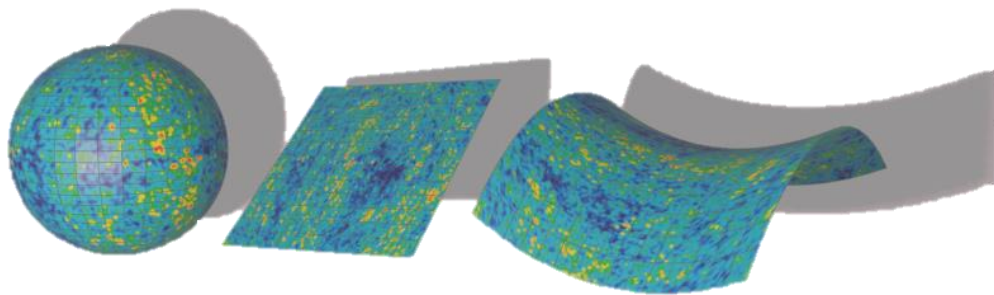


**CARACTERIZACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE UN MODELO DE UNIVERSO EN
EXPANSIÓN ACELERADA MEDIANTE EL USO DE PARÁMETROS
COSMOLÓGICOS**



María Fernanda La Rotta Wilches

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C.

2023

**CARACTERIZACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE UN MODELO DE UNIVERSO EN
EXPANSIÓN ACELERADA MEDIANTE EL USO DE PARÁMETROS
COSMOLÓGICOS**

María Fernanda La Rotta Wilches

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Licenciada en Física

Director:

Yesid Javier Cruz Bonilla

Línea de investigación:

La enseñanza de la física y la relación Física - Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C.

2023

Tabla de Contenido

Contextualización	1
Planteamiento del problema	1
Metodología	3
Objetivos	4
General.....	4
Específicos.....	4
Antecedentes	4
Introducción	6
La resignificación del concepto de inercia desde principio de Mach hasta el principio de equivalencia	7
CAPÍTULO 1 Las puertas a la modelación geométrica del universo: las ecuaciones de campo de Einstein	11
El tensor métrico	13
El tensor de Riemann	18
Tensor y escalar de Ricci	24
El tensor de Energía Momento.....	25
La constante cosmológica	27
CAPÍTULO 2 Las ecuaciones de campo y la evolución del universo.....	28
En busca de la métrica para el universo en expansión	28
implicaciones físicas y geométricas de la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	28
La distribución de materia y energía en un universo homogéneo e isótropo.....	32
Las ecuaciones de Friedmann y los parámetros cosmológicos	33
Los parámetros cosmológicos: densidad, curvatura y constante cosmológica.....	34
Soluciones de las ecuaciones de Friedmann y posibles modelos de evolución.....	36
Universos sin constante cosmológica	36
Universos con constante cosmológica negativa.....	39
Universos con constante cosmológica positiva.....	40
CAPÍTULO 3 La observación y nuestra imagen del cosmos: evidencias de la evolución del universo.....	41
Algunos Métodos Empleados en las Mediciones.....	41
El Análisis de Anisotropías de la Radiación de Fondo Cósmico de Microondas	41
Medición de la curvatura espacial.....	42

Oscilación Acústica de Bariones	43
Supernovas Tipo Ia.....	44
Medición del parámetro de Hubble.....	46
El cambio en la tasa de expansión del universo	47
Lentes Gravitacionales	48
Registro de Valores Obtenidos para los Parámetros Cosmológicos	49
Resultados de la misión Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.....	50
Restricciones a los Parámetros.....	52
Conjunto de datos seleccionado para ajustes y reducción de la incertidumbre	52
Modelo Cosmológico LCDM.....	53
Resultados de la misión Planck	55
CAPÍTULO 4 Uso del modelo teórico a la luz de bases empíricas.....	57
Estimación de la velocidad actual y aceleración de la expansión	63
Conclusiones.....	65
Consideraciones finales	69
Sobre el vínculo entre los fundamentos teóricos y la evidencia observacional	69
Consideraciones pedagógicas.....	70
La cosmología relativista: un universo por descubrir	72
Referencias.....	74
Anexos	77

...vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo.

