DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y GENERALIZACIÓN LOGRADOS POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO AL RESOLVER TAREAS SOBRE SECUENCIAS

ANHUAR STEY DURÁN MENDOZA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2023

DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y GENERALIZACIÓN LOGRADOS POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO AL RESOLVER TAREAS SOBRE SECUENCIAS

ANHUAR STEY DURÁN MENDOZA

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas.

Asesora:

MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2023

Dedico este trabajo de grado, al motor de mi vida.

A mi madre, quién ha sido la mujer que me ha

Brindado su amor incondicional y me ha enseñado los

valores que me han formado como ser humano. Sin su

apoyo, su esfuerzo y su valentía para sacarme adelante,

esto no hubiera sido posible.

Gracias por creer en mí.

Te amo

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional, por haberme brindado la oportunidad de iniciar mis estudios en ella y cumplir mi sueño de ser profesional. Además, le agradezco porque me permitió conocer personas maravillosas y vivir grandes experiencias junto a ellas, cargadas de alegrías, aprendizajes y muchas risas.

A aquellos profesores que además de orientarme un espacio académico, dedicaron parte de su tiempo para escucharme, aconsejarme y enseñarme a hacer mejor las cosas cada día, especialmente a la profesora Nubia Soler, quién fue la encargada de orientar este trabajo y escuchó mis miedos, mis tristezas y, sobre todo, me motivó cada día a dar lo mejor de mi para hacer de este trabajo el mejor posible.

A mi madre, porque fue la mujer que me dijo "dedíquese a estudiar que mientras yo pueda voy a trabajar para apoyarlo", y porque ha estado para mi dándome consejos y apoyándome en cada una de mis decisiones.

Lista de Tablas

Tabla de Ilustraciones

Tabla de Contenido

Tabla de Anexos

Resumen

Este trabajo de grado se configura sobre la necesidad de favorecer los procesos de argumentación y generalización en el aula de Matemáticas, con el fin, de estimular el aprendizaje a partir del razonamiento, la discusión y la exploración, y facilitar el paso de la aritmética al algebra desde el descubrimiento de patrones y la verbalización de reglas. Para dicho propósito, adopté: las estrategias de Rumsey y Langrall (2016) para integrar la argumentación matemática en el proceso de aprendizaje; las tres etapas iniciales del proceso de generalización propuestas por Mason et al. (1999); y los siete niveles que se dan durante el desarrollo de la generalización de Cañadas y Castro (2007). Luego, con base en estos autores, diseñé e implementé tres actividades que permitieran fomentar el desarrollo de estos dos procesos en los estudiantes. Finalmente, observé que tanto la generalización, como la argumentación fueron alcanzadas por lo grupos de trabajo, de manera que en la mayoría de las categorías de análisis los equipos obtuvieron resultados favorables.

Palabras claves: Aprendizaje-Matemáticas, argumentación, generalización de patrones, pensamiento algebraico.

Introducción

La argumentación es un proceso que pretende estimular el desarrollo del pensamiento crítico en las personas, con el fin de que estas sean capaces de evaluar argumentos ajenos, poner en evidencia razonamientos mal construidos, evaluar diferentes puntos de vista, y por supuesto, construir sus propios argumentos. En particular, en el aula de matemáticas, se busca que los estudiantes adquieran estas habilidades con el propósito de que más adelante las usen para acceder al conocimiento a partir de la interacción con los demás, debatiendo y discutiendo contenido matemático. Asimismo, con ayuda del proceso de generalización, se procura que los estudiantes, a partir del estudio de casos particulares identifiquen patrones, los verbalicen y los escriban haciendo uso de diferentes medios de representación, con el fin de estimular el pensamiento algebraico. Además, con esto se espera que los estudiantes hagan inferencias, las argumenten y, al mismo tiempo, validen las conjeturas propuestas por sus compañeros.

Teniendo en cuenta lo anterior, decidí desarrollar el presente trabajo de grado, con el fin de favorecer los procesos de argumentación y generalización, en estudiantes de octavo grado del Colegio San Viator BI, en el marco de la Práctica de Integración Profesional a la Escuela durante el semestre 2022-2. Me dispuse a trabajar estos dos procesos, puesto que como mostraré en la justificación, al hacer un análisis de mi vida académica y mis prácticas educativas, identifiqué dos cosas: que las clases de matemáticas se centran en la ejecución de procedimientos; y que existen bastantes dificultades en la comprensión del álgebra cuando los estudiantes alcanzan los grados escolares en los que esta se estudia.

Para favorecer estos dos procesos en el aula, tomé la decisión de diseñar e implementar tres actividades. En relación con el diseño de estas, inicialmente investigué en diferentes repositorios de universidades, otros trabajos relacionados con el desarrollo de los procesos de argumentación y generalización, de los cuales destaco tres en el capítulo de antecedentes. Luego, consulté diferente bibliografía que utilicé para la construcción del Marco Teórico, en el cual trato de definir, teniendo en cuenta otros autores, los dos procesos a trabajar. Además, describo los tres aspectos principales que tuve en cuenta para la construcción de las actividades, que son: las etapas de generalización propuestas por Mason et al. (1999), los niveles de generalización planteados por Cañadas y Castro (2007) y las categorías para favorecer la argumentación presentadas por Rumsey y Langrall (2016).

Con base en el Marco Teórico, empecé con la construcción de las actividades, proceso que expongo en el capítulo de Metodología, el cual se divide en cuatro secciones: en la primera de ellas, describo, paso a paso, el proceso realizado para diseñar las actividades, teniendo en cuenta los cambios que hice y las razones que llevaron a tomar esas decisiones; en la segunda, relato cómo fue la implementación de las actividades con los estudiantes y algunos aspectos que resaltaron en esta; en la tercera, explico cómo se dio la recolección de datos; y por último, en la cuarta sección, expongo los mecanismos utilizados para hacer los análisis de los resultados.

Los Análisis de Resultados me permitieron reconocer de qué manera se favorecieron los procesos de generalización y argumentación en los estudiantes, teniendo en cuenta los tres aspectos utilizados para la construcción de las actividades. Asimismo, en este capítulo menciono cuales de estos aspectos no se evidenciaron en las respuestas de los estudiantes y doy una explicación de por qué sucedió esto.

Finalmente, en las conclusiones, presento algunas ideas finales del trabajo realizado, entre las cuales se encuentra cómo el trabajo a partir de la generalización permitió que los estudiantes desarrollaran la necesidad de usar expresiones algebraicas para describir las regularidades encontradas. Además, muestro como el trabajo en equipo permitió que los estudiantes llevaran a cabo discusiones, dándole importancia a la idea de argumento como función social. Así mismo, presento como los diferentes objetivos específicos orientaron el proceso para darle cumplimiento al objetivo general del trabajo.

Justificación

En la institución educativa en la que terminé mis estudios de bachillerato, era común que los profesores se centraran en explicar los algoritmos y que nosotros repitiéramos el mismo proceso sin tomarnos el trabajo de pensar acerca del porqué de estos procedimientos. Posteriormente, al empezar mis prácticas educativas de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, empecé a hacer observaciones de clase en diferentes instituciones educativas. Allí vislumbré que, aunque en algunas de ellas se buscaba generar ambientes de aprendizaje para potenciar la argumentación en los alumnos, estos poco enfatizaban en la comprensión conceptual, puesto que al final el trabajo de los estudiantes se centraba en la repetición de procedimientos. Además de esto, me encontré con autores como Jiménez y Pineda (2013), quienes mencionan que en las clases de matemáticas suele suceder que el profesor propone un ejercicio y lo soluciona, resolviendo un problema modelo; luego, plantea otros problemas similares a los estudiantes para que los resuelvan siguiendo el procedimiento explicado. También encontré otros autores, como Llanos y Otero (2009), quienes mencionan que cuándo esto se presenta, se le quita la posibilidad al alumno de acceder a la producción de nuevo conocimiento a partir de la discusión, el razonamiento, la exploración, la puesta en común de los significados y en particular la argumentación (p. 38).

Adicionalmente, encontré que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se mencionan los cinco procesos generales que debe tener una persona para ser matemáticamente competente, ya que están presentes en toda actividad matemática. Entre estos procesos se evidencia el razonamiento, en el cual se menciona que para su desarrollo es necesario "proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones." (p. 54). Es decir, que desde la normativa nacional se invita a los maestros a incluir en su actividad docente acciones que fomenten los procesos argumentativos.

Además de lo mencionado en los Estándares Básicos de Competencias, la importancia de la argumentación en el aula de matemática radica en que, por un lado, permite la construcción de conocimiento a partir de la interacción social. Pues como lo menciona Buitrago et al. (2013), el conocimiento se produce gracias a las interrelaciones que hay entre el pensamiento y el entorno de las personas, poniendo en manifiesto sus ideas, las cuales deben ser estructuradas y descritas a partir de un proceso argumentativo. Los seres humanos tienen la capacidad de argumentar sus posturas y justificar sus ideas con evidencias, llegando a consensos a partir de diferentes perspectivas y decidiendo cuales son las afirmaciones que se toman como válidas. Por otro lado, en el campo de las matemáticas, muchos investigadores afirman que la idea fundamental de enseñar esta área es que los estudiantes adquieran un pensamiento crítico, para que de esta manera se comprometan con el desarrollo social. Evaluar argumentos es una de las habilidades que se debe promover para desarrollar el pensamiento crítico, por supuesto, "para evaluar los argumentos ajenos es necesario ser capaz de argumentar las ideas y posturas propias" (Córdova et al. 2016). Teniendo en cuenta lo anterior, la argumentación debe ser un asunto de interés para los educadores matemáticos, puesto que abre la posibilidad de darle sentido a los nuevos conocimientos a partir de los saberes previos.

Por otra parte, a lo largo de mis prácticas también he podido escuchar a los estudiantes exponer sus dificultades para aprender álgebra, relacionadas particularmente con las letras y su uso en contextos matemáticos y de la vida cotidiana. De hecho, Rojas y Vergel (2013) mencionan que muchos de los estudiantes que se caracterizaban por tener destrezas matemáticas en los cursos anteriores a la introducción del álgebra, presentan confusión al momento de trabajar con letras. Asimismo, Kieran y Filloy (1989) explican que hay tres cambios significativos que se dan al pasar de la aritmética al álgebra, que pueden ser causantes de dichas dificultades, los cuales son: usos del signo igual, dificultades con la concatenación y convenciones del algebra, y dificultades para expresar formalmente métodos y procedimientos.

Con base en lo anterior, han surgido investigaciones que plantean la importancia de trabajar el pensamiento algebraico desde mucho antes de incluir los símbolos propios del algebra. Godino y Font (2003) mencionan que:

> "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones" p. 774.

En el mismo sentido, MEN (2006), presenta la generalización como un proceso que permite que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos, ya que los prepara para construir expresiones algebraicas a partir de la verbalización de reglas y el descubrimiento de patrones. Es decir, que es posible desarrollar el pensamiento algebraico en edades tempranas haciendo uso de la generalización de patrones, aunque inicialmente no se evidencie aplicación del lenguaje algebraico, pues es precisamente pensar algebraicamente un patrón, lo que permite que este se desarrolle. Mason (1996, citado por Molina, 2009) señala que "los alumnos llegan al colegio con capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar generalidad, y que el desarrollo del razonamiento algebraico es, en gran parte, cuestión de explotar estas capacidades naturales de los alumnos". En este contexto, la generalización es un proceso de interés en Educación Matemática, porque permite introducir el álgebra en edades tempranas, favoreciendo su conexión con la aritmética.

Durante el desarrollo de mis prácticas educativas en el Colegio San Viator Bilingüe Internacional, ubicado en la ciudad de Bogotá, encontré dos asuntos importantes en el Manual de Convivencia: por un lado, que esta institución tiene entre sus principios "incentivar actitudes que promuevan la participación democrática, desarrollando la autonomía en diferentes situaciones de la vida, que permitan vivir en comunidad", y "crear ambientes de participación y corresponsabilidad de la comunidad educativa en los diferentes procesos de formación". Por otro lado, que uno de sus fines es "el desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico, tecnológico y humanístico". Teniendo en cuenta lo mencionado al inicio de este capítulo, estos tres aspectos se pueden favorecer a partir del proceso de la argumentación. Así mismo, en la guía de Matemáticas del Programa de los Años Intermedios del Bachillerato Internacional (PAI), se establece que uno de los objetivos de los cursos de matemáticas es que los estudiantes "desarrollen sus capacidades de generalización y abstracción" (Organización del Bachillerato Internacional, 2014). En ese sentido, me interesé por contribuir al colegio estimulando los procesos de generalización y argumentación, en los estudiantes con los cuales estaba desarrollando mi práctica educativa.

Objetivos

Objetivo General

Favorecer los procesos de argumentación y generalización en estudiantes de grado octavo del Colegio San Viator de Bogotá.

Objetivos Específicos

- Diseñar tareas para favorecer la argumentación y la generalización en estudiantes de octavo grado.
- Desarrollar procesos de argumentación y generalización con estudiantes de octavo grado del Colegio San Viator de Bogotá.
- Describir los procesos de generalización y argumentación logrados por los estudiantes.

Antecedentes

Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo de grado es favorecer los procesos de generalización y argumentación en el aula de matemáticas, empecé indagando por trabajos similares en los repositorios de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Universidad Distrital Francisco José de Caldas (U Distrital) y Universidad de Antioquia (UdeA), relacionados con el diseño de tareas que estimularan la argumentación y/o la generalización, con el fin de adquirir experiencia e ideas para proyectar el ambiente de aprendizaje que iba a planear. Sobre el diseño de tareas que promueven la argumentación matemática en estudiantes de secundaria encontré veintidós trabajos en el repositorio de la UPN; con respecto al diseño de tareas que favorecieran la generalización en el aula encontré doce trabajos en el repositorio de la UPN, tres en el de la U Distrital y uno en el de la UdeA.

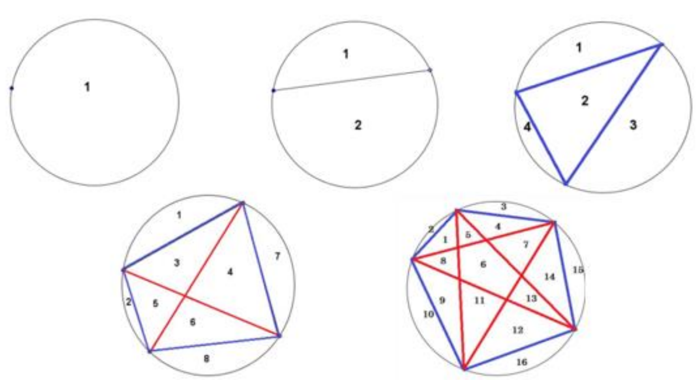
El siguiente paso fue revisar detalladamente cada uno de los trabajos que hallé identificado las tareas propuestas y los resultados obtenidos tras su implementación. Además, imprimí las actividades y las resolví, con el fin de favorecer mis propios procesos de argumentación y generalización haciendo uso de estas. A continuación, describiré tres de las tareas encontradas, las cuales destaco por su aporte a mi investigación:

En primer lugar, se encuentra la tarea propuesta por Martínez et al. (2016) cuyo objetivo era identificar cómo se favorecía el proceso de argumentación, haciendo uso de actividades fundamentadas en la evaluación de argumentos gráficos. Las actividades se implementaron con estudiantes de noveno grado de básica secundaria del Colegio de la Salle y estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, haciendo uso de guías. Esta actividad es de tipo geométrico y se compone de dos tareas, que en este trabajo se denominarán como: cantidad de regiones de una circunferencia y cantidad de diagonales de un polígono.

Cantidad de regiones de una circunferencia. Esta tarea presenta una secuencia con la cantidad de regiones en las que queda dividida una circunferencia al trazar cuerdas cuyos extremos son puntos de la circunferencia. Como se observa en la Ilustración 1 al tener un punto no se pueden trazar cuerdas y se tiene una única región; cuando hay dos puntos se traza una cuerda y se obtienen dos regiones; cuando se tienen tres puntos se trazan tres cuerdas y se determinan cuatro regiones; si se tienen cuatro puntos, se trazan seis cuerdas y se obtienen ocho regiones; con cinco puntos se trazan diez cuerdas y se determinan dieciséis regiones. Luego, se plantea la pregunta ¿en cuántas regiones queda dividida la circunferencia cuando se ubican seis puntos y se trazan todas las cuerdas cuyos extremos son esos puntos?, y se proponen dos argumentos distintos, uno de tipo numérico, que llega a la conclusión de que la cantidad de regiones es $2^5 = 32$, y uno de tipo geométrico que llega a la conclusión de que la cantidad de regiones es 30. Los estudiantes deben decidir si están de acuerdo con cada uno de los argumentos y si son correctos, lo interesante de esto, es que los dos parecen ser correctos y contradictorios al mismo tiempo.

Ilustración 1

Cantidad de regiones en una circunferencia al trazar cuerdas en ella.

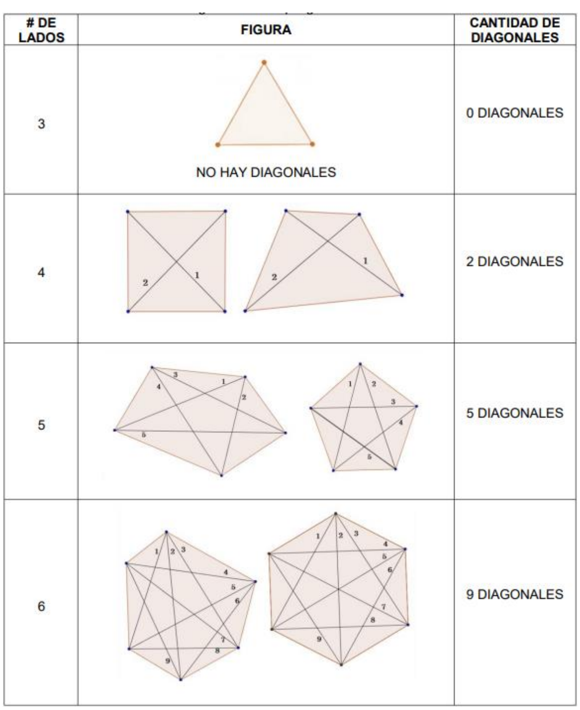


Nota. Adaptado de Evaluación de argumentos visuales: Una estrategia para fortalecer las prácticas argumentativas, (pp. 101 – 102), de Martínez et al., 2016.

Cantidad de diagonales de un polígono. En esta actividad se muestra una secuencia que inicia con el triángulo y finaliza con el hexágono, presentando la cantidad de diagonales de cada uno de estos polígonos (Ilustración 2). Posteriormente se hace la pregunta, ¿un polígono de siete lados cuántas diagonales tendrá?, y se plantean tres argumentos que responden la pregunta, y que los estudiantes deben evaluar, los dos primeros son inválidos, debido a que están incompletos, pero si se le hacen los ajustes adecuados se convierten en verdaderos. El primero de ellos determina que una figura de siete lados tiene 28 diagonales; el segundo concluye que la cantidad de diagonales son 13; y el último, establece que el polígono tiene 14 diagonales y es el argumento correcto.

Ilustración 2

Relación de las diagonales de un polígono con su número de lados.



# DE LADOS	FIGURA	CANTIDAD DE DIAGONALES
3	NO HAY DIAGONALES	0 DIAGONALES
4		2 DIAGONALES
5		5 DIAGONALES
6		9 DIAGONALES

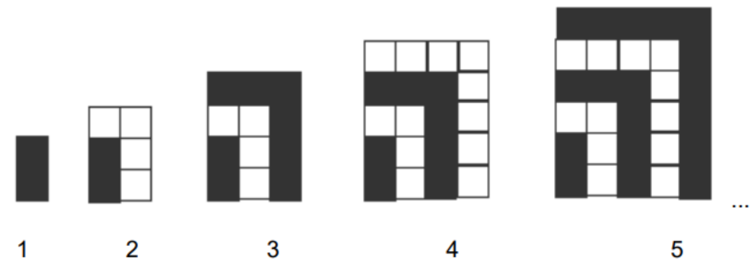
Nota. Tomado de Evaluación de argumentos visuales: Una estrategia para fortalecer las prácticas argumentativas, (p. 106), de Martínez et al., 2016

En esta investigación se encontró que es factible fortalecer las prácticas argumentativas a partir del cuestionamiento de argumentos visuales, pues les permitió a los estudiantes validar y justificar los resultados obtenidos al resolver un problema o examinar los argumentos de otros. En ese sentido, con base en ella identifiqué que es viable proponer argumentos y pedir a los estudiantes que los validen o invaliden a través de sus exploraciones y discusiones con sus compañeros de trabajo.

La segunda actividad que destaco es la de Pinilla y Ramírez (2013), la cual tenía como objetivo describir y analizar los argumentos de los estudiantes del grado 702 del Colegio Bravo Páez, al resolver tareas sobre generalización. La propuesta estuvo conformada por dos instrumentos, que corresponden a las versiones inicial y final de la tarea. Las actividades estaban centradas en la generalización de patrones, en ese sentido, presentan las primeras cinco figuras de una secuencia de cuadrados blancos y negros ubicados en forma de L (Ilustración 3), y plantean una serie de preguntas, con el fin de que los estudiantes argumenten sobre cómo se construye una figura a partir de la anterior y acerca de la cantidad cuadros que habrá de cada color en figuras posteriores. En este trabajo, los investigadores encontraron que las tareas de generalización eran una forma satisfactoria de favorecer la producción de argumentos. En ese sentido, me di cuenta de que las tareas sobre generalización de patrones permiten que los estudiantes hagan afirmaciones espontaneas, que al ponerse en consideración con sus compañeros posibilitan la generación de diferentes tipos de argumentos.

Ilustración 3

Secuencia de cuadros blancos y negros en forma de L.

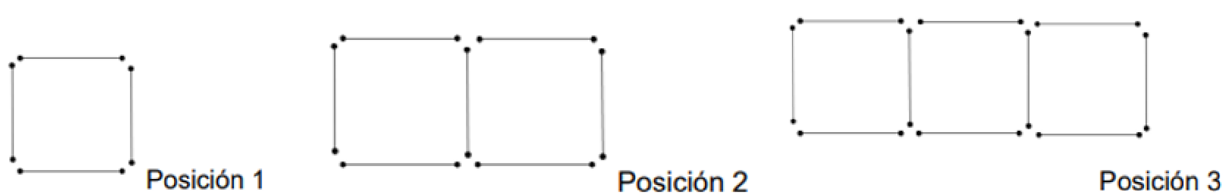


Nota. Tomada de Descripción y análisis de los argumentos surgidos en una tarea sobre generalización realizada por estudiantes de grado séptimo (p.15), de Pinilla y Ramírez, 2013.

Por último, destaco el trabajo de Muñoz y Quevedo (2014), cuyo objetivo era describir los argumentos que surgían al resolver una tarea de generalización propuesta a estudiantes de grado noveno, por lo tanto, diseñaron una tarea que fue implementada con estudiantes de este nivel académico del Instituto Henao y Arrubla. El instrumento utilizado consistía en tres actividades, la primera de ellas llamada “Contando Palillos” (Ilustración 4), la segunda “Baldosas” (Ilustración 5) y la tercera “El Huerto” (Ilustración 6).

Ilustración 4

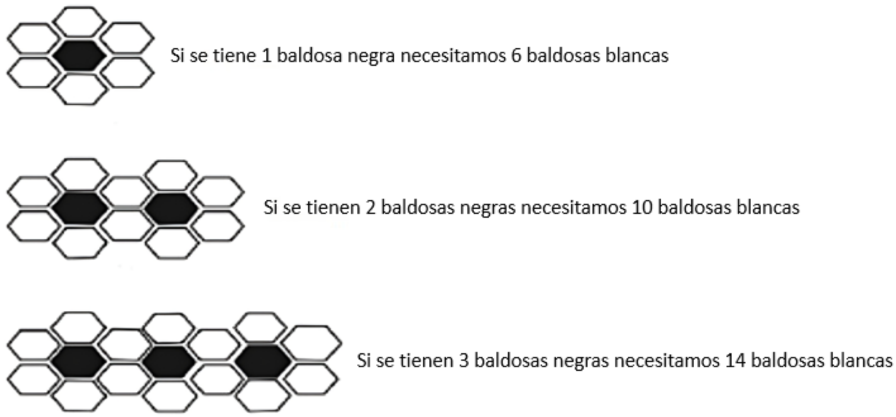
Secuencia de la tarea “Contando Palillos”.



Nota. Adaptado de Descripción de los argumentos logrados por estudiantes de grado noveno al realizar una tarea de generalización (p. 48), de Muñoz y Quecedo, 2014.

Ilustración 5

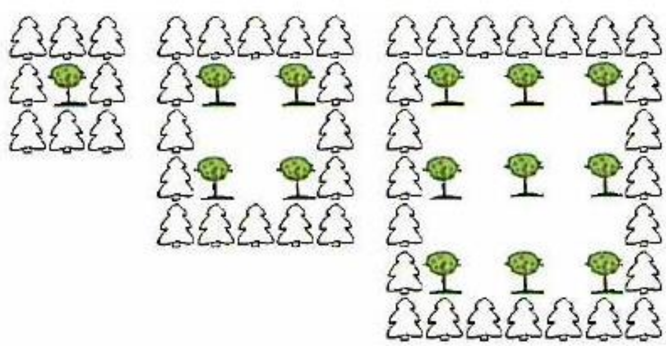
Secuencia de la tarea "Baldosas".



Nota. Adaptado de Descripción de los argumentos logrados por estudiantes de grado noveno al realizar una tarea de generalización (p. 49), de Muñoz y Quevedo, 2014.

Ilustración 6

Secuencia de la tarea "El Huerto"



Nota. Tomado de Descripción de los argumentos logrados por estudiantes de grado noveno al realizar una tarea de generalización (p. 51), de Muñoz y Quecedo, 2014.

Para cada una de las secuencias los estudiantes debían hacer un proceso de generalización, en el que iniciaban estudiando los primeros casos, para luego analizar casos desconocidos, y finalmente tratando de proponer una expresión algebraica para cualquier caso. Con base en esto, los investigadores encontraron que esta tarea permitió favorecer los procesos de generalización y argumentación en los estudiantes. Asimismo, que fomenta la cooperación entre compañeros. Este trabajo me permitió identificar que el proceso de generalización conlleva una serie de pasos y que se debe procurar que los estudiantes inicien analizando casos sencillos, con ayuda de figuras, para llegar a los casos más complejos y abstractos. Además, al llevar este proceso adecuadamente, también se puede favorecer la argumentación.

Marco Teórico

Argumentación

Generar argumentos o argumentar es un acto comunicativo que se da cuando surge la necesidad de darle validez a una afirmación hecha. Para argumentar es necesario que haya una transmisión efectiva de un mensaje, desde un emisor hacia un receptor, por lo tanto, es de carácter social. En palabras de Sardá (2003, citado por Tamayo et al., 2015) la argumentación:

> "es una actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida".

Perelman y Olbrechts-Tyteca (1989) hacen referencia a que la argumentación tiene dos objetivos: persuadir por medio de recursos afectivos principalmente; y convencer a través de razones. Estas dos finalidades relacionadas con la retórica y la filosofía, respectivamente. Además, mencionan que la argumentación siempre busca que los individuos de un auditorio se adhieran a determinadas tesis, por lo tanto, es necesario que, haya una comunidad de personas dispuestas a debatir sobre estas cuestiones.

Por su parte Camargo (2010) citando a Duval (1991, 1999), Balacheff (1999) y Pedemonte (2001, 2002, 2005), relaciona el término argumentación con "dar razones fundadas para apoyar la plausibilidad de una conjetura o progresar en la resolución de un problema, mediante uno o más argumentos coherentemente conectados, aunque no necesariamente de manera deductiva". En este mismo sentido, Boero et al. (2008, citado por Silva, 2013), relaciona un argumento con dar razones para respaldar o desaprobar una tesis, cuya finalidad es convencer a otros.

