UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

Hugo Steven Poveda Girata

SIGMA ÁLGEBRA, UNA MIRADA TOPOLÓGICA

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2019

SIGMA ÁLGEBRA, UNA MIRADA TOPOLÓGICA

Hugo Steven Poveda Girata
Cód:2014240045
C.C:1072661250

Trabajo de Grado

Director:

Donado Núñez Gil Alberto de Jesús

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Dedicado a mis padres que siempre han estado para apoyarme

Agradecimientos

A Dios que me dio la oportunidad de estudiar en la Universidad Pedagógica Nacional y me dio fuerza para poder concretar esta meta.

A mis Padres y hermanos que han sido un gran apoyo en todo momento y sin los cuales no hubiera podido finalizar este proyecto.

Al profesor Alberto Donado, por su compresión, por sus valiosos comentarios y preguntas, que me han servido para finalizar este trabajo.

A la Universidad Pedagógica Nacional que me abrió sus puertas y me acogió como a un hijo.

Al Departamento de Matemática, a sus profesores y demás empleados, que me han brindado su amistad y con su ayuda me han permitido desarrollarme a nivel profesional y a nivel personal.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	SIGMA ÁLGEBRA, UNA MIRADA TOPOLÓGICA
Autor(es)	Poveda Girata Hugo Steven
Director	Donado Núñez Gil Alberto de Jesús
Publicación	Bogotá Universidad pedagógica Nacional ,2019, 80 p.
Unidad Patrocinante	Universidad pedagógica Nacional
Palabras Claves	SIGMA ÁLGEBRA; FUNCIÓN MEDIBLE; TOPOLOGÍA; FUNCIONES CONTINUAS; TEORÍA DE CATEGORÍAS.

2. Descripción

El trabajo se propuso con la idea de identificar las analogías que existen entre la colección de todas las Sigma Álgebras sobre un conjunto y la colección de las topologías sobre el mismo conjunto, dada su gran similitud en sus definiciones, para esto se estudiaron las Sigma Álgebras de forma análoga a como se estudian las topologías desde un punto de vista categórico, su relación de contenencia , la estructura de retículo completo , la forma de construirlas y la cualidad para poseer estructuras iniciales y finales .

3. Fuentes

En este trabajo se utilizaron diversas fuentes, las más relevantes fueron.

Donado, A., Montañez, R. (2002). Algunas Categorías Topológicas Asociadas A Colecciones De Conjuntos. *Memorias De los encuentros de Geometría y Aritmética,* Tomo 1, 255-265.

Donado, A., Hernández, J., Montañez, R. (2002). (2013). Ambientes Categóricos para la Topología. Encuentro de Geometría Y sus Aplicaciones, XXI, 2-28.

García, A. (2008). *Teorías de la Medida y de la Probabilidad*. Cáceres, España: Universidad de Extremadura.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. ($4°$ ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Rubiano G. (2002). *Topología general*. ($2°$ ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Zó, N. F. (2013). *Medida e integral de Lebesgue.* Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires.

4. Contenidos

El primer capítulo, denominado preliminares, está constituido por la definición de los objetos que se utilizarán, además, de algunas propiedades de estos objetos.

En el segundo capítulo, denominado σ-Álgebra, se inicia presentando algunos ejemplos de sigmas algebras en diferentes conjuntos; finitos, infinitos contables, infinitos no contables, además, se identifican propiedades relevantes para la colección $Sig(X)$ y se presenta una primera forma de conseguir una σ-Álgebra a partir de una colección de subconjuntos de X .

En el tercer capítulo, se pretende relacionar por medio de la contenencia de conjuntos a $Sig(X)$ y $Top(X)$, con lo que se muestran ejemplos y contra ejemplos para poder establecer dicha relación, en el segundo momento de este capítulo, se trata de establecer una forma de construir σ-Álgebras a partir de un conjunto cualquiera.

En el cuarto capítulo, se confirma que para cualquier conjunto X su fibra $Sig(X)$ forma un retículo completo, además se comprueba la existencia de estructuras iniciales y finales, todo con el fin de comprobar que Sig es una categoría topología, por último, se establece un funtor entre Top y Sig.

.

.

5. Metodología

Inicialmente se realizó la búsqueda y selección de la información más relevante sobre la noción de Sigma Álgebra, luego se analizaron varios ejemplos de Sigma Álgebras tanto en conjuntos numerables como no numerables ,teniendo esta noción más clara se empezó a buscar información en libros de topología , teoría de la medida y teoría de categorías, con el fin de empezar a ligar los conceptos de Sigma Álgebra y topología , por último se tomó como referencia el estudio de la categoría Top para estudiar las Sig de forma semejante al de las topologías.

6. Conclusiones

- Por medio de diferentes conjuntos se pueden generar la misma Sigma álgebra, un caso particular es la sigma álgebra de Borel generada por diferentes topologías sobre $\mathbb{R}$.
- Semejante a la topología se pueden utilizar operaciones entre conjuntos para construir sigmas álgebras, el proceso es el siguiente: se toma un conjunto cualquiera, se realiza una partición finita del conjunto y por último se realizan todas las uniones finitas sobre la partición, en consecuencia, el conjunto obtenido resulta ser una Sigma álgebra sobre el conjunto inicial y, además, resulta ser la más pequeña que lo contiene. Este proceso permite generar un Sigma álgebra por cada partición que se realice sobre el conjunto inicial.
- En un conjunto finito se puede acotar inferiormente la cantidad de Sigmas álgebras sobre el conjunto, ya que, al ser el conjunto finito, se puede contar cuantas particiones hay en dicho conjunto y, por lo tanto, generar esa cantidad mínima de Sigmas álgebras, este valor se obtiene utilizando el numero Bell, que es una función que proporciona el número de particiones posibles en un conjunto finito.
- Una forma de definir particiones sobre un conjunto es definiendo una relación de equivalencia en dicho conjunto, por lo tanto, para cualquier conjunto una relación de equivalencia define una Sigma álgebra y, además, esto permite definir una forma de construir Sigmas álgebras sobre un conjunto utilizando relaciones, el cual implicaría definir una relación de equivalencia sobre el conjunto inicial, tal que, la partición resultante fuera finita.
- Esta forma de construir Sigmas Álgebras sobre un conjunto resulto la forma técnica de encontrar las Sigma Álgebra generada por un conjunto.
- Las Sigmas álgebras y las topologías hacen parte de un estudio más grande, el de las Algebras sobre conjuntos, el cual es mucho más amplio y abarca una gran cantidad de estructuras como, por ejemplo; los filtros, topologías, Sigmas álgebras entre otras, además, esta noción de Algebras sobre conjuntos permite definir estructuras nuevas y estudiarlas en forma semejante a como se estudian las topologías.
- Toda Sigma álgebra sobre un conjunto finito o infinito numerable es una topología, ya que, todas las σ-Álgebras cumplen las dos primeras propiedades de las topologías y su única diferencia estriba en la diferencia que existe en la unión, aunque parezca trivial, es la causante de que las σ-Álgebra no sean topologías ya que la unión de una colección de elementos en una σ-Álgebra es estable solo para conjuntos contables, mientras que la unión de una colección de elementos en una topologías es estable para uniones contables y no contables , por lo tanto, en conjuntos contables toda Sigma álgebra cumpliría la propiedad tres de las topologías.

- Existen Sigmas álgebras en conjuntos no contables que no son topologías, un caso particular es la Sigma álgebra generada por todos los conjuntos sobre $\mathbb{R}$ que son medibles según Caratheodory, en este caso se observa que los conjuntos de Vitali los cuales no son medibles son los responsables de que el conjunto mencionado no sea una topología.
- Al analizar los objetos de Sig, se concluyó que para cualquier conjunto X diferente de vacío su fibra $Sig(X)$ tiene estructura de retículo Completo, lo cual nos permite afirmar que la colección $Sig(X)$ posee elemento máximo y mínimo, además, está parcialmente ordenado.
- Al establecer relaciones entre las fibras se concluyó que la colección Sig es apta para estructuras iniciales y finales, además, al ser el funtor olvido de Sigma Álgebra un funtor fiel y al tener que toda $Sig(X)$ tiene estructura de retículo completo se dedujo que la categoría Sig es una categoría Topológica.
- Construyendo el funtor Borel se tiene que de cualquier topología se puede generar una Sigma Álgebra que la contenga y que respete las funciones continuas, esto es posible al tomar cada topología como base para generar una Sigma Álgebra y, de igual forma, a partir de una Sigma Álgebra se puede construir una topología tomando como subbase la Sigma Álgebra y respetando las funciones medibles.

Elaborado por:	Hugo Steven Poveda Girata
Revisado por:	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús.

Fecha de elaboración del Resumen:	4	11	2019

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **"σ- algebras, una mirada topológica",** elaborado por el estudiante:

Hugo Steven Poveda Girata código 2014240045 y cédula 1072661250.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **45** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria ___ Laureada ___

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de marzo de 2020.

Director del Trabajo: Profesor ______________________
GIL ALBERTO DONADO NUÑEZ

Jurado:

Profesor ______________________
JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN

Contenido

Tabla de Imágenes

Lista de tablas

Introducción

La definición de Sigma Álgebra tiene una gran similitud con la de topología, al observar los objetos y morfismos de Sig es fácil darse cuenta en el parentesco que tienen con los objetos y morfismo Top, por esto, en este trabajo, se pretende realizar un estudio de las Sigmas Álgebras, tomando como modelo, el estudio que se realiza en la categoría Top, sin embargo , hay que aclarar que este no es un estudio categórico de Sig, ya que un estudio de esa clase, se desbordaría de los objetivos planteados.

El primer capítulo, denominado preliminares, está constituido por la definición de los objetos que se utilizarán, además, de algunas propiedades de estos objetos, las cuales permitirán llegar a diferentes conclusiones, esta información ha sido recolectada de los diferentes libros que se exponen en la bibliografía.

En el segundo capítulo, denominado σ-Álgebra, se inicia presentando algunos ejemplos de sigmas algebras en diferentes conjuntos; finitos, infinitos contables, infinitos no contables, además, se identifican propiedades relevantes para la colección $Sig(X)$ y se presenta una primera forma de conseguir una σ-Álgebra a partir de una colección de subconjuntos de X .

En el tercer capítulo, denominado las σ-Álgebra y las topologías, se pretende relacionar por medio de la contenencia de conjuntos a $Sig(X)$ y $Top(X)$, con lo que se muestran ejemplos y contra ejemplos para poder establecer dicha relación, en esta parte del proyecto, se encuentran las analogías más relevantes para este trabajo, en el segundo momento de este capítulo, se trata de establecer una forma de construir σ-Álgebras a partir de un conjunto cualquiera, tomando como directriz el método con el que se generan topologías.

En el cuarto capítulo, denominado la categoría σ-Álgebra, se inicia el estudio propiamente dicho de la categoría Sig, se confirma que para cualquier conjunto X su fibra $Sig(X)$ forma un retículo completo, además se comprueba la existencia de estructuras iniciales y finales, todo con el fin de comprobar que Sig es una categoría topología , por último se establece un funtor entre las categorías Top y Sig utilizando la σ-Álgebra de Borel.

En el quinto capítulo, denominado conclusiones, se presentan los resultados obtenidos en este trabajo, donde se puede observar el cumplimiento de los objetivos propuestos y se resalta las analogías que existen entre las topologías y las σ-Álgebras.

Para finalizar, se presenta la bibliografía que se utilizó tanto para definiciones; propiedades y demostraciones que se presentaron en este trabajo, además, de un anexo el cual es una demostración que se realizó tomando como referencia a (Fava & Zó, 2013).

Justificación

Este proyecto se justifica en cuanto permite analizar la noción de σ-álgebras en otro contexto, el topológico y categórico, permitiendo comprender mejor dicha noción y sus propiedades en un ambiente diferente, además, al estudiar las σ-álgebras desde las categorías se conseguirá reestudiarlas desde un punto de vista más general, el de las estructuras matemáticas.

A nivel pedagógico la justificación para realizar este trabajo es la oportunidad de ampliar y profundizar algunos temas de mi propio interés, esto permitirá apaciguar mi avidez por nuevos conocimientos y desarrollar nuevas habilidades que beneficien a mis futuros estudiantes.

A nivel científico, dada la importancia de la noción de σ-algebra en diciplinas como: Probabilidad, Estadística, Análisis Matemático, Análisis Funcional entre otros, se cree conveniente diseñar un documento donde se pueda identificar sus características de forma no tan rigurosa, exponiéndolas desde una perspectiva diferente, que sea más familiar y accesible para los estudiantes de DMA, con esto se espera que este trabajo constituya un pequeño aporte al estudio de las σ-álgebras y por ende a estudios más avanzados , como por ejemplo, la teoría de la medida.

Objetivos

Objetivo general

Realizar un estudio de las σ-álgebras desde una mirada topológica.

Objetivos específicos

- Estudiar la colección de todas las σ-álgebras sobre un conjunto.
- Establecer posibles analogías entre las σ-álgebras y las topologías sobre un conjunto.
- Describir la Categoría Sig, Identificando sus objetos, sus morfismos y la composición de estos.
- Establecer algunos funtores entre las categorías Sig y Top.

1. Preliminares

El propósito de este apartado es presentar los elementos más relevantes para la realización de los objetivos propuestos.

1.1 Partes De Un Conjunto

Dado un conjunto se puede observar cuantos subconjuntos tiene, la colección de todos los subconjuntos de X se denomina conjunto potencia o partes del conjunto, este concepto toma gran preponderancia al estudiar las Sigmas Álgebras ya que de este surge su definición.

Sea X un conjunto arbitrario, se define el conjunto potencia 2^x o el conjunto partes de X $\left(P(X)\right)$al conjunto de todos los subconjuntos de X (Neira, 2011, pág. 168).

$$A \subseteq X \leftrightarrow A \in P(X)$$

Ejemplo:

Sea $X = \{ 0, 1\}$, entonces el conjunto $\mathcal{P}(X) = \{\phi, X, \{0\}, \{1\}\}$, donde los elementos de $\mathcal{P}(X)$ son todos los posibles subconjuntos de X.

El cardinal de partes de X, entendiendo cardinal como la cantidad de elementos de un conjunto, es:

$$\#(\mathcal{P}(X)) = 2^{\#(X)}$$

1.2 Imagen reciproca de una función

Sea X y Y dos conjuntos, y $f: X \longrightarrow Y$ una función. La función $f^{-1}: P(Y) \longrightarrow P(X)$, definida como $f^{-1}(N) = \{ x \in X ; f(x) \in N \}$ para todo $N \in P(Y)$. Se denomina Inversa de f , y al conjunto $f^{-1}(N) \subseteq X$ se le nombra imagen reciproca o inversa de N. (Muñoz, 2002, pág. 85)

Hay que resaltar que f envía elementos sobre elementos mientras f^{-1} transforma conjuntos entre conjuntos, se hace hincapié en esto, debido a la confusión que surge entre esta función inversa y la función inversa originada por funciones biyectivas, donde sus imágenes son también elementos. En este documento al no ser que se aclare, las funciones inversas a las que se hace referencia son la imagen reciproca de f.

Las siguientes son algunas de las propiedades más significativas de la imagen reciproca de f, las cuales se utilizarán en el presente trabajo. (Rubiano, 2002, pág. 2)

i. $$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

ii. $$f^{-1}(Y) = X$$

iii. $$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

iv. $$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(\mathcal{T}_i)$$

v. $$f^{-1}\left(A^C\right) = (f^{-1}(A))^C$$

1.3 Algebra de conjuntos

Es el estudio algebraico de las operaciones que se pueden realizar sobre un conjunto; unión, intersección y complemento.

1.4 σ-Algebra sobre un conjunto X

Sea $X \neq \phi$, Una colección $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ es una σ-Álgebra sobre X, si cumple las siguientes condiciones (Castañenda, 2004, pág. 7).

