Análisis de la idoneidad epistémica de videos de YouTube relacionados con semejanza de triángulos

Diógenes Alexander Santamaría Vargas

Asesor:
Dr. Óscar Javier Molina Jaime

Trabajo de grado presentada como
requisito parcial para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2022

Dedicatoria

Este trabajo de grado va dedicado a mi Madre Amparo y a mi Padre Diógenes, que nunca se rindieron conmigo y siempre me apoyaron en este sueño que también era el de ellos. También quiero dedicar este trabajo a mis abuelitos; ellos, cuando inicié este camino, estaban en vida, ahora me cuidan desde el cielo.

Agradecimientos

Le doy gracias a Dios, quien, de maneras inexplicables, me mantuvo en este camino y no dejó, a pesar de todos los acontecimientos y de mis debilidades, que me rindiera.

Agradezco a mi padres todo el amor y la paciencia tan grande que tuvieron para poder terminar este camino.

Agradezco a mis hermanos, Alejandra y Jonathan, que por el amor que les tengo, me motivaban a salir adelante.

Agradezco a mis amigos de Getsemaní, especialmente, a Fernando, Helen, Gina, Maira, Wendy, Kate, Juanma, Laurita y a la Mami quienes, a través de su testimonio y amistad, me llenaron de fuerzas para poder acabar este camino.

Agradezco a los Padres Edwin y Óver quienes, con su testimonio de vida, amistad, y guía espiritual, ayudaron en gran medida en este camino.

Agradezco a la música, que gran parte de este camino, me mantuvo económicamente para seguir estudiando.

Un agradecimiento grandísimo al profesor Óscar Molina, quien siempre estuvo dispuesto a transmitirme todo lo que necesitaba para poder culminar este trabajo; también, por haberme tenido tanta paciencia.

Diógenes Alexander Santamaría Vargas

Contenido

INTRODUCCIÓN

Este documento es una monografía de trabajo de grado, requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. El trabajo tiene la intencionalidad de analizar la idoneidad epistémica de algunos videos cargados en la plataforma YouTube, relativos al objeto matemático Semejanza de Triángulos. Consideramos que esta propuesta es pertinente dadas las necesidades actuales del nivel educativo que exigen un uso adecuado de las Tecnologías de la Información y Comunicación.

El principal interés de este trabajo es generar un análisis de idoneidad epistémica, tomando el trabajo de grado de Suáres y Zubieta (2022) quienes, con base en las propuestas de Beltrán-Pellicer et al. (2018) y Breda et al (2017), crean unos indicadores de idoneidad epistémica para analizar videos del objeto matemático Teorema de Pitágoras. En este trabajo, hacemos un estudio análogo, pero haciendo las adaptaciones correspondientes al objeto Semejanza de Triángulos. Resaltamos que el trabajo de Suáres y Zubieta (2022) tuvo el mismo profesor asesor con el que cuenta este, además que ambos se realizarón de manera sincrónica; por tal motivo, estos trabajos comparten la misma estructura teórico-metodológica, por supuesto, cambiando el objeto matemático y adaptando los indicadores de idoneidad epistémica al objeto de interés antes citado. El análisis epistémico de los videos toma en cuenta tres aproxiomaciones de orden matemático a la Semejanza de Triángulos (intrafigural, tranformacional, situacional) y, en ese marco, tipos de objetos primerios que se puede asociar: (i) reglas, a las cuales pertencen las definiciones, proposiciones y procedimientos que se relacionan con la semejanza de triángulos; (ii) leguajes y representaciones; (iii) situaciones problema (cálculo, demostración, construcción e identificación de relaciones; (iv) y argumentos, de verificación de propiedades y demostración.

Estructuraremos el trabajo en cinco capítulos tal como presentamos en la siguiente manera:

En el primer capitulo mostramos el planteamiento del problema, el cual es planteado a partir de mi experiencia educativa dentro de la pandemia, específicamente, en el marco de mis prácticas y la vida laboral. También establecemos el objetivo general y los objetivos especificos.

En el segundo capítulo se presentan los referentes conceptuales que están divididos de la siguiente manera: (i) referentes matemáticos, en los que se describen las tres aproximaciones a la semejanza de triángulos y los principales objetos primarios asociados; y (ii) referentes de índole didáctico, en los que se describe la propuesta de idoneidad epistémica, y algunos referentes curriculares de Colombia.

En el tercer capítulo se presenta la metodología del estudio, la cual se divide en tres partes: la primera, determinación de los videos para analizar, describe la manera mediante la cual fueron escogidos los videos analizados; la segunda, alude a la adaptación de los criterios de idoneidad epistémica propuestos por Suárez y Zubieta (2022), utilizados como herramienta para el análisis; la tercera, muestra la forma en que se presentan los análisis de los videos.

En el cuarto capítulo, se presenta el análisis de cada uno de los videos a la luz de los indicadores de idoneidad epistémica. En un segundo momento, se exponen los resultados del análisis.

En el capítulo cinco, se exponen las conclusiones del estudio; pretendemos mostrar con ello el desarrollo de los objetivos planteados y unas consideraciones finales en relación con los resultados obtenidos. Así mismo, se presentan los aportes que me ha dejado como futuro profesional la elaboración de este trabajo de grado.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

1.1 Justificación

El 11 de marzo del 2020 la Organización Mundial de la salud (OMS) caracterizó al COVID-19 como pandemia. Esta acción llevó a que casi todos los países del globo terráqueo tomaran medidas para frenar la propagación del virus SARS-CoV-2, ante la capacidad infecciosa de este y que aún no se contaba con una vacuna. Todo esto para mitigar el efecto que podría provocar. Por lo tanto, se solicitó tomar medidas que tuvieran que ver con el contacto social, como fueron el cierre de escuelas, negocios, parques, cines y todo aquello que favorece el contacto social. Acatando estas medidas, el 16 de marzo del 2020 en Colombia, el gobierno nacional tomó algunas medidas para el ámbito educativo. Los niños, jóvenes y adultos ya no volverían por este año a recibir clases presenciales y, por ende, tendrían que cambiar el aula de clase, por un computador, tableta, celular, etc. Bajo ese escenario, sus maestros los acompañarían desde la distancia y llevarían a cabo su profesión docente mediante una presencialidad remota mediada por alguno de estos artefactos.

En un principio los estamentos gubernamentales establecieron un lapso para desarrollar algunas actividades desde casa, todo con la intención de que todo pasara y se pudiera volver a la normalidad. Pero al pasar los días la situación empeoró y las noticias fueron poco esperanzadoras. Por tanto, el gobierno junto con el Ministerio de Educación Nacional, establecieron que los estudiantes de educación primaria, secundaria y media no regresarían a las aulas de clase, suspendiendo, de esta manera, la actividad presencial ().

Esto obligó a que varios colegios del sector privado y público adoptaran la modalidad de alternancia; la presencialidad parcial que esto implicó sugirió que el escenario de la virtualidad siguiera vigente para el 2021. En 2022 la vacuna del COVID-19 tuvo su eficacia, por lo cual profesores y estudiantes volvieron a las aulas de manera normal. Este escenario acentuó aún más que la educación virtual, sin duda, es un recurso educativo que no se debe infravalorar y que puede ser útil no solo en contextos como el generado por la pandemia; en esta época de era digital, no es posible negar las potencialidades de las TIC (Tecnologías de la información y las telecomunicaciones), lo que exige un estudio de su idoneidad. En este texto, aludimos a la idoneidad relativa al buen tratamiento de un objeto desde el conocimiento matemático institucional, lo que denominamos, idoneidad epistémica.

Por lo tanto, los futuros profesores no deben desconocer esa realidad y, en consecuencia, deben adaptarse de manera crítica a la misma. Si bien no se debe desconocer la importancia de la presencialidad para potenciar competencias de índole social que influyen directamente en los procesos de aprendizaje, también es importante reconocer que los entornos virtuales pueden favorecer estos procesos. Anchundia (2020) muestra que estos medios potencian procesos de aprendizaje, ya que posibilitan el acceso a distinto tipo de información (en diversos formatos), potencializan diferentes maneras de comunicación y, por ende, favorecen maneras diferentes de construcción colectiva de conocimiento.

No cabe duda de que YouTube es una de las plataformas más usadas para apoyar estas nuevas dinámicas. Pero es claro que no todos los videos que allí se cargan tienen un contenido pertinente para utilizar como apoyo a las labores docentes de los profesores (Beltrán-Pellicer et al., 2018a). En mi experiencia como docente, a la luz de mis prácticas de inmersión y luego en mi vida profesional como docente, pude vivenciar este fenómeno. Durante el desarrollo de las prácticas durante 2020 y 2021, tuve la necesidad de usar videos para complementar las guías o las clases impartidas sobre semejanza de triángulos. En mi labor como docente en el presente año, me di cuenta de que algunos de mis alumnos complementaban mis clases con videos de YouTube, para reforzar lo visto. Aunque en mi experiencia en la pandemia y en la planeación de mis clases en el presente año, identifiqué videos pertinentes para estos fines, logré entrever que hay algunos que no consideran varios aspectos de idoneidad en lo que respecta al nivel epistémico (sobre definiciones, procedimientos, proposiciones, lenguajes, problemas, argumentos involucrados desde un punto de vista institucional): el lenguaje matemático que usaban no era el correcto; las representaciones eran bastante idealizadas, estaban descontextualizados (no mostraban sus posibles usos cotidianos); no presentaban su potencial para abordar otros temas de la matemática escolar; presentaban definiciones incorrectas o significados parciales, entre otros.

Dado el anterior panorama, considero que uno de los intereses de los profesores de matemáticas se debe focalizar en la precisión de criterios para escoger videos pertinentes para complementar sus sesiones de clase. Concebimos que la propuesta teórico-metodológica de criterios de idoneidad (Beltrán-Pellicer et al., 2018a; 2018b), apoyada por el Enfoque Onto–Semiótico (EOS), provee las herramientas suficientes para llevar a cabo un estudio que nos permita responder las inquietudes surgidas.

La atención de este proyecto estará en videos de la plataforma YouTube; se pretende hacer un barrido de los videos más vistos sobre el tema criterios de semejanza de triángulos. Mi interés (junto con mi asesor) en este tema se centra en dos asuntos: (i) Desde una perspectiva curricular, justificar y aplicar los criterios de semejanza de triángulos en la resolución o planteamientos de problemas es una de las competencias básicas de la geometría escolar de la educación básica secundaria y media; (ii) como lo advertí antes, una búsqueda, quizá ingenua, durante mi práctica me dejó entrever videos de diversa calidad; considero que una valoración sustentada de su contenido podría ser un aporte importante para los profesores, en términos de sugerir videos pertinentes que puedan usar para complementar su labor.

1.2 Objetivos

Con base en la problemática planteada consideramos que para poder abordarla se hace necesario declarar el objetivo general y los objetivos específicos.

1.2.1 Objetivo general

Proveer un análisis de idoneidad epistémica de videos populares de YouTube sobre la semejanza de triángulos, de forma tal que los profesores de matemáticas tengan información que pueda serles útil cuando pretendan usarlos en su práctica profesional.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Determinar una muestra de los más populares de la plataforma YouTube sobre semejanza de triángulos, para tener insumos sobre los cuales hacer un análisis de su contenido geométrico y, en consecuencia, tener información sobre la idoneidad epistémica de los videos más visitados sobre dicho objeto.
2. Adaptar, al objeto semejanza de triángulos, los descriptores de la idoneidad epistémica propuestos por el Enfoque Onto-Semiótico, de forma tal que se tenga una herramienta operativa que permita realizar el análisis de idoneidad de videos de YouTube relativos a tal objeto.
3. Utilizar los descriptores adaptados -determinados en el Objetivo Específico 2- para determinar las fortalezas y debilidades de los vídeos escogidos a través del Objetivo Específico 1.

CAPÍTULO 2. REFERENTES CONCEPTUALES

2.1 Referentes matemáticos

El interés de este estudio es hacer un análisis de idoneidad epistémica de algunos videos que se alojan en la plataforma YouTube, relativos al objeto *semejanza de triángulos*. Los asuntos de orden epistémico se refieren a como los significados institucionales representan los de referencia (Godino 2013). El Enfoque Onto-Semiótico, para abordar estos aspectos distingue seis categorías a saber: concepto-definición, proposiciones, procedimientos, argumentos, lenguajes-representación y situaciones-problemas. En consecuencia, hemos procurado estructurar esta sección tomando como base estas categorías. Así las cosas, en primera instancia presentamos las diferentes aproximaciones conceptuales al objeto semejanza tomando de base el trabajo de Escudero (2005). En ese marco, de manera simultánea, exponemos: (i)las aproximaciones al objeto semejanza (ii) las principales proposiciones (enunciados que aluden a propiedades del objeto), procedimientos y argumentos asociados; (iii) los tipos de representaciones empleados para indicar el objeto (gráficas, aritméticas, etc.) y tipos de situaciones o problemas que involucran al objeto en cuestión.

2.1.1 Conceptualización especializada del concepto semejanza

Las diferentes definiciones que podemos encontrar del objeto semejanza tal y como las conocemos hoy en día, son consecuencia del estudio que se ha desarrollado a partir de las diferentes generalizaciones que se han dado a través de los siglos. A continuación mostramos algunas de estas definiciones que encontramos en Escudero (2005):

1. La semejanza es una transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación $|A'B'| = k\,|AB|$, donde k es un número positivo llamado razón de semejanza (Vinográdov, Tomo 9-2, p. 53, citado por Escudero, 2005).
2. La Semejanza es el producto de una *homotecia*[1] H y un movimiento M, $S = H \cdot M$ (Martínez et al., 1984, p. 364, citado por Escudero, 2005),

[1] Definición de homotecia: Sea O un punto del plano α y k un número real. Llamaremos homotecia de centro O y razón k a la función $f_{(o,k)}$ del plano en si mismo, de tal manera que si $k \neq 0$ la función asigna a cada punto $H_{(O,k)}X = X'$, donde O,X y X' son colineales, $OX' = kOX$ (Julio, 2014).

3. La semajanza entre dos triángulos, como aquella que tiene sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados correspondientes proporcionales.

Con base en estas definiciones y su tratamiento en procesos de enseñanza, Escudero (2003) identificó tres aproximaciones de este objeto, las cuales presentamos a continuación:

Relación intrafigural. Se resalta la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, en la cual no se tiene en cuenta la idea de transformación. La definición 3 citada previamente se corresponde con en esta aproximación. Vale la pena aclarar que, bajo esta aproximación, aun cuando un par triángulos estén en una configuración homotética o de Thales, las relaciones entre estas no hacen referencia directa a las propiedades transformacionales o proyectiva, respectivamente. A continuación, explicamos esto:

Dado que ΔABD y ΔACE estén en una configuración de Thales (Figura 1) o en una configuración homotética (Figura 2). En una *relación intrafigural* estas situaciones no aluden al interés de destacar la proporción que sugiere el *teorema de Thales*[2] $\left(e.g., \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}\right)$, ni destacar que A es el punto de proyección de una transformación homotética en la cual C y E son las imágenes de B y D, respectivamente bajo una razón r tal qué, $rAB = AC$ y $rAD = AE$ (Figuras 1 y 2). Más bien, en cualquiera de los dos casos, el interés se focaliza en destacar las proporciones de los lados de los triángulos involucrados $\left(\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}\right)$ y la relación de congruencia entre los ángulos correspondientes.

[2] Teorema de Thales: Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales a dichos lados (Moise y Downs, 1986).

Figura 1.

Triángulos en configuración de Thales.

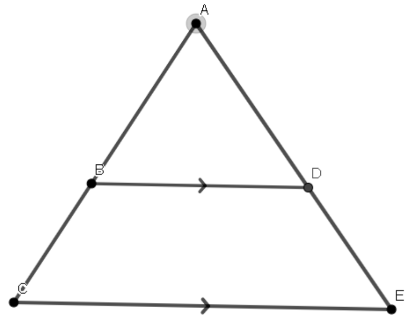
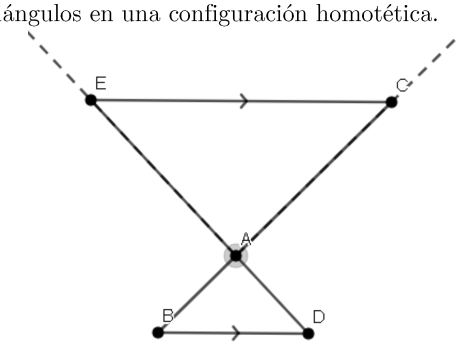


Figura 1.

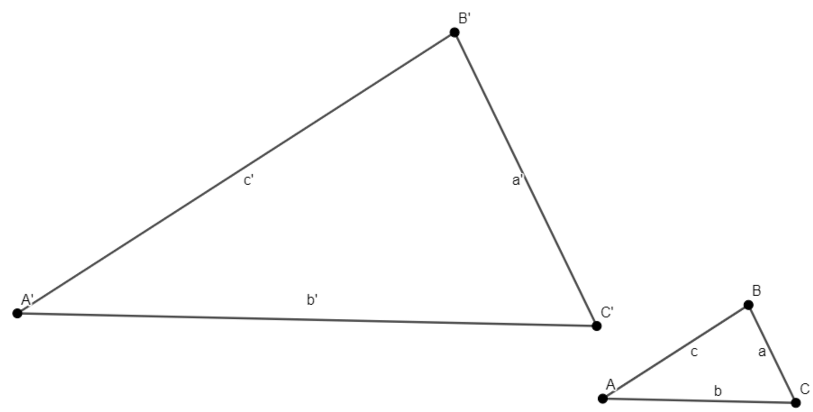
Triángulos en una configuración homotética.



Ahora bien, esta aproximación intrafigural suele destacarse más cuando las figuras a relacionar están separadas (Figura 3). Para este caso es evidente precisar la relación de proporcionalidad entre los lados $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$ y la relación de congruencia entre los ángulos correspondientes ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$).

Figura 3.

Figuras semejantes separadas.



Transformación geométrica como objeto matemático. En esta aproximación distinguimos dos maneras en las que intervienen las transformaciones: Una en la que únicamente hay una transformación de una figura en otra y la segunda en la que intervienen varias transformaciones de una figura en otra. A continuación, explicamos el asunto:

La Figura 2 nos puede servir para ejemplificar una única transformación; esto porque al ΔABD se le aplica una *homotecia* para obtener el ΔACE. La segunda forma, esto es, cuando intervienen varias transformaciones, se puede ilustrar mediante la Figura 4. En ella, para obtener $\Delta AB'C'$ se ha aplicado una *homotecia* al ΔABC; luego, para obtener $\Delta AB''C''$, se ha aplicado una rotación al $\Delta AB'C'$, en el sentido de las manecillas del reloj, con centro A (Figura 5). En suma, $\Delta AB''C''$ es el resultado de la composición de dos transformaciones (una *homotecia* y una *isometría*, para este caso, una rotación) aplicada al ΔABC.

Figura 2.
Primera transformación aplicando homotecia.

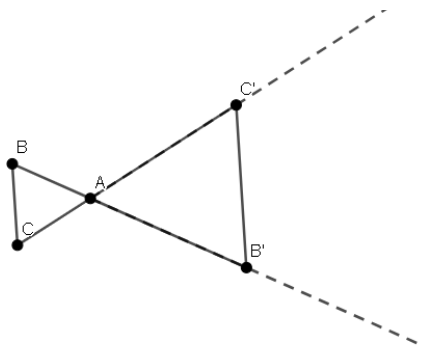
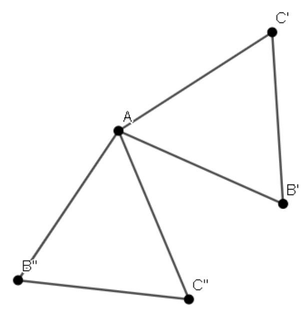


Figura 3.
Segunda transformación aplicando una rotación.



Semejanza vista como útil. En esta aproximación se hace uso de la semejanza para abordar un problema específico, sin explicitar la definición involucrada, pero usándola de manera implícita para resolverlo. Más adelante, en la Sección 2.1.4, vamos a presentar tipos de situaciones en las que se usa la semejanza a la luz de unas ciertas situaciones problemas que pueden ilustrar de mejor manera esta aproximación.

Hemos visto las diferentes aproximaciones según Escudero (2005) para la semejanza de triángulos. En la siguiente sección vamos a presentar los conceptos, procedimientos, situaciones problemas y representaciones (objetos primarios) que están relacionados con la semejanza a la luz de las anteriores aproximaciones.

2.1.2 Objetos primarios relacionados con la semejanza

En esta sección presentamos de manera resumida los principales objetos primarios asociados a la semejanza. Según el Enfoque Onto-Semiótico, hay seis tipos objetos primarios (Concepto-definición, procedimientos, proposiciones o teoremas, representaciones, situaciones problema y argumentos) los cuales son un insumo importante para interpretar y analizar cualquier actividad matemática (Godino, Batanero, y

Font, 2007). Dentro del objeto primario Concepto-Definición, encontramos las diferentes aproximaciones del objeto semejanza que estudiamos en la sección anterior; a continuación, presentamos otros objetos primarios, unos relativos a argumentos y otros relativos a las proposiciones claves inscritas a la semejanza de triángulos. Luego de ello, presentamos una sección relativa a las principales situaciones y representaciones asociadas.

2.1.3 Argumentos y proposiciones

Como se ha dado entender anteriormente, el concepto de semejanza de triángulos se puede abordar de tres maneras, una intrafigural, otra transformacional y otra utilitaria. En las tres, el concepto de congruencia de ángulos y la proporcionalidad entre medidas de longitud están involucradas (Julio, 2014).

Retomando la Definición 2 que se corresponde con una aproximación transformacional del concepto de semejanza, se involucran los conceptos de *homotecia* e *isometrías* tales como *rotación, traslación y simetría (central o axial)* que son propias de las transformaciones en el plano.

Según Moise y Downs (1986), para demostrar los criterios de semejanza de triángulos se hace uso de la configuración de Thales y las propiedades que derivan de él *Teorema de Thales*. Estos criterios nos permiten inferir semejanza de triángulos de acuerdo con unos datos proporcionados y en cualquier configuración (triángulos separados, Thales o homotecia). A continuación, presentamos los enunciados de tales criterios con su respectivo argumento deductivo (demostración).

Criterio AAA: Dados ΔABC y ΔDEF, si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demostración: Tomamos dos puntos E' y F' que pertenecen a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ respectivamente, de tal manera que $AE' = DE \text{ y } AF' = DF$ (Figura 4.).

Por el *Postulado de congruencia Lado-Ángulo-Lado*, afirmamos que $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$ y de la *Definición de triángulos congruentes* obtenemos que $\angle E' \cong \angle E$.

Como $\angle B \cong \angle E$ y $\angle E' \cong \angle E$, por transitividad $\angle E' \cong \angle B$ y por el *Teorema recíproco ángulos correspondientes congruentes*[3] podemos deducir que $\overleftrightarrow{E'\,F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

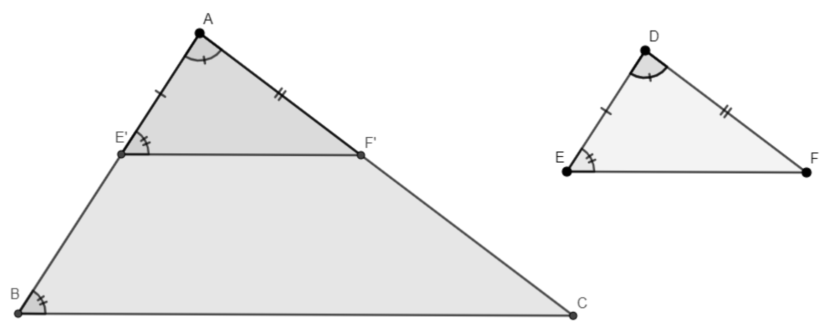
Como $\overleftrightarrow{E'\,F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, podemos usar el *Teorema de Thales*[4] para deducir que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'}$.

Como $\Delta AE'\,F' \cong \Delta DEF$, por *Definición de triángulos congruentes*[5], tenemos que $AE' = DE, AF' = DF\ y\ E'\,F' = EF$, antes teníamos que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'}$, entonces por sustitución $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

Por los lados proporcionales antes justificados y los ángulos congruentes que se dan en la hipótesis, podemos usar la *Definición de triángulos semejantes*[6] y deducir que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Figura 4.

Representación criterios de semejanza



Nota. Representación criterios de semejanza. Adaptado de geometría moderna 12-4A (p. 336), por Moise y Downs, 1986, Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

---

[3] Teorema recíproco ángulos correspondientes congruentes: Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas (Moise & Downs, 1986).

[4] Teorema de Thales: Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales a dichos lados (Moise & Downs, 1986).

[5] Definición de triángulos congruentes: Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes (Moise & Downs, 1986).

[6] Definición triángulos semejantes: Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes proporcionales, entonces la correspondencia se llama una semejanza y decimos que los triángulos son semejantes.

Criterio (AA): Dados ΔABC y ΔDEF, si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$ (o Cualquier par de ángulos congruentes) entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demostración: Por el *Teorema 180*[7], tenemos que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ y $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180$ (Figura 4.).

Por transitividad tenemos que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ (1).

Como $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $m\angle A = m\angle D$ y $m\angle B = m\angle E$ (2).

Sustituimos (1) y (2) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle A + m\angle B + m\angle F$.

Utilizamos propiedades aritméticas y tenemos que $m\angle C = m\angle F$. Como las medidas de los ángulos son iguales, los ángulos son congruentes, por lo que $\angle C \cong \angle F$.

Y como $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, por el *Criterio AAA,* $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Criterio LAL: Dados ΔABC y ΔDEF, si $\angle A \cong \angle D$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demostración: Del mismo modo que en el primer criterio, tomamos dos puntos E' y F' que pertenecen a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ respectivamente, de tal manera que $AE' = DE$ y $AF' = DF$ (Figura 4.).

Como tenemos un par de ángulos congruentes y dos pares de lados de igual medida, por el *Postulado LAL*[8], deducimos que $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$.

En la hipótesis tenemos que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y como $AE' = DE$ y $AF = DF$, por sustitución $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$.

Lo anterior se necesitaba como dato para utilizar *Teorema recíproco de Thales*[9] e inferir que $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Usando el paralelismo de los lados y el *Teorema ángulos correspondientes congruentes*[10], podemos justificar que $\angle B \cong \angle E'$.

[7] Teorema 180: Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos es 180.

[8] Teorema de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LLL): Dada una correspondencia entre dos triángulos, si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son congruentes

[9] Teorema recíproco de Thales: Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y determina sobre dichos lados segmentos proporcionales a ellos, entonces es paralela al tercer lado (Moise & Downs, 1986).

[10] Teorema ángulos correspondientes congruentes: Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas (Moise & Downs, 1986).

Como hipótesis tenemos que $\angle A \cong \angle D$ y como $\angle B \cong \angle E'$, podemos usar el *criterio de semejanza AA*, para inferir que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.

Por último tenemos que $\Delta AE'\ F' \cong \Delta DEF$, como toda congruencia es una semejanza, podemos decir que $\Delta AE'\ F' \sim \Delta DEF$, antes teníamos que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$, por transitividad podemos deducir que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Criterio de semejanza LLL: Dados ΔABC y ΔDEF (Figura 4.), si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demostración: Como se ha realizado en anteriores criterios, tomamos dos puntos E' y F' que pertenecen a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ respectivamente, de tal manera que $AE' = DE$ y $AF' = DF$ (Figura *5*.).

Sustituimos lo anterior con los lados proporcionales $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ que nos da la hipótesis y obtenemos que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$.

Por identidad tenemos que $\angle A \cong \angle A$. Como tenemos dos pares de lados correspondientes proporcionales y un par de ángulos congruentes, podemos inferir por el *criterio de semejanza LAL,* que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.

Usamos la *Definición de semejanza* para inferir que $\frac{EF'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$.

De lo anterior y utilizando propiedades aritméticas:

$\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB} \therefore BC\ \frac{E'F'}{BC} = BC\frac{AE'}{AB}\ \therefore E'F'\frac{BC}{BC}\ = BC\frac{AE'}{AB} \therefore E'F' * 1 =$

$BC\frac{AE'}{AB} \therefore\ E'F' = BC\frac{AE'}{AB}$.

Como $AE' = DE$ sustituyendo tenemos $E'F' = BC\frac{DE}{AB}$ (i).

De la hipótesis tenemos $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, utilizando propiedades aritméticas obtenemos $EF = BC\frac{DE}{AB}$(ii).

Por transitividad de la igualdad de i y ii, obtenemos que $E'F' = EF$. Teníamos que $AE' = DE$ y $AF' = DF$, que son datos necesarios para usar el *Teorema de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)*[11] y deducir que $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$.