Teniendo en cuenta lo anterior, al ofrecer un argumento es necesario que los individuos a los que se busca convencer o persuadir lo acepten, para poder alcanzar su objetivo. Con respecto a esto, Duval (1999, citado por De Gamboa et al., 2010) propone los criterios de pertinencia y fuerza para hacer un examen de aceptabilidad de los argumentos. La pertinencia, es la relación que existe entre el argumento y la afirmación que busca defender, buscando, además, que sus elementos comunicativos sean coherentes para quien lo recibe; la fuerza es la resistencia que tiene para enfrentar contraargumentos, dicho de otra manera, entre más difícil sea refutarlo, mayor es su fuerza.

Considerando las definiciones más generales de argumentación, es importante centrar la atención en su significado dentro del campo de las matemáticas. Cuando el proceso argumentativo se lleva a cabo durante la actividad matemática, y se apoya de los conocimientos de esta área para dar razones que permiten justificar las conexiones entre los datos iniciales y la conclusión a la que se llega, se habla de argumentación matemática (De Gamboa et al., 2010). Duval (1991, citado por Camargo, 2010) usa el término argumentar en matemáticas cuando se dan razones a favor o en contra de una afirmación, con el fin de determinar su aceptabilidad y fijar un nivel de veracidad que permita proponerlo para hacer una demostración.

Homero (2007, p.71) define la práctica argumentativa en matemáticas como “el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema”. La función de toda práctica argumentativa es convencer a otros acerca de la validez de un resultado obtenido o de una conjetura. No obstante, estas prácticas argumentativas no siempre estás constituidas por argumentos válidos.

Si se toma en consideración que existen argumentos que no siempre son válidos, entonces surgen las falacias, las cuales según Hamblin (2016) son argumentos que parecen válidos, pero no lo son. Gascón (2021) menciona que, al cometer una falacia, se está infringiendo algún tipo de regla lógica, lo cual hace que el argumento sea completamente inválido. Una falacia es una táctica engañosa y puede destruir completamente la actividad argumentativa. No obstante, existen situaciones en las que el argumento no es falaz, sino inválido. Esto se da cuando este no justifica completamente el contenido de la afirmación, pero al modificarse, ligeramente, se convierte en un argumento válido.

Caracterización de la Argumentación

Pedemonte (2002, citado por Fiallo, 2011) hace un análisis de las características funcionales de la argumentación, por medio de las cuales establece la finalidad, la utilidad y el papel de esta dentro de un discurso:

I. *La argumentación es una justificación racional***.** Esta característica es visible en el razonamiento.

II. *La argumentación trata de convencer.* Esta se da cuando se quiere convencer a otra persona o a uno mismo acerca de la veracidad de una afirmación.

III. *La argumentación se dirige a una audiencia universal.* Se da cuando no solamente el interlocutor habla para dar sus argumentos, sino que la audiencia debe ser capaz de defender sus propios puntos de vista frente a estos.

IV. *La argumentación en matemáticas pertenece a un campo.* El discurso se debe dar de manera que se comprenda con exactitud, por lo tanto, debe estar contextualizado dentro del campo de las matemáticas en la que se sitúa la proposición.

Estrategias para promover la argumentación matemática

Tomando en consideración las definiciones de argumentación presentadas anteriormente y la importancia de esta en el aula de matemáticas, es importante pensar en cuáles son esas estrategias que permiten favorecer el desarrollo de la argumentación en los estudiantes. Para esto, se tiene presente inicialmente que, los alumnos son capaces de hacer afirmaciones con base en generalidades y regularidades que observan, de manera que pueden conjeturar, desarrollar, justificar, criticar y cuestionar afirmaciones o modificarlas de acuerdo con lo dicho por sus compañeros (Rumsey, 2013, citado por, Rumsey 2016). En ese sentido, Rumsey y Langrall (2016) propone una serie de estrategias que permiten integrar la argumentación matemática en el proceso enseñanza-aprendizaje, las cuales se presentan a continuación:

Proporcionar apoyos de lenguaje. Teniendo en cuenta que los estudiantes no tienen suficientes habilidades para elaborar un discurso de argumentación en matemáticas, es posible apoyarlos brindándoles marcos de lenguaje, que son plantillas que los estudiantes pueden utilizar al momento de generar argumentos, ya que les brindan los patrones de lenguaje que se esperan de un ciudadano educado (Donna et al., 2009). Algunos ejemplos de marcos de lenguaje se presentan en la **Tabla 1**:

Tabla 1

Marcos de lenguaje para la argumentación en ciencia

Hacer una declaración	Observé_____cuando_____.Comparé_______y_____. Noté_____, cuando_____. El efecto de_____en_____es_____.

Proporcionar evidencia	La evidencia que usé para apoyar____es______.Creo (afirmación) porque (justificación). Sé que______es______porque_____.Basado en____________, pienso__________. Basado en_____, mi hipótesis es_____.
Pedir evidencia	Tengo una pregunta acerca de____. ¿Hay algo más sobre____? ¿Qué hace que_____? ¿Me puedes mostrar dónde encontraste la informaciónsobre____?
Ofrecer una posición distinta	Estoy en desacuerdo con_____porque______.La razón por la que creo____________es______. Los hechos que apoyan mi idea son____.En mi opinión_. Una diferencia entre mi idea y la tuya es___.
Invitar a una especulación	Me pregunto qué pasaría si_____.Tengo una pregunta sobre____________________. Averigüemos cómo podemos probar estas muestras para_______________.Queremos probar____para averiguar si__________. Si cambio (variable en experimento) entonces pienso que pasará ______, porque______. Me pregunto por qué____. ¿Qué causó_____? ¿Esto en qué sería diferente si____? ¿Qué crees que pasará si_____/después?
Llegar a un consenso	Estoy de acuerdo con_____porque______. ¿Esto en que sería diferente si____? Todos tenemos la misma idea sobre__________.

Nota. Tomado de Donna et al. (2009/2020).

Discutir contenido familiar y rico. En este caso, se deben buscar conceptos conocidos por los estudiantes y pedirles que hagan afirmaciones acerca de todo lo que saben en relación con el tema. Tan pronto ellos hayan hecho sus declaraciones, se le puede solicitar que convenzan a sus compañeros sobre la veracidad de ellas. Esto sirve como herramienta para generar discusiones que abran la puerta a la argumentación, y son un enlace hacia nuevas propiedades de los objetos matemáticos en cuestión.

Especificar condiciones. Se trata brindar a los educandos la oportunidad de probar conjeturas, formular afirmaciones y modificarlas con base en sus observaciones, además de explicar condiciones que se deben cumplir para que las afirmaciones hechas sean válidas. Con esto, se pretende que los estudiantes también tengan la necesidad de convencer a otros acerca de la veracidad de sus declaraciones, teniendo en cuenta que las suposiciones hechas eran correctas.

Presentar afirmaciones falsas: Parte de desarrollar el proceso de argumentación en los estudiantes, es convertirlos en productores del conocimiento, de manera que la autoridad matemática no sea exclusiva del maestro o del libro de texto. En ese sentido, al presentar afirmaciones falsas se le permite al estudiante adquirir confianza para validar o cuestionar las declaraciones hechas por otros, así mismo, ellos pueden reconocer que cuando una aserción no es válida, es posible modificarla y mejorarla.

Manipular contenido familiar y rico para llegar a algo que no lo es: Existen propiedades matemáticas que los estudiantes reconocen y saben que son válidas; sin embargo, es posible hacer exploraciones con esa misma propiedad, pero cambiando las operaciones o algunas condiciones, de manera que se estimule a los alumnos para llegar a la pregunta: ¿Qué pasaría si…? Además, con esto se busca que los estudiantes exploren condiciones e identifiquen las causas para que las propiedades sean válidas en algunos casos, pero no en otros.

Generalización

La generalización es una actividad que se encuentra en todas las formas de conocimiento científico y no científico, por lo tanto, no es exclusiva de las matemáticas. La Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia (2006) menciona que cuando las personas intentan definir conceptos, clasificar objetos y tomar decisiones teniendo en cuenta las invariantes comunes observadas en diferentes situaciones, están aproximándose al proceso de generalizar. Por su parte, Grupo Azarquiel (1993) afirma que no solamente se generaliza en estas situaciones, y extiende este proceso a transferir propiedades de determinadas situaciones a otras que también las cumplen, ampliando el ámbito de una definición o ley.

Según Smith y Smith (1977, citado por Navas y Molina, 2016) la generalización es:

> “una abstracción en la cual un conjunto de objetos con propiedades similares se representa por una clase genérica. Es el más importante mecanismo para modelar el mundo real, permitiéndonos ir gradualmente desde lo específico a lo general. La generalización nos permite movernos desde observaciones de propiedades específicas de objetos hasta un modelo que representa esos objetos por una clase genérica” (p.3)

Mason (1989, citado por Esquinas, 2008) afirma que “generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema”. En matemáticas, es posible decir que, generalizar es tomar un conjunto de objetos matemáticos y extraer de ellos relaciones o propiedades en común. De hecho, Cañadas y Castro (2012) afirman que cuando los estudiantes adquieren la habilidad de identificar patrones de casos particulares y aplicarlos a otros casos es porque han alcanzado la generalización.

Mason (1996) citado por Villa (2006) plantea que la generalización es una actividad empírica e inductiva, por medio de la cual se acumulan ejemplos de casos particulares y con base en ellos se detecta un patrón. No obstante, cuando la generalización es más fuerte que esto, es necesario desarrollar ciertas habilidades en los estudiantes que dan sentido y permiten categorizar los razonamientos que se dan en este proceso. Mason et al. (1999) exponen tres etapas iniciales del proceso de generalización:

Etapa1: Ver. Hace referencia a la capacidad de un estudiante para observar, reconocer, reflexionar, deducir, etc., y poner en práctica todas estas acciones para poder identificar mentalmente un patrón. Ver también significa poder establecer relaciones y diferencias que existen entre las regularidades que se mantienen iguales o que verían en diferentes situaciones, tratando de comprender por qué sucede esto.

Etapa 2: Decir. Está relacionado con poder describir haciendo uso de diferentes formas de comunicación (verbal o gestual), y con base en los conocimientos que se tienen de los objetos matemáticos en cuestión, cada una de las propiedades encontradas en estos; de manera que se puedan hacer inferencias y afirmaciones sobre otros objetos.

Etapa 3: Registrar. Es el componente semiótico del proceso de generalizar, y es la etapa más avanzada de este, ya que, se relaciona con ser capaz de expresar las afirmaciones hechas sobre el objeto que se está generalizando por medio de dibujos, diagramas, símbolos o del leguaje escrito. Esta etapa es importante particularmente porque las ideas en la mente tienden a ser fugaces, mientras que, al registrarlas en el papel, pueden ser revisadas, discutidas o modificadas.

Cañadas y Castro (2007) tienen en cuenta diferentes estrategias que usan los estudiantes durante un razonamiento inductivo, para dar solución a situaciones que comprenden patrones y regularidades, con el fin de proponer siete niveles que se dan durante el desarrollo de la generalización, para complementar las tres etapas anteriores. A continuación, se presenta el modelo planteado por estos dos autores:

Nivel 1: Observación de casos particulares. Lo primero que se busca es que los estudiantes analicen y exploren casos particulares. Es importante que estos casos sean sencillos y fáciles de observar.

Nivel 2: Organización de casos particulares. Los estudiantes deben buscar estrategias que les permitan sistematizar la información encontrada en los casos particulares. Un método puede ser utilizar tablas, que permitan disponer los datos obtenidos y a partir de cierto orden, se puedan identificar patrones.

Nivel 3: Búsqueda y predicción de patrones. Con base en la información que se tiene inicialmente, se empiezan a reconocer las regularidades en diferentes situaciones, y se presupone que se pueden repetir en otros casos.

Nivel 4: Formular conjeturas. En este paso se espera que las personas puedan hacer afirmaciones sobre el comportamiento del patrón y formular proposiciones, pero teniendo en cuenta que existe una posibilidad de error y que existe un elemento de duda, puesto que no se ha sometido a verificación. Durante la exploración es posible llegar a la aceptación o al rechazo de la proposición enunciada.

Nivel 5: Validar las conjeturas. Teniendo certeza de que la conjetura formulada funciona adecuadamente para los casos particulares que se conocen. En esta etapa se espera poder validar si funciona para otros casos particulares, pero no buscando la generalidad. Además, en este nivel se busca convencer a otros o a uno mismo sobre la veracidad de la conjetura.

Nivel 6: Generalización de conjeturas. Una vez se ha probado la conjetura para los diferentes casos particulares, es posible que los estudiantes empiecen a pensar que la conjetura se cumple para todos los casos. En ese sentido, se debe expresar una conjetura que haga referencia a todos los posibles casos de la situación estudiada.

Nivel 7: Justificación de las conjeturas. Si se tiene certeza de que la conjetura se cumple para los casos particulares estudiados y se ha generalizado, el siguiente paso es justificarla, con el fin de convencer a otras personas de que esta generalización es verdadera siempre. Para esto, se puede hacer uso de la prueba formal.

Marco Metodológico

Descripción de la población

El trabajo inicialmente fue pensado para ser desarrollado con estudiantes de séptimo grado del Colegio San Viator BI, que se encontraban entre los 11 y 13 años. Sin embargo, teniendo en cuenta que el colegio es calendario B, los estudiantes pasaron en junio de 2022 a octavo grado, por lo tanto, pensé las actividades para ser desarrolladas con este grado, considerando que aún pertenecían al Programa de los Años Intermedios del Bachillerato Internacional.

Diseño de las Tareas

Teniendo como herramientas las indagaciones hechas y las tres actividades expuestas en los antecedentes, empecé a buscar diferentes ejercicios que pudiesen ser útiles para diseñar actividades que contribuyeran a favorecer la argumentación. En ese sentido, me centré en la aritmética, ya que era un tema de mi interés, además, en muchos de los trabajos que revisé había encontrado que se hacía uso principalmente de la geometría, por lo tanto, quería hacer algo diferente. Inicialmente, con el fin de favorecer en mí los procesos de generalización y argumentación empecé a hacer mi propio ejercicio matemático; así, me propuse estudiar seis ejercicios que encontré en internet y en diferentes trabajos de grado. Para esto, diseñé una tabla de tres filas para cada uno de los ejercicios: en la primera fila, ubiqué el ejercicio; en la segunda, escribí inferencias y afirmaciones que empecé a hacer sobre estos. Por ejemplo, enuncié patrones y cambios o invariantes que se podían dar al modificar las condiciones dadas. Luego, verifiqué la veracidad de cada una de las afirmaciones hechas en el paso anterior, y si se daba el caso, formulaba generalizaciones con base en los resultados obtenidos. Finalmente, en la tercera columna escribí argumentos que justificaran cada una de las generalizaciones hechas. Un ejemplo del proceso descrito anteriormente se encuentra en la Tabla 2.

Tabla 2

Ejemplo del proceso realizado con uno de los seis ejercicios estudiados.

Ejercicio

Observe la siguiente tabla:

Posición	Números
1.	$1 = 1$
2.	$8 = 3 + 5$
3.	$27 = 7 + 9 + 11$
4.	$64 = 13 + 15 + 17 + 19$
5.	$125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$
6.	$216 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$

Inferencias y afirmaciones sobre el ejercicio

- El primer número se forma con el primer número impar.
- El segundo número se obtiene a partir de la suma del segundo y tercer número impar.
- El tercer número se determina sumando los números impares de la cuarta, quinta y sexta posición.
- Los números de la izquierda son el resultado de elevar n al cubo, donde n es el número de la posición.
- ¿Cuál sería la secuencia para 11 al cubo?
  $111 + 113 + 115 + 117 + 119 + 121 + 123 + 125 + 127 + 129 + 131$
- ¿Cuál sería la secuencia para 17 al cubo?
  La suma de los números impares mayores o iguales al 273 y menores o iguales al 305.
- ¿Cuál sería la secuencia para 103 al cubo?
  Son los números impares que hay desde el 10507 hasta el 10711.
- ¿Cuál sería la secuencia para 10000001 al cubo?
  Es la suma de los números impares desde 500000500000 hasta (500002500002)
- ¿Cuál sería la secuencia para n al cubo?
  El primer número se encuentra haciendo

$$\left(2\sum_{x=1}^{n-1} x\right) + 1$$
$$= (n-1)n + 1$$
$$n^2 - n + 1$$

o haciendo

$$n * (n-1) + 1$$

El último haciendo:

$$2(n-1)+\left(2\sum_{x=1}^{n-1}x\right)+1$$
$$=n^2+n-1$$

o haciendo

$$n*(n+1)-1$$

Argumentos que justifican las afirmaciones hechas

- El primer número es 1, que es el primer número impar.
- El segundo número es 8, que se forma al sumar 3 y 5.
- El tercer número es 27, y surge de la suma de los números 7, 9 y 11.
- En el primer caso se observa que la posición es 1 y el primer número de la izquierda es 1, que es 1^3. En la posición 2, el número es 8, que es 2^3, y así se cumple para los primeros seis casos, por lo tanto, es posible suponer que en la posición n, el número de la izquierda es n^3.
- Al completar la tabla hasta el caso 11, se obtiene:

Posición	Números
7.	$343=43+45+47+49+51+53+55$
8.	$512=57+59+61+63+65+67+69+71$
9.	$729=73+75+77+79+81+83+85+87+89$
10.	$1000=91+93+95+97+99+101+103+105+107+109$
11.	$1331=111+113+115+117+119+121+123+125+127+129+131$

  Además, al sumar los números, el resultado es 1331, que es igual a 11^3.
- Descubrí que podía operar $17*16+1=273$, para obtener el número que iniciaba la secuencia número. También, que podía hacer $17*18-1=305$, para obtener el último de la secuencia.
- Porque $102*103+1=10507$ y $103*104-1=10711$.
- $10000001*10000000+1=500000500000$ y $10000001*10000002-1=500002500002$.
- Como en la primera posición se suma un número impar, en la segunda dos números impares, en la tercera tres números impares, y así sucesivamente, sé que para la posición n se han sumado $1+2+3+\cdots+n-1=k$ números impares. Por lo tanto, el primer número impar de la posición n es el impar de la posición $k+1$, y cómo

$$k=\sum_{x=1}^{n-1}x$$

Entonces, $2k + 1$ es el impar que estoy buscando, y sería el primer número de la posición n.
Haciendo un razonamiento análogo se obtiene el último número de la serie.

Una vez realizado este proceso empecé con el diseño de las tareas. Con base en el marco teórico sobre argumentación construí una matriz en la cual ubiqué en la parte superior el ejercicio que iba a analizar, debajo de este, escribí cada una de las categorías de Rumsey y Langrall (2016) sobre argumentación, y junto a estas coloqué preguntas relacionadas con ellas. Dividí la categoría "Apoyos de lenguaje" en seis partes, con base en lo expuesto por Donna et al. (2009). Esta matriz la utilicé para cada uno de los seis ejercicios que había resuelto (Ver Tabla 3). En este proceso me encontré con ejercicios para los cuales no pude plantear preguntas que se adaptaran a alguna de las categorías, por lo tanto, estos fueron descartados.

Tabla 3

Ejemplo de la matriz construida para sistematizar las posibles preguntas para cada uno de los ejercicios.

<table>
<tr><td colspan="3">Ejercicio

Observe la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>Posición</td><td>Números</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>$1 = 1$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$8 = 3 + 5$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$27 = 7 + 9 + 11$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$64 = 13 + 15 + 17 + 19$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>$216 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Apoyos de lenguaje</td><td>Hacer una declaración</td><td>En la posición 4 se suman ______ números impares.

Cuando elevo la posición al cubo obtengo _______
____
(la suma de los números de esa posición).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td>Proporcionar evidencia</td><td>Creo que los números de la posición 7 son ___________ porque ____________.

Creo que los números de la posición 8 son ___________ porque ____________.

El primer número de la posición 7 es _______ (43) porque _____________ (el último número es la posición 6 es 41, y el siguiente impar es 43).

El último número de la posición 7 es _____ (55) porque ____________ (La posición 7 tiene 7 números impares consecutivos, empezando por 43)

La suma de los números de la posición 7 es (343) _______ porque ___________ (es el resultado de elevar 7 al cubo)</td></tr>
<tr><td>Pedir evidencia</td><td>Camilo se dio cuenta de que en las posiciones pares la suma de los números es par, y que en las posiciones impares la suma de los números es impar.

¿Cómo se daría cuenta de esto Camilo?</td></tr>
<tr><td>Ofrecer una posición distinta</td><td></td></tr>
<tr><td>Invitar a una especulación</td><td>¿Qué pasa si en vez de sumar números impares, se suman números pares?

Si no tuvieras los números de la posición 1 a la 5. ¿cómo harías para saber cuál es el primer número de la posición 6?</td></tr>
<tr><td>Llegar a un consenso</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Discutir contenido familiar y rico</td><td colspan="2">El profesor Roberto les dijo a sus estudiantes que en la secuencia había números elevados al cubo. ¿Cuáles serán esos números?</td></tr>
<tr><td>Especificar condiciones</td><td colspan="2">Carlos dice que a la derecha del igual siempre se ponen números pares, mientras que Camila dice que siempre son impares. ¿Con cuál de los dos estudiantes estás de acuerdo?, ¿por qué?</td></tr>
<tr><td>Presentar afirmaciones falsas</td><td colspan="2">El profesor preguntó ¿Cuáles son los números de la posición 7?
Pedro respondió de la siguiente manera:
La siguiente posición es:
$$343 = 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53$$</td></tr>
</table>

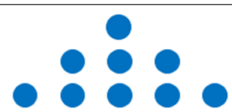
	¿Estás de acuerdo con la respuesta de Pedro?, ¿qué le dirías? Camilo dice que, si la posición es par, entonces la suma de los números es un número impar y si la posición es impar, la suma es un número par. ¿Estás de acuerdo con Camilo? Cuando el profesor preguntó que para la posición 4 cuáles números se sumaban, Camila respondió que se sumaban los primeros 4 números impares. ¿estás de acuerdo con Camila?, ¿Qué le dirías?
Manipular contenido familiar para llegar a algo	

Una vez realicé el proceso descrito anteriormente, busqué ejercicios sobre generalización, con el fin de explorar diferentes formas de favorecer la argumentación, teniendo en cuenta, que este fue el camino utilizado por Pinilla y Ramírez (2013) en su actividad. Encontré cuatro ejercicios y completé la matriz para cada uno. Entre estos había uno que se centraba en la suma de números impares consecutivos para obtener como resultado números cúbicos (Tabla 3), sin embargo, lo descarté puesto que su representación tenía un mayor nivel de abstracción, y encontrar los números que se debían sumar, también era un proceso complejo si los estudiantes se encontraban en las primeras etapas del proceso de generalización.

Los otros tres ejercicios que encontré fueron los que utilicé para diseñar tres tareas más. Esto se debe a que estos se adaptaban mejor a las categorías para favorecer la argumentación. Para el diseño final de las actividades copié estos tres ejercicios a un nuevo documento y con base en la matriz elaborada para cada uno, organicé una actividad diferente con cada ejercicio, y asocié cada pregunta a una de las categorías de Rumsey y Langrall (2016), a algunas etapas de Mason et al. (1999) y a uno de los niveles de Cañadas y Castro (2007).

Ilustración 7

Secuencia de puntos triangulares.

Figura	Representación
1.	
2.	
3.	
4.	

Para el primer ejercicio tuve en cuenta la Ilustración 7. En este ejercicio identifiqué dos maneras de contar la cantidad de puntos, la primera la muestro en la Ilustración 8, en la cual, a la figura n se le agrega una fila de puntos con dos puntos más que la última fila de la figura $n-1$, generando una suma de números impares; la segunda forma la muestro en la Ilustración 9, en esta, los puntos se cambian de posición, con el fin de elaborar una figura de n puntos por cada lado.

Ilustración 8

Forma de contar 1. Secuencia de puntos triangulares.

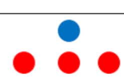
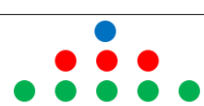
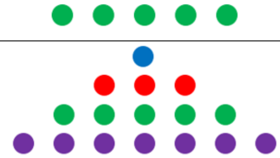
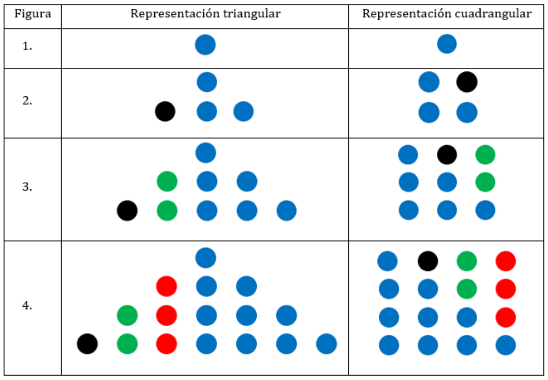
Figura	Representación	Cantidad de puntos
1.		$1 = 1$
2.		$4 = 1 + 3$
3.		$9 = 1 + 3 + 5$
4.		$16 = 1 + 3 + 5 + 7$

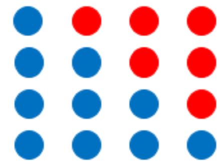
Ilustración 9

Forma de contar 2. Secuencia de puntos triangulares.



Con base en estas dos maneras de contar la cantidad de puntos, hice una primera versión de la actividad, con la cual buscaba que los estudiantes iniciaran observando casos particulares, a partir de la visualización de las primeras cuatro figuras de la secuencia, y se familiarizaran con esta a partir de la construcción las figuras 5 y 6. Además, esperaba que los estudiantes alcanzaran el nivel de formular conjeturas del proceso de generalización y utilizarlas para responder la última pregunta. Por otro lado, ajusté las preguntas para que favorecieran la argumentación a partir de los marcos de lenguaje y la validación o invalidación de afirmaciones. Las preguntas se muestran a continuación:

1. Dibuja las figuras 5 y 6. ¿Cuántos puntos son necesarios para formar estas figuras?
2. Un compañero de la clase expresa que no entiende cuáles son los números que debe sumar. Ayúdate con las frases de referencia para explicarle el procedimiento.
    - En la posición _______ se suman los números $1 + 3 + 5 + 7$, porque ____ ____.
    - Teniendo en cuento lo anterior, en la posición 7 se suman los números _______________________ porque ______________________________________.
3. Mariana idea la siguiente estrategia para contar la cantidad de puntos en la figura 4.

Paso 1	Paso 2
	

Finalmente, concluye que la cantidad de puntos es $4 \times 4 = 16$.

Realiza el procedimiento de Mariana para la figura 6. ¿Estás de acuerdo con esta estrategia?

4. El profesor dice que la cantidad de puntos está relacionada con los números al cuadrado. ¿A qué se refiere el profesor con esta afirmación?
5. Esteban dice que el número de la posición 7 es 48 porque 1+3+5+6+9+11+13+15. ¿Qué le dirías a Esteban acerca de su procedimiento?
6. Camilo hizo en clase la siguiente afirmación: “Cuándo la cantidad de números que se suman es impar, el número de la izquierda es impar, mientras que cuando la cantidad de números es par, entonces el número de la izquierda es par”

¿Podrías decir cómo hizo el para llegar a esta conclusión?

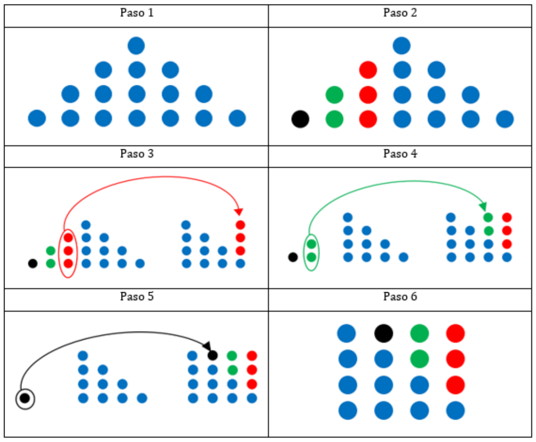
7. ¿Qué estrategia usarías para calcular los puntos que se deben usar para construir la figura 26?, ¿por qué crees que esta estrategia sirve?

