, de tal forma que se puedan solucionar dudas que hayan quedado del trabajo anterior. preveo la puesta en común de la siguiente manera:

En el **punto 3,** se le puede pedir a un estudiante que exponga a la clase la respuesta a este punto. Sus compañeros deben reaccionar manifestando acuerdo o desacuerdo. Si los estudiantes logran identificar los recuadros en los que hay una traslación, pero se les dificulta trazar el vector de traslación, debe recordarles su significado y los elementos que lo definen. Para ello, puede usar uno de los recuadros en el que se represente una traslación y preguntarles: ¿se representa un desplazamiento entre una figura y la otra? ¿cómo son los vectores que unen un punto y su imagen?

En el **punto 4,** el profesor retoma el trabajo con la manilla Embera y la figura tradicional Anzuelo por medio de la identificación de traslaciones y de los vectores de traslación que las determinan, al trabajar sobre una representación simplificada de la manilla. El profesor puede propiciar un ambiente de diálogo con preguntas como: ¿Quién encontró que el patrón de los anzuelos amarillos de la manilla Embera representan traslaciones? ¿Cuáles son los vectores de traslación? ¿Qué caracteriza cada vector de traslación? ¿cómo se vería la manilla si los vectores de traslación tienen igual dirección y sentido pero diferente magnitud? ¿Qué diferencia a los vectores de traslación si imaginamos que el movimiento se realiza a partir del anzuelo amarillo que está en el centro de la manilla?

En el **punto 5**, le sugiero al profesor iniciar la discusión preguntándole a los estudiantes, que, sin hacer la traslación, ¿cómo se imaginan que va a quedar la figura resultante? Algunos estudiantes se imaginarán los anzuelos sin tener en cuenta alguna característica del vector de traslación. Por ejemplo, pueden considerar un anzuelo más separado que otro. Si esto ocurre, el profesor puede hacerles preguntas como: ¿Consideran que los anzuelos que se imaginaron representan el patrón de los anzuelos rojos de la manilla Embera? ¿En qué se diferencian? ¿Qué se debe hacer para reproducir el patrón tal como se observa en la manilla? Con estas preguntas, se busca orientar a los estudiantes para que se den cuenta de que es necesario identificar la dirección, magnitud, y sentido del vector si quieren reproducir el patrón de los anzuelos rojos de la manilla Embera. Para que los estudiantes mencionen las características del vector de traslación que encontraron en el trabajo en grupo, se les puede preguntar: ¿Qué información nos proporciona el vector para poder hacer la representación de la figura? ¿Cómo podremos saber la magnitud? ¿Cómo saber la dirección y sentido del vector? Se espera que los estudiantes encuentren que la magnitud del vector se puede hallar contando la cantidad de mostacillas que hay entre la posición inicial y final de cualquier punto del anzuelo rojo. En cuanto a la dirección, se debe buscar que los estudiantes respondan que el vector está en una posición inclinada entre la vertical y la horizontal respecto a la hoja de la guía. Sobre el sentido, se espera que se fijen en la orientación de la flecha, es decir, hacia abajo e izquierda. Luego, se les pide a los estudiantes que dibujen el patrón y que contesten si es posible trasladar la figura varias veces sin que se altere sus propiedades de forma y tamaño. Si algún estudiante contesta que no, se puede usar el patrón de los anzuelos rojos para mostrarle que si es posible. En el patrón anzuelo rojo hay un punto verde que puede usar el profesor para explicarles a los estudiantes la traslación puntual. Para ello sugiero hacer la siguiente pregunta: ¿Dónde quedaría el correspondiente punto verde según el vector de traslación? Para concluir este punto, vale la pena explicitar que cuando se aplica la traslación se obtiene otra figura llamada imagen, la cual conserva la forma y tamaño de la figura original.

En el **punto 6,** algún estudiante expone a la clase la respuesta que él, junto con sus compañeros, elaboró para responder la pregunta. Luego, el profesor puede preguntar a los demás estudiantes si están de acuerdo o tienen alguna respuesta diferente. En el caso que algún estudiante responda que sí es una traslación, el profesor debe guiarlos para mostrarles que las dos figuras no representan una traslación, porque no son congruentes. Para ello, sugiero hacer preguntas orientadoras como: ¿Qué caracteriza a una traslación? ¿Será que la forma o el tamaño cambian o se mantienen iguales en una traslación? ¿Cómo son las formas que componen la figura tradicional Anzuelo? ¿Son exactamente iguales en forma y tamaño? Con el fin de aclarar dudas y precisar el concepto de traslación, se puede usar la figura tradicional Anzuelo para explicar a los estudiantes que la figura se puede modificar, de tal forma que cumpla las condiciones que exige una traslación. Para ello, sugiero hacer preguntas como: ¿Qué ocurre si se tapa una parte del segmento vertical? (**Figura 39**) ¿Será que ahora sí se puede decir que representa una traslación?

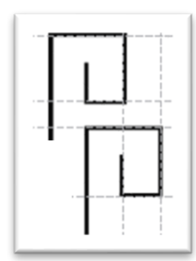


Figura 39: Anzuelo tradicional modificado

En el **punto 7**, sugiero al profesor generar un ambiente de reflexión en torno a la importancia que tiene la actividad de diseño de la comunidad indígena Embera, materializada en la manilla. Para ello, el profesor puede pedirles a los estudiantes que mencionen sus percepciones acerca de la cultura Embera y su relación con el aprendizaje de las traslaciones en el plano. Durante la reflexión, se puede describir la actividad de diseño que lleva a cabo los Embera en la creación de la manilla y como estos son valiosos cuando los estudiamos, no solo porque tienen formas con características geométricas que nos ayudan a aprender geometría, sino también porque representan un legado culturan invaluable que es importante mantener vivo, ya que hace parte de nuestra identidad como colombianos (Aroca, 2007).

4.4 TAREA 4: RAYO SOLAR

Requisitos

Para los estudiantes

Para el desarrollo de esta tarea se tendrán en cuenta los requerimientos de la segunda tarea. Es decir, habilidades manuales para la elaboración de la manilla y conocimiento de relaciones y objetos geométricos como: rectas, segmentos, ángulo, paralelismo y perpendicular entre rectas. Además de nociones intuitivas de semejanza y congruencia de figuras. Por otro lado, los estudiantes deben tener destreza para doblar el papel.

Para el profesor

En esta tarea, se tendrán en cuenta los requerimientos para el profesor consignados en la tarea dos. Adicionalmente, debe tener conocimiento de la figura tradicional Rayo solar su representación y significado cultural. Considero importante, que el profesor recoja los aciertos y desaciertos evidenciados en la tarea dos; en particular, los referidos a la elaboración de la manilla; por ejemplo, la forma óptima para organizar las parejas en el proceso de tejido o la mejor forma para explicar a los estudiantes los pasos de construcción de la manilla. Lo anterior, puede reducir la complejidad del proceso de tejido.

Metas

Las metas que se buscan alcanzar con el desarrollo de esta tarea son:

- Construir una manilla Embera con la figura Rayo solar.
- Reflexionar entorno al significado cultural de la figura tradicional Rayo solar de los Embera

- Identificar en la figura tradicional Rayo solar formas congruentes y reflejadas respecto a una línea de referencia.

- Encontrar que las figuras congruentes identificadas en la figura tradicional Rayo solar no pueden describirse mediante una traslación.

Formulación

1. Para los Embera: *la figura tradicional Rayo solar representa energía y fuente en la que se originan los colores*. En un párrafo escriban por qué creen que para los Embera el Rayo solar representa esto.

2. Observen y describan la figura tradicional Rayo solar que aparece ilustrada, considerando en qué se parecen y en qué se diferencian las partes separadas por las líneas puntuadas (**Figura 40**).