[11] Teorema de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL): Dada una correspondencia entre dos triángulos, si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Como toda congruencia es una semejanza, podemos decir que $\Delta AE'\,F' \sim \Delta DEF$ y como antes teníamos que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$, por transitividad podemos inferir que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

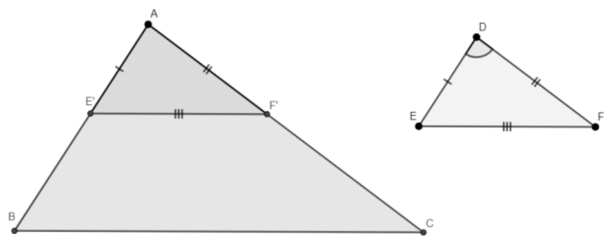
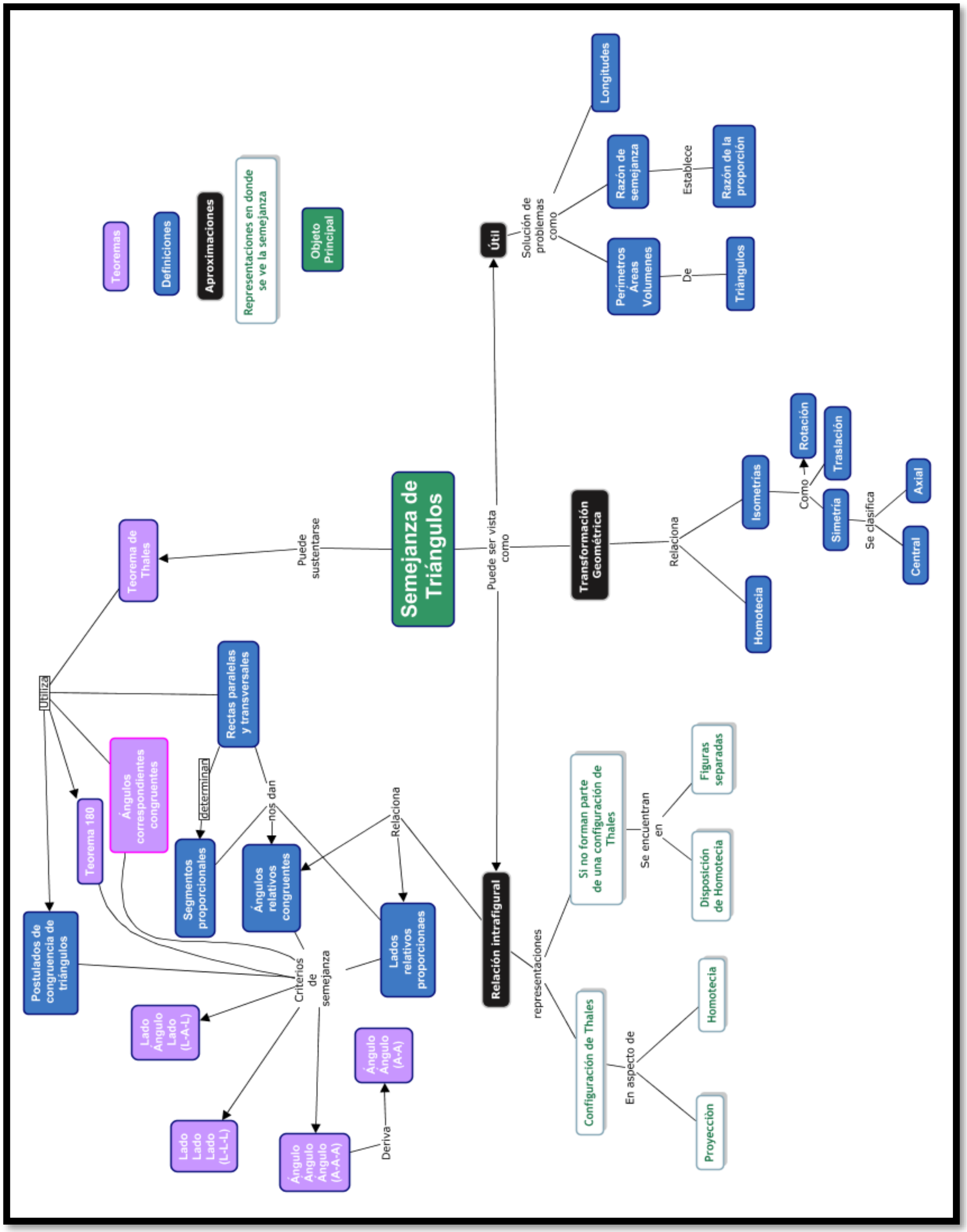


Figura 5.

Nota. Adaptado de geometría moderna 12-4A (p. 343), de Moise & Downs, 1986, Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

A continuación, presentamos un diagrama (Figura 8) en el cual se resume la sección de los objetos primarios de definiciones y proposiciones relacionados con el objeto de semejanza de triángulos.

Figura 6.
Red conceptual Semejanza de triángulos.



Nota. Adaptado de Conceptos específicos del tema Semejanza de Triángulos (p. 4), de Bernal, Osorio, & Toloza, 2019, (https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/43775).

2.1.4 Procedimientos, representaciones y argumentos asociados a tipos de situaciones que semejanza de triángulos

En esta sección presentaremos tres tipos de objetos primarios relacionados con el objeto semejanza de triángulos: (i)representaciones, (ii)situaciones, (iii)procedimientos y argumentos. Los presentamos simultáneamente porque nos facilita la descripción; esto es, en el marco de las varias clases de situaciones, podemos aludir a las clases de representaciones que se pueden involucrar en ellas, y a los principales procedimientos o argumentos que pueden emerger durante el abordaje de las situaciones. En primera instancia, presentamos una descripción de las clases de representaciones; luego describimos las clases de situaciones y las ejemplificaciones. Concretamos algunas clases de representaciones tomando como contexto, esas ejemplificaciones.

En la Tabla 1, presentamos cinco clases de representaciones que Escudero (2003) distingue para el objeto semejanza: natural, simbólico, figurativo, situación y material concreto.

Tabla 1

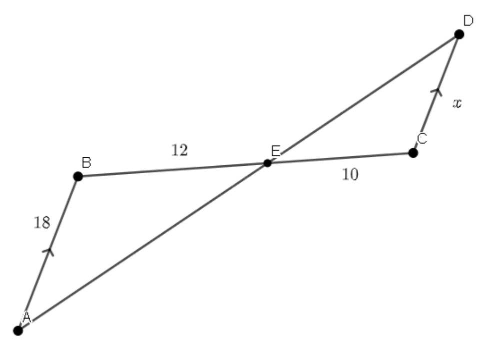
Tipos de representaciones del objeto semejanza

Representación	Descripción
Lenguaje natural	Aquí se consideran todas las situaciones que representan el objeto de semejanza por medio de frases, oraciones, o proposiciones, sin que las acompañe ningún símbolo matemático.
Lenguaje simbólico	Aquí se consideran todas las situaciones que representan el objeto de semejanza por medio de frases, oraciones, o proposiciones, pero todos los objetos matemáticos vienen representados de manera simbólica.
Lenguaje figurativo	En este lenguaje se cataloga la información que representa el objeto de semejanza mediante lenguaje natural o simbólico y, se acompaña con una representación gráfica que ilustra la situación enunciada.
Situación	En este tipo de representación, el objeto de semejanza se ve involucrado en algún problema de contexto real, en el cual se ven situaciones cotidianas o históricas que formulan algún problema. Esta representación viene dada con un enunciado (lenguaje natural y/o simbólico) y la mayoría de las veces con una ilustración (lenguaje figurativo), que representan la situación.
Dinámica	Son representaciones en términos figurativos, construidos en algún software de geometría que hace uso del dinamismo, donde el objeto a través de la manipulación de sus vértices o puntos clave de la representación, mantiene unas propiedades y otras pueden cambiar.

Describimos las clases de situaciones relacionadas con semejanza, tomando de base la propuesta de Escudero (2003). Mediante tablas indicamos ejemplos tanto de la situación como de las representaciones usadas para comunicar el enunciado que ilustra la situación:

Situaciones de Cálculo: Puede referirse a encontrar medidas de longitud o una razón entre longitudes. En la Tabla 2, ponemos un ejemplo de esta situación enunciada con diferentes clases de representación.

Tabla 2.
Ejemplo y representaciones asociadas a la situación de cálculo.

Lenguaje	**Representación**
Natural	Dados dos triángulos en configuración de homotecia, si un lado del primer triángulo mide 12 cm y su correspondiente del segundo triángulo mide 10 cm; si otro lado del primer triángulo mide 18 cm. ¿Cuánto mide el lado correspondiente del segundo triángulo?
Simbólico	Si $\Delta EBA \sim \Delta ECD$, $BE = 12$, $EC = 10$ y $BA = 18$. $DC = ?$
Figurativo	En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, hallar el valor de ⍰. **Figura 7.** Triángulos en configuración de homotecia  Nota. Ejercicio de semejanza. Adaptado de Geometría Moderna 12-4A (p. 321), de Moise y Downs, 1986, Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

A continuación, presentamos un *procedimiento* prototípico asociado para solucionar el problema. En esta situación, media un argumento en el que se usa la definición de semejanza por homotecia.

Usando esta definición obtenemos que $BE = kCE$, donde k es la razón de la homotecia. Reemplazamos los valores por los que nos suministra el problema, $12 = k10$.

Despejamos a k y obtenemos que $k = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

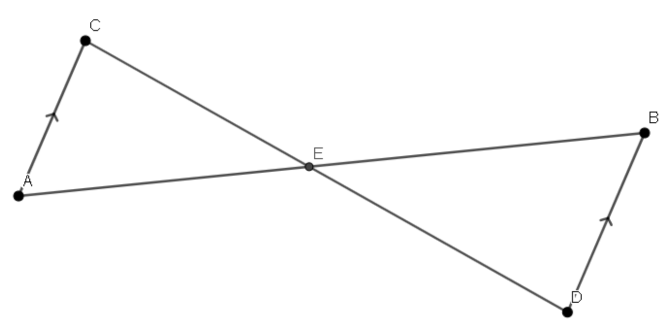
Ahora, volvemos a usar la definición de homotecia, pero estableciendo la igualdad con el lado nos pide encontrar el problema. Por lo que obtenemos $BA = kDC$.

Reemplazamos por los valores que nos da el problema y obtenemos que $18 = \frac{6}{5}x$.

Resolviendo la ecuación obtenemos que $x = 15 = DC$.

Situaciones de Demostración: Pueden referirse a demostrar algún hecho geométrico que involucre la semejanza de triángulos, bien sea porque su consecuente alude a la semejanza explícitamente, o bien porque es necesario usarla con miras a inferir el consecuente de tal hecho. En la Tabla 3 presentamos ejemplos de tal situación y algunas representaciones asociadas.

Tabla 3.
Ejemplos y representaciones asociadas a la situación de demostración.

Lenguaje	**Representación**
Natural	Situación 1. Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y determina sobre dichos lados segmentos proporcionales, demostrar que dicha recta es paralela al tercer lado.
Simbólico	Situación 2. Se da ΔABC; $D \in \overline{AB}$; $E \in \overline{AC}$. Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$
Figurativo	Situación 3. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, demostrar que: $\Delta ACE \sim \Delta BDE$ y $(AE)(ED) = (CE)(EB)$ **Figura 8**. Triángulos en disposición de homotecia.  Nota. Adaptado de Geometría Moderna 12-4A (p. 338), de Moise y Downs, 1986, Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

Presentamos el *argumento deductivo* (demostración) asociado a la situación 3 en la Tabla 3. El argumento se *representa* en un formato de dos columnas (Tabla 4).

Tabla 4.
Demostración a dos columnas de la situación.

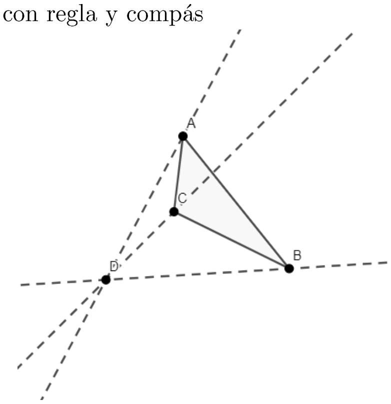
Aserción	Garantía y datos
1. ΔACE y ΔBDE	Dado
2. $\overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{DB}$	Dado
3. $\angle C \cong \angle D$ y $\angle A \cong \angle B$	Teorema ángulos alternos internos congruentes[12] (2 y 1)
4. $\Delta ACE \sim \Delta BDE$	Criterio de semejanza AA (3)
5. $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$	Definición de triángulos semejantes (4)
6. $(AE)(DE) = (CE)(BE)$	Propiedades aritméticas (5)

Situaciones de Construcción: Usualmente son situaciones que se refieren a proveer el procedimiento de construcción de un triángulo semejante a uno dado. En la Tabla 5 presentamos ejemplos de situaciones de esta clase con sus representaciones.

Tabla 5.
Representaciones asociadas a la situación de construcción

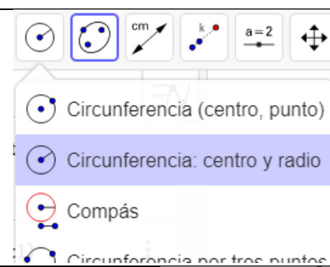
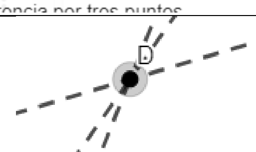
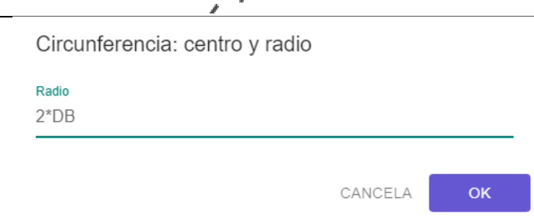
Lenguaje	**Representación**
Natural	Situación 1. Construya un triángulo con medidas 5 cm, 4 cm y 3 cm. Luego construya uno nuevo con razón de proporción de 2 con respecto al primer triángulo.
Simbólico	Situación 2. Dado ΔABC, $AB = 5$, $BC = 4$ y $AC = 3$. Construya $\Delta A'B'C'$, con una razón homotética de $r = 2$ y a [poner un punto, el que consideres conveniente] como punto de proyección.
Figurativo	Situación 3. Construya, con regla y compás, la homotecia del ΔABC (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), con centro D y razón $k = 2$.

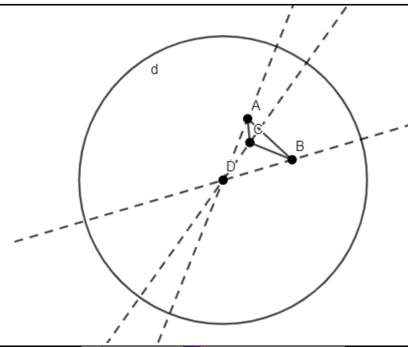
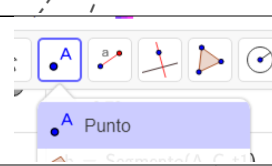
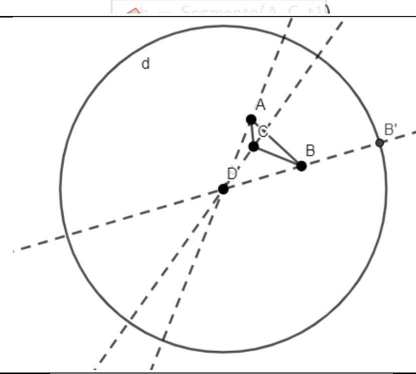
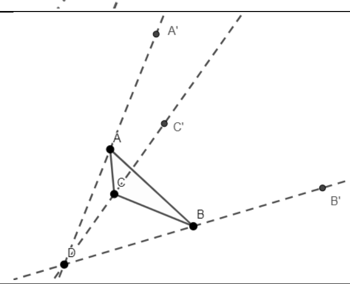
[12] Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

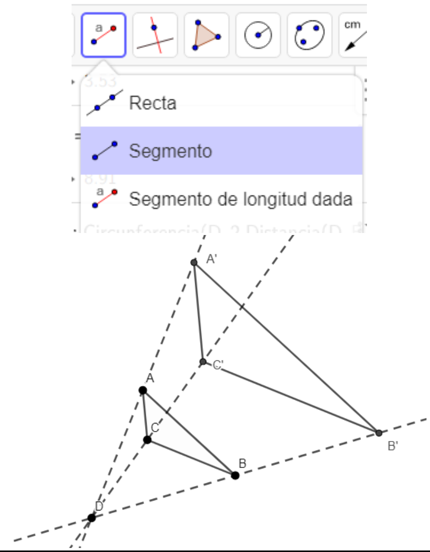
	Figura 9. Situación de construcción con regla y compás 
Dinámica	Situación 4. Construya, con las herramientas de GeoGebra, la homotecia del ΔABC (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), con centro D y r azón $k = 2$.

A continuación, presentamos dos procedimientos diferentes para solucionar la situación 4: el primer procedimiento refiere a la construcción de la homotecia del ΔABC con todas las herramientas auxiliares (Tabla 6); y el segundo procedimiento alude a la construcción de la homotecia del ΔABC directamente, sin el uso de herramientas auxiliares (Tabla 7).

Tabla 6.
Procedimiento para abordar la situación 4 de la Tabla 5

	Procedimiento	**Ilustración**
1.	En el menú de herramientas, escogemos la opción de circunferencias y hacemos clic en circunferencia con centro y radio.	
2.	Hacemos clic en el punto D, el cual sería el centro de la circunferencia.	
3.	Ingresamos el valor del radio de la circunferencia. En este caso buscamos la imagen de B, que es B'. Para esto usamos la definición de homotecia $(OX' = kOX)$, donde $O =$	

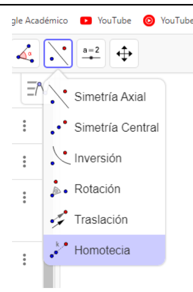
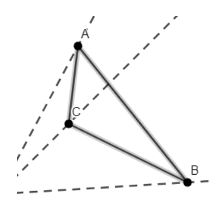
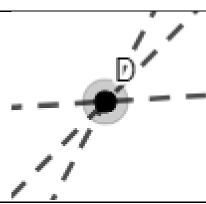
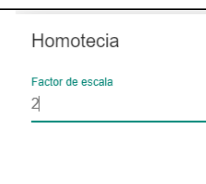
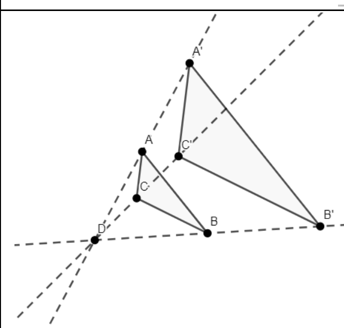
	$D, k = 2\, , X = B \; y \; X' = B'$. Damos clic en OK.	
4.	Aparece una circunferencia con centro D y radio $2DB$.	
5.	Seleccionamos la opción punto.	
6.	Marcamos la intersección entre $\overrightarrow{DB}$ y $\odot d_{D,DB}$. Este punto se nombra H.	
7.	Repetimos los pasos, del 1 al 6, para buscar las imágenes de C y A	

8.	Construimos $\overline{A'C'}$, $\overline{C'B'}$ y $\overline{A'B'}$ tal, con la herramienta segmento	

En el segundo procedimiento (Tabla 7), mostramos la homotecia del ΔABC y razón $k = 2$. Sin construir elementos auxiliares.

Tabla 7.

Segundo procedimiento para abordar la situación 4 de la Tabla 5.

Primero, en la caja de herramientas, hacemos clic en el botón de transformaciones y escogemos la opción de homotecia		Seleccionamos el triángulo dado.	
Seleccionamos el punto D (Centro de la homotecia)		Aparecerá un recuadro donde ingresamos 2 (factor de la homotecia)	
Aparecerá la homotecia del ΔABC con centro D razón $k = 2$			

Situaciones de identificación de relaciones: Pueden ser aquellas que identifican grupos de triángulos semejantes o identifican relaciones de proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes. En la Tabla 8, mostramos algunos ejemplos asociados a esta situación:

Tabla 8.
Representaciones de la situación de identificación de relaciones.

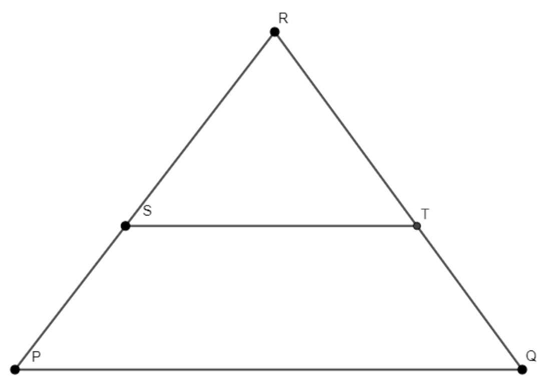
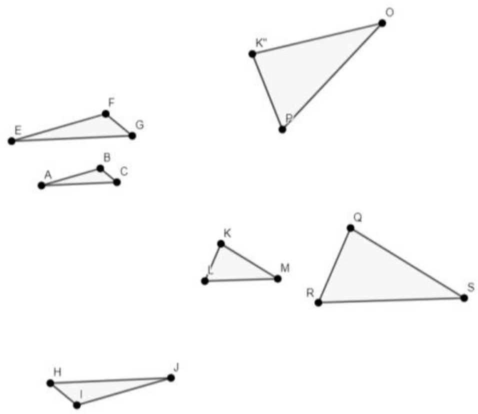
Lenguaje	**Representación**
Natural	Situación 1. Si en un triángulo los lados miden 4 cm, 1 cm y 3 cm; y en otro triangulo los lados correspondientes miden 8 cm, 2 cm y 6 cm. Determine con algunos de los criterios de semejanza, si los dos triángulos son semejantes.
Simbólico	Situación 2. Dado $\Delta ABC, \Delta DEF$, $AB = 1$, $BC = 3, AC = 4, DE = 2, EF = 6, DF = 8$. Determine si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
Figurativo	Situación 3. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, tenemos que $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$, complete las relaciones de proporcionalidad: a) $\frac{RP}{RS} = -$ b) $\frac{RS}{SP} = -$ c) $\frac{RT}{RQ} = -$ **Figura 10.** Triángulos en disposición de homotecia.  Nota. Ejercicio de relación de proporción. Adaptado de geometría moderna 12-4A (p. 319), de Moise & Downs, 1986, Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.
Dinámica	Situación 4. En GeoGebra, (ejemplificado en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) determine que triángulos son semejantes, utilizando las herramientas de medida y arrastre.

	Figura 11. Ejercicio de identificación de relaciones. 

Presentamos el *procedimiento* de la situación 2 (Tabla 8), el cual pide que relacionemos los lados de los triángulos que se dan y justifiquemos si son semejantes. En este caso vamos a usar la definición 3 de semejanza de Escudero (2005).

Usando la definición de semejanza de triángulos, establecemos las relaciones de proporcionalidad de los lados de los triángulos: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

Luego reemplazamos los datos que se nos dan $AB = 1$, $BC = 3, AC = 4, DE = 2, EF = 6, DF = 8$. Por lo que nos queda $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$.

Simplificamos $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Como la igualdad se cumple, podemos afirmar que los 3 pares de lados son proporcionales. Por lo que podemos usar el *Criterio de semejanza LLL* y afirmar que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Como hemos visto, todas las situaciones se pueden presentar en lenguaje natural, simbólico o figurativo. En la mayoría de los textos escolares, las representaciones de estas situaciones aparecen con un lenguaje natural o simbólico en forma de enunciado, acompañado de un lenguaje figural, el cual pretende presentar el diagrama de los objetos geométricos involucrados en el enunciado.

De acuerdo con el sistema teórico que se maneje (asociado a una aproximación transformacional o a una intrafigural), podemos asociar las situaciones a una aproximación determinada. Por ejemplo, desde una aproximación transformacional, en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, podemos encontrar las medidas de los lados del ΔECD, haciendo construcciones desde homotecias, dada una razón k, y teniendo solamente el ΔABE. De este modo se podrían encontrar las medidas de los lados del ΔECD haciendo construcciones.

La aproximación transformacional se favorece con situaciones de construcción, porque las transformaciones adquieren un protagonismo especial; esto, porque el propósito de estas situaciones es construir el resultado de transformar un triángulo en otro de acuerdo con unas condiciones dadas.

Resaltamos, además, que las situaciones de construcción se favorecen con representaciones gráficas dinámicas. Esto, porque las diferentes herramientas de los softwares implicados permiten: (i) transformar un triángulo, creando cada elemento auxiliar que involucra la construcción (rectas, rectas paralelas, lados o ángulos según la medida etc.) y así identificar las propiedades que se involucran a la hora de crear el objeto en cuestión –como el caso ilustrado en la Tabla 6; o (ii) aplicar la transformación directamente, como fue el caso ilustrado en la Tabla 7.

Otro aspecto que se favorece dentro de la representación dinámica es la identificación de relaciones entre objetos que la componen. Esto es, por medio de las diferentes herramientas de verificación de propiedades que proporcionan los softwares de geometría dinámica, podemos identificar propiedades que se dan entre dos triángulos semejantes, por ejemplo.

2.2 Referentes de índole didáctico

En esta sección presentamos el referente didáctico que servirá de sustento principal para el análisis epistémico de vídeos de YouTube, referidos a la semejanza de triángulos. En primera instancia mostraremos los referentes curriculares de Colombia que sugiere el Ministerio de Educación Nacional (MEN), de cómo se debe abordar la semejanza desde el currículo; y segundo explicaremos que es la idoneidad didáctica planteada por Enfoque Onto - Semiótico (EOS), profundizando en la faceta epistémica.

2.2.1 Referentes Curriculares

En el currículo colombiano, la semejanza está ubicada dentro del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Para potenciar este pensamiento por parte de los estudiantes, se requiere del estudio de distintas relaciones de las superficies de figuras planas con sus lados y vértices.

Dentro de los documentos curriculares del MEN que guían la educación en Colombia, encontramos los derechos básicos de aprendizaje de matemáticas (MEN, 2016), los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En la Tabla 9, presentamos en base de los documentos antes mencionados, el manejo del objeto semejanza en el currículo colombiano.

Tabla 9.
Organización curricular del objeto semejanza, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de aprendizaje de Colombia.

Grados	**Estándares**	**DBA**	**Evidencia de aprendizaje**
1º a 3º	Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir). (p. 79)	Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (Curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros). (p. 11)	Agrupa objetos de su entorno de acuerdo con las semejanzas y las diferencias en la forma y en el tamaño y explica el criterio que utiliza. Por ejemplo, si el objeto es redondo, si tiene puntas, entre otras características. (p. 11)
4º a 5º	Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. (p. 82)	Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas (ampliación- reducción). (p. 34)	Aplica movimientos a figuras en el plano. Diferencia los efectos de la ampliación y la reducción. Elabora argumentos referentes a las modificaciones que sufre una imagen al ampliarla o reducirla. Representa elementos del entorno que sufren modificaciones en su forma. (p. 34)

6^{o} a 7^{o}	Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. (p. 84)	Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades. (p. 55)	Identifica los tipos de escalas y selecciona la adecuada para la elaboración de planos de acuerdo con el formato o espacio disponible para dibujar. Representa e interpreta situaciones de ampliación y reducción en contextos diversos. (p. 55)
8^{o} a 9^{o}	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. (p. 86)	Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto. (p. 62)	Utiliza criterios para argumentar la congruencia de dos triángulos. Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas. Resuelve problemas que implican aplicación de los criterios de semejanza. Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruente o semejantes entre sí. (p. 62)

En los primeros grados escolares (1^{o} a 3^{o}), encontramos que la definición de semejanza se da dentro de una aproximación intrafigural, no de manera formal, sino a través de ejemplos. Las representaciones se dan en un lenguaje natural y figurativo. La situación que se presenta es de identificación de relaciones, representado en un lenguaje natural, por ejemplo, el balón de fútbol es semejante al baloncesto, porque los dos tienen forma de esfera. Otra situación de identificación de relaciones recurrente es la se agrupar de acuerdo a la forma (cilindro, cono, piramide, esfera etc.).

Para los grados escolares de 4^{o} y 5^{o} de primaria, la definición de semejanza se da desde una aproximación transformacional. Esta se presenta como ampliar, reducir y desde las isometrías. Las representaciones del objeto semejanza se dan en un leguaje natural y figurativo. Las situaciones de identificación de relaciones se basan en encontrar figuras semejantes a una dada, teniendo en cuenta los criterios de ampliación y reducción; y las de construcción aplicando a una figura isometrias, ampliaciones y reducciones.

En los grados escolares de 6º y 7º se vuelve a trabajar la definición de semejanza desde una aproximación transformacional; vuelven a aparecer las isometrias y se empieza a tratar el concepto homotecia. Las representaciones del objeto semejanza se dan en un lenguaje natural, figural y simbólico. Aparecen situaciones de cálculo (encontrar escalas); situaciones de construcción (aplicar isometrías y homotecia a una figura dada); identificación de relaciones (encontrar el centro de la homotecia).

Una última aparición de la semejanza en el currículo colombiano es en los grados escolares 8º y 9º; en este caso, se presenta desde una aproximación intrafigural, donde aparece el teorema de Thales, junto con los criterios de semejanza y todas las proporciones que se relacionan con estos (presentados en la sección 2.1.2.1, cuando se demostraron los criterios de semejanza). Las representaciones usadas son las simbólica, natural y figurativa, pero aparecen con más frecuencia esta última, específicamente, para representar los ángulos, congruencia, semejanza, triángulos, con sus respectivos símbolos matemáticos. Empiezan a aparecer las situaciones de demostración para justificar los criterios de semejanza, con sus respectivos argumentos; situaciones de identificación de relaciones, para justificar cuando dos triángulos son semejantes con los criterios de semejanza; y las situaciones de cálculo, para calcular longitudes de lados de los triángulos.

Esta mirada general del currículo colombiano será de gran importancia, porque nos permitirá generar criterios de evaluación de los videos y ubicarlos en un grupo de grados en especial. Pero también para generar en la sección 3.1.1. las etiquetas de búsqueda, que nos permitirá escoger los videos a evaluar.

2.2.2 Idoneidad didáctica

La reflexión sobre la práctica docente, es un punto clave para el crecimiento profesional y potenciar la enseñanza. En este camino se encuentran diversos estudios, mostrados en (Breda y Font, 2018), sobre didactica matemática que permiten este ejercicio y entre ellos se encuentra el constructo idoneidad didáctica propuesto desde el Enfoque Onto-Semiótico -EOS- (Godino 2013), que es utilizado como herramienta metodológica para el ejercicio de la reflexión docente. La idoneidad didáctica muestra el nivel en que un proceso de instrucción tiene ciertos rasgos que permiten calificarlo como apropiado entre los significados personales del alumno y los institucionales.

Para esto se tiene en cuenta de manera sistémica, articulada y coherente seis dimensiones o facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional), para las cuales Godino (2013) plantea una serie de criterios generales en los que un proceso de instrucción se puede concebir de calidad.

Dada las características de este estudio, no será analizado un proceso de instrucción directamente, porque no se van a mirar prácticas de un docente en el aula de clase; por tanto, no se tendrán en cuenta todas las facetas mencionadas (Beltran-Pellicier, Giacomone, y Burgos, 2018). Por esta razón solo nos centraremos en la faceta epistémica, porque es la que nos proporcionará las herramientas necesarias para mirar el nivel del contenido matemático de un video.