$\boldsymbol{S}$ **1**. El conjunto $X \in \boldsymbol{\tau}$**.**

$\boldsymbol{S}$ **2**. Si $A \in \boldsymbol{\tau}$ entonces $A^C \in \boldsymbol{\tau}$ (estable bajo complementos).

$\boldsymbol{S}$ **3**. Dada una colección contable de elementos de $\boldsymbol{\tau}$, entonces, su unión es un elemento de $\boldsymbol{\tau}$ **,** es decir, Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \boldsymbol{\tau}$ **,** con $i \in I \subseteq \mathbb{N}$**,** entonces,$\bigcup_{i\in I} A_i \in \boldsymbol{\tau}$ (estable bajo uniones contables).

Nota: un conjunto se dice contable si y solo si existe una función biyectiva con un subconjunto de los números naturales $\mathbb{N}$**.**

La pareja (X, τ) se denomina espacio medible. Si $A \in \boldsymbol{\tau}$ entonces A se denomina conjunto medible.

Las siguientes son algunas de las propiedades más notables en una σ-Álgebra.

1) ***propiedad uno***: $\phi \in \boldsymbol{\tau}$

Demostración:

1. $\Omega \in \tau$	Propiedad $S1$
2. $\Omega^c \in \tau$	Propiedad $S2$
3. $\Omega^c = \phi$	Def. complemento conjunto Universal
4. $\phi \in \tau$	Por 2 y 3

Tabla 1 Demostración Vacío

2) Propiedad dos:

Sea (X, τ) un espacio medible entonces τ es estable bajo intersecciones contables.

Es decir, la intersección de una familia contable de elementos de τ es también un elemento de τ**.**

Sea la colección $\{t_i\}_{i\in I}$ con $I \subseteq \mathbb{N}$, tal que, para todo $i \in I$ se cumple que $t_i \in \tau$, entonces,

$$\bigcap_{i\in I} t_i \in t$$

Demostración:

1.	Sean $t_i \in \tau, \forall\, i \in I$	Dado
2.	$t_i{}^C \in \tau, \forall\, i \in I$	Propiedad $s2$
3.	$\bigcup_{i\in I} t_i{}^C \in \tau$	Propiedad $S3$
4.	$(\bigcup_{i\in I} t_i{}^C)^C \in \tau$	Propiedad $S\ 2$
5.	$(\bigcup_{i\in I} t_i{}^C)^C = \bigcap_{i\in I} t_i$	Leyes de Morgan
6.	$\bigcap_{i\in I} t_i \in \tau$	Por 4 y 5

Tabla 2 Demostración Intersección

3) Propiedad tres:

Sea (X, τ) un espacio medible entonces τ es estable bajo la diferencia de conjuntos, es decir, Sean $t_1, t_2 \in \tau$ entonces $t_1 - t_2 \in \tau$.

Demostración:

1.	$t_1, t_2 \in \tau$	Dado
2.	$t_1{}^C, t_2{}^C \in \tau$	Propiedad $S\ 2$
3.	$t_1 \cap t_2{}^C \in \tau$	Propiedad dos en 1 y 2
4.	$t_1 - t_2 = t_1 \cap t_2{}^C$	Def. Diferencia de conjuntos
5.	$t_1 - t_2 \in \tau$	Por 3 y4

Tabla 3 Demostración Diferencia

1.4.1 Función Medible

Sean (X_1 , t_1) y (X_2, t_2) dos espacios medibles, se denomina a la función

$$f: X_1 \rightarrow X_2 \; o \; f: (X_1 , t_1) \longrightarrow (X_2, t_2)$$

Como medible si y solo si:

$f^{-1}(A) \in t_1$ Para todo $A \in t_2$ (Garcia, 2008, pág. 19).

1.5 Topología sobre un conjunto X

Sea $X \neq \phi$, Una colección $t \subseteq P(X)$ es una Topología sobre X, si cumple las siguientes condiciones (Rubiano, 2002, pág. 9).

***T* 1**. El conjunto X y $\phi \in t$

***T* 2**. Si $A \; y \; B \in t$ entonces $A \cap B \in t$ (Cerrada bajo intersecciones finitas).

***T* 3**. La unión de cualquier colección de t pertenece a t (cerrada bajo uniones arbitrarias), es decir, Si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, con $i \in I \subseteq \mathrm{I}$, entonces, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

La pareja (X, t) se denomina espacio topológico. Si $A \in t$ entonces A se denomina conjunto abierto.

1.5.1 Función continua

Sean (X_1 , t_1) y (X_2, t_2) dos espacios topológicos, se denomina a la función

$$f: X_1 \rightarrow X_2 \; o \; f: (X_1 , t_1) \longrightarrow (X_2, t_2)$$

Como continua si y solo si:

$f^{-1}(A) \in t_1$ Para todo $A \in t_2$ (Rubiano, 2002, pág. 49).

1.6 Categorías

Una categoría C se define por (Donado, Hernández, & Montañez, 2013, pág. 5).

i. Una colección no vacía cuyos elementos se llaman objetos. Esta colección se denomina $Obj(C)$.

ii. Una colección no vacía de conjuntos disyuntos y eventualmente vacíos $Mor(X,Y)$ para cada $X,Y \in Obj(C)$. Los elementos del conjunto $Mor(X,Y)$ se nombran $\boldsymbol{morfismos}$ del objetos X ($dominio$) al objeto Y ($codominio$) y son representados por $f\colon \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}, X \xrightarrow{f} Y$ o simplemente $\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$.

La unión de todos los conjuntos de morfismos constituye la colección de morfismos de la categoría C y se denota:

$$Mor(C) = \bigcup_{X,Y \in Ob(C)} Mor(X,Y)$$

iii. Una ley de composición interna en $Mor(C)$ nombrada $composición$ ($\circ$) tal que si $X,Y,Z \in Ob(C)$, $f \in Mor(X,Y)$ y $g \in Mor(Y,Z)$, existe un único morfismo $g \circ f \in Mor(X,Z)$ es decir:

$$Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \longrightarrow Mor(X,Z)$$

$$(f,g) \longmapsto g \circ f$$

Que satisfacen los siguientes axiomas:

I. $\circ$ es asociativa, es decir, para $f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$ y $h \in Mor(Z,W)$ se cumple:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

II. $\circ$ tiene identidades, es decir, para todo $X \in Mor(C)$ existe un morfismo identidad $1_X \in Mor(X,X)$ tal que para todo $f \in Mor(Y,X)$ y para todo $g \in Mor(X,Y)$ se cumple:

$$1_X \circ f = f\ , \qquad g \circ 1_X = g$$

Es claro que el Morfismo 1_X es único para cada $X \in Ob(C)$.

En resumen, una categoría C es una colección de morfismos dotados de una composición minimal (asociatividad, identidades)

Ejemplo: La categoría de los espacios topológicos Top (Donado, Hernández, & Montañez, 2013, pág. 7).

i. Los $Obj(Top)$ es la colección de los espacios topológicos.

ii. Para $A, B \in \ Ob(Top)$,es decir, $A = (X, t)$y $B = (Y, v)$ donde t y v son topologías sobre X y Y respectivamente, se define los morfismos como $Mor(A, B) = \{ f{:}\, f$ es una función continua$\}$.

iii. Para $f \in Mor(A, B)$ y $g \in Mor(B, C)$, Con A, B y $C \in Ob(Top)$, $g \circ f$ es la composición usual de funciones y al ser una composición de funciones continuas se puede comprobar que es continua, es decir, $g \circ f \in Mor(A, C)$, además satisface:

I. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ para $f \in Mor(A, B)$, $g \in Mor(B, C)$ y $h \in Mor(C, D)$.

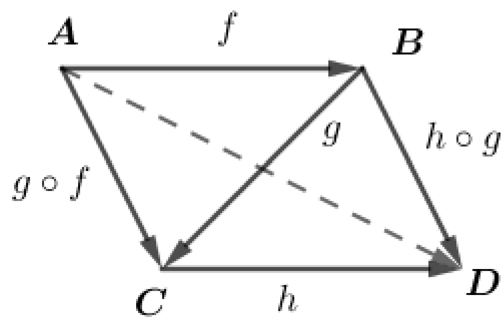


imagen 1 $Top(X)$ composición

Generalmente en la teoría de categoría se utilizan puntos y flechas pare representar los objetos y los morfismos.

II. Para cada $A \in Ob(Top)$, si $1_A\,(x) = x$, se verifica que 1_A es continua, así mismo, $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$ para todo $f \in Mor(A, B)$ y $g \in Mor(B, A)$.

Ejemplo: La categoría de los espacios Medibles Sig.

1. Los $Obj(Sig)$ es la colección de los espacios medibles, es decir, si $A \in Obj(Sig)$ entonces $A = (X, t)$ donde $X \neq \emptyset$ y $t \in Sig(X)$.

2. Para $A, B \in Obj(Sig)$, si $A = (X, t)$ y $B = (Y, v)$ donde t y v son $\sigma - Algebras$ sobre X y Y respectivamente, se define los morfismos $Mor(A, B) = \{f: f$ es una función medible$\}$.
3. Para $f \in Mor(A, B)$ y $g \in Mor(B, C)$, Con A, B y $C \in Ob(Top)$, $g \circ f$ es la composición usual de funciones y al ser una composición de funciones medibles se puede comprobar que es medible , es decir, $g \circ f \in Mor(A, C)$, además satisface.
   a. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ para $f \in Mor(A, B)$, $g \in Mor(B, C)$ y $h \in Mor(C, D)$.
   b. Para cada $A \in Ob(Sig)$, si $1_A(x) = x$, se verifica que 1_A es medible , así mismo, $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$ para todo $f \in Mor(A, B)$ y $g \in Mor(B, A)$.

Para garantizar que dicha composición es una función medible tomemos como referencia el siguiente gráfico:

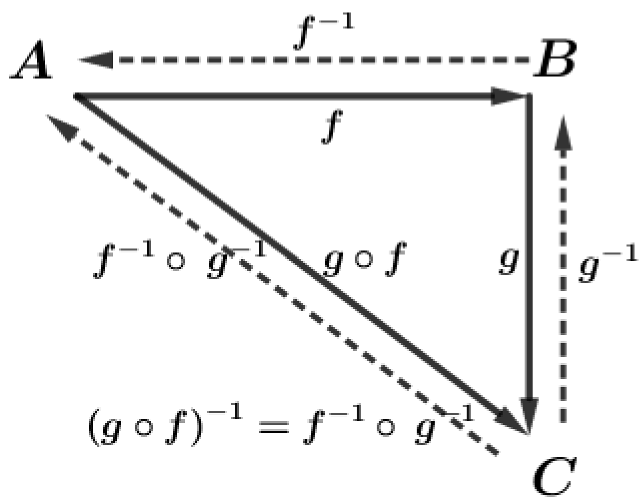


imagen 2 $Sig(X)$ Composición

Sea $f: (A, t_1) \longrightarrow (B, t_2)$ y $g: (B, t_2) \longrightarrow (C, t_3)$ funciones medibles, es decir: $f^{-1}(B) \in t_1$ para todo $B \in t_2$ y $g^{-1}(C) \in t_2$ para todo $C \in t_3$.

Para demostrar que $g \circ f$ es una función medible se demuestra que $(g \circ f)^{-1}(C) \in t_1$ para todo $C \in t_3$. Se puede comprobar en la grafica $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ se tiene entonces que $(f^{-1} \circ g^{-1})(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ como g es medible tenemos $g^{-1}(C) \in t_2$ y como f es medible se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in t_1$ con lo que se comprueba que $g \circ f$ es medible.

1.7 Funtor

Sean C y D dos categorías, un funtor F de la categoría C en la categoría $D, F: C \longrightarrow D$, es una aplicación que envía objetos en objetos, morfismos en morfismos y preserva la Ley de composición y las identidades, es decir, $F: C \longrightarrow D$ es un funtor si cumple que (Donado, Hernández, & Montañez, 2013, pág. 10).

1. Si $A \in Obj(C)$ entonces $F(A) \in Obj(D)$.

$$F: Ob(C) \longrightarrow Ob(D)$$

$$A \longmapsto F(A)$$

2. Si $f \in Mor_C(A, B)$ entonces $F(f) \in Mor_D(F(A), F(B))$,tal que cumple las siguientes condiciones:

i. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

ii. $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Ejemplo:

El funtor olvido de estructura de Top en $Conj$.

$O: Top \longrightarrow Conj$ está definido como:

i. $O((X, t)) = X$, para todo, $A = (X, t) \in Obj(Top)$.

ii. $O(f) = f$,para todo, $f \in Mor(A, B)$.

Este funtor desprende la topología del conjunto X y de esta forma la continuidad de las funciones relacionadas.

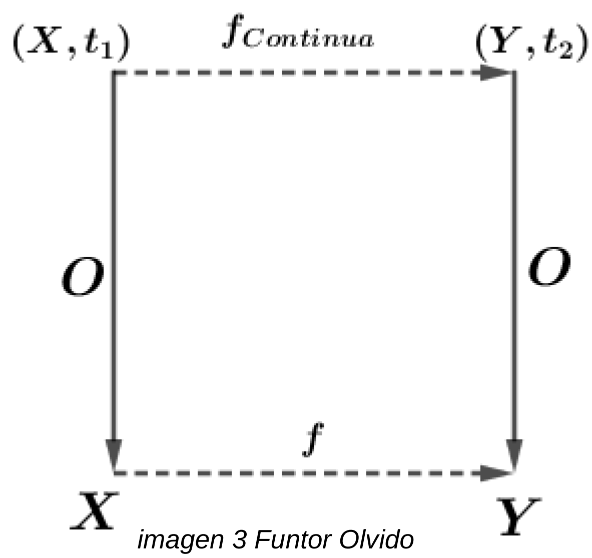


imagen 3 Funtor Olvido

1.8 Categorías Topológicas

Sea el funtor $F: C \longrightarrow Conj$, se dice que C es una categoría topología si se cumplen las siguientes condiciones. (Donado & Montañez, 2002, pág. 256).

1. F es fiel.
2. F es acto para construir estructuras iniciales y finales.
3. Para cada conjunto X, la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

1.9 Retículo completo

Un retículo completo es un conjunto ordenado, $(R, \leq)$ en el que cualquier colección de conjuntos en R tiene supremo e ínfimo. Por ejemplo, todas las topologías sobre un conjunto X,con la relación ser más fina, forman un retículo completo, esta relación coincide con la relación de contenencia, heredadas en las topologías al ser elementos de $P\big(P(X)\big)$.

1.10 Axioma de elección.

Para cualquier colección de conjuntos no vacíos y disjuntos, existe un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada conjunto de la colección dada. (Fava & Zó, 2013, pág. 115).

1.11 Relación de Equivalencia

Una relación R se llama de equivalencia en un conjunto A, sí cumple que (Muñoz, 2002, pág. 109).

- Para todo $x \in X$, xRx, R es reflexiva.
- Para todo $x, y \in X$, si xRy,entonces yRx, R es simétrica.
- Para todo $x, y, z \in X$, si xRy y yRz, entonces xRz, R es transitiva

1.12 Partición de un conjunto

Una partición de un conjunto no vacío X es una colección de subconjuntos no vacíos de X, disyuntos dos a dos y cuya unión es X. un teorema muy conocido relaciona las particiones con las relaciones de equivalencia, su enunciado dice: toda partición de un conjunto no vacío determina una relación de equivalencia en dicho conjunto. (Muñoz, 2002, págs. 112-113).

1.13 Numero de Bell

Es el número de relaciones de equivalencia en un conjunto de n elementos, los primeros números de Bell empezando por B_0 son: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975.