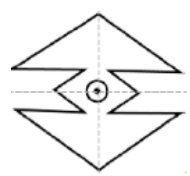
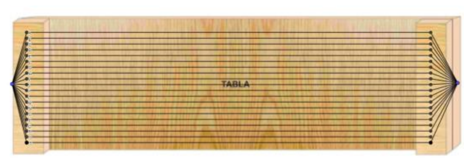
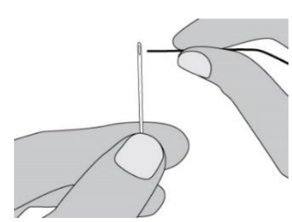
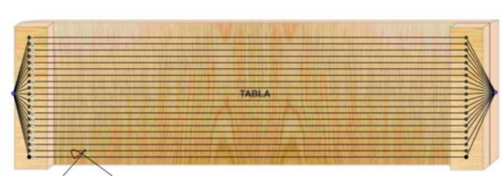
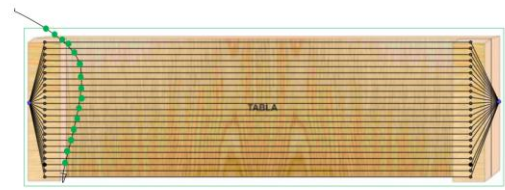
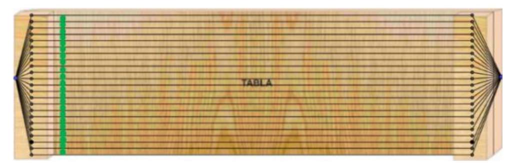
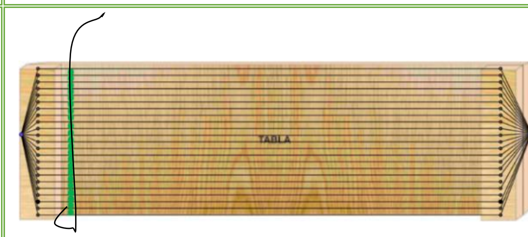


Figura 40: Figura tradicional Rayo solar

3. Realizar en parejas la manilla Embera siguiendo los pasos de construcción (**Tabla 13**).

Tabla 13: Pasos construcción manilla figura tradicional Rayo solar

Pasos de construcción de la manilla	Ilustración
1. Usar un telar con 23 hilos.	
2. Enhebrar la aguja con dos metros de hilo negro.	
3. Tomar dos hilos de los bordes del telar, pasar la aguja por debajo de los hilos y hacer un nudo.	

4. Pasar por la aguja 22 mostacillas verdes y luego pasar la aguja por debajo de los demás hilos del telar.	
5. Ubicar en entre cada dos hebras una pepa mostacilla.	
6. Pasar por encima la aguja e introducirla entre las mostacillas.	
7. Repetir los pasos del 3 al 6 teniendo en cuenta que los colores de la mostacilla son los que forman el patrón.	

4. Comparen y describan las similitudes que observen entre la figura tradicional Rayo solar y el diseño de la manilla que elaboraron. Fíjense cómo se reproduce la figura tradicional Rayo solar en la manilla, dónde estarían las líneas puntuadas y si hay otras formas que tengan las mismas características encontradas en la figura tradicional Rayo solar.

Materiales

Los materiales y recursos que se necesitan para el desarrollo de esta tarea son los mismos que en la tarea dos, es decir:

- Telar de tablillas, hilo, aguja, mostacillas y tijeras: estos materiales se usan en la elaboración la manilla Embera. Con estos materiales se busca motivar a los estudiantes para que aprendan geometría con una perspectiva cultural (Aroca, 2007), proponiéndoles una actividad de diseño.

- Guía: contiene la formulación de la tarea, el dibujo de la figura tradicional Rayo Solar y los pasos para la construcción de la manilla en la que se reproduce el patrón.

Agrupamientos, temporalidad e interacción en la tarea matemática escolar

Esta tarea se desarrolla en dos momentos. En el primer momento, los estudiantes deben abordar la tarea en parejas y realizar una exploración para planear las posibles respuestas a lo solicitado. En el segundo momento, los estudiantes deben exponer en una puesta en común, con la orientación del profesor, los resultados a los que llegaron en el trabajo en parejas.

El primer momento, se realiza en parejas con el propósito de promover el trabajo colaborativo, en el que los estudiantes se ayuden mutuamente en el proceso de elaboración de la manilla y lleguen a acuerdos para responder las preguntas de la guía. El segundo momento, se hace en puesta en común donde los estudiantes tienen espacio para compartir su experiencia en el trabajo en grupo y generar un ambiente de discusión en torno a las preguntas de la guía.

La temporalidad es la misma que se empleó en la tarea dos. Insisto en que el profesor debe tener en cuenta el disponer de tiempo suficiente para desarrollar completamente la guía y la puesta en común, ya que la elaboración de la manilla es un proceso lento.

Durante el trabajo en parejas preveo la siguiente interacción: al igual que en la tarea dos, el profesor le entrega a cada pareja de estudiantes los materiales necesarios para el desarrollo de la guía. Luego, cada pareja determina la forma de trabajo que mejor les convenga para elaborar la manilla; sin embargo, si el profesor advierte que los estudiantes no se ponen de acuerdo, puede sugerirles formas de organización más adecuadas, teniendo en cuenta la experiencia vivida en la tarea dos. Si el profesor identifica que los estudiantes tienen dificultades para seguir los pasos de construcción, le sugiero que pase por cada pareja y de forma guiada con el telar explique paso a paso como se realiza el tejido. Se espera que en esta tarea los estudiantes tengan mejor dominio del telar y de los pasos de construcción, ya que la tarea dos debió dejarles aprendizajes. Al igual que en las demás tareas el profesor debe pasar constantemente por cada pareja y recoger información relevante acerca del trabajo de los estudiantes. Por ejemplo, debe estar atento a la descripción que hagan de la figura Rayo solar, y si reconocen trazos, figuras, formas congruentes pero reflejadas respecto a una de las líneas puntuadas.

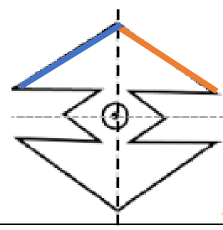
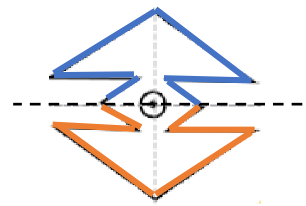
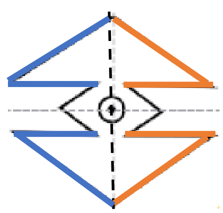
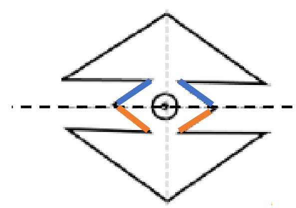
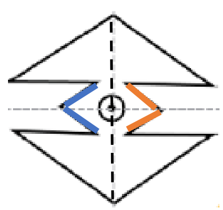
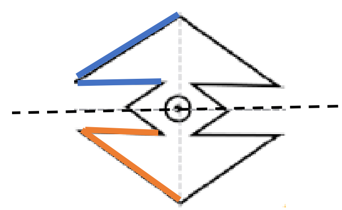
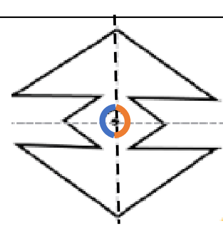
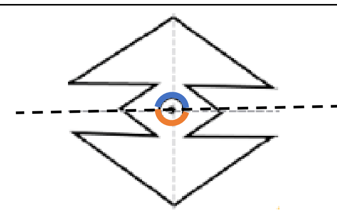
En la puesta en común, le sugiero al profesor iniciar cada uno de los puntos de la guía con la pregunta planteada. A medida que los estudiantes hacen sus comentarios, el profesor debe generar más interrogantes que permitan profundizar en el tema. Teniendo en cuenta lo anterior, preveo la puesta en común de la siguiente manera:

En el **punto 1,** se pide responder a la pregunta ¿por qué creen que para los Embera la figura tradicional Rayo solar representa energía y fuente en la que se originan los colores? Le sugiero al profesor generar una mesa redonda, donde los estudiantes tengan la oportunidad de argumentar sus ideas y opiniones en relación con este primer punto. Se espera que las ideas previas que los estudiantes traen del sol las relacionen con el significado que los Embera le dan a la figura Rayo solar. Teniendo en cuenta las intervenciones que hagan los estudiantes, el profesor puede recordarles que los Embera determinan, interpretan y representan su entorno. Con el objetivo de generar una discusión en torno a las similitudes y diferencias que pueden tener diferentes culturas acerca de la interpretación de su espacio (Bishop 1991), el profesor puede hacer preguntas como: si cambiamos de entorno ¿El sol tendría el mismo significado? ¿será que, en otra cultura diferente a la Embera el sol representa algo distinto? ¿Nosotros hacemos parte de alguna cultura? ¿qué representa el sol para nosotros? ¿Habría alguna similitud entre lo que representa el sol para nosotros y lo que representa para los Embera? Estas preguntas están enfocadas en mostrarle a los estudiantes que, aunque hay diferencias en las interpretaciones de los fenómenos naturales del entorno de cada cultura puede haber, como lo señala Aroca (2007) similitudes en lo que esos fenómenos representan para diferentes culturas.