En ese sentido, vamos a adaptar, de manera similar a como lo hicieron Beltran-Pellicier, Giacomone y Burgos (2018) el su investigación, los criterios de idoneidad para análizar videos de YouTube, en este caso relacionados con el objeto semejanza. En lo que sigue, describimos el contructo idononeidad epistémica.

Faceta epistémica

El nucleo de este trabajo se va centrar en la faceta epistémica de los videos sobre el objeto semejanza de triángulo. Se considerara entonces que un Video tiene un buen nivel epistémico en la forma en que los contenidos pretendidos o implementados representan los de referencia en buena medida. Se logra encontrar que la actividad matemática se puede describir y analizar de acuerdo a unos objetos primarios, que forman una red de conocimiento y que se clasifican en las siguientes categorias e indicadores como se muestra en la Tabla 10 (Godino, 2013):

Tabla 10
Categorías de idoneidad epistémica de Godino.

Categorías	**Indicadores**
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Lenguajes u representaciones	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. • Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.

Situaciones problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Argumentos o Proposiciones	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas

Nota. Tomado de Godino 2013.

También tendremos en cuenta el trabajo de Breda y Font (2018), quienes hacen una adaptación de las categorias de idoneidad epistémica de Godino (2013), que encontramos en la Tabla 11.

Tabla 11 Categorías de idoneidad epistémica de Breda y Font.

Componentes	**Indicadores**
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión de los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones etc.).
Representatividad de la complejidad	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno (o varios significados parciales), se propone una muestra representativa de problemas. Para uno (o varios significados parciales), se hace uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), y de tratamientos y conversiones entre los mismos.

En la seccion 3.2, tendremos en cuenta estas dos tablas para crear criterios que nos permitan evaluar los videos.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Esta sección tiene varios elementos metodológicos del trabajo de grado de Suárez y Zubieta (2022); esto por dos razones: (i) ese trabajo de grado también tenía la intención de hacer un análisis de idoneidad epistémica de videos de YouTube empleando como referente el enfoque Onto-semiotico. (ii) Aquel trabajo, al igual que este, fue asesorado por el profesor Oscar Molina, por lo cual, la construcción metodológica siguió la misma línea orientadora indicada por él. En suma, la estructura de este capítulo contempla las mismas fases sugeridas por Suárez y Zubieta (2022), pero adaptadas al objeto de estudio que acá nos interesa: la semejanza de triángulos.

Esta sección se estructura de acuerdo con las siguientes fases: En la primera, se precisa el procedimiento para seleccionar los videos que sirvieron de muestra para hacer el estudio; en ese sentido, se explicitan las etiquetas de búsqueda que se usaron, los tipos de filtro para escoger los videos, y la ubicación de los videos que finalmente se seleccionaron para el análisis. En la segunda, se presentan los criterios de Idoneidad Epistémica, con sus descriptores adaptados al objeto semejanza de triángulos, que se usaron como herramienta analítica para estudiar los videos. En la última fase se presenta el procedimiento con el cual se estableció la idoneidad epistémica de cada video y la manera como el análsis se presenta en el Capítulo 4.

3.1 Fase 1 del análisis: determinación de los videos para analizar

En esta fase destacamos los criterios que se tuvieron en cuenta para seleccionar los videos de YouTube sobre el objeto semejanza de triángulos. En una primera etapa establecimos las etiquetas de búsqueda en la plataforma. En la segunda etapa establecimos los filtros de búsqueda mediante los cuales se decantaron los videos más populares para ser analizados. De acuerdo con las etiquetas de búsqueda y filtros establecidos, en la tercera etapa escogimos los videos a los cuales se les hizo el análisis.

Etapa 1. Etiquetas de búsqueda**:** En esta etapa determinamos las palabras claves sobre la semejanza de triángulos que nos sirvieron de base para hacer la búsqueda de los videos en la plataforma YouTube; para esto tuvimos en cuenta las aproximaciones conceptuales descritas en la sección 2.1.1. En la Tabla 12, mostramos las palabras claves con su respectiva aproximación.

Tabla 12.
Etiquetas de búsqueda, de acuerdo con la aproximación que corresponde

Aproximación	**Etiqueta**
Intrafigural	Explicación de semejanza de triángulos
	Propiedades de la semejanza de triángulos
Transformacional	Homotecia y semejanza
Útil	Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Etapa 2. Filtros de búsqueda: El fin de este trabajo de grado contempla el análisis de los vídeos de YouTube que hacen referencia a la semejanza de triángulos. Al igual que otros repositorios de información de multimedia, la búsqueda en YouTube se hace por medio de una interfaz donde el usuario ingresa las etiquetas que describen los vídeos a buscar. Los resultados se muestran con un filtro predeterminado de búsqueda (relevancia), y una imagen representativa que acompaña cada resultado.

Los filtros de YouTube permiten al usuario acotar el contenido de la visualización de tal manera que centra su atención en los videos de acuerdo con los intereses del usuario. Estos filtros se dividen en 5 categorías: Fecha de subida, que muestran los videos que se subieron a la plataforma en una fecha específica o en un intervalo de tiempo específicos; tipo de búsqueda, si lo que se quiere es buscar una lista de reproducción, videos, canales o películas; duración, que filtra de acuerdo a la duración de los videos; características, que filtra de acuerdo a la calidad, ubicación o si es un video de pago; ordenar, que muestra los resultados de la búsqueda según su relevancia, número de visualizaciones o puntuación.

Para acotar los videos, utilizamos dos filtros que pertenecen a la categoría *ordenar*; ello porque da cuenta de los videos más populares en la plataforma: (i) El de relevancia, que es predeterminado por el buscador; este filtro muestra los videos de acuerdo con la popularidad del canal en el que fue publicado y tiene en cuenta factores como número de videos publicados, cantidad de suscriptores, número total de reproducciones del canal, minutos totales reproducidos del video, número de me gustas, etc. (ii) Número de vistas del video, tiene en cuenta el número de veces que el video fue visto (Valentina, 2016).

Etapa 3. Determinación de datos del estudio: En la Tabla 13, presentamos el nombre de los videos seleccionados, dos por cada etiqueta (descritas en la etapa 1), de los cuales uno se escogió por el filtro de relevancia y el otro por el filtro número de vistas.

Para los dos filtros escogimos el primero de la lista, con lo cual tuvimos un total de 8 videos. En esta búsqueda de videos, nos dimos de cuenta que con las etiquetas "Explicación de la semejanza de triángulos" y "Propiedades de la semejanza de triángulos", los resultados eran bastantes similares. Por lo tanto, con la primera etiqueta decidimos escoger únicamente aquellos videos que explicaban el concepto de semejanza de triángulos sin mencionar algún hecho geométrico relacionado; y para la segunda etiqueta, decidimos escoger aquellos videos que trataran los hechos geométricos relacionados con el objeto matemático en cuestión (criterios de semejanza, teorema fundamental, etc.). De esta manera, si coincidía en el primer lugar de algunos de los dos filtros de la etiqueta el video con los criterios antes mencionados, buscábamos el siguiente de la lista, hasta encontrar el video con las condiciones requeridas.

Tabla 13.
Videos asociados a la semejanza de triángulos

Filtro / **Etiqueta**	Relevancia	Número de vistas
Explicación de la semejanza de triángulos	https://youtu.be/4MxChkgm370	https://youtu.be/vJKoHUV3bKQ
Propiedades de la semejanza de triángulos	https://youtu.be/eoSvj4BbC7U	https://youtu.be/g_c0c1b4rlA
Propiedades de la homotecia de triángulos	https://youtu.be/64dcdVwXL3w	https://youtu.be/VadYSpDYHk4
Aplicaciones de la semejanza de triángulos	https://youtu.be/96Bo6atQSiQ	https://youtu.be/oJgduuu1Gw0

3.2 Fase 2 del análisis: precisión de los criterios de idoneidad y sus descriptores.

Esta segunda fase tuvo como finalidad adaptar los criterios de idoneidad epistémica de análisis de videos, propuestos por Suárez y Zubieta (2022). Para esto, creímos pertinente precisar, antes de analizar los videos, los objetos primarios (Tabla 14) que pueden aparecer en cada uno de los videos; esto nos permitió tener una mirada orientadora para dicha adaptación.

Tabla 14.

Tipos de objetos primarios relacionados con la semejanza de triángulos

Tipos de objetos primarios		Objetos
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones	• Definición de semejanza de acuerdo con alguna de sus dos aproximaciones. (Transformacional -*tr*- o intrafigural -*int*-)
	Proposiciones	• Objetos relacionados con la semejanza de triángulos. Lados correspondientes proporcionales-*lcp-,* ángulos correspondientes congruentes -*acc-.* • Objetos relacionados con el teorema de Thales -*Tha*- y (e.g., paralelismo, ángulos correspondientes congruentes, proporcionalidad). • Objetos relacionados con la homotecia -*hom*- (e.g., razón de homotecia -*rhom*-, lados homólogos paralelos, centro de la homotecia -*chom*-, colinealidad entre puntos) • Teoremas derivados de la semejanza (e.g., Teorema de Pitágoras, Teorema de la bisectriz para triángulos, criterios de semejanza)
	Procedimientos	• Uso de operaciones aritméticas, procedimientos de construcción de objetos geométricos
Lenguajes/representaciones		• Lenguaje natural -*lna*-, figurativo -*lfi*-, simbólico -*lsim*- y dinámico -*ldi*- (e.g., uso de símbolos de paralelismo y ángulos congruentes en representación figurativa, uso de software dinámico para representar semejanza, expresiones verbales en una explicación, representaciones simbólicas sobre relaciones entre objetos).
Situaciones problemas		• Cálculo -*scal*- • Demostración -*sdem*- • Construcción -*scon*- • Identificación de relaciones -*side*-
Argumentos		• Verificación de propiedades • Demostración de propiedades

Luego de haber establecido objetos primarios sobre semejanza de triángulos que podrían aparecer en los videos –los cuales están sustentados con los referentes conceptuales–, adaptamos a continuación los criterios de idoneidad epistémica de acuerdo con estos objetos primarios.

Lenguajes/Representaciones

L1. Usa representaciones gráficas, simbólicas o numéricas: Las representaciones deben informar ostensiblemente sobre las propiedades implicadas. (e.g., los lados proporcionales deben verse proporcionales; los ángulos congruentes deben verse congruentes, y tener las marcas que indican congruencia; los lados paralelos deben verse como tal, y contar con las marcas que indican paralelismo. En cualquiera de los dos últimos casos, si las marcas no están, la verbalización o representación escrita –simbólica o lenguaje natural– debe indicar tales propiedades).

L2. Usa diferentes tipos de representación: Emplea representaciones de tipo verbal, escrita, gráfica, simbólica matemática y geométrica, y hay coordinación entre ellas; (e.g., las representaciones escritas se acompañan de representaciones gráficas o simbólicas correspondientes para comunicar de mejor manera una idea; las representaciones tienen que concordar entre sí, las notaciones tienen que ser idóneas de acuerdo con sus representaciones gráficas y simbólicas).

L3. Usa una expresión verbal o escrita: Hay correspondencia entre el significado del teorema y las expresiones (verbales o escritas) usadas. (e.g., si usa el teorema de Thales para triángulos, usa un triángulo el cual es intersecado en dos lados diferentes por una recta que es paralela a un tercer lado, y no usa dos triángulos en configuración de homotecia para explicar este teorema.)

Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)

D1. Enuncia adecuadamente la definición de semejanza: Es clara su distribución condicional, las condiciones del antecedente y las propiedades del consecuente desde cualquiera de sus aproximaciones (intrafigural y transformacional).

D2. Formula las definiciones de objetos claves relacionados.

Du1 Usa las definiciones. Estas se corresponden de manera correcta con los procedimientos o explicaciones involucrados.

P1. Enuncia las proposiciones involucradas: Se explicitan antecedente y consecuente de proposiciones (propiedades de objetos) claves relacionados.

Pu1. Usa proposiciones matemáticas (*e.g.*, para sustentar hechos geométricos o para llevar a cabo procedimientos).

Pr1. Enuncia un procedimiento de manera explícita (*e.g.,* se desea hallar la razón de la homotecia de dos triángulos, haciendo uso de la definición de semejanza desde la aproximación transformacional).

Pr2. Presenta de manera explícita acciones que vislumbran un procedimiento (*e.g.*, aquellas que permiten hacer un argumento a partir de la transformación de objetos).

Pru1. Usa procedimientos matemáticos (*e.g.*, aquellos necesarios para simplificar una expresión hasta lograr la deseada).

Argumentos

A1. Presenta argumentos mediante los cuales se sustentan los diferentes teoremas que se relacionan con la semejanza de triángulos, o algún procedimiento llevado a cabo.

A2. Sustenta las aserciones involucradas: Se explicitan las garantías que sustentan aserciones en el marco de una demostración de los teoremas asociados a la semejanza de triángulos o un procedimiento.

A3. Alude a diferentes tipos de argumentos.

Situaciones/Problemas

S1. Articula situaciones meramente matemáticas: A esta pertenecen todas las situaciones de problema que tienen que ver con cálculo, demostración, construcción e identificación de relaciones. No se articula ninguna situación problema extramatemática.

S2: Articula situaciones meramente extramatemáticas: estas se presentan en la resolución de problemas en contextos de la vida real.

S3: Presenta situaciones extramatemáticas y matemáticas.

Tabla 15.
Indicadores de Idoneidad Epistémica de los principales Objetos Primarios asociados a la semejanza de triángulos

Objeto Primario	Código	Indicador
Lenguajes/ Representaciones	L1	Usa representaciones gráficas, simbólicas o numéricas
	L2	Coordina diferentes tipos de representación
	L3	Usa una expresión verbal o escrita
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	D1	Enuncia a la definición de semejanza
	D2	Enuncia las definiciones de objetos claves relacionados.
	Du1	Usa las definiciones
	P1	Enuncia las proposiciones involucradas
	Pu1	Usa proposiciones matemáticas
	Pr1	Enuncia un procedimiento de manera explícita
	Pr2	Presenta de manera explícita acciones que vislumbran un procedimiento
	Pru1	Usa procedimientos matemáticos

Argumentos	A1	Presenta argumentos mediante los cuales se sustentan los teoremas relacionados con la semejanza de triángulos.
	A2	Sustenta las aserciones involucradas
	A3	Alude a diferentes tipos de argumentos
Situaciones/ Problemas	S1	Situaciones en contexto meramente matemático.
	S2	Situaciones en contexto extramatemático.
	S3	Presenta situaciones extramatemáticas y matemática.

Nota. Adaptado de Suáres y Zubieta, 2022.

Para complementar las herramientas de análisis, tomamos los componentes de idoneidad epistémica de Breda *et al.* (2018), descritos en la Tabla 11, los cuales fueron adaptados por Suáres y Zubieta (2022); estos, si bien tienen en cuenta los objetos primarios, se centran en las categorías *errores*, *ambiguedades*, *representatividad* y *riqueza de procesos*.

Al mencionar "errores", se propone indagar en aquello que es adecuado, lo que en un sentido más profundo conlleva a analizar lo que es inadecuado, por la falta de lo adecuado. Cuando nos referimos a "ambiguedades" (ideas que conducen a una confusión), proponemos indicadores que se refieren al uso adecuado de una variedad de objetos del mismo tipo. En este aspecto, por ejemplo, centramos nuestra mirada en detrminar que, si los videos están cetrados una cierta concepción (intrafiguiral o transformacional), esta se mantenga a lo largo del video; si por algún motivo la concepción cambia, se espera que ello se enucie explícitamente. Por ejemplo, si se define la semejanza desde lo intrafigural, los ejemplos no pueden aludir a la homotecia y viceversa.

Cuando nos referimos a representatividad, tenemos en cuenta dos tipos: La primera (R1), cuando en un video se aborda la semejanza de triángulos desde diferentes aproximaciones. Consideramos que el video adquiere una mayor idoneidad en este tipo de representatividad cuando, por ejemplo, trata la semejanza de triángulos desde una aproximación intrafigural o transformacional y, además, usa la aproximación útil con algún ejercicio de contexto para complementar el objeto matemático. No consideramos conveniente que en un mismo video se mezcle la aproximación intrafigural con la transformacional, a menos que se explicite su coveniencia. Un segundo tipo de representatividad a considerar (R2), es cuando el video se concentra en una sola aproximación, pero en medio de ella, hay variedad. Consideramos que el video adquiere una mayor idoneidad, cuando explora desde una sola aproximación o etiqueta (*e.g.,* Explicación de semejanza de triángulos, propiedades de la semejanza de triángulos, aplicaciones de la semejanza de triángulos) hay variedad de aspectos que se contemplan (*e.g.*, varias maneras de explicar la semajanza, varios tipos de aplicaciones o usos de la semejanza de triángulos, varias propiedades claves relativas a la semejanza de triángulos).

En la Tabla 15, presentamos un resumen de los Componentes de Idoneidad Epistémica, sus respectivos Descriptores y el Código correspondiente; además, de los códigos de los indicadores asociados a cada componente. De las Tabla se infiere que si durante la codificación hubo un indicador cuya práctica asociada fue adecuada se puso el codigo del indicador sin ningún complemento (dada la descripición misma del código, la cual está hecha para acciones o sucesos adeacuados); si es inadecuada el código del indicador se complementó con P o I, según el caso (e.g., L1(P)); si se observó alguna ambigüedad, el código del indicador se complementó con G (e.g., L2G); finalmente, si se observó alguna representatividad, el código del indicador se complementó con T (e.g., L2T).

Tabla 16.
Componentes, Descriptores e indicadores de Idoneidad Epistémica asociados a la semejanza de triángulos.

Componentes	Código	Descriptores	Indicadores asociados
Practicas Adecuadas, parcialmente adecuadas o Inadecuadas	P	Se observan prácticas que se no se pueden considerar adecuadas o inadecuadas, en su totalidad, desde el punto de vista matemático.	L1, L2, L3, D1, D2, Du1, P1, Pu2, Pr1, Pr2, Pru1, A1, A2, A3, S2
	I	Se observan prácticas que se consideran inadecuadas desde el punto de vista matemático.	
Ambigüedades	G	Se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión de los estudiantes.	L2, L3, D2, A3, S2
Representatividad	R	Se observa variedad en las Aproximaciones o variedad de objetos de un solo tipo (representaciones, concepciones, proposiciones, situaciones argumentos).	L1, L2, A3, S1, C1, C2

Nota. Adaptado de Suáres & Zubieta, 2022.

3.3 Fase 3 del análisis: análisis por indicadores de idoneidad epistémica de los videos

En esta tercera fase decidimos la forma en que se presentaron los análisis y, por supuesto, se llevó a cabo el análisis de los videos, usando las herramientas analíticas antes descritas. Específicamente, el análisis para cada video se presenta por medio de una tabla, en la cual se tiene en cuenta cuatro elementos para su elaboración: Identificación del video, descripción general, objetos primarios representativos, y codificación de los criterios de idoneidad con la explicación de la codificación.

A continuación de describe la composición de la tabla de análisis. En las primeras celdas se consigna lo referente a la *Identificación del video*: etiqueta de búsqueda, enlace, título del video e intencionalidad y objetos primarios representativos. En la celda siguiente, *Descripción general*, se presenta una descripción panorámica del video de forma que el lector pueda hacerse una idea de lo que está presente en el mismo. En las celdas siguientes, todas bajo el título *Análisis de Idoneidad Epistémica*, se exponen aquellos elementos que se consideran representativos de lo que está sucediendo en el video para hacer el análisis; para ello, pusimos capturas de pantalla o transcripciones de los elementos representativos que se consideran dignos de comentar, indicando entre paréntesis su cronología; para cualquier de estos dos casos se hace una breve descripción de lo que está sucediendo en ese momento del video, de manera tal que el lector tenga un contexto del análisis que se va a presentar enseguida. Después se presenta el análisis de los videos a la luz de los indicadores y componentes de Idoneidad Epistémica haciendo uso de las herramientas analíticas, esto es, de los códigos que están puestos en las Tablas 14 y 15. Finalmente, en la última celda se presenta una *Síntesis del Análisis* de Idoneidad Epistémica con respecto a los Objetos Primarios Representativos identificados.

A continuación, en la Tabla 17 presentamos el modelo de tabla que se usa para presentar los análisis.

Tabla 17.
Modelo para presentar el análisis de los videos.

Identificación del video	**Etiqueta de búsqueda**	Se pone según la Tabla 12.	**Enlace**	Se pone según la Tabla 13.
	Título del video	Se pone textualmente como se encuentra en YouTube	**Intencionalidad**	Se pone según la Tabla 13
	Objetos primarios representativos	Se explicitan los objetos primarios en los que se centra el video		

Descripción general	Se pone una breve descripción general del video según los componentes técnicos expuestos en la Sección 2.1 y las Aproximaciones que aborde.
Análisis de Idoneidad Epistémica	
Se pone descripción de lo que sucede en un momento determinado. Se pone Captura de pantalla o transcripción del momento, indicando el lapso en que ello ocurre entre paréntesis rectangulares. Se pone análisis según indicadores expuestos en las Tablas 14 y 15.	
Síntesis del Análisis	
Se pone un breve balance general del Análisis de Idoneidad Epistémica realizado.	

Nota. Tomado de Suáres y Zubieta, 2022.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DEL ANÁLISIS DE VIDEOS

4.1 ANÁLISIS

En esta primera sección presentamos los 8 análisis realizados según la metodología, reportada en el capítulo 3, organizados en las Tablas 18 a 25. A continuación, los análisis:

Tabla 18.
Análisis del video No. 01

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Explicación de la semejanza de triángulos</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/4MxChkgm370</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Figuras semejantes Súper fácil - Semejanza Para principiantes</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Aproximación intrafigural.
Lenguaje natural, simbólico y figurativo.
Situaciones de cálculo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video es presentado por un avatar que emula características humanas; este aparece durante periodos cortos y es quien explica el tema de semejanza de figuras planas, haciendo uso de representaciones gráficas, y un lenguaje natural. El video utiliza recursos de multimedia, para presentar el objeto matemático en cuestión y hacer la animación del ávatar. La semejanza es abordada desde una aproximación intrafigural.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de idoneidad epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:18 – 00:37]: El avatar presenta la definición de semejanza con un lenguaje muy natural, sin presentar alguna representación gráfica para ilustrar lo que el ávatar verbaliza. En este lapso él afirma lo siguiente:

En matemáticas, cuando hablamos de semejanza, nos referimos a figuras que tiene la misma forma, pero diferente tamaño. Las características de las figuras semejantes tienen misma forma, mismos ángulos y medidas proporcionales.</td></tr>
</table>

La captura de pantalla Figura 14 muestra lo que aparece en el video cuando se dice lo anterior.

Figura 12.
Captura de pantalla I del video 01

D1: Presenta la definición de semejanza desde la aproximación intrafigural; esto porque muestra la definición de semejanza con dos condiciones necesarias para hablar de semejanza, lados congruentes proporcionales -*lcp*- y ángulos correspondientes congruentes -*acc*-.

L2 (I): La representación escrita pretende exaltar las propiedades más importantes en la definición de semejanza con respecto a lo que oralmente el avatar menciona. En suma, es una representación escrita que pretende enfatizar lo que oralmente se dice. Esto indica una intención de coordinar representaciones (escrita y oral) pese a lo impreciso de lo que se comunica.

L3(I): Decimos que no hay un lenguaje verbal (*lna*) adecuado para presentar esta definición porque: en primer lugar, cuando habla de figuras se puede referir a figuras curvas, en las cuales, pueden existir figuras en las que no es posible distinguir los ángulos, por esta razón, parece ser que se refiere a polígonos, aunque no lo aclara en algún momento. En segundo lugar, las condiciones para la semejanza son presentadas de manera inadecuada, porque cuando presenta la primera condición para que se dé la semejanza, el avatar dice "mismos ángulos", lo que se puede interpretar como que las figuras comparten un ángulo o todos los ángulos, y en consecuencia sería la misma figura. Cuando menciona la segunda condición (medidas proporcionales), no es claro si ella se refiere a que las medidas de los ángulos son las que deben ser proporcionales o si esa proporcionalidad se refiere a las medidas de los lados.

[00:38 – 01:15] Se muestra la semejanza entre dos cuadrados como ejemplo. Omitiremos este fragmento porque no es de nuestro interés de análisis.

[01:16 – 01:57]: El avatar continúa con un ejemplo de triángulos semejantes (Figura 15), mediante el cual se pretende ilustrar el cumplimiento de las dos condiciones del antecedente: lados congruentes proporcionales -*lcp*- y ángulos correspondientes congruentes -*acc*-. En este fragmento del video ilustra el cumplimiento de la segunda condición (*acc*):

> Como vemos, los triángulos tienen la misma forma; lo segundo, es que tienen los mismos ángulos. Este ángulo de aquí mide 90º [símbolo de ángulo recto, figura de la izquierda], al igual que este ángulo de aquí [símbolo de ángulo recto, figura de la derecha]; este ángulo de aquí mide 40º [símbolo de ángulo, figura de la derecha], al igual que este ángulo de aquí [símbolo de ángulo estándar, figura de la izquierda], que también mide 40 grados; por último, el ángulo que queda en cada figura mide 50 grados, al igual que este ángulo de aquí [símbolo de ángulo estándar]. Por lo tanto, se cumple la característica de ángulos iguales.

Figura 13.

Captura de pantalla II del video 01

Ahora vamos a ver sus medidas proporcionales: la figura de la derecha es tres veces más grande que la figura pequeña: este lado mide 4 cm y su homólogo que es el mismo lado, pero en la figura semejante mide 12; sí, es el triple. Ahora, este lado que mide 3 y su homólogo mide 9 cm, que, si te fijas bien, es el triple; y este lado que mide 5 cm que, si te fijas bien, tiene un homologo que tiene 15. Esto quiere decir que se cumple con la última característica, de que sus medidas son proporcionales, porque una figura es tres veces más grade que la otra. Cuando hablamos de lados homólogos, nos referimos a los mismos lados en figuras semejantes.

Figura 14.

Captura de pantalla III video 01

S1: Se presenta una situación meramente matemática, en la cual hay que identificar (*side*) si la razón de los lados correspondientes de los dos triángulos es la misma.

Du1: Usa los dos antecedentes de la definición de semejanza ángulos congruentes correspondientes -*acc*- y lados correspondientes proporcionales-*lcp* para indicar la semejanza de los triángulos.

A1: Lo anterior deja ver que el expositor platea un argumento mediate el cual se infiere que los triángulos son semejantes.

A2: El expositor sustenta lo anterior usando como garantía la condición de proporcionalidad de lados (*lcp*) y como dato las condiciones dadas (medida de los lados).

Pr1(I): No se enuncia de manera explícita el procedimiento para hallar las razones entre lados correspondientes.

Pr2(P): No se muestra de manera explícita cual fue el procedimiento para afirmar que la razón de semejanza es 3. Solo dice que un lado es el triple de otro, sin mostrar el procedimiento con el cual se consiguió esta razón de semejanza.

L1(I): Hay una inadecuada representación gráfica y simbólica, porque no nombra los ángulos con sus respectivas letras, no marca la congruencia de los ángulos y tampoco representa numéricamente el valor de los ángulos; solo lo dice verbalmente. Producto de no nombrar los vértices del triángulo, no nombra sus lados y, en consecuencia, no se representa simbólicamente los lados proporcionales. Por ejemplo, la representación simbólica adecuada para los lados proporcionales hubiera podido ser: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ó $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$.

L3(P): Tiene una inadecuada expresión verbal, porque al no tener representados los ángulos de manera adecuada, utiliza expresiones como "el ángulo de aquí" o "el ángulo que queda" para indicar los ángulos a los cuales quiere relacionar mediante la congruencia. Por último, no se explicita que los ángulos relacionados son correspondientes –condición necesaria de la semejanza–; así mismo, hay una imprecisión por cuanto se alude a ángulos iguales (lo que indicaría objetos geométrico-iguales) y no a ángulos congruentes o ángulos de igual medida. En suma, el lenguaje no es especializado. Hay que rescatar como afortunado que utiliza una expresión relacionada a la de "lados correspondientes", la cual es "lados homólogos". Pero al no nombrar correctamente los puntos de los triángulos, las expresiones utilizadas para nombrar los lados de los triángulos como "este lado de aquí" o "el lado que mide 3" no son matemáticamente correctas. No se usa el término de razón, para hablar del cociente entre los lados correspondientes. Además, se refiere a medidas proporcionales sin explicitar a qué medidas se refiere; en ese sentido, sería afortunado o bien decir lados proporcionales o bien medidas de los lados proporcionales.

L2(I): Al no haber una adecuada representación gráfica y al no presentar de manera idónea, la coordinación entre la representación gráfica y la escrita es confusa. Esto porque no es claro la correspondencia entre los ángulos congruentes; hay que basarse en la posición estándar de las representaciones gráficas para inferirlo.

L3(I): La proposición "la figura de la derecha es tres veces más grande que la figura pequeña" es imprecisa; se podría cuestionar si considerar que los lados de un triángulo midan el triple de los correspondientes del otro implica que la figura grande es tres veces mayor que la figura pequeña; esto último podría referirse a la cantidad de área, por ejemplo. Por ello, habría cierta ambigüedad en la afirmación.