2. σ-Álgebra

En este capítulo se expondrán ejemplos de colecciones que son Sigmas Álgebras, teniendo en cuenta que, al tener una gran variedad de referentes, se es más fácil familiarizarse con el concepto y en este caso poder observar varias Sigmas Álgebras permitirá poder afianzarnos con estas, además, se realizan algunas demostraciones que permiten observar de forma más detallada, las propiedades que cumplen la Sigmas Álgebras, como una colección de subconjuntos de un conjunto dado.

3. Ejemplos de $\boldsymbol{\sigma - \text{Á}lgebras}$

1. **Ejemplo:** Sea $X \neq \phi$, El conjunto $P(X)$ es una σ-Álgebra y se denomina la σ-Álgebra discreta.
2. **Ejemplo:** La colección $\{ X , \phi\}$ es una σ-Álgebra sobre X y se denomina la σ-Álgebra $t$rivial.
3. **Ejemplo:** Sea $X \neq \phi$, y $A \subseteq X$ entonces t_A =$\{ X , \phi , A , A^c\}$ es una σ-Álgebra y es la más pequeña a la que pertenece A.

Demostración:

Es fácil darse cuenta de que la colección t_A es una σ-Álgebra sobre X. Se demostrara que es la más pequeña que contiene el subconjunto A , sea t una σ-Álgebra sobre X, tal que $A \in t$, luego, por ser t σ-Álgebra tenemos que X y $\phi \in t$ y además $A^c \in t$, por lo tanto , como para todo elemento de t_A se cumple que pertenece a t , se puede afirmar que $t_A \subseteq t$. Con esto se concluye que t_A es la Sigma Álgebra más pequeña que contiene a A.

4. **Ejemplo:** σ-Álgebra Inducida por un subconjunto.

Sea (X,T) un espacio medible y $A \subseteq X$ tal que $A \neq \phi$.

La colección $T_A = \{t \cap A;\ t \in T\}$ es una σ-Álgebra sobre A.

Demostración:

1.	$X \subseteq T$	Por ser T una Sigma Álgebra
2.	$X \cap A = A \in T_A$	Def de T_A
3.	Sea $v \in T_A$	Hipótesis
4.	Existe $v_1 \in T; v = v_1 \cap A$	Def de T_A
5.	Existe ${v_1}^c \in T;\ {v_1}^c \cap A \in T_A$	Por ser v_1 un elemento de T y Def de T_A.
6.	Como $({v_1}^c \cap A) \cup v = A$	Propiedad distributiva de ∪. Unión de complementos
7.	Luego $({v_1}^c \cap A) = v^c$	Def. Complemento
8.	$v^c \in T_A$	Def de T_A.
9.	Sea $\{v_i\}_{i\in I} \in T_A$	Hipótesis, con $I \subseteq \mathbb{N}$
10.	Existe $\{t_i\}_{i\in I} \in T; v_i = t_i \cap A$ para todo $i \in I$	Def de T_A.
11.	$\bigcup_{i\in I} t_i \in T$	Por ser T una Sigma Álgebra
12.	$\left(\bigcup_{i\in I} t_i\right) \cap A \in T_A$	Def de T_A.
13.	$\bigcup_{i\in I}\left((t_i \cap A)\right) \in T_A$	Propiedades Unión de conjuntos
14.	$\bigcup_{i\in I} v_i = \bigcup_{i\in I}\left((t_i \cap A)\right)$	Aplicando unión en la igualdad 10

15.	$$\bigcup_{i\in I} v_i \in T_A$$	Sustitución en 13,14
16.	T_A es una Sigma Álgebra sobre A	Def. Sigma Álgebra 2,8,15

Tabla 4 Sigma Álgebra Inducida

5. **Ejemplo:** Podemos definir una σ-Álgebra sobre un conjunto X no contable de la siguiente manera.

Sea $W = \{\, U \in P(X)\ ;\ \ U\ \ es\ contable\ \ o\ \ U^{\,c} es\ contable\}$. entonces W es una Sigma Álgebra.

Demostración:

i. Como el conjunto $\emptyset$ es contable, entonces, $X \in W$ por definición de W.

ii. Sea $A \in W$ entonces A es contable o $A^{\,c}$ es contable, si A es contable entonces $A^{\,c} \in W$ por ser su complemento contable, si $A^{\,c}$es contable entonces $A^{\,c} \in W$ por ser el mismo contable.

iii. Sea la colección $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq W$, y denominemos a la unión contable $\bigcup_{i\in I} A_i = \mathcal{A}$, para demostrar que $\mathcal{A} \in W$ se deben considerar dos casos.

1. Si $\mathcal{A}$ es contable, entonces $\mathcal{A} \in W$ por definición de W.
2. Si $\mathcal{A}$ es no contable, entonces, existe por lo menos un $j \in I$, tal que, A_j es no contable, además, se tiene que $A_j{}^c$ es contable dado que $A_j \in W$, por lo tanto, como $\mathcal{A}^C = (\bigcup_{i\,\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\,\in I} A_i{}^c$ y $\bigcap_{i\,\in I} A_i{}^c \subseteq A_j{}^c$, podemos concluir que $\mathcal{A}^C \subseteq A_j{}^c$, por lo tanto, como todo subconjunto de un conjunto contable es contable , podemos concluir $\mathcal{A}^C$ es contable, con esto se comprueba que $\mathcal{A} \in W$ por definición de W.

Con esto podemos afirmar que el conjunto W es una Sigma Álgebra sobre X no contable.

6. **Ejemplo:**

Para este ejemplo se debe responder primero la siguiente pregunta, ¿La intersección de σ-Álgebra sobre un conjunto X es una σ-Álgebra?

La respuesta a esta pregunta es si

Demostración:

Sea $Sig(X)$ el conjunto de todas las σ-Álgebra sobre el conjunto X y $\{t_i\}_{i\in I}$ una colección de elementos de $Sig(X)$ (Con I un conjunto de índices cualquiera), entonces, $\bigcap_{i\in I} t_i$ es un elemento de $Sig(X)$.

1.	$X \in t_i$ para todo $i \in I$	Por ser $t_i \in Sig(X)$ Utilizando Condición $S1$
2.	$X \in \bigcap_{i\in I} t_i$	Def. de Intersección 1
3.	$A \in \bigcap_{i\in I} t_i$	Hipótesis
4.	$A \in t_i$ para todo $i \in I$	Def. de Intersección 3
5.	$A^C \in t_i$ para todo $i \in I$	Por ser $t_i \in Sig(X)$ Utilizando Condición $S2$
6.	$A^C \in \bigcap_{i\in I} t_i$	Def. de Intersección 5
7.	$\{A_i\}_{i\in J} \subseteq \bigcap_{i\in I} t_i$	Hipótesis ($con\ J \subseteq \mathbb{N}$)
8.	$\{A_i\}_{i\in J} \subseteq t_i$ para todo $i \in I$	Def. de Intersección
9.	$\bigcup_{i\in J} A_i \in t_i$ para todo $i \in I$	Por ser $t_i \in Sig(X)$ Utilizando Condición $S3$
10.	$\bigcup_{i\in J} A_i \in t_i \in \bigcap_{i\in I} t_i$	Def. de Intersección

11.	$\bigcap_{i\in I} t_i \in Sig(X)$	Por 2,6 y 10

Tabla 5 Intersección de $Sig(X)$

Por lo tanto, se puede concluir que la intersección arbitraria de elementos de $sig(X)$ es una σ-Álgebra.

7. **Ejemplo**: Sea X un conjunto diferente de vacío y $B \subseteq P(X)$ entonces existe una única σ-Álgebra Q sobre X que cumple las siguientes condiciones.

   1. $B \subseteq Q$

   2. Si Q^* es otra σ-Álgebra sobre X , tal que $B \subseteq Q^*$ entonces $Q \subseteq Q^*$. Esto quiere decir que Q es la σ-Álgebra más pequeña que contiene a B.

A la colección Q se denomina la σ-Álgebra generada por B y se denota $\boldsymbol{\sigma}(B)$.en otras palabras, Q es la intersección de todas las σ-Álgebras que contienen a B, es decir:

Sea $C = \{t_i \in Sig(X);\ B \subseteq t_i \ y \ i \in I\}$ entonces:

$$Q = \bigcap_{t_i \in C} t_i$$

Ahora bien, como Q es la intersección de una familia de σ-Álgebra entonces por la demostración anterior Q también es una σ-Álgebra , ahora, para garantizar ser la más pequeña se utiliza la siguiente demostración:

Sea t_i otro elemento de $Sig(X)$ talque $t_i \in C$, se tiene entonces que $\bigcap_{t_i \in C} t_i \subseteq t_i$, para todo $i \in I$, por propiedades de intersección de conjuntos, por lo tanto, remplazando $\bigcap_{t_i \in C} t_i$, se concluye $Q \subseteq t_i$ para todo $i \in I$.

Por lo tanto, el conjunto Q es una σ-Álgebra sobre X y es la más pequeña que contiene al conjunto B, se denomina la generada por B. Cabe mencionar que esto nos permite obtener una σ-Álgebra dado cualquier conjunto. Unas de las σ-Álgebra generadas por un conjunto que tiene mayor relevancia en diferentes diciplinas son las denominadas de Borel.

Es fácil observar que diferentes conjuntos pueden generar la misma Sigma Álgebra, por ejemplo, sea $X = \{1,2,3\}$ y $t = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2,3\}\}$ una Sigma Álgebra sobre X, los conjuntos $\{1\}$ y $\{2,3\}$ generan la misma Sigma Álgebra, $\sigma(\{1\}) = t = \sigma(\{2,3\})$. En general el conjunto A y A^C generan las mismas Sigmas Álgebras.

Definición: La σ-Álgebra $\mathcal{B}$ generada por una topología t se denomina la σ-Álgebra de Borel en t y sus elementos se denomina conjuntos de Borel o Borelianos.

Por lo tanto, dada cualquier topología podemos generar una σ-Álgebra.

8. **Ejemplo:** Sea τ_u la topología usual en $\mathbb{R}$ la σ-Álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ se define como la σ-Álgebra generada por τ_u y se denota como $\mathcal{B}_R$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ o $\sigma(\tau_u)$.hay que comentar que diferentes topologías sobre un mismo conjunto pueden generar la misma σ-Álgebra, por ejemplo, para la σ-Álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ hay varias topologías que la generan. Sea τ_{izq} la topología de colas a izquierda, es decir, la topología generada por la base $(\leftarrow, a] = \{(-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}$. podemos decir que $\sigma(\tau_u)$= $\sigma(\tau_{izq})$, esto significa que τ_u y τ_{izq} generan la misma σ-Álgebra. ahora se identifican los elementos que pertenecen a $\mathcal{B}_R$.

Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\tau_{izq})$= $\sigma\{(-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}$

Los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$ son Borelianos.

- $(a, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $(a, \infty) = (-\infty, a]^c$.
- $(-\infty, a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, a - \frac{1}{n}]$.
- $[a, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $[a, \infty) = (-\infty, a)^c$.
- $[a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $[a, b] = (-\infty, b] - (-\infty, a)$.
- $[a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $[a, b) = (-\infty, b) - (-\infty, a)$.
- $(a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $(a, b] = (-\infty, b] - (-\infty, a]$.
- $(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $(a, b) = (-\infty, b) - (-\infty, a]$.
- Si $a = b$ en el intervalo $[a, b]$ entonces $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n]$.

De manera semejante surge la pregunta; ¿La unión de una colección de elementos de $sig(x)$ es una σ-Álgebra? La respuesta a esta pregunta es no necesariamente, esto queda demostrado en el siguiente contra ejemplo:

Sea $X = \{a, b, c\}$ entonces $P(X) = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Sean $\mathcal{T}_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{X, \phi, \{b\}, \{a, c\}\}$ luego

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}\}$ donde tenemos que $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ pero $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$

Con lo cual se observa que la unión de σ-Álgebra no necesariamente es un una Sigma Álgebra.

Sin embargo, podemos definir la siguiente Sigma Álgebra utilizando uniones.

9. **Ejemplo:** Sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in Sig(X)$ y $U = \{\mathcal{T}\ Sig(X) / \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}\}$ entonces

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \bigcap_{\mathcal{T} \in U} \mathcal{T} \in Sig(X)$$

y además es la más pequeña que contiene a $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

4. Las σ –Álgebras y las topologías

En este capítulo se analizarán algunas similitudes y relaciones que existen entre la coleccion ($\boldsymbol{Top(X)}$) y la colección σ –algebra ($\boldsymbol{Sig(X)}$) sobre un conjunto $X \neq \phi$, dado que entre estas dos colecciones concurren diferentes analogías, como por el ejemplo, ambas colecciones son subconjuntos de $P(X)$, y las dos se derivan de otra rama de las matemáticas denominada algebras sobre conjuntos

5. Relaciones

Una forma de establecer una relación entre dos conjuntos es por medio de la contenencia. Teniendo en cuenta que tanto $Top(X)$ como $Sig(X)$ son colecciones de conjuntos de $P(P(X))$ se responde:

1. ¿ $Top(x) \cap Sig(X) \neq \emptyset$?

Es decir, existe un $t \in Top(X)$ y $t \in Sig(x)$, la respuesta es sí. para demostrar esto tomemos el siguiente ejemplo sea $X = \{1,2,3\}$ y $P(X) = \{X, \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}. \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ el conjunto $t = \{X, \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ es una topología y una σ-Álgebra sobre X el conjunto $P(X)$ y $\{X, \phi\}$ también son topologías y σ-Álgebra sobre X,

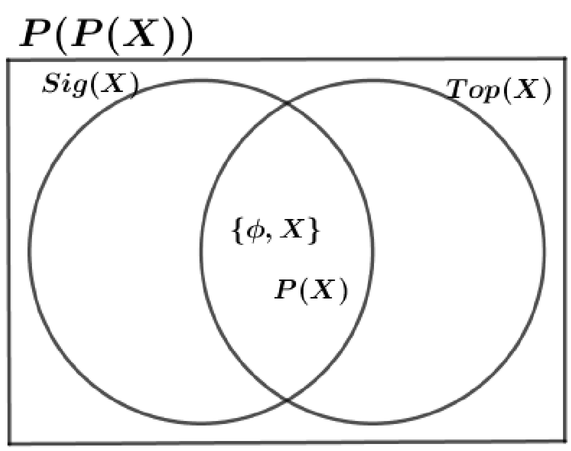


imagen 4 $Sig(X) \cap Top(X)$

en general dado un X numerable, un conjunto $t \in P(X)$ de la forma $t = \{X, \phi, A, A^C\}$ es una σ-Álgebra y una topología.

2. ¿ $Top(x) \subseteq Sig(X)$?

Es decir, las topologías son un subconjunto de las Sigmas Álgebras sobre X. La respuesta es no, para demostrar esto se utiliza un contra ejemplo:

Sea $X \neq \phi$ y $A \subset X$ la colección $\boldsymbol{T} = \{X, \phi, A\}$ es una topología, pero no es una Sigma Álgebra, dado que, $A^C \notin T$. Por lo tanto $Top(x) \nsubseteq Sig(X)$.

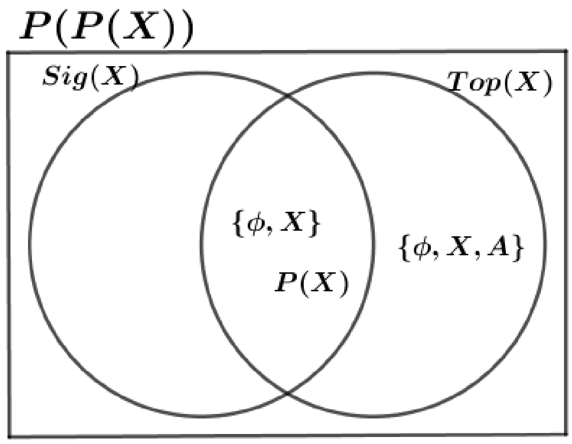


imagen 5 $Top(X) \subseteq Sig(X)$

3. ¿ $Sig(X) \subseteq Top(X)$?