- Basado en ____, mi hipótesis es que para calcular la cantidad de puntos de la figura 26 se debe ____.
- Creo que esta estrategia es válida porque ______________________________ ____.

Esta primera versión de la tarea, la revisamos junto con la asesora del trabajo de grado e hicimos algunas modificaciones relacionadas con la unificación del lenguaje, ya que, por ejemplo, en las primeras cuatro preguntas se usó el término *figura*, pero en la pregunta 5, el termino *posición*, lo que podría generar confusiones en los estudiantes. También corregimos los marcos de lenguaje y los enunciados elaborados, mientras que otras preguntas fueron eliminadas.

Ilustración 10

Procedimiento para construir cuadrado de puntos.



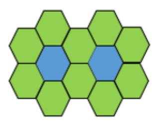
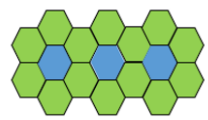
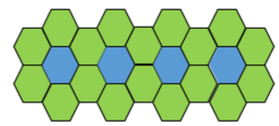
En particular, para la pregunta 3 identificamos que posiblemente para los estudiantes sería difícil comprender la evolución del paso 1 al paso 2, por lo tanto, pensamos en hacer uso de flechas o de colores que permitieran visualizar a lo largo de varios pasos el proceso para llegar desde el triángulo hasta el cuadrado. Finalmente, utilizamos tanto flechas como colores, para que, a lo largo de cinco pasos, los estudiantes observaran cómo se llegaba del triángulo elaborado para la figura cuatro a su correspondiente cuadrado (Ver Ilustración 10).

Para la pregunta 4 estaba buscando que los estudiantes, con base en la información que se les brindó en la pregunta 3, pudieran identificar que la cantidad de puntos estaba relacionada con los números al cuadrado. Sin embargo, me di cuenta de que no estaba teniendo en cuenta los niveles del proceso de generalización, pues le estaba solicitando que a partir del nivel 1, llegara al nivel 4, dejando de lado los dos niveles intermedios. En ese sentido, decidí construir dos preguntas más que permitieran familiarizarse con la estrategia brindada y utilizarla para otros casos desconocidos, procesos correspondientes a los niveles 2 y 3, para que de esta manera se llegara al nivel 4 con menos dificultad. Esta revisión se hizo con todas las preguntas hasta llegar a la actividad final. La actividad modificada se encuentra en el Anexo 2.

El segundo ejercicio se muestra en la Ilustración 11. Este se constituye por una secuencia de figuras hexagonales ubicadas de forma lineal.

Ilustración 11

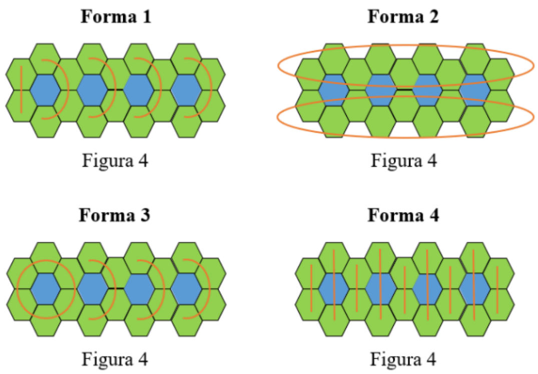
Secuencia de hexágonos.

Figura	1	2	3	4
Representación				

Para este ejercicio, inicialmente contemplé cuatro formas diferentes de contar la cantidad de baldosas verdes que hay en cada figura, en la Ilustración 12 se puede evidenciar cada forma de conteo particularmente para la figura 4. Con la forma 1, se cuentan inicialmente dos hexágonos verdes, y luego, se suman cuatro hexágonos verdes por cada hexágono azul que haya en la figura; en la forma 2, por cada hexágono azul se cuentan dos hexágonos verdes en la parte superior y se suma uno del final, este resultado se duplica, porque la cantidad de hexágonos verdes en la parte de abajo es la misma que en la parte de arriba; en la forma 3 hay seis hexágonos verdes alrededor del primer hexágono azul, y luego, cuatro hexágonos verdes por cada hexágono azul restante; en la cuarta y última forma, hay dos hexágonos verdes en la primera columna, luego, para cada hexágono azul hay dos columnas de dos hexágonos verdes cada una. Para el diseño de la actividad solamente tuve en cuenta la forma 1, ya que la concebí como la más sencilla.

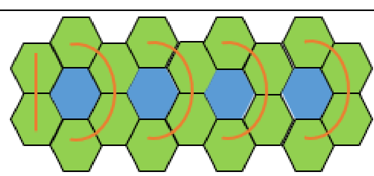
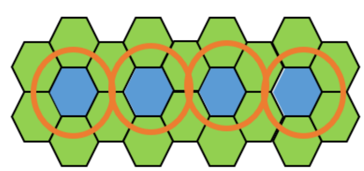
Ilustración 12

Formas de contar. Secuencia de hexágonos.



A partir de lo anterior, diseñé una primera versión de la actividad, la cual era un poco más compleja que la de la Ilustración 7, y la pensé con el fin de que los estudiantes alcanzaran el nivel 6 (generalización de conjeturas), de los siete niveles propuestos por Cañadas y Castro (2007) para desarrollar el proceso de generalización. Además, pude proponer un método falso para calcular la cantidad de hexágonos, haciendo uso de la categoría Presentar Afirmaciones Falsas, planteada por Rumsey y Langrall (2016). Las preguntas se muestran a continuación.

1. Dos estudiantes propusieron métodos diferentes para calcular la cantidad de hexágonos verdes en el paso 4, analízalos y menciona si crees que alguno es incorrecto y porqué.

Método 1	Método 2
 i. 2 hexágonos verdes iniciales. ii. 4 hexágonos verdes por 4.	 i. 6 hexágonos verdes por 4.

- De acuerdo con mis observaciones, estoy en desacuerdo con el método _________, porque ____.

2. Aplica uno de los dos métodos anteriores para calcular la cantidad de hexágonos verdes que habrá en el paso 7.
3. María desea calcular la cantidad de hexágonos verdes que hay en el paso 10, pero no quiere hacer los dibujos. ¿Cómo le ayudarías para que pueda contarlos de la forma más rápida posible?

- De acuerdo con mis observaciones, la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes es ____ ____.

4. ¿Cuántos hexágonos azules se necesitarán para que haya 34 hexágonos verdes?
5. Luisa afirma que en el paso 32, la cantidad de hexágonos verdes es $4 \times 32 + 2$. Sin embargo, la profesora le pide que argumente porque este procedimiento es correcto. Si tu fueras Luisa, ¿qué les responderías a la profesora?

- La evidencia que uso para asegurar que en el paso 32, la cantidad de hexágonos verdes es $4 \times 32 + 2$, es ____ ____.

6. ¿Crees que el procedimiento hecho por Luisa se puede utilizar para calcular la cantidad de hexágonos verdes en cualquier paso? Si es así ¿cómo se aplicaría en el paso 100?, ¿en el 962?

Esta primera versión de la actividad la modifiqué, con el fin de mejorar la forma de favorecer la argumentación y la generalización en los estudiantes. Por ejemplo, modifiqué el marco de lenguaje del punto 1, para que ahora el estudiante no tuviera que decidir entre uno de los dos métodos, sino que directamente tuviera que invalidar uno, relacionándolo con el proceso de pedir evidencia, haciendo uso de los marcos de lenguaje. También cambié el punto 4, para que el estudiante utilizara marcos de lenguaje que le permitieran hacer declaraciones. Para que, además, durante la generalización, pudiera llegar a la cantidad de hexágonos verdes, a partir de la cantidad de hexágonos azules y viceversa, teniendo en cuenta el nivel 3 del proceso de generalización. La versión final de la actividad se encuentra en el Anexo 3.

El tercer ejercicio utilizado se encuentra en la Ilustración 13, y con base en este, se pensaron cuatro formas diferentes de calcular la cantidad de cuadros blancos, que se presentan en la Ilustración 14.

Ilustración 13

Secuencia de cuadrados.

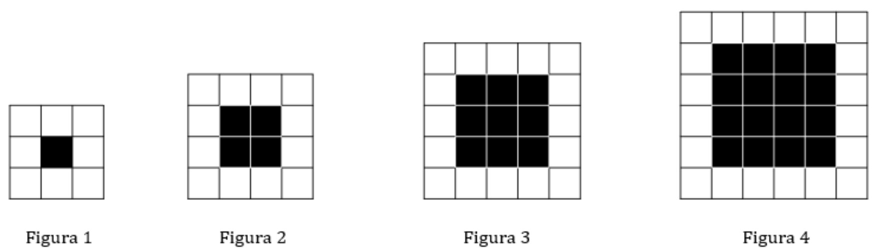
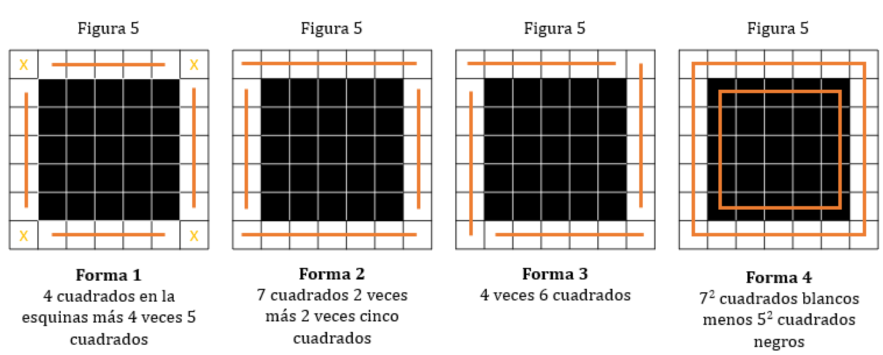


Ilustración 14

Formas de contar. Secuencia de cuadrados.



Con base en lo anterior, diseñé la primera versión de la actividad 3, con la cual buscaba que los estudiantes alcanzaran los niveles de formulación y validación de conjeturas del proceso de generalización, además, que utilizaran marcos de lenguaje para hacer declaraciones o especificaran condiciones, la cuales hacen parte de las categorías para favorecer la argumentación. Las preguntas se pueden ver a continuación.

1. Completa:

    a) En la figura 4 hay _________ cuadros blancos.
    b) En la figura 4 hay _________ cuadros negros.

2. El grupo de Camilo se inventó una técnica para contar rápidamente los cuadrados blancos de la posición 4.

    i. Contó los 4 cuadros de las esquinas
    ii. Contó los 4 cuadros que quedan a un lado del cuadro negro y multiplicó por 4

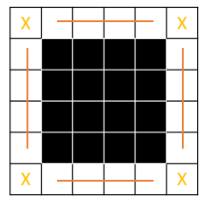


Figura 4

Brayan estudió la técnica de del grupo de Camilo y la aplicó para la figura 6 de la siguiente manera:

i. Contó 4 cuadros de las esquinas.
ii. Contó los 6 cuadros que quedan a un lado del cuadro negro por 4.

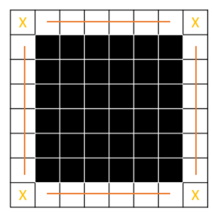


Figura 6

Estoy de acuerdo/en desacuerdo con utilizar el método producido por el grupo de Camilo para contar los cuadrados blancos de la figura 12 porque ________________________
____.

3. ¿Podrías pensar en una estrategia similar a la del grupo de Camilo para contar la cantidad cuadros blancos en la figura 3?, ¿cómo lo aplicarías en la figura 5?
4. ¿Cuántos cuadros negros debería tener una figura para que tenga 24 cuadros blancos?
5. ¿Cómo calcularías la cantidad total de cuadros (negros y blancos) que hay en la figura 8?

    - La cantidad total de cuadros en la figura 8 es ___________, porque ___________
    ____.

6. Para la figura 18 calcular: la cantidad de cuadros blancos, cuadros negros, y el total de cuadros.

   - El procedimiento que realicé para calcular la cantidad de cuadros blancos fue ____ ______________________ y encontré que hay ______________ cuadros blancos.
   - El procedimiento que realicé para calcular la cantidad de cuadros negros fue ____ _______________________ y encontré que hay ______________ cuadros negros.
   - El procedimiento que realicé para calcular la cantidad total de cuadros fue ____ ____________________________ y encontré que hay ______________ cuadros.

En las reuniones que hice con la asesora, optamos por hacer algunas modificaciones con el fin de que la actividad permitiera alcanzar el último nivel (justificación de conjeturas), de los niveles propuestos por Cañadas y Castro (2007). Hicimos modificaciones para aumentar la dificultad en las preguntas, y para que tuvieran la necesidad de evaluar diferentes métodos de contar la cantidad de cuadros en figuras para cuales no era posible hacer su representación, dado el nivel de dificultad que esto representaba, además, que argumentaran su posición frente a estas técnicas.

Un ejemplo de estas modificaciones es la pregunta 2, puesto que con ella tenía el interés de favorecer el nivel 2 de generalización, a partir del estudio de una estrategia para dos figuras diferentes, pero, a lo largo del análisis de estas preguntas, observé que al ser la actividad tres también era conveniente favorecer el uso de más de una estrategia para la misma figura, de manera que los estudiantes pudieran decidir cuál de las dos era más adecuada. De esta manera, se favorecía también el proceso de argumentación, puesto que ahora tenían que explicar cuál de las dos estrategias era mejor según sus intereses. Además, se agregó una nueva pregunta para que los estudiantes pudieran decidir acerca de la validez de un argumento visual, explicando porqué tres estrategias de conteo diferentes pueden llevar al mismo resultado y si las tres son correctas. Esta actividad se pensó para ser la última, puesto que incluía tres de las formas de contar mostradas en la Ilustración 14. La versión final de la actividad 3 se encuentra en el Anexo 4.

Implementación de las Actividades

El primer día de implementación, los cursos que tenían clase de matemáticas eran tres: 8-28, 8-29 y 8-30[1], con estos, implementé la Actividad 1. Antes de iniciar hice la invitación a los estudiantes a participar en el desarrollo de estas clases, puesto que tenían la finalidad de recolectar información para mi Trabajo de Grado. Además, aclaré que resolver estas actividades no tenía ninguna nota en la clase de matemáticas y su desarrollo dependía netamente de su voluntad. Teniendo en cuenta esto, hubo estudiantes que se mostraron dispuestos a hacer la actividad con el fin de colaborarme en el trabajo, mientras que otros no pusieron mucho interés en ella; algunos pidieron puntos extra por hacerla, a pesar de que ya se había dicho que esto no iba a suceder.

Para iniciar con el desarrollo de las actividades pedí a los estudiantes que se organizaran en grupos de tres o cuatro personas, aunque algunos de ellos expresaron su deseo de trabajar de forma individual. Tan pronto se armaron los equipos de trabajo, pasé por cada uno de ellos entregando la guía de la primera actividad y explicando la metodología de trabajo, que, básicamente, consistía en observar la secuencia propuesta y responder las preguntas a partir de las discusiones con sus compañeros. Los estudiantes podían llamarme si tenían alguna duda sobre la secuencia o sobre las preguntas. En un principio pensé en abrir un espacio de la clase cada determinado tiempo, para socializar las respuestas, pero no lo hice teniendo en cuenta que, con

[1] Los cursos en el colegio están enumerados del 1 al 42, iniciando con prekínder y terminando con 11° grado. En 8° grado hay 4 cursos que son: 8-28, 8-29, 8-30 y 8-31.

esto, los estudiantes iban a empezar a cambiar sus respuestas con base en lo que los demás decían. Esto no era beneficioso porque mi interés era analizar los procesos que cada uno de los equipos lograba, y de esa manera, todos iban a tener respuestas muy similares.

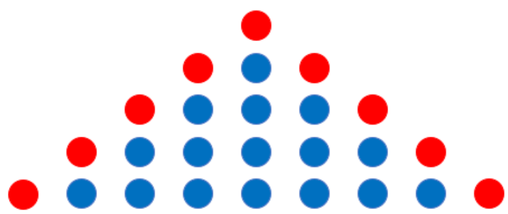
Al terminar de entregar los talleres, los estudiantes empezaron a trabajar en estos, haciendo comentarios como: esto está muy fácil o esto yo lo hacía cuándo estaba en cuarto [grado]. Sin embargo, al revisar con detalle los ejercicios y encontrar ciertas dificultades, algunos empezaron a presentar mayor interés en las actividades, mientras que otros se desinteresaron. Un aspecto por resaltar es que, en uno de los cursos, un equipo se mostró bastante atraído por los ejercicios propuestos, de manera que trabajaron juiciosos en ellos, terminando el taller en un poco más de la mitad de la clase. No obstante, este no era un equipo que se caracterizara por su empeño en las clases de matemáticas habituales, a pesar de que allí sí tuvieran nota. Por otro lado, pude observar que estudiantes que son aplicados en clase y tienen resultados favorables, no estaban cómodos con las actividades. A pesar de que estaban resolviendo responsablemente los ejercicios, logré evidenciar su falta de interés.

Este primer día surgieron diferentes estrategias de proceder. En particular, una que llamó mi atención fue la de un estudiante que estaba trabajando de manera individual, puesto que me preguntó acerca de cómo construir la figura 5 del primer punto. Esta no era una pregunta que yo quisiera responder, pues mi interés, justamente, era observar cuales eran las estrategias que ellos utilizaban para construir las figuras desconocidas, por lo tanto, esperé en silencio un momento. El estudiante continuó diciéndome que él creía que debía agregar una nueva capa de puntos, así que le pregunté a que se refería. La respuesta de él fue dibujar en la hoja, los puntos como se muestra en la Ilustración 15.

Este procedimiento, me pareció interesante puesto que en los grupos de trabajo que había observado, los puntos nuevos se agregaban en una fila en la parte inferior de la figura anterior.

Ilustración 15

Estrategia de construcción de la figura 5 a partir de la 4.



Al finalizar la primera sesión de clase con cada curso recogí la actividad sin importar si los grupos de trabajo habían terminado de responderla, con el fin de que no se la llevaran para la casa y la finalizaran con ayuda de terceros, puesto que para mí era importante poder observar durante la clase lo que ellos iban haciendo.

El segundo día de implementación era día cinco[2] en el colegio, por lo tanto, todos los grados octavos tuvieron clase de matemáticas. Lo primero que hice fue repartir la Actividad 1 a los equipos que no la habían finalizado el día anterior, y la Actividad 2 a los demás. Por otro lado, teniendo en cuenta que el curso 8-31 no participó en la actividad durante el primer día, les hice la misma invitación que le había hecho a los otros cursos y les repartí por grupos de trabajo la Actividad 2. Con este curso omití el desarrollo de la Actividad 1, ya que con ellos solamente tendría dos sesiones y decidí que hicieran las actividades que les permitirían alcanzar un nivel alto en cada uno de los procesos, pues de lo contrario era probable que muchos estudiantes resolvieran solamente la primera actividad.

[2] El Colegio San Viator maneja un horario rotativo del día 1 al día 7, con el fin de evitar la perdida de clase por la incidencia de días festivos.

En esta segunda sesión identifiqué dos cosas con respecto al desarrollo de la Actividad 2: la primera de ellas fue, que los estudiantes tuvieron más dificultades para definir estrategias que les permitieran contabilizar la cantidad de hexágonos, que para contar la cantidad de puntos de la Actividad 1; la segunda, es que empecé a observar más discusiones entre los estudiantes sobre la mejor forma de contar los hexágonos y una mayor colaboración entre los grupos de trabajo para explicarle a sus compañeros los métodos encontrados. Asimismo, hubo estudiantes que empezaron a aplicar técnicas algebraicas para contar los hexágonos verdes, aún sin haber llegado al punto cinco.

En cuanto a los grupos que estaban resolviendo la Actividad 1 durante la segunda sesión de clase, resolví dejarles todo el tiempo necesario sin presionarlos, con el fin de que ellos lo pudieran solucionar a su propio ritmo. En ese sentido, a medida que ellos iban terminando me lo devolvían para entregarles la Actividad 2. Al finalizar la clase con cada curso, los estudiantes debían devolverme la actividad, sin importar cuál de las dos estuvieran solucionando, aunque la mayoría de ellos logró terminar la Actividad 2 en este día, y solamente unos pocos estaban en la primera.

El último día de implementación entregué nuevamente los talleres que había recogido, pero no estaban terminados, y entregué la Actividad 3 a los demás grupos. En esta última actividad pude observar que varios estudiantes se mostraron interesados en estudiar dos formas diferentes para contar la cantidad de cuadros blancos para la misma figura, y en algunos casos discutían acerca del mejor método. No obstante, me di cuenta de que, en algunos equipos, los estudiantes se estaban dividiendo el trabajo o solamente una persona lo estaba haciendo, por lo tanto, les pregunté porque no estaban trabajando juntos y su respuesta fue que ya habían hecho mucho y era el turno de su compañero de hacer la actividad.

En términos generales, me pareció que en el punto dos, los estudiantes se centraron mayoritariamente en dibujar las figuras que en discutir acerca de porque los dos métodos eran válidos a pesar de ser diferentes. Esto lo pude confirmar cuando los estudiantes estaban respondiendo la pregunta tres, ya que la mayoría me preguntó que debían escribir ahí porque ellos si habían obtenido resultados iguales utilizando los dos métodos.

Este día, al terminar la sesión con cada grupo decidí recoger todas las actividades y agradecerles a todos por su participación y por haberse esforzado en hacer un buen trabajo a pesar de que no iban a tener ningún beneficio en la materia por ello.

Datos recolectados

Un método para recolectar datos fue a través de las actividades resueltas por los estudiantes. En ese sentido, de la Actividad 1 recolecté un total de 25 guías, de la Actividad 2, 27 guías y finalmente, de la Actividad 3 recogí 24 guías. Teniendo en cuenta la forma en la que solicité a los estudiantes que armaran los grupos, cada una de las guías fue resulta por 3 o 4 estudiantes.

En los cuatro octavos se formaron en total 35 grupos, sin embargo, es importante aclarar que, dadas las condiciones de tiempo y los horarios de los cursos, no todos los grupos resolvieron las tres actividades, por lo tanto, la cantidad de guías que recolecté en cada actividad es menor que la cantidad de grupos.

Metodología de análisis

Para realizar el análisis de los resultados obtenidos luego de implementar las tres actividades con los estudiantes, lo primero que hice fue construir una matriz (Ver Anexo 5). En esta ubiqué en la primera columna las preguntas diseñadas y al frente de estas escribí los aspectos o clases que buscaba favorecer en cada una de estas, respecto a los procesos de generalización y argumentación. Luego, agregué dos columnas más, a una de estas la titulé “resultados cuantitativos” y a la otra, “resultados cualitativos”. En los resultados cualitativos hice un análisis general de las respuestas; en los resultados cuantitativos, clasifiqué para cada pregunta, los rasgos más relevantes y escribí la cantidad de respuestas que se relacionaban con cada uno de ellos. Un ejemplo de esta primera versión de la matriz se muestra en la Ilustración 16.

Ilustración 16

Ejemplo de la primera versión de la matriz diseñada.

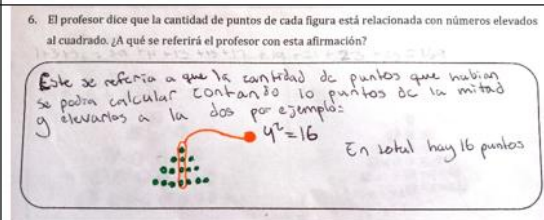
Ejercicio	¿Qué se esperaba favorecer?	Resultados cuantitativos	Resultados cualitativos
1.1	Etapa 1 – Mason et al. (1999) Nivel 1 – Cañadas y Castro (2007)	Tres grupos hicieron solamente el dibujo de la secuencia. Dieciocho grupos hicieron el dibujo de la secuencia e indicaron la suma de los números impares. Un grupo además de lo que hicieron sus compañeros dieron una respuesta cualitativa para la cantidad de puntos que se necesitan en cada figura.	Los estudiantes lograron determinar un patrón en la secuencia y representarlo para nuevas figuras. En general los estudiantes agregaron una nueva fila de puntos en la parte inferior de una figura para construir la siguiente, sin embargo, uno de ellos agregó los puntos en la parte superior.

Al completar la matriz, me di cuenta de que, por un lado, no había descrito con claridad cuales habían sido aquellos grupos que se relacionaban con los rasgos relevantes mencionados en las respuestas cuantitativas, y, por otro lado, que lo escrito no respondía si se habían favorecido los aspectos que buscaba. Por lo tanto, decidí tener en cuenta los siguientes elementos: seleccionar en cada pregunta los aspectos más relevantes y que sobresalían en las respuestas de los grupos para cada pregunta, y agregar según las clasificaciones que les di a las respuestas, cuáles eran los grupos que respondían a esas clasificaciones, teniendo en cuenta las clases que buscaba favorecer. Para esto último, enumeré los grupos del 1 al 35 y subrayé con amarillo, una o dos de las clases que identifiqué que se propiciaron en mayor medida. Un ejemplo de esta versión final de la matriz se encuentra en la Ilustración 17.

Con base en la matriz descrita anteriormente diseñé la Tabla 4. En esta, ubiqué los grupos en las columnas y, en filas, las etapas propuestas por Mason et al. (1999), los niveles de Cañadas y Castro (2007) y las categorías de Rumsey y Langrall (2016). A continuación, empecé a mirar en cada una las preguntas, la clase que había resaltado y los grupos que la alcanzaron. En ese sentido, por cada pregunta en la que observé que este aspecto se logró, puse una X en la celda de la tabla que relacionaba al grupo con la clase. Además, agregué colores, de manera que permitieran reconocer con mayor facilidad la cantidad de preguntas en las que observé que se había favorecido cada clase. Por ejemplo, el grupo 16 logró en cuatro preguntas diferentes, el nivel 6 de Cañadas y Castro (2007). En algunos casos no puse ninguna X, porque no logré identificar que ese aspecto se favoreciera con alguna pregunta.

Ilustración 17

Ejemplo de la versión final de la matriz

Ejercicio	¿Qué se esperaba favorecer?	Resultados cuantitativos	Ejemplos significativos
1.6	Etapa 3 – Mason et al. (1999) Nivel 4 – Cañadas y Castro (2007) M.L. Hacer declaraciones - Rumsey (2016)	Ocho grupos (G9, G26, G15, G28, G12, G21, G20, G10) presentaron argumentos válidos, en los que, además de hacer la declaración, explicaron por qué sucede esto. Ocho grupos (G19, G27, G7, G4, G18, G31, G29, G2) hicieron solamente la afirmación, diciendo a qué se refiere el profesor. Seis grupos (G6, G34, G30, G23, G11, G35) no tuvieron una declaración coherente.	 El grupo es capaz de hacer una declaración teniendo en cuenta lo observado en las preguntas anteriores.

Es importante aclarar que las etapas Mason et al. (1999), los niveles de Cañadas y Castro (2007) y las categorías de Rumsey y Langrall (2016) no son excluyentes entre sí, y que una misma pregunta podía favorecer más de una de estas.