[02:51 – 04:15]: El avatar muestra una situación de cálculo (Figura 17) en la que, a partir de dos triángulos semejantes, hay que encontrar la medida de los lados de los triángulos. El avatar afirma lo siguiente:

> Aquí tengo dos triángulos que son semejantes: el más grande tiene medidas de 8, 10 y 6 cm; y el más pequeño solo tiene una medida de 5 cm. Para saber la medida de los lados que me faltan, tengo que sacar un factor o razón; esto se logra dividiendo lados homólogos. Así que reviso el lado homólogo de 6 y veo que no tiene valor, el lado homólogo de 8 tampoco, pero el lado homólogo de 10 si tiene y es 5. Así que lo que voy a hacer es dividir el más grande y el más pequeño, en este caso 10 cm entre 5 y me da como resultado 2. Esto quiere decir que

la figura de la derecha es dos veces más pequeña que la más grande, así que ya puedo obtener todos mis datos para comprobar. Divido 10 entre 2 y me da como resultado 5, ya viste, es correcto. Ahora, para obtener el valor del lado homólogo de 8, también lo divido entre 2, que es mi factor y me da como resultado 4. Y para obtener el valor del lado homólogo de 6, dividido en nuestro factor que es 2 y 6 entre 2, me da como resultado 3, esto quiere decir que el lado homólogo de 6 mide 3 cm y así puedo obtener valores en figuras semejantes. ¡Facilísimo!, ¿verdad?

Figura 15.
Captura IV video 01

S1: Se plantea una situación problema en contexto meramente matemático, de una situación de cálculo (*scal*).

Du1: Usa de manera adecuada una parte de la definición, lados correspondientes proporcionales (*lcp*), para resolver la situación de cálculo (*scal*).

A1: El expositor plantea un argumento mediante el cual calcula las medidas de los lados faltantes del triángulo pequeño, a través del cálculo de la razón de la semejanza de las medidas de los lados correspondientes que se tienen como dado, y con esta calcula las medidas de los lados faltantes del triángulo pequeño.

A2: Lo anterior lo sustenta teniendo como garantía la condición de la definición lados correspondientes proporcionales (*lcp*).

Pr2(P): Muestra de manera verbal (*lna*) el procedimiento para hallar la razón de los triángulos semejantes, y el cálculo de las medidas de los lados faltantes. Pero no muestra con un lenguaje simbólico (*lsim*), el procedimiento para hallarlo.

L1(I): Usa de manera inadecuada las representaciones gráficas y simbólicas. No nombra los vértices de los triángulos con su respectiva letra. En consecuencia, no hay una representación simbólica de la semejanza (por ejemplo, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$), con lo cual no se indica claramente cuáles son los lados homólogos o correspondientes. Pareciera que solo la representación gráfica, en la que los triángulos se ponen en una posición estándar es suficiente para ello. Vale indicar que ello puede generar un obstáculo cognitivo por cuanto el observador puede pensar que las figuras semejantes deben estar en esa posición siempre, lo cual, no necesariamente es cierto.

L3 (P): Usa de manera parcialmente adecuada una expresión verbal. En esta ocasión el avatar utiliza la expresión “lados homólogos” para referirse a los lados correspondientes, lo cual es afortunado. Pero al nombrar los lados, los representa de acuerdo con la medida, por ejemplo, nombra a un lado “el lado 6”, refiriéndose al lado que mide 6 cm. Esto es desafortunado, porque puede generar un obstáculo cognitivo, y hacer pensar que los lados de una figura se nombran con números.
Síntesis del análisis Los siguientes códigos son los más representativos del video: S1: Las situaciones que se presentaron fueron dentro de un contexto matemático, la primera de identificación de relaciones (*side*), y la segunda una situación de cálculo (*scal*). D2(I): No se enunciaron objetos claves relacionados, por ejemplo razón y proporcionalidad. Du1: Se usaron de manera adecuada las dos condiciones de la definición de semejanza, en cada una de las situaciones presentadas. D1: La forma de enunciar la semejanza de triángulos desde la aproximación intrafigural (*int)* fue adecuada, porque presenta las dos condiciones necesarias (*lcp* y *acc*) para que exista semejanza. Pr1(I): No fueron expuesto de manera explícita los procedimientos para hallar los lados faltantes de las figuras. El avatar decía verbalmente (*lna*) el procedimiento, pero no se comunicaba simbólicamente, ni con las garantías de la validez de cada paso. Por ejemplo, decía “este lado mide 4 cm y su homólogo que es el mismo lado, pero en la figura semejante mide 12; sí, es el triple”, muestra la razón de semejanza, pero no hay un procedimiento explícito que lo verifique; una expresión que advirtiera por qué es el triple hubiera sido deseable (e.g., $\frac{12}{4} = 3$ o $4 \times 3 = 12$). Pr2(P): Algunos procedimientos no fueron explícitos, como por ejemplo el de hallar la razón entre lados correspondientes, se nombraba verbalmente como realizaba el procedimiento, pero la representación simbólica no se presentaba de manera explícita. Pru1: Aunque no se muestra de manera explícita el procedimiento para calcular medidas faltantes y razones, el resultado fue correcto. A1: El expositor planteaba a la luz de la definición de semejanza desde la aproximación intrafigural (*int*). A2: En el marco de las situaciones presentadas en el video, el expositor sustentaba los argumentos teniendo como garantía las condiciones de la definición de semejanza (*acc* y *acp*). R2: Consideramos que el video muestra un tipo de representatividad R1, porque complementa la explicación sobre la semejanza de triángulos desde la aproximación intrafigural -*int-,* y usa parte de la definición para abordar una situación de cálculo. L1(I): Las representaciones gráficas estuvieron presentes a lo largo del video (*lfi)*; sin embargo, estas tuvieron varias falencias: no se nombraron los vértices de los triángulos; tampoco se usó la simbología correspondiente a la congruencia de los lados y de los ángulos bien sea de manera escrita o sobre la representación gráfica. L3(P): Aunque se puede entender lo que el avatar expone, las expresiones no eran afortunadas. Se usaban palabras que no corresponden a un lenguaje matemático adecuado como, “este lado de aquí”, “el lado que mide tanto” o “el mismo ángulo”. Así mismo, se usó la palabra “mismo ángulos”

para referirse a ángulos correspondientes congruentes. Aunque para lados correspondientes congruentes, en la mitad del video empezó a utilizar la expresión “lados homólogos” lo cual fue afortunado.

L2(I): Hubo una imprecisión en la comunicación de las ideas: se alude a la primera condición -*acc*- usando la expresión “mismos ángulos” y no ángulos congruentes o de igual medida; así mismo, alude a la segunda condición-*lcp*- usando la expresión medidas proporcionales sin aclarar a qué medidas hace referencia (inclusive, alguien podría pensar en comparar cantidad de superficie y no las medidas de los lados -que sería lo correcto-).

Tabla 19.
Análisis del video No. 02

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Explicación de la semejanza de triángulos</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/vJKoHUV3bKQ</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Semejanza de triángulos. Introducción y definición.</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Aproximación intrafigural.
Lenguaje natural, simbólico y figurativo.
Situaciones de cálculo.
Verificación de propiedades.
Identificación de relaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video es hecho a través de un software de animación que emula la mano de una persona con su lapicero escribiendo y dibujando todo lo que necesita para exponer el tema. En suma, el video utiliza recursos de multimedia, para presentar el objeto matemático en cuestión y hacer las animaciones.

Este video trata la semejanza desde una aproximación intrafigural y lo hace definiendo la semejanza desde un lenguaje natural y representaciones gráficas estáticas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de idoneidad epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:00 – 00:39]: Presentación del canal e introducción.

[00:40 – 00:54]: El expositor presenta la definición de semejanza desde la aproximación intrafigural y en esta presenta varios ejemplos de figuras que no son triángulos, por ejemplo, dibujos de carros que tienen la misma forma, pero diferente tamaño. En este lapso, afirma lo siguiente:

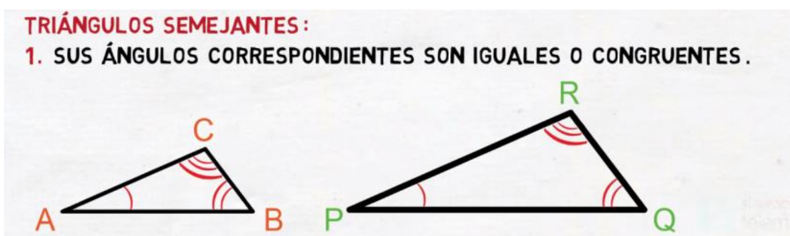
Para comenzar con el video, introduciremos lo que es la semejanza entre figuras, que se define como, tienen exactamente la misma forma, pero diferente tamaño. Por ejemplo [se presenta una imagen como la de la Figura 18].</td></tr>
</table>

Figura 16.
Captura I video 02

[00:55 – 01:54]: En este intervalo de tiempo se expone sobre la semejanza de dos triángulos desde la aproximación intrafigural, teniendo en cuenta la primera de las dos condiciones (ángulos congruentes correspondientes-*acc*-). Esta se apoya de una representación gráfica estática, en configuración separada. El expositor dice lo siguiente, acompaña lo que verbaliza con la imagen de la Figura 19:

> Ahora bien, veamos esta definición en las figuras que nos competen este video, que son los triángulos. En primer lugar, dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o congruentes. Por ejemplo: Tenemos el triángulo de vértices A, B y C; y el triángulo de vértices P, Q y R, donde la amplitud del ángulo A va a ser igual a la amplitud del ángulo P, la amplitud del ángulo B va a ser igual a la amplitud del ángulo Q, la amplitud del ángulo C va a ser igual a la amplitud del ángulo R".

Figura 17.
Captura II video 02



P1(I): El expositor afirma que "dos triángulos son semejantes, si sus ángulos correspondientes son iguales o congruentes". Evidentemente se está refiriendo al criterio AAA (con ello, se evidencia una aproximación intrafigural -*int*-); sin embargo, no lo enuncia de manera explícita como un hecho geométrico. Por tal motivo consideramos que la manera de presentar esta proposición es ambigua, porque no se entiende si se está aludiendo a la definición de semejanza o a un hecho geométrico.

Pu1: Usa adecuadamente el criterio de semejanza AAA, para inferir la semejanza de los triángulos involucrados.

Pr1(I): No enuncia con un lenguaje matemático (por ejemplo $\angle A \cong \angle P$) el procedimiento para identificar la relación de congruencia entre los ángulos correspondientes.

A1: Presenta un argumento, en el cual infiere la semejanza de los triángulos usando el criterio de semejanza AAA.

A2(I): Infiere la semejanza de los triángulos, pero no hay una garantía que lo sustente, esto se debe a que no presenta el criterio AAA como garantía.

S1: Presenta una situación de identificación de relaciones en un contexto meramente matemático.

L1: La representación gráfica es adecuada, porque nombra con letras mayúsculas los vértices de los triángulos con sus respectivas letras y los símbolos de congruencia para los ángulos correspondientes son representados de forma correcta.

L2 – L3: Siguiendo la idea presentada en la descripción del código anterior, se evidencia una adecuada coordinación entre lo que se habla y lo que se representa gráficamente.

[01:55 – 03:00]: En este fragmento del video, presenta otra condición *-lcp-,* para poder advertir la semejanza entre dos triángulos.

> Y en segundo lugar, dos triángulos son semejantes si los lados correspondientes son proporcionales; o sea, tenemos el triángulo de vértices A, B y C, y el triángulo de vértices P, Q y R, donde la longitud del lado AB es proporcional a la longitud del lado PQ; e igual a la longitud del lado AC, que va a ser proporcional a la longitud del lado PR; e igual a la longitud del lado BC, que va a ser proporcional a la longitud del lado QR. El símbolo que representa la semejanza es [aparece en la pantalla ~]. Luego, podemos concluir que el triángulo ABC es semejante al triángulo PQR.

Figura 18.
Captura III video 02

P1(I): El expositor afirma que “dos triángulos son semejantes si los lados correspondientes son proporcionales” con lo cual, se está refiriendo al criterio LLL de semejanza (con ello, se evidencia una aproximación intrafigural -*int*-); sin embargo, no lo enuncia de manera explícita como un hecho geométrico. Por tal motivo, como en el comentario anterior, consideramos que la manera de presentar esta proposición es ambigua, porque no es claro si se está aludiendo a la una definición de semejanza o a un hecho geométrico.

Pu1: Usa adecuadamente el criterio de semejanza LLL, para inferir la semejanza de los triángulos involucrados.

Pr1: Enuncia con un lenguaje matemático el procedimiento para identificar la relación de proporcionalidad de los ángulos correspondientes.

A1: Presenta un argumento, en el cual infiere la semejanza de los triángulos usando el criterio de semejanza LLL.

A2(I): Infiere la semejanza de los triángulos, pero no hay una garantía que lo sustente, esto se debe a que no presenta el criterio LLL como garantía.

S1: Presenta una situación de identificación de relaciones en un contexto meramente matemático.

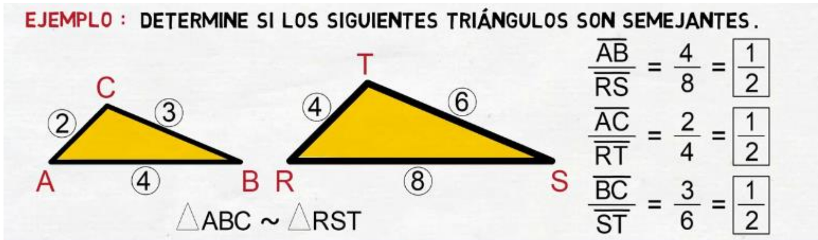
L1(P): Decimos que es parcialmente adecuada porque, al momento de representar las medidas de los segmentos proporcionales, las representa con el símbolo segmento. Por ejemplo, cuando dice "la longitud del lado AB" , lo representa simbólicamente con "$\overline{AB}$" lo cual no está bien, porque, este símbolo representa el segmento AB, no su medida. Hay que destacar que usa correctamente los símbolos para referirse a la semejanza de manera correcta –$\Delta ABC \sim \Delta PQR$, triángulo ABC es semejante con el triángulo PQR–; además, esta se corresponde con la representación simbólica de lados proporcionales $\left(\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}\right)$.

L3(P): Una parte de la expresión verbal no es adecuada por cuanto se dice que "la longitud del lado AB es proporcional a la longitud del lado PQ" lo cual es equivocado porque la proporción se puede caracterizar como una relación de igualdad entre dos razones, en la que cada razón involucra las medidas de dos pares de lados homólogos.

[03:01 – 05:27]: Esta parte del video se presenta una situación de identificación de relaciones -*side*- en la que se pretende verificar la relación de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos, como se muestra en la Figura 21.

> Ahora bien, veamos un ejemplo de esta definición. Determine si los siguientes triángulos son semejantes:
>
> Tenemos el triángulo de vértices A, B y C, cuyas longitudes de sus lados son 4, 3 y 2, respectivamente; y el Triángulo RST cuyas longitudes de los lados son 8, 6 y 4 respectivamente. Muy bien, como los datos que nos dan son las longitudes de los lados, entonces utilizaremos la segunda parte de la definición, o sea, estableceremos la proporcionalidad entre sus lados de la siguiente forma: el lado AB dividido por el lado RS, reemplazando los segmentos o cada una sus longitudes nos quedarían que esto va a ser igual a cuatro octavos, y simplificando esta fracción, nos quedaría que esto va a ser igual a un medio $\left[\frac{\overline{AB}}{\overline{RS}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\right]$. De forma similar estableceremos el lado AC dividido por el lado RT, reemplazando con sus longitudes nos quedaría dos cuartos y esto va a ser igual a un medio $\left[\frac{\overline{AC}}{\overline{RT}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right]$. Y por último el lado BC dividido por el lado ST, reemplazando por sus longitudes, nos quedaría que esto va a ser igual a tres sextos, y simplificando esto sería igual a un medio $\left[\frac{\overline{BC}}{\overline{ST}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right]$. Ahora bien, como los resultados entre la razón entre estos segmentos es el mismo, entonces, podemos decir que los lados del triángulo ABC son proporcionales a los lados del triángulo RST. Por lo tanto, podemos concluir que el triángulo ABC es semejante al triángulo RST [$\Delta ABC \sim \Delta RST$]. Y el valor obtenido se denomina razón de semejanza o factor de escala que es un medio $\left[\frac{1}{2}\right]$.

Figura 19.
Captura IV video 02



S1: El expositor propone una situación de identificación de relaciones (*side*), en el cual tiene que hallar la razón entre los lados correspondientes de dos triángulos y ver si son proporcionales.

A1: Presenta un argumento en el cual infiere la semejanza de dos triángulos usando como garantía el criterio de semejanza LLL.

A2(P): No sustenta de manera adecuada el argumento anterior, pues no es claro qué condiciones provee la definición de semejanza; en suma, no es claro si desde la definición es necesaria solo una condición para determinar semejanza (en este caso la proporcionalidad de los lados) o las dos (dicha proporcionalidad y congruencia de ángulos correspondientes).

P1(I): No enuncia el criterio de semejanza LLL, que es usado para resolver la situación de verificación de propiedades.

Pu1: Creemos que la forma de presentar la situación de verificación (*side*) de una semejanza se deja entender, porque la aserción es correcta, pues se usa el criterio de semejanza LLL para inferirla.

Pr1: Enuncia simbólicamente el procedimiento para encontrar la razón de los lados correspondientes de los triángulos, para determinar la proporcionalidad.

Pr2: Presenta de manera explícita el procedimiento para determinar la proporcionalidad entre los lados correspondientes, al determinar la razón de los lados correspondientes y encontrando la igualdad entre las razones.

L1(P): La notación simbólica (*lsim)* de la representación de medidas de segmentos no es la adecuada, dado el mismo error que se comentaba en el fragmento anterior del video (representa medidas de segmentos con la notación de segmentos), y por esto, la notación de razón entre medidas no es correcta, porque lo que está representado es razón entre segmentos, lo cual no es correcto si se está en un contexto donde la cantidad se representa por números. Usa correctamente la notación de semejanza de triángulos –$\Delta ABC \sim \Delta PQR -$ y coincide con la correspondencia de los lados proporcionales de la representación gráfica (*lfi*) y simbólica (*lsim*). Nombra de manera adecuada los vértices de las figuras.

L2(I): Como la representación simbólica (*lsim)* de medidas de segmentos y razón entre medidas se segmentos es inadecuada, entonces, lo que se dice, no coordina con lo que está representado simbólicamente (*lsim*).

L3(I): Al momento de establecer las razones entre los lados de los triángulos dice “el lado AB dividido por el lado RS”, lo cual no es correcto en un contexto donde la cantidad de longitud se indica con números. En este caso, la razón se obtiene al dividir datos numéricos y no segmentos.

Lo correcto sería decir “la medida del lado (o segmento) AB, dividido por la medida del lado (o segmento) RS”. Después dice “reemplazando los segmentos o cada una sus longitudes”, lo cual da a entender que segmento y longitudes podrían tener una misma naturaleza o se pueden manipular indistintamente.
Síntesis del análisis S1: El expositor propone situaciones de identificación de relaciones (*side*). La primera de identificación de la relación proporcionalidad de lados correspondientes; y la segunda, de identificación de relación de congruencia entre ángulos (*acc*). D1: Enuncia de forma genérica la definición de semejanza, misma forma, pero diferente tamaño. A1: El expositor presentaba argumentos mediante los cuales infería la semejanza de los triángulos. A2 (I): No se sustentó de manera correcta la semejanza de los triángulos. Se indicaba la relación de proporcionalidad de lados en un ejemplo y la relación congruencia de ángulos en el otro ejemplo, pero no se mostraba qué criterio garantizaba tal afirmación. P1(I): No se enunciaron los criterio de semejanza LLL y AAA, que fueron usados para resolver las situaciones presentadas en el video. Pu1: Creemos que la forma de usar los criterios fue correcta, esto se refleja en la resolución de las situaciones presentadas. Pr1(P): Se enunciaron simbólicamente (*lsim*) los procedimientos para hallar la relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes, pero cuando se refería a relación de congruencia entre los ángulos, no se presentaba de manera simbólica. Pr2: Los procedimientos para establecer las relaciones de proporcionalidad entre lados y congruencia de ángulos, fueron correctos. L1 (P): Las representaciones gráficas de los triángulos en todo el video fueron en la misma posición y pareciera que los lados correspondientes son paralelos; ello daría a entender que para que exista semejanza, las figuras tienen que mantener una misma posición, lo cual no es correcto. Se nombra con letras mayúsculas los vértices de los triángulos en de manera adecuada en todo el video, pero el uso de la representación gráfica(*lfig*) de congruencia para los ángulos correspondientes no se usa de manera consistente (en la Figura 19 se usa; en las Figuras 20 y 21 no se usa). Se usa correctamente la representación simbólica (*lsim)* de semejanza, como $\Delta ABC \sim \Delta RST$, pero la representación simbólica (*lsim)* de medida de segmento fue incorrecta. L2 (I): La forma de presentar la definición es ambigua, porque de su presentación es posible inferir que las dos propiedades no necesariamente están conectadas con un "y" sino con un "o". Por eso, se entiende desde la definición (no como criterios), que cuando se cumple una condición o la otra, se puede determinar que dos triángulos son semejantes L3: La representación de los vértices de los triángulos era la correcta, por tanto, cuando se nombraban los ángulos y los lados de manera verbal (*lna)* era coherente con lo que estaba representado *(lfi*). Había un error conceptual por parte del expositor en lo que refería a la representación de medidas de segmentos.

R1: Consideramos que el video muestra un tipo de representatividad R1, porque complementa la explicación sobre la semejanza de triángulos desde la aproximación intrafigural *-int-*, y la complementa con la aproximación útil, al proponer una situación de identificación de relaciones *-side-*.

Tabla 20.
Análisis del video No. 03

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Propiedades de la semejanza de triángulos</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/eoSvj4BbC7U</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Teorema de Thales - Semejanza de Triángulos</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Definición de semejanza desde la aproximación intrafigural.
Lados correspondientes proporcionales.
Ángulos correspondientes congruentes.
Teorema de Thales.
Paralelismo.
Ángulos correspondientes congruentes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video lo presenta una mujer que expone a modo de cátedra lo relacionado con el Teorema de Thales para triángulos. Esto lo hace con ayuda de un tablero y escribiendo con marcadores todo lo que necesita para exponer el tema.

El fin del video es presentar el teorema de Thales para triángulos. Antes de esto, el expositor retoma conceptos previos a este teorema, como la definición de semejanza desde la aproximación intrafigural con las dos condiciones necesarias (lados correspondientes proporcionales y ángulos correspondientes congruentes).</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
</table>

[00:16 – 01:22]: La expositora empieza haciendo una introducción de qué es semejanza, a la luz de dos caracterizaciones, para luego empezar con el teorema de Thales para triángulos. A continuación, expone la definición de figuras semejantes:

> Antes de empezar con el teorema de Thales, es necesario comprender qué significa semejanza. Dos figuras son semejantes, si teniendo diferente tamaño, tienen la misma forma. ¿Y eso cómo se consigue? Pues teniendo los lados proporcionales. Por ejemplo, las típicas figuritas de monumentos grandes. Por ejemplo, la Torre Eiffel tiene unas medidas que para hacerlas en la figurita y que sea la forma igual, hacen que los lados sean proporcionales, más pequeños, pero todos los lados siguen la misma proporción, eso son figuras semejantes.

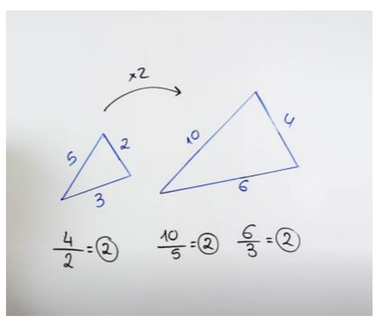
D1: Presenta una caracterización de semejanza de la siguiente manera: “Dos figuras son semejantes, si teniendo diferente tamaño, tienen la misma forma”. Consideramos que esta forma general de presentar la semejanza es adecuada en relación con la percepción, aludiendo a diferente tamaño y misma forma cuando hay semejanza entre dos figuras.

Du1: Usa de manera adecuada la definición (*lcp*), al tratar de operativizar la propiedad de proporcionalidad con el ejemplo de la torre Eiffel.

[01:22 – 03:10]: En este fragmento del video la mujer propone un método, para saber determinar cuando los lados de dos triángulos son proporcionales:

> Pues bien, en los triángulos pasa exactamente lo mismo, ¿que son dos triángulos semejantes? Dos triángulos que tienen la misma forma, pero el tamaño es diferente. ¿Cómo consigue eso? Haciendo los lados proporcionales. Vamos a ver un caso. Tenemos este triángulo pequeño y este grande para que sean proporcionales, por ejemplo, si este triángulo tiene estas medidas, este lado mide dos centímetros, este mide tres y este mide cinco [triángulo pequeño]. Vale, vamos a suponer que en este lado mide seis, diez y cuatro [triángulo grande]. No son las medidas reales, pero vamos a figurarnos que es así. Vamos a comprobar si son semejantes. ¿Cómo se hace? Vamos a ir comparando los lados correspondientes. Este lado se corresponde con este [el lado que mide cuatro con el que mide 2]. Pues hacemos una proporción y ponemos cuatro, el lado grande lo ponemos arriba, cuatro es a dos y vamos a ver qué nos da. Nos da cuatro entre dos, nos da dos. Vamos a ver, en este caso diez es a cinco. Ese lado [el lado que mide 10] es igual que este [el lado que mide 5], pero en la figura pequeña. Pues vamos a ver cuánto nos sale esta proporción. Diez es a cinco. Si divido, me sale dos y vamos a ver ahora este lado [Señala el lado que mide 3] de aquí abajo, seis es a tres. Dividimos y nos dos. Efectivamente, en todas estas divisiones nos ha dado el mismo número 2, 2 y 2. Eso es lo que en semejanza llamamos razón. ¿Y qué quiere decir eso? Que este triángulo es dos veces mayor que este. Por lo tanto ¿Qué he hecho? Todos los lados los he multiplicado por dos, para llegar a este triángulo. O del grande al pequeño, Los lados los divido entre dos. Para llegar a las medidas del triángulo pequeño. Como veis, estos son triángulos semejantes.

Figura 20.
Captura I Video 03.



P1(I): No se enuncia el criterio de semejanza LLL.

Pu1: Se usa el criterio de semejanza LLL para inferir que los triángulos son semejantes a partir de la medida de sus lados.

Pr1 (I): No enuncia el procedimiento para hallar la razón entre los lados correspondientes de los triángulos (por ejemplo $\frac{AB}{DE}$).

Pr2: Es explícito el procedimiento para mostrar que los lados son proporcionales, mostrando el procedimiento para hallar igualdad de razones entre los lados correspondientes de los triángulos.

Pru1: El procedimiento para encontrar la razón entre los lados es correcto.

A1: El expositor plantea un argumento mediante el cual infiere la semejanza de los triángulos, estableciendo la igualdad de la razón entre los lados correspondientes.

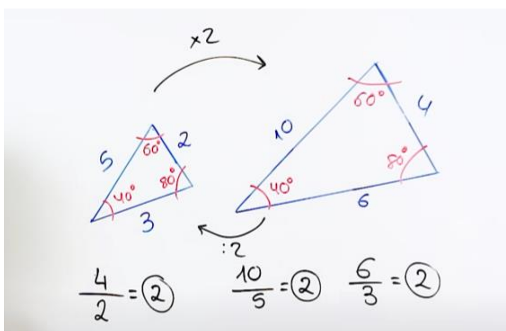
A2 (P): No presenta la garantía (criterio LLL) que permite validar el argumento presentado.

L1(P): No nombra con letras mayúsculas los vértices de los triángulos y, en consecuencia, no hay ninguna manera de nombrar simbólicamente los lados y los ángulos de los triángulos.

[03:25 - 03:55]: A continuación, la expositora agrega las medidas de los ángulos de los triángulos, como se muestra en la figura 23, para explicar que estas son iguales para los ángulos correspondientes:

> ¿Y qué les pasa con los ángulos? Los ángulos en los triángulos semejantes son iguales. Vale, en este caso imaginemos que este es 60 grados [ángulo triángulo de la derecha]. Este... vamos a poner que es 80. Y este es 40. Pues si este triángulo es semejante, sus ángulos correspondientes van a equivaler lo mismo, vale. Lógicamente, la suma de los ángulos tiene que ser 180. Los ángulos no siguen la razón. Vale. Imaginaos que multiplicamos por dos. No sería lógico, porque si multiplico por dos aquí sería 80. Si multiplico por dos, aquí sería 120. Y al sumar todos los ángulos, me va a dar mayor que 180. Ya sabéis que la suma de los ángulos de cualquier triángulo tiene que salir 180. Así que un dato más, los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, y los ángulos tienen que ser iguales.

Figura 21.
Captura II Video 03



D1: En este fragmento la expositora caracteriza las dos condiciones que se infieren cuando dos triángulos son semejantes (*acc* y *lcp*).

Du1: Usa adecuadamente la definición, porque logra inferir la semejanza de los triángulos.

A1: Presenta un argumento mediante el cual infiere la semejanza de los triángulos, usando la definición de semejanza de triángulos.

A2: Sustenta la semejanza de los triángulos, usando como garantía las condiciones de la definición de semejanza triángulos.

A3: Se presenta un argumento por contradicción, el cual dice, que en dos triángulos semejantes las medidas de los ángulos no se duplican (de manera más general, no son proporcionales con razón diferente de 1), mientras que sus lados sí. En medio del argumento se usa el Teorema 180, para sustentar dicha afirmación.

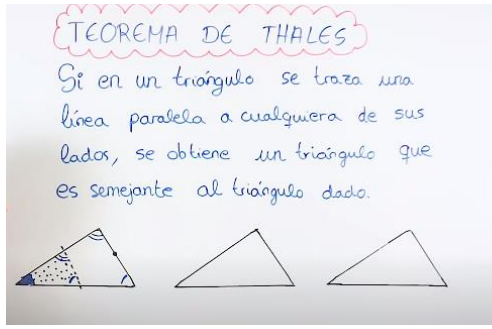
L1(I): Al no nombrar los vértices de los triángulos con sus respectivas letras (*lfi)*, no hay una representación simbólica de los ángulos (*lsim)* lo cual hubiera permitido indicar, al menos mediante una escritura, los ángulos que se corresponden. Algo similar ocurre para hacer referencia a la medida de los segmentos y su equivalencia numérica *(e.g.,* medida del segmento AB es igual a 4).