Es decir, las Sigmas Álgebras sobre X son un subconjunto de las topologías sobre X.

La respuesta es no, para demostrar esto se utiliza un contra ejemplo, el cual no resulta tan trivial, teniendo en cuenta la semejanza de las definiciones de $Sig(X)$ y de $Top(X)$,ya que su diferencia es muy sutil. el siguiente cuadro presenta una comparación entre sus definiciones.

	σ-Álgebra	Topologías
1.	$Sig(X) \subseteq P(P(X))$	$Top(X) \subseteq P(P(X))$
2.	$\forall\ t \in Sig(X)$	$\forall\ t \in Top(X)$
3.	$X, \emptyset \in t$	$X, \emptyset \in t$
4.	$A\ y\ B\ \in t \ \longrightarrow A \cap B\ \in t$	$A\ y\ B\ \in t \ \longrightarrow A \cap B\ \in t$
En la intersección difieren en el sentido que para las $\sigma - Algebras$ su intersección es cerrada para colecciones finitas e infinitas numerables		

<table>
<tr><td colspan="3">y las topologías solo para intersecciones finitas. por lo que si tengo una σ-Álgebra y dos elementos en ella siempre puedo encontrar su intersección.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Si $A_1, A_2, A_3 \ldots \in t$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in t$, con $i \in \mathbb{N}$</td><td>Si $A_1, A_2, A_3 \ldots \in t$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in t$, con $i \in \mathrm{I}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Como las σ-Álgebras cumplen las dos primeras propiedades de las topologías la diferencia que existe en la unión, aunque parezca trivial, es la causante de que las σ-Álgebra no sean topologías ya que la unión de una colección de elementos en una σ-Álgebra es estable solo para un infinito numerable de conjuntos, mientras que la unión de una colección de elementos en una topologías es ,estable para uniones infinitas numerables y no numerables de conjuntos, por lo tanto, para demostrar que una σ-Álgebra no es una topología hay que tomar una colección de elementos de σ-Álgebra y comprobar que su unión infinita no numerable no pertenece a la σ-Álgebra. De esto podemos inferir que si nuestro conjunto universal X es infinito numerable siempre se cumple que $Sig(X) \subseteq Top(X)$.</td></tr>
</table>

Tabla 6 Comparación Sig y Top

El conjunto del ejemplo 5 es una Sigma Álgebra que no es una Topología, ya que, para $W = \{\, U \in P(X)\,;\ U\ es\ contable\ o\ U^{c} es\ contable\}$, se tiene que, para una colección no contable de conjuntos contables su unión no pertenece a W. Se tiene que X es no contable y sea el conjunto $B \subseteq X$ tal que, B es no contable y B^c es no contable, entonces la siguiente unión de conjuntos contables es no contable y además su complemento es no contable.

$$\bigcup_{x \notin B} \{X\} = X - B$$

Por lo tanto, no pertenece a W , con esto se demuestra que W no es estable para uniones no contables por lo tanto W no es una topología. Un ejemplo para esta conclusión es cuando tenemos $X = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{I}^{+}$,(irracionales positivos) y $B^c = \mathbb{R} - \mathbb{I}^{+}$.

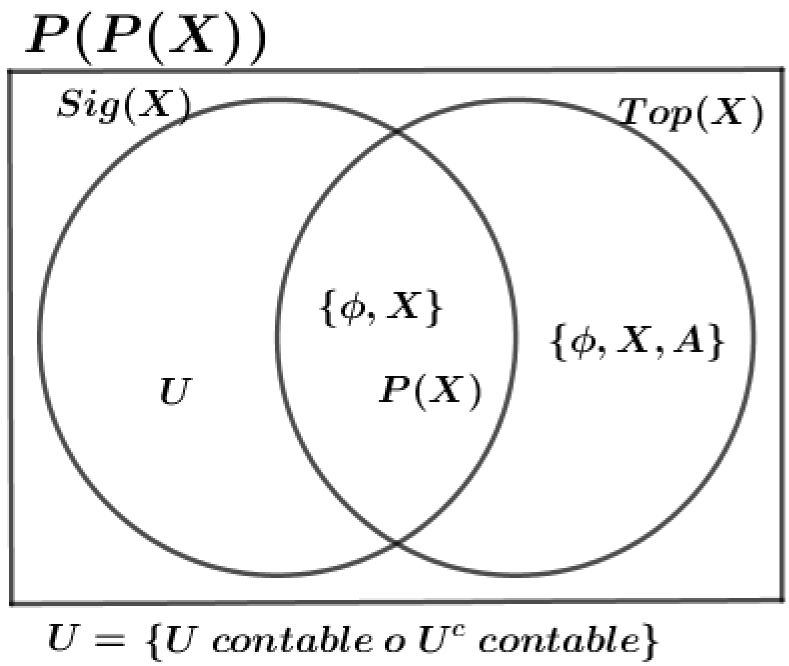


imagen 6 contable

Para establecer otra colección que es una Sigma álgebra pero que no es una topología se hará huso de forma $''intuitiva''$ de algunas definiciones y resultados de la teoría de la medida, los siguientes pasos muestran la forma de construir este conjunto (Fava & Zó, 2013, pág. 105).

1. Una medida en un Conjunto X es función que tiene como dominio un $A \subseteq P(X)$ y como codominio los números reales extendidos.
2. Se toma un conjunto con todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que sean medibles según la propuesta Lebesgue[1] . este conjunto es el propuesto por Caratheodory[2] quien utiliza una equivalencia para identificar los elementos de este conjunto, denominémoslo $\mathcal{M}$.
3. Se demuestra que $\mathcal{M}$ es una Sigma Álgebra.
4. Se demuestran algunas propiedades de $\mathcal{M}$, la más relevante es la invarianza de la medida de los elementos de $\mathcal{M}$ respecto a traslaciones.

[1] Henri León Lebesgue (1875, 1941) matemático francés, conocido por sus aportes a la teoría de la medida y de la integral.
[2] Constantin Caratheodory (1873, 1950) matemático alemán.

5. Se construye el conjunto de Vitali [3] denotado V, este conjunto se construye, particionando (con una relación de equivalencia) un subconjunto de los números reales en una colección no numerable, de conjuntos numerables, luego, utilizando el axioma de elección se toma un elemento de cada clase de equivalencia, los cuales son medibles, y se genera el conjunto V como la unión de estos elementos.
6. Se demuestra que $V \notin \mathcal{M}$, ya que V no es medible según Lebesgue, esto se comprueba ya que la medida de V se modifica con traslaciones.
7. Se concluye entonces que para una colección $\{v_i\}$ de elementos de $\mathcal{M}$ se tiene que la unión no numerable $\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i \notin \mathcal{M}$ por lo tanto $\mathcal{M}$ no es una topología ya que no cumple la condición $T3$.

Con esto se concluye que $Sig(X) \nsubseteq Top(X)$.[4]

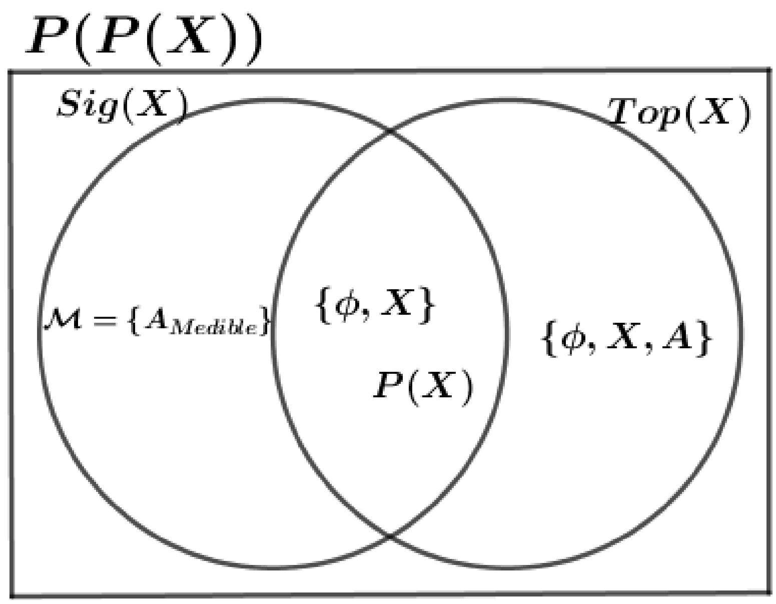


imagen 7 $Sig(X) \nsubseteq Top(X)$

Dado que el encontrar esta colección implico el uso del axioma de elección se podría conjeturar que en teorías donde no se valide este axioma se podría tener la siguiente relación.

$$Sig(X) \subseteq Top(X)$$

[3] Giuseppe Vitali (1875, 1932) matemático italiano, dio el primer ejemplo de un conjunto no medible según Lebesgue en los números reales.
[4] Una demostración no tan rigorosa se expone en los anexos.

3.2 Construcción de $\sigma - Algebras$.

De topología general se sabe que dado cualquier subconjunto de un conjunto X podemos generar una topología que lo contenga, utilizando primero intersecciones y luego uniones. A esta colección se denomina una subbase para una topología y al conjunto generado por las intersecciones de los elementos de la subbase se denomina base para una topología.

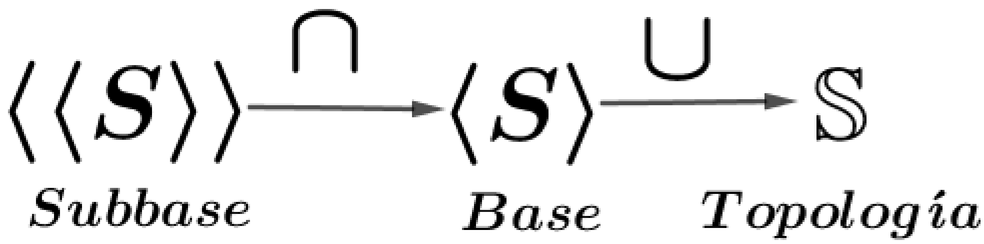


imagen 8 Construcción Topología

En este capítulo se espera poder definir un método a partir de operaciones entre conjuntos, tal que, dado cualquier conjunto se pueda construir una sigma algebra.

La forma de generar una Sigma Álgebra dado un conjunto cualquiera inicia particionando el conjunto y luego por medio de uniones finitas se obtiene una Sigma Álgebra. para demostrar la validez de este método se demostrará lo siguiente.

Sea X un conjunto no vacío y sea $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_i\}$ una partición finita en X, entonces el conjunto formado por todas las uniones finitas de P es la Sigma Álgebra generada por P,es decir:

$$\langle P\rangle = \left\{\bigcup_{i\in I} P_i\,; I \subseteq \{1,2,3,\dots,n\} n \in \mathbb{N}\right\} = \sigma(P)$$

Demostración

Para demostrar esta igualdad $\langle P\rangle = \sigma(P)$ demostremos primero que $\langle P\rangle \subseteq \sigma(P)$.

Al utilizar la definición de Sigma Álgebra generada se tiene que $P \subseteq \sigma(P)$ por lo que, para todo $P_i \in P$ se cumple que $P_i \in \sigma(P)$ y al ser $\sigma(P)$ una Sigma Álgebra se cumple que $\bigcup_{i\in I} P_i \in \sigma(P)$ por lo tanto se tiene que $\langle P\rangle \subseteq \sigma(P)$.

Ahora para demostrar $\sigma(P) \subseteq \langle P\rangle$ se debe comprobar que $\langle P\rangle$ es una Sigma Álgebra.

Demostración:

i. Como P es un cubrimiento de X, por ser una partición, es decir, $X = \bigcup P_i$,entonces, al ser X una unión finita de elementos P_i, se cumple que $X \in \langle P \rangle$.

ii. Sea $A \in \langle P \rangle$,entonces, debe existir un $I_A \subseteq \{1,2,3,\dots,n\}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I_A} P_i$,de esta manera se tiene que.

$$X - A = \bigcup_{i \in I} P_i - \bigcup_{i \in I_A} P_i$$

Aplicando la propiedad de operaciones en conjuntos $A - B = A \cap B^C$ se tiene.

$$X - A = \bigcup_{i \in I} P_i \bigcap \left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right)^c$$

Como la colección P es una partición sobre X y $\bigcup_{i \in I_A} P_i \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i$, entonces existe un $I_{A^C} \subseteq \{1,2,3,\dots,n\}$ tal que.

$$\bigcup_{i \in I} P_i = \left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in I_{A^C}} P_i \right)$$

Por lo tanto, remplazando.

$$X - A = \left[\left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in I_{A^C}} P_i \right) \right] \bigcap \left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right)^c$$

Aplicando propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.

$$X - A = \left[\left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right)^c \right] \bigcup \left[\left(\bigcup_{i \in I_{A^C}} P_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right)^c \right]$$

Como $A \cap A^C = \emptyset$ se tiene que.

$$X - A = \left[\left(\bigcup_{i \in I_{A^C}} P_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i \in I_A} P_i \right)^c \right]$$

Ahora, se demuestra la siguiente igualdad.

$$\left(\bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i\right) = \left(\bigcup_{i\,\in I_A} P_i\right)^c$$

Demostración.

1.	$\text{sea } v \in \left(\bigcup_{i\,\in I_A} P_i\right)^c$	Hipótesis
2.	Para todo $i \in I_A$ se tiene que $v \notin P_i$.	Definición de Complemento
3.	Existe $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ y $j \notin I_A$ tal que $v \in P_j$.	Por ser P una partición de X .
4.	$j \in I_{A^C}\ y\ P_j \subseteq \bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i$	Por ser P_j elemento de la partición P
5.	$v \in \bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i$	Propiedades de contenencia en 3,4
6.	$\left(\bigcup_{i\,\in I_A} P_i\right)^c \subseteq \bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i$	Por ser definición de contenencia en 1,6

Por otro lado, sea $v \in \bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i$ entonces, existe un $j \in I_{A^C}$ tal que $v \in P_j$, y además para todo $i \in I_A$ se tiene que $v \notin P_i$.porque si existiera un $i \in I_A$ tal que $v \in P_i$, se tendría que $v \in P_i \cap \mathrm{P}$, lo cual es una contradicción, ya que los conjunto P_i, P_j son disyuntos. Por lo cual $v \in \left(\bigcup_{i\,\in I_A} P_i\right)^c$.con esto se concluye que $\bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i \subseteq \left(\bigcup_{i\,\in I_A} P_i\right)^c$.estos resultado me permiten afirmar que.

$$\left(\bigcup_{i\,\in I_A} P_i\right)^c = \bigcup_{i\,\in I_{A^C}} P_i$$

Y por lo tanto

$$X - A = A^c = \bigcup_{i \in I_{A^C}} P_i$$

Al poder expresar A^c como la unión finita de elementos de P se concluye que $A^c \in \langle P \rangle$.

iii. Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una colección de elementos de $\langle P \rangle$, entonces, para cada elemento de la colección, va a existir $I_k \subseteq I = \{1,2,3, \dots, n\}$ tal que.

$$P_k = \bigcup_{i \in I_k} P_i$$

Realizando la unión infinita numerable en $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tenemos.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I_k} P_i$$

Teniendo en cuenta lo siguiente.

$v \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I_k} P_i$	Si y solo si para algún k se cumple que	$v \in \bigcup_{i \in I_k} P_i$
$v \in \bigcup_{i \in I_k} P_i$	Si y solo si para algún k existe un $j \in I_k$ tal que	$v \in P_j$

Entonces, teniendo en cuenta que.