Tabla 4

Clasificación de los grupos en las distintas clases propuestas para cada proceso

Clase \ Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Etapa 1	x	xx	x	x	x	xx	xx	x	xx	x	xxx	xx	x	x	xx	x	x	xxx	xx	xx	xx	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	xx	xxx	x
Etapa 2	xx	x	x	xx	xxx	xx	x	x	x	xxx	x	x	x	xx	x	x	xx	x	x	x	x	xx	x	x	xx	x	xx	xx	x	x	x	x	xx	xx	
Etapa 3	xx	xxx	x	xxx	xxxx	xx	x	xxx	xxx	x		x	xx	xxx	x	xxxx	xx	xxx	xxxx	xxx	x	x		xx	xx	xx	xxx	xxx	xx	x	x	x	xxx		
Nivel 1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x												x	
Nivel 2	x	x	x	x	x	x		x	x	x			x	x		x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x		x	x	x		
Nivel 3		x		x			x		x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x					xx	x	x		x	x			x	
Nivel 4	x	xx		xx	x		x	x	x	xx		x			x	x	x	xx	xx	xx	x		x	x	x	x	xx	xx	xx		xx	x	x		
Nivel 5	x	x	x	x	x	xx	x	xx	xx	x	x	x	x	xx	x	xx	xx	xx	xx	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x		
Nivel 6	xx	xx	xx	xx	xx	xxx	x	xxx	xxx	xxx	x		xxx	xxx		xxxx	xx	xxx	xxxx	xxx		x		xx	x	xx	xx	xx	xx	x			x		
Nivel 7																																			
ML - HD	x	xx		xx	x		x	x	xx	xx		x	x	x	x	x	x	xx	xx	xx	x		x	x	x	xx	xx	xx	xx		x	x	x		
ML – PrE	x	xx	x	xx	x			xx	xxx	xxx	x	xx	xx	x	x	x		xx	xx	xxxx	xx		x	x	x	xxx		xxx	xx	xx	x	x			
ML - PE																																			
ML - OPD																																			
ML - IE						x	x	x	x			x	x	x	x	x		x	x	x	x	x													
ML - LC						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x													
DCFR									x			x			x				x							x		x							
EC																																			
PAF															x			x	x		x					x		x		x	x			x	x
MCFANE																																			

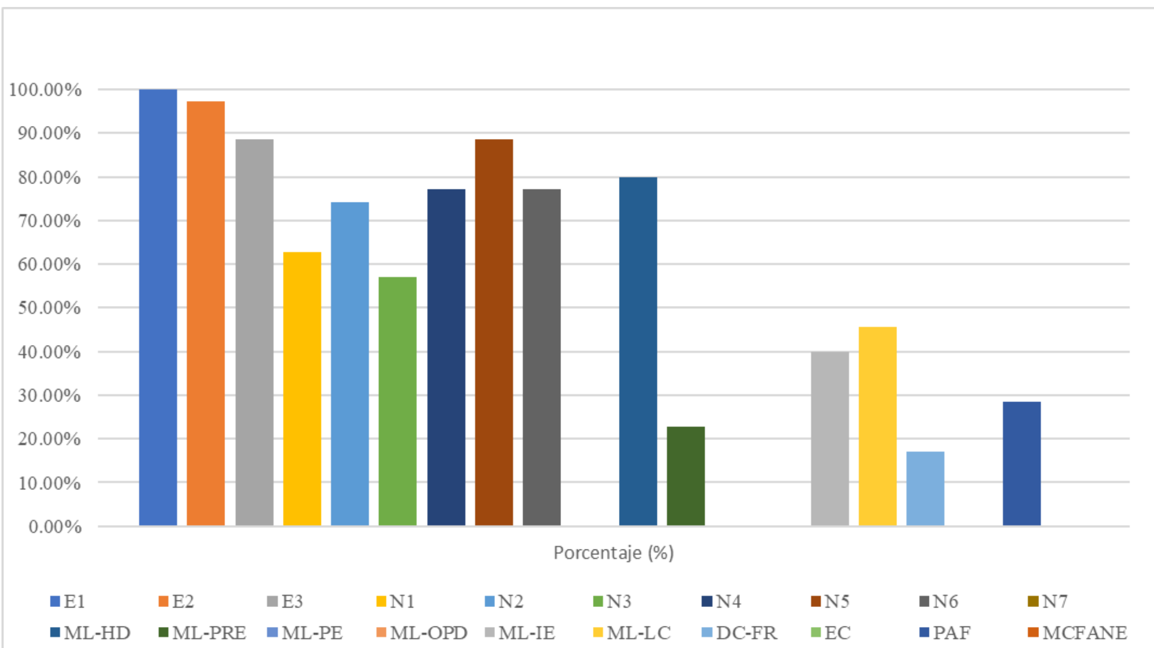
Nota. Cada color representa la cantidad de preguntas en las que se observó que se favoreció la clase de la fila en el grupo de la columna. Blanco, ninguna pregunta; rojo, una pregunta; amarillo, dos preguntas; azul, tres preguntas; verde, cuatro preguntas.

Análisis de resultados

En este capítulo describo de qué manera las actividades planteadas favorecieron los procesos de generalización y argumentación en los estudiantes, para esto, tuve en cuenta la Tabla 4, y con base en ella diseñé el Gráfico 1, en el que represento el porcentaje de grupos que habían logrado las etapas Mason et al. (1999), los niveles de Cañadas y Castro (2007) y las categorías de Rumsey y Langrall (2016).

Gráfico 1

Porcentaje de grupos que alcanzó cada una de las categorías de análisis



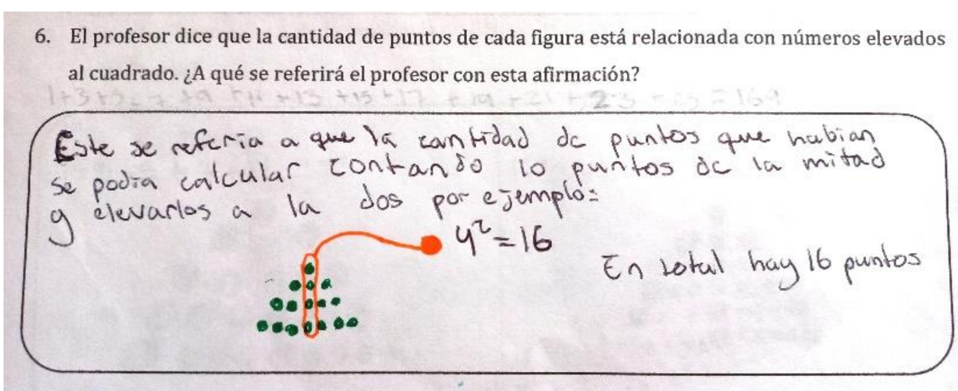
Proceso de generalización con base en las etapas de Mason et al. (1999)

Lo primero que observé en el Gráfico 1 es que el 100% de los grupos alcanzó la etapa 1 del proceso de generalización, es decir, que todos los grupos pudieron identificar al menos un patrón y establecer relaciones entre las regularidades encontradas. Luego, que el 97.1% alcanzó la etapa 2 de este proceso, lo cual significa que estos grupos lograron expresar con sus palabras o escribir haciendo uso de lenguaje natural los patrones encontrados y empezaron a hacer inferencias con base en ellos. Un ejemplo de esto se presentó en clase, cuando uno de los estudiantes trataba de explicarle a otro, cómo funcionaba la secuencia del taller 1, recuerdo que le decía “la primera figura tiene un punto, la segunda tiene cuatro puntos, y aquí (señala con su mano la suma de la tercera columna de la tabla) dice 1 más 3, la siguiente tiene 9 puntos, 1 más tres más cinco; en cada fila hay dos puntos más que en la de antes”.

Con respecto a la etapa 3, el 88,6% de los grupos lograron alcanzarla, pues hicieron uso de diferentes estrategias para registrar sus afirmaciones y regularidades encontradas en las secuencias presentadas. Un ejemplo de esto se muestra en la Ilustración 18, pues el estudiante se basa en lo realizado en los puntos anteriores para hacer una afirmación, la cual escribe por medio del lenguaje natural, y utiliza un dibujo para ejemplificar su razonamiento.

Ilustración 18

Uso del lenguaje natural y lenguaje matemático para hacer una afirmación.



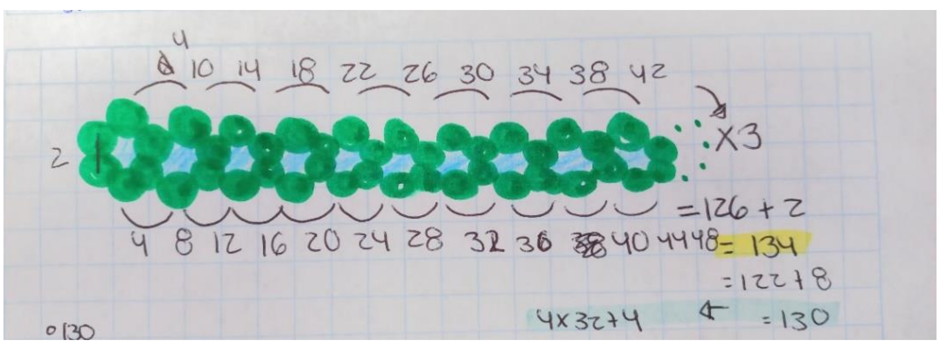
Con base en lo anterior, pude reconocer que un gran porcentaje de los grupos alcanzó todas las etapas del proceso de generalización propuestas por Mason et al. (1999). Ahora, haré uso de la tabla para verificar si los estudiantes alcanzaron los niveles de generalización propuestos por Cañadas y Castro (2007).

Proceso de generalización con base en los niveles propuestos por Cañadas y Castro (2007)

El 62,9% de los grupos respondió adecuadamente las preguntas relacionadas con el nivel 1. El 74,3% contestó apropiadamente las preguntas asociadas al nivel 2, como ejemplo de esto, presentaré el proceso realizado por el Grupo 24 (Ilustración 19) para calcular la cantidad de hexágonos que había en la figura 32. Para esto, el grupo dibujó la figura 10 y escribió en la parte superior, la cantidad de hexágonos verdes que había por cada hexágono azul, hasta llegar al décimo hexágono azul, que tiene 42 hexágonos verdes. Este resultado lo multiplicó por 3 para obtener la cantidad de hexágonos verdes en la figura 30. Sin embargo, se dio cuenta de que había cometido un error, porque los dos hexágonos iniciales los contó tres veces, y no sabía cómo deshacer tal error. Por lo tanto, decidió empezar de nuevo, pero esta vez calculando cuántos hexágonos verdes habría en cada figura, sin contar los dos hexágonos iniciales, luego tomó los 40 que habría en la figura 10, multiplicó por 3 para determinar la cantidad de hexágonos verdes en la figura 30, sumó los dos hexágonos iniciales y finalmente, sumó 4 de la figura 31 y 4 de la figura 32, para un total de 130 hexágonos verdes. Al terminar su procedimiento, realizó la operación planteada por Luisa en el ejercicio 5 del taller 2, y verificó que por los dos métodos se obtenía el mismo resultado.

Ilustración 19

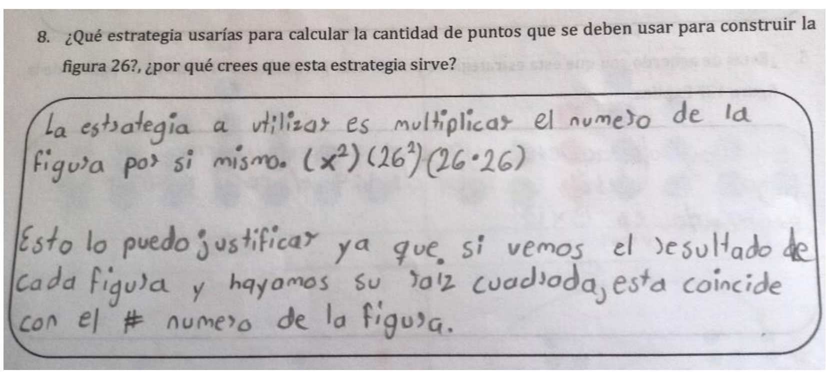
Exploración realizada por el Grupo 24 para determinar la cantidad de hexágonos de la figura 32.



En relación con el nivel 3, el 57,1% de los grupos contestó acertadamente las preguntas correspondientes. Por ejemplo, el Grupo 11 tuvo en cuenta los ejercicios anteriores para empezar a hacer predicciones sobre la manera de calcular la cantidad de puntos que habría en figuras particulares, para la cuales era más difícil hacer su representación. En este caso particular (Ilustración 20), el grupo dijo que, al elevar el número de la figura al cuadrado, se obtenía la cantidad de puntos, además, trató de justificar su afirmación, teniendo en cuenta los casos estudiados con anterioridad, pues, si en cada uno de ellos obtenía la raíz cuadrada del resultado, siempre llegaba al número de la figura.

Ilustración 20

Estrategia utilizada por el grupo 11 para determinar la cantidad de puntos en la figura 26.



8. ¿Qué estrategia usarías para calcular la cantidad de puntos que se deben usar para construir la figura 26?, ¿por qué crees que esta estrategia sirve?

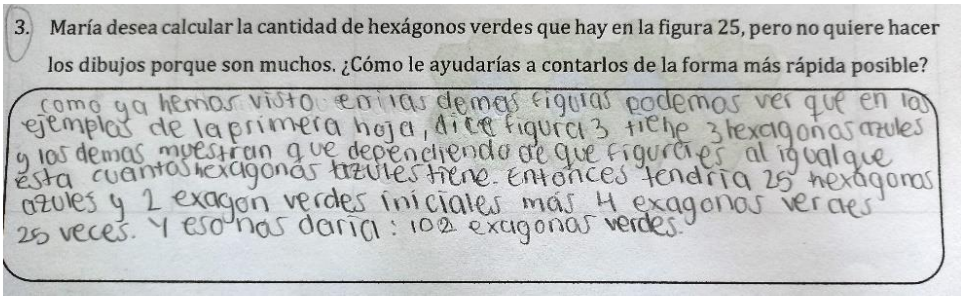
La estrategia a utilizar es multiplicar el numero de la figura por si mismo. $(x^2)(26^2)(26 \cdot 26)$

Esto lo puedo justificar ya que si vemos el resultado de cada figura y hayamos su raiz cuadrada, esta coincide con el # numero de la figura.

El 74,3% de los grupos alcanzó el nivel 4; como muestra de esto, se presenta la conjetura planteada por el Grupo 1 (Ilustración 21). En este caso, la pregunta pedía determinar una estrategia rápida para calcular la cantidad de puntos que habría en la figura 25, para esto, el grupo planteó inicialmente, que el número de la figura presenta la cantidad de hexágonos azules que tiene esta, y teniendo en cuenta eso, estableció una relación de 4 hexágonos verdes por cada hexágono azul, más dos hexágonos verdes que están al inicio de la primera figura, concluyendo que la figura 25 tendría un total de 102 hexágonos verdes.

Ilustración 21

Conjetura planteada por el grupo 1 para determinar la cantidad de puntos en la figura 25.

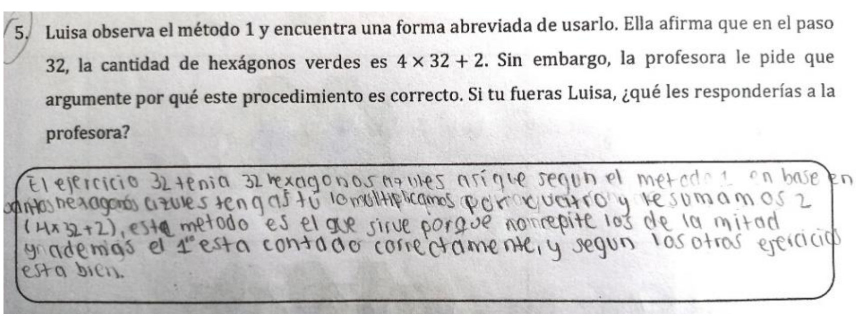

3. María desea calcular la cantidad de hexágonos verdes que hay en la figura 25, pero no quiere hacer los dibujos porque son muchos. ¿Cómo le ayudarías a contarlos de la forma más rápida posible?

como ya hemos visto en las demas figuras podemos ver que en los ejemplos de la primera hoja, dice figura 3 tiene 3 hexagonos azules y los demas muestran que dependiendo de que figura es al igual que esta cuantos hexagonos azules tiene. Entonces tendria 25 hexagonos azules y 2 exagon verdes iniciales más 4 exagonos verdes 25 veces. Y eso nos daria: 102 exagonos verdes.

El 88.6% de los grupos respondió apropiadamente las preguntas relacionadas con el nivel 5. En este caso, destaco una respuesta que también dio el grupo 1 (Ilustración 22), en la cual trató de validar porque el método utilizado por Luisa en la pregunta cinco del taller 2 es correcto. Para esto, el grupo hace referencia al método 1 presentado en el taller, para argumentar que se debe multiplicar 4 por el número de la figura y al resultado, sumarle 2.

Ilustración 22

Estrategia utilizada por el grupo 1, para validar una conjetura


5. Luisa observa el método 1 y encuentra una forma abreviada de usarlo. Ella afirma que en el paso 32, la cantidad de hexágonos verdes es $4 \times 32 + 2$. Sin embargo, la profesora le pide que argumente por qué este procedimiento es correcto. Si tu fueras Luisa, ¿qué les responderías a la profesora?

El ejercicio 32 tenia 32 hexagonos azules asi que segun el metodo 1 en base en cuantos hexagonos azules tengas tu lo multiplicamos por cuatro y le sumamos 2 (4x32+2), este metodo es el que sirve porque no repite los de la mitad y ademas el 1° esta contado correctamente, y segun los otros ejercicios esta bien.

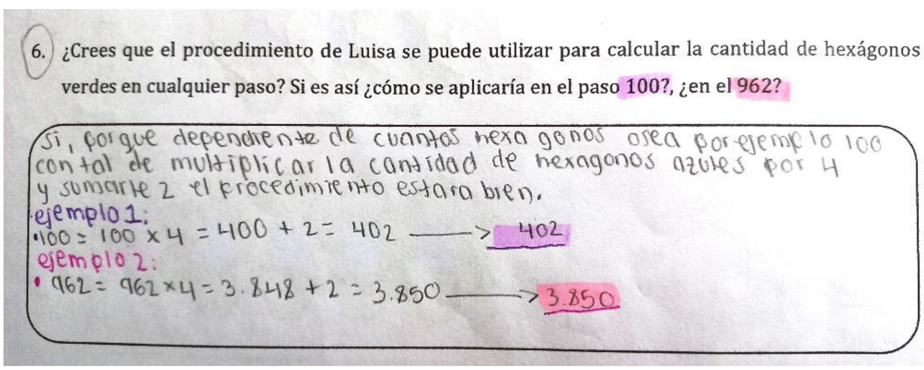
El 77,1% de los grupos contestó de manera acertada las preguntas que buscaban favorecer el nivel 6. Como ejemplo de esto presentaré el trabajo realizado por dos grupos:

En la pregunta 6 del taller 2, pedí a los estudiantes que dijeran si el procedimiento de Luisa presentado en la pregunta 5, se podía aplicar también a las figuras 100 y 962. Para responder esto, el grupo 1 (Ilustración 23) escribió que sí era posible hacerlo, porque al multiplicar 4 por el número de la figura (o cantidad de hexágonos azules) y sumar 2, siempre se obtiene un resultado correcto de la cantidad de hexágonos verdes que habrá en esa figura.

En la pregunta 7 del taller 2, esperaba que los estudiantes pudieran decir cuál era la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes en cualquier figura, en este caso muchos grupos describieron paso a paso con sus propias palabras, el procedimiento que se debía hacer. En tanto que, el grupo 13 (Ilustración 24) propuso una fórmula algebraica que permitía calcular la cantidad de hexágonos verdes.

Ilustración 23

Procedimiento realizado por el grupo 1 para calcular la cantidad de hexágonos verdes en las figuras 100 y 962



6. ¿Crees que el procedimiento de Luisa se puede utilizar para calcular la cantidad de hexágonos verdes en cualquier paso? Si es así ¿cómo se aplicaría en el paso 100?, ¿en el 962?

Si, porque dependiente de cuantos hexagonos osea por ejemplo 100 con tal de multiplicar la cantidad de hexagonos azules por 4 y sumarle 2 el procedimiento estara bien.

ejemplo 1:

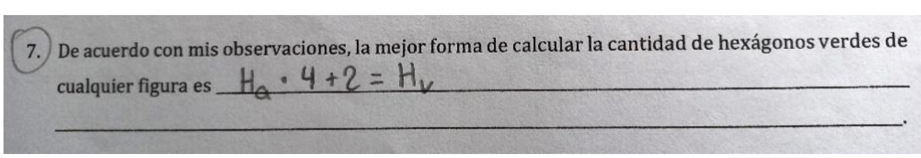
• 100 = 100 x 4 = 400 + 2 = 402 ⟶ 402

ejemplo 2:

• 962 = 962 x 4 = 3.848 + 2 = 3.850 ⟶ 3.850

Ilustración 24

Fórmula propuesta por el grupo 13 para calcular la cantidad de hexágonos verdes en cualquier figura



7. De acuerdo con mis observaciones, la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes de cualquier figura es $H_a \cdot 4 + 2 = H_v$.

Con respecto al nivel 7, planteé una pregunta con la cual esperaba que los estudiantes lograran justificar con sus propias palabras o haciendo uso del lenguaje matemático: ¿por qué tres procedimientos diferentes permitían calcular la cantidad de cuadros blancos en cualquier figura de la secuencia presentada en el taller 3? Sin embargo, evidencié que ninguno de los estudiantes alcanzó este nivel, porque todas las respuestas se basaban en que, al calcular la cantidad de cuadros blancos con los tres métodos, llegaban al mismo resultado. Lo anterior, no era válido porque estaba fundamentado en el estudio de casos particulares y no en un análisis profundo de los procedimientos, que permitiera argumentar la generalidad.

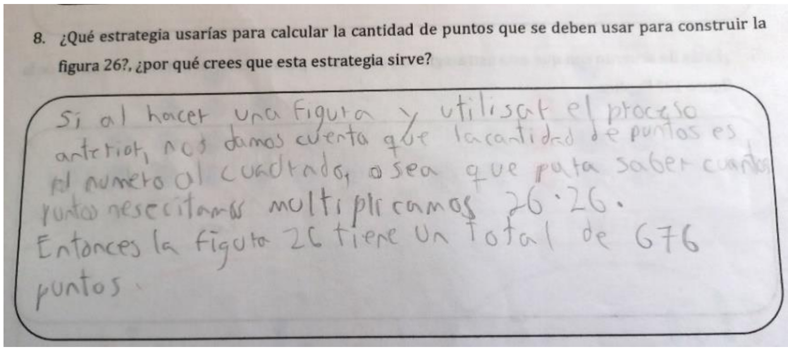
Teniendo en cuenta el análisis anterior, es posible reconocer que las actividades diseñadas, permitieron favorecer en gran medida el proceso de generalización en los estudiantes. El siguiente paso, es identificar si el proceso de argumentación se favoreció teniendo en cuenta las categorías de argumentación propuestas por Rumsey y Langrall (2016).

Proceso de argumentación con base en las categorías propuestas por Rumsey y Langrall (2016)

Con respecto a la categoría Marcos de Lenguaje – Hacer Declaraciones, el 80% de los estudiantes logró dar respuestas satisfactorias a las preguntas que buscaban favorecer este aspecto. Como ejemplo de esto, muestro la respuesta que dio el grupo 10 a la pregunta 8 del taller 1 (Ilustración 25), con la que esperaba que los estudiantes simplemente dijeran cuál estrategia utilizarían para calcular la cantidad de puntos de la figura 26, y qué los hacía pensar que esta funcionaba correctamente. En este caso, el grupo respondió que la cantidad de puntos se obtiene elevando el número de la figura al cuadrado, por lo tanto, la figura 26 tiene 676 puntos.

Ilustración 25

Estrategia del grupo 10 para calcular la cantidad de puntos en la figura 26



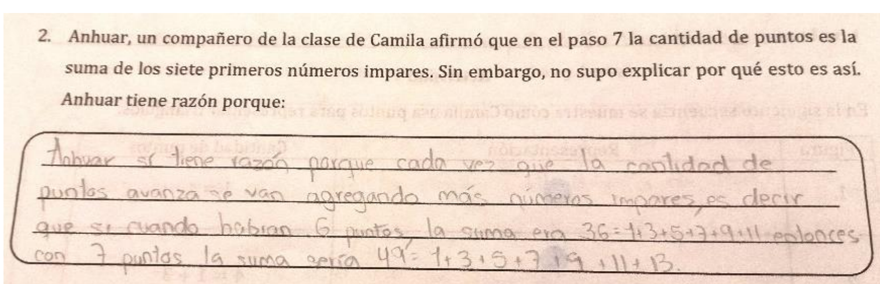
8. ¿Qué estrategia usarías para calcular la cantidad de puntos que se deben usar para construir la figura 26?, ¿por qué crees que esta estrategia sirve?

Si al hacer una figura y utilisar el proceso anterior, nos damos cuenta que la cantidad de puntos es el numero al cuadrado, o sea que para saber cuantos puntos nesecitamos multiplicamos 26·26. Entonces la figura 26 tiene un total de 676 puntos.

El 77,1% de los grupos logró proporcionar evidencia válida para apoyar una idea. De este modo, el grupo 21 tuvo en cuenta los casos particulares estudiados anteriormente, para justificar por qué era correcta la afirmación de Anhuar (Ilustración 26), mencionando que cada vez que aumentaba la cantidad de puntos, se agregaba un número impar, y ya que en la figura 6, se sumaban los números 1, 3, 5, 7, 9 y 11, entonces en la figura 7, se debía agregar el siguiente número impar, y la suma final sería de los números 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13.

Ilustración 26

Evidencia proporcionada por el grupo 21 para apoyar una idea



2. Anhuar, un compañero de la clase de Camila afirmó que en el paso 7 la cantidad de puntos es la suma de los siete primeros números impares. Sin embargo, no supo explicar por qué esto es así.
Anhuar tiene razón porque:

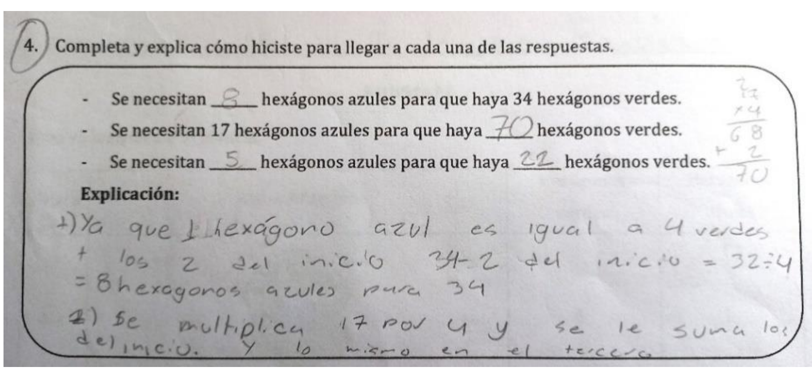
Anhuar si tiene razón porque cada vez que la cantidad de puntos avanza se van agregando más números impares, es decir que si cuando habían 6 puntos la suma era 36=1+3+5+7+9+11 entonces con 7 puntos la suma sería 49=1+3+5+7+9+11+13.

Otro ejemplo de esto es la justificación que dio el grupo 8, con respecto al procedimiento que hizo para calcular la cantidad de hexágonos azules si había 34 hexágonos verdes (Ilustración 27). El grupo hace un razonamiento inverso, en el que explica que primero se deben restar los 2 hexágonos del inicio y el resultado dividirlo en 4, que es la cantidad de hexágonos verdes que hay por cada hexágono azul, para concluir que cuando hay 34 hexágonos verdes, entonces hay 8 hexágonos azules.

En relación con el uso de Marcos de Lenguaje para Pedir Evidencia o para Ofrecer una Posición Distinta, las preguntas planteadas no permitieron favorecer estos aspectos. Por un lado, porque buscaba que los estudiantes fueran quienes dieran la evidencia, además, porque si ellos eran los que solicitaban la evidencia, no había una manera de proporcionarla desde el taller planeado. Por otro lado, la pregunta que buscaba favorecer este aspecto no permitió que esto se cumpliera porque, aunque el estudiante si debía proporcionar argumentos para justificar que un procedimiento no era adecuado, al analizar las respuestas a profundidad, no había una posición distinta.