L3(I): Cuando se refiere a la condición ángulos correspondientes proporcionales (*acp),* dice: “Los ángulos en los triángulos semejantes son iguales”. Como explicabamos, ángulos iguales puede referirse a que los triángulos comparten los mismos ángulos. Por otro lado, decir “en este caso imaginemos que este es 60 grados” es una expresión inadecuada; esto porque no es suficientemente claro si quiere dar a entender que el ángulo se llama 60 grados o que dicho ángulo tiene una medida de 60 grados.

[05:05 – 07:10]: A continuación, el expositor presenta el Teorema de Thales y muestra cómo se aplica este teorema utilizando como ejemplo un triángulo, que se muestra en la figura 24:

> Vamos a ver qué nos dice el Teorema de Thales. Nos dice que, si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado. Vale, tengo aquí el mismo un triángulo [primer triángulo de izquierda a derecha] y vamos a ir viendo esto que acabo de leer. Voy a elegir este lado, vale, lo marco con un puntito [pone un punto que pertenece a uno de los lados del triángulo] y dice que si trazo una línea paralela a este, esta línea, si se traza una línea paralela [traza segmento paralelo al lado marcado por un punto, y cuyos extremos son dos lados del triángulo]. Pues el nuevo triángulo que obtengo aquí, este triángulo pequeñito, es semejante al triángulo grande que tenía al principio, vamos a ver que se cumple que los lados son proporcionales. Este es proporcional a éste [muestra los lados correspondientes]. Este grande es proporcional a este chiquito [se refiere a un par de lados proporcionales]. Y este grande es proporcional a este chiquito [se refiere a un par de lados proporcionales]. Y además comparten este ángulo [ángulo en común]. Este ángulo es igual a este [ángulos correspondientes]. Y este ángulo es igual a este [ángulos correspondientes]. Vale, entonces cumple que los lados son proporcionales y los ángulos son iguales. Esto es un triángulo que se llama triángulos dos, porque está este pequeñito dentro de grande… triángulos en posición de Thales normalmente… eee… ¿Que tienen en común? Tienen en común. Tienen este mismo lado [se refiere al ángulo en común de los triángulos] en común, está uno superpuesto encima del otro y lo tienen en común, y los lados opuestos son paralelos. Eso es lo que se llama triángulos en posición de tales.

Figura 22.
Captura III Video 03



P1: Enuncia el Teorema de Thales de la siguiente manera: "si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado". Consideramos que esta manera de enunciarlo deja ver la idea del hecho geométrico.

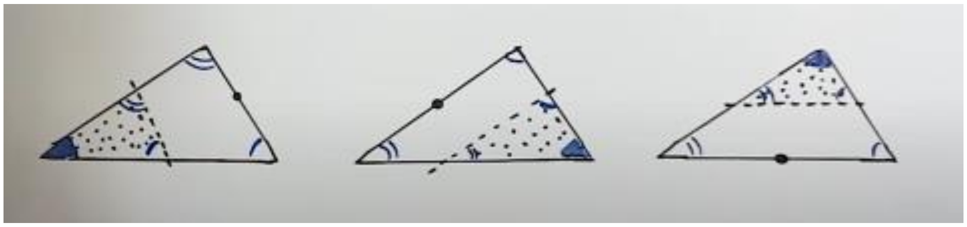
L3(I): Hay varios errores del expositor al momento de hablar porque: primero, denomina línea al lado de un triángulo; segundo, califica a los lados de grande y pequeño lo cual no es idóneo para nombrar los lados; tercero, dice que un lado es proporcional con otro lado, lo cual es incorrecto (para que exista una proporción se necesitan de dos o más pares de lados con la misma razón); cuarto, menciona ángulos iguales, en vez de decir "ángulos de la misma medida" o "ángulos congruentes"; quinto, dice "tienen el mismo lado", cuando en realidad quería decir "tienen el mismo ángulo"; y por último dice "los lados opuestos son paralelos [al referirse a los lados paralelos de los dos triángulos]" cuando, en realidad, los lados son correspondientes.

[07:09 – 12:36]: El expositor explica diferentes configuraciones del Teorema de Thales, para un mismo triángulo, despendiendo de a cuál segmento se le traza la recta paralela:

> Y vamos a ver si elegimos otro lado y hacemos lo que nos dice el teorema [toma el segundo triángulo de los tres para aplicar de nuevo el teorema] a ver si se cumple. Si hago una paralela a este lado del triángulo [traza el lado paralelo en una disposición diferente al que trazó en el primer triángulo] este triángulo nuevo que he obtenido, este triángulo chiquitito, es semejante al grande, va a tener este lado proporcional a éste [señala los lados cuyas rectas que los contiene son paralelos], este lado proporcional a éste [señala dos lados correspondientes] y este lado proporcional a este [señala dos lados correspondientes]. Y además comparten este ángulo; este ángulo es igual a éste [señala un par de ángulos correspondientes por paralela], y este ángulo es igual a éste [señala un el otro par de ángulos correspondientes por paralela]. Y vamos a elegir, por último, el tercer lado [toma el tercer triángulo de los tres, para aplicar de nuevo el teorema, [con el lado con el cual no ha realizado el ejemplo]. Vamos a hacer una paralela a éste [señala el lado]. Y lo mismo, el nuevo triángulo obtenido [el que determina el lado paralelo], el chiquitito, es proporcional al triángulo grande. Es semejante al triángulo grande ¿Por qué? Porque los lados son proporcionales y además comparten este ángulo, este es igual a este [señala un par de ángulos correspondientes por paralela] y este es igual a este [señala otro par de ángulos correspondientes por paralela]. Ok. Y estos son cuando hay un triángulo dentro de otro que comparten en un ángulo y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos [se refiere a los triángulos del ejemplo]. Son triángulos que están en posición de tales.

Figura 23.

Captura III Video 03



.

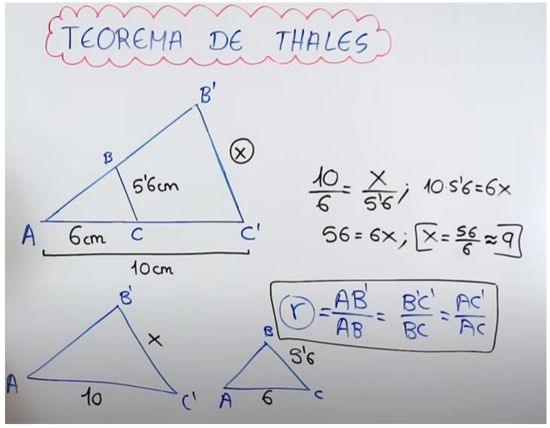
L1(P): Destacamos que usa varias representaciones gráficas (*lna)*, para mostrar el teorema de Thales a triángulos en configuración de Thales y en diferentes posiciones. Resaltamos la representación gráfica (*lfig*) de congruencia de ángulos usado en las representaciones; sin embargo, no nombrar los vértices de los triángulos es una falencia que impide una comunicación más rigurosa.

L3(P): No obstante, hay falencias verbales como decir un lado es proporcional a otro; se equivoca al decir que un ángulo es igual a su correspondiente. Destacamos el uso de un lenguaje natural para que el usuario entienda de mejor manera, por ejemplo, utiliza caracterizaciones como “este triángulo pequeño”, aunque se pierde rigurosidad en el lenguaje.

[13:37 – 15:20] En este fragmento de video propone una situación de cálculo (*scal*), en el cual asigna unos valores a los lados de triángulos en posición de Thales (Figura 26) menos a uno, al cual hay que encontrar la medida.

> Aquí tengo dos triángulos en posición de Thales y con unas medidas. Vamos a hacer este problema en el cual nos piden hallar este lado [incógnita]. Pero antes quiero establecer con vosotros la norma del Teorema de Thales con las famosas letras que os hacen un poco de lío. El triángulo grande tiene una medida, $AB'C'$ [Se refiere al triángulo $AB'C'$]. Y el triángulo pequeño tiene la medida ABC [Se refiere al triángulo $AB'C'$]. A este segmento le vamos a llamar AB', pues se supone que el segmento AB'. Como está en posición de tales, lógicamente estos dos triángulos son semejantes, entonces AB' es proporcional a AB; lo mismo pasa con $B'C'$, que es proporcional con BC; y lo mismo pasa con AC' que es proporcional a AC. Todo ello es igual a la razón. Todo ello cuando haga estas divisiones de los lados me va a dar igual. Las divisiones nos tienen que dar iguales y lo que os dé será la razón. Ok, vamos a ver si es cierto. Vamos a ponerle las medidas que tengo en el problema, tengo en el triangulito ABC, este lado que equivale a 5,6 [medida del lado BC]. Y este triángulo que equivale con 6 [se refiere a la medida del segmento AC]. Y en el triángulo grande tengo este lado que equivale a 10 [medida del segmento AC'], y tengo este que es mi duda [se refiere a la medida del segmento $B'C'$]. Pues si yo sigo esta fórmula [las proporciones de los lados], es al final el teorema explicado, vamos a ver cómo lo haríamos. Se supone que el AC' es a AC, ¿Cómo lo escribo?, 10 es a 6; como x es a 5.6. Ya establecido las proporciones, las proporciones se resuelve multiplicando en cruz, puedo multiplicar 10 por 5,6; es igual a 6 por x, por lo tanto, multiplicó 10 por 5,6 es 56. En $6x$ despejo la x y me queda 56 partido entre 6, que es alrededor [aproximado] de 9. Por lo tanto, el lado $B'C'$ equivale a 9. A todo esto, ¿Cuál es la razón? Pues lo que nos de la división.

Figura 26.
Captura IV video 03.



S1: Presenta una situación de cálculo para ilustrar el uso del Teorema de Thales.

A1: Muestra un argumento mediante el cual resuelve la situación de cálculo (*scal),* usando la proporción que surge de la semejanza que, a su vez, surge de triángulos en configuración del Teorema de Thales.

A2: Lo anterior se sustenta usando como garantía el Teorema de Thales y los datos dados de la situación.

Pu1: Usa adecuadamente el Teorema de Thales, esto se evidencia en la solución correcta de la situación.

Pr1: Enuncia el procedimiento ($r = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC}$), que se utiliza para resolver la situación.

Pr2: Muestra las acciones para encontrar el valor de la incógnita.

Pru1(P): Los procedimientos matemáticos no fueron afortunados. Por ejemplo, hubiera sido deseable que la expositora usara las propiedades de la monotonía de los números reales para despejar la incógnita.

L1: Nombra los vértices de los triángulos en posición de Thales, lo que en consecuencia la representación de medida de segmentos es correcta.

L2(P): En ocasiones se refiere a los lados como “este lado” o “el lado de aquí”, cuando tiene la representación gráfica (*lfi)* para nombrar los lados (*lsim)* según su representación. Por lo tanto, la coordinación entre representaciones no es buena en ocasiones.

L3(P): Hay equivocaciones al momento de usar la expresión verbal, porque dice “una medida, AB prima, C prima” cuando en realidad se está refiriendo al triángulo AB´C´.

Síntesis del Análisis

D1: Presenta una definición basada en forma y tamaño que luego complementa con una aproximación intrafigural (*int*).

Du1: Se hizo uso de manera correcta de la condición lados proporcionales de la definición de semejanza en el ejemplo de la torre Eiffel.

P1(P): Se enuncia de manera correcta el Teorema de Thales, pero no se enuncia el criterio de semejanza LLL.

Pu1: Se usaron correctamente los diferentes teoremas usados en el video, esto se evidencia en la solución correcta de las situaciones presentadas en el video.

Pru1: Los procedimientos realizados para solucionar las situaciones de identificación de relaciones y de cálculo fueron afortunados. Aunque hubiera sido deseable en la situación de cálculo aplicar las propiedades de la monotonía de los números reales de manera explícita para despejar la incógnita.

Pr1 (P): Se enunciaba en el procedimiento para resolver las situaciones de cálculo, pero en la situación de identificación de relaciones de proporcionalidad no se hizo.

Pr2: Los procedimientos para resolver las situaciones de cálculo e identificación de relaciones de proporcionalidad, se hicieron explícitamente.

A1: Los argumentos usados para dar solución a las situaciones de cálculo (*scal*) e identificación de relaciones (*side*) son correctos.

A2: Lo anterior se sustenta, porque usa como garantía las condiciones del Teorema de Thales y la propiedad *lcp* de la semejanza de triángulos.

S1: Es destacable las diferentes situaciones propuestas (identificación de relaciones -*side*-, y cálculo -*scal*-), para abordar el teorema de Thales, y algunos criterios de semejanza.

L1(P): Las representaciones gráficas de triángulos siempre están en la misma posición, esto no es conveniente, porque se puede pensar que para que exista semejanza las figuras deben tener una posición determinada entre ellas. Nombra los vértices de los triángulos en los momentos finales del video, argumentando que es más fácil para el estudiante entenderlo así. Pensamos que esto no es correcto, porque, al principio del video no nombró los vértices en los triángulos, y gracias a esto, las explicaciones eran un poco confusas.

L3(I): Hay varios errores al usar el leguaje verbal (*lna*), cuando se refiere a la condición ángulos correspondientes proporcionales (*acp),* dice “Los ángulos en los triángulos semejantes son iguales”. También cuando dice “una medida, AB prima, C prima” cuando en realidad se está refiriendo al triángulo AB´C´.

L2(P): La coordinación entre representaciones no es adecuada, porque no hay un buen lenguaje verbal que condiga de manera acertada las representaciones gráfica y simbólica. Esto se evidencia porque el lenguaje verbal no es muy bueno.

R2: Consideramos que este video tiene un tipo de representatividad R2, porque trata el Teorema de Thales y la definición de semejanza desde la aproximación intrafigural, explorando algunas características propias del Teorema de Thales y una situación de cálculo.

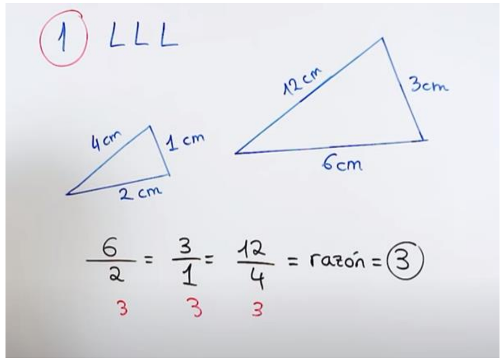
Tabla 21.
Análisis del video No. 04

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Propiedades de la semejanza</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/g_c0c1b4rlA</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Criterios de Semejanza de Triángulos</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Criterios de semejanza de triángulos:
• Ángulo, Ángulo, Ángulo (AAA).
• Lado, Lado, Lado (LLL).
• Lado, Ángulo, Lado (LAL).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video lo presenta una mujer que expone a modo de catedra lo relacionado a los criterios de semejanza para triángulos. Esto lo hace con ayuda de un tablero y escribiendo con marcadores todo lo que necesita para exponer el tema.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de idoneidad epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:05 – 01:55]: En este fragmento, se presenta una situación de identificación de relación de proporcionalidad (Figura 27) con el cual desarrolla el criterio de semejanza LLL (lado, lado, lado):

Los criterios de semejanza de triángulos son condiciones que, si se cumplen, vamos a saber con certeza que esos triángulos son semejantes. Vamos a empezar con el primer criterio, el primer criterio es el conocido como LLL, es decir, lado, lado, lado. Este criterio nos dice que dos triángulos son semejantes, si la relación de sus lados es proporcional, es decir, sus lados son proporcionales, Vamos para ello a comprobarlo, estableciendo las proporciones de los lados correspondientes. Vale, ponemos el mayor, primero este lado [el lado que mide 6 cm] corresponde con este [el lado que mide 3 cm], pues ponemos la relación 6 es a 2, como se supone que 3 tiene que ser a 1[pone estas razones como una igualdad, tal y como aparece en la imagen]. Y este lado es a este, por lo tanto, 12 es a 4. Se supone que estas 3 relaciones, estas 3 divisiones nos tienen que dar lo mismo, nos tienen que dar la razón, que tiene que ser la misma, porque si no, no son semejantes. Vamos a ver si es cierto, vamos a comprobarlo, 6 entre 2 me da 3; 3 entre 1 me da 3; 12 entre 4 me da 3. Por lo tanto, efectivamente, nos da todo ello 3. Esta es la razón, son triángulos semejantes, porque los 3 lados de ambos son proporcionales. Vale, este es el criterio lado, lado, lado, si yo tengo los lados de los triángulos, puedo comprobar si son semejantes haciendo sus relaciones y viendo si cumplen y si tienen la misma razón, vale, en este caso, al ser 3 quiere decir que este triángulo es 3 veces menos que este, o lo que es lo mismo, este, es el triple.</td></tr>
</table>

Figura 24.

Captura I Video 04.



S1: Hay una situación de identificación de relaciones entre lados (*side*).

P1: Consideramos que la manera de presentar el criterio Lado, Lado, Lado (LLL) es correcta, porque menciona la condición –*lcp*– para que exista semejanza de triángulos ("dos triángulos son semejantes, si la relación de sus lados es proporcional"); aunque no se habla de lados correspondientes proporcionales, sí se menciona que la relación entre sus lados debe ser proporcional.

Pu1: Usa adecuadamente el criterio LLL, para inferir la semejanza de los triángulos.

Pr1(I): No enuncia de manera explícita el procedimiento para encontrar la relación de proporcionalidad de los lados de los triángulos ($\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$).

Pr2: Al hacer las divisiones con las medidas de los lados correspondientes de los triángulos para encontrar la relación de proporcionalidad, evidencia que muestra de manera explícita los procedimientos para encontrar tal relación.

Pru1: Los procedimientos fueron adecuados, esto se evidencia en la solución de la situación de identificación de relaciones.

Pu1: Usa adecuadamente el criterio LLL, al mostrar que la razón entre los lados correspondientes de dos triángulos semejantes es la misma, es decir son proporcionales.

A1: Lo anterior deja ver que el expositor plantea un argumento mediate el cual se infiere que los triángulos son semejantes.

A2: Lo anterior se sustenta, usando como garantía la condición de proporcionalidad de lados y como dato las condiciones dadas.

L1(P): No se representan con letras (*lfig*) los vértices de los triángulos, por tal razón, al momento de hablar de los lados correspondientes la explicación en ocasiones es algo confusa.

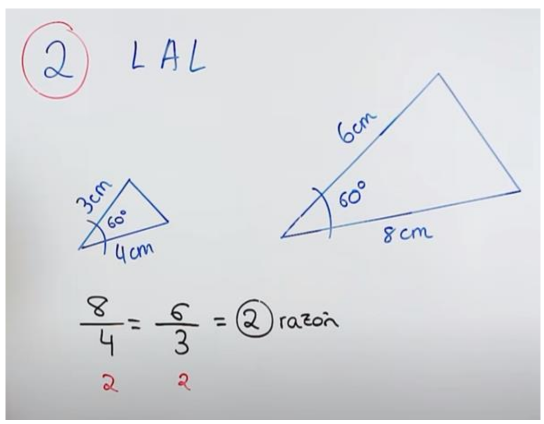
L3(P): No usa en los momentos indicados la palabra lados correspondientes, por lo cual no hay un mismo estilo para exponer en este fragmento del video, y esto genera confusiones en algunas partes de esta sección.

La proposición "este triángulo es 3 veces menos que este" es imprecisa; se podría cuestionar si considera que los lados de un triángulo miden 3 veces menos que el otro, implica que la figura grande es el triple mayor que la figura pequeña; esto último podría referirse a la cantidad de área, por ejemplo. Por ello, habría cierta ambigüedad en la afirmación.

[02:00 - 03:43]: En este fragmento la expositora presenta el criterio lado, ángulo, lado. Esto lo hace ayudándose de una representación gráfica de la Figura 28:

> El segundo criterio es el criterio lado ángulo lado, LAL. Este criterio nos dice que, si yo tengo el ángulo igual de dos triángulos, y los lados que forman ese ángulo son proporcionales, entonces esos triángulos son semejantes. Yo, por ahora, este ángulo lo tengo igual, o sea, que la primera, la parte del ángulo la cumple. Vamos a ver si la parte de los lados que sean proporcionales a ver si la cumple. Para ello, ya sabéis, cogemos los lados correspondientes y ponemos la relación de proporción. El mayor partido del pequeño, es decir, en este caso 8 entre 4, tiene que dar lo mismo que éste a éste, es decir, 6 a 3. Vamos a ver si nos da lo mismo. Hago la división 8 entre 4 igual 26 entre 32. Efectivamente nos da lo mismo, 2 y ya sabéis que esta es la razón. Vale, de estos triángulos, quiere decir que este triángulo grande es el doble que este pequeñito y no necesito más datos, o sea, no necesito conocer ni el resto de los ángulos, ni otro lado más. Si tengo eso, un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales.

Figura 25.
Captura II video 04.



S1: Se usa una situación de identificación de relaciones (*side*) para abordar el criterio de semejanza LAL.

P1(P): El sentido del criterio LAL se entiende, aunque no se formula de una manera tan precisa como se quisiera. Habla de que los ángulos son iguales, lo cual, como ya hemos dicho en análisis anteriores, puede referir a que los dos triángulos comparten los mismos ángulos.

Pu1: Usa adecuadamente el criterio lado, ángulo, lado (LAL) para inferir la semejanza entre dos triángulos.

Pr1(I): No se enuncian los procedimientos de forma explícita, para el criterio LAL hubiera sido afortunado colocar $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ si $\frac{CA}{BA} = \frac{FD}{DE}$ y $\angle A \cong \angle D$. El consecuente denota un procedimiento de forma explícita.

Pr2: Muestra de manera explicita los pasos para verificar el par de lados proporcionales y la congruencia de los ángulos que contienen estos lados, para inferir semejanza.

Pru1: La situación se soluciona de manera correcta.

A1: Presenta un argumento donde infiere la semejanza de los triángulos.

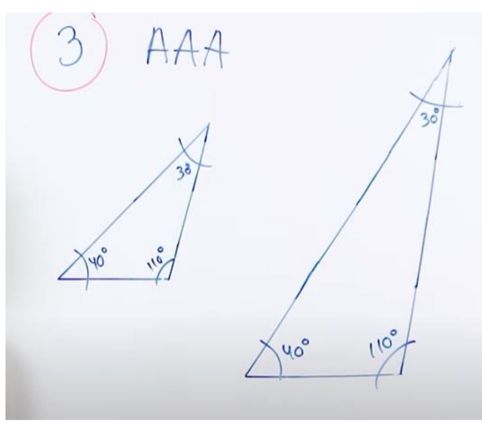
A2: Lo anterior deja ver que el expositor platea un argumento mediate el cual se infiere que los triángulos son semejantes, usando como garantía la condición de proporcionalidad de dos pares de lados, y los ángulos que comprenden estos lados congruentes.

L3: El lenguaje usado de la expositora es natural, y se condice con lo que explica, pero la representación gráfica hace falta nombrar los vértices de los triángulos, para de esta manera nombrar adecuadamente los segmentos que forman los lados.

[03:40 – 04:30]: La expositora presenta el criterio ángulo, ángulo, ángulo (AAA), apoyándose de la representación gráfica de dos triángulos (Figura 29):

> El tercer criterio es el criterio ángulo, ángulo, ángulo (AAA). Si tenéis todos los ángulos de un triángulo y el otro triángulo tiene exactamente los mismos ángulos, sabéis que los triángulos semejantes tienen exactamente los mismos ángulos. Así que efectivamente, estos dos triángulos son semejantes, porque todos sus lados [lapsus; tal vez, quiso decir ángulos] son iguales. Vale también si os dais cuenta, este criterio valdría si yo quito este ángulo [borra la medida de uno de los ángulos de cada triángulo]; este criterio podría ser el criterio AA [aludiendo al criterio ángulo, ángulo], porque si yo tengo estos dos ángulos 110 y 40, y sé que la suma es 180, sé que ya tengo 150º y hasta 180 me quedan 30. Por lo tanto, el ángulo que me quedaba leer sí o sí, es 30. Y en este caso lo mismo [se refiere al otro triángulo], el ángulo que me quedaba leer sí o sí, 30. Así que este criterio incluso es válido si sabemos solo dos de los ángulos.

Figura 26.
Captura III video 04.



S1: Usa una situación de identificación de relaciones (*side*), para abordar el criterio de semejanza AAA.

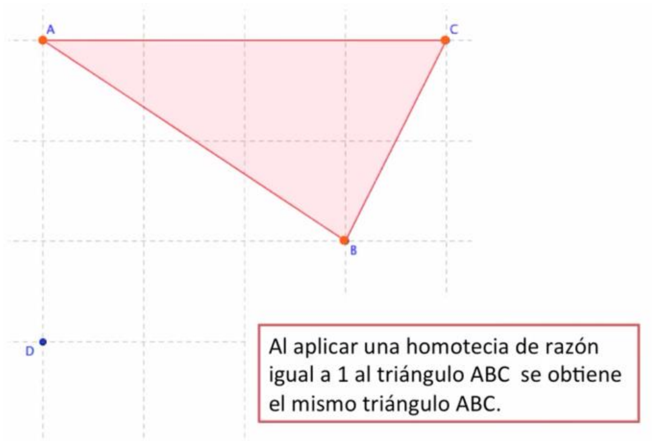
P1(P): El sentido del criterio ángulo, ángulo, ángulo (AAA) se comprende, aunque no se enuncia de manera adecuada. Ya hemos mencionado que no es correcto decir que los ángulos de los triángulos tienen que ser iguales. A1: Presenta un argumento donde infiere que los triángulos son semejantes. A2: Lo anterior se sustenta, teniendo como garantía el criterio ángulo, ángulo (AA) y como datos el par de ángulos congruentes. L3(P): La expresión verbal es confusa en ocasiones; por ejemplo, utiliza la palabra “lados” para hablar de ángulos. Aunque la explicación se entiende, aunque podría causar confusiones.
Síntesis del análisis S1: Para la explicación de todos los criterios de semejanza, se presentaron situaciones de identificación de relaciones (*side*). P1: El sentido de cada uno de los criterios de semejanza (LLL, LAL, AAA, AA) se entiende, aun cuando sus enunciados no se presentan de la mejor manera. Por ejemplo, en los criterios en los que hay involucrados ángulos (AAA, LAL, AA) se mencionan ángulos iguales lo cual no es correcto por las razones ya mencionadas. Pu1: El uso de los diferentes criterios (LLL, LAL y AAA) para ilustrar semejanza, se hace de manera correcta. Pr1(I): No se enuncian los procedimientos en ninguno de los criterios tratados en el video (ejemplo $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{FG}$). Pr2: Los procedimientos fueron presentados de manera explícita, esto se evidenció en que el expositor buscaba la igualdad de razones entre lados correspondientes, para mostrar la proporcionalidad entre lados. Pru1: Los procedimientos en cada una de las situaciones fueron adecuados, esto se evidencia en el proceso y en la correcta solución de las situaciones. A1: Se presentaron argumentos para inferir la semejanza de los triángulos en cada una de las situaciones. A2: Tomando de base lo anterior, se usa como garantía los criterios de semejanza (LLL, LAL y AAA) para hacer las respectivas inferencias. Por supuesto no hay una demostración de la validez de cada criterio; solo se presenta una situación de ejemplo para verificar que cada criterio es verdad. R2: Consideramos que el video tiene un tipo de representatividad R2, porque hace un tratamiento de la semejanza desde una sola aproximación. L1(P): Los triángulos siempre están en una misma disposición lo cual no es conveniente, por cuanto puede convertirse en un obstáculo cognitivo; quien vea el video puede pensar que para que se dé semejanza entre dos triángulos, estos deben estar en una misma disposición. Segundo, no representa con letras los vértices de los triángulos. L3 (P): La expresión verbal es confusa en ocasiones, por ejemplo, utiliza la palabra “lados” para hablar de ángulos. En todas las representaciones gráficas de los triángulos, faltó nombrar los vértices con letras mayúsculas, esto hubiera permitido un lenguaje más técnico a la hora de exponer.

Tabla 22.
Análisis del video No. 05

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Propiedades de la homotecia de triángulos.</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/64dcdVwXL3w</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Homotecia propiedades</td><td>Intencionalidad</td><td>Académica</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Aproximación transformacional.
Situaciones de construcción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video lo presenta un expositor con ayuda de un software de geometría, en el cual se exponen varias situaciones de construcción($scon$) en forma de secuencia. Primero, muestra una situación donde hay que aplicar una homotecia de razón 1; segundo, una de razón -1, tercero una de razón 2 y, por último, una situación de razón ½.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de idoneidad epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:00 – 00:59]: En este fragmento el expositor muestra un ejemplo que ilustra la aplicación de una homotecia de razón 1 a un triángulo:

En primer lugar, vamos a aplicar al triángulo ABC, una homotecia de razón 1 con centro en el punto D. Puesto que los puntos D, A y su homólogo A' son coloniales y además $\frac{AD}{A'D} = 1$ entonces, A y A' son el mismo punto, de la misma manera sucede con B y B' prima, y C y C'. Al aplicar una homotecia de razón 1, a una figura geométrica, se obtiene exactamente la misma figura.</td></tr>
</table>

Figura 27.
Captura I Video 05.



S1: Se propone una situación de construcción (*scon*), en la que se produce un triángulo homotético a uno dado.

D1(I): No se enuncia la definición de homotecia para aplicarla en el ejemplo.

Du1: Pese a lo anterior, se evidencia un uso adecuado de la caracterización usual de homotecia para explicar la situación.

A1: El expositor platea un argumento mediate el cual se infiere que al aplicar un triángulo una homotecia de razón 1, se obtiene el mismo triángulo.

A2: Lo anterior usa como garantía la definición de homotecia.

Pr2(I): No es claro el procedimiento que muestre por qué, al aplicar una homotecia de razón 1, por ejemplo, al punto A, su homotético, el punto A', es el mismo punto A. Todo se fundamenta en el uso de las herramientas del software.

L1: Las representaciones verbales usadas en el ejemplo son adecuadas, porque, nombra los vértices de los triángulos de manera adecuada.

L2(P): No hay una representación gráfica que deje ver el procedimiento de aplicar la homotecia y su resultado.