En el **punto 2,** se pide describir la figura tradicional Rayo solar. Se espera que los estudiantes mediante observación noten que las líneas puntuadas generan diversas formas, trazos y figuras geométricas congruentes. Si el profesor advierte que los estudiantes no logran identificar este hecho, sugiero que desde un enfoque visual e intuitivo los lleve a descubrir el hecho de que hay pares de formas, figuras y trazos que son reflejo en espejo una de la otra, tienen la misma forma y tamaño. Para lograrlo, se les puede pedir que doblen la hoja de la guía por una de las líneas puntuadas y luego que describan los pares de figuras que se generan con el doblez. Durante las intervenciones de los estudiantes, el profesor puede formular preguntas orientadoras como: ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las parejas de figuras que se generaron con el doblez? ¿Tienen el mismo tamaño y forma? ¿Están en la misma posición? Es importante considerar que las parejas de figuras correspondientes según líneas puntuadas son completamente iguales, pero una está volteada con respecto a la otra como si fuera la imagen de un espejo.

En la **Tabla 14** se muestran algunas parejas de formas, trazos y figuras geométricas congruentes que pueden servir de ejemplo para que el profesor les muestre a los estudiantes que hay diversas formas congruentes que se generan al realizar los dobleces.

Tabla 14: Parejas de formas, trazos y figuras geométricas congruentes

Línea de referencia vertical	Línea de referencia horizontal
	
	
	
	

En el **punto 3**, se pide elaborar la manilla Embera. En este punto, es importante saber la impresión que les dejó a los estudiantes la experiencia de tejer una manilla Embera. Para ello, le sugiero al profesor indagar, haciéndoles preguntas como: ¿Cómo se sintieron elaborando la manilla de esta tarea, en comparación con la manilla de la segunda tarea? ¿Qué aprendieron en la tarea dos que les sirvió para realizar el tejido de esta tarea? ¿Qué enseñanza les dejó tejer una manilla Embera? ¿Qué nueva información tienen de los Embera? ¿Para qué creen que sirve la manilla Embera? Considero que esta última se debe hacer con el objetivo de mostrarles a los estudiantes que la manilla Embera es un objeto que sirve para representar figuras importantes con relación a su cosmovisión.

En el **punto 4**, se pide que comparen y describan las similitudes que observan entre la figura tradicional Rayo solar y el diseño de la manilla que elaboraron. En este punto, se espera que los estudiantes se den cuenta que la figura tradicional Rayo solar está presente en la manilla que tejieron. Puede que algunos estudiantes no encuentren la figura Rayo solar en el diseño de la manilla debido a que hay otras formas incluidas. Para ello, el profesor puede guiar a los estudiantes preguntándoles qué figuras se pueden suprimir para que aparezca la figura tradicional Rayo solar en la manilla. Luego, es importante que los estudiantes indiquen dónde quedarían las líneas de referencia de la figura tradicional en la manilla. Se espera que los estudiantes se apoyen en las mostacillas (**Figura 41**) para indicar estas líneas. Teniendo claro donde están ubicadas las líneas de referencia en la manilla, el profesor puede pedirles a los estudiantes que identifiquen parejas de formas, trazos o figuras geométricas congruentes diferentes a las que se encontraron en la figura tradicional. Esto se hace con el objetivo de que los estudiantes tengan una visión más amplia de la manilla y puedan, en la siguiente tarea, reconocer patrones. En este punto, el profesor puede abordar el tema traslación visto en las tareas anteriores y preguntar si en la figura tradicional Rayo solar hay propiedades que sugieran la existencia de una traslación. Esta última pregunta, se sugiere con el fin de que los estudiantes descarten la existencia de una traslación, a no ser, que la figura Rayo solar se repita hacia la derecha o hacia la izquierda agrandando la manilla.

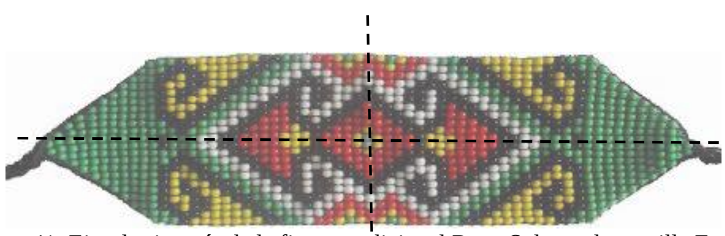


Figura 41: Ejes de simetría de la figura tradicional Rayo Solar en la manilla Embera

4.5 TAREA 5: REFLEXIONES EN LA FIGURA TRADICIONAL RAYO SOLAR

Requisitos

Para los estudiantes

Para esta tarea, el estudiante debe haber construido un significado de conceptos y nociones como: paralelismo y perpendicularidad entre rectas, ángulo recto, distancia y equidistancia. Además, debe tener una idea intuitiva de semejanza y congruencia de figuras.

Para el profesor

Para esta tarea, el profesor debe tener conocimiento de la comunidad indígena Embera y de la representación y significado cultural de algunas de sus figuras. Además, debe tener conocimiento de los errores que pueden presentar los estudiantes en el desarrollo de esta tarea asociados a la simetría axial, los cuales pueden ser las siguientes:

- Suponer que se ha construido el simétrico de una figura sin mantener la equidistancia de cada punto y su correspondiente, al eje de simetría.
- Intentar dibujar el simétrico de una figura sin considerar la perpendicularidad del eje de simetría al segmento que une un punto y su imagen.
- Interpretar pares de figuras que no son simétricas como si lo fueran.

Metas

- Identificar la equidistancia de cada punto y su imagen, respecto al eje, como propiedad de la simetría axial.
- Identificar el cambio de posición especular de la imagen respecto a la figura.
- Construir la figura simétrica a otra dada, estableciendo un eje de simetría.
- Identificar figuras simétricas teniendo en cuenta las propiedades de la simetría axial.
- Describir la manilla Embera aludiendo a las reflexiones para identificar la geometría subyacente.

Formulación

Parte 1

1. Doblen la hoja en la que se encuentra la siguiente figura por la línea azul punteada colocando un papel carbón en medio del doblez. Luego calquen la figura (**Figura 42**) en la parte de la hoja que está en blanco, desdoblen la hoja (**Tabla 15**). Llamaremos original a la figura que tenía la hoja inicialmente, e imagen a la copia que ustedes

realicen. Nombren los vértices de la imagen de tal manera que coincidan con los puntos de la figura inicial: por ejemplo, si un punto en la figura original es C, deben nombrar su punto correspondiente C’. Después de nombrar los vértices contesten las siguientes preguntas:

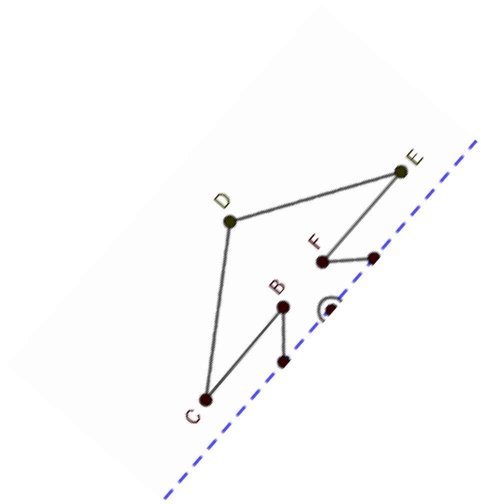
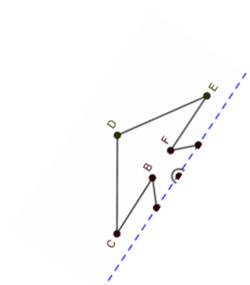
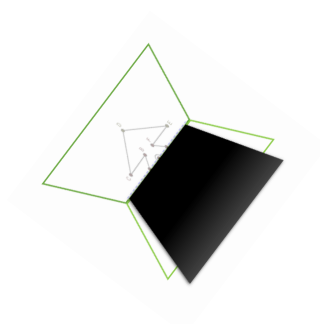
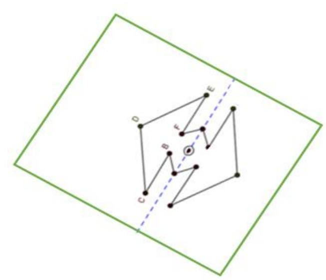


Figura 42: Figura para calcar

Tabla 15: Guía para calcar la figura

Paso 1	Paso 2	Paso 3
		

a. ¿La figura original y la imagen forman la figura Rayo solar?

b. Comparen la forma, el tamaño y la posición de la figura original y su imagen ¿Qué pueden concluir?

c. ¿Qué figura se encuentra más cerca del doblez de la hoja, la original o la imagen?

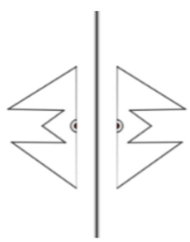
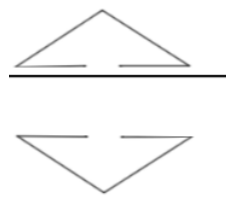
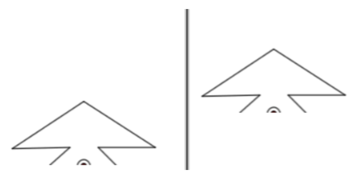
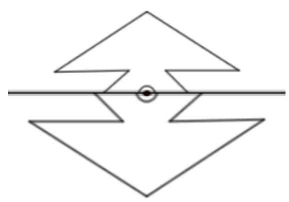
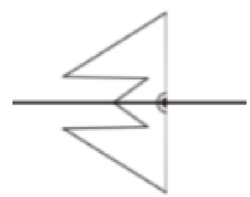
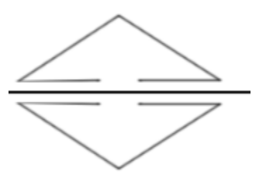
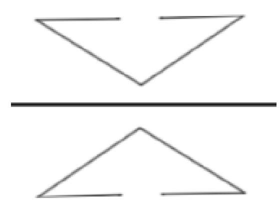
d. Tracen todos los segmentos que unen un punto con su imagen, por ejemplo $\overline{CC'}$. Después de haber trazado los segmentos, investiguen una propiedad que tienen los segmentos con respecto al eje.

e. Sobre cada uno de los segmentos construidos en el ítem d midan la distancia que hay desde el punto C hasta la recta punteada y compárala con la distancia que hay desde el punto C' hasta la misma recta. Investiguen una propiedad que tienen los puntos con respecto al eje.

Parte 2

2. Observen, comparen y describan las parejas de figuras que aparecen en cada uno de los siguientes recuadros. ¿Podrían decir cuáles parejas de figuras representan una reflexión respecto a la recta que se indica y cuáles no? Justifiquen su respuesta (**Tabla 16**).

Tabla 16: Pareja de figuras

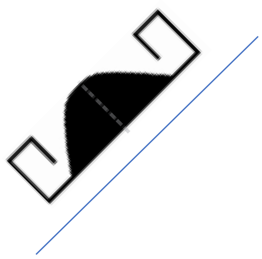
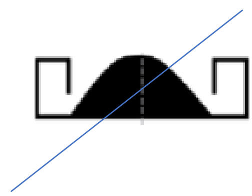
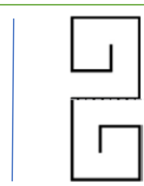
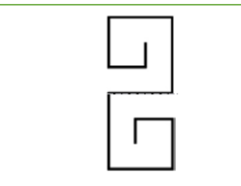
1	2	3
		
4	5	6
		
7	8	9
		

3. En la tarea anterior tejimos una manilla Embera con la figura tradicional Rayo solar. Tracen, si existen, algunos ejes de simetría de la manilla Embera e indiquen las figuras que son simétricas respecto a estos ejes (**Figura 43**).

Figura 43: Manilla Embera con la figura tradicional Rayo solar

4. Apliquen a cada una de las siguientes figuras una simetría de eje la recta azul (**Tabla 17**).

Tabla 17: Figuras simetría axial

5. Escriban en un párrafo por qué creen que los Embera usan la reflexión en los diseños de sus manillas.

Materiales

- Guía: contiene la formulación de la tarea y espacios para responder las preguntas.
- Regla graduada: para medir y trazar segmentos.
- Papel carbón.

Agrupamientos, temporalidad e interacción en la tarea matemática escolar

Esta tarea se realiza en cuatro momentos. En el primer momento, los estudiantes trabajan en grupos de tres estudiantes resolviendo la Parte 1 de guía. En el segundo momento, se hace una puesta en común donde el profesor explica el concepto de simetría axial, teniendo en cuenta los aportes de los estudiantes. En el tercer momento, en los mismos grupos de tres estudiantes, retoman el trabajo de la guía resolviendo la Parte 2 de la guía. En el cuarto momento, se realiza una puesta en común en la que se abordan los resultados a los que se llegó en él trabajo en grupo y se hace una reflexión en torno a la comunidad indígena Embera.

El profesor debe disponer de tiempo suficiente para el desarrollo de los cuatro momentos. Si no se logra hacer la tarea completa en una sola sesión, le sugiero al profesor dejar como trabajo para la casa leer y analizar los puntos que hagan falta y la siguiente sesión concluir con la tarea.

El trabajo en grupo se hace con el propósito de que los estudiantes discutan las preguntas formuladas, para llegar a dar respuestas que sean el consenso del grupo. La puesta en común se hace para que los estudiantes tengan un espacio propicio para exponer sus trabajos y dar sus puntos de vista respecto a los trabajos realizados por sus compañeros.

En el **primer momento,** los estudiantes trabajan en grupo de tres, para resolver la Parte 1 de la guía. El profesor debe hacer énfasis en la necesidad de la lectura comprensiva y recomendarles a los estudiantes analizar bien sus respuestas antes de escribirlas. Este primer momento es muy importante porque a partir de las respuestas que den los estudiantes se podrá construir la definición de simetría axial en el segundo momento. Durante el trabajo en grupo, es probable que a los estudiantes se les dificulte ubicar convenientemente el papel carbón en el doblez. Por ello, le sugiero al profesor pasar por cada uno de los grupos para guiarlos en la forma correcta de hacerlo. Es importante hacer el ejercicio con el papel carbón, porque si solamente se les pide que doblen el papel y calquen se puede presentar que la imagen no quede en una posición simétrica sino por el revés de la hoja. Con el propósito de ir ampliando el vocabulario matemático de los estudiantes, el profesor puede pasar por los grupos preguntado ¿Cómo llamaremos a la figura inicial? ¿Como llamaremos a la copia? De tal manera, que la figura inicial se nombre figura original y la copia se nombre imagen.

En el **segundo momento,** se realiza una puesta en común en la que los estudiantes exponen el trabajo realizado en el primer momento. El profesor puede pedirle a algún estudiante que muestre el dibujo que él junto con su grupo realizaron. Si el profesor advierte que hay vértices mal nombrados o que la copia no se hizo según el procedimiento indicado, puede preguntarles a los demás estudiantes ¿Les quedó igual su figura a la de sus compañeros?, ¿Qué cambio le harían?

Teniendo en cuenta la participación de los estudiantes, el profesor puede dibujar en el tablero la forma correcta como debe quedar la figura original y la copia, con sus respectivos vértices.