J.L. Borges

Contextualización

Planteamiento del problema

El contexto problemático de la presente investigación se enmarca en el ciclo de profundización de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, respondiendo al objetivo principal de la línea de profundización La Enseñanza de la Física y la relación Física Matemática, la cual se enfoca en la enseñanza de la física moderna, entendiendo por *modernos* aquellos desarrollos científicos llevados a cabo a partir del siglo XX.

Para realizar una contribución que defienda este interés en el ámbito educativo donde desempeñan su labor los maestros de Física, es necesario que los maestros en formación cuenten con recursos académicos que les permitan construir bases de conocimiento sobre las áreas de física moderna que se pueden llevar al contexto escolar, con el fin de reflexionar también sobre los problemas en el aprendizaje y la enseñanza de dichos tópicos, siendo éste un tema relevante para la investigación actual en la didáctica de la Física en nuestro país, habida cuenta de que las temáticas que se priorizan en los contextos de educación básica y media abarcan, principalmente, los desarrollos en Física anteriores al siglo XX.

En este sentido, el presente trabajo se constituye como un material potencialmente útil para maestros de Física en formación que deseen iniciar o profundizar en el estudio de un importante campo de la Física que emergió con el desarrollo de la Relatividad General: la cosmología relativista. En aras de incentivar la introducción gradual de temáticas asociadas con la Relatividad en la educación escolar, se pretende mostrar una respuesta parcial a la pregunta sobre cuáles son las posibles imágenes de universo que nos brinda esta teoría moderna, pues es una cuestión que se puede abordar a modo de divulgación en cualquier contexto educativo.

Se espera así, que el lector tenga una visión panorámica en torno a modelos cosmológicos relativistas, particularmente sobre uno de los modelos que rige el panorama actual de la cosmología, el cual representa un universo en expansión acelerada. Así, la particularidad de este trabajo recae en la forma en que se desarrollará la caracterización del modelo cosmológico en cuestión, mediada por el esfuerzo de llevar a cabo la síntesis y recontextualización adecuadas para que los conocimientos teóricos adquiridos por el lector sean de utilidad en su desempeño pedagógico.

Sumado a lo anterior, parte de la problemática en torno al abordaje de temáticas derivadas de la Teoría de la Relatividad, implica cuestionarse cuáles son los elementos esenciales

que están a la base del tema a desarrollar, en este caso, un modelo de universo en expansión acelerada, con el fin de que la información expuesta sea clara sin que ello conlleve a la pérdida del rigor, atendiendo al interés primordial. Dos posibles vías pueden ser tomadas: enfatizar en los elementos de carácter teórico que posibilitan la construcción de este modelo o en las evidencias observacionales tras las cuales se puede caracterizar al universo y su evolución. A primera vista, se podría decir que la manera más sencilla de acercarse al tema es recurrir a lo que muestra la experiencia de forma más directa, es decir, la información que proporciona la cosmología observacional, pues ahondar en aspectos teóricos puede requerir un estudio mucho más exhaustivo. No obstante, tomar sólo una de estas dos posibles vías de conocimiento tiene consecuencias que, para efectos de este trabajo, se han considerado negativas; en primer lugar, desvincular la actividad experimental y observacional de los desarrollos teóricos resulta en una imagen errada de la actividad científica, pues el desarrollo de las teorías modernas, particularmente, se ha servido del uso conjunto de los resultados obtenidos a partir de ambas formas de investigación; por otra parte, no es posible aseverar que la falta de conocimientos o habilidades previas para encarar cierto tema impiden la vinculación de algunos elementos teóricos presentes en los modelos y teorías físicas. De lo anterior, surge la necesidad de hallar una forma de desarrollar la caracterización cosmológica propuesta que permita vincular aspectos teóricos sin requerir conocimientos bastos en Teoría General de la Relatividad o cosmología por parte del lector, recordando el interés pedagógico implícito en el trabajo.

Bajo estos criterios, los elementos que se han considerado esenciales para la comprensión del modelo cosmológico que se desea caracterizar, y que marcarán el curso de este trabajo, incluyen los conceptos de carácter geométrico que están a la base de la Relatividad General y que permiten modelar el universo como un objeto matemático; las magnitudes denominadas *parámetros cosmológicos* que permiten describir el estado actual del universo y su evolución; las observaciones sobre la evolución del universo y su interpretación desde la Relatividad General; los métodos empleados para hacer dichas observaciones y estimar parámetros cosmológicos, y el ajuste de datos observacionales a modelos predictivos.