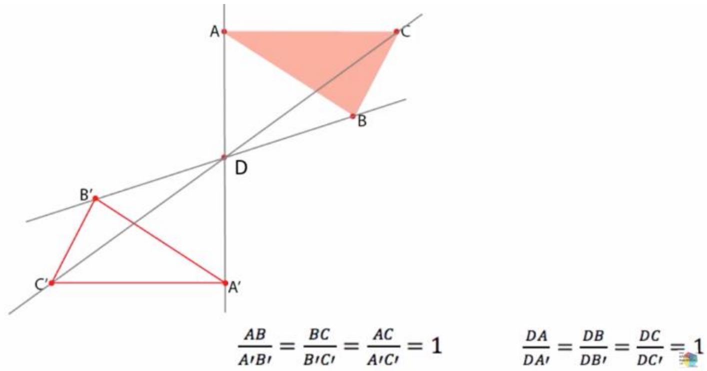
[01:00 – 02:50]: En este fragmento el expositor muestra un ejemplo que ilustra la aplicación de una homotecia de razón -1 a un triángulo:

> Ahora vamos a aplicar el triángulo ABC, una homotecia con centro en D y razón igual a menos 1. Se tiene que DA y DA' son iguales, pero en este caso, al ser negativo la razón de la homotecia de centro D, este punto queda entre los puntos A, su homólogo. Y desde luego, dado que la razón es menos 1 y el valor absoluto de ella es 1, entonces la distancia DA y la distancia DA' son iguales. Lo mismo sucede con DB y DB'; y DC y DC'. Obtenemos de esta manera, un triángulo $A'B'C'$, que es congruente con el triángulo ABC, solamente que en una posición invertida, en el sentido de que si uno mide el arco CC'con centró en D, mide 180º, lo mismo el arco BB' con centro en D y el arco AA', con centro D. Si al triángulo

$A´B´C´$ se le aplica una homotecia igual a menos 1, entonces se vuelve a obtener el triángulo ABC, según se puede observar de la misma construcción que acabamos de realizar. Por otra parte, dado que los triángulos ABC y $A´B´C´$ son congruentes, entonces la medida de AB sobre $A´B´$ es igual a 1; lo mismo BC sobre $B´C´$; y AC sobre $AC´$. Se observa que las medidas de las longitudes son las mismas en los dos triángulos para lados correspondientes, lo mismo que las medidas de los ángulos correspondientes. Varían la ubicación de los vértices, en el sentido en que se indicó anteriormente.

Figura 28.

Captura II Video 05.



S1: Se propone una situación de construcción (*scon*), en la que se construye un triángulo homotético a uno dado.

Du1: Usa adecuadamente la caracterización de homotecia usual para explicar el resultado de aplicar la homotecia de razón -1 al triángulo ABC con respecto a D.

A1: Lo anterior deja ver que el expositor platea un argumento mediate el cual construye un triángulo homotético de razón -1.

A2: El argumento se sustenta usando como garantía la definición de homotecia y las herramientas del software (i.e., homotecia del triángulo con respecto al punto D y de razón -1).

Pru1(I): No es claro el procedimiento que muestre por qué, al aplicar una homotecia de razón -1, por ejemplo, al punto A, su homotético, el punto $A´$, esta en dirección opuesta al punto A, teniendo como referencia el centro de la homotecia, el punto D**.** Ni tampoco es explícito por qué, cuando se aplica una homotecia de razón -1, el triángulo homotético es congruente al triángulo dado.

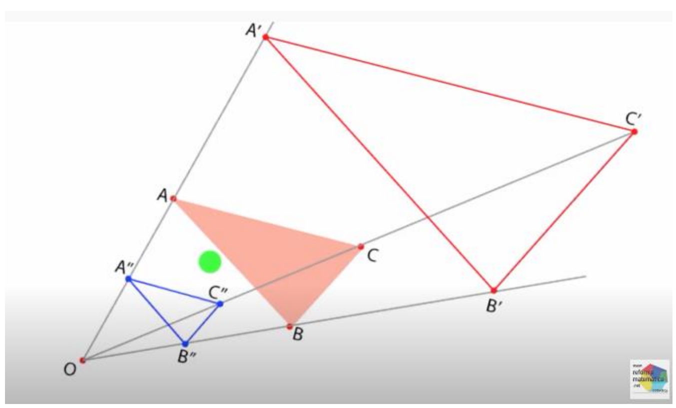
L1: Hay una buena representación simbólica (*lsim*) de la razón entre los lados correspondientes del triángulo ABC y su transformación el triángulo $A´B´C´$. La representación gráfica (*lfi*) de la homotecia es correcta, por ejemplo, representa la recta que contiene el punto A, su homólogo el punto A` y el punto D, centro de la homotecia.

L3: El leguaje verbal (*lna*) que usa para referirse a los diferentes elementos que se encuentran en la homotecia, son consecuentes con un lenguaje matemático apropiado.

[02:58 – 5:50]: En este fragmento el expositor muestra un ejemplo que ilustra la aplicación de una homotecia de razón 2 y ½ a un triángulo, con respecto a un punto dado:

> Ahora, vamos a aplicar al triángulo ABC una homotecia con centro en O y razón 2. Eso significa que la distancia del homólogo de A al centro de la homotecia O es dos veces la distancia de A a O. Lo mismo el homólogo de C: tiene una distancia a O el doble que la de C a O, y lo mismo con B y su homólogo. Se obtiene de esta manera, el triángulo $A'B'C'$. Al aplicar una homotecia razón igual a un medio al mismo triángulo ABC [En la misma representación hace el ejemplo al aplicar una homotecia de ½ al triángulo ABC], se obtiene que la distancia de A a O es dos veces la distancia de A'' a O. Lo mismo la distancia de C a O, es dos veces la distancia de C'' a O, y la distancia de B a O es dos veces la distancia de B'' a O. Este triángulo que aparece aquí resaltado en azul, es la imagen homotética del triángulo ABC, mediante una homotecia con centro en O y razón igual a ½ . En este caso, en ambas situaciones, los ángulos no varían, eso quiere decir que la medida de este ángulo con vértice A' la este con vértice en A y este con vértice en A'' son los mismos. Lo mismo con los otros puntos y sus homólogos. En este caso, se observa que las longitudes de los lados sí varían, y varían en una razón, igual a la razón de la homotecia. Eso quiere decir que la medida de $A`B`$ es el doble que la de AB; $A'C'$ es el doble de la de AC; y la de $C'B'$es el doble de la de CB. Esa es la misma razón que hay entre las distancias de los vértices de los triángulos y el centro O, es decir, como se indicó antes, la distancia de OA' dos veces la distancia de OA, y lo mismo sucede con los otros vértices y sus homólogos.

Figura 29.
Captura III Video 05.



S3: Se propone una situación de construcción(*scon*) de dos triángulos que resultan de sendas homotecias de razón 2 y ½.

Du1: Usa adecuadamente la caracterización de homotecia para explicar el resultado de aplicar la homotecia de razón 2 y ½ al triángulo ABC con respecto a D.

Pru1(I): No se presenta explícitamente el procedimiento para la construcción, con el software, de los triángulos que resultan de aplicar las homotecias referenciadas.

A2(I): No se presentan argumentos para indicar que el resultado de aplicar las homotecias guarda propiedades isométricas y de proporcionalidad con respecto al triángulo inicial.
Síntesis del análisis S1: Se propusieron varias situaciones de construcción (*scon*) con razones de homotecia diferentes, en las cuales los triángulos a transformar no tenían valores numéricos. D1(I): En ninguno de los fragmentos del video se enunció la definición de semejanza ni de su relación con la homotecia. Se hubiese esperado una caracterización transformacional de la semejanza con base en la homotecia, por ejemplo. Du1: Hay un uso adecuado de la caracterización usual de homotecia al explicar cada una de las situaciones de construcciones presentadas en el video. A1: Presenta argumentos mediante los cuales construye triángulos dadas unas razones de homotecia. A2(I): Respecto a los argumentos, no hay un sustento explícito, salvo de las herramientas del software, para indicar el resultado de aplicar homotecias. Se hubiese esperado una definición explícita de homotecia para usarla con miras a sustentar el resultado de aplicarla. Así mismo, hubiese sido deseable la sustentación explícita de que los resultados de congruencia o de semejanza que emergen de las homotecias de razón 1 y -1, o ½ y 2, respectivamente. Pru1(P): Los procedimientos se basan en la herramienta "homotecia" del software Geogebra. Sin embargo, no se mostraban de manera explícita los procedimientos, con el software que permitieran vislumbrar el paso a paso de las transformaciones que se aplicaban a los triángulos. L1: Las representaciones gráficas (*lfi*) usadas en los diferentes ejemplos son adecuadas, porque nombra los vértices de los triángulos de manera correcta y las representaciones simbólicas (*lsim)* usadas son apropiadas, por ejemplo, para la mostrar la razón entre los lados de los triángulos (Figura 31). L2: Por lo anterior, en general, hubo una coordinación entre la representación gráfica (*lfi*), y el lenguaje verbal (*lna*). L3: El lenguaje verbal y escrito fue adecuado, esto se evidencia en que las representaciones son correctas. R2: El video tiene un tipo de representatividad R2, porque solo aborda la aproximación transformacional basada en la homotecia; sin embargo, no se enuncia explícitamente su relación con la semejanza de los triángulos.

Tabla 23.
Análisis del video No. 06

Identificación	**Etiqueta de búsqueda**	Propiedades de la homotecia de triángulos	**Enlace**	https://youtu.be/Va-dYSpDYHk4

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Título del video</td><td>Homotecia y semejanza</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Aproximación transformacional.
Paralelismo.
Situación de construcción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video lo presenta un expositor con ayuda de una pizarra, en la cual, se presenta una situación de construcción(scon) de un triángulo de razón 2 a través de homotecia.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de idoneidad epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">

[00:00 – 00:34]: En este fragmento del video se presenta la definición de homotecia:

> Llamaremos Homotecia de centro O y razón k a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro P´, tal que, O, P y P´ están en la misma recta, o lo que es lo mismo, están alineados y, además, $\frac{OP'}{OP} = k$, que va ser la razón.

D1: Creemos que la definición de homotecia en su forma general está bien formulada porque presenta los elementos principales: colinealidad entre el punto, su homólogo y el centro de la homotecia), el centro de la homotecia, y razón de la homotecia.

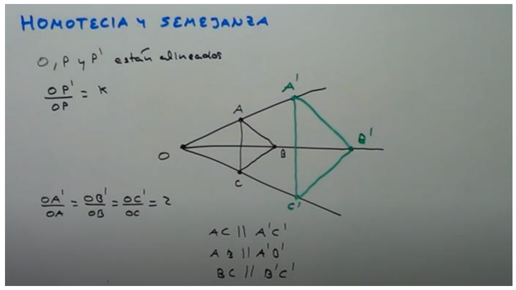
[00:36 – 2:40]: Luego de haber presentado la definición de homotecia, propone un ejercicio en el que se aplica una homotecia de razón 2 a un triángulo dado:

> Pues bien, veamos un ejemplo de triángulos homotéticos. Dibujamos un punto en la que salgan 3 rectas. En un área dibujamos el punto A, en otra el punto B, y en otra el punto C y esos 3 puntos delimitarán un triángulo. Pues bien, vamos a dibujar un triángulo homotético de tal manera que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$. Por tanto, vamos a dibujar dos triángulos homotéticos cuya razón va a ser 2. Pues bien, si esta es la distancia OA al doble de distancia, dibujamos el punto A'; si esta es la distancia OB, al doble de distancia, que sería aquí, dibujamos el punto B'; si esta es la distancia OC, al doble de distancia, que sería aquí, dibujamos el punto C'. Por tanto, esos 3 puntos también delimitarán un triángulo que será el triángulo homotético. Pues bien, estos dos triángulos son homotéticos y sus segmentos correspondientes son paralelos, por tanto, el segmento $AC \parallel A'C'$; el segmento $AB \parallel A'B'$; y el segmento $BC \parallel B'C'$.

</td></tr>
</table>

Figura 30.

Captura I Video 06.



Du1: Usa adecuadamente la definición; esto se logra evidenciar en la solución de la situación de construcción propuesta.

Pu1: Usa adecuadamente propiedades, por ejemplo, al decir que los lados correspondientes de los triángulos en la configuración de homotecia son paralelos.

A2(P): Aunque se evidencia, con base en la definición de homotecia, por que uno de los triángulos es homotético del otro, no se presenta la justificación de por que, al aplicar una homotecia de razón 2, $OA = 2OA'$. Tampoco sustenta por qué lo lados correspondientes de los triángulos son paralelos.

L1: La representación gráfica es correcta; esto se evidencia en que los puntos de los triángulos son nombrados de forma correcta. La representación del triángulo y su transformación es correcta dado que se muestra la colinealidad de los puntos (punto, homologo y centro de la homotecia). Aunque sería deseable que la parte estética de las representaciones fueran mejores; esto es, que las rectas y los segmentos no se vean "curvos".

Síntesis del análisis

S1: Se presenta una situación de construcción, donde dado un triángulo y una razón hay que aplicar una homotecia.

D1: Hay una correcta enunciación de la definición de homotecia.

Du1: Usa adecuadamente la definición de homotecia, esto se verifica en la solución de la situación de construcción.

Pu1: Hay exposición de proposiciones involucradas en la explicación que se infieren, por ejemplo, que los lados correspondientes de triángulos en configuración de homotecia son paralelos. Es una lástima que no se hubiese explicitado la relación entre la homotecia y la semejanza de triángulos; se tenían las condiciones para indicarlo.

Pr1: El procedimiento relativo a encontrar el punto homotético a uno dado fue enunciado.

A1: Presenta argumentos mediante los cuales construye un triángulo homotético, dado un triángulo y una razón de homotecia.

A2(P): Aunque se evidencia, con base en la definición de homotecia, porque uno de los triángulos es homotético del otro, no se presenta la justificación de por que, al aplicar una homotecia de razón 2 se obtienen ciertas propiedades (*e.g.,* que la distancia entre el cetro de la homotecia y un

punto dado imagen es el doble de la distancia entre dicho y la preimagen del punto dado; o que los lados homólogos son paralelos). L1: Las representaciones gráficas y simbólicas son correctas y afortunadas. Aunque hay un fallo, porque usa la representación simbólica de distancia entre puntos (ejemplo AB) para representar segmentos. L3: La expresión verbal es correcta y simbólica son correctas en su gran mayoría. L2: La coordinación entre representaciones es buena. R2: El video tiene un tipo de representación R2, porque solo trata la aproximación transformacional tratando algunas propiedades de la homotecia (*e.g.*, el paralelismo). Sin embargo, hubiera sido deseable explicitar otras propiedades como la congruencia entre ángulos correspondientes y la semejanza entre los triángulos.

Tabla 24.
Análisis del video No. 07

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Aplicaciones de la semejanza de triángulos</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/96Bo6atQSiQ</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Aplicación de la semejanza</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Aproximación relativa a las situaciones.

Aproximación intrafigural.

Definición de semejanza.

Criterio de semejanza ángulo, ángulo (AA).

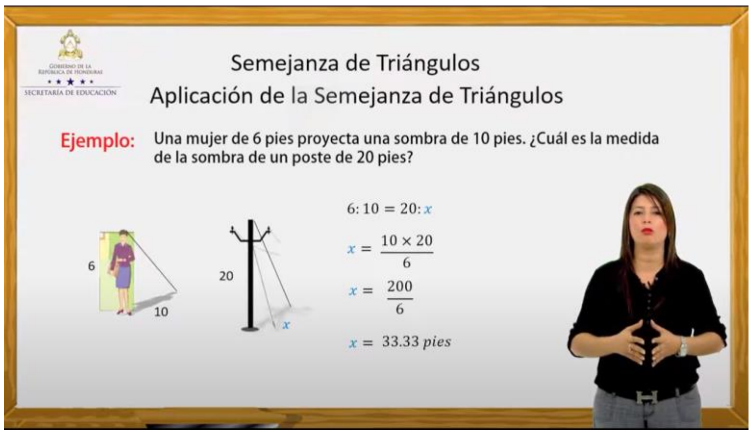
Situación de cálculo e identificación de relaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video lo presenta una expositora, acompañado de un software que le permite ilustrar lo que expone.

El video trata la semejanza de triángulos desde una aproximación útil, presentando varios ejemplos de contexto, que para resolverlos usa la aproximación intrafigural.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:00 – 01:30]: En este primer ejemplo, la expositora propone una situación de cálculo (scal) en un contexto semireal, donde hay que encontrar el valor de uno de los lados de los triángulos semejantes:

Por ejemplo dice: hay una mujer de 6 pies que proyecta una sombra de 10 pies. Tenemos la mujer, su altura y su sombra. Si te fijas, forma un triángulo. Establecemos entonces la pregunta ¿cuál es la medida de la sombra de un poste de 20 pies? Tenemos igual otro</td></tr>
</table>

triangulo, verdad, que tiene la medida de 20 de altura y x qué es lo que andamos buscando que es la sombra que proyecta el poste. Vamos a establecer entonces que estos triángulos son semejantes, y establecemos que 6 es a 10, verdad, como 20 es a x, y x está en uno de los extremos de nuestra proporción. Entonces, vamos a decir que la multiplicación [para encontrar el valor de x] de los medios, dividida entre el extremo, significa que voy a tener $\frac{(10*20)}{6}$ esto me da un resultado de 200/6 y 200/6 equivale a 33 enteros 1/3, pero si tú quieres, puedes hacer la división y poner la respuesta como 33.33 pies, que es la sombra que proyecta nuestro poste.

Figura 31.
Captura I Video 07.



S2: Se explica una situación de cálculo (*scal*) en un contexto semireal en la que, dadas las medidas de la altura de una persona, su sombra y la altura de un poste, hay que hallar la medida de la sombra del poste, asumiendo que los triángulos que modelan la situación son semejantes.

D1 - P1(I): No enuncia el criterio ángulo, ángulo (AA) de semejanza; tampoco enuncia la definición de semejanza.

Du1: Usa adecuadamente la definición de semejanza, para establecer la proporción entre los triángulos que se forman.

Pu1: Usa adecuadamente el criterio AA, para establecer la semejanza de los triángulos.

Pr2: Presenta de manera explícita el procedimiento para resolver la situación de cálculo. Esto se evidencia en la forma que se establecieron las proporciones de los lados involucrados en el problema, y luego en el paso a paso para encontrar el valor x del problema.

Pru1: El procedimiento que usa para resolver el problema es correcto, pero hubiera sido deseable mostrar con las propiedades de la monotonía de los número reales, el proceso para despejar la incógnita.

A1: La expositora utiliza un argumento donde afirma que los triángulos son semejantes, para establecer una relación de proporción y así resolver la situación de cálculo.

A2 (P): Para lo anterior no da ningún tipo de garantía para llegar a tal aserción. El problema en el fondo usa el criterio AA, y utiliza como garantía el par de ángulos rectos que se forman del poste con el suelo y la persona con el suelo; y el otro par de ángulos congruentes que se forman por la proyección de la sombra del poste y la proyección de la sombra de la persona. Y usa, aunque no lo dice, la condición lados correspondientes proporcionales (*lcp*) de la definición de semejanza, para inferir la proporcionalidad de los lados de los triángulos que se forman.

L1: Las representaciones se condicen el contexto del problema.

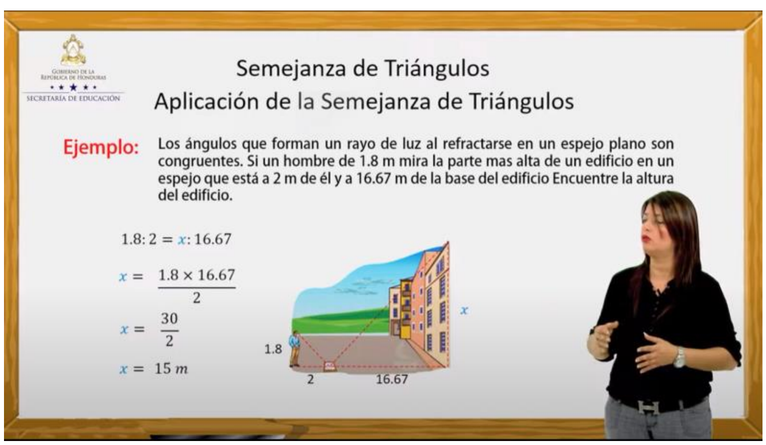
L2: Hay una buena articulación entre representaciones. Esto se evidencia en que los problemas son resueltos de manera efectiva, y se entiende el proceso para resolver las situaciones.

L3: El lenguaje natural expresa correctamente la situación propuesta y el lenguaje matemático representa correctamente el procedimiento que se aplica para resolver el ejercicio.

[01:30 – 03:00]: En este segundo ejemplo, la expositora propone una situación de cálculo (*scal*), Figura 35, donde hay que encontrar la altura del edificio, teniendo como datos los triángulos que se forman:

> Los ángulos que forman un rayo de luz, al refractarse en un espejo plano son congruentes. La razón, que son opuestos por el vértice. Si un hombre de 1.8m mira la parte más alta de un edificio desde ese espejo que está a 2m de él y a 16.67m de la base del edificio. Encuentre la altura del edificio. En este caso x va a ser la altura del edificio, establecemos que estos triángulos son semejantes, así que vamos a escribir la siguiente proporción. Voy a decir en este caso x es correspondiente a 1.8, y 16.67 es correspondiente a 2. Así que voy a establecer que x, en este caso quedó en uno de los medios de nuestra proporción, ¿Cómo lo voy a encontrar? x se encuentra multiplicando los extremos [hace la operación para encontrar el valor de x], dividido entre el medio que conozco. Voy a tener 1.8 por 16.67 entre 2, esto me da 30 entre 2 y 30 entre 2, decimos que la altura del edificio es 15 m.

Figura 32.
Captura II Video 7.



S2: Articula una situación de cálculo (*scal*) en un contexto semireal, donde dadas las medidas de la altura de una persona, su distancia a un espejo y la distancia del espejo a un edificio, hay que encontrar la altura del edificio.

D1 - P1(P): No enuncia el criterio ángulo, ángulo (AA) de semejanza de triángulos. Tampoco enuncia la definición de semejanza.

A1: La expositora utiliza un argumento donde afirma que los triángulos son semejantes, para establecer una relación de proporción y así resolver la situación de cálculo.

A2(P): La expositora afirma que los triángulos son semejantes, pero no da ningún tipo de garantía para llegar a tal aserción. El problema en el fondo usa el criterio AA, y utiliza como garantía el par de ángulos que se forman del edificio con el suelo y la persona con el suelo son rectos; y el otro par de ángulos congruentes que se forman por la refracción de la luz. Usa, aunque no lo dice, la condición lados correspondientes proporcionales (*lcp*) de la definición de semejanza, para inferir la proporcionalidad de los lados de los triángulos que se forman.

Pu1(P): Usa correctamente criterio AA, para inferir la semejanza de los triángulos involucrados (aunque no lo dice de manera explícita).

Du1: Usa la definición de semejanza, exactamente la condición lados correspondientes proporcionales (*lcp*), para aplicarla a la situación de cálculo (*scal*).

Pr2: Presenta de manera explícita el procedimiento para resolver la situación de cálculo. Esto se evidencia en la forma que se establecieron las proporciones de los lados involucrados en el problema, y luego en el paso a paso para encontrar el valor x del problema.

Pru1: Presenta de manera explícita, el procedimiento matemático para hallar el valor de la incógnita (x).

[04:10 – 05:50]: En el tercer ejemplo, Figura 36, se propone una tercera situación de cálculo (*scal*) en contexto semireal.

> Para medir la parte más larga de un lago, un ingeniero marco los puntos A, B, C, D y E en la imagen. Los segmentos AB y CD son paralelos ¿Cuántos kilómetros mide la parte más larga del lago? En este caso vamos a establecer las siguientes proporciones y vamos a buscar dónde está x, que es la distancia desde A hasta B, y vamos a decir que son proporciones, voy a decir que 3.2 es a 1.83, según los criterios de congruencia que hemos visto antes y esto, establecer que x es a 4, que son verdad, los lados correspondientes de esos triángulos. Ahora, x está en el medio, así que voy a multiplicar los extremos y dividirlo entre el medio que lo conozco, 3.2 por 4 entre 1.83, que al Multiplicarlo me va a quedar 12.8 entre 1.83 y cuando lo divido me va a quedar 6.99 km, que lo puedes redondear a 7 km.

Figura 33.
Captura III Video 7.

S2: Propone una situación de cálculo (scal) en contexto semireal, donde los triángulos involucrados están en configuración de Thales. D1 - P1(P): No se enuncia el teorema de Thales, el criterio AA, ni la definición de semejanza, aunque se usan implícitamente en los problemas. A1: Se usa un argumento con el cual se resuelve la situación de cálculo. A2(P): Los dos códigos anteriores dejan ver que no usó ninguna garantía para afirmar la semejanza de los triángulos; sí se usa la condición de la definición lados correspondientes proporcionales (*lcp*), aunque no se hace explícito su uso.
Síntesis del análisis S2: Se articularon tres situaciones de cálculo (*side*), donde siempre se buscaba encontrar el valor de un lado desconocido. D1 - P1(I): No enuncia el criterio ángulo, ángulo (AA) de semejanza, que es usado en todas las situaciones para inferir semejanza, y tampoco se enuncia la definición de semejanza, para establecer la relación de proporcionalidad. Du1 – Pu1: En estas situaciones se usa, implícitamente, el criterio de semejanza (AA) y la característica *lcp* de la definición de semejanza. Pr2: Presentó de manera explícita el procedimiento para resolver las situaciones de cálculo. Esto se evidencia en la forma que se establecieron las proporciones de los lados involucrados en los problemas, y luego en el paso a paso para encontrar el valor x de los problemas. Pru1: El procedimiento que usó para resolver las diferentes situaciones problemas fueron correctos, pero hubiera sido deseable mostrar con las propiedades de la monotonía de los número reales, el proceso para despejar las incógnitas. A1: Se presentaban argumentos para resolver las situaciones de cálculo, donde primero se establecía la semejanza de triángulos, para de este modo establecer la proporción de los lados, y por último encontrar el valor de la incógnita. A2(P): Lo anterior se asumía sin ninguna garantía. Ya que no nombraba los criterios y la definición que permitieran justificar dichas aserciones. L1: Las representaciones de los problemas eran concordes al contexto que querían representar. L2: Hay una buena articulación entre representaciones verbales, figurativas y verbales. L3: El lenguaje usado durante el video es correcto. R1: Creemos que este video tiene un tipo de representatividad R1, porque, trata la semejanza desde la aproximación útil, al establecer varios ejercicios de aplicación; y, además todas las situaciones de cálculo estaban dentro de la aproximación intrafigural. No hay representatividad R2, ya que el video trata varias aproximaciones.

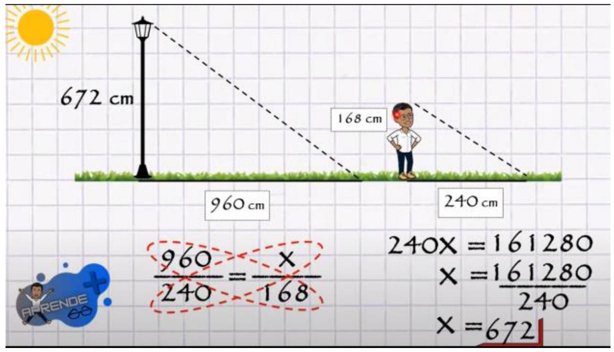
Tabla 25.
Análisis del video No. 08

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Aplicaciones de la semejanza de triángulos</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/oJg-duuu1Gw0</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Semejanza de triángulos, problemas – ejercicios.</td><td>Intencionalidad</td><td>Académico.</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Aproximación relativa a situaciones.
Aproximación intrafigural.
Definición de semejanza.
Criterio de semejanza ángulo, ángulo (AA).
Situación de cálculo e identificación de relaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video trata sobre aplicación de la semejanza de triángulos. Se proponen 3 situaciones problemas que se resuelven con la definición de semejanza y el criterio AA. Esto lo hace un expositor, donde muestra el problema y su resolución, apoyado de una presentación.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:00 – 01:54]: Se muestra la primera situación problema en contexto semireal, en la cual hay que encontrar el valor de la altura de una lámpara, con los datos que da la sombra proyectada de la lampara y una persona:

A cierta hora del día en mi persona, que mide 168 cm, se hace una sombra de 240 cm, mientras que en una lámpara lo hace de 960 cm. Yo quiero conocer la altura de la lámpara. ¿Cómo lo tengo que hacer? Pues bien, vamos a aplicar proporciones o razones. En esta ocasión, vamos a tener que esta sombra de la lámpara va a ser correspondiente a la sombra del avatar que tenemos aquí como ejemplo ¿Cómo sé que estos dos triángulos son semejantes? Bueno, para empezar, es que los dos tienen un ángulo recto en la base y el ángulo de inclinación del Sol que se genera con la sombra, pues es el mismo, porque están a la misma hora. Muy bien, entonces vamos a hacer esta razón, tenemos este lado de la sombra [la sombra del poste], que es 960, si lo dividimos en la sombra del avatar 240; sería la misma que si lo hacemos en la altura [medida del poste] con la altura del avatar y la lámpara. Entonces vamos a poner x sobre 168. Ok, entonces vamos a hacer una proporción aquí, lo podemos aplicar con la regla de 3, pero en esta ocasión vamos a utilizar el procedimiento cruzado, vamos a cerrar estos dos [x y 240] y vamos a multiplicar 240 por x. Tenemos $240x$, igual, ahora lo hacemos del otro extremo, 960 por 168, tenemos 161280. Te das cuenta de que tenemos una ecuación, donde el 240 lo vamos a quitar para dejar sola a la x del lado izquierdo, y lo vamos a hacer dividiendo, porque está multiplicando. Entonces vamos a poner x igual a 161280 entre 240, x por lo tanto va a ser igual a 672. La altura de la lámpara será 672 cm.</td></tr>
</table>

Figura 34.

Captura I Video 08.