Ilustración 27

Evidencia proporcionada por el grupo 8 para justificar un procedimiento.


4. Completa y explica cómo hiciste para llegar a cada una de las respuestas.

- Se necesitan 8 hexágonos azules para que haya 34 hexágonos verdes.
- Se necesitan 17 hexágonos azules para que haya 70 hexágonos verdes.
- Se necesitan 5 hexágonos azules para que haya 22 hexágonos verdes.

17
×4
68
+ 2
70

Explicación:

1) Ya que 1 hexágono azul es igual a 4 verdes + los 2 del inicio 34-2 del inicio = 32÷4 = 8 hexagonos azules para 34

2) Se multiplica 17 por 4 y se le suma los del inicio. Y lo mismo en el tercero

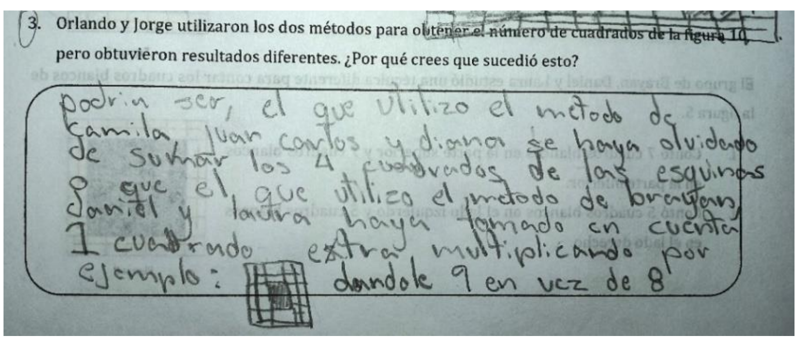
Con respecto al uso de Marcos de Lenguaje para Invitar a una Especulación, no diseñé la pregunta para que ellos invitaran a otra persona a hacer una especulación, sino que fueran ellos mismos quienes hicieran una especulación frente a un suceso. Con base en lo anterior, la pregunta planteada buscaba que ellos dijeran porque creían que dos personas habían obtenido resultados diferentes al hacer uso de dos métodos diferentes, para calcular la cantidad de cuadros de la figura

10 de la secuencia del taller 3. Para responder, el grupo 15 (Ilustración 28) hizo suposiciones sobre lo que pudieron hacer mal Orlando o Jorge, que hizo que llegaran a resultados diferentes, a pesar de que los dos métodos permiten llegar al mismo resultado. El 40% de los estudiantes respondió las preguntas relacionadas con esta categoría adecuadamente.

El 45,7% de los estudiantes logró responder adecuadamente la pregunta que buscaba que ellos llegaran a un consenso sobre el método más eficiente para calcular la cantidad de cuadros blancos que había en la figura 25 de la secuencia del taller 3. Un ejemplo de esto es la respuesta del grupo 20 (Ilustración 29), quienes explicaron porque el método de Camila y Juan les parecía mejor, y posteriormente lo utilizaron para calcular la cantidad de cuadros de la figura 93.

Ilustración 28

Suposiciones planteadas por el grupo 15 para responder la pregunta 3 del taller 3

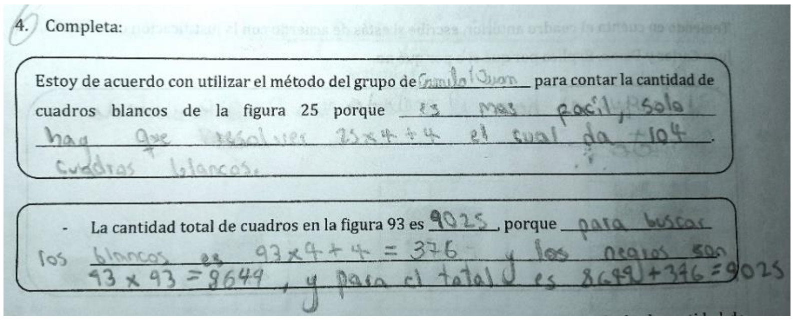

3. Orlando y Jorge utilizaron los dos métodos para obtener el número de cuadrados de la figura 10, pero obtuvieron resultados diferentes. ¿Por qué crees que sucedió esto?

podria ser, el que utilizo el metodo de camila juan carlos y diana se haya olvidado de sumar los 4 cuadrados de las esquinas o que el que utilizo el metodo de brayan, daniel y laura haya tomado en cuenta 1 cuadrado extra multiplicando por ejemplo: dandole 9 en vez de 8

Otro ejemplo, es la respuesta del grupo 12 (Ilustración 30), quienes también lograron responder la pregunta adecuadamente, mencionando que prefieren el método de Camila, Juan Carlos y Diana. Sin embargo, curiosamente en el siguiente ítem, utilizaron el método de Brayan, Laura y Daniel para calcular la cantidad de cuadros blancos en la figura 93. Es importante aclarar, que, aunque en esta pregunta no había una discusión en la cual ellos tuvieran que buscar la manera de llegar a un consenso, si tomé el hecho de decidir acerca del mejor procedimiento, como una forma de llegar a un consenso.

Ilustración 29

Respuesta del grupo 20 acerca del método que más les gustaba para calcular la cantidad de cuadros blancos


4. Completa:

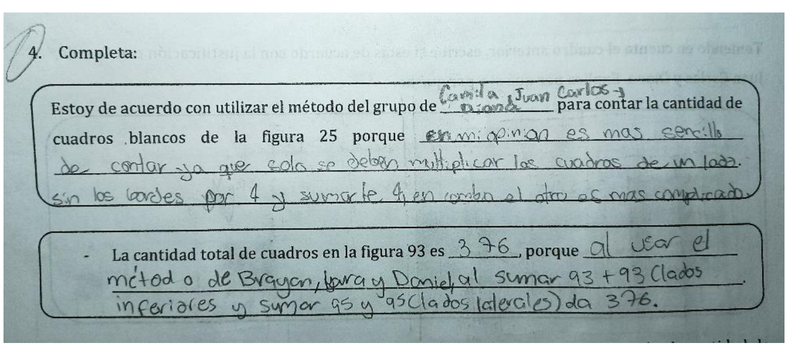
Estoy de acuerdo con utilizar el método del grupo de Camilo | Juan para contar la cantidad de cuadros blancos de la figura 25 porque es mas facil, solo hay que resolver 25x4+4 el cual da 104 cuadros blancos.

- La cantidad total de cuadros en la figura 93 es 9025, porque para buscar los blancos es 93x4+4 = 376 y los negros son 93 x 93 = 8649, y para el total es 8649+376=9025

El 17,1% de los estudiantes logró responder la pregunta que buscaba favorecer la categoría Discutir Contenido Familiar y Rico. En este caso, la pregunta buscaba que los estudiantes, después de reconocer tres formas diferentes de calcular la cantidad de puntos, decidieran si un método en particular se podía utilizar para calcular la cantidad de puntos de la figura 13. El grupo 15 (Ilustración 31), decidió que dicho método era correcto, pero que hacer los dibujos podía ser un proceso demasiado largo, por lo tanto, lo más fácil era multiplicar 13 por 13.

Ilustración 30

Respuesta del grupo 12, acerca del mejor método para calcular la cantidad de cuadros blancos


4. Completa:

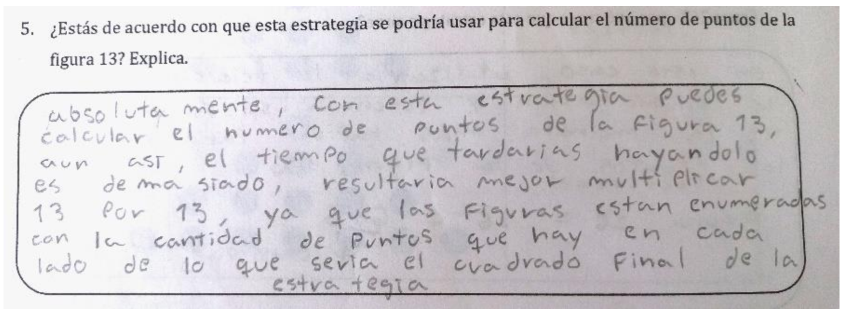
Estoy de acuerdo con utilizar el método del grupo de Camila, Juan Carlos y Diana para contar la cantidad de cuadros blancos de la figura 25 porque en mi opinion es mas sencillo de contar ya que solo se deben multiplicar los cuadros de un lado sin los bordes por 4 y sumarle 4, en cambio el otro es mas complicado.

- La cantidad total de cuadros en la figura 93 es 376, porque al usar el método de Brayan, Laura y Daniel, al sumar 93 + 93 (lados inferiores y sumar 95 y 95 (lados laterales) da 376.

El grupo 9 (Ilustración 32), hizo uso de los tres métodos para calcular la cantidad de puntos de la figura 13, aunque, no explicó si el método explicado en los puntos anteriores era adecuado para este proceso.

Ilustración 31

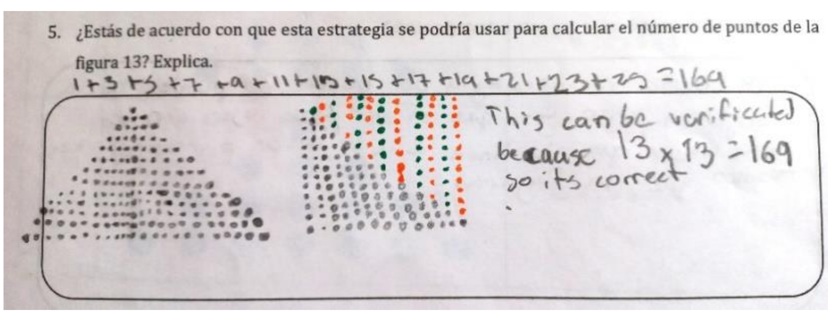
Explicación presentada por el grupo 15


5. ¿Estás de acuerdo con que esta estrategia se podría usar para calcular el número de puntos de la figura 13? Explica.

absoluta mente, con esta estrategia puedes calcular el numero de puntos de la figura 13, aun asi, el tiempo que tardarias hayandolo es de ma siado, resultaria mejor multiplicar 13 por 13, ya que las figuras estan enumeradas con la cantidad de puntos que hay en cada lado de lo que seria el cuadrado final de la estrategia

Ilustración 32

Procedimientos realizados por el grupo 9 para calcular la cantidad de puntos de la figura 13


5. ¿Estás de acuerdo con que esta estrategia se podría usar para calcular el número de puntos de la figura 13? Explica.

1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=169

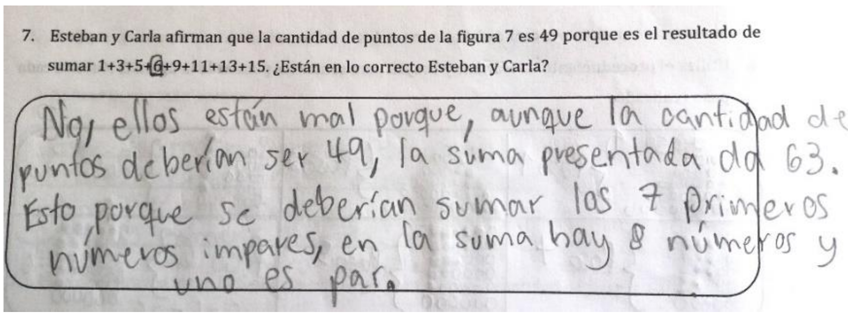
This can be verificated because 13x13=169 so its correct

Con los talleres no se favoreció la categoría Especificar Condiciones, puesto que las preguntas formuladas no permitieron que los estudiantes analizaran una conjetura y especificaran las condiciones que se debían dar para que esta se cumpliera.

Presentar Afirmaciones Falsas fue una categoría que permitió favorecer la argumentación en un 17,1% de los estudiantes. Como ejemplo, se presenta la respuesta que dio el grupo 19, a la pregunta de esta categoría (Ilustración 33). Este grupo, no solamente encontró que la afirmación era falsa, sino que, además, detectó la causa de dicho error y explicó el procedimiento correcto.

Ilustración 33

Respuesta del grupo 19 a una afirmación falsa

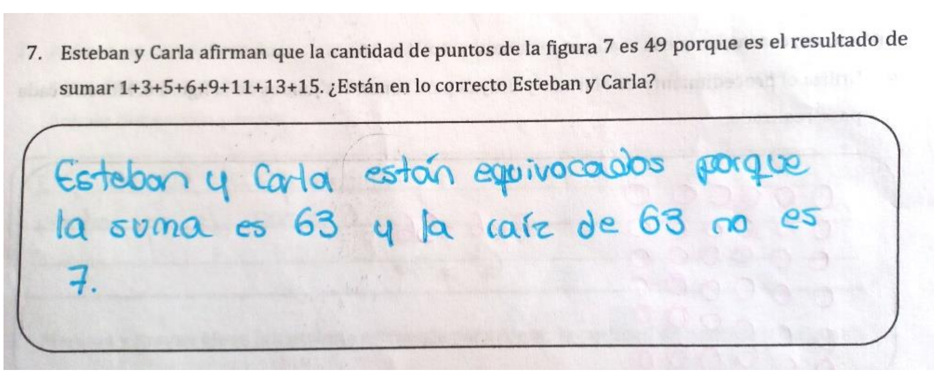

7. Esteban y Carla afirman que la cantidad de puntos de la figura 7 es 49 porque es el resultado de sumar 1+3+5+6+9+11+13+15. ¿Están en lo correcto Esteban y Carla?

No, ellos están mal porque, aunque la cantidad de puntos deberían ser 49, la suma presentada da 63. Esto porque se deberían sumar los 7 primeros números impares, en la suma hay 8 números y uno es par.

El grupo 31 (Ilustración 34), encontró que la afirmación era falsa, y además explicó por qué el resultado obtenido no era correcto, a partir de la información que tenía de los puntos anteriores. En este caso, el grupo identificó que al elevar al cuadrado el número de la figura se obtenía la cantidad de puntos, por lo tanto, al hacer el procedimiento inverso (calcular la raíz cuadrada de la cantidad de puntos) debía obtener el número de la figura.

Ilustración 34

Explicación del grupo 31, acerca de porqué el procedimiento de Estaban y Carla es inválido


7. Esteban y Carla afirman que la cantidad de puntos de la figura 7 es 49 porque es el resultado de sumar 1+3+5+6+9+11+13+15. ¿Están en lo correcto Esteban y Carla?

Esteban y Carla están equivocados porque la suma es 63 y la raíz de 63 no es 7.

Por último, la categoría Manipular Contenido Familiar y Rico para Llegar a Algo Que no lo es, no se favoreció con ninguna de las preguntas diseñadas en los talleres, puesto que no se presentó ninguna situación en la cual los estudiantes debían explorar una propiedad reconocida por ellos para encontrar situaciones diferentes en ellas.

Con respecto al proceso de argumentación, es posible reconocer que hubo mayores dificultades para favorecer cada una de las categorías propuestas por Rumsey y Langrall (2016), que para promover las etapas y niveles del proceso de generalización. No obstante, al leer cada uno de los trabajos realizados por los estudiantes, puedo asegurar que este proceso se favoreció de diferentes formas, y a pesar de que en muchas de las preguntas no se solicitaba a los estudiantes justificar sus procedimientos o razonamientos, ellos si lo hacían por decisión propia.

Conclusiones

Para concluir este trabajo mencionaré algunas consideraciones que se dan en el marco de los objetivos planteados y los análisis realizados, para describir en qué medida el proceso realizado permitió alcanzar el objetivo general.

En relación con el primer objetivo particular, las tareas de generalización permiten que los estudiantes hagan un proceso de exploración de casos particulares conocidos y desconocidos, para descubrir regularidades y con base en ellas generar conjeturas que permitan llegar a una generalización. Este proceso, favorece la argumentación puesto que los estudiantes deben estar constantemente haciendo declaraciones sobre las invariantes identificadas y comprobando la veracidad de esas afirmaciones, además, cuando este trabajo se desarrolla de manera grupal favorece la discusión entre pares, para llegar a conclusiones sobre los aspectos estudiados. Por lo tanto, para la construcción de tareas que favorezcan la generalización y la argumentación, una opción adecuada es presentarle a los alumnos algunas secuencias y con base en ellas proponerles conjeturas para que verifiquen su veracidad, mostrarles diferentes métodos de conteo, pedirles que hagan declaraciones sobre algunos aspectos particulares de la secuencia y que propongan evidencias que apoyen sus proposiciones. Así mismo, estas tareas deben desarrollarse de forma grupal, de manera que existan espacios para presentar las posturas propias de cada alumno y generar debates entorno a cada una de ellas.

Sobre el segundo objetivo particular puedo decir que, durante la implementación de las tareas, los estudiantes movilizaron procesos de generalización y argumentación. Esto, porque evidencié que desde un primer momento los grupos empezaron a observar las secuencias propuestas, a hallar patrones y a hacer afirmaciones sobre su comportamiento. Además, a partir del trabajo en equipo los estudiantes pudieron discutir las declaraciones hechas, dando razones para determinar su veracidad y de ser necesario modificarlas. Asimismo, las tareas de generalización promovieron la argumentación, puesto que a pesar de que, en algunas preguntas, no se pedía a los estudiantes que argumentaran sus respuestas, ellos lo hicieron por decisión propia. Por otro lado, con base en los análisis realizados, un gran porcentaje de los grupos alcanzó todas las Etapas de Mason et al. (1999), y de la misma manera, la mayoría de los grupos obtuvo resultados satisfactorios en los diferentes niveles del proceso de generalización propuestos por Cañadas y Castro (2007). Con respecto al proceso de argumentación, también identifiqué que se desarrollaron diferentes categorías, siendo las de Hacer Declaraciones y Proporcionar Evidencias las que más grupos lograron.

En cuanto al tercer objetivo particular me permito afirmar que la forma de recolectar los datos haciendo uso de guías y la manera de organizar los resultados en una matriz, fueron estrategias adecuadas que me posibilitaron analizar las respuestas que los grupos dieron teniendo en cuenta todos los aspectos que buscaba favorecer con ellas. Por un lado, con las guías pude recolectar las conclusiones y los argumentos a los que cada grupo llegaba tras discutir las preguntas realizadas, además, recibí respuestas expresadas con diferentes medios de representación, empezando con el uso del lenguaje natural para describir sus descubrimientos hasta llegar al uso de lenguaje matemático para hacer generalizaciones de las regularidades encontradas. Por otro lado, la matriz me permitió sistematizar la información de los talleres con el fin de facilitar el análisis de los resultados obtenidos, centrando el estudio de cada pregunta en los aspectos más relevantes. Por lo tanto, pude reconocer en qué medida se favorecieron los procesos de generalización y argumentación en los estudiantes, y cuáles fueron las causas que dificultaron un mayor progreso en estos procesos por parte de los estudiantes.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, puedo asegurar que, en cuanto al objetivo general, el trabajo desarrollado me garantizó que se favorecieran en gran medida los procesos de generalización y argumentación en los estudiantes de octavo grado del Colegio San Viator. Tanto en la implementación de las actividades como en la lectura y análisis de resultados, pude evidenciar que los estudiantes fueron avanzando progresivamente en cada uno de los procesos, puesto que en un principio ellos se limitaban a hacer afirmaciones con base en el estudio de casos particulares, pero poco a poco estas declaraciones se fueron acompañando de argumentos que justificaban el comportamiento de las secuencias en estos casos particulares y las causas de que este mismo comportamiento se repitiera en casos desconocidos. Asimismo, usaban argumentos para darle validez a sus afirmaciones y para convencer a sus compañeros y a mí, de la veracidad de estas, además, en el proceso de generalización los grupos pasaron de un lenguaje natural y descriptivo a un lenguaje que combinaba gráficas, dibujos y expresiones matemáticas más complejas.

Implementar las actividades de manera grupal permitió dar importancia a la idea de argumento como función social, puesto que los estudiantes discutían constantemente con sus compañeros las diferentes posturas e ideas que tenían, y en algunos casos, debatían con integrantes de otros grupos. En ese sentido, aunque en los talleres que ellos entregaron no se evidencia que hubo discusiones, durante el desarrollo de las sesiones de clase si pude identificar momentos en los cuales los estudiantes llegaban a consensos acerca del mejor procedimiento o para argumentar sus opiniones.

Algunos grupos hicieron uso del lenguaje algebraico, lo cual es de gran importancia teniendo en cuenta la justificación planteada, puesto que los estudiantes pudieron reconocer las variables como una herramienta que permite describir el comportamiento de una secuencia. En este sentido, para ellos las variables no son solamente un conjunto de letras con las cuales pueden hacer operaciones, sino que con estas pueden escribir expresiones algebraicas para reglas o patrones descubiertos; esto implica un desarrollo del pensamiento algebraico.

Finalmente, creo que a pesar de que desarrollar estos procesos en el aula no es una tarea fácil, al trabajarlos de manera conjunta es posible alcanzar buenos resultados en los estudiantes, de manera que haya un acercamiento temprano al pensamiento algebraico a partir del estudio de regularidades, al mismo tiempo que surge en ellos la necesidad de argumentar sus ideas y validar las de otros.

Proyecciones del estudio

En este trabajo tuve en cuenta las categorías de Rumsey y Langrall (2016) para favorecer la argumentación en los estudiantes, pero creo que estas no son suficientes para describir en qué medida una persona alcanza este proceso. Por lo tanto, una estrategia sería identificar algunos niveles del proceso de argumentación, tal como lo hice con el proceso generalización, de manera que estos permitan detallar la evolución de una persona en cuanto a sus habilidades argumentativas.

Las secuencias son una herramienta potente para favorecer el proceso de generalización en los estudiantes puesto que permiten que haya un acercamiento al lenguaje algebraico y favorecen procesos de argumentación. No obstante, creo que, en otros posibles trabajos en torno a estos procesos, sería interesante desarrollar la generalización a partir del estudio de la proporcionalidad, es decir, proponiendo situaciones problema que involucren relaciones de proporcionalidad directa o inversa entre magnitudes, de manera que se genere en los estudiantes la necesidad de formular sus propias estrategias de cálculo. Como ejemplo de esto, presento una actividad propuesta por Burgos y Godino, 2019:

> Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores. a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido. b) ¿Y para hacer 10 pulseras? Explica cómo lo has averiguado. c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará? d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas? e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer? (p.129).

Con base en mi trabajo, creo que el estudio de estas relaciones también permite favorecer procesos de argumentación en el aula. Además, involucra el pensamiento numérico, ya que estimula la comprensión del uso y significado de las operaciones y las relaciones entre número, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo.

Referencias

Buitrago, Á., Mejía, Neisa M., y Hernández, R. (2013). La argumentación: de la retórica a la enseñanza de las ciencias. *Innovación educativa (México, DF)*, *13*(63), 17-39. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000300003&lng=es&tlng=es.

Burgos, M. y Godino, J. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, *31*(3), 117-150. DOI: 10.24844/EM3103.05

Camargo Uribe, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje* [Tesis de doctorado, Universitat de Valéncia]. Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática - Funes.

Cañadas, M., y Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67 - 78.

Cañadas, M., y Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME*, *15*(3), 561-573.

Córdova, A., Velásquez, M., y Arenas, L. (2016). El rol de la argumentación en el pensamiento crítico y en la escritura epistémica en biología e historia: aproximación a partir de las representaciones sociales de los docentes. *Alpha (Osorno)*, (43), 39-55.

De Gamboa, G., Planas, N. y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: Prácticas escritas argumentativas e interpretación. *SUMA*, (64), 35 – 44.

Doona, R., Fisher, D., y Frey, N. (2009). The art of argumentation. *Science & Children*, 47, 28 - 31.

Doona, R., Fisher, D., y Frey, N. (2020). El arte de argumentar (Traducción realizada por Ana María Córdoba y editada por Patricia Perry). *Science & Children*, 47, 28 - 31. (Trabajo original publicado en 2009)

Esquinas, A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente. [Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid]. https://eprints.ucm.es/id/eprint/8283/

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* [Tesis de doctorado, Universitat de Valéncia]. http://matematicas.uis.edu.co/jfiallo/sites/default/files/TESIS_FIALLO.pdf

Gascón, J. (2021). El problema de las falacias: objeciones a la utilidad de un concepto teórico. *Cogency, 13*(1), 125-146. https://doi.org/10.32995/cogency.v13i1.372

Godino, J., y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Grupo Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para trabajar álgebra. Madrid: Ed Síntesis.

Hamblin, C. (2016). Falacias. Palestra Editores. Lima.

Homero, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática, 19*(1), 63 -98. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40519104

Jiménez, A., y Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia* (16), 101-116.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 7(3), 229-240. https://www.researchgate.net/publication/39101380

Llanos, V., y Otero, M. (2009). Argumentación Matemática en los libros de la Enseñanza Secundaria: un análisis descriptivo de las características de los libros de texto y de la Argumentación. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 4*(1), 37-50. http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662009000200004&lng=es&tlng=es

Martínez, A., Parra, Y., y Umaña, J. (2016*). Evaluación de argumentos visuales: Una estrategia para fortalecer las prácticas argumentativas* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/224

Mason, J., Graham, A., Pimm., D. y Gowar, N. (1999). Rutas hacía el álgebra / Raíces hacia el algebra (Traducción realizada por Cecilia Agudelo Valderrama). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135 – 156. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2887578.pdf

Muñoz, E., y Quevedo, M. (2014). *Descripción de los argumentos logrados por estudiantes de grado noveno al realizar una tarea de generalización*. [Trabajo de Grado de Especialización, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/132

Navas, A., y Molina, H. (2016). *Dificultades y errores en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica*. [Trabajo de Grado de Especialización, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/148.

Organización del Bachillerato Internacional, IB. (2014). Programa de los Años Intermedios: Guía de Matemáticas. Reino Unido.

Perelman, Ch., y Olbrechts-Tyteca, L. (1989). Tratado de la argumentación. Madrid: Editorial Gredos.

Pinilla, J., y Ramírez, A. (2013). *Descripción y análisis de los argumentos surgidos en una tarea sobre generalización realizada por estudiantes de grado séptimo*. [Trabajo de Grado de Especialización, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/124

Rojas, P., y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista científica*, *2*, 688 – 694. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Rumsey, Ch. y Langrall, C. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching Children Mathematics*, *22*(7), 413 – 419. https://knilt.arcc.albany.edu/images/8/88/Tcm2016-03-412a.compressed.pdf

Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia (2006). Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Editoriales Artes y Letras LTDA. Medellín, Colombia. https://www.researchgate.net/publication/322677601_Pensamiento_Variacional_y_Razonamiento_Algebraico

Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/212

Tamayo, O., Zona, R., y Loaiza, Y. (2015). El pensamiento crítico en la educación. Algunas categorías centrales en su estudio. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 11*(2), 111 - 133.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *Revista TecnoLógicas*, 16, 139 – 151. https://doi.org/10.22430/22565337.525

Anexos

Anexo 1. Ejercicio "Números cúbicos"

Ejercicio

Observe la siguiente tabla:

Posición	Números
1.	$1 = 1$
2.	$8 = 3 + 5$
3.	$27 = 7 + 9 + 11$
4.	$64 = 13 + 15 + 17 + 19$
5.	$125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$
6.	$216 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$

Inferencias y afirmaciones sobre el ejercicio

- El primer número se forma sumando el primer número impar.
- El segundo sumando los siguientes dos números impares.
- El tercero sumando los siguientes tres números impares.
- Los números de la izquierda son el resultado de elevar n al cubo, donde n es el número de la posición.
- ¿Cuál sería la secuencia para 11 al cubo?

  $111 + 113 + 115 + 117 + 119 + 121 + 123 + 125 + 127 + 129 + 131$
- ¿Cuál sería la secuencia para 17 al cubo?

  Desde el 273 hasta el 305
- ¿Cuál sería la secuencia para 103 al cubo?

  Desde el 10507 hasta el 10711

- ¿Cuál sería la secuencia para 10000001 al cubo?