Construí los ítems de esta con el propósito de guiar a los estudiantes hacia el descubrimiento de las propiedades que determinan la simetría axial. En este sentido, le sugiero al profesor promover el significado de la simetría axial con base en los resultados a los que lleguen los estudiantes en cada uno de los ítems. Preveo la puesta en común de los ítems de la siguiente manera:

En el ítem *a*, se espera que los estudiantes no tengan mayores dificultades para afirmar que la figura que se genera al unir la original y la imagen es la figura tradicional Rayo solar. En este punto es importante que los estudiantes identifiquen esta figura, porque es a partir de ella que se va a construir el concepto de simetría axial y servirá de base para identificar la geometría subyacente en las manillas Embera.

En el ítem *b*, se les pide a los estudiantes que comparen la forma, el tamaño y la posición de la figura original y su imagen. Es probable que algún estudiante haya tenido dificultades para calcar la figura original y por ende no se vean como congruentes. Por esto, el profesor le puede pedir que doble nuevamente la hoja por la línea punteada y se cerciore que ambas figuras coinciden. Con la acción de doblar el papel se plantea el reconocimiento de la simetría axial como un movimiento en el que se voltea una figura para obtener su imagen especular que conserva la forma y el tamaño, pero no la posición.

En el ítem *c*, se les pide a los estudiantes que digan qué figura está más cerca de la línea punteada. Con esta pregunta se hace explícita la necesidad de que los estudiantes, mediante la observación, se den cuenta que ambas figuras están a la misma distancia de la línea de referencia. El profesor puede profundizar más sobre este ítem preguntando a los estudiantes ¿Por qué creen que la distancia de la figura y su imagen respecto a la línea de referencia son iguales? Es probable que algún estudiante responda que se debe a la forma como se generó la imagen; esto se constituye en una oportunidad para que ellos describan el procedimiento realizado.

En el ítem *d*, se les pide a los estudiantes que tracen los segmentos cuyos extremos sean un punto y su correspondiente. Una vez trazados se les pide que investiguen una relación entre los segmentos y la línea de referencia. El profesor puede pedirle a algún estudiante que exponga los resultados a los que llegó- Se espera que identifique el paralelismo entre dichos segmentos. Es probable que no se refieran a la perpendicular del eje respecto a los segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen; por ello, el profesor puede pedirles a los estudiantes que midan el ángulo que se forma entre cada segmento y la línea de referencia. Después de medir el ángulo, el profesor les puede preguntar si el segmento interseca la línea de referencia. Esto con el propósito de guiar a los estudiantes para que identifiquen la perpendicularidad del segmento y la línea de referencia.

En el ítem *e*, se les pide a los estudiantes que, una vez trazados los segmentos cuyos extremos sean un punto y su imagen, midan sobre los segmentos la distancia que hay entre dichos puntos e investiguen una relación entre las distancias entre un punto y la línea de referencia y la imagen y la línea. Es importante que, para identificar la invarianza de las distancias de los puntos y sus imágenes al eje, tracen primero los segmentos, porque es probable que los estudiantes no hayan tenido experiencias en medir la distancia de un punto a la recta. Con lo anterior, se busca que los estudiantes, mediante la acción de medir, comprueben lo que descubrieron por observación en el ítem *c*, es decir, el hecho de que ambas figuras están a la misma distancia de la línea de referencia. Le sugiero al profesor elegir a un estudiante para que exponga su trabajo y preguntarles a los demás si les dio el mismo resultado. Es probable que las distancias sean diferentes para un grupo de estudiantes que, para otros; sin embargo, es importante que el profesor les haga notar que las distancia entre cualquier punto y su correspondiente respecto al eje son iguales. Para ello, puede preguntarles: Si tomo cualquier punto y su correspondiente ¿tendrán la misma distancia a la línea de referencia?

Para definir simetría axial, considero que el profesor debe aludir a que es un movimiento rígido que se hace con respecto a un eje de simetría (la línea de referencia) en el que la figura original se voltea con respecto al eje como si este fuera un espejo. El profesor puede sugerirles que se paren frente a un espejo y observen el efecto de mover una mano y ver la imagen. Es importante que se asuma con cuidado la manera como se habla sobre el cambio de posición en la simetría axial, ya que no conviene usar palabras como orientación que están más relacionadas con un giro. Las palabras inversión y sentido también pueden generar confusión en los estudiantes. Por otro lado, el cambio de posición especular está asociada a la acción de voltear algo, por lo que se aconseja usar este término.

En el **tercer momento,** los estudiantes se reúnen nuevamente en los mismos grupos de tres para resolver la Parte 2 de la guía. En este momento, los estudiantes deben poner en práctica los conceptos a los que se acaba de llegar, para que interioricen las propiedades de la simetría axial.

Al igual que en el primer momento, el profesor puede pasar por cada uno de los grupos observando si ellos tienen en cuenta lo siguiente: la equidistancia de un punto y su imagen al eje de simetría, el paralelismo entre los segmentos que unen los puntos correspondientes, la perpendicular del eje y los segmentos que unen un punto y su imagen y la congruencia de las figuras.

En el **cuarto momento,** se hace una puesta en común, como actividad final, que permita dar cuenta de los logros de los estudiantes. Ellos tienen un espacio propicio para expresar con sus palabras los resultados a los que llegaron, después de hacer la tarea y el profesor puede identificar y solventar errores que los alumnos pueden cometer al desarrollarla. Por lo anterior, la interacción en la puesta en común la preveo de la siguiente manera:

En el **punto 2**, se les pide a los estudiantes que identifiquen las parejas que representan una simetría respecto a una recta y cuáles no. Para ello, el profesor puede elegir a alguno de ellos para que expongan y justifiquen en que parejas se aprecia una simetría. El profesor debe estar atento a las respuestas que ellos den, ya que es probable que durante las intervenciones manifiesten dificultades relacionadas con las propiedades de la simetría axial. Por ejemplo, algún estudiante puede seleccionar la pareja número 2 como una reflexión. En este caso, no está teniendo en cuenta la propiedad de equidistancia entre el punto y su imagen al eje de simetría. En el caso que elija la pareja 3, no está teniendo en cuenta la perpendicularidad entre los segmentos que unen un punto y su imagen respecto al eje de simetría. Si elige la pareja 4, no solo no tiene en cuenta la congruencia de las figuras sino también la posición especular o de volteo.

El conjunto de ejemplos que se proponen en este punto incluye ejes en diferentes posiciones, no solo vertical y horizontal, ya que se busca mostrar a los estudiantes que existen ejes en direcciones diferentes a las usuales. Por lo anterior, le sugiero al profesor hacer énfasis en ello.

En el **punto 3**, se pide retomar el estudio de la manilla Embera, tejida en la tarea cuatro. En este punto, los estudiantes deben encontrar los ejes de simetría de la figura. La idea es desarrollar en los estudiantes habilidades visuales para que intenten descubrir cuáles son los ejes de simetría. Se espera que los estudiantes tengan en cuenta los resultados a los que se llegó en la tarea cuatro y relacionen las líneas de referencia que se generaron en la manilla, con los ejes de simetría por sus propiedades. El profesor puede guiar a los estudiantes para que descubran que las líneas de referencias trazadas en la tarea anterior son ejes de simetría y encuentren las figuras simétricas respecto a estos ejes, con preguntas como: ¿Dónde se ubicaron las líneas de referencia de la figura tradicional Rayo Solar en la manilla que tejieron? ¿Qué formas, trazos y figuras geométricas son congruentes respecto a estas líneas de referencia? ¿Hay equidistancia entre un punto y su correspondiente imagen con relación a la línea de referencia? ¿Si trazamos segmentos cuyos extremos sean un punto y su correspondiente se generan rectas paralelas? ¿Estos segmentos son perpendiculares a la línea de referencia? ¿Las líneas de referencia trazadas en la manilla Embera en la tarea anterior son ejes de simetría? ¿Qué figuras son simétricas y cuál sería su eje de simetría?

Para hacer mayor énfasis en los ejes de simetría, se les puede preguntar a los estudiantes si creen que, aparte de los ejes de simetría vertical y horizontal trazados en la manilla Embera, hay otros. El profesor les puede ayudar, colocando el ejemplo de un eje diagonal a la manilla. En este caso, como se puede ver en la **Figura 44**, no se generan figuras reflejadas respecto a esa línea. El profesor debe guiarlos con preguntas relacionadas con las propiedades de la reflexión para que concluyan que la línea de referencia que se trazó de forma diagonal a la manilla no es un eje de simetría.