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \subseteq \{1,2,3, \dots, n\}$$

Y además como $j \in I_k$, es decir que pertenece a I y $v \in P_j$ se concluye que

$$v \in \bigcup_{i \in I} P_i$$

Con esto se puede decir que.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i$$

Como la demostración anterior se realizó utilizando solo la doble implicación es fácil concluir que.

$$\bigcup_{i \in I} P_i \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} P_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$$

Como I es finito ya que es la unión de conjunto finitos, entonces, $\bigcup_{i \in I} P_i$ es finita con lo cual, al poder definir la unión de la colección $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como finita se puede afirmar que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \in \langle P \rangle$, por lo tanto, la colección $\langle P \rangle$ es una Sigma Álgebra sobre X.

Como la colección $P \subseteq \langle P \rangle$ porque cada elemento P_i de P se puede ver como la union finita de sí mismo y al ser $\sigma(P)$ la Sigma Álgebra más pequeña que contiene a P se concluye que $\sigma(P) \subseteq \langle P \rangle$, por se puede afirmar la siguiente igualdad.

$$\langle P \rangle = \left\{ \bigcup_{i \in I} P_i \, ; I \subseteq \{1,2,3, \ldots, n\} n \in \mathbb{N} \right\} = \sigma(P)$$

Con esto podemos generar un esquema para construir una Sigma Álgebra a partir de un conjunto cualquiera , en este sentido difiere al método que se usa para generar una topología ya que este parte de un elemento de partes del conjunto, primero se toma el conjunto y se realiza una partición en él, luego se genera un conjunto formado por todas las uniones finitas de la partición , este conjunto resulta ser una Sigma Álgebra sobre el conjunto inicial y además resulta ser la más pequeña que contiene a la partición .

$$\underset{Conjunto}{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\;Partición\;} \underset{Base}{\langle \boldsymbol{P_X} \rangle} \xrightarrow{\;\bigcup\;} \underset{Sigma\ \acute{A}lgebra}{\mathbb{P}}$$

imagen 9 Construcción Sigma Álgebras

De este método podemos concluir que para cada partición de un conjunto X podemos generar un Sigma Álgebra y como hablar de particiones implica relaciones de equivalencias se puede decir que por cada relación de equivalencia en X se puede generar una Sigma Álgebra.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{R.\ Equivalencia} & \langle P_X \rangle & \xrightarrow{\bigcup} & \mathbb{P} \\ Conjunto & & Base & & Sigma\ \acute{A}lgebra \end{array}$$

imagen 10 Construcción de Sigma Álgebras 2

Se sabe de topología general que contar cuantas topología hay sobre un conjunto finito no es una tarea fácil, sin embargo, para las Sigmas Álgebras, utilizando la conclusión anterior, podemos poner una cota mínima de Sigmas Álgebras sobre el conjunto, es decir, no sabemos cuántas hay pero podemos asegurar que por lo menos hay cierta cantidad, esto se infiere del hecho de que existe formas de contar relaciones de equivalencia en conjuntos finitos, esto es, utilizando el número de Bell. Por ejemplo, para un conjunto de cardinal siete hay por lo menos 877 Sigmas Álgebras ya que el número de Bell $B_7 = 877$ [5] aunque parezca un numero grande es en realidad pequeño comparado con la cantidad de topologías en un conjunto con el mismo cardinal, ya que este es 9.535.241[6], ya que se tiene que, en un conjunto finitos toda Sigma Álgebra es una topología, se puede decir que un conjunto con cardinal siete se tiene a lo sumo 9.535.241 Sigmas Álgebra, ya que no podrían haber más Sigmas Álgebras que topologías , con esto se puede decir que podemos acotar la cantidad de Sigmas Álgebras sobre un conjunto finito, por abajo con el número de Bell y por arriba con la cantidad de topologías que tenga ese conjunto (teniendo en cuenta que actualmente no existe formas de contarla las topologías en un conjunto).

[5] Dato tomado de Enciclopedia en línea de secuencias enteras.
[6] Dato tomado de articulo; sobre el número de topologías en un conjunto finito Rubiano G. (2006).

4. La categoría $\sigma - \acute{A}lgebra$

En este capítulo se estudia la colección $Sig(X)$, es decir, todas las σ-Álgebras sobre un conjunto X, para ello se tomará como directriz el método como se estudian las colecciones $Top(X)$ en (Donado, Hernández, & Montañez, 2013).

6. $Sig(X)$ como retículo completo.

Dado que $Sig(X) \subseteq P(P(X))$ y la pareja $(P(P(X)), \subseteq)$ es un conjunto ordenado, surge la pregunta sobre si $Sig(X)$ es un conjunto ordenado, es más, nos podemos preguntar; ¿ la colección $Sig(X)$ con la relación de contenencia $(\subseteq)$ es un retículo completo.?

Para responder esto empecemos respondiendo las siguientes preguntas.

1. ¿Dados dos elementos en $Sig(X)$ existe una Sigma Álgebra más pequeña?

La respuesta es si ya que existe $\{X, \emptyset\}$ que es la más pequeña de las Sigmas Álgebras sobre un conjunto, ahora, nos preguntamos si para dos elementos en $Sig(X)$ existe un ínfimo. La respuesta es sí y es su intersección es decir que para t y $v \in Sig(X)$ se tiene que $inf\ \{t, v\} = t \wedge v = t \cap v$, ya se demostró que la intersección de Sigmas Álgebras es una Sigmas Álgebras, falta demostrar que esta es la más grande de todas las Sigmas Álgebras más pequeñas que t y v.

Utilizando las propiedades de la intersección se tiene que $t \cap v \subseteq t$ y $t \cap v \subseteq v$, con lo cual se puede afirmar que $t \cap v$ es una Sigmas Álgebras más pequeñas que t y v.

Ahora, Sea W una Sigma Álgebra más pequeña que t y v, es decir, $W \subseteq t$ y $W \subseteq v$, por lo que utilizando la definición de intersección se puede afirmar $W \subseteq t \cap v$, por lo cual, se concluye que el ínfimo de t y v es $t \cap v$. En general para toda colección $\mathcal{M} \subseteq Sig(X)$

Se cumple lo siguiente.

$$Inf(\mathcal{M}) = \bigcap \mathcal{M}$$

En las siguiente grafica se muestra el ínfimo para un $\mathcal{M} = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, ..\}$ con I un índice cualquiera.

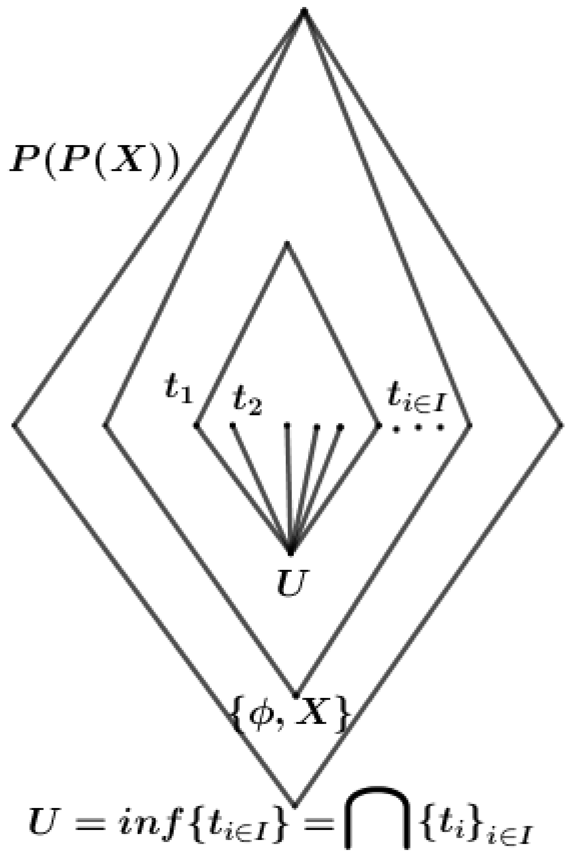


imagen 11 Retículo Inf

Surge una nueva pregunta.

2. ¿Dados dos elementos en $Sig(X)$ existe una Sigma Álgebra más grande?

La respuesta es si ya que existe $P(X)$ que es la más grande de las Sigmas Álgebras sobre un conjunto, ahora, nos preguntamos si para dos elementos en $Sig(X)$ existe un supremo. La respuesta es sí y es la Sigma Álgebra generada por es su unión, es decir, que para t y $v \in Sig(X)$ se tiene que $Sup\,\{t, v\} = t \vee v = \sigma(t \cup v)$, ya se sabe que efectivamente es un Sigma Álgebra , falta demostrar que esta es la más pequeña de todas las Sigmas Álgebras más grandes que t y v.

Se tiene que $t \subseteq t \cup v$ y $v \subseteq t \cup v$, además, como $t \cup v \subseteq \sigma(t \cup v)$ por la definición de Sigma Álgebra, podemos afirmar que $t \subseteq \sigma(t \cup v)$ y $v \subseteq \sigma(t \cup v)$,esto asegura que $\sigma(t \cup v)$ es una Sigma Álgebra más grande que t y v.

Por otra parte, al ser $\sigma(t \cup v)$ la Sigma Álgebra más pequeña que contiene a $t \cup v$ se puede decir que, es la más pequeña que contiene a t y v, por lo tanto, para cualquier Sigma Álgebra W que contega a $t \cup v$ se cumple que $\sigma(t \cup v) \subseteq w$, con esto se puede deducir que $\sigma(t \cup v)$ es la Sigma Álgebra más pequeña de todas las mas grades a t y v, con lo cual, se concluye que el supremo de t y v es $\sigma(t \cup v)$. En general para toda colección $\mathcal{M} \subseteq Sig(X)$ se cumple lo siguiente.

$$Sup(\mathcal{M}) = \boldsymbol{\sigma}\left(\bigcup \mathcal{M}\right)$$

En las siguiente grafica se muestra el supremo para un $\mathcal{M} = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, ..\}$ con I un índice cualquiera.

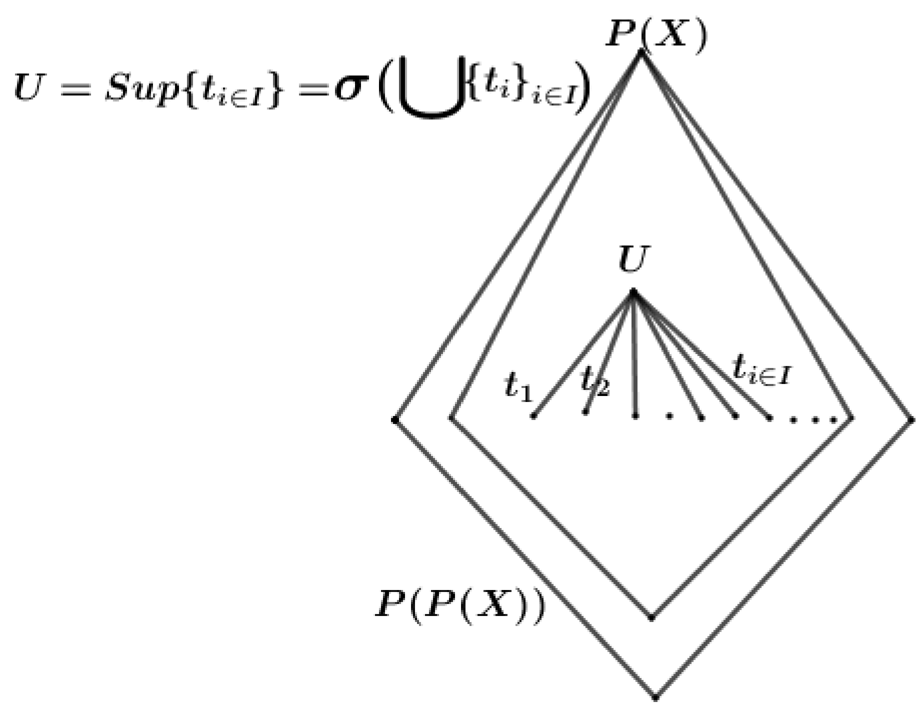


imagen 12 Retículo Sup

Con esto concluimos que la pareja $(Sig(X), \subseteq)$ es un retículo completo y para resumir tenemos.

i. El $Sup(Sig(X))$ es $P(X)$ ya que para todo $t \in Sig(X)$ se tiene que $t \subseteq P(X)$.

ii. El $inf(Sig(X))$ es $\{X, \phi\}$ ya que para todo $t \in Sig(X)$ se tiene que $\{X, \phi\} \subseteq t$.

iii. El inf de una colección $\mathcal{M} \subseteq Sig(X)$ es $Inf(\mathcal{M}) = \bigcap \mathcal{M}$.

iv. El Sup de una colección $\mathcal{M} \subseteq Sig(X)$ es $Sup(\mathcal{M}) = \boldsymbol{\sigma}(\cup \mathcal{M})$.

En el siguiente diagrama se vislumbra el retículo $Sig(X)$ como una colección de $P(P(X))$.

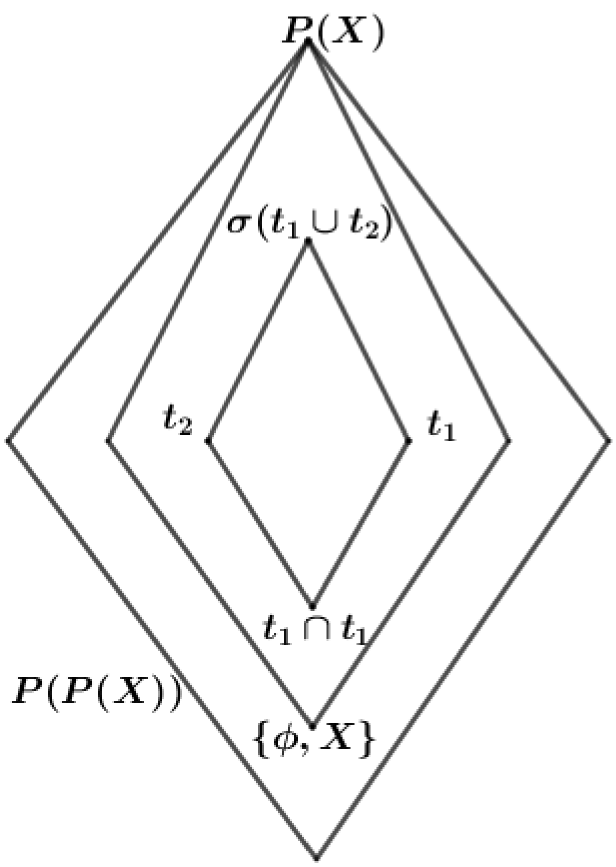


imagen 13 Retículo $Sig(X)$

Al igual que en las topologías la relación de contenencia en $Sig(X)$ la relación de contenencia se puede verificar por medio de funciones medibles, esto se puede evidenciar ene el siguiente enunciado.

Propiedad contenencia

Si la función identidad sobre X, $i_x: (X, t_2) \longrightarrow (X, t_1)$ es medible, entonces, $t_1 \subseteq t_2$.

Demostración:

Dado que i_x es medible, se tiene que para todo $A \in t_1$ se cumple que ${i_x}^{-1}(A) \in t_2$, y como i_x es la identidad, entonces, ${i_x}^{-1}(A) = \mathrm{A}$, por lo tanto , para todo $A \in t_1$ se concluye que $\mathrm{A} \in t_2$,es decir $t_1 \subseteq t_2$.

4.2 Estructuras iniciales

Semejante a la categoría de los espacios topológicos se resolverá el siguiente problema:

Dada una función $f: X \longrightarrow (Y, u)$ de un conjunto a un espacio medible, encontrar en $Sig(X)$ la $\sigma - Algebra$ más pequeña, denominada σ-Álgebra inicial, que hace medible a la función f.

Es claro que la σ-Álgebra discreta sobre X hace medible a cualquier función, ya que, toda imagen reciproca de f va a estar contenida en $P(X)$, teniendo en cuenta que $Sig(X)$ es un retículo completo es posible encontrar el ínfimo de todas las σ-Álgebra que hacen medible a f. Es decir, si tomamos un conjunto $T = \{t_i \in Sig(X);\ f: (X, t_i) \longrightarrow (Y, u)$ es medible$\}$ nuestra σ-Álgebra inicial sobre X será $InfT$.