  Sería la suma de los números impares desde 500000500000 hasta (500002500002)

- ¿Cuál sería la secuencia para n al cubo?

  El primer número se encuentra haciendo

$$\left(2\sum_{x=1}^{n-1} x\right) + 1$$

$$= (n-1)n + 1$$

$$n^2 - n + 1$$

o haciendo

$$n * (n-1) + 1$$

El último haciendo:

$$2(n-1) + \left(2\sum_{x=1}^{n-1} x\right) + 1$$

$$= n^2 + n - 1$$

o haciendo

$$n * (n+1) - 1$$

Argumentos que justifican las afirmaciones hechas

- El primer número es 1, que es el primer número impar.
- El segundo número es 8, que se forma al sumar tres con cinco.
- El tercer número es 27, y surge de la suma de los números 7, 9 y 11.

- En el primer caso se observa que la posición es 1 y el primer número de la izquierda es 1, que es 1^3. En la posición 2, el número es 8, que es 2^3, y así se cumple para los primeros seis casos, por lo tanto, es posible suponer que en la posición n, el número de la izquierda es n^3.
- Al completar la tabla hasta el caso 11, se obtiene:

Posición	Números
1.	$343 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55$
2.	$512 = 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71$
3.	$729 = 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89$
4.	$1000 = 91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109$
5.	$1331 = 111 + 113 + 115 + 117 + 119 + 121 + 123 + 125 + 127 + 129 + 131$

Además, al sumar los números el resultado es 1331, que es igual a 11^3.

- Descubrí que podía operar $17 * 16 + 1 = 273$, para obtener el primer número. También, que podría hacer $17 * 18 - 1 = 305$, para obtener el último número.
- Porque $102 * 103 + 1 = 10507$ y $103 * 104 - 1 = 10711$.
- $10000001 * 10000000 + 1 = 500000500000$ y $10000001 * 10000002 - 1 = 500002500002$.
- Como en la primera posición se suma un número impar, en las segunda dos números impares, en la tercera tres números impares, y así sucesivamente, sé que para la posición n se han sumado ya $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = k$ números impares. Por lo tanto, el primer número impar de la posición n es el impar de la posición $k + 1$, y cómo

$$k = \sum_{x=1}^{n-1} x$$

Entonces, $2k + 1$ es el impar que estoy buscando, y sería el primer número de la posición n. Haciendo un razonamiento análogo se obtiene el último número de la serie.		
Apoyos de lenguaje	**Hacer una declaración**	En la posición 4 se suman _______ números impares. Cuando elevo la posición al cubo obtengo ________ ____ (la suma de los números de esa posición).
	Proporcionar evidencia	Creo que los números de la posición 7 son ____________ porque _____________. Creo que los números de la posición 8 son ____________ porque _____________. El primer número de la posición 7 es ________ (43) porque ______________ (el último número es la posición 6 es 41, y el siguiente impar es 43). El último número de la posición 7 es _____ (55) porque _____________ (La posición 7 tiene 7 números impares consecutivos, empezando por 43) La suma de los números de la posición 7 es (343) ________ porque ____________ (es el resultado de elevar 7 al cubo)

	Pedir evidencia	Camilo se dio cuenta de que en las posiciones pares la suma de los números es par, y que en las posiciones impares la suma de los números es impar. ¿Cómo se daría Camilo de esto?
	Ofrecer una posición distinta	
	Invitar a una especulación	¿Qué pasa si en vez de sumar números impares, se suman números pares? Si no tuvieras los números de la posición 1 a la 5. ¿cómo harías para saber cuál es el primer número de la posición 6?
	Llegar a un consenso	
Discutir contenido familiar y rico	El profesor Roberto les dijo a sus estudiantes que había números elevados al cubo. ¿Cuáles serán esos números?	
Especificar condiciones	Carlos dice que a la derecha del igual siempre se ponen números pares, mientras que Camila dice que siempre son impares. ¿Con cuál de los dos estudiantes estás de acuerdo?, ¿por qué?	

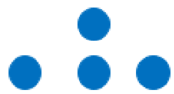
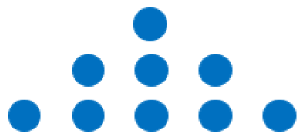
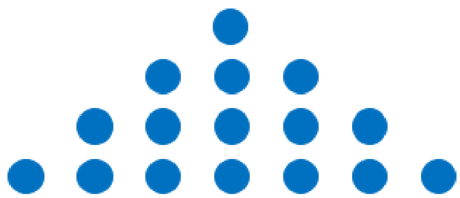
Presentar afirmaciones falsas	El profesor preguntó ¿Cuáles son los números de la posición 7? Pedro respondió de la siguiente manera: La siguiente posición es: $343 = 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53$ ¿Estás de acuerdo con la respuesta de Pedro?, ¿qué le dirías? Camilo dice que, si la posición es par, entonces la suma de los números es un número impar y si la posición es impar, la suma es un número par. ¿Estás de acuerdo con Camilo? Cuando el profesor preguntó que para la posición 4 cuáles números se sumaban, Camila respondió que se sumaban los primeros 4 números impares. ¿estás de acuerdo con Camila?, ¿Qué le dirías?
Manipular contenido familiar para llegar a algo	

Anexo 2. Actividad 1 (Versión final)

Nombres: ____

Actividad 1

En la siguiente secuencia se muestra cómo Camila usa puntos para representar triángulos.

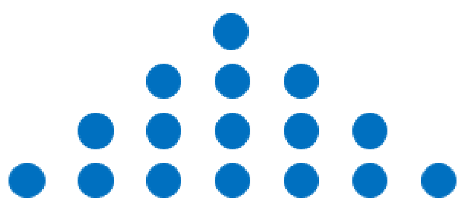
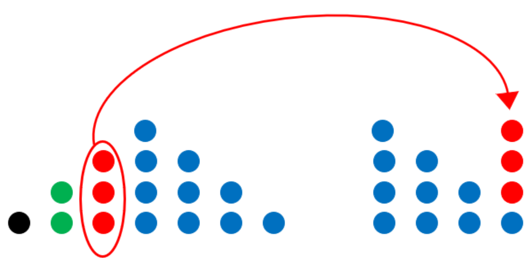
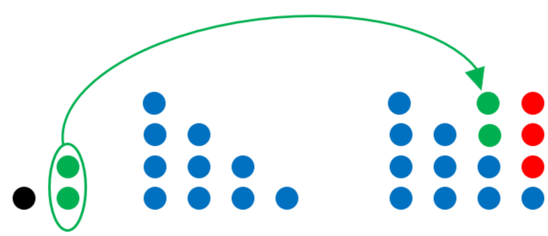
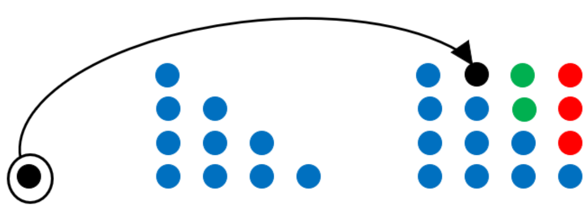
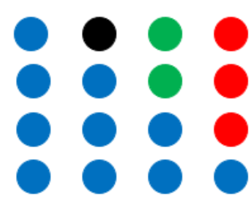
Figura	Representación	Cantidad de puntos
		$1 = 1$
		$4 = 1 + 3$
		$9 = 1 + 3 + 5$
		$16 = 1 + 3 + 5 + 7$

1. Dibuja las figuras 5 y 6 de la secuencia de Camila. ¿Cuántos puntos son necesarios para formar estas figuras?

Figura 5	Figura 6

2. Anhuar, un compañero de la clase de Camila afirmó que en la figura 7 la cantidad de puntos es la suma de los siete primeros números impares. Sin embargo, no supo explicar por qué esto es así. Anhuar tiene razón porque:

3. Mariana y Brayan idean la siguiente estrategia para contar la cantidad de puntos en la figura 4.

Paso 1	Paso 2
	
Paso 3	Paso 4
	
Paso 5	Paso 6
	

Finalmente, concluyen que la cantidad de puntos es $4 \times 4 = 16$.

4. Utiliza el procedimiento de Mariana y Brayan para contar los puntos de la figura 6. Muestra cada paso realizado.

5. ¿Estás de acuerdo con que esta estrategia se podría usar para calcular el número de puntos de la figura 13? Explica.

6. El profesor dice que la cantidad de puntos de cada figura está relacionada con números elevados al cuadrado. ¿A qué se referirá el profesor con esta afirmación?

7. Esteban y Carla afirman que la cantidad de puntos de la figura 7 es 49 porque es el resultado de sumar 1+3+5+6+9+11+13+15. ¿Están en lo correcto Esteban y Carla?

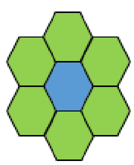
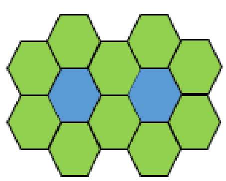
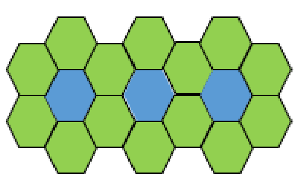
8. ¿Qué estrategia usarías para calcular la cantidad de puntos que se deben usar para construir la figura 26?, ¿Por qué crees que esta estrategia sirve?

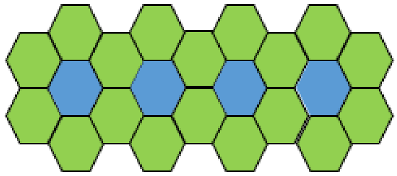
Anexo 3. Actividad 2 (Versión final)

Nombres: ____

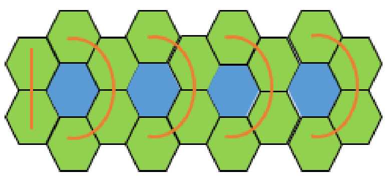
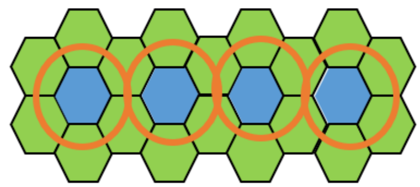
Actividad 2

Observa la siguiente secuencia:

Figura	Representación	Hexágonos verdes	Hexágonos azules
1		6	1
2		10	2
3		14	3

4		18	4

1. Dos estudiantes propusieron los siguientes métodos para calcular la cantidad de hexágonos verdes en la figura 4.

Método 1	Método 2
 2 hexágonos verdes iniciales más 4 hexágonos verdes cuatro veces: 18 hexágonos verdes.	 6 hexágonos verdes cuatro veces: 24 hexágonos verdes.

- La razón por la que creo que el método ______ no es acertado es ______________ ____.

2. Aplica el método correcto para calcular la cantidad de hexágonos verdes que habrá en la figura 7.

3. María desea calcular la cantidad de hexágonos verdes que hay en la figura 25, pero no quiere hacer los dibujos porque son muchos. ¿Cómo le ayudarías a contarlos de la forma más rápida posible?

4. Completa y explica cómo hiciste para llegar a cada una de las respuestas.

- Se necesitan ______ hexágonos azules para que haya 34 hexágonos verdes.
- Se necesitan 17 hexágonos azules para que haya ______ hexágonos verdes.
- Se necesitan ______ hexágonos azules para que haya ______ hexágonos verdes.

Explicación:

5. Luisa observa el método 1 y encuentra una forma abreviada de usarlo. Ella afirma que en el paso 32, la cantidad de hexágonos verdes es $4 \times 32 + 2$. Sin embargo, la profesora le pide que argumente por qué este procedimiento es correcto. Si tu fueras Luisa, ¿qué les responderías a la profesora?

6. ¿Crees que el procedimiento de Luisa se puede utilizar para calcular la cantidad de hexágonos verdes en cualquier paso? Si es así ¿cómo se aplicaría en el paso 100?, ¿en el 962?

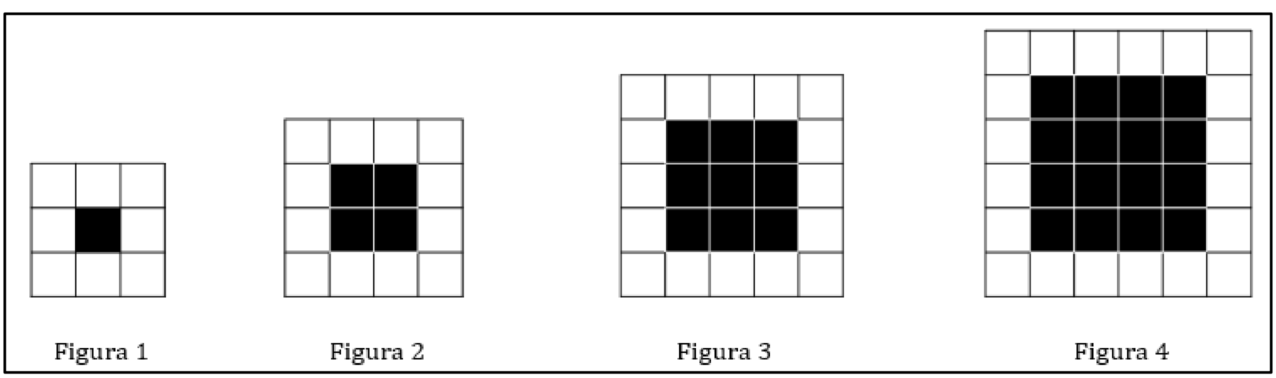
7. De acuerdo con mis observaciones, la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes de cualquier figura es ____
____
____

Anexo 4. Actividad 3 (Versión final)

Nombres: ____

Actividad 3

Observa la siguiente secuencia.



1. Completa:

c) En la figura 4 hay _________ cuadros blancos.

d) En la figura 4 hay _________ cuadros negros.

2. El grupo de Camila, Juan Carlos y Diana se inventó una técnica para contar rápidamente los cuadrados blancos de la figura 5.

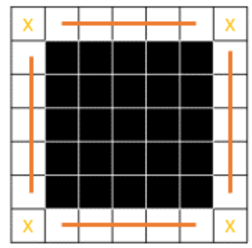


Figura 5

i. Contó los 4 cuadros blancos de las esquinas.

ii. Contó los 5 cuadros blancos que quedan en cada uno de los 4 lados.

El grupo de Brayan, Daniel y Laura estudió una técnica diferente para contar los cuadros blancos de la figura 5.

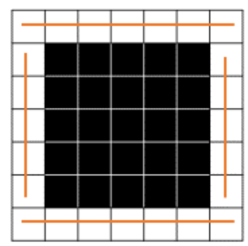


Figura 5

i. Contó 7 cuadros blancos en la parte superior y 7 cuadros blancos en la parte inferior.

ii. Contó 5 cuadros blancos en el lado izquierdo y 5 cuadros blancos en el lado derecho.

Aplica el método del grupo de Camila, Juan Carlos y Diana para contar el número de cuadrados blancos de las figuras 8 y 10.

Aplica el método del grupo de Brayan, Daniel y Laura para contar el número de cuadrados blancos de las figuras 8 y 10.

3. Orlando y Jorge utilizaron los dos métodos para obtener el número de cuadrados de la figura 10, pero obtuvieron resultados diferentes. ¿Por qué crees que sucedió esto?

4. Completa:

Estoy de acuerdo con utilizar el método del grupo de ________________ para contar la cantidad de cuadros blancos de la figura 25 porque ________________________
____.

- La cantidad total de cuadros blancos en la figura 93 es __________, porque _______
  ____
  ____.

5. Angie y Harol no quisieron utilizar los métodos de sus compañeros para calcular la cantidad de cuadrados blancos de la posición 132. Ellos inventaron su propio método.

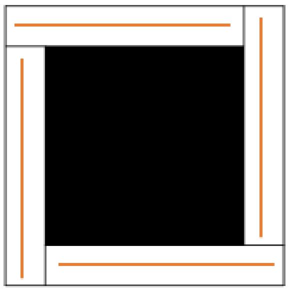


Figura 132

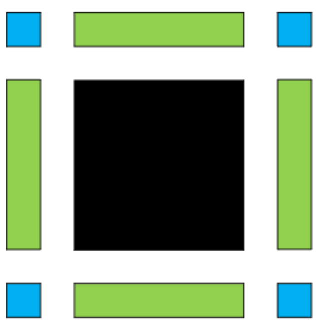
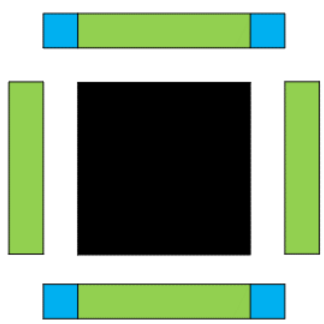
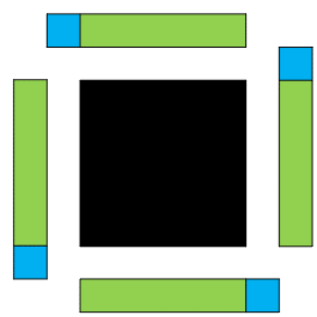
Tomaron el número de la posición y le sumaron uno: $132 + 1 = 133$.

Este es el número de cuadrados blancos de cada segmento señalado con las líneas de color naranja.

Este resultado lo multiplicaron por cuatro: $133 \times 4 = 532$.

532 es la cantidad de cuadrados blancos que hay en la figura 132.

Camila, Juan Carlos y Diana estaban seguros de que el método de Angie y Harol era correcto, porque con este, llegaron al mismo resultado que con los dos anteriores. Ellos utilizaron las siguientes figuras para justificar porque las tres maneras de contar los cuadrados blancos son válidas.

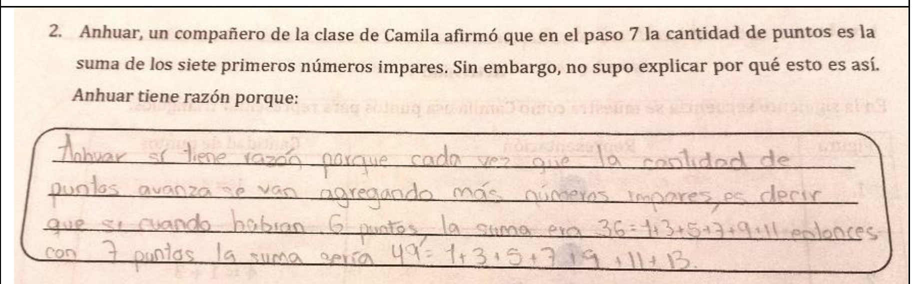
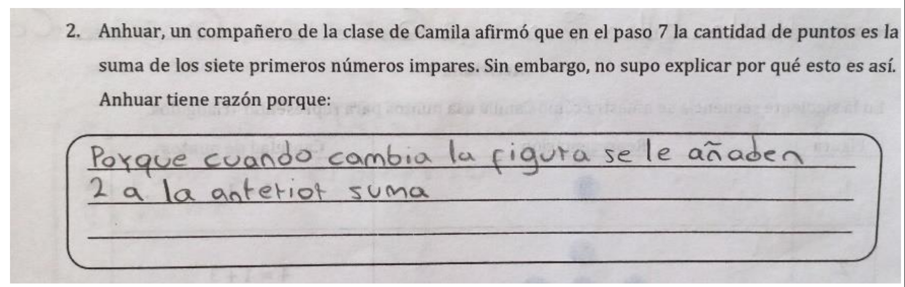
Método de Camila, Juan Carlos y Diana	Método de Brayan, Daniel y Laura	Método de Angie y Harol
		

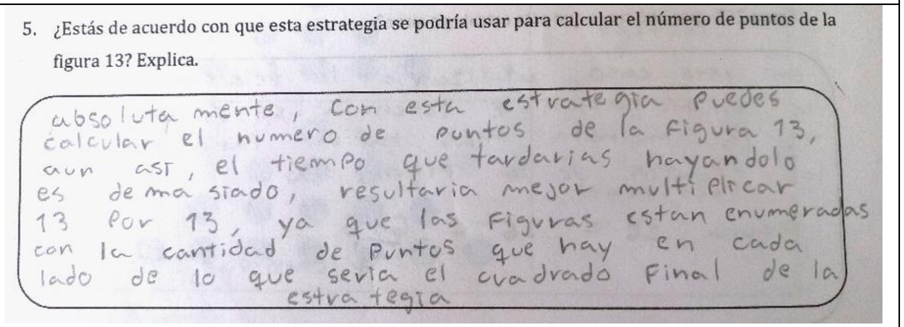
Teniendo en cuenta el cuadro anterior, escribe si estás de acuerdo con la justificación con Camila, Juan Carlos y Diana. Explica por qué si o por qué no.

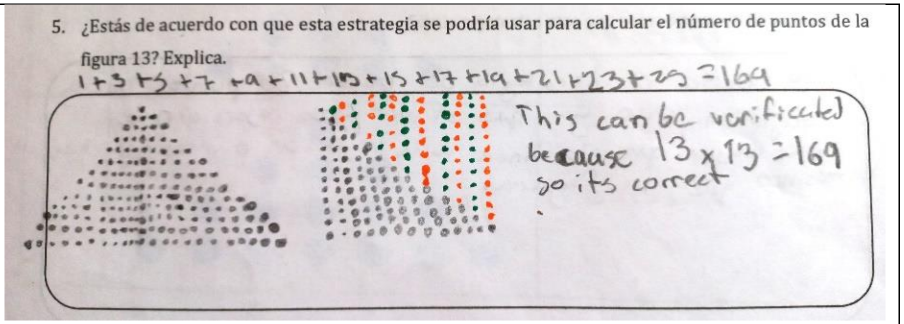
6. Halla la cantidad de cuadros blancos en la figura 999. Justifica tu procedimiento.

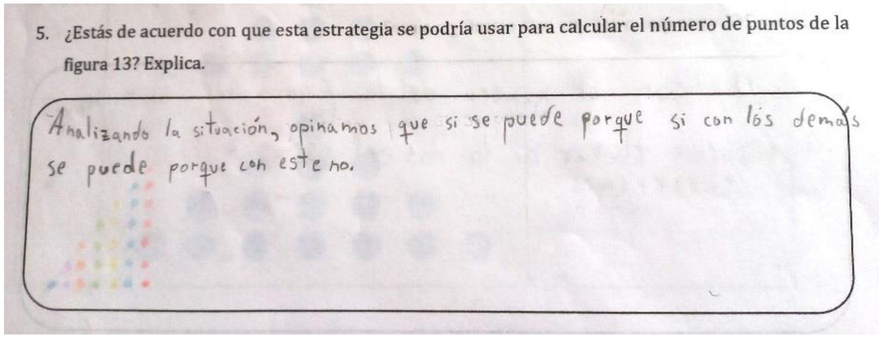
Anexo 5. Matriz para el Análisis de los Resultados (Diligenciada)

Ejercicio	¿Qué se esperaba favorecer?	Resultados cuantitativos	Ejemplos significativos
1.1	Etapa 1 – Mason et al. (1999) Nivel 1 – Cañadas y Castro (2007)	Tres grupos (G31, G34, G29) hicieron solamente el dibujo de las secuencias. Dieciocho grupos (G11, G2 G35, G27, G26, G30, G18, G7, G15, G28, G21, G19, G12, G4, G20, G6, G9, G23) hicieron el dibujo de la secuencia e indicaron la suma de los números impares. Un grupo (G10) además de lo que hicieron sus compañeros dio una respuesta cualitativa	

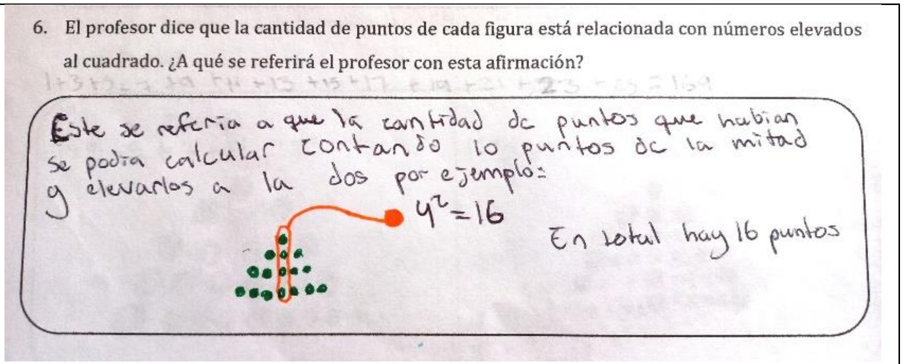
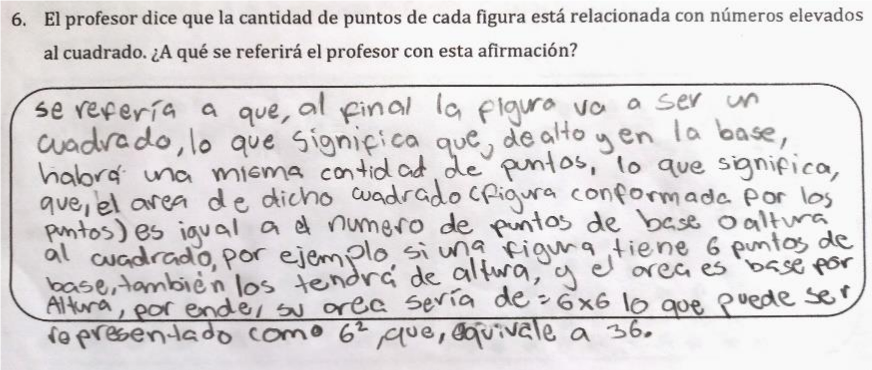
		para la cantidad de puntos que se necesitan en cada figura. Esto corresponde a la etapa 2 de Mason.	
1.2	Etapa 3 – Mason et al. (1999) Nivel 2 – Cañadas y Castro (2007) M.L. Proporcionar evidencia – Rumsey y Langrall (2016)	Once grupos (G10, G23, G9, G29, G20, G12, G19, G21, G30, G26, G2) proporcionaron evidencia para argumentar que los números que se suman son impares, teniendo en cuenta las figuras anteriores. Cinco grupos (G11, G31, G18, G28, G4) argumentaron que en cada figura se suma un número impar dos unidades más grandes que el anterior.	 2. Anhuar, un compañero de la clase de Camila afirmó que en el paso 7 la cantidad de puntos es la suma de los siete primeros números impares. Sin embargo, no supo explicar por qué esto es así. Anhuar tiene razón porque: Anhuar si tiene razón porque cada vez que la cantidad de puntos avanza se van agregando más números impares, es decir que si cuando habian 6 puntos la suma era 36=1+3+5+7+9+11 entonces con 7 puntos la suma seria 49=1+3+5+7+9+11+13. Hace uso del marco de lenguaje para dar un argumento válido.  2. Anhuar, un compañero de la clase de Camila afirmó que en el paso 7 la cantidad de puntos es la suma de los siete primeros números impares. Sin embargo, no supo explicar por qué esto es así. Anhuar tiene razón porque: Porque cuando cambia la figura se le añaden 2 a la anterior suma Sigue el marco de lenguaje, pero el argumento es incompleto porque no se agrega 2 sino el siguiente número impar.