S2: Se propone una situación de contexto semireal, en la que la identificación de relaciones (*side*) y la congruencia de dos pares de ángulos son claves y el cálculo (*scal*) para encontrar el valor de la incógnita que está buscando es la clave.

D1 - P1 (P): No se enuncia el criterio de semejanza ángulo, ángulo (AA), que se usa como justificación para deducir la semejanza de los triángulos. Tampoco se enuncia la definición de semejanza que se usa para establecer la proporcionalidad entre lados correspondientes.

Du1 – Pu1: Se usa correctamente el criterio AA y la definición de semejanza, para resolver la situación problema.

Pr1: Enuncia de manera explícita el procedimiento que va a usar para resolver la situación de cálculo.

Pr2: Muestra de manera explícita las acciones que permiten resolver la situación de cálculo.

Pru1: Aunque los procedimientos matemáticos para llegar a la solución son correctos, hubiera sido deseable aplicar las propiedades de la monotonía de los números reales de manera explícita.

A1: Se plantea un argumento mediante el cual deduce la semejanza de los triángulos, con esta establece la proporcionalidad de los lados para resolver el problema.

A2(I): Utiliza como garantía implícita el criterio AA, y la proporcionalidad de los lados usando como garantía la condición de semejanza de triángulos lados correspondientes proporcionales (*lcp*).

L1: Las representaciones gráficas usadas ilustran correctamente la situación planteada, aunque las escalas de los dibujos no se condicen con las medidas representadas.

L3: Las forma verbal de expresar la situación y explicar los procedimientos para resolver el problema, son claras y entendibles para quien ve el video.

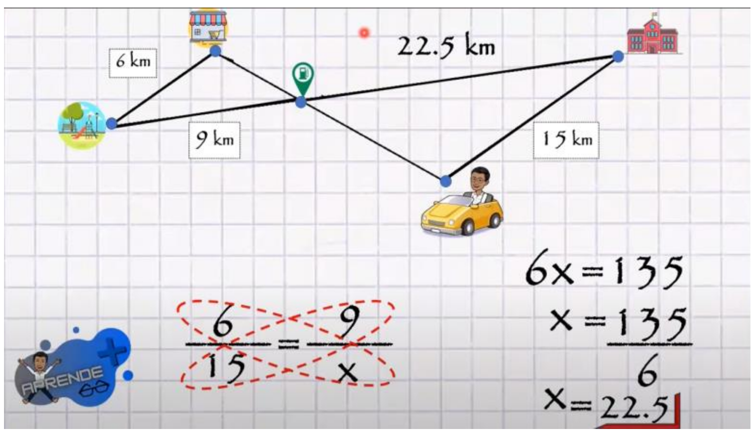
L2: Lo anterior es cierto porque usa un lenguaje matemático, combinado con un expresión natural.

[01:55 – 03:59]: Se muestra una situación problema en contexto semireal en la que hay que encontrar una distancia dados unos datos:

> Sí yo sé que desde mi auto a la escuela son 15 km y de la gasolinera al parque son 9 km. Pero también sé que del parque al supermercado son 6 km. La pregunta es ¿Qué distancia voy a recorrer de la gasolinera hasta la escuela? Para hacer esto, vamos a aplicar el mismo proceso, ya sé que son semejantes, porque aquí en la gasolinera estos dos ángulos son

opuestos por el vértice, y los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo. Así como este del ángulo que se encuentra en el parque, es igualito al que se encuentra en la escuela; así como el que se forma aquí en el auto, es igual al del supermercado. Entonces tenemos el mismo criterio que el anterior, ángulo, ángulo. Ahora veamos la proporción o la razón, vamos a tener que este lado, que se acaba de mover, que es el 6, es correspondiente al 15. Ok, esto es igual al lado que tenemos como medida 9, es correspondiente al desconocido *x,* Vamos a multiplicar 6 por x, tenemos $6x$, igual a 15 por 9, igual a 135. Despejamos la x, y vamos a dejar únicamente la x del lado izquierdo, y el 6 lo vamos a pasar al lado derecho. Dividiendo tenemos 135 entre $6x$, x por lo tanto, va a ser 22.5. Quiere decir que la distancia de la gasolinera a la escuela serán 22.5 km.

Figura 35.
Captura II Video 08.



S2: Se propone una situación de cálculo (*scal*) en un contexto real, para encontrar el valor de un lado de los triángulos en configuración de Thales, proponiendo como dato un par de lados proporcionales. Aunque creemos que el problema hubiera obtenido mayor riqueza, si en vez del par de ángulos congruentes, el dato hubiera sido un par de lados paralelos, para aprovechar los triángulos en configuración de Thales.

D1 - P1 (P): No se enuncia el criterio AA, y tampoco la definición de semejanza, pero si se enuncia el Teorema de ángulos opuestos por el vértice congruentes.

Du1 – Pu1: Usa correctamente el criterio AA y la definición de semejanza, para resolver la situación problema.

Pr1: Enuncia el procedimiento para resolver el problema, estableciendo las proporciones donde está involucrada la incógnita.

Pr2: Muestra los procedimientos para despejar la incógnita.

Pru1: Presenta de manera explícita, el procedimiento matemático para hallar el valor de la incógnita (x), usando las propiedades de la monotonía de los números reales.

A1: Se plantea un argumento mediante el cual deduce la semejanza de los triángulos, con esta semejanza establece la proporcionalidad de los lados para resolver el problema mediante el uso de propiedades algebraicas.

A2(P): El expositor plantea un argumento en el que, usando, como garantía el Teorema Ángulos Opuestos por el Vértice Congruentes, se deduce la congruencia de un par de ángulos; el otro par de ángulos congruentes lo da como dado, pero no se justifica su congruencia. Después, deduce la semejanza de triángulos usando como dato los dos pares de ángulos congruentes que dedujo y como garantía el criterio AA. Por último, deduce la proporcionalidad de los lados usando como garantía la condición de semejanza de triángulos lados correspondientes proporcionales (*lcp*).

L1: Las representaciones gráficas usadas ilustran correctamente la situación planteada.

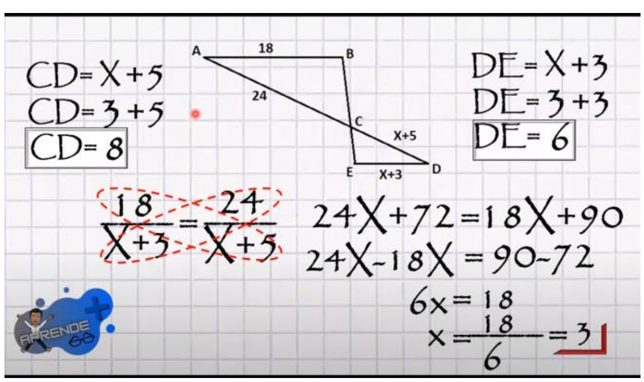
L3: Las formas verbales de expresar la situación, el leguaje matemático para expresar los procedimientos matemáticos para resolver el problema, son claros y entendibles para quien ve el video.

L2: Lo anterior es cierto porque usa un lenguaje matemático, combinado con un expresión natural de manera correcta.

[04:00 – 6:40]: Se propone una tercera situación de cálculo, en la que hay que encontrar el valor de dos lados de triángulos en configuración de Thales:

> Tenemos dos triángulos, el más grande que es ABC es semejante al triángulo CDE, se aplica el mismo criterio que el anterior. Tenemos aquí opuestos por el vértice, el ángulo que se forma en la D es igual a la A, y el ángulo que está en B es igual al E. Entonces quiere decir que el lado AB mide 18, es correspondiente al DE que es x+3; mientras que el CD, que es x+5, es correspondiente a AC sé que es 24. Vamos a aplicar esas razones, 18 es a x+3, esto es igual a 24, correspondientes a x+5. Y aquí vamos a aplicar otra vez en procedimiento cruzado, multiplicamos x+3 por 24, tenemos 24x +72; esto es igual a multiplicarlo de esta manera también cruzada, 18 por x+5, tenemos 18x+90. Vamos a reunir del lado izquierdo las equis, y los independientes [constantes] al lado derecho utilizando las operaciones inversas, si están sumando lo vamos a pasar a restar. Entonces, vamos a tener aquí de esta forma, 24x-18x igual a 90-72, y porque menos 72, porque acá estaba sumando. Entonces simplificamos y tenemos 6x igual a 18, despejamos la x y nos va a quedar x igual a 186, porque está multiplicándose del lado izquierdo. Entonces, x es igual a 3. Pero si yo quiero saber la medida real de CD y DE, lo que tenemos que hacer es sustituir el 3, por el valor de aquí que aparece en la x. Entonces vamos a tener CD=x+5, cambiamos la x por el 3, y tenemos CD igual a 8. Hacemos lo mismo con el otro lado, DE, tenemos x+3, sustituimos la x por 3 y nuestro resultado será 6.

Figura 36.
Captura III Video 08.



S1: Se propone una situación de cálculo (*scal*) en un contexto meramente matemático, para encontrar el valor de una incógnita en dos triángulos que se asumen semejantes. Como en el ejercicio anterior, propone como dato un par de lados congruentes (el otro par de lados congruentes lo da como dato). Aunque, como en el problema anterior, creemos que esta situación hubiera obtenido mayor riqueza, si en vez del par de ángulos congruentes, el dato hubiera sido un par de lados paralelos, para aprovechar los triángulos en configuración de Thales.

D1 - P1 (I): No se enuncia el criterio AA, ni la definición de semejanza, pero si se enuncia el Teorema de Ángulos Opuestos por el Vértice Congruentes. Además, sobran las proposiciones relacionadas con la semejanza, porque solo se necesita la condición (*lcp).*

Du1: Usa correctamente la definición de semejanza, para resolver la situación problema.

Pr1: Muestra el procedimiento a llevar a cabo para encontrar las medidas de los dos lados del problema.

Pr2: Usa propiedades algebraicas que permiten despejar la incógnita.

Pru1: Presenta de manera explícita el procedimiento matemático para hallar el valor de la incógnita (x) y después, el procedimiento algebraico para encontrar el valor de dos lados de los triángulos. Resaltamos que muestra el procedimiento para despejar la incógnita y el procedimiento para encontrar el valor de los 2 lados involucrados en el problema, aunque carece de precisión matemática para aludir a estos (uso de la propiedad de monotonía para la suma y la multiplicación en igualdades).

A1: Plantea un argumento mediante el cual resuelve una situación de cálculo, teniendo como dado el par de triángulos como semejantes y estableciendo la proporción por lados correspondientes proporcionales (*lcp)*, para usar propiedades algebraicas que permitan despejar la incógnita.

A2 (I): El argumento es ambiguo. No se sabe si lo dado es que los triángulos son semejantes para deducir que dos pares de ángulos son congruentes, o si estos ángulos están dados como congruentes para deducir la semejanza. Si fuera lo primero, creemos que sobra la inferencia de los ángulos y de una vez se puede usar la propiedad lados correspondientes proporcionales (*lcp)* para establecer a x. Si es lo segundo, creemos que hizo falta precisión en el enunciado, poniendo como dato un par de ángulos congruentes.

L1: Las imágenes usadas representan correctamente la situación planteada.

L3: Las forma verbal de expresar la situación, el leguaje matemático para expresar los procedimientos matemáticos para resolver el problema, son claros y entendibles para quien ve el video.

L2: Lo anterior es cierto porque usa lenguaje matemático, combinado con un expresión natural de manera correcta.

Síntesis del análisis

S3: Los dos primeros problemas propuestos trataron situaciones de cálculo (*scal*), en contexto semireal para encontrar la medida de uno de los lados de los triángulos y la última situación se presentó en un contexto meramente matemático, donde había que encontrar el valor de la incógnita, para luego hallar el valor de la medida de dos lados de los triángulos.

D1 - P1: No se enunciaron de manera adecuada las definiciones y proposiciones involucradas en las situaciones.

Du1 – Pu1: Se usaron adecuadamente las definiciones y proposiciones involucrados en las situaciones.

Pr1: Se mostraron los procedimientos para resolver las situaciones de cálculo.

Pr2: Presentó de forma explícita las acciones para resolver las situaciones propuestas, es decir mostraba el paso a paso para despejar las incógnitas.

Pru1: Presentó de manera explícita los procedimiento matemático para hallar el valor de la incógnita (x) y después, el procedimiento algebraico para encontrar el valor de las medidas de los lados de los triángulos, aunque carecían de precisión matemática para aludir a estos (uso de la propiedad de monotonía para la suma y la multiplicación en igualdades).

A1: Los argumentos para resolver las situaciones se basaban en la condición *lcp* de la definición, para establecer las proporciones que involucran la incógnita, y de esta manera encontrar las medidas de los lados.

A2(I): En los argumentos no se presentaron las garantías que sustentaran la semejanza de los triángulos, para luego usar la condición lados correspondientes proporcionales (*lcp)* de la definición para establecer las proporciones.

L1: Las imágenes usadas representan correctamente las situaciones planteadas.

L3: La forma verbal de expresar las situaciones y el leguaje matemático para expresar los procedimientos matemáticos para resolver el problema, eran claros y entendible.

R1: Creemos que este video tiene un tipo de representatividad R1, porque, trata la semejanza desde la aproximación útil, al establecer varios ejercicios de aplicación; y, además todas las situaciones de cálculo estaban dentro de la aproximación intrafigural.

4.2 RESULTADOS

En esta sección, presentamos resultados panorámicos de los análisis realizados. En primer lugar, expondremos los resultados por video, mostrando a través de diagramas radiales el comportamiento que tuvo cada video. En segundo lugar, expondremos los resultados por código, mostrando a través de un diagrama de barras el comportamiento que tuvo cada código en los ocho videos analizados.

4.2.1 Resultados por cada video

En esta sección, presentamos resultados panorámicos del análisis para cada uno de los videos realizados. Para ello, en la Tabla 26 dispusimos los códigos usados en los análisis presentados en el capítulo previo, de una manera que nos deja hacer una escala valorativa, siendo 1 lo menos afortunado y 3 lo más afortunado. Dispuestos esos códigos en un diagrama radial (tres octágonos concéntricos –uno por cada nivel– cuyos vértices se identifican con tipos de objetos primarios; el octágono más pequeño indica el nivel 1 y el más grande indica el nivel 3; el de tamaño intermedio el nivel 2), podemos tener una representación gráfica para cada vídeo que nos permite indicar sus fortalezas y sus debilidades en relación con cada tipo de objeto primario. La construcción del diagrama asociado a cada video se basó en la síntesis presentada al final de cada tabla de análisis.

Tabla 26. Disposición de códigos para resultados de videos.

Código/Nivel[13]	**1**	**2**	**3**
P	No se enuncia	Se enuncia o se usa	Se enuncia y se usa
Pr	No se enuncia	Se enuncia o se usa	Se enuncia y se usa
D	No enuncia	Se enuncia o se usa	Se enuncia y se usa
A	A1: Presenta argumentos	A2: Sustenta las aserciones	A3: Alude a diferentes argumentos
R		R2: Una aproximación	R1: Diferentes aproximaciones

[13] P: proposición; Pr: Proposición; D: Definición: A: Argumento; R: Representatividad; L: Lenguajes; S: Situaciones.

L	L1: Usa representaciones	L3: Usa una expresión verbal o escrita	L2: Coordina diferentes tipos de representación
S	S1: Contexto matemático	S2: Contexto extramatemático	S3: Contexto extramatemático y matemático

Para ilustrar el uso del diagrama radial, proponemos el siguiente ejemplo hipotético: si en un video encontramos que, en general, las proposiciones se enuncian y se usan (que sería lo más adecuado), lo catalogaremos como nivel tres, y vamos a poner un punto en el vértice P del octágono más grande. Ahora bien, si en ese video lo que sucede es que, en general, las proposiciones se usan o se enuncia, lo catalogaremos como de nivel dos, y vamos a poner un punto en el vértice P del octágono intermedio; si lo que sucede en el video es que no hay enunciación de proposiciones, lo catalogaremos de nivel uno, y pondremos el punto en el vértice P del octágono más pequeño. Por otro lado, si en el video hay presentación de argumentos, pero la sustentación de los argumentos es apenas parcial, entonces marcamos el punto no necesariamente en el vértice que correspondería al octágono de nivel dos, sino que lo situamos entre el octágono de nivel 1 y el octágono de nivel 2, indicándonos de esta manera que la sustentación de los argumentos fue parcialmente adecuada. Esto es, lo que hemos indicado como algo “parcial”, lo pondremos en el “intermedio” de los vértices correspondientes.

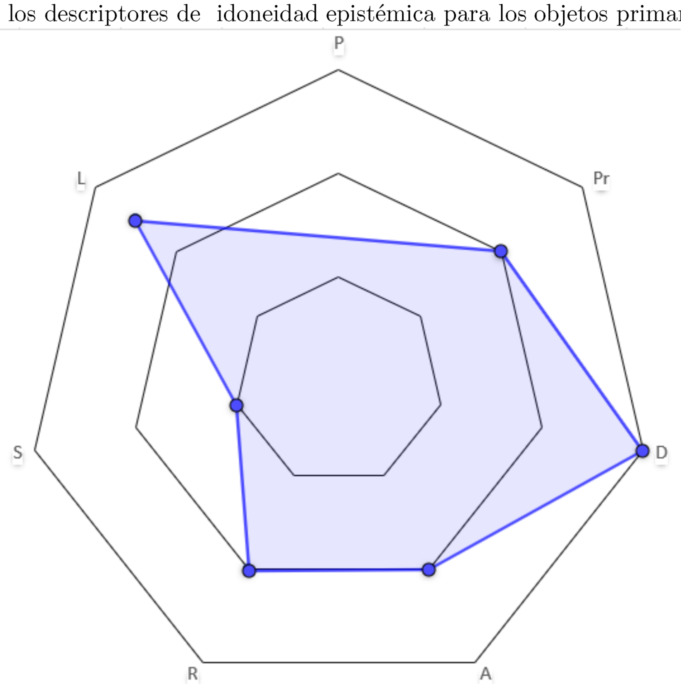
Con base en la idea que proponemos con el uso de los diagramas para indicar la idoneidad de cada video, diríamos que el video “ideal” se correspondería con los vértices del polígono más grande, y que el video “no idóneo” se correspondería con los vértices del polígono más pequeño. Como somos conscientes que estos extremos no ocurren, consideramos que el diagrama nos permite indicar aquellos objetos primarios que fueron mejor tratados y aquellos en los que existe cierta falencia. En suma, nos deja ver una cierta tendencia de aquellos tipos de objetos primarios en los que el video puso mayor atención durante su desarrollo, aunque no nos deja ver cuáles son esos objetos. Por esto último vimos necesario complementar el diagrama radial con una descripción que nos permita comentar sobre los objetos presentes en el video.

4.2.1.1 Comentario sobre el Video 1

El video 1 que analizamos en la sección tiene un tratamiento de la de la definición de semejanza desde una aproximación intrafigural. Para complementar este tema, hace uso de situaciones de identificación de relaciones de proporcionalidad y congruencia de ángulos para verificar semejanza de triángulos.

De la Figura 46, correspondiente al diagrama radial del video 1, podemos inferir que lo relativo a los procedimientos fue bastante afortunado por cuanto esto se presentaron para inferir las propiedades para verificar semejanza. En lo que se refiere a la definición y proposiciones relativas a la semejanza, podemos notar que se usaron o se enunciaron. En relación con los argumentos vale indicar que no alcanza el nivel dos, por cuanto, aunque fueron presentados, sus garantías no fueron explicitadas en general. En lo que respecta a los lenguajes, no podemos decir que esté categorizado en el nivel tres, por cuanto hubo algunas falencias en coordinar los diferentes tipos de representación. En relación con las situaciones presentadas fueron meramente matemáticas, por ello su indicación de nivel 1. Por último, cabe destacar que el tratamiento de la semejanza se dio dentro de una sola aproximación, por ello la representatividad es de nivel 2.

Figura 37.
Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 1.



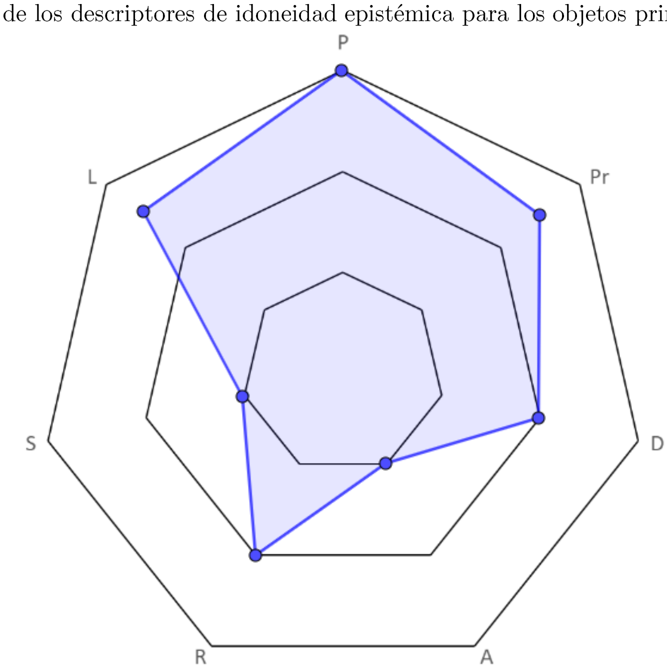
4.1.2.2 Comentario sobre el Video 2

Recordemos que este video tiene un tratamiento de la definición de semejanza desde una aproximación intrafigural. Para complementar este tema, hace uso de situaciones de identificación de relaciones de proporcionalidad y congruencia de ángulos.

De la Figura 41, correspondiente al diagrama radial del video 2, podemos inferir que lo relativo a la definición de semejanza llegó al nivel dos, por cuanto la definición se enunció y no se usó, o se usó y no se enunció. Así mismo, podemos afirmar que, con respecto a las proposiciones, su aparición fue bastante afortunada por cuanto fueron expuestos y usados con un fin específico (las verificaciones de condiciones suficientes para la semejanza). En lo que se refiere a los procedimientos, no podemos categorizarlo en un nivel tres, por cuanto falló algo en su enunciación o utilización. En relación con los argumentos, vale indicar que se llegó a un nivel uno, por cuanto fueron presentados, pero sus garantias no fueron expuestas. Mientras que para el caso los lenguajes, no podemos decir que este categorizado en el nivel tres, por cuanto aparecieron algunas falencias en coordinar los diferentes tipos de representación. Situaciones se dieron en un contexto meramente matemático. Por último cabe destacar que el tratamiento de la semejanza se dio dentro de una sola aproximación.

Figura 38.

Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 2.



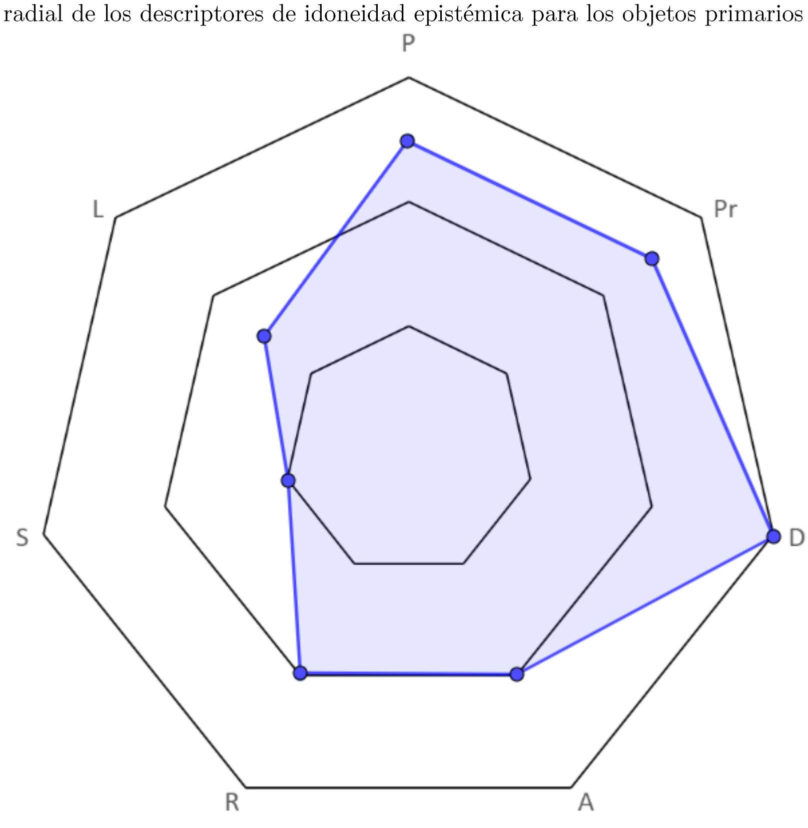
4.2.2.3 Comentarios sobre el Video 3

El video 3 tiene como tema central el Teorema de Thales, cuya exposición se complementa con situaciones de cálculo dentro de una aproximación intrafigural.

De la Figura 42, correspondiente al diagrama radial del video 3, podemos inferir que lo relativo a la definición de semejanza fue bastante afortunado por cuanto se enunció y se usó. En lo que se refiere a procedimientos y proposiciones, no podemos categorizarlo en un nivel tres, ya que algunas veces falló algo en su enunciación o en su utilización. En relación con los argumentos, vale indicar que se llegó a un nivel dos, la razón, fueron presentados los argumentos, y sus garantias fueron expuestas. Mientras que para el caso los lenguajes, no podemos categorizado en el nivel dos, por cuanto hubo algunas falencias en el lenguaje usado, y las representaciones de los objetos involucrados no representaban de manera adecuada lo que se decia verbalmente. Las situaciones se dieron en un contexto meramente matemático. Por último, el código de representaciones (R) lega a un nivel 2, por lo que podemos inferir que el tratamiento de la semejanza se dio dentro de una sola aproximación,.

Figura 39.

Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 3.



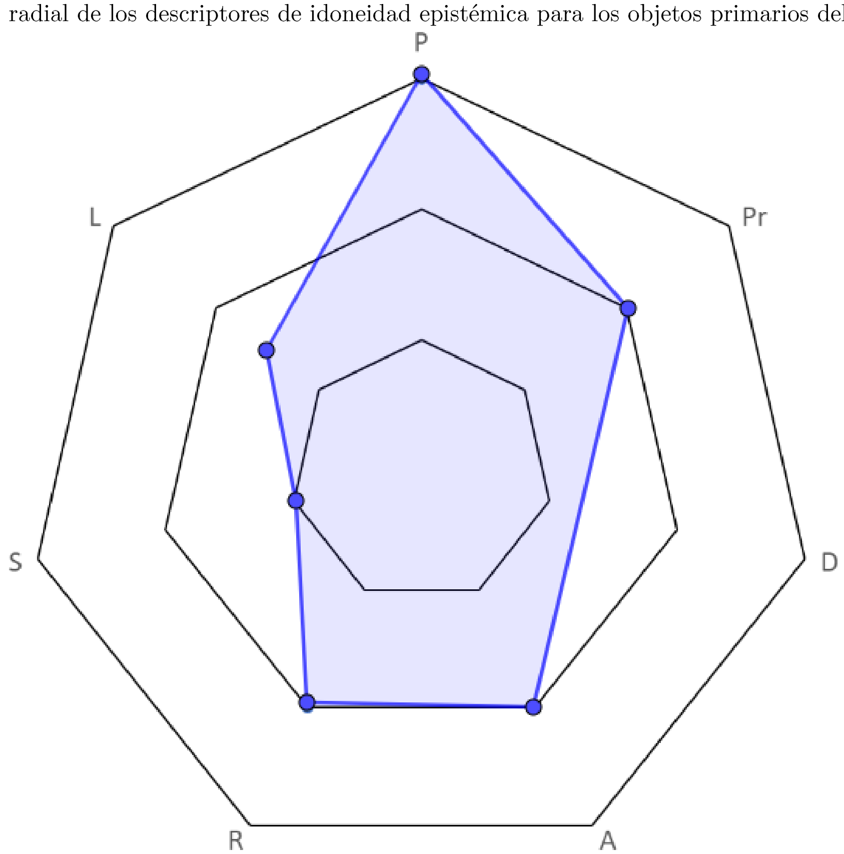
4.2.2.4 Comentarios sobre el Video 4

El video 4 tiene como tema central los Criterios de Semejanza, los cuales se complementa con situaciones de cálculo, dentro de una aproximación intrafigural.

De la Figura 43, correspondiente al diagrama radial del video 4, podemos ver que en lo relativo a las proposiciones fue bastante afortunado, por cuanto se enunciaron y se usaron. En lo que se refiere a procedimientos, alcanza un nivel dos, entonces hubieron fallos en su enunciación o uso. En relación con los argumentos, vale indicar que se llego a un nivel dos, porque fueron presentados, y sus garantias fueron dadas. Mientras que para el caso los lenguajes, no podemos categorizado en el nivel dos, por cuanto hubo algunas falencias en el lenguaje usado, y las representaciones de los objetos involucrados no representaban de manera adecuada lo que se decia verbalmente. Las situaciones se dieron en un contexto meramente matemático. Por último, mencionamos que el tratamiento de la semejanza se dio dentro de una sola aproximación.

Figura 40.

Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 4.