Se define la siguiente colección:

$$t_{in} = \{\, A \subseteq P(X);\ \exists\, B\ \in u\ \ \wedge\ f^{-1}(B\,) = A\}$$

En forma menos técnica $t_{in} = \{f^{-1}(B\,);\ B\ \in u\ \}$.

Se debe demostrar que $Inf\ T = t_{in}$, es decir, t_{in} es una σ-Álgebra sobre X y además para toda $t_{\mathrm{i}} \in T$ se cumple que $t_{in} \subseteq t_{\mathrm{i}}$.

1. ¿ t_{in} es una σ-Álgebra?

Demostración

Sea $f: X \longrightarrow (Y, u)$

1.	$f^{-1}(Y) = X$, $X\ \in u$	Propiedad imagen reciproca de un conjunto Propiedad. σ-Álgebra
2.	$f^{-1}(Y) = X\ \in\ t_{in}$	Def. de t_{in}
3.	Sea $A \in t_{in}$	Hipótesis
4.	$f^{-1}(B) = A;\ B\ \in u$	Def. de t_{in}
5.	$B^C \in u$	Propiedad. σ-Álgebra
6.	$(\,f^{-1}(B)\,)^c =\ f^{-1}(\,B^C)$	Propiedad imagen reciproca de un conjunto
7.	$(\,f^{-1}(B)\,)^c =\ A^C$	Def. conjunto complemento
8.	$f^{-1}(\,B^C) =\ A^C$	Propiedad Transitiva en 6,7

9.	Sea $A^C \in t_{in}$	Def. de t_{in} en 5,8
10.	Sean $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq t_{in}$	Hipótesis ($I \subseteq \mathbb{N}$)
11.	$f^{-1}(B_i) = A_i$; $B_i \in u$ para todo $i \in I$	Def. de t_{in}
12.	$\bigcup_{i \in I} B_i \in u$	Def. σ-Álgebra
13.	$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$	Propiedad unión de colecciones
14.	$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = \bigcup_{i \in I} A_i$	Propiedad unión de colecciones en 11
15.	$\bigcup_{i \in I} A_i \in t_{in}$	Def. de t_{in} en 12, 13, 14
16.	t_{in} es una σ-Álgebra	Def. σ-Álgebra 2 ,9, 15

Tabla 7 Estructuras Iniciales

Con esto concluimos que t_{in} es una σ-Álgebra, ahora se debe comprobar que es la más pequeña.

2. ¿Es el $Inf\ T = t_{in}$?

Demostración:

Como se deben comparar elementos de $Sig(X)$, si probamos que para todo $t_i \in T$ la función, $i_x: (X, t_i) \longrightarrow (X, t_{in})$ es medible entonces $t_{in} \subseteq t_i$ para todo $t_i \in T$.

1.	$Sea\ A \in t_{in}$	Hipótesis
2.	$\exists\ B \in u \ \land\ f^{-1}(B) = A$	Definición t_{in}
3.	$f^{-1}(B) \in t_i, \forall\ B \in u$	Por $t_i \in T$. Definición Función Medible
4.	$A \in t_i$	Sustitución 2,3
5.	${i_x}^{-1}(A) = A$	Propiedades imagen inversa
6.	${i_x}^{-1}(A) \in t_i$	Sustitución 4,5

7.	$i_x: (X, t_i) \longrightarrow (X, t_1)$ *es medible*	Definición Función Medible 1,6
8.	$t_1 \subseteq t_i$	Propiedad contenencia en 7

Con esto queda demostrado que la colección definida

$$t_{in} = \{ A \subseteq P(X);\ \exists\ B\ \in u\ \ \wedge\ f^{-1}(B\ ) = A\}$$

Es la σ-Álgebra más pequeña que hace medible a la función $f: X \longrightarrow (Y, u)$.

La imagen muestra para una σ-Álgebra u sobre $Sig(Y)$, el conjunto T de todas las $t_i\ \sigma - Algebra$ sobre X que hacen medible a la función $f: X \longrightarrow (Y, u)$, y a la σ-Álgebra inicial como el $Inf\ T$. Con esto podemos se puede afirmar que la categoría Sig es apta para estructuras iniciales.

4.3 Estructuras finales

De forma análoga a la anterior se considera la siguiente pregunta para $Sig(Y)$.

Dada una función $f: (X, t) \longrightarrow Y$ es posible establecer una σ-Álgebra sobre Y que haga medible a f , como la σ-Álgebra $\{Y, \emptyset\ \}$ cumple esta propiedad, por ser $Sig(Y)$ un retículo completo, entonces, nos preguntamos cual es la σ-Álgebra más grande sobre Y que hace medible a f, si existe se denomina σ-Álgebra final .

Sea X y Y dos conjuntos no vacíos, t una σ-Álgebra sobre X y $f: (X, t) \longrightarrow Y$ una correspondencia. Nombremos C al siguiente conjunto:

imagen 14 Estructuras Iniciales

$$C = \{p_i \in Sig(Y);\ f: (X, t) \longrightarrow (Y, p_i)\ es\ medible\}$$

Si se define el conjunto $p_f = \{A \subseteq P(Y);\ f^{-1}(A)\ \in\ t\ \}$.

Entonces $p_f = sup\ C$,es decir p_f es una σ-Álgebra sobre Y , además, es la σ-Álgebra más grande que hace medible a $f: (X, t) \longrightarrow\ Y$.

Demostración

1. p_f una σ-Álgebra sobre Y.

1.	$f^{-1}(Y) = X$	Propiedades de la imagen inversa
2.	$X \in t$	Def. σ-Álgebra
3.	$f^{-1}(Y) \in t$	Sustitución 1,2
4.	$Y \in p_f$	Def. de p_f
5.	Sea $A \in p_f$	Hipótesis
6.	$f^{-1}(A) \in t$	Def. de p_f
7.	$(f^{-1}(A))^c \in t$	Def. σ-Álgebra
8.	$f^{-1}(A^C) = (f^{-1}(A))^c$	Propiedades de la imagen inversa
9.	$f^{-1}(A^C) \in t$	Sustitución 7,8
10.	$A^C \in p_f$	Def. de p_f
11.	Sean $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I} \subseteq p_f$	Hipótesis($I \subseteq \mathbb{N}$)
12.	$f^{-1}(\mathcal{T}_i) \in t$ para todo $i \in I$	Def. de p_f
13.	$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{T}_i) \in \tau$	Def. σ-Álgebra
14.	$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{T}_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i)$	Propiedades de la imagen inversa
15.	$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i) \in \tau$	Sustitución 13,14
16.	$\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i \in p_f$	Def. de p_f
17.	p_f es una σ-Álgebra sobre Y	Def σ-Álgebra 4,10, 16

Tabla 8 Estructuras Finales

Ahora se demuestra que p_f es la σ-Álgebra sobre Y más grande que hace medible a $f: (X,t) \longrightarrow Y$.

Demostración:

Como se deben comparar elementos de $Sig(Y)$, si probamos que para todo $p_i \in C$ la función, $i_Y: (Y, p_f) \longrightarrow (Y, p_i)$ es continua entonces $p_i \subseteq p_f$ para todo $p_i \in C$.

1.	$Sea\ A \in p_i$	Hipótesis

2.	$f^{-1}(\mathrm{A}) \in t$	Por $p_i \in C$ Definición Función Medible
3.	$A \in p_f$	Definición de p_f en 2
4.	${i_y}^{-1}(A) = A$	Propiedades imagen inversa
5.	${i_y}^{-1}(A) \in p_f$	Sustitución 3,4
6.	$i_y: (X, P_f) \longrightarrow (X, p_i)$ $es\ medible$	Definición Función Medible 1,5
7.	$p_i \subseteq p_f$	Propiedad contenencia en 6

Con esto queda demostrado que la colección definida como $P_f = \{ A \subseteq P(Y);\ f^{-1}(A) \in t \}$, es el $Sup\ C$, ya que, resulta ser la σ-Álgebra sobre Y mas grande que hace medible a la función $f: (X, t) \longrightarrow Y$.

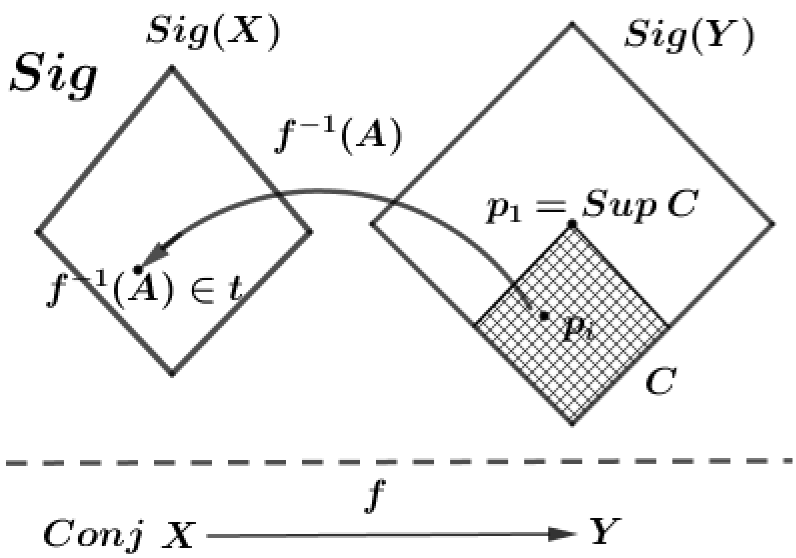


imagen 15 Estructuras Finales

El diagrama representa la σ-Álgebra t sobre X y la colección C de elementos de $Sig(Y)$ que hacen medibles a la función $f: (X, t) \longrightarrow Y$.se puede observar que el $SupC$ es P_f.

Con esto se concluye que Sig. es acto para estructuras finales.

4.4 Funtores en $Sig(X)$

1. El funtor olvido de σ-Álgebra de Sig en $Conj$.

$O'\colon Sig \longrightarrow Conj$ está definido como:

i. $O((X,t)) = X, para\ todo\ A = (X,t) \in Obj(Sig)$.

ii. $O(f) = f\ para\ todo\ f \in Mor(A,B)$.

Este funtor desprende la σ-Álgebra del conjunto X y de esta forma la propiedad de las funciones relacionadas.

Se puede concluir que la categoría Sig es una categoría Topología ya que, como se puede observar, el funtor O' es fiel, Sig es apta para estructuras iniciales y finales, además, la fibra $Sig(X)$ para cualquier X, es un retículo completo.

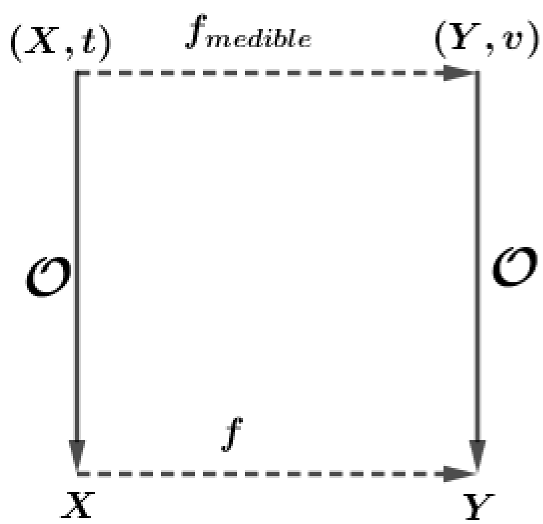


imagen 16 Funtor olvido en Sigma Álgebra

2. El funtor Borel de Top a Sig.

Para este funtor primero se necesita demostrar que las funciones continuas entre espacios topológicos son funciones medibles si estos son provistos de sus correspondientes σ-Álgebra de Borel, es decir:

Sea (A,t_1) y (B,t_2) espacios topológicos. Si $f\colon (A,t_1) \longrightarrow (B,t_2)$ es una función continua, entonces $f\colon (A,\mathcal{B}(t_1)) \longrightarrow (B,\mathcal{B}(t_2))$ es una función medible donde $\mathcal{B}(t_1)$ y $\mathcal{B}(t_2)$ son algebras de Borel generadas por t_1 y t_2 respectivamente.

Para poder demostrar la proposición anterior se deben considerar los siguientes teoremas.

Teorema Criterio función medible.

Sea $f:(X,T_1) \longrightarrow (Y,T_2)$ una función en dos espacios medibles y $C \subseteq P(Y)$ tal que $\sigma(C) = T_2)$ (Es decir C genera T_2).

$$f^{-1}(A) \in T_1 \text{ para todo } A \in C \text{ si y solo si } f \text{ es medible}$$

Demostración:

Al ser una doble implicación se iniciará demostrando primero que sí.

f es medible entonces $f^{-1}(A) \in T_1$ para todo $A \in C$.

Como f es medible tenemos que $f^{-1}(A) \in T_1$ para todo $A \in T_2$ y por ser T_2 generada por C se tiene $C \subseteq T_2$ Por lo tanto $f^{-1}(A) \in T_1$ para todo $A \in C$.

Ahora, para la segunda implicación tenemos.

$f^{-1}(A) \in T_1$ para todo $A \in C$ entonces f es medible

1.	Sea $t_f = \{A \subseteq P(Y) ; f^{-1}(A) \in T_1\}$	Construcción
2.	$C \subseteq t_f$	Dado
3.	t_f es una σ-Álgebra sobre Y	Existencia de estructuras finales.
4.	$\sigma(C) = T_2$	Dado
5.	T_2 es la σ-Álgebra más pequeña que contiene a C	Propiedad de $\sigma(C)$
6.	$T_2 \subseteq t_f$	Consecuencia de 2,3,5
7.	$f^{-1}(A) \in T_1$ para todo $A \in T_2$	Por ser T_2 un elemento de t_f
8.	f es medible	Def. función medible 7

Con estos dos teoremas podemos demostrar el teorema propuesto al inicio.

Teoremas funciones continuas a medibles

Sea t_1 , t_2 dos topologías sobre X y Y respectivamente. Si $f: (X, t_1) \longrightarrow (Y, t_2)$ es una función continua, entonces $f: (X, \mathcal{B}(t_1)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(t_2))$ es una función medible donde $\mathcal{B}(t_1)$ y $\mathcal{B}(t_2)$ son algebras de Borel generadas por t_1 y t_2 respectivamente.

Demostración:

1. $f: (X, \mathcal{B}(t_1)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(t_2))$ es una función entre dos espacios medibles.
2. $t_2 \subseteq P(Y)$ por ser t_2 una topología sobre Y
3. $\sigma(t_2) = \mathcal{B}(t_2)$
4. $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(t_1)$ para todo $A \in t_2$ por ser f una función continua de $f: (X, t_1) \longrightarrow (Y, t_2)$ y $t_1 \subseteq \mathcal{B}(t_1)$.
5. f es medible por el teorema Criterio función medible

Entonces podemos definir el funtor Borel de Top a Sig de la siguiente forma:

$$B: Top \longrightarrow Sig$$

a) $B((X, t)) = (X, \mathcal{B}(t))$ para cada $A = (X, t) \in Ob(Top)$

b) $B(f) = f$ para cada $f \in Mor(A, B)$.