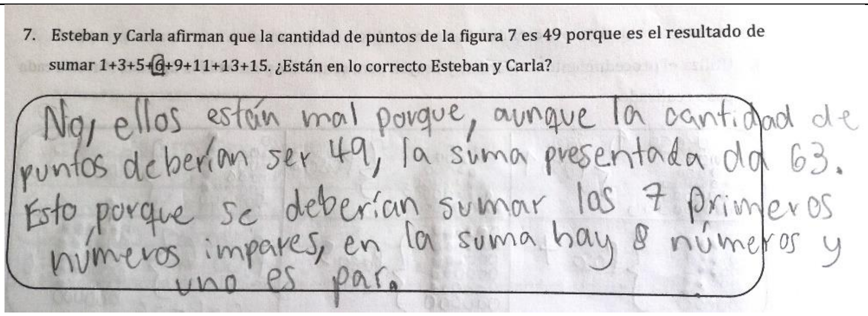
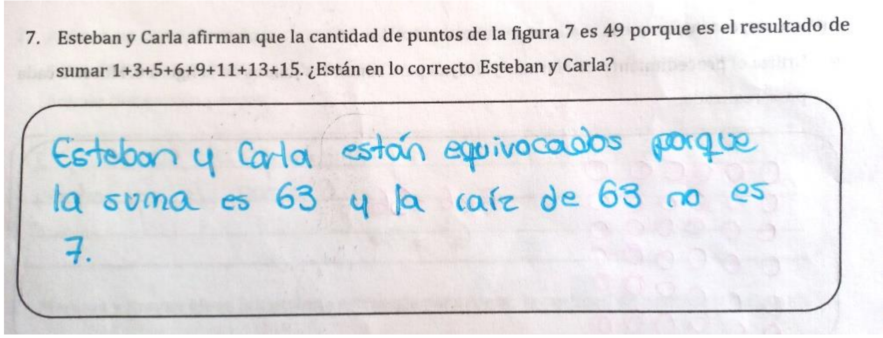
		Cinco grupos (G7, G27, G35, G6, G15), dieron argumentos incorrectos porque dijeron que se suman dos a la figura anterior, lo cual no es correcto, estos argumentos pueden ser correctos si se hacen algunas modificaciones.	
1.5	Discutir contenido familiar y rico – Rumsey y Langrall (2016)	Catorce grupos (G6, G7, G4, G18, G31, G11, G10, G23, G29, G20, G21, G30, G34, G2) escribieron que sí estaban de acuerdo con la estrategia utilizada, sin embargo, sus argumentos no son válidos ya que los garantes no justifican el contenido de la afirmación.	 5. ¿Estás de acuerdo con que esta estrategia se podría usar para calcular el número de puntos de la figura 13? Explica. absoluta mente, con esta estrategia puedes calcular el numero de puntos de la figura 13, aun asi, el tiempo que tardarias hayandolo es de masiado, resultaria mejor multiplicar 13 por 13, ya que las figuras estan enumeradas con la cantidad de puntos que hay en cada lado de lo que seria el cuadrado final de la estrategia En este grupo los estudiantes basan su argumento en que el número de la figura indica la cantidad de puntos que tiene en cada lado el cuadrado que se obtiene al hacer la transformación del triángulo.

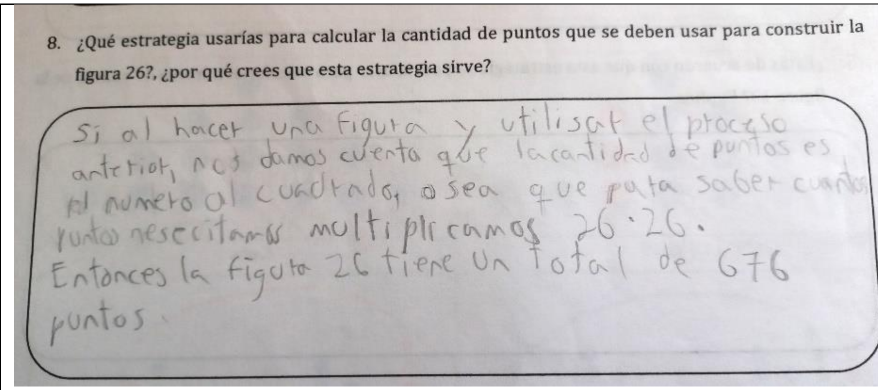
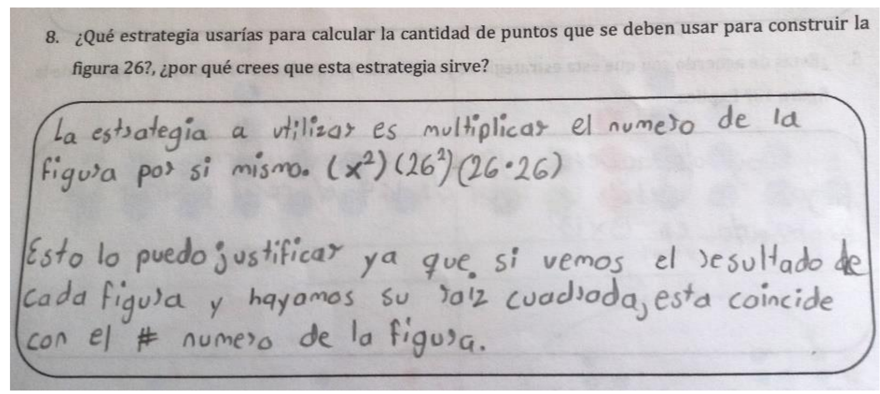
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Un grupo (G9) comprobó que el método era válido y lo verificó haciendo uso de un argumento visual y del método de suma de números impares, encontrando que en los tres casos daba la misma cantidad de puntos.
Cinco grupos (G15, G28, G12, G19, G26) presentaron argumentos válidos.</td>
<td>

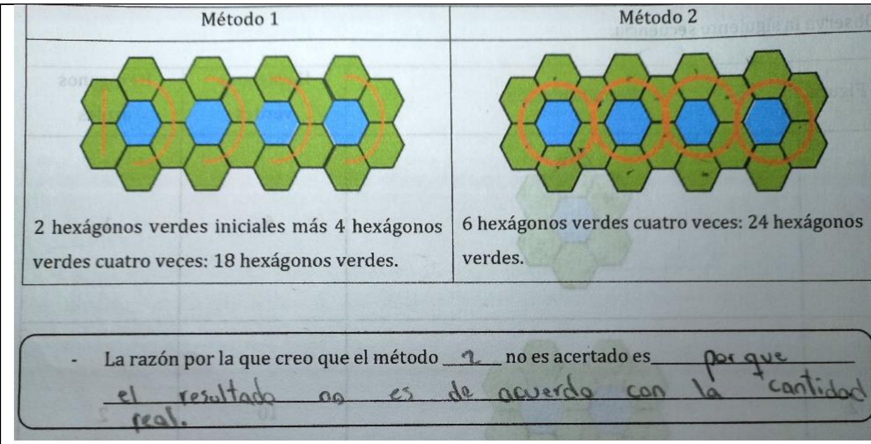
Este grupo utilizó tres métodos diferentes para comprobar que la cantidad de puntos de la figura 13 es 169.


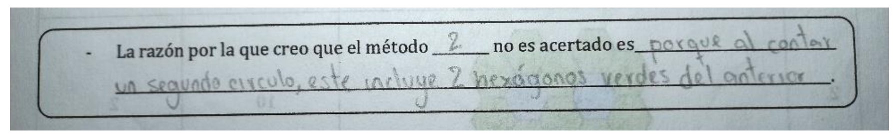
Este argumento es una falacia llamada argumento ad ignorantiam, que se caracteriza por defender una proposición acudiendo a la incapacidad de argumentar de probar lo contrario.</td>
</tr>
</table>

1.6	Etapa 3 – Mason et al. (1999) Nivel 4 – Cañadas y Castro (2007) M.L. Hacer declaraciones – Rumsey y Langrall (2016)	Ocho grupos (G9, G26, G15, G28, G12, G21, G20, G10) presentaron argumentos válidos, en los que, además de hacer la declaración, explicaron por qué sucede esto. Ocho grupos (G19, G27, G7, G4, G18, G31, G29, G2) hicieron solamente la afirmación, diciendo a que se refiere el profesor. Seis grupos (G6, G34, G30, G23, G11, G35) no tuvieron una declaración coherente.	 6. El profesor dice que la cantidad de puntos de cada figura está relacionada con números elevados al cuadrado. ¿A qué se referirá el profesor con esta afirmación? Este se refería a que la cantidad de puntos que habían se podía calcular contando lo puntos de la mitad y elevarlos a la dos por ejemplo: $4^2=16$ En total hay 16 puntos El grupo es capaz de hacer una declaración teniendo en cuenta lo observado.  6. El profesor dice que la cantidad de puntos de cada figura está relacionada con números elevados al cuadrado. ¿A qué se referirá el profesor con esta afirmación? se refería a que, al final la figura va a ser un cuadrado, lo que significa que, de alto y en la base, habrá una misma cantidad de puntos, lo que significa, que, el area de dicho cuadrado (figura conformada por los puntos) es igual a el numero de puntos de base o altura al cuadrado, por ejemplo si una figura tiene 6 puntos de base, también los tendrá de altura, y el area es base por Altura, por ende, su area sería de = 6x6 lo que puede ser representado como 6^2, que, equivale a 36. Además de hacer una declaración acerca de lo que sucede, este grupo explica qué es lo que hace que eso suceda.

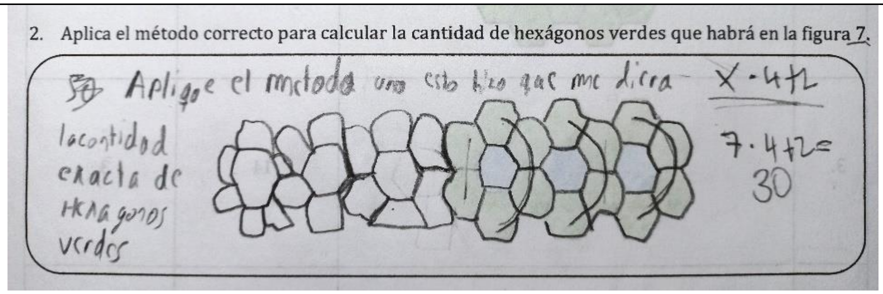
1.7	Etapa 1 – Mason et al. (1999) Nivel 4 – Cañadas y Castro (2007) Presentar afirmaciones falsas - Rumsey y Langrall (2016)	Diez grupos (G34, G30, G35, G19, G18, G31, G26, G15, G28, G21) encontraron que la argumentación era falsa y sustentaron adecuadamente porque era falsa. Cuatro grupos (G6, G23, G4, G12) no reconocieron que el argumento era falso. Ocho grupos (G11, G27, G7, G29, G2, G9, G20, G10) encontraron que la argumentación era falsa, pero no sustentaron adecuadamente porqué.	 7. Esteban y Carla afirman que la cantidad de puntos de la figura 7 es 49 porque es el resultado de sumar 1+3+5+6+9+11+13+15. ¿Están en lo correcto Esteban y Carla? No, ellos están mal porque, aunque la cantidad de puntos deberían ser 49, la suma presentada da 63. Esto porque se deberían sumar los 7 primeros números impares, en la suma hay 8 números y uno es par. El grupo dice que el resultado está incorrecto argumentando que se suman más puntos de los que se debería y se incluye un par que no se debe.  7. Esteban y Carla afirman que la cantidad de puntos de la figura 7 es 49 porque es el resultado de sumar 1+3+5+6+9+11+13+15. ¿Están en lo correcto Esteban y Carla? Esteban y Carla están equivocados porque la suma es 63 y la raíz de 63 no es 7. En este grupo se menciona que al hallar la raíz cuadrada del número se debe encontrar el número de la figura.

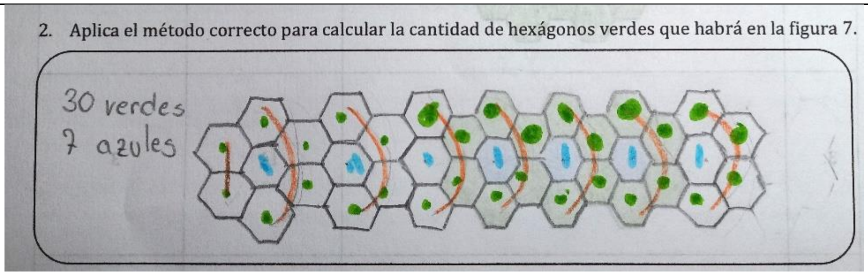
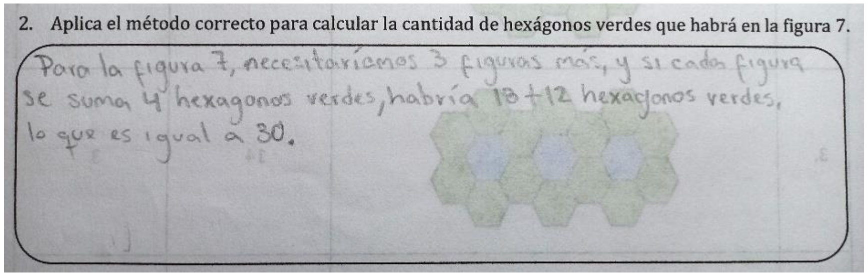
1.8	Etapa 3 – Mason et al. (1999) Nivel 3 – Cañadas y Castro (2007) Hacer declaraciones - Rumsey y Langrall (2016)	Dieciséis grupos (G21, G28, G15, G26, G31, G18, G19, G34, G10, G20, G2, G7, G27, G11, G4, G12) decidieron utilizar la estrategia de elevar la figura al cuadrado. Un grupo (G30) decidió hacer la suma de los primeros 26 números impares. Cuatro grupos (G35, G9, G29, G23) no fueron claros con el procedimiento que iban a hacer Un grupo (G6) dijo que seguiría el procedimiento del ejercicio anterior, sin embargo, este era incorrecto.	 8. ¿Qué estrategia usarías para calcular la cantidad de puntos que se deben usar para construir la figura 26?, ¿por qué crees que esta estrategia sirve? Si al hacer una figura y utilisar el proceso anterior, nos damos cuenta que la cantidad de puntos es el numero al cuadrado, o sea que para saber cuantos puntos nesecitamos multiplicamos 26·26. Entonces la figura 26 tiene un total de 676 puntos. El procedimiento es multiplicando el número de la figura por sí mismo.  8. ¿Qué estrategia usarías para calcular la cantidad de puntos que se deben usar para construir la figura 26?, ¿por qué crees que esta estrategia sirve? La estrategia a utilizar es multiplicar el numero de la figura por si mismo. $(x^2)(26^2)(26\cdot 26)$ Esto lo puedo justificar ya que si vemos el resultado de cada figura y hayamos su raiz cuadrada, esta coincide con el # numero de la figura. Se eleva el número de la figura al cuadrado, y para confirmar que quedó bien, podemos hallar la raíz del resultado y tiene que dar el mismo número de figura.

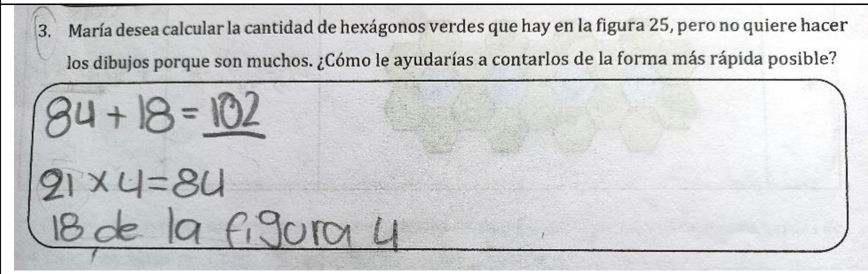
<table>
<tr>
<td>2.1</td>
<td>Etapa 1 – Mason et al. (1999)
Nivel 2 y 5 – Cañadas y Castro (2007)
Hacer declaraciones y Ofrecer una posición distinta - Rumsey y Langrall (2016)</td>
<td>Veintiún grupos (G32, G31, G19, G13, G14, G5, G8, G1, G6, G3, G9, G29, G28, G2, G25, G24, G23, G17, G10, G4, G18) respondieron que el procedimiento es incorrecto porque están contando dos hexágonos verdes dos veces, lo que hace que al final se obtenga un resultado incorrecto.
Cinco grupos (G33, G20, G27, G16, G26) respondieron que el procedimiento no es correcto porque no llegan al resultado correcto (es probable que para</td>
<td>

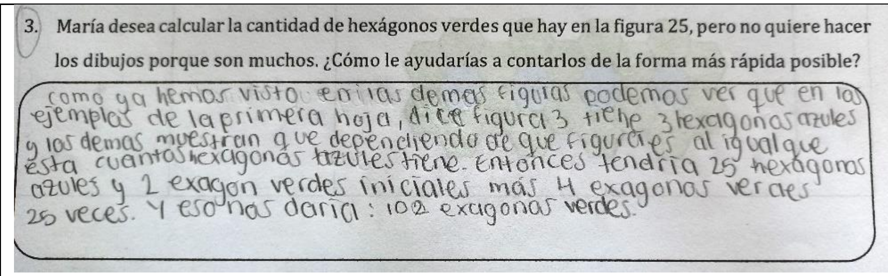
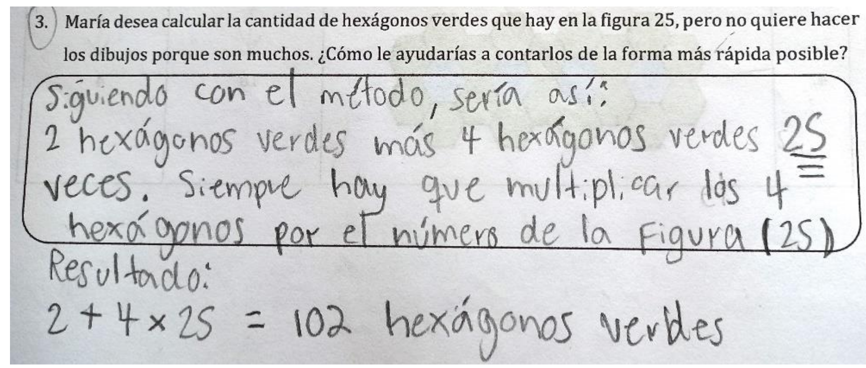
Como el resultado final es incorrecto, entonces el procedimiento está mal.


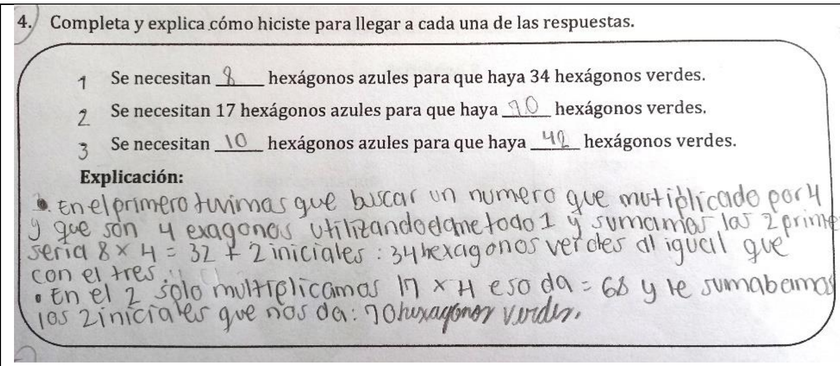
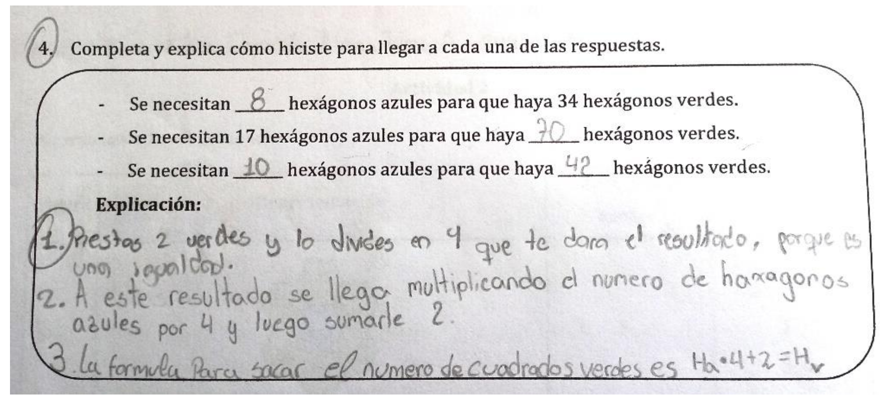
Cuenta dos hexágonos verdes en dos figuras diferentes, por lo tanto, los repite.</td>
</tr>
</table>

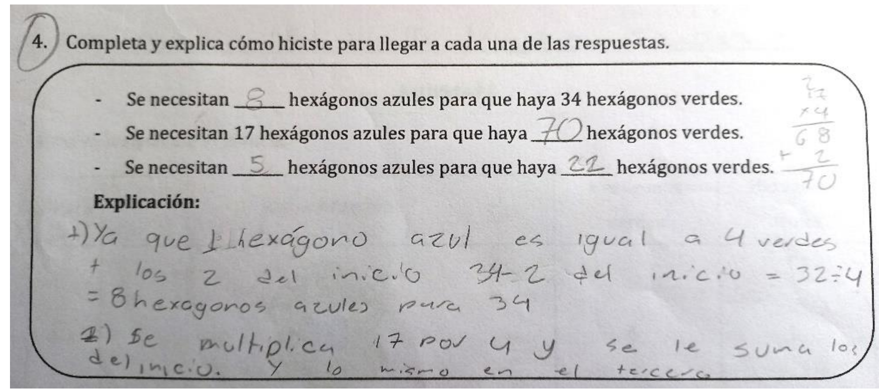
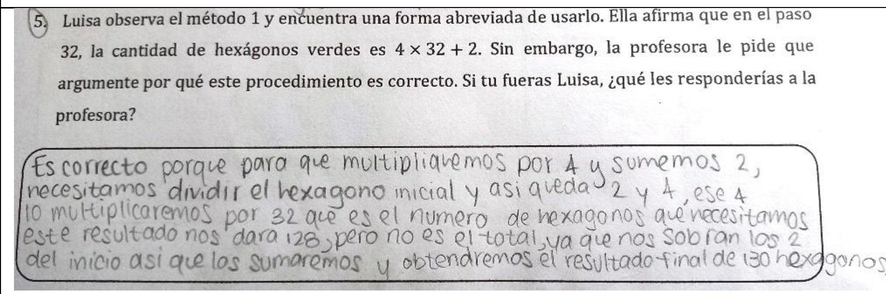
		comprobarlo hayan contado cada hexágono). En este caso, todos los estudiantes alcanzaron los niveles 2 y 5 de Cañadas y Castro (2007)	
2.2	Etapa 1 – Mason et al. (1999) Nivel 2 – Cañadas y Castro (2007)	Doce grupos hicieron uso del método 1 para calcular la cantidad de hexágonos verdes que habrá en la figura 7. Cinco equipos (G20, G33, G19, G1, G32) hicieron uso de lenguaje natural y gráfico para explicar el proceso realizado, cuatro (G18, G10, 31, G29) usaron solamente lenguaje natural, uno (G4) usó lenguaje natural con	 Al lado derecho se observa que el grupo hace uso de símbolos del álgebra para calcular la cantidad de hexágonos que habrá en la figura 7.

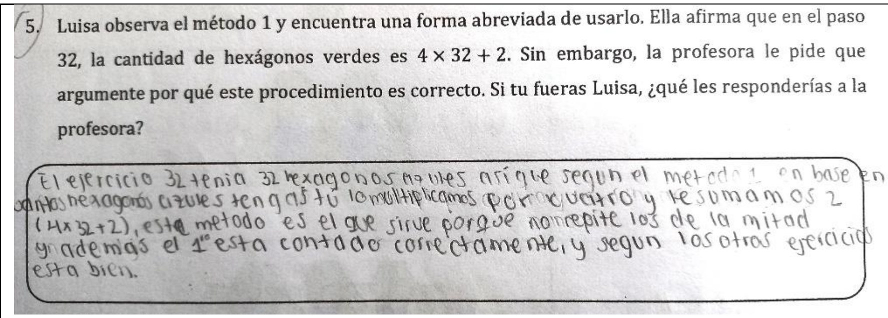
		lenguaje matemático y uno (G2) utilizó, lenguaje natural, gráfico y matemático, favoreciéndose también las etapas 2 y 3 de Mason et al. (1999) Ocho grupos (G13, G14, G6, G5, G8, G9, G25, G26, G16, G24, G17) hicieron uso de métodos gráficos para calcular la cantidad de figuras que habrá en la figura 7. Dos grupos (G27, G28) hicieron uso de la figura 4, que tenía 18 hexágonos y le sumaron 3 veces 4 hexágonos. De estos dos grupos, el G28	 El estudiante replica el método 1, haciendo uso de dibujos.  Este grupo parte de la figura 4, para saber cuántos necesita en la figura 7, es decir, se idea su propio método de conteo.

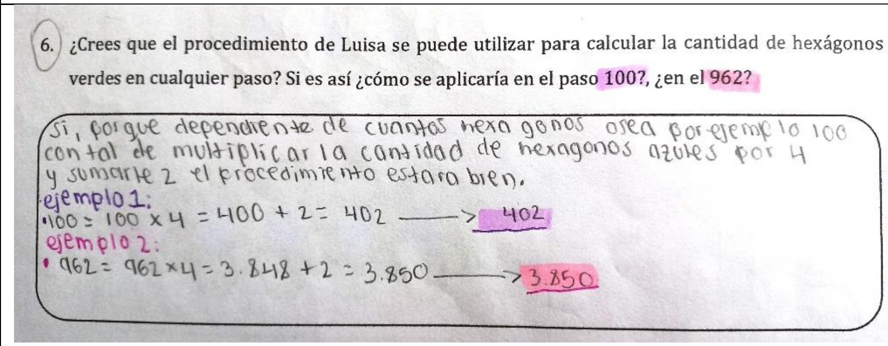
		hizo uso de una combinación de lenguaje natural y matemático para explicar su procedimiento, mientras que el G27, hizo uso únicamente de lenguaje matemático.	
2.3	Etapa 3 – Mason et al. (1999) Nivel 4 – Cañadas y Castro (2007) Hacer declaraciones - Rumsey y Langrall (2016)	Veinte grupos explicaron que María tenía que hacer uso del método 1, explicado anteriormente. Para esto, ocho grupos (G1, G10, G20, G32, G13, G14, G9, G26) hicieron uso del lenguaje natural, diez (G2, G4, G18, G29, G31, G33, G19, G5, G25, G28) combinaron lenguaje natural con lenguaje matemático, y dos	 Esta estudiante sabe que en la figura 4 hay 18 hexágonos verdes, por lo tanto, para la figura 25 calcula 4 hexágonos verdes para 21 figuras, es decir, de la 5 a la 25, y finalmente le suma las 18 que tenía la figura 4.

		(G16, G8) plantearon la fórmula matemática que permitía llegar al resultado. Tres grupos (G24, G17, G23) dijeron que María tenía que multiplicar 24 por 4 y sumar los seis hexágonos verdes iniciales, los dos hicieron uso del lenguaje natural. Un grupo (G27) decidió que cómo ya sabía que tenía 18 hexágonos en las primeras 4 figuras, necesitaba sumar las de las siguientes 21, así que multiplicó 4 por 21 y lo sumó con 18. Este grupo usó lenguaje matemático.	 3. María desea calcular la cantidad de hexágonos verdes que hay en la figura 25, pero no quiere hacer los dibujos porque son muchos. ¿Cómo le ayudarías a contarlos de la forma más rápida posible? como ya hemos visto en las demas figuras podemos ver que en los ejemplos de la primera hoja, dice figura 3 tiene 3 hexagonos azules y los demas muestran que dependiendo de que figura es al igual que esta cuantos hexagonos azules tiene. Entonces tendria 25 hexagonos azules y 2 exagon verdes iniciales más 4 exagonos verdes 25 veces. Y eso nos daria: 102 exagonos verdes. En este grupo por cada figura hay 4 hexágonos verdes y le suma dos hexágonos que hay al inicio, siguiendo el método 1.  3. María desea calcular la cantidad de hexágonos verdes que hay en la figura 25, pero no quiere hacer los dibujos porque son muchos. ¿Cómo le ayudarías a contarlos de la forma más rápida posible? Siguiendo con el método, sería así: 2 hexágonos verdes más 4 hexágonos verdes 25 veces. Siempre hay que multiplicar los 4 hexágonos por el número de la Figura (25) Resultado: $2 + 4 \times 25 = 102$ hexágonos verdes El mismo procedimiento anterior, pero hay uso de lenguaje matemático.