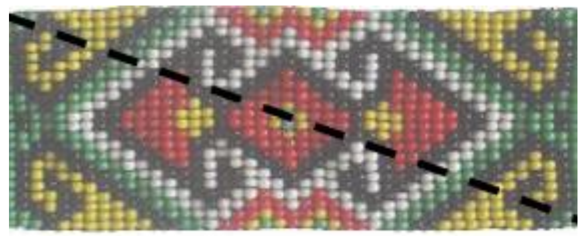


Figura 44: Diseño manilla Embera

En el **punto 4**, se les pide a los estudiantes construir el reflejo de una figura dada, estableciendo su eje de simetría. En las presentaciones de los trabajos, le sugiero al profesor estar atento a errores como los siguientes: no mantener la equidistancia de cada punto y su imagen con respecto al eje de simetría, no atender a la perpendicularidad del eje respecto a los segmentos que une un punto y su imagen, no tener en cuenta el paralelismo entre los segmentos que unen un punto y su imagen. Si el profesor observa estos errores, es importante que les recuerde a los estudiantes las propiedades de la reflexión que se trataron en el segundo momento de la tarea. Con la ayuda de esas propiedades puedan determinar si la figura que trazaron efectivamente es el simétrico de la imagen dada. En esta tarea se considera la propiedad del paralelismo entre los segmentos y la perpendicular entre el eje y los segmentos, aun cuando el paralelismo se deriva de la perpendicularidad, ya que es mejor mencionar ambas propiedades para que los estudiantes se formen una idea completa.

Con esta tarea, no solo se busca aprender sobre simetría, sino también que los estudiantes conozcan el significado cultural de otras figuras de la comunidad indígena Embera, diferentes a las que se han trabajado hasta el momento. En este sentido, le sugiero al profesor explicarles a los estudiantes que la **Figura 45** recibe el nombre de Dos mundos y fue diseñada y construida por los Embera, para quienes esta figura representa a Caragabi y Trutruiica (seres esenciales). La **Figura 46** representa el pensamiento Embera. Finalmente, el profesor puede concluir mostrándoles a los estudiantes que en las figuras de los Embera podemos encontrar geometría, en este caso simetría axial. Para concluir con este punto, el profesor puede mostrarles a los estudiantes las **Figura 45 y 46** y preguntarles si las figuras tienen otro eje de simetría diferente al que se trazó anteriormente.

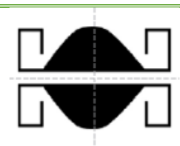


Figura 45: Figura tradicional Dos Mundo

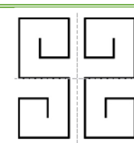


Figura 46: Figura tradicional Pensamiento Embera

En el **punto 5**, se les pide a los estudiantes reflexionar en torno a la comunidad indígena Embera y en como ellos usan la simetría axial para crear diseños para sus manillas. Se espera que en las intervenciones que hagan los estudiantes se mencione la armonía que se puede observar en las figuras tradicionales de los Embera, cuando se usa la simetría axial. Le sugiero al profesor explicarles a los estudiantes que diferentes culturas del mundo han usado la simetría axial para darle a sus diseños orden y equilibrio y crear figuras con un alto valor estético. Un ejemplo de ello, son algunas de las figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera, donde podemos observar belleza y orden. Otro ejemplo, son las figuras tradicionales en la comunidad indígena Arhuaca, en la que se observa simetría en los diseños de sus mochilas. Con ello busco que los estudiantes comprendan que hay una relación entre la cultura y la geometría (Aroca, 2007).

Con el propósito de que los estudiantes participen de forma activa en este punto de la tarea, el profesor puede preguntarles a los estudiantes ¿Qué creen que significa la simetría para los Embera? ¿Será que para ellos tiene el mismo significado que para nosotros o para los Arhuacos? Estas preguntas tienen el propósito de mostrarle a los estudiantes que, sin importar las diferencias que existan entre el significado que la comunidad indígena Embera le atribuya al concepto de simetría y la que nosotros tenemos, la usamos para crear diseños que son la expresión de lo que somos.

Para concluir esta tarea y la secuencia de tareas en general, el profesor puede hacer una reflexión en torno a la situación actual de la comunidad indígena Embera y a la importancia de respetarlos y cuidarlos. Esto último es importante, ya que uno de los propósitos de esta secuencia de tareas es crear tareas que contribuya a la paz a partir del respeto y el reconocimiento por el otro. Con ello, busco que los estudiantes comprendan que hay conceptos comunes de la geometría que son independientes de la cultura y por ende podemos aprender esta disciplina a través de las prácticas y saberes ancestrales de nuestras culturas indígenas colombianas, sin descartar los conocimientos de la cultura occidental (Aroca, 2007).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Escribí las conclusiones considerando los siguientes asuntos: desarrollo de los objetivos planteados al inicio del trabajo, aprendizajes como futura licenciada, limitaciones, dificultades, didácticas y proyecciones de este.

5.1 ALCANCE DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Realicé un estudio bibliográfico del desarrollo de la Etnomatemática en Colombia, lo que me permitió fundamentar la secuencia de tareas. En este estudio encontré que esta disciplina es un área que permite, entre otras cosas, rescatar valores culturales de comunidades indígenas que han sido oprimidas por años, por ejemplo, los Embera. Es una línea de la Educación Matemática muy importante que se debe tener en cuenta en el diseño de propuestas de enseñanza porque permite contextualizar y dotar de sentido y significado los contenidos matemáticos. Como resultado de este trabajo recomiendo diseñar propuestas de enseñanza teniendo en cuenta dicho enfoque porque permite crear ambientes propicios para generar sujetos reflexivos y críticos de su realidad.

Construí un marco didáctico basado en los planteamientos de Bishop (2005) sobre la actividad matemática. Como resultado ubiqué la manilla de la comunidad indígena Embera en la actividad esencial de diseñar, ya que esta actividad está implicada en la conformación del espacio. Además, usé como referentes los planteamientos de D' Ambrosio (2008) y Aroca (2007) que me sirvieron de base para construir la secuencia de tareas con un enfoque cultural. Use la teoría de la objetivación de Radford (2014) para imaginar cómo debería ser la interacción entre los estudiantes al realizar las tareas cuando el propósito está enfocado en producir saberes matemáticos colectivamente. Indudablemente este marco me permitió conocer a la cultura Embera, sus tradiciones, el proceso de tejido de las manillas y el significado cultural de sus diseños, aprendí que es una cultura muy importante de nuestro país que los estudiantes deben conocer y valorar. Este marco me fue de utilidad para el desarrollo de este trabajo porque me aportó conocimientos didácticos para vincular los conceptos geométricos que se trabajan en clase con el contexto sociocultural de los estudiantes.

Construí un marco matemático sobre las transformaciones en el plano, dirigido a estudiantes de secundaria. Para ello, tomé como referentes a Lehman (1980) Clemens, O' Daffer y Cooney (1998) y Jaime y Gutiérrez (1966). Este marco me fue útil para sustentar, desde un punto de vista matemático, la secuencia de tareas. Identifiqué los conceptos centrales sobre los cuales se construye el significado de las transformaciones en el plano (traslación, simetría axial y rotación) esto me permitió darme cuenta que hay diferentes formas de presentar el tema y por ende me brindó herramientas para trabajar en la planeación de las tareas.

Realicé un análisis geométrico de posibles transformaciones geométricas en las figuras tradicionales de las manillas Embera: Anzuelo, Rayo solar y Espíritu de Jaibana, propuestos por Opazo (2017). En dicho análisis usé el método de deconstrucción de Aroca (2007). Este método fue útil, ya que me permitió deconstruir las figuras tradicionales escogidas para hallar patrones figurales y nociones geométricas como: segmentos, paralelismo y perpendicularidad entre rectas, congruencia de figuras, traslación, simetría axial y rotación. Con este método, logré observar que dichas nociones pueden surgir a partir de la actividad esencial de diseño (Bishop, 1991) de las manillas de los Embera. Sugiero este método no solo para el análisis geométrico de figuras tradicionales de culturas indígenas como se hizo en este trabajo, sino también para favorecer el proceso de visualización en los estudiantes. Para ello, propongo crear situaciones didácticas basadas en la desconstrucción de todo tipo de figuras geométricas en la que sea necesario encontrar los trazos elementales y las nociones geométricas que intervienen para conformar la figura completa.