El funtor Borel transforma las topologías en σ-Álgebra de Borel modificando los espacios topológicos en espacios medibles y convierte las funciones continuas en medibles.

$$\begin{tikzcd}
(X, t_1) \arrow[r, dashed, "f_{Continua}"] \arrow[d, "\beta"'] & (X, t_2) \arrow[d, "\beta"] \\
(X, \beta(t_1)) \arrow[r, dashed, "\beta(f)_{Medible}"] & (X, \beta(t_2))
\end{tikzcd}$$

imagen 17 Funtor Borel

Ejemplo funtor Borel:

Sea $X = \{1,2,3\}$ entonces $\mathcal{P}(X) = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

$t_1 = \{\phi, X, \{1\}, \{1,2\}\}$, $\quad t_2 = \{\phi, X, \{3\}, \{1,3\}\}$

Sea $A = (X, t_1)$ y $B = (X, t_2)$ es decir A y $B \in Oj\ (Top)$ .La función $f: (X, t_1) \longrightarrow (X, t_2)$ definida como:

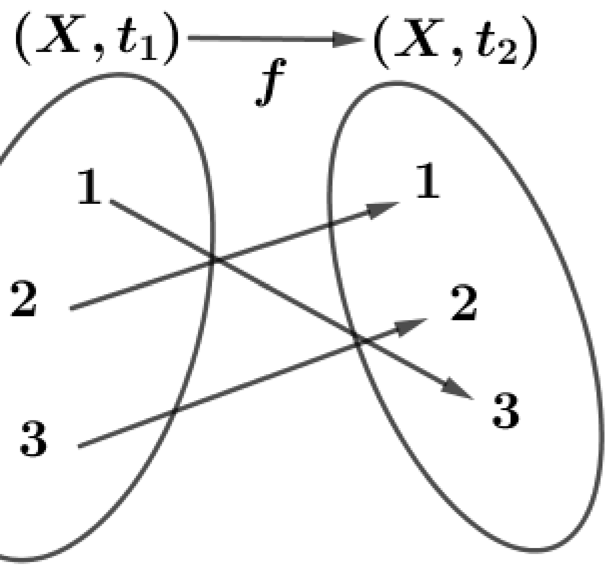


imagen 18 Ejemplo Top

es una función continua, lo cual se puede comprobar fácilmente, aplicando el funtor Borel en estos elementos de Top se obtiene:

$B(A) = (X, B(t_1))$ donde $B(t_1) = \{\phi, X, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2\}\}$ y $B(B) = (X, B(t_2))$ con $B(t_2) = \{\phi, X, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2\}\}$. $B(A)$ y $B(B) \in Ob(Sig)$ y $B(f) \in$

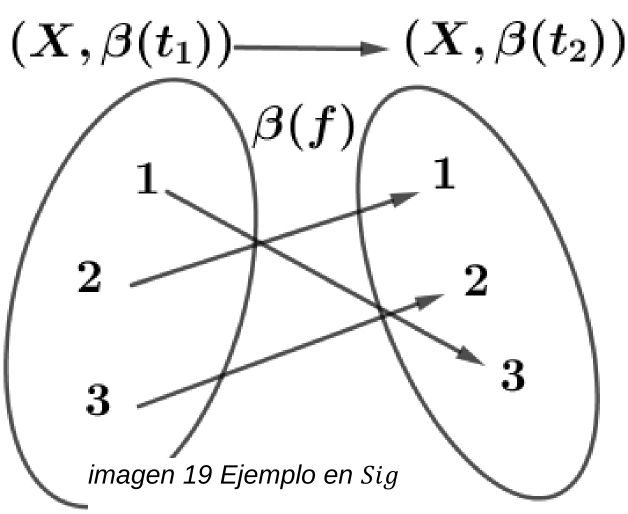


imagen 19 Ejemplo en Sig

$Mor\big(B(A), B(B)\big)$. En la siguiente grafica se observa que $B(f)$ es medible lo cual es fácil de demostrar.

Para concluir se dirá que un funtor Sig a Top seria trivial en conjuntos contables ya que como se ha visto en conjuntos contables se tiene que $Sig(X) \subseteq Top(X)$, por lo cual un funtor donde solo cambie la nomenclatura sería suficiente, sin embargo, para conjuntos no contables se puede definir el siguiente funtor.

3. El funtor subbase de Sig en top.

$T: Sig \longrightarrow Top$ está definido como:

iii. $T((X,t)) = X, para\ todo\ A = (X, \langle\langle t \rangle\rangle) \in Obj(Top)$.

iv. $T(f) = f\ para\ todo\ f \in Mor(A,B)$.

El funtor subbase transforma σ-Álgebra en topologías modificando los espacios medibles en espacios topológicos, utilizando las Sigmas Álgebras como subbase para una topología y manteniendo los conjuntos medibles como conjuntos abiertos y de esta forma respectar los morfismos.

$$\begin{tikzcd}
(X, t_1) \arrow[r, dashed, "f_{medible}"] \arrow[d, "T"'] & (X, t_2) \arrow[d, "T"] \\
(X, \langle\langle t_1 \rangle\rangle) \arrow[r, dashed, "T(f)_{continua}"] & (X, \langle\langle t_2 \rangle\rangle)
\end{tikzcd}$$

imagen 20 Funtor T

5. Conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados encontrados al estudiar de las σ-álgebras desde una mirada categórica tomando como directriz el modo de estudiar las topologías sobre un conjunto y la categoría Top.

Las primeras conclusiones que se describirán son aquellas que se obtuvieron de analizar la colección de todas las Sigma álgebras sobre un conjunto.

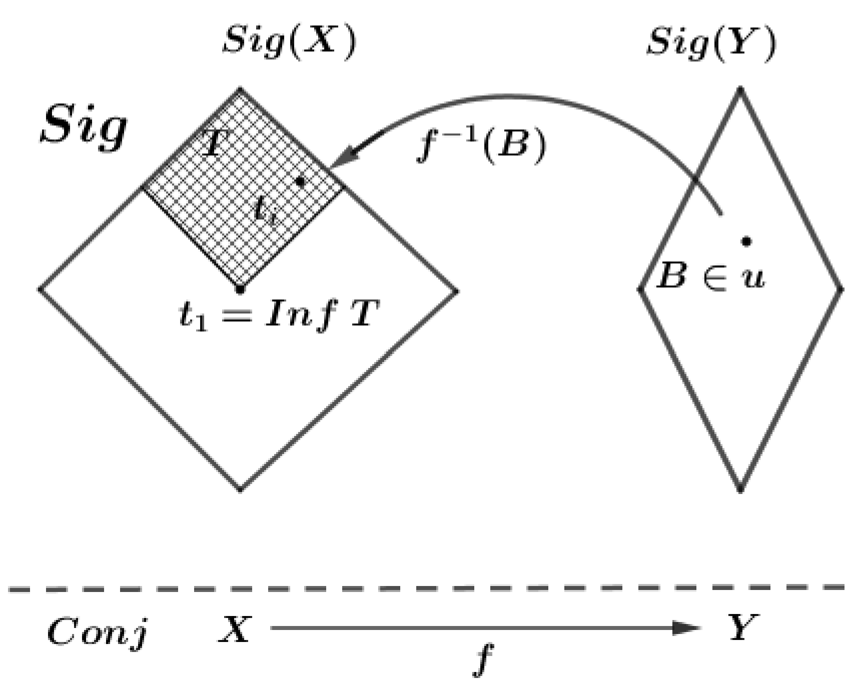
- Por medio de diferentes conjuntos se pueden generar la misma Sigma álgebra. Un caso particular es la sigma álgebra de Borel generada por diferentes topologías sobre $\mathbb{R}$.
- Semejante a la topología se pueden utilizar operaciones entre conjuntos para construir sigmas álgebras, el proceso es el siguiente: se toma un conjunto cualquiera, se realiza una partición finita del conjunto y por último se realizan todas las uniones finitas sobre la partición, en consecuencia, el conjunto obtenido resulta ser una Sigma álgebra sobre el conjunto inicial y, además, resulta ser la más pequeña que lo contiene. Este proceso permite generar un Sigma álgebra por cada partición que se realice sobre el conjunto inicial.
- En un conjunto finito se puede acotar inferiormente la cantidad de Sigmas álgebras sobre el conjunto, ya que, al ser el conjunto finito, se puede contar cuantas particiones hay en dicho conjunto y, por lo tanto, generar esa cantidad mínima de Sigmas álgebras, este valor se obtiene utilizando el numero Bell, que es una función que proporciona el número de particiones posibles en un conjunto finito.
- Una forma de definir particiones sobre un conjunto es definiendo una relación de equivalencia en dicho conjunto, por lo tanto, para cualquier conjunto una relación de equivalencia define una Sigma álgebra y, además, esto permite definir una forma de construir Sigmas álgebras sobre un conjunto utilizando relaciones, el cual implicaría

definir una relación de equivalencia sobre el conjunto inicial, tal que, la partición resultante fuera finita.

- Esta forma de construir Sigmas Álgebras sobre un conjunto resulto la forma técnica de encontrar las Sigma Álgebra generada por un conjunto.

Las siguientes conclusiones que se describirán son aquellas que se obtuvieron de analizar posibles analogías entre las σ-álgebras y las topologías sobre un conjunto.

- Las Sigmas álgebras y las topologías hacen parte de un estudio más grande, el de las Algebras sobre conjuntos, el cual es mucho más amplio y abarca una gran cantidad de estructuras como, por ejemplo; los filtros, topologías, Sigmas álgebras entre otras, además, esta noción de Algebras sobre conjuntos permite definir estructuras nuevas y estudiarlas en forma semejante a como se estudian las topologías.
- Toda Sigma álgebra sobre un conjunto finito o infinito numerable es una topología, ya que, todas las σ-Álgebras cumplen las dos primeras propiedades de las topologías y su única diferencia estriba en la diferencia que existe en la unión, aunque parezca trivial, es la causante de que las σ-Álgebra no sean topologías ya que la unión de una colección de elementos en una σ-Álgebra es estable solo para conjuntos contables, mientras que la unión de una colección de elementos en una topologías es ,estable para uniones contables y no contables , por lo tanto, en conjuntos contables toda Sigma álgebra cumpliría la propiedad tres de las topologías.



- Existen Sigmas álgebras en conjuntos no contables que no son topologías, un caso particular es la Sigma álgebra generada por todos los conjuntos sobre $\mathbb{R}$ que son medibles según Caratheodory, en este caso se observa que los conjuntos de Vitali los cuales no son medibles son los responsables de que el conjunto mencionado no sea una topología.

Las siguientes conclusiones que se describirán son aquellas que se obtuvieron de analizar Categoría Sig, Identificando sus objetos, sus morfismos y la composición de estos.

- Al analizar los objetos de Sig, se concluyó que para cualquier conjunto X diferente de vacío su fibra $Sig(X)$ tiene estructura de retículo Completo, lo cual nos permite afirmar que la colección $Sig(X)$ posee elemento máximo y mínimo, además, está parcialmente ordenado.
- Al establecer relaciones entre las fibras se concluyó que la colección Sig es apta para estructuras iniciales y finales, además, al ser el funtor olvido de Sigma Álgebra un funtor fiel y al tener que toda $Sig(X)$ tiene estructura de retículo completo se dedujo que la categoría Sig es una categoría Topológica.
- Construyendo el funtor Borel se tiene que cualquier de topología se puede generar una Sigma Álgebra que la contenga y que respete las funciones continuas, esto es posible al tomar cada topología como base para generar una Sigma Álgebra y, de igual forma, a partir de una Sigma Álgebra se puede construir una topología tomando como subbase la Sigma Álgebra y respetando las funciones medibles.

6. Bibliografía

Castañenda, L. B. (2004). *Probabilidad.* Bogota, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Donado, A., & Montañez, R. (2002). Algunas Categorias Topologícas Asociadas A Colecciones De Conjuntos. *Memorias De los encuentros de Geometría y Aritmética, 1*, 255-265.

Donado, A., Hernández, J., & Montañez, J. (2013). Ambientes Categóricos para la topología. *Encuentro de geomtría y su Aplicaciones, xxi*, 1-28.

Fava, N., & Zó, F. (2013). *Medida e Integral de Lebesgue.* Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires. Obtenido de http://cms.dm.uba.ar/depto/public/Curso%20de%20grado/fascgrado4.pdf

Garcia, A. (2008). *Teorías de la medida y de la probabilidad.* Cáceres, España: Universidad de Extremadura. Obtenido de http://dehesa.unex.es/bitstream/handle/10662/2344/978-84-691-6411-2.pdf?sequence=1

Lezama, J. (2019). Categorias. *Cuadernos de Álgebra*, 1-92. Obtenido de https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=dW5hbC5lZHUuY298c2FjMnxneDo0ZTU3OTk4ZWVlMzJlYTEx

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoria de conjuntos.* Bogota, Colombia : Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2003). *Topología Básica.* Bogota, Colombia: Guadalupe.

Neira, C. (2011). *Topología General.* Bogota, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Rubiano, G. (2002). *Topologia General.* Bogota : Universidad Nacional Colombia .

A. Anexo: $\boldsymbol{Sig(X) \nsubseteq Top(X)}$

La siguiente demostración es una adaptación de las demostraciones propuestas en (Fava & Zó, 2013) y (Garcia, 2008).

Se define la colección $\mathcal{M}$ cuyos elementos son subconjuntos de $\mathbb{R}$ y son medibles según Lebesgue, es decir.

$$\mathcal{M} = \{ A \subseteq P(\mathbb{R}); A\ es\ Lebesgue - medibles\}$$

Primero definiremos el significado que un conjunto sea medible [7], utilizando la construcción realizada por Caratheodory en la que emplea la medida exterior de Lebesgue. segundo se demuestra que efectivamente es una Sigma Álgebra sobre $\mathbb{R}$, y por último se comprueba que no es una topología sobre $\mathbb{R}$, debido a que, no cumple la propiedad $T3$.

Para no profundizar y entrar en temas un poco más engorrosos, se asumirá como cierto las siguientes pautas.

1. Sea $\mathcal{F} \subseteq P(\mathbb{R})$, se define una medida m como la siguiente función

$$m: \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{+}$$

Donde $\overline{\mathbb{R}}^{+} = \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$ y se cumple que para A y $B \in \mathcal{F}$.

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B).$$

2. todo intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$,definido como $I = (a, b) = \{t \in \mathbb{R}; a < t < b\ y\ a, b \in \mathbb{R}\}$, cumple que su medida es igual a su longitud:

$$m(I) = |b - a|$$

3. Para el conjunto vacío se tiene que $m(\emptyset) = 0$

Definición: Medida exterior de Lebesgue.

La medida exterior de un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se define mediante la siguiente igualdad.

[7] Entendiendo medible como Lebesgue-medibles

$$m_e(A) = Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)\}$$

Donde en ínfimo se toma sobre cubrimientos finitos de abiertos sobre A, en otras palabras, todas las colecciones de intervalos abiertos I_n con $n \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Estas son algunas de las propiedades más relevantes de la m_e.

i. $0 \leq m_e(A) \leq \infty$

ii. Sea $A_1 \subset A_2 \subset \mathbb{R}$ entonces $m_e(A_1) \subset m_e(A_2)$. $(Monótona)$

iii. Si $\{A_n\} \subseteq \mathbb{R}$ entonces $m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{A_n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_e(A_n)\}.(\sigma - SubAditivida)$

Definición: Medida Caratheodory

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se denomina medible si, para todo $E \subseteq \mathbb{R}$ se cumple la siguiente identidad.

$$m_e(E) = m_e(E \cap A) + m_e(E - A)$$

Si lo anterior se cumple entonces $m(E) = m_e(E)$, lo cual dice, que en un conjunto medible cualquiera, medida es sinónimo de medida exterior.

Por lo tanto, la colección $\mathcal{M}$ se redefine como.

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq P(\mathbb{R}); A\ medible\}$$

Definido el conjunto $\mathcal{M}$ se demostrará que es una $\sigma - Algebra$ sobre $\mathbb{R}$.

1. ¿ $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$?

Demostración

Dado que la $m(\emptyset) = 0$ y $m_e(\emptyset) = Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)\}$ donde la colección $\{I_n\}_{n\in\emptyset}$ cumple $\emptyset \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, se tiene $m_e(\emptyset) = Inf\{0 + 0 + 0 + \cdots\} = 0$.