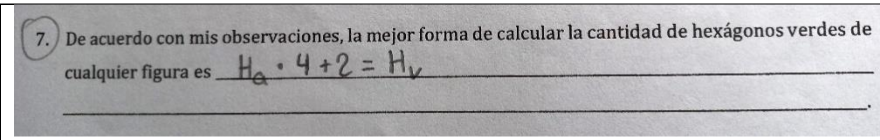
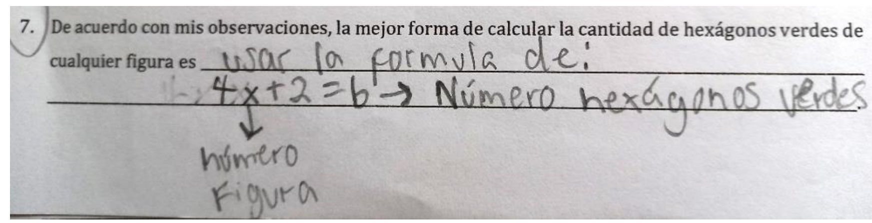
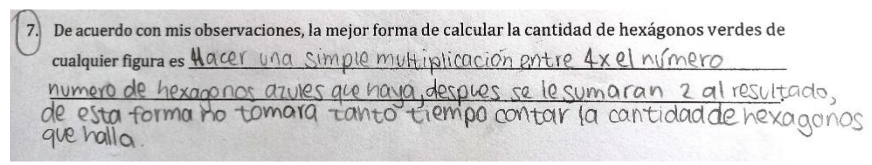
2.4	Etapa 1 y 3 – Mason et al. (1999) Nivel 3 – Cañadas y Castro (2007) M L Proporcionar evidencia y Especificar condiciones- Rumsey y Langrall (2016)	Catorce grupos (G6, G30, G3, G27, G9, G32, G28, G25, G5, G19, G33, G29, G18, G2) solamente respondieron como completaron las frases 2 y 3, sin embargo, hicieron el mismo procedimiento que en las dos preguntas anteriores. Cinco grupos (G16, G24, G26, G14, G1) utilizaron el método 1 y estuvieron probando con diferentes números hasta que llegaron al resultado adecuado. Un grupo (G20) proporcionó evidencia basado en que la cantidad de hexágonos verdes aumenta de cuatro en cuatro,	 4. Completa y explica cómo hiciste para llegar a cada una de las respuestas. 1 Se necesitan 8 hexágonos azules para que haya 34 hexágonos verdes. 2 Se necesitan 17 hexágonos azules para que haya 70 hexágonos verdes. 3 Se necesitan 10 hexágonos azules para que haya 42 hexágonos verdes. **Explicación:** • En el primero tuvimos que buscar un numero que multiplicado por 4 y que son 4 exagonos utilizando el metodo 1 y sumamos las 2 primeras seria 8 × 4 = 32 + 2 iniciales : 34 hexagonos verdes al igual que con el tres • En el 2 solo multiplicamos 17 × 4 eso da = 68 y le sumabamos las 2 iniciales que nos da: 70 hexagonos verdes. Este grupo busca un número que al multiplicarlo por 4 le de 32, y que sumarle 2 le de 34.  4. Completa y explica cómo hiciste para llegar a cada una de las respuestas. - Se necesitan 8 hexágonos azules para que haya 34 hexágonos verdes. - Se necesitan 17 hexágonos azules para que haya 70 hexágonos verdes. - Se necesitan 10 hexágonos azules para que haya 42 hexágonos verdes. **Explicación:** 1. Restas 2 verdes y lo divides en 4 que te dara el resultado, porque es una igualdad. 2. A este resultado se llego multiplicando el numero de haxagonos azules por 4 y luego sumarle 2. 3. La formula para sacar el numero de cuadrados verdes es $H_a \cdot 4 + 2 = H_v$ Este grupo plantea una igualdad y con base en ella primero resta 2 y luego divide en 4.

		por lo tanto, siguió la secuencia hasta llegar al número que esperaba. Dos grupos proporcionaron evidencia a partir de un razonamiento inverso del método 1 (G8, G13).	posición  4. Completa y explica cómo hiciste para llegar a cada una de las respuestas. - Se necesitan 8 hexágonos azules para que haya 34 hexágonos verdes. - Se necesitan 17 hexágonos azules para que haya 70 hexágonos verdes. - Se necesitan 5 hexágonos azules para que haya 22 hexágonos verdes. 17 ×4 68 +2 70 **Explicación:** 1) Ya que 1 hexágono azul es igual a 4 verdes + los 2 del inicio 34-2 del inicio = 32÷4 = 8 hexagonos azules para 34 2) Se multiplica 17 por 4 y se le suma los del inicio. Y lo mismo en el tercero Mismo procedimiento anterior.
2.5	Etapa 2 y 3 – Mason et al. (1999) Nivel 5 – Cañadas y Castro (2007) M L Proporcionar evidencia- Rumsey y Langrall (2016)	Veintiún grupos (G25, G5, G19, G29, G18, G2, G4, G10, G20, G8, G13, G16, G24, G26, G14, G1, G28, G32, G9, G3, G30) basaron su argumento en que este método funciona porque, por cada hexágono azul hay cuatro verdes, y al inicio	 5. Luisa observa el método 1 y encuentra una forma abreviada de usarlo. Ella afirma que en el paso 32, la cantidad de hexágonos verdes es $4 \times 32 + 2$. Sin embargo, la profesora le pide que argumente por qué este procedimiento es correcto. Si tu fueras Luisa, ¿qué les responderías a la profesora? Es correcto porque para que multipliquemos por 4 y sumemos 2, necesitamos dividir el hexagono inicial y así queda 2 y 4, ese 4 lo multiplicaremos por 32 que es el numero de hexagonos que necesitamos este resultado nos dara 128, pero no es el total, ya que nos sobran los 2 del inicio así que los sumaremos y obtendremos el resultado final de 130 hexagonos En este grupo dicen que primero se debe dividir el hexágono inicial en dos partes, una de 2 y otra de 4, luego se multiplica 4 por el número de la figura, y se suman los dos iniciales.

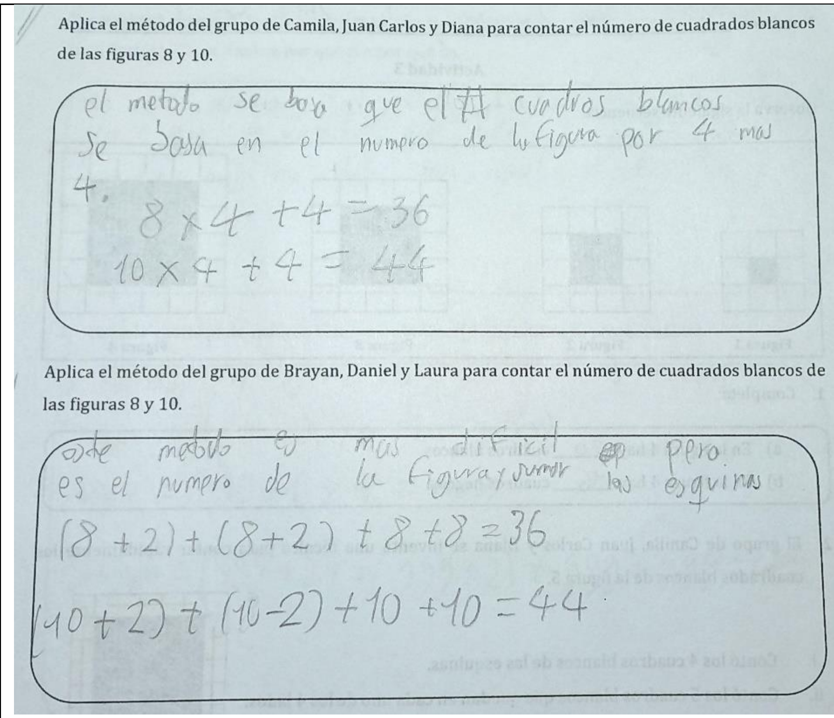
<table>
<tr><td></td><td></td><td>hay dos hexágonos extras, que son los que Luisa suma al final.</td><td>
5. Luisa observa el método 1 y encuentra una forma abreviada de usarlo. Ella afirma que en el paso 32, la cantidad de hexágonos verdes es $4 \times 32 + 2$. Sin embargo, la profesora le pide que argumente por qué este procedimiento es correcto. Si tu fueras Luisa, ¿qué les responderías a la profesora?
El ejercicio 32 tenia 32 hexagonos azules asi que segun el metodo 1 en base en cuantos hexagonos azules tengas tu lo multiplicamos por cuatro y le sumamos 2 (4x32+2), esta metodo es el que sirve porque no repite los de la mitad y ademas el 1° esta contado correctamente, y segun los otros ejercicios esta bien.

Este grupo sigue el método 1</td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>Nivel 6 – Cañadas y Castro (2007) Discutir contenido familiar y rico- Rumsey y Langrall (2016)</td><td>Veintidós grupos (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G8, G9, G10, G13, G14, G16, G17, G18, G19, G20, G24, G25, G26, G27, G28, G29) dijeron que si se puede seguir con ese procedimiento para cualquier figura y los aplicaron adecuadamente en las figuras 100 y 962.</td><td>
6. ¿Crees que el procedimiento de Luisa se puede utilizar para calcular la cantidad de hexágonos verdes en cualquier paso? Si es así ¿cómo se aplicaría en el paso 100?, ¿en el 962?
Si, porque dependiente de cuantos hexagonos osea por ejemplo 100 con tal de multiplicar la cantidad de hexagonos azules por 4 y sumarle 2 el procedimiento estara bien.
ejemplo 1:
•100 = 100 x 4 = 400 + 2 = 402 ——> 402
ejemplo 2:
• 962 = 962 x 4 = 3.848 + 2 = 3.850 ——> 3.850

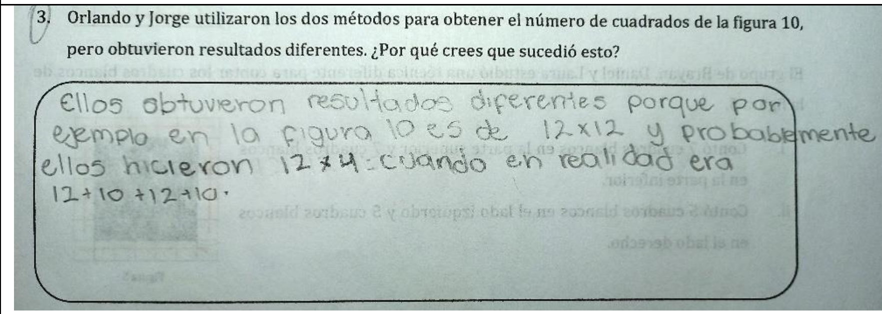
Este grupo dice que el procedimiento está bien si se multiplica la cantidad de hexágonos azules por 4 y se le suman 2.</td></tr>
</table>

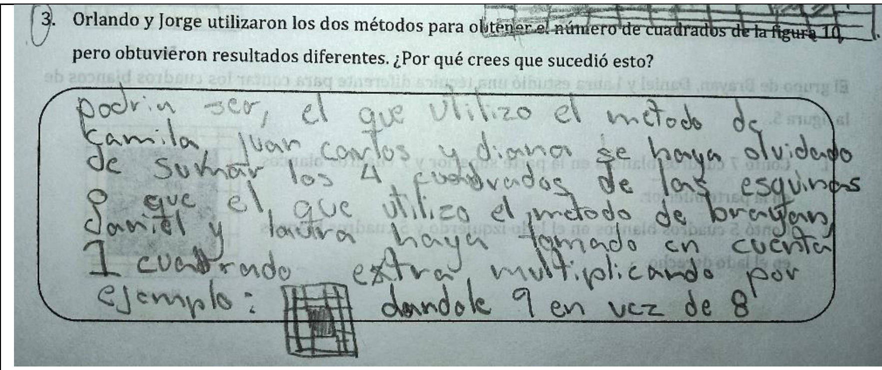
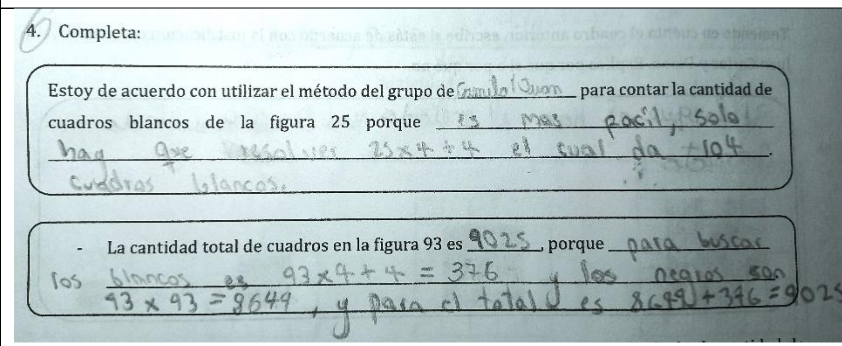
2.7	Etapa 3 – Mason et al. (1999) Nivel 6 – Cañadas y Castro (2007) M L Proporcionar evidencia- Rumsey y Langrall (2016)	Diecisiete grupos (G1, G2, G4, G6, G8, G9, G10, G14, G16, G17, G20, G24, G26, G27, G28, G29, G30) explicaron con sus palabras que usarían el método de Luisa, y multiplicarían el número de la figura por cuatro y le sumarían 2. Seis grupos (G3, G5, G13, G18, G19, G33) expusieron una formula algebraica.	 7. De acuerdo con mis observaciones, la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes de cualquier figura es $H_a \cdot 4 + 2 = H_v$ Este grupo hace uso de una fórmula algebraica, pero al mismo tiempo las variables son letras que permiten identificar que letra hace referencia a que variable.  7. De acuerdo con mis observaciones, la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes de cualquier figura es usar la formula de: $4x+2=b$ → Número hexágonos verdes número Figura Este grupo también hace uso de fórmulas, pero las variables no son tan intuitivas, por lo tanto, se les hace necesario explicarlas.  7. De acuerdo con mis observaciones, la mejor forma de calcular la cantidad de hexágonos verdes de cualquier figura es Hacer una simple multiplicación entre 4x el número numero de hexagonos azules que haya, despues se le sumaran 2 al resultado, de esta forma no tomara tanto tiempo contar la cantidad de hexagonos que halla. Este grupo generaliza, pero hace uso del lenguaje natural para explicar el procedimiento.

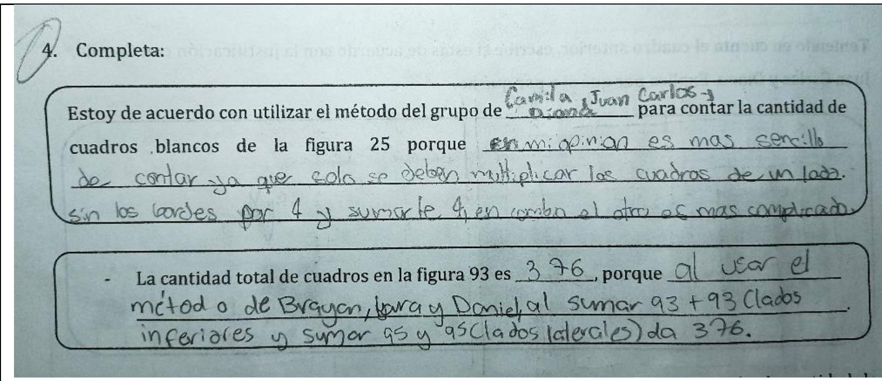
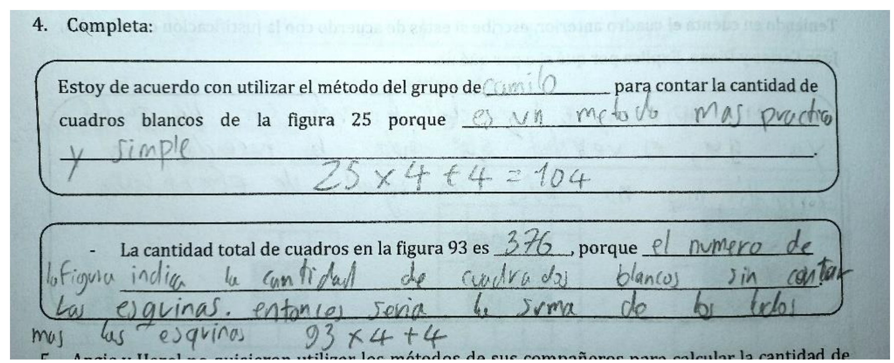
3.1	Etapa 1 – Mason et al. (1999) Nivel 1 – Cañadas y Castro (2007) M L Hacer una declaración – Rumsey y Langrall (2016)	Veintidós grupos (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G14, G15, G16, G17, G18, G19, G20, G21, G22, G34) completaron las afirmaciones correctamente, por lo tanto, alcanzaron la etapa 1 de Mason et al. (1999) y el nivel 1 de Cañadas y Castro (2007). Un grupo (G13) hizo un procedimiento incorrecto, ya que escribió que la figura 4 tiene 18 cuadros blancos.	

<table>
<tr>
<td>3.2</td>
<td>Etapa 1 – Mason et al. (1999)
Nivel 5 – Cañadas y Castro (2007)</td>
<td>Cuatro grupos (G34, G18, G11, G13) hicieron uso del lenguaje matemático para expresar el resultado, de manera que alcanzaron la Etapa 1 – Mason et al. (1999).
Seis grupos (G8, G7, G14, G12, G15, G20) hicieron una combinación de dibujos y lenguaje matemático para calcular la cantidad de cuadros blancos en cada figura.
Seis grupos (G5, G9, G16, G19, G21, G22) hicieron uso de figuras únicamente para calcular la cantidad de cuadros en las figuras.</td>
<td>

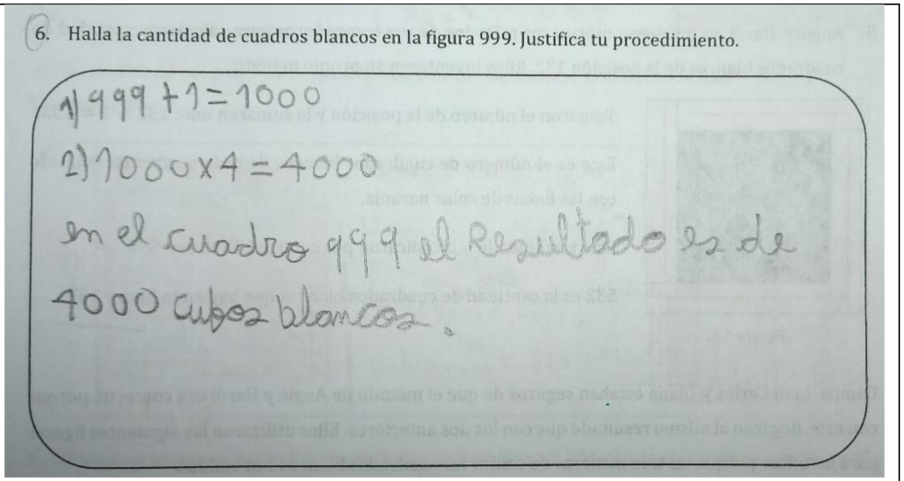
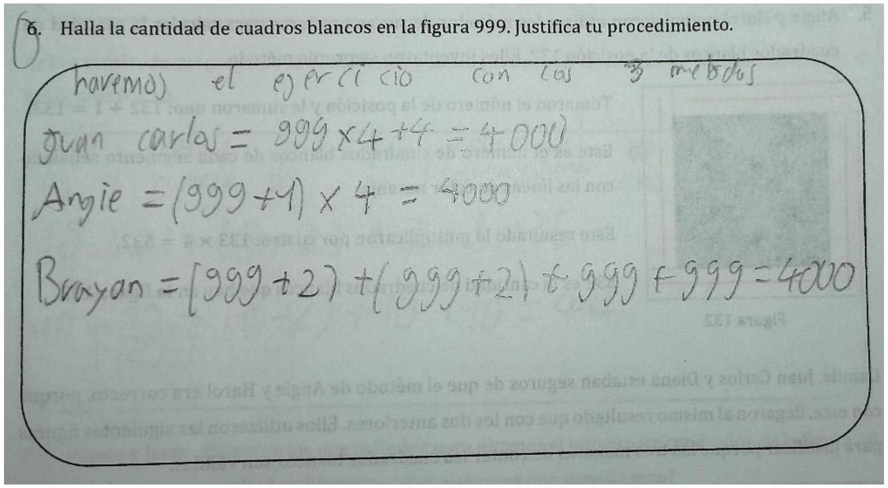
El estudiante encuentra una generalización basada en el número de la figura, por lo tanto, no tiene la necesidad de dibujar las figuras, sino que hace uso directo de su conjetura.</td>
</tr>
</table>

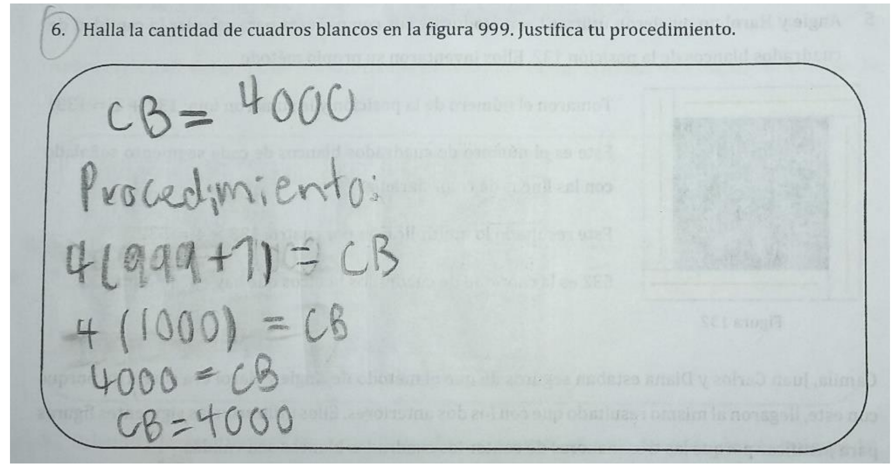
		Cuatro grupos (G1, G6, G10, G17) hicieron uso del lenguaje natural para expresar los resultados obtenidos, alcanzando la etapa 2 de Mason et al. (1999).	
3.3	Etapa 1 y 2 – Mason et al. (1999) Nivel 3 y 4 – Cañadas y Castro (2007) M L Invitar a una especulación - Rumsey y Langrall (2016)	Once grupos (G6, G22, G21, G19, G8, G20, G12, G14, G7, G13, G18) respondieron que muy probablemente Orlando y Jorge hayan hecho alguno de los dos procedimientos de forma incorrecta, porque a ellos les da el mismo resultado con los dos métodos. Otros tres grupos (G16, G9, G15) escribieron una posible	 Teniendo en cuenta el método 2, el piensa que el estudiante hizo 12x12 para la figura 10, sin tener en cuenta que en dos de sus lados la cantidad de cuadros era 12, pero en los otros 2 era de 10.

		situación en la que los estudiantes se equivocaron y por eso les dio resultados diferentes. Un grupo (G17) hace una suposición, sin embargo, es errónea porque no evidencia que en los dos métodos el resultado debe ser igual.	 3. Orlando y Jorge utilizaron los dos métodos para obtener el número de cuadrados de la figura 10, pero obtuvieron resultados diferentes. ¿Por qué crees que sucedió esto? podrian ser, el que utilizo el método de Camila, Juan Carlos y diana se haya olvidado de sumar los 4 cuadrados de las esquinas o que el que utilizo el método de brayan Daniel y laura haya tomado en cuenta 1 cuadrado extra multiplicando por ejemplo: dandole 9 en vez de 8 Este grupo analiza los dos casos, por un lado, supone que utilizando el método 1, olvidó sumar los 4 cuadros de las esquinas, pero utilizando el método 2, puso mal la cantidad de cuadros por cada lado.
3.4	Etapa 2 – Mason et al. (1999) Nivel 5 – Cañadas y Castro (2007) en la segunda parte M L Llegar a un consenso – Rumsey y	En la primera parte del ejercicio trece (G10, G17, G9, G15, G6, G22, G19, G8, G20, G14, G13, G18, G12) escogieron el método de Camila, argumentando que era más fácil y rápido que el otro.	 4. Completa: Estoy de acuerdo con utilizar el método del grupo de Camila Juan para contar la cantidad de cuadros blancos de la figura 25 porque es mas facil, solo hay que resolver 25x4+4 el cual da 104 cuadros blancos. - La cantidad total de cuadros en la figura 93 es 9025, porque para buscar los blancos es 93x4+4 = 376 y los negros son 93 x 93 = 8649, y para el total es 8649+376=9025 Estos estudiantes en el segundo ítem haya la cantidad total de cuadros que debe haber en la figura 93, haciendo uso del método 1.

	Langrall (2016) en la primera parte	Mientras que otros tres (G11, G16, G7) dijeron que era mejor el método de Brayan porque era más sencillo hacer las sumas necesarias. En la segunda parte 13 grupos (G12, G17, G9, G15, G6, G19, G22, G8, G14, G18, G11, G16, G7) calcularon solamente la cantidad de cuadros blancos, y dos (G10, G20) calcularon la cantidad total de cuadros. Además, fue interesante que uno de los grupos (G12) que dijo que el procedimiento de Laura era más eficiente, utilizó el procedimiento de Brayan	 4. Completa: Estoy de acuerdo con utilizar el método del grupo de Camila, Juan Carlos y Diana para contar la cantidad de cuadros blancos de la figura 25 porque en mi opinion es mas sencillo de contar ya que solo se deben multiplicar los cuadros de un lado sin los bordes por 4 y sumarle 4 en cambio el otro es mas complicado. - La cantidad total de cuadros en la figura 93 es 376, porque al usar el métod o de Brayan, laura y Daniel al sumar 93 + 93 (lados inferiores y sumar 95 y 95 (lados laterales) da 376. En el ítem 1 dicen que el mejor método es el de Camila, Juan Carlos y Diana. Sin embargo, cuando se les pide hallar la figura 93, deciden usar el método del grupo de Brayan.  4. Completa: Estoy de acuerdo con utilizar el método del grupo de Camilo para contar la cantidad de cuadros blancos de la figura 25 porque es un metodo mas practico y simple 25 × 4 + 4 = 104 - La cantidad total de cuadros en la figura 93 es 376, porque el numero de la Figura indica la cantidad de cuadrados blancos sin contar las esquinas. entonces seria la suma de los todos mas las esquinas 93 × 4 + 4

		para la segunda parte del ejercicio.	Se logra observar que hay una conjetura, que es que el número de la figura dice la cantidad de cuadros blancos que hay por cada lado sin contar las esquinas.
3.5	Etapa 2 – Mason et al. (1999) Nivel 7 – Cañadas y Castro (2007) Manipular contenido familiar para llegar a algo que no lo es - Rumsey y Langrall (2016)	Diez grupos (G20, G13, G7, G11, G18, G14, G8, G19, G6, G15) dijeron que el procedimiento es correcto porque llegan a un mismo resultado con todos, y que no se repiten cuadros. Es decir, que en este caso no se alcanzó el nivel 7 de Cañadas y Castro (2007).	

3.6	Etapa 2 y 3 – Mason et al. (1999) Nivel 6 – Cañadas y Castro (2007)	Tres grupos (G14, G8, G22) aplicaron el método de Camila, Juan Carlos y Diana. Nueve grupos (G10, G9, G16, G6, G19, G11, G7, G20, G13) aplicaron el método de Harol y Angie. Un grupo (G18) aplicó los tres métodos para llegar al resultado.	 Este estudiante explicó el paso a paso que se debe seguir para poder resolver el problema. 

			Este estudiante aplicó los tres métodos que se vieron durante el taller y por medio de esto confirmó que con los tres se obtiene el mismo resultado.  Este grupo hace uso del lenguaje algebraico para designar a los cuadrados blancos, planteando una ecuación para esto.