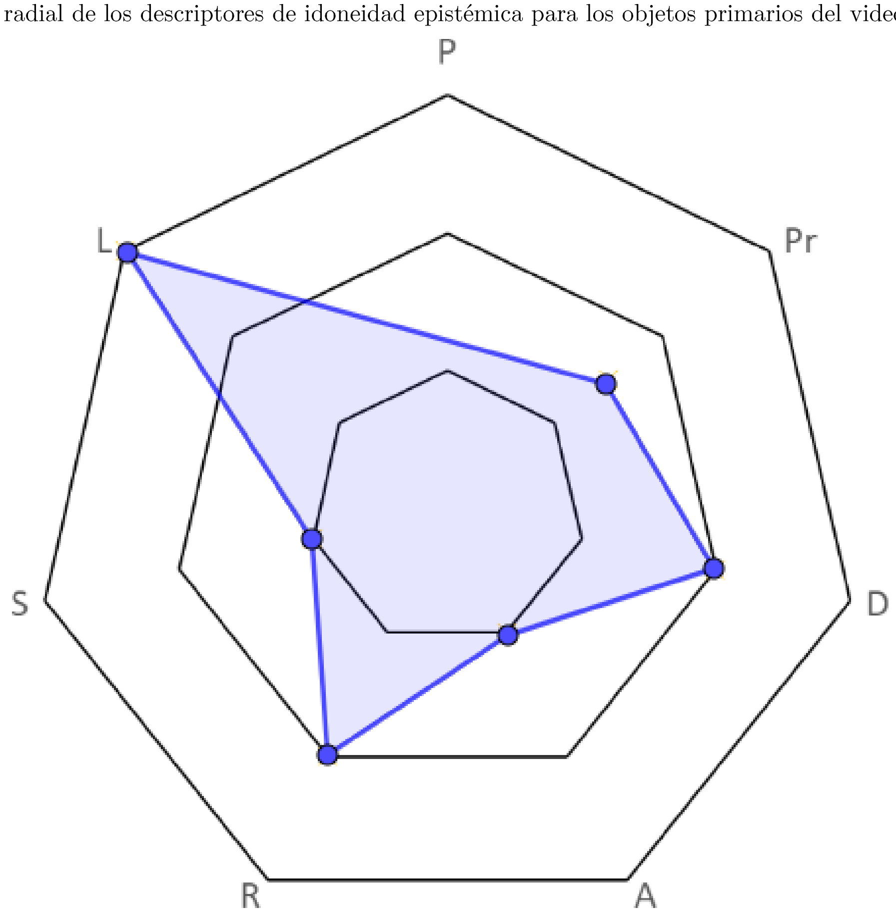


4.2.2.5 Comentarios sobre el Video 5

Recordemos que este video tiene como tema central la definición de Homotecia, en el cual se presentan varias situaciones de construcción en forma de secuencia.

De la Figura 44, correspondiente al diagrama radial del video 5, podemos inferir que lo relativo a los lenguajes fue bastante afortunado, por cuanto se usaron representaciones adecuadas y además el lenguaje verbal concordaba con lo que estaba representado. En lo que se refiere a procedimientos, no llega a un nivel dos, por tanto hubo fallos en su uso a no explicitar cómo obtener ciertos resultados. En relación con las definiciones, vale indicar que se llego a un nivel dos, por cuanto fueron enunciadas o usadas (pero no las dos). Las situaciones se dieron en un contexto meramente matemático. Por último, cabe destacar que el tratamiento de la semejanza se dio dentro de una sola aproximación.

Figura 41.
Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 5.

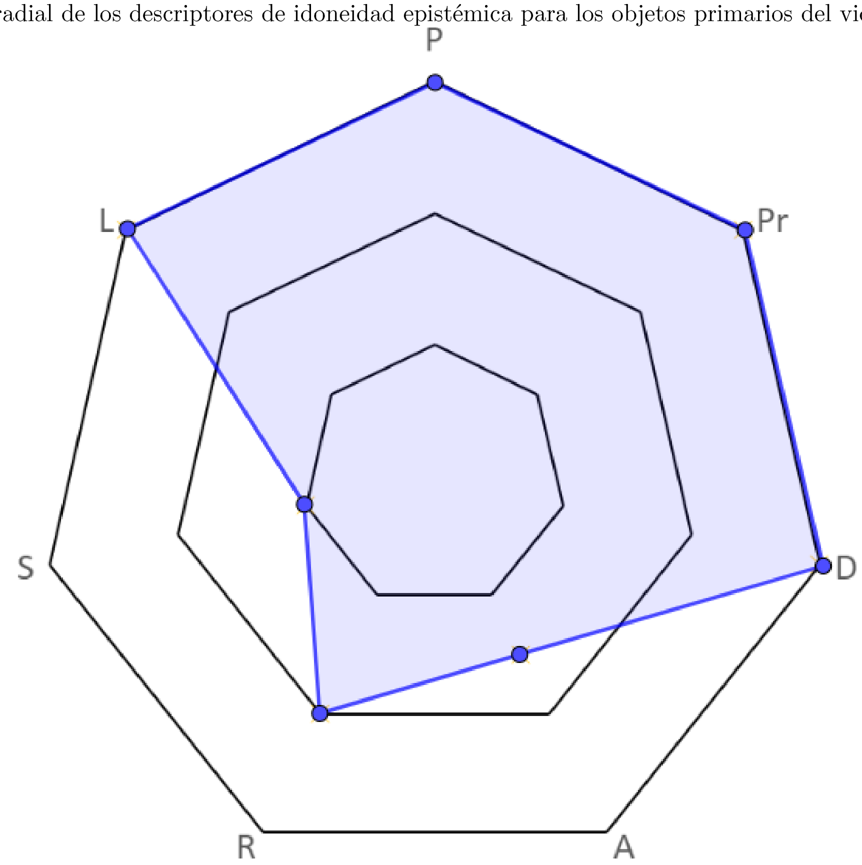


4.2.2.6 Comentarios sobre el Video 6

El tema de este video es la definición de homotecia, en el cual se presenta unas situaciones de construcción (de triángulos resultado de aplicar homotecia a otro dado).

De la Figura 45, correspondiente al diagrama radial del video 6, podemos inferir que lo relativo a los lenguajes fue bastante afortunado, porque se usaron representaciones adecuadas y además, el lenguaje verbal concordaba con lo que estaba representado. En lo que se refiere a procedimientos y definiciones, se ubicó en el nivel tres, por cuanto se eunuciaron y se usaron. Las situaciones se dieron en un contexto meramente matemático. El tratamiento de la semejanza se da dentro una sola aproximación, porque el nivel de representaciones (R) llega al nivel 2.

Figura 42.
Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 6.

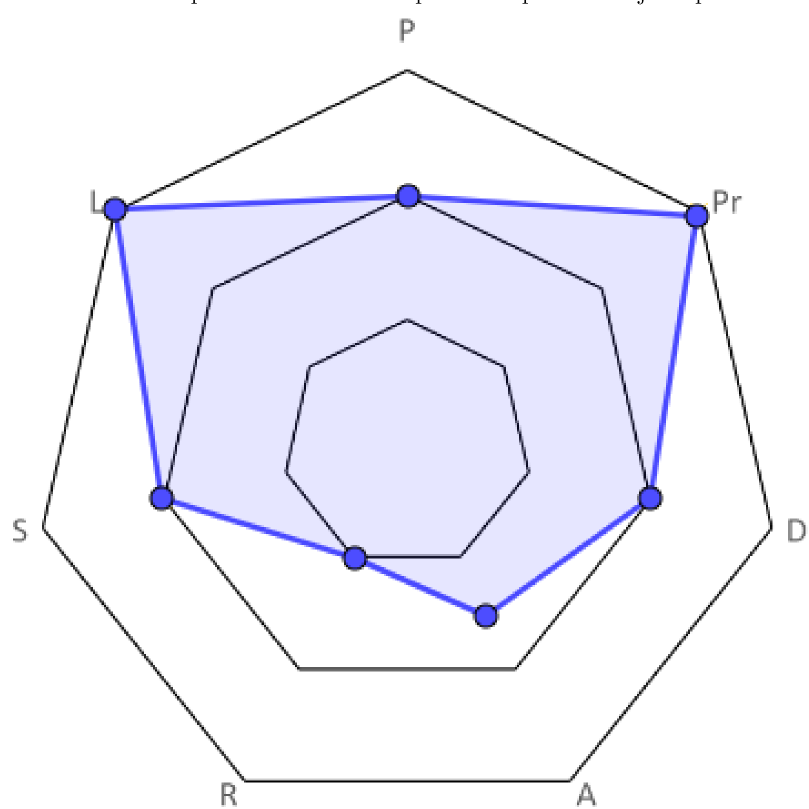


4.2.2.7 Comentarios sobre el Video 7

Recordemos que el video trata sobre aplicación de la semejanza de triángulos. En el cual se proponen 3 situaciones problemas que se resuelven con la definición de semejanza y el criterio AA.

De la Figura 46, correspondiente al diagrama radial del video 7, podemos inferir que se usaron situaciones extra matemáticas, porque el código de situaciones (S) llega a un nivel dos. El código de procedimientos y de leguajes y representaciones llega a un nivel 3, entonces podemos decir que se usaron y enunciaron procedimientos de manera pertinente, con representaciones (gráficas y simbólicas) y expresiones (verbales y escritas) que se condicen entre sí, es decir, se coordinaban de manera adecuada. Todo esto se daba en una sola aproximación.

Figura 43.
Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 7.

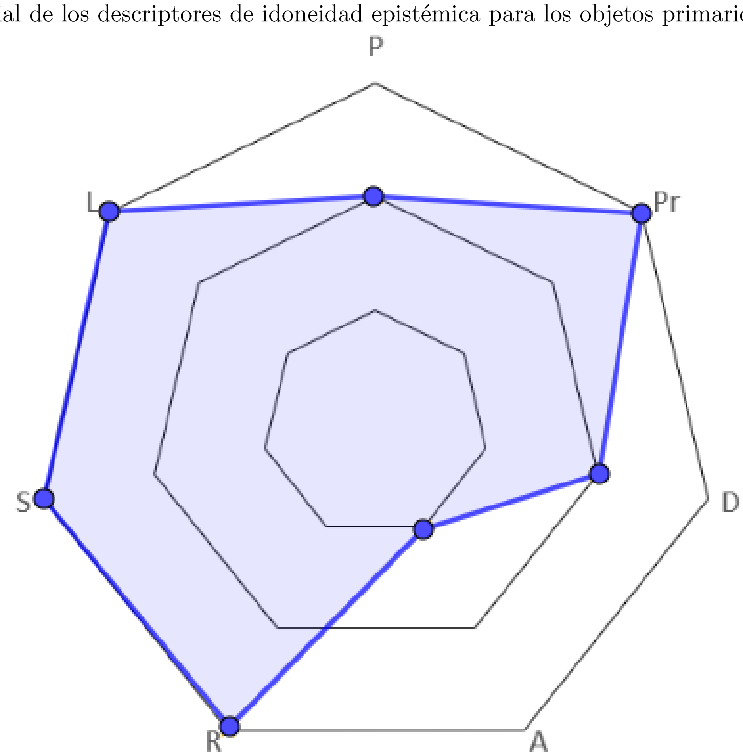


4.2.2.8 Comentarios sobre el Video 8

El video 8 trata sobre aplicación de la semejanza de triángulos. En el cual se proponen 3 situaciones de cálculo que se resuelven con la Definición de Semejanza, Teorema de Thales y Criterios de Semejanza.

De la Figura 47, correspondiente al diagrama radial del video 8, podemos afirmar que los códigos relativos a situaciones (S), lenguajes (L), representaciones (R) y procedimientos (Pr), fueron bastante afortunados, por cuanto alcanzaron el nivel 3 (nivel máximo). Esto quiere decir que las situaciones se dieron en dos contextos (matemáticos y extra-matemáticos), lo cual es bastante afortunado. Estas situaciones se abordaron con buenas representaciones, usando expresiones verbales y escritas afortunadas, enunciado y usando los procedimientos que se abordaron en diferentes aproximaciones. En lo relativo a la definición llegó a un nivel dos, por cuanto se enunciaron o usaron definiciones. Los procedimientos fueron bastante afortunados, en cuanto se usaron y enunciaron En relación con los argumentos vale indicar que llega a un nivel uno, por lo que podemos afirmar que presenta argumentos pero no los sustenta

Figura 44.
Gráfico radial de los descriptores de idoneidad epistémica para los objetos primarios del video 8.



4.2.2.9 Comentario final sobre el análisis por diagrama radial

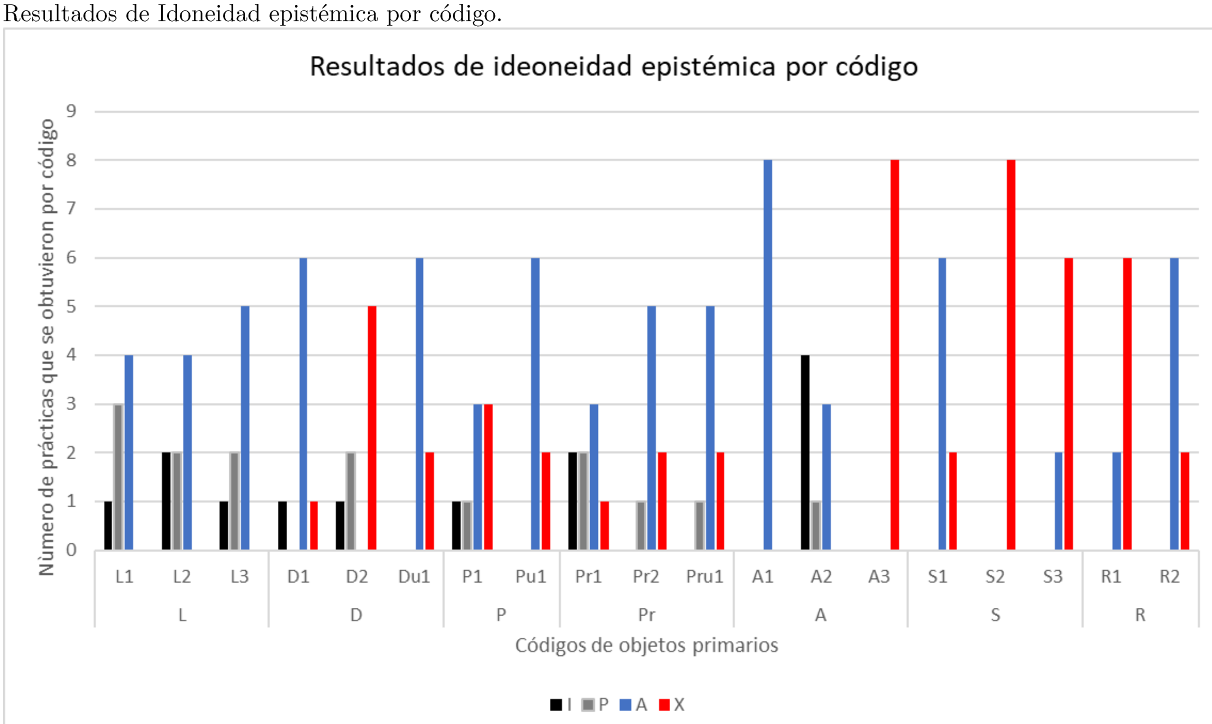
La síntesis presentada a la luz de los diagramas, se convierten en un recurso importante para las personas que quieran observar estos videos, porque, de antemano pueden saber cuáles son los objetos primarios en los que cada video pone principal atención, con lo cual el usuario del video puede saber qué video sería más idóneo según sus intereses. Así las cosas, por ejemplo, si un usuario está interesado en un video en donde haya algo de argumentos, un uso interesante de procedimientos y proposiciones podría utilizar los videos 3 y 6. Si por el contrario lo que quiere enfatizar es en la coordinación de lenguajes, en el uso de definiciones y exposición de procedimientos podría utilizar los videos 8 y 2. Desde esta perspectiva, creemos que este trabajo puede contribuir a la comunidad docente y estudiantil, a tener criterios que le permitan escoger un video idóneo para el estudio o para la enseñanza sobre la semejanza de triángulos.

4.2.2 Resultados por código

Hecha la síntesis del análisis a la luz de cada uno de los videos, ahora la intención es hacer un resumen del análisis que contemple la globalidad de los videos. En la sección previa hicimos un análisis de cada "árbol del bosque", ahora lo que queremos hacer es un análisis del "bosque completo". Para ello, nos pareció afortunado utilizar como herramienta un diagrama de frecuencia que nos permitan indicar cuántas veces apareció un código en los videos, para luego, indicar la totalidad de los códigos presentes por todos los videos, y así darnos cuenta cual es el objeto primario al cual se le da, en la globalidad, mayor relevancia y a su vez, si esa relevancia que se le da, esta trabajada de manera afortunada, lo cual nosotros distinguimos a partir de los niveles uno, dos y tres.

Para esta parte se presentan los resultados por código (Figura 48), del nivel epistemológico de los 8 videos analizados.

Figura 45.
Resultados de Idoneidad epistémica por código.



En el gráfico el indicador I (de color negro), representa las prácticas por código que se consideraron inadecuadas; P (de color gris), representa las prácticas que se consideran parcialmente adecuadas; A (de color azul), representa las prácticas que consideran adecuadas; y X (color rojo), representa los códigos que nos están presentes en el video. Al respecto de esto último, si nos fijamos, por ejemplo, en lo relativo al código D (Definiciones), encontramos que en D1 aparece una barra de color rojo cuya altura es uno, lo que indica que hay un video donde no se enuncia la definición de semejanza bajo cualquiera de sus aproximaciones; así mismo, nos podemos percatar que hay cinco videos en donde no se enuncian definiciones asociadas a la semejanza (D2); algo similar sucede con Du1, pues hay dos videos en donde no se hace uso de la definición de semejanza.

4.2.2.1 Comentarios "del bosque"

En relación con lenguajes/representaciones (L): Para este tipo de objeto, podemos notar que las prácticas fueron adecuadas, ya que superan a las prácticas parciales e inadecuadas. Vemos que el código L3, que representa las expresiones verbales y escritas es la mejor para el código L, por lo que podemos afirmar que, en general, los videos tienen un buen lenguaje escrito y verbal para comunicar ideas. Para el código L1, vemos que los diferentes tipos de representación fueron adecuados para la mitad de los videos, y solo en un video los tipos de representación fueron inadecuados. En el código L2, que nos dice sobre como los tipos de representación se coordinaban, la mitad de los videos tuvieron prácticas adecuadas, y solo dos tuvieron prácticas inadecuadas, lo que en conclusión podemos decir que los tipos de representación de los videos se condicen unos con otros.

En relación con definiciones (D): Para este tipo de objeto, podemos notar que en general las prácticas fueron adecuadas, ya que superan a las parcialmente adecuadas y a las inadecuadas. Podemos decir que en 6 de los 8 videos se enunciaron y se usaron las definiciones de manera adecuada. También podemos notar que las definiciones que se relaciones con la semejanza, como lo son paralelismo, congruencia, proporcionalidad y razón, no se enunciaron en los videos y si se enunciaban no se hacían de manera adecuada.

Para el código P de proposiciones relacionadas con la semejanza, podemos notar que en 6 de los 8 videos se usaban correctamente las proposiciones, pero en su mayoría no se enunciaban. Lo que en general podemos decir, que su enunciación y utilización se hicieron de manera adecuada.

En lo que respecta al código Pr de procedimientos, podemos notar que 5 de 8 videos tienen prácticas adecuadas en lo que se refiere a presentación y uso correcto de los procedimientos matemáticos, y solo 2 prácticas inadecuadas en lo que se refiere a enunciar el procedimiento. Por lo que podemos concluir que los procedimientos fueron adecuados tanto en su presentación y procedimiento.

Para el código A de argumentos, todos los videos presentaron 1 tipo de argumentos por video. En todos los videos se presentaron argumentos, pero en su mayoría no se sustentaban lo que se decía en los argumentos.

En el código S de situaciones, la mayoría de los videos centran las situaciones en contextos meramente matemáticos, y muy pocos centran los videos en contextos matemáticos y extra-matemáticos.

Por último, para el código R de representatividad, vemos que la mayoría de los videos se centran en una sola aproximación y muy pocos trabajan desde 2 o más aproximaciones.

4.2.2.2 Comentario final sobre el análisis global

Mirando la globalidad de los ocho videos a la luz de los códigos, nos damos cuenta de que hay una falencia manifiesta que tiene que ver con el hecho de que no hay variedad de argumentos; además, que tampoco hay variedad de situaciones extra matemáticas, ni videos que aludan tanto a situaciones matemática, como a situaciones extra matemáticas. Así mismo, hay una falencia en la representatividad uno, esto es, que los videos no aluden a diferentes aproximaciones; esto significa que los videos tratan en mayor parte a una aproximación (la intrafigural, por lo general) y no a una variedad de estas. Podemos decir también, que los videos presentan argumentos en general, pero que hay una falencia fundamental en presentar una diversidad de argumentos en lo que respecta a objetos claves como criterios de semejanza o Teorema de Thales. Por supuesto, en general hay una enunciación de definiciones para la aproximación intrafigural principalmente y que hay una tendencia a su uso para verificar situaciones de identificación de relaciones o de cálculo. En cuanto a las situaciones, hay una riqueza en aquellas meramente matemáticas, pero no sucede lo mismo en lo que respecta a situaciones extra matemáticas. Finalmente, podemos indicar que hay una representatividad de nivel 2 en casi todos los videos (6 de 8), es decir, que bajo una misma aproximación hay variedad; pero ello contrasta con el hecho que hace falta una representatividad de nivel 3, es decir, faltan videos que hagan un tratamiento de la semejanza desde las diferentes aproximaciones (intrafigural, transformacional y situacional -principalmente en situaciones extra matemáticas-).

Capítulo 5. CONCLUSIONES

Esta sección se estructura a partir de tres asuntos: El desarrollo de los objetivos planteados en el trabajo, consideraciones finales en relación con los resultados obtenidos de los análisis, y los aportes que me dejó la elaboración de este trabajo como futuro docente. En seguida, presento un desarrollo para cada uno de estos.

5.1 Conclusiones relativas a los objetivos

En la Tabla 27, se muestra para cada objetivo específico el producto que se logró realizar; ello como evidencia de que los objetivos planteados se lograron de manera satisfactoria.

Tabla 27.
Logro de los objetivos

Objetivo general	
Determinar una muestra de los más populares de la plataforma YouTube sobre semejanza de triángulos, para tener insumos sobre los cuales hacer un análisis de su contenido geométrico y, en consecuencia, tener información sobre la idoneidad epistémica de los videos más visitados sobre dicho objeto.	Se elaboró el análisis cualitativo de la Idoneidad Epistémica de ocho videos relacionados con la Semejanza de Triángulos.
Objetivos específicos	
OE1. Adaptar, al objeto semejanza de triángulos, los descriptores de la idoneidad epistémica propuestos por el Enfoque Onto-Semiótico, de forma tal que se tenga una herramienta operativa que permita realizar el análisis de idoneidad de videos de YouTube relativos a tal objeto.	Fueron escogidos los ocho videos más populares de YouTube en relación con la Semejanza, teniendo en cuenta dos de los filtros de búsqueda que esta plataforma proporciona: Relevancia y Recuento de vistas. La idoneidad de estos filtros fue sustentada a partir de una consulta bibliográfica. Ver sección 3.1.
OE2. Adaptar, al objeto semejanza de triángulos, los descriptores de la idoneidad epistémica propuestos por el Enfoque Onto-Semiótico, de forma tal que se tenga una herramienta operativa que permita realizar el análisis de idoneidad de videos de YouTube relativos a tal objeto.	Se elaboraron unos indicares y descriptores para la idoneidad epistémica de videos en relación con la semejanza de triángulos, haciendo una adaptación de la propuesta de Suárez y Zubieta (2022), quienes, a su vez, hicieron una adaptación de los indicadores y descriptores de Idoneidad Epistémica propuestos por Godino (2013) y Breda et al., (2017). Ver sección 3.2.
OE3. Utilizar los descriptores adaptados -determinados en el Objetivo Específico 2- para determinar las fortalezas y debilidades de los vídeos escogidos a través del Objetivo Específico 1.	Se elaboraron los análisis de los ocho videos escogidos usando los indicadores y descriptores producidos en respuesta al OE2. Así mismo, fueron elaborados una síntesis de resultados de tales

	análisis que nos dejaron información valiosa sobre cada video o sobre la globalidad de los videos. Ver secciones 4.2.1 y 4.2.2.

5.2 Relativas a los resultados del análisis mismo

Este trabajo de grado no pretende determinar si un video es bueno o malo. Su intención es determinar aspectos del video (en términos de tipos de objetos primarios) que son adecuados o inadecuados. Esto, para que un profesor tenga herramientas que le permitan escoger un video de acuerdo con los objetivos que se tienen planeados para su práctica profesional. De hecho, para que tenga herramientas para saber sobre qué aspectos debe enfatizar en el diseño de un video, si es que ese es su interés.

De los resultados dichos en el Capítulo 4, un mensaje general sobre los video analizados que podemos sugerir a los profesores, y que va en la dirección citada al finalizar el párrafo anterior, se puede sintetizar en los siguientes numerales:

1. En relación con la comunicación o el lenguaje: (i) El lenguaje verbal con el que se trata el tema, en ocasiones, no fue el más adecuado; por ejemplo, en varios videos se cometía el error de decir "ángulos iguales" o "este ángulo es el mismo", cuando se estaba refiriendo a ángulos congruentes. Como ya explicábamos esto se puede mal interpretar y el observador pensar que se está refiriendo a un mismo ángulo o que dos triángulos están compartiendo un mismo ángulo. (ii) Las representaciones gráficas, en más de la mitad de los videos, no eran las más afortunadas; específicamente, no se nombraban los vértices de los triángulos, lo cual implicaba que no hubiera fluidez en la comunicación de las ideas o se echara mano de lenguaje coloquial, no especializado, sobre los objetos involucrados. Pese a estas falencias, en cualquier caso, la idea general que se pretendía comunicar se dejaba leer producto de la coordinación de lenguajes (podríamos decir que una falencia en un tipo de lenguaje se corregía producto del uso de otro lenguaje).
2. En relación con las definiciones: En varios de los videos, no se enunciaban de manera explícita las definiciones o proposiciones importantes; ello, por supuesto, implicaba una referenciación no clara de tales definiciones como garantías que permitían sustentar aspectos de las situaciones estudiadas. Vale indicar, en relación con el tratamiento de la definición de semejanza, que la aproximación transformacional es bastante escasa (2 de los 8 videos hacen este abordaje) si se com-

para con la intrafigural. Concebimos esto como una falencia dado que los documentos del MEN relativos a delinear el currículo propone abordar la semejanza desde dicha aproximación. Más aún, los abordajes estaban en el marco de la homotecia para inferir semejanza, semejanza que previamente era caracterizada de manera intrafigural; pero no en el marco de definir la semejanza con la homotecia que, en sentido estricto, es la aproximación transformacional.

3. En relación con los argumentos: Un punto negativo de los videos, que se asocia con el comentario anterior, es que hay aserciones hechas por el ávatar o el comunicador del video, que no son sustentadas con base en la información que el mismo video presentaba o con conocimiento matemático básico. Desde nuestra perspectiva, es absolutamente importante, a la hora de diseñar una clase, escoger un video o diseñarlo, procurar incentivar que todo lo que se afirme tenga una garantía que lo sustente (empírica o teórica, según el caso -nivel escolar o intenciones educativas-).
4. En relación con los procedimientos: La mayoría de las situaciones en los videos eran de cálculo, con lo cual el procedimiento de "despejar una incógnita" era recurrente. Lastimosamente, dicho procedimiento, en la mayoría de los videos se describía sin hacer uso de las propiedades aritméticas que sustentan la valides de cada uno de sus pasos. Fue usual, entonces, encontrar frases como "si está sumando pasa a restar", en lugar de citar las propiedades de la monotonía para la adición en una igualdad.
5. De la síntesis del análisis global y del diagrama de barras correspondiente pudimos notar que hay un descuido importante en lo que se refiere a variedad de argumentos y variedad de situaciones; por esta razón hacemos un llamado de atención a crear contenido referente a la semejanza de triángulos, teniendo en cuenta la variedad de argumentos para los criterios de semejanza, por ejemplo, y la variedad de situaciones en un mismo video.
6. De la síntesis de los análisis por cada video y los diagramas radiales correspondientes se pudo indicar cual video sería el video más afortunado sobre la semejanza de triángulos, que puede escoger un profesor o alumno, según sus intenciones educativas. En últimas, estamos contribuyendo a la comunidad de educadores en términos de decir, dependiendo de sus intereses, cuál de los ocho videos estudiados cuál sería el más idóneo para tener menor incertidumbre en el potencial de su uso.

Relativas a la formación docente

Creo que para mi formación docente este trabajo de grado aportó en varios aspectos:

1. En la capacidad de investigar. Es muy importante el trabajo investigativo y el elaborar este trabajo hizo crecer el interés en elaborar trabajos de investigación a futuro.
2. En la capacidad de producir textos académicos. Aunque considero que falta mucho, este trabajo aumento de manera considerable las habilidades en este aspecto.
3. En el objeto mismo. La semejanza de triángulos es un tema que no manejaba, no conocía muchos aspectos teóricos en este objeto. Este trabajo me permitió conocer bastante del objeto matemático y aplicarlo en mi dimensión laboral. Esto porque se hace una apropiación tanto el objeto matemático, como en la forma como se enseña. Por ejemplo, en lo que se refiere a la semejanza de triángulos, hay varios vacíos conceptuales que llenan con la apropiación del tema.

REFERENCIAS

Anchundia, P. (2020). El empleo del YouTube como herramienta de aprendizaje. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales* , págs. 11-20.

Beltran-Pellicier, P., Giacomone, B., & Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specifi didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Bernal, P., Osorio, D., & Toloza, J. (2019). *Semejanza de triángulos.* Informe.

Breda, A., & Font, V. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: boletim de educação matemática*, 32, 255-278.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2017). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*.

Escudero, I. (2003). *La semejanza como objeto de enseñanza - aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica.* Sociedad española de investigación matemática. Obtenido de https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Escudero03.pdf

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 379-391.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del concimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 127-135.

Julio, L. (2014). *Transformaciones en el plano y la nociòn de semejanza [Tesis de maestria, Universidad Nacional de Colombia].* Repositorio Institucional. Obtenido de https://repositorio.unal.edu.co

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje V.2 Matemáticas.* Bogotá. Obtenido de https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* Bogotá. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moise, E., & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna.* Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

Salón matemático. (25 de Diciembre de 2016). Obtenido de https://salonmatematico.com

Suáres, A., & Zubieta, C. (2022). *Análisis de idonidad epistémica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico de videos de YouTube relacionados con el teorema de pitágoras.* Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Valentina, G. (20 de Septiembre de 2016). *Rockcontent.* Obtenido de https://rockcontent.com/