Como $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ y para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se cumple que:

$$m_e(A) = m_e(A \cap \mathbb{R}) + m_e(A - \mathbb{R})$$

Aplicando la propiedad de conjuntos $A - B = A \cap B^c$.

$$m_e(A) = m_e(A \cap \mathbb{R}) + m_e(A \cap \mathbb{R}^c)$$

Como el complemento de todo $\mathbb{R}$ es igual $\emptyset$.

$$m_e(A) = m_e(A \cap \mathbb{R}) + m_e(A \cap \emptyset)$$

Teniendo en cuenta que $A \cap \mathbb{R} = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$ por ser $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\emptyset \subseteq A$.

$$m_e(A) = m_e(A) + m_e(\emptyset)$$

Al ser $m_e(\emptyset) = 0$

$$m_e(A) = m_e(A\ ) + 0$$

$$m_e(A) = m_e(A)$$

Por lo tanto, como $\mathbb{R}$ cumple la definición de Caratheodory podemos concluir que $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.

2. ¿Si $A \in \mathcal{M}$ entonces $A^C \in \mathcal{M}$?

Demostración.

Como $A \in \mathcal{M}$ a debe cumplir que, $A \subseteq \mathbb{R}$ y para todo $E \subseteq \mathbb{R}$ cumple que:

$$m_e(E) = m_e(E \cap \mathrm{A}\ ) + m_e(E - \mathrm{A}\ )$$

Por ser A un elemento de $\mathbb{R}$ se tiene que A^C es un elemento de $\mathbb{R}$ y aplicando la propiedad de conjuntos $A - B = A \cap \mathrm{B}^c$.

$$m_e(E) = m_e(E \cap \mathrm{A}\ ) + m_e(E \cap \mathrm{A}^c)$$

Al ser una suma en $\mathbb{R}$

$$m_e(E) = m_e(E \cap \mathrm{A}^c) + m_e(E \cap \mathrm{A}\ )$$

Por propiedades de teoría de conjuntos $(A^C)^C = A$.

$$m_e(E) = m_e(E \cap \mathrm{A}^c) + m_e(E \cap (A^C)^C)$$

Aplicando la propiedad de conjuntos $A \cap \mathrm{B}^c = A - B$.

$$m_e(E) = m_e(E \cap \mathrm{A}^c) + m_e(E - (A^C)^C)$$

Sea un $B = \mathrm{A}^c$ se cumple.

$$m_e(E) = m_e(E \cap \mathrm{B}) + m_e(E - (B)^C)$$

Por lo tanto, como A^c cumple la definición de Caratheodory podemos concluir que $\mathrm{A}^c \in \mathcal{M}$.

3. ¿Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de elemento en $\mathcal{M}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$?

Demostración:

Sea $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ entonces para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ se cumple las siguientes identidades.

$$m_e(B) = m_e(B \cap A_1) + m_e(B \cap {A_1}^c)$$

$$m_e(B) = m_e(B \cap A_2) + m_e(B \cap {A_2}^c)$$

Como $A_1, A_2, B \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $B \cap (A_1 \cup A_2) \subseteq \mathbb{R}$ utilizando propiedades de operaciones con conjuntos.

Por ser A_1 medible se cumple que.

$$m_e(B \cap (A_1 \cup \cap A_2)\ ) = m_e(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + m_e(B \cap (A_1 \cup \cap A_2) \cap {A_1}^c)$$

Por ser la $\cap$ una operación asociativa se tiene

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1 = B \cap ((A_1 \cup A_2) \cap A_1)$$

y como $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ entonces por propiedades de la intersección de conjuntos se cumple que $(A_1 \cup A_2) \cap A_1 = A_1$ por lo tanto $m_e(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) = m_e(B \cap A_1)$.

Por otro lado, al ser ∩ distributiva respecto a ∪ se cumple que.

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c = B \cap ((A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c)$$

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c = B \cap (A_1 \cap {A_1}^c \cup A_2 \cap {A_1}^c)$$

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c = B \cap (\emptyset \cup A_2 \cap {A_1}^c)$$

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c = B \cap (A_2 \cap {A_1}^c)$$

Por lo tanto $m_e(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c) = m_e\big(B \cap (A_2 \cap {A_1}^c)\big)$.

Realizando las respectivas sustituciones se tiene que.

$$m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)) = m_e(B \cap A_1) + m_e\big(B \cap (A_2 \cap {A_1}^c)\big).$$

$m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)) + m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m_e(B \cap A_1) + m_e\big(B \cap (A_2 \cap {A_1}^c)\big) + m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)^c)$.

Utilizando la propiedad $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ se cumple que.

$m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)) + m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m_e(B \cap A_1) + m_e\big(B \cap (A_2 \cap {A_1}^c)\big) + m_e(B \cap {A_1}^c \cap {A_2}^c)$.

Aplicando la asociatividad y conmutatividad de la ∩ se tiene que

$m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)) + m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m_e(B \cap A_1) + m_e((B \cap {A_1}^c) \cap A_2) + m_e((B \cap {A_1}^c) \cap {A_2}^c)$.

Como A_2 es medible y $B \cap {A_1}^c \subseteq \mathbb{R}$ la siguiente equivalencia se cumple.

$$m_e((B \cap {A_1}^c) \cap A_2) + m_e((B \cap {A_1}^c) \cap {A_2}^c) = m_e(B \cap {A_1}^c)$$

Por lo tanto

$$m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)) + m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m_e(B \cap A_1) + m_e(B \cap {A_1}^c)$$

Y por ser A_1 es medible

$$m_e(B \cap A_1) + m_e(B \cap {A_1}^c) = m_e(B)$$

Con esto podemos concluir que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ se cumple.

$$m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)) + m_e(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m_e(B)$$

Como consecuencia se concluye que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$.

Esto asegura que dada una colección finita de n elementos entonces su unión es medible. Utilizando lo anterior, y además, la propiedad monótona y la $\sigma-$subaditividad de $\mathcal{M}$ se puede corroborar que dada una colección $A_1, A_2, A_3, \dots A_i \dots$ con $i \in \mathbb{N}$ numerable en $\mathcal{M}$

entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$, con lo cual se demuestra que la colección de conjuntos medibles $\mathcal{M}$ es una $\sigma - Algebra$ sobre $\mathbb{R}$.

Ahora se define algunos elementos que son medibles, los siguientes conjuntos pertenecen a $\mathcal{M}$.

Todo intervalo $I = (a,b) = \{i \in \mathbb{R};\ \ a > i > b \ con \ a, b \ \in \mathbb{R})$ que pertenece a $\mathbb{R}$ es un conjunto medible, por lo tanto, toda colección de abiertos en $\mathbb{R}$ es medible, con esto podemos decir que la topología usual generada por los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ esta contenida en $\mathcal{M}$, ya que todos sus elementos son medibles, de forma más específica la colección $t_u \subseteq P(\mathbb{R})$ definida como $t_u = \{I \subseteq \mathbb{R}\}$ está contenida en $\mathcal{M}$.

Ahora bien, como $\mathcal{M}$ es una $\sigma - Algebra$ sobre $\mathbb{R}$ y, además $t_u \subseteq \mathcal{M}$, podemos afirmar que la $\sigma - Algebra$ de Borel $\mathcal{B}(t_u)$ generada por t_u sobre $\mathbb{R}$,está contenida en $\mathcal{M}$.

Este resultado, $\mathcal{B}(t_u) \subseteq \mathcal{M}$, permite concluir que todo Borelianos es un conjunto medible, hay que resaltar que existen otros conjuntos medibles por ejemplo el conjunto de cantor, sin embargo, para nuestro propósito solo se utilizaran los Borelianos.

A continuación, se resaltan tres propiedades de la medida m sobre los elementos de $\mathcal{M}$.

i. los elementos de $\mathcal{M}$ son invariantes bajo traslaciones, es decir, la función $v,$ definida como.

$$V: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto V(A) = A + x \ con \ x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que si A es medible entonces $V(A)$ es medible y además $m(A) = m(V(A))$.

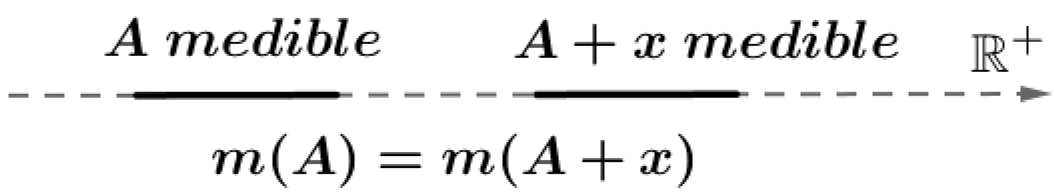


imagen 21 Invariante

ii. La función de medida m sobre $\mathcal{M}$ es $\sigma - Aditiva$ es decir, dada una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos medibles disyuntos dos a dos se cumple que.

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

iii. La medida de un intervalo es su longitud, esto se deduce por qué; al ser los intervalos (a,b) elementos de $\mathcal{M}$, entonces $m_e\big((a,b)\big) = m((a,b))$

Para concluir este apartado, se define el siguiente conjunto, el cual se construye por la unión no numerable de una colección de conjuntos medibles, este se denomina conjunto de Vitali y resulta ser no medible.

Demostración:

Sea $E = (0,1)$, se define una partición en E con la siguiente relación de equivalencia.

$x, y \in E$ están relacionados $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

El conjunto formado por todas las clases de equivalencia $Q_\sim = \{[x] = \{y\ ; x \sim y\}\ con\ x \in E\}$ forma una partición no numerable en E y utilizando en axioma de Zermelo existe un conjunto V el cual contiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia, es decir, existe una función de elección para todo $[x] \in Q_\sim$ tal que.

$$f: Q_\sim \longrightarrow \bigcup Q_\sim$$

$$[x] \longmapsto f([x]) = \{y\}; y \in [x]$$

Entonces el conjunto de Vitali se puede definir cómo.

$$V = \bigcup_{x \in E}^{\infty} f([x]) \subseteq E$$

Sea $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de todos los números racionales del intervalo $[-1,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto A_n como el siguiente conjunto de puntos.

$$A_n = \{\, r_n + x; x \in V\} = r_n + V$$

El cual es una traslación del conjunto V sumándole r_n.

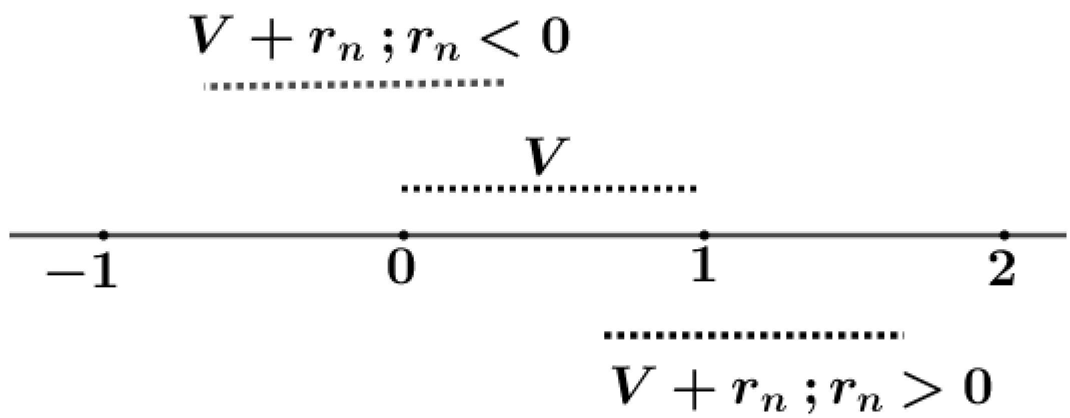


imagen 22 Vitali

Se observa que

$$E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n \subseteq (-1,2)$$

Como todo punto $x \in E$ tiene que estar en algún elemento $Q_{\sim}$ definido por la relación, entonces tiene que existir un $x_0 \in V,$ tal que, $x \sim x_0$ y por lo tanto $x - x_0 = r \in \mathbb{Q}$, y como x y x_0 pertenecen a E,entonces, el racional $r \in (-1,1),$ y por lo tanto es un elemento de la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si $r = r_k$ entonces $x = x_0 + r_k$ es un elemento de $A_n$para algún $k \in \mathbb{N}$, con esto se deduce que sí.

$$para\ todo\ x \in E \longrightarrow x \in A_k \subset A_n$$

Y utilizando la definición de unión de una colección se puede decir que.

$$E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n$$

Para la otra inclusión, si x pertenece a algún elemento de A_n, entonces, $x = x_0 + r_k$, con $x_0 \in V$, es decir con $x_0 \in (0,1)$ y $r_k \in (-1,1)$, por lo tanto $x \in (-1,2)$, se concluye entonces que para todo.

$$x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n \longrightarrow x \in (-1,2)$$

O lo que es lo mismo

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n \subseteq (-1,2)$$

Con esto resultados se puede entonces afirmar que.

$$E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n \subseteq (-1,2)$$

Por otro lado, los elementos de A_n son disyuntos dos a dos.

Para comprobar esto, supongamos que existe un $x \in A_i \cap A_j$ entonces existe un $x_i \in \mathrm{V}$ y $x_j \in \mathrm{V}$ con $r_i, r_j \in \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que, $x = x_i + r_i$ y $x = x_j + r_j$ por lo tanto

$$x_i + r_i = x_j + r_j$$

$$x_i - x_j = r_j - r_i$$

Y al ser r_i, r_j elementos de $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $r_j - r_i \in \mathbb{Q}$, en consecuencia, se tiene que $x_i \sim x_j$ y como en V solo existe un elemento de cada clase de equivalencia entonces $x_i = x_j$ y por lo tanto $r_i = r_j$ por lo cual se concluye que $A_i = A_j$,en otras palabra se comprueba que.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \; para \; todo \; i \neq j$$

Para finalizar asumamos a V como un conjunto medible, por lo tanto, se tendría que.

El conjunto A_n es medible ya que la traslación de un conjunto medible es medible y además la $m(V) = m(A_k)$ para todo $A_k \subseteq A_n$.

Al utilizar las propiedades de m sobre $\mathcal{M}$ podemos asegurar que.

1. $$m((0,1)) = 1 \; y \; m((-1,2)) = 3$$
2. $$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{\infty} m(A_{n)}$$
3. $$m(E) \leq m(\bigcup_{i \in \mathbb{N}}^{\infty} A_n) \leq m((-1,2))$$

$$m(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}}^{\infty} m(A_{n)} \leq m\big((-1,2)\big)$$

$$m(E) \leq m(A_{1)} + m(A_{2)} + m(A_{3)} + \cdots \leq m\big((-1,2)\big)$$

Supongamos que la $m(V) = v$ entonces se tiene los siguiente.

$$1 \leq v + v + v \ldots \leq 3$$

Estas desigualdades muestran que no puede ser $v = 0$ ni tampoco $v > 0$, con lo que al asumir a V como un conjunto medible se llega a una contradicción, por lo tanto, el conjunto de Vitali es no medible Lebesgue, como consecuencia $V \notin \mathcal{M}$.

Para finalizar concluimos que, el conjunto V definido como.

$$V = \bigcup_{x \in E}^{\infty} f([x])$$

Donde $f([x]) = \{y\}$ es una función de elección aplicada a una partición del intervalo $(0,1)$, Como $\{y\} \in \mathcal{M}$, por ser un boreliano, y $\bigcup_{x \in E}^{\infty}\{y\} \notin \mathcal{M}$,se concluye que $\mathcal{M}$ no es una topología sobre X, esta afirmación es verdadera, ya que, dada una colección de elementos medibles se demostró que su unión no numerable es no medible por lo tanto $\mathcal{M}$ no cumple la propiedad $\boldsymbol{T3}$, con esto finalmente se concluye que $Sig(X) \nsubseteq Top(X)$.