Considero que presentar las nociones de traslación y simetría axial, desde la óptica cultural, puede aportar a los estudiantes una mejor comprensión de estos temas además de generar interés y motivación cuando participan en el proceso de elaboración de la manilla Embera. Además, este acercamiento permite que los estudiantes exploren nuevas figuras, diferentes a las que acostumbran a ver en el aula de clase, con un significado cultural. Lo anterior puede contribuir a hacer más significativo al aprendizaje de las transformaciones en el plano.

Seleccioné las figuras tradicionales Anzuelo, Rayo Solar, Espíritu de Jaibana y Dos mundos para proponer la secuencia de tareas, a partir del análisis geométrico que hice de ellas. En las tareas desarrollé los temas de traslación y de simetría axial y busqué motivar su estudio, acercando al estudiante al proceso de tejido de la manilla Embera. Brindé información a los estudiantes que les permitiera conocer, reflexionar y asumir una postura crítica frente a la situación que vive esta comunidad indígena en el país. Elegí las figuras Anzuelo, Rayo Solar, Espíritu de Jaibana y Dos mundos porque eran pertinentes para la secuencia de tareas, en la medida que logré usarlas para la enseñanza de la traslación y la simetría axial enfocándolas en generar una vía de acceso a la cultura Embera, con la participación de los estudiantes. Todas las figuras que se presentan en el capítulo 1 (**Tabla 1**) tienen el potencial para ser usadas en la enseñanza de las trasformaciones en el plano porque en ellas se puede evidenciar que surgen a partir de esta noción. Además, si se realiza un estudio riguroso en el que se recojan todas las figuras tradicionales de los Embera, probablemente saldrán más de las que se presentan en este trabajo y que también podrán ser usadas para la enseñanza de este tema.

Propuse una secuencia de tareas, valiéndome de los elementos que describen una tarea matemática de Gómez y colaboradores (2018) en la que construí tareas matemáticas para la enseñanza de la traslación y la simetría axial basadas en la cultura Embera y sus manillas. Traté de involucrar los referentes teóricos, en distintos momentos. Por ejemplo: Radford (2006) me sirvió para plantear la interacción teniendo en cuenta la enseñanza y el aprendizaje como una labor conjunta en el aula entre estudiantes y estudiantes y profesor; Bishop (1991) me sirvió para relacionar la traslación y la simetría axial con la cultura Embera a través de la actividad esencial de diseño; Aroca (2007) me sirvió para mostrar en las tareas que hay conceptos geométricos comunes que son independientes de la cultura.

5.2 APRENDIZAJES COMO FUTURA LICENCIADA

La elaboración de este trabajo significó para mi formación como futura licenciada en matemáticas una oportunidad para diseñar tareas matemáticas contextualizadas y bien estructuradas, con un enfoque nuevo donde las matemáticas cobran vida. La elaboración de este trabajo es muy importante para mí porque logré crear situaciones didácticas que vinculan a los estudiantes con su realidad sociocultural y propenden por desarrollar valores de respeto por la diversidad.

El enfoque de la Etnomatemática me ayudó a identificar conceptos geométricos en los diseños de las manillas Embera y a comprender que las matemáticas tienen un origen cultural. Esta perspectiva cambió por completo la idea que traía de que solo existe una matemática y que esta debía ser enseñada con problemas que no necesariamente tuvieran que ver con el contexto de los estudiantes.

Aprendí a realizar análisis geométricos de figuras tradicionales de la comunidad indígena Embera por medio del método de deconstrucción usado por Aroca (2017). Esto es muy importante porque me permitió desarrollar la capacidad de visualización y análisis para encontrar nociones geométricas en diseños de diferentes culturas indígenas.

Durante el diseño de las tareas matemáticas aprendí que es de gran importancia analizar cuidadosamente los términos que voy a usar para introducir conceptos matemáticos en el aula. Esto debido a que hay términos que son confusos para los estudiantes o no están relacionados con lo que se quiere enseñar, lo que puede generar errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Otro aprendizaje que adquirí, y que es de gran importancia, es lo cuidadoso y responsable que debe ser el profesor al tratar aspectos sociales y culturales en el aula. Si no tiene un conocimiento profundo del tema puede caer en el error de usar palabras que expresan prejuicios y que pueden reforzar prácticas culturales inapropiadas.

Con el diseño de tareas aprendí a establecer metas de aprendizaje y a identificar limitaciones didácticas. Aprendí a estructurar una tarea matemática teniendo en cuenta los elementos que, según Gómez y colaboradores (2018), la describen: requisitos, metas, formulación, materiales, agrupamiento, temporalidad e interacción. Considero que profundizar en este último elemento fue muy importante porque me permitió desarrollar diferentes capacidades como: hacer previsiones sobre lo que puede suceder en el aula, considerar diferentes alternativas y elegir la más adecuada para subsanar dificultades didácticas que se pueden presentar en el desarrollo de la tarea y, sobre todo, asumir una posición crítica frente a mis propuestas.

El enfoque de la Etnomatemática le aporta al diseño de tareas matemáticas la posibilidad de conectar a los estudiantes con su contexto, dotando así de sentido y significado los contenidos matemáticos que se pretenden enseñar. Como resultado de este trabajo, considero pertinente introducir este enfoque en los programas de formación porque enriquece el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y le da un carácter social y político. Teniendo en cuenta este enfoque, considero fundamental que el currículo de matemáticas tenga como fin promover prácticas que contribuyan al respeto a la diferencia. Considero que esta secuencia de tareas no solo es pertinente para estudiantes de la ciudad, también se puede implementar en diferentes contextos culturales. Por ejemplo, en un aula Embera, donde sería muy interesante ver la reacción de los estudiantes frente a tareas matemáticas que tienen que ver con su propia cultura.

El diseño de la secuencia de tareas que se presenta en este trabajo demandó tiempo. Fue todo un reto crear las tareas debido a que no solo fue necesario tener un amplio conocimiento del tema de las transformaciones en el plano y de su didáctica, sino también de la cultura Embera, sus prácticas y costumbres. Tal vez esta sea la razón por la cual no se implementen este tipo de propuestas en el aula, pues demandan tiempo, tanto para su planeación como para su implementación; en cambio, los docentes optan por ejercicios o problemas matemáticos rutinarios que muchas veces llegan a carecer de sentido para los estudiantes. Sin embargo, esto no debe verse como un obstáculo sino más bien como una estrategia para motivar e interesar a los estudiantes por esta disciplina favoreciendo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

5.3 LIMITACIONES DEL TRABAJO

Se puede evidenciar que hubo algunas transformaciones geométricas en el plano que no abordé en la secuencia de tareas. Es decir, solo abordé las isometrías traslación y simetría axial. Lo anterior, debido principalmente a limitaciones de espacio y de tiempo. Así, por ejemplo, no diseñé tareas para la enseñanza de la simetría central ni de la rotación, las cuales son nociones claves en el aprendizaje de las matemáticas. Otra limitación está relacionada con la implementación de esta propuesta que, aunque no hizo parte de los objetivos, hubiera sido enriquecedora para tener evidencias del funcionamiento de las tareas con las respuestas y la actitud de los estudiantes.

Frente al análisis cultural de las figuras tradicionales de los Embera, considero que hizo falta tener un acercamiento directo con esta comunidad indígena para preguntarles sobre su cultura y obtener de ellos información sobre su situación actual en el país y el significado cultural de sus figuras tradicionales, así como la forma como ellos tejen la manilla Embera. Esto considero que le habría dado mayor carga cultural a la secuencia de tareas. Debido a las dificultades provocadas por la pandemia COVID-19 durante el desarrollo de este trabajo, no me fue posible ir a los resguardos indígenas de la comunidad Embera ubicados en Bogotá, para entrevistarlos y así obtener de ellos información importante para el desarrollo de este trabajo.