Dicho esto, la problemática que ha dado lugar al presente desarrollo está contenida en la siguiente pregunta:

¿Como realizar una reconstrucción de los elementos esenciales para la comprensión de un modelo de universo en expansión acelerada mediante el uso de parámetros cosmológicos, vinculando la modelación teórica y las evidencias observacionales?

Metodología

Considerando que el uso de fundamentos relativistas para llevar a cabo el desarrollo propuesto demanda conocimientos sólidos en campos como la geometría diferencial, el cálculo tensorial y la topología, además de que la vinculación de material observacional requiere también ciertos conocimientos en astronomía, se ha optado por presentar aquí una reconstrucción de un modelo de universo en expansión acelerada mediante tres herramientas metodológicas que posibilitarán un desarrollo pedagógico del tema planteado.

A la primera de ellas se le ha denominado *simplificación semántica* y será fundamental en el desarrollo del capítulo 1, donde se abordarán las ecuaciones de campo de la relatividad general. Aunque los objetos que se presentan en este capítulo son matemáticos, desde el contexto cosmológico que nos ocupa, se asocian a objetos físicos y geométricos particulares, por lo que el uso de analogías y representaciones visuales resulta especialmente útil. Así pues, se considera que al describir desde una perspectiva física y geométrica entidades que surgen de un tratamiento principalmente matemático, se están presentando las bases teóricas requeridas desde un lenguaje más accesible en términos epistémicos para el lector.

La segunda herramienta empleada consiste en una *narrativa progresiva*; con ella, se parte de las nociones más sencillas requeridas para la comprensión del tema y se avanza paulatinamente a temas más complejos, con el fin de que el lector no se vea en la obligación de acudir a fuentes externas e interrumpir este estudio para dar sentido a las partes que lo estructuran. Además, se hace un esfuerzo por llevar una hilaridad histórica que permita comprender los acontecimientos más importantes que facilitaron la configuración de los modelos de universo en expansión acelerada.

La tercera y última herramienta empleada será una *presentación sintética de la información recopilada*, teniendo en cuenta que utilizar las bases de datos proporcionadas por misiones y proyectos de investigación en la cosmología observacional implica hacer una consulta exhaustiva y una lectura minuciosa de resultados que, por supuesto, no se espera que el lector tenga que repetir. En lugar de ello, se toman de las fuentes de información los elementos que más

aporten a este desarrollo y se presenta al lector un conjunto mucho más reducido y concreto de información que pueda ser interpretado mucho más fácil desde el contexto del trabajo.

Objetivos

General

Realizar una reconstrucción de los elementos esenciales para la comprensión de un modelo de universo en expansión acelerada mediante el uso de parámetros cosmológicos, vinculando la modelación teórica y las evidencias observacionales.

Específicos

- Presentar el papel de las ecuaciones de campo de la Relatividad General en el origen y desarrollo de la cosmología relativista
- Utilizar la solución de Friedmann- Lemaitre-Robertson-Walker a las ecuaciones de campo para obtener la métrica en la cual se basa el modelo de universo en expansión acelerada.
- Hacer una recopilación y selección de los datos obtenidas a partir de las misiones WMAP y Planck que registran valores recientes de los parámetros cosmológicos.
- Presentar una descripción de los métodos observacionales utilizados por las misiones WMAP y Planck para estimar el valor de los parámetros cosmológicos.
- Vincular los datos obtenidos al modelo cosmológico resultante de la métrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker para caracterizar el actual estado de evolución del universo

Antecedentes

Como antecedente principal para el desarrollo de este trabajo se toma la Tesis doctoral de España titulada *Medida de parámetros cosmológicos a partir de los datos de Dark Energy Survey*. Sánchez López, F. (2015), en la cual, se presenta una descripción de los fundamentos teóricos a partir de los cuales fue construido el modelo cosmológico estándar, mostrando los desarrollos matemáticos más importantes correspondientes al campo de la teoría general de la relatividad que permiten describir la métrica en la que se basa este modelo. En paralelo a estas descripciones formales, se muestran resultados obtenidos observacionalmente por sondas espaciales de alta precisión, a partir de los cuales es posible modelar la evolución pasada y presente del universo.

Un segundo referente en el que realiza el análisis de datos oficiales sobre la medida de datos relevantes en la cosmología, se titula *cálculo de los parámetros cosmológicos mediante los métodos mcmc de los datos de Planck 2018*. Ekajouan, H. (2021). De la Universidad de Cantabria, España. En este trabajo, se interpretan los valores obtenidos para algunos parámetros cosmológicos por la misión Planck y se realiza una exposición de los métodos empleados para ello, además de la forma de interpretar estos datos a través de métodos de simulación de Monte Carlo para modelar variables aleatorias basados en la estadística bayesiana.

Respecto a trabajos que contribuyan en la caracterización matemática de un modelo de universo en expansión acelerada, se considera la tesis de pregrado de la Universidad Pedagógica Nacional titulada *Caracterización de un potencial quintaesencia*, Gómez, F. (2007), En la cual se presentan los elementos matemáticos de la relatividad general más relevantes en la cosmología moderna, así como los modelos dados por la métrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker. Se realiza una descripción sobre el estado de expansión acelerada del universo, presentando un modelo de quintaesencia descrito formalmente como un campo escalar de presiones negativas que permite modelar tal estado de expansión en concordancia con los datos observacionales.

La importancia de los trabajos descritos anteriormente radica, en primer lugar, en que hacen una descripción progresiva de algunos elementos involucrados en la configuración del modelo estándar de la cosmología, basado en la expansión acelerada del universo. En este sentido, estos trabajos han aportado la segunda herramienta metodológica a la presente propuesta, pues en ellos se evidencia un tránsito desde elementos matemáticos aportados por la teoría general de la relatividad hasta datos y medidas experimentales, método que se ha adoptado en el presente trabajo para abordar lo que anteriormente se denominó *elementos esenciales* para la comprensión del modelo cosmológico aquí descrito. Así mismo, los dos primeros trabajos toman para sus análisis los datos proporcionados por Planck y WMAP, mostrando la relación existente entre estas estimaciones y la construcción de modelos cosmológicos. Así pues, se considera que los documentos en cuestión, si bien carecen de la primera y tercera herramientas metodológicas que aquí se emplearán, brindan un buen panorama sobre el modelo cosmológico de universo en expansión acelerada, lo cual apunta en la misma dirección que este trabajo.

De este modo, los antecedentes han aportado parte de la metodología empleada en el presente desarrollo y la disposición común que en ellos se encuentra de la evidencia teórica y

observacional ha servido como criterio en la selección de los desarrollos teóricos, métodos observacionales y uso de bases de datos cosmológicas empleados en este trabajo.

Introducción

La cosmología fundamentada en teorías científicas es un campo de estudio relativamente nuevo. El desarrollo de la relatividad general y la mecánica cuántica, particularmente, han presentado contribuciones importantes al respecto. Este trabajo se enmarca en la cosmología relativista, donde el universo se presenta como un objeto físico cuya evolución es posible caracterizar desde un punto en el tiempo hasta nuestros días, llegando incluso a propiciar la construcción de modelos que permiten predecir cómo seguirá evolucionando a partir del momento actual. Desde las predicciones cosmológicas que se derivan de la relatividad general, dos aspectos son importantes; la geometría del universo y su composición física. Describir estas características tomando como referente la evidencia observacional y ajustarlas a un modelo que permita describir el estado de evolución del universo es la intención de este trabajo.

Se partirá de los elementos proporcionados por la relatividad general para la construcción de modelos cosmológicos de carácter (mayormente) teórico y más tarde se hablará sobre algunos métodos observacionales empleados para estimar cantidades medibles, denominadas parámetros cosmológicos, que permiten caracterizar la historia cosmológica vinculando aspectos empíricos. Para esto último se acudirá a las bases de datos consolidadas por la misión espacial WMAP desarrollada por la NASA y la misión Planck de la Agencia Espacial Europea.

La resignificación del concepto de inercia desde principio de Mach hasta el principio de equivalencia

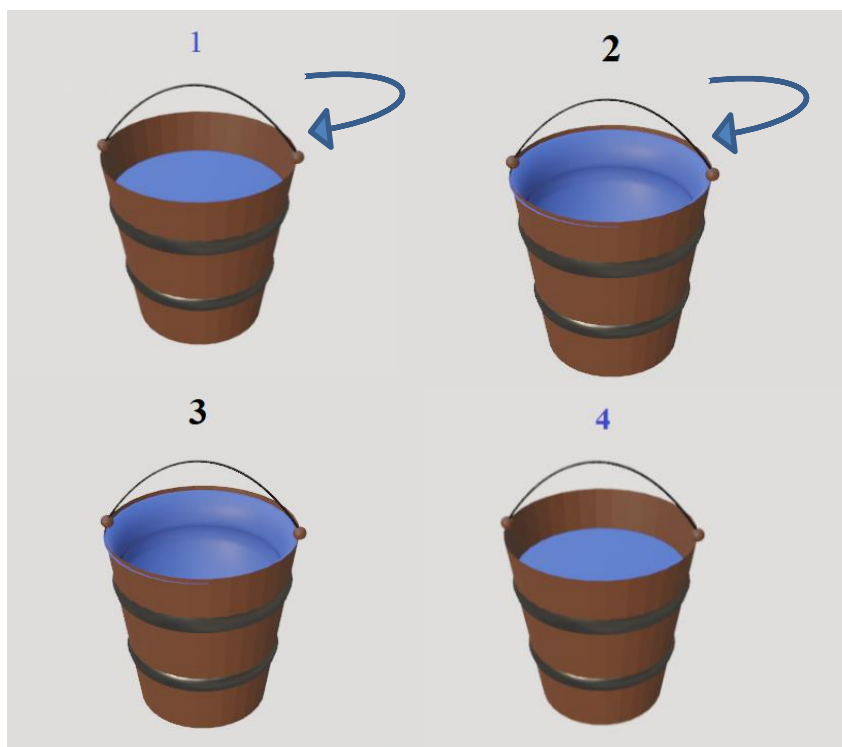
El aspecto fundamental en el cambio de paradigma que vino con el desarrollo de la física del siglo XX es la consideración del papel que juega el observador en la construcción de las teorías; los sujetos intervienen en los sistemas y los perturban en la medida en que los toman por objeto de estudio. Tal es el caso de la teoría de la relatividad que, como es sabido, tiene como una de sus máximas el abandono de la idea de absoluto, destacando la importancia de referir toda descripción mecánica a marcos de referencia. En este apartado se expondrán brevemente las ideas que dieron lugar a este cambio de pensamiento y su influencia en el desarrollo de la teoría general de la relatividad.

En su magna obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Los principios matemáticos de la filosofía natural), Isaac Newton establece un método para detectar el movimiento absoluto a través de un experimento que consiste en hacer rotar un balde con agua que se encuentra suspendido por una cuerda. Lo que se observa es lo siguiente; en principio, el balde rota pero el agua se encuentra en reposo, por lo que su superficie permanece plana; posteriormente, el balde comunica su movimiento al agua y ésta empieza a rotar hasta alcanzar el mismo estado de movimiento del balde (es decir, hasta que ambos están en reposo uno respecto al otro), como consecuencia de su rotación, la superficie del agua adquiere una forma cóncava; luego, el balde se detiene, pero el agua conserva su movimiento rotacional, por lo cual, su superficie sigue siendo cóncava y, finalmente, el agua se detiene volviendo a estar en reposo en relación con el balde y a tener su superficie plana. Las cuatro fases del proceso se ilustran en la figura 1. Ahora bien, pensemos en un observador que se mueve con el balde en todo momento ¿cómo puede saber cuándo el agua se está moviendo en realidad respecto al espacio absoluto o cuando la rotación que observa es aparente debida al movimiento relativo entre el balde y el agua? Newton lo explica como sigue. Cuando el agua adquiere una verdadera rotación aparece una fuerza de inercia (centrífuga) que empuja el agua hacia los bordes del balde, el movimiento en el agua causado por esta fuerza permite identificar que ésta rota en realidad y no por un efecto de movimiento aparente. De esta forma, cuando el balde ha transferido todo su movimiento al agua y el observador que se mueve con el balde ve que ésta se encuentra en reposo podrá identificar, pese a ello, que la superficie del agua es cóncava y, por ende, realmente está rotando, o lo que es lo mismo, que, a pesar de observar el sistema en reposo, éste no es inercial. De la

misma forma, en los primeros instantes, cuando el balde gira, pero el agua no, el observador que se mueve con el balde observará que la superficie es plana y, por ende, aunque la vea rotar, sabrá que ésta se encuentra en reposo. (Newton, I. 1686)

Figura 1

Experimento del balde de Newton.



En el anterior ejemplo se ilustra cómo desde el contexto clásico, cuando se hace referencia a marcos inerciales se alude a aquellos que se encuentran en reposo o moviéndose a velocidad constante y en línea recta respecto al espacio absoluto; de ahí que la idea de marco inercial, en la mecánica clásica esté ligada inseparablemente a la idea de estados de movimientos privilegiados. Para Newton, se puede distinguir con claridad si un sistema es inercial, o, por el contrario, se encuentra acelerado o en rotación con respecto al espacio absoluto debido a la aparición de las llamadas fuerzas inerciales o ficticias en los marcos no inerciales. En consecuencia, siempre sería posible distinguir el movimiento absoluto del aparente.

A finales del siglo XIX Ernst Mach debate el razonamiento utilizado por Newton para asociar la aparición de fuerzas inerciales al movimiento absoluto. Arguye que el experimento del balde no se podría realizar en un universo vacío, ya que el comportamiento del agua es una consecuencia de su interacción con otros cuerpos, especialmente, aquellos que se encuentran más

próximos a él. (Mach, E. 1893) Piénsese, por ejemplo, que, si el agua no fuera afectada por el campo gravitacional de la tierra, una vez empieza a ser cóncava su superficie, seguiría subiendo por las paredes del balde indeterminadamente. Este argumento, nos llamará la atención en lo sucesivo, ya que en él se identifica el germen de una de las ideas fundamentales de la relatividad general: Los cuerpos presentes en el universo afectan mutuamente sus comportamientos mecánicos; no podemos referirnos a estados físicos absolutos de los sistemas, sino, más bien, a estados relativos definidos en relación con su entorno y la constitución misma del universo. Más importante aún, las propiedades mecánicas de los cuerpos sólo aparecen en relación con otros objetos. Para Mach, entonces, la distribución de materia de todo el universo es responsable del estado de movimiento de cualquier cuerpo, nótese, bajo este razonamiento, cómo los denominados “marcos inerciales” no están definidos con relación a un espacio absoluto o marco de referencia privilegiado, sino que son el resultado de su interacción con otros sistemas. Esto es lo que se conoce como principio de Mach (D’Inverno, R. 1992).

El análisis sobre los marcos inerciales resulta de gran importancia para comprender cómo se desarrolló la teoría de la relatividad general. El significado de la relatividad especial radica en la equivalencia que existe entre marcos que se encuentran relativamente en reposo o moviéndose a velocidades constantes, es decir; las leyes de la física tienen la misma forma para cualquier observador inercial. Sin embargo, para que la relatividad constituya una teoría completa de la mecánica debe incluir también los marcos no inerciales.

Como Galileo concluyó, todos los cuerpos que se someten a la acción de un campo gravitacional sufren la misma aceleración, ¿cómo explicamos este resultado? Según la mecánica newtoniana, los cuerpos poseen una propiedad denominada masa inercial que les hace resistirse a cambiar su estado de movimiento, pero además poseen una masa denominada gravitacional que les hace responder a la acción de un campo de gravedad. Si la aceleración de los cuerpos no depende de sus propiedades, significa que el efecto de la masa que responde al campo se contrarresta con el efecto de la masa que se opone al cambio de movimiento provocado por el mismo; esto es, la masa inercial y la masa gravitatoria son equivalentes.

Las fuerzas a las que nos hemos referido al hablar del principio de Mach aparecen como consecuencia de la masa inercial, mientras que la fuerza que experimentan los cuerpos debido al campo depende de su masa gravitacional y dado que ambas masas son iguales es posible pensar que la gravedad es equivalente a una fuerza inercial. De ello se deriva que un marco donde se

experimenta una aceleración uniforme es equivalente a un marco en reposo relativo sometido a un campo gravitacional. Esto se denomina principio de equivalencia y es una de las ideas fundamentales que llevaron a Einstein a la construcción de la relatividad general (Einstein, A.1934).

Nótese cómo la mecánica de Newton explica los movimientos inerciales y aquellos producidos como consecuencia de la gravedad. De manera correspondiente, la relatividad general incorpora la gravedad a la teoría de la inercia construida desde la relatividad especial.

Para finalizar, mencionemos la consecuencia que nos interesa para el desarrollo que presentaremos en lo que sigue. En la relatividad especial las medidas se realizan a través de la métrica de Minkowski, que representa el movimiento de sistemas inerciales a través de líneas rectas. No obstante, al generalizar la relatividad se acude a sistemas de coordenadas generales que representan observadores con distintos estados de movimiento (no necesariamente inerciales), en cuyo caso la forma de medir las distancias depende de las coordenadas, de donde se entiende que las descripciones geométricas tomarán un papel fundamental tras haber introducido la gravedad en la teoría.

Hasta aquí, hemos trazado la siguiente línea de argumentos: El desarrollo de la relatividad demandó incluir la gravedad dentro de la teoría de la inercia que se había fundado bajo los planteamientos de Mach y la relatividad especial. Al establecer el principio de equivalencia se llega a la conclusión de que la descripción del movimiento debido a la acción de un campo gravitacional depende de la geometría del espacio-tiempo. Aclaremos, sin embargo, que al exponer de esta forma los razonamientos no se pretende tomar por errada la concepción formalizada por Galileo y Newton sobre la inercia, sino hacer un análisis más profundo de su significado y sus consecuencias a la luz de los planteamientos de la física del siglo XX, lo cual lleva a otorgarle un estatus más esencial dentro de la naturaleza y, por ende, en las leyes de la física.

En el capítulo 1 veremos cómo la teoría de la relatividad da lugar a un nuevo cuerpo formal de ecuaciones que describen el comportamiento de los cuerpos en relación con la geometría del espacio-tiempo circundante.

CAPÍTULO 1

Las puertas a la modelación geométrica del universo: las ecuaciones de campo de Einstein

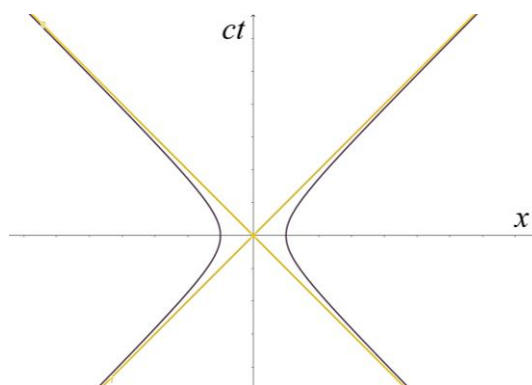
Hemos concluido dos aspectos importantes que serán útiles a la hora de construir un sistema matemático que describa la nueva visión de la mecánica a la luz de los planteamientos de Einstein; en primer lugar, se requiere una expresión que manifieste el comportamiento de los cuerpos respecto al fenómeno de la gravedad y, adicional a ello, sabemos que dicha expresión debe manifestar el significado físico de los sistemas de coordenadas.

Establezcamos una comparación con la teoría gravitacional de Newton con el fin de comprender los aspectos involucrados en el cambio de paradigma presente en la teoría de la relatividad. En primer lugar, es necesario destacar que la gravedad newtoniana se presenta como un fenómeno instantáneo y de acción a distancia; en este sistema mecánico no existe aún el concepto campo. Con el desarrollo del electromagnetismo que tuvo lugar durante el siglo XIX y, especialmente, con el trabajo de Michael Faraday este concepto se consolidó como uno de los más importantes de la física, con lo cual, las teorías que le sucedieron buscaban, de cierta forma, involucrar el campo dentro de las explicaciones de los fenómenos físicos. De ello se entiende el hecho de que Einstein haya concebido que la nueva teoría de la gravedad debía expresar el fenómeno gravitatorio como la acción efectuada por un campo. Detengámonos un momento para examinar un concepto fundamental de la relatividad especial. En la mecánica clásica, tanto el espacio como el tiempo aparecen como entidades absolutas e independientes una de la otra; el espacio posee tres dimensiones que pueden ser representadas a través de la geometría euclídea y el formalismo de Descartes mediante tres ejes coordenados perpendiculares entre sí. No obstante, de los axiomas de la relatividad especial se deduce que las medidas que distintos observadores realizan del espacio y el tiempo dependen de su estado de movimiento y que ambas entidades hacen parte de un mismo ente denominado Espacio-tiempo por el matemático alemán Hermann Minkowski, quien explicaba que, de forma análoga a como un espacio de tres dimensiones se constituye de infinitos espacios de dos dimensiones, el espacio-tiempo cuatridimensional puede concebirse como el conjunto de los infinitos sistemas espaciales tridimensionales en los que se encuentran todos los posibles observadores (como se citó en Sánchez, 1983). En este sentido, Minkowski elabora una representación que se aproxima a las construcciones euclídeas, pero involucra la dimensión temporal dentro de una misma representación geométrica, como se muestra en la figura 2; es lo que se conoce como los diagramas de Minkowski, que representan

las dimensiones espaciales en el eje de las abscisas y la dimensión temporal en el eje de las ordenadas.

Figura 2

Espacio-tiempo de Minkowski



Nota. El eje horizontal de este diagrama representa una de las dimensiones espaciales y el vertical la dimensión temporal. Desde el punto de vista de la relatividad especial, ambas dimensiones son equivalentes e intercambiables, es decir, el tiempo y el espacio tienen la misma naturaleza ontológica. Las líneas rectas representan la trayectoria en el espacio-tiempo de una partícula que se mueve a la velocidad de la luz.

Con los elementos anteriores podemos señalar que el ente a través del cual se propaga la acción gravitatoria es el espacio-tiempo, es decir, éste se identifica con el campo gravitacional en la teoría de la relatividad general. Con esto, el lector puede tener una idea del porqué al sistema matemático en cuestión se le denomina ecuaciones de campo.

Otra consecuencia de la relatividad especial que se requiere traer a colación es la equivalencia entre la masa y la energía, a través de la conocida ecuación $E=mc^2$, resultado que Einstein utilizó para definir operativamente la masa como una medida de la energía. Tal interpretación se utilizará en lo posterior de este trabajo, a falta de una definición ontológica bien establecida sobre ambos conceptos.

Continuemos con la comparación de aspectos fundamentales de la teoría de Newton con la de Einstein. En la ley de gravitación universal Newton establece la proporcionalidad entre el contenido de masa de un sistema y la acción gravitatoria que ésta genera en otros cuerpos; la nueva visión de la gravedad se sintetiza a través de los anteriores elementos como sigue; la relatividad general es, en esencia, una teoría geométrica de la gravedad; el concepto de fuerza,

que en la mecánica newtoniana aparecería como la causa del movimiento, en la teoría de la relatividad sería reemplazado por la noción de deformación del espacio-tiempo, de allí la necesidad de mostrar, a la luz de las matemáticas, cuál es la relación entre la geometría del espacio-tiempo y el comportamiento mecánico de todas las formas de materia y energía presentes en el universo. Tomando en cuenta estos aspectos, Einstein llega, tras un arduo trabajo, a la siguiente expresión:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (1)$$

que se conoce como ecuaciones de campo de la relatividad especial y está escrita en lenguaje tensorial¹.

De acuerdo con lo dicho, la parte izquierda de esta expresión se refiere al aspecto geométrico de la gravedad, manifiesto a través del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual se encuentra acompañado en el segundo término de un escalar de curvatura R . El significado de Λ se discutirá más adelante. La parte derecha expresa el contenido de energía presente en el sistema que causa el efecto gravitacional a través del tensor de materia energía $T_{\mu\nu}$. Con ello, se hace visible la relación entre la materia y la perturbación generada en el Espacio-tiempo, a su vez que el efecto mecánico de dicha deformación sobre los cuerpos presentes en el mismo. Para brindar una mejor comprensión, en el siguiente apartado se describirá con un poco más de profundidad el significado físico de estos tres tensores.

El tensor métrico

En nuestra tarea de realizar una descripción geométrica del universo, es necesario establecer un elemento matemático que nos permita traducir la información de las medidas que se realizan de un mismo objeto desde diferentes geometrías. Para comprender esto, es necesario recordar que, superficies con una curvatura no nula, tienen una geometría no euclídea, por lo cual

¹ Un tensor, grosso modo, es un objeto matemático que describe una magnitud de forma general considerando todos los aspectos posibles en que ésta varía. Las magnitudes que