5.4 DIFICULTADES DIDÁCTICAS

Durante el diseño de las tareas, identifiqué algunas dificultades didácticas para abordar los temas de traslación y simetría axial. Por ejemplo, en la tarea cinco, en la que abordé el tema simetría axial en la figura tradicional Rayo Solar, no me fue fácil encontrar el término adecuado para explicar el efecto de imagen especular producido por la transformación. Algunos términos que encontré en trabajos de maestría (Hernández y colaboradores, 2018) y textos de geometría para maestros (Godino y Ruiz, 2002) para referirse a esta transformación fueron: “inversión”, “cambio de sentido” y “cambio de orientación”; pero todos estos generan confusiones. Si uso “inversión”, los estudiantes pueden creer que la imagen queda “patas arriba”; si uso “cambio de sentido”, los estudiantes podrían tener confusiones con la traslación; y si uso “cambio de orientación” no es correcto, ya que orientación se refiere a un giro con respecto a un ángulo. Por lo anterior, tomé la decisión de usar las expresiones: “darle vuelta a la imagen” o “usar la copia en espejo”, para referirme a la imagen especular. Otra dificultad que encontré está relacionada con dos de las propiedades que definen un vector: sentido y dirección. Estas dos propiedades generan confusión, ya que muchos estudiantes tienen la idea de que se trata de términos que significan lo mismo, pues en el lenguaje cotidiano se usan indistintamente. La forma de solventar esta dificultad fue proponer estrategias para que el profesor explique estos términos. Se espera que el profesor que se interese por llevar a cabo esta propuesta didáctica identifique estas dificultades y aporte estrategias que contribuyan a mejorarla.

5.5 PROYECCIONES DEL TRABAJO

La comunidad indígena Embera cuenta con una gran riqueza cultural. Esto lo podemos evidenciar en las figuras tradicionales que configuran el diseño de sus manillas. Teniendo en cuenta esto y sabiendo que, en la secuencia de tareas no abordé todas las transformaciones en el plano, considero pertinente completar la secuencia. Para ello, sugiero crear tareas en las que no solo se aborden las transformaciones isométricas sino también la homotecia, ya que existen figuras tradicionales de la comunidad Embera que, por medio de esta transformación, configuran el diseño de la manilla. Por lo anterior, creo que es interesante e importante profundizar en el análisis geométrico realizado en este trabajo y continuar su estudio.

Si tenemos en cuenta las actividades esenciales que permiten el desarrollo de las matemáticas en diferentes culturas planteadas por Bishop (1991) (contar, medir, localizar, diseñar, explicar), podemos observar que la manilla Embera no solo se enmarca en la actividad de diseñar, sino que también tiene el potencial para ser estudiada desde las actividades de contar, medir y clasificar. Esto es muy importante, porque con la manilla Embera puedo abordar en el aula de clases diversos temas de la Matemática desde un enfoque cultural que contribuya a mejorar la enseñanza de esta disciplina a la vez que se genera una actitud crítica de los estudiantes frente a su realidad sociocultural.

Adicionalmente, considero pertinente implementar esta secuencia de tareas en el aula, de tal forma que favorezca la búsqueda de mayor significado de los contenidos de la matemática escolar. Además, debido a la naturaleza de la secuencia de tareas, contribuye con prácticas de reconocimiento y respeto a la diferencia.

BIBLIOGRAFÍA

Aroca, A. (2007). *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural* (Tesis de maestría), Universidad del Valle, Santiago de Cali. Obtenido de http://etnomatematica.org/articulos/Tesis_maestria_Aroca.pdf.

Aroca, A. (2008). Una propuesta metodológica en Etnomatemáticas. *Actualidad y Divulgación Científica*, *11*(1), 67-76.

Aroca, A. (2016). La definición etimológica de Etnomatemática e implicaciones en Educación Matemática. *Educación Matemática*, *28*(2), 175-195.

Aroca, A. (2018). *Matemáticas de orden social: Tensión entre las etnomatemáticas y cambios socioeconómicos del país*. Barranquilla: Editorial Universidad del Atlántico.

Aroca, A. (2018). *Etnografía del saber matemático de los pescadores de buenaventura. Pacífico colombiano. Elementos para una educación matemática contextualizada.* Barranquilla: Editorial Universidad del Atlántico.

Arceo, E. (1999). ¿Problemas de geometría o problemas con la geometría? *Educación Matemática*, *11*(01), 25-45.

Ariza, Á. (2019) *Un estudio desde las matemáticas y desde la Etnomatemática y la acción el docente de matemáticas en un aula multicultural* (Trabajo final de grado), Universidad Pedagógica Nacional.

Blanco, H. (2006). La Etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción. *Bolema: Boletim de educação matemática, 19*(26), 49-75

Bishop, A. (1991). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: Paidós editorial.

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Clemens, S., O' Daffer, P., y Cooney, T. (1998). *Geometría*. México, D. F: Addison Wesley Logman.

D' Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática, eslabón perdido entre las tradiciones y la modernidad. México,* D.F: Limusa.

DANE. (2018). *Población indígena de Colombia*. Obtenido de: https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/grupos-etnicos/presentacion-grupos-etnicos-2019.pdf.

Gavarrete, E. (2013). La Etnomatemática como campo de investigación y acción didáctica: su evolución y recursos para la formación de profesores desde la equidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *6*(1), 127-149.

Guerrero, A. (2017). *Análisis de nociones geométricas a los tejidos de los chumbes de los indígenas nasa de corinto cauca*. (Trabajo de grado). Universidad del Valle, Santiago de Cali. Obtenido de https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/13597/3469-0525690.pdf?sequence=1

Godino, J., y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada, Universidad de Granada.

Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción.

Lehmann, C. (1989) *Geometría Analítica*. México, D. F: Limusa.

Martínez, O. (2016). Etnomatemática: una reseña crítica de sus acepciones. *Revista Científica*, 2, 427-431.

MEN. (2003). *Estándares básicos de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de educación Nacional.

MEN. (1998.) *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá: Ministerio de educación Nacional.

MEN, (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje*, *Matemáticas*, *Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de educación Nacional.

Mora, M., Restrepo, G., y Grisales, D. (2016). *La Identidad de la Comunidad Indígena EmberaChamí y Dobidá en Medellín. Un Proceso de Aculturación* (Proyecto de grado), Corporación universitaria Minuto de Dios UNIMINUTO, Bello. Obtenido de https://repository.uniminuto.edu/bitstream/handle/10656/5564/TTS_MoraVeraMarylin_2016.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Opazo, N. (2017). *Wajüa urbana, la manilla Embera en la ciudad: reflexión sobre de los escenarios urbanos en la configuración y significación de las manillas Embera* (Tesis de licenciatura), Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Bogotá. Obtenida de https://expeditiorepositorio.utadeo.edu.co/handle/20.500.12010/1425.

Pinilla, E., Sánchez, J. (2009). *Interpretación matemática situada de tejidos en croché. Un estudio exploratorio* (Trabajo final de grado), Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9* (Extraordinario 1), 103-129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana De Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Rodríguez, A. y Jaime, P. (1986) *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*. Valencia: Universidad literaria de Valencia.

Sánchez, A. (2003). *Acercamiento a la Etnomatemática* (Trabajo final de grado), Universidad Nacional de Colombia.

Sánchez, J. (2019). *El juego de la capoeira: en un grupo de la ciudad de Bogotá* (Trabajo final de grado), Universidad Pedagógica Nacional.

Hernández, N., Meneses, N., Sánchez, Y., Montealegre, G., y Parra, S. (2018). *Simetría axial en figuras planas*. (Trabajo de maestría), Universidad de los Andes, Bogotá. Obtenida de http://funes.uniandes.edu.co/11767/1/Hernandez2018Simetria.pdf.

Higuera, I., Caicedo, M., y Campos, C. (2009). Etnomatemática, educación matemática e invidencia. *Revista latinoamericana de etnomatemática*, 2(2), 18-51.

Hidalgo, V. (2005). Cultura, multiculturalidad, interculturalidad y transculturalidad: evolución de un término. Obtenido de: http://pedagogia.fcep.urv.cat/revistaut/revistes/juny05/article04.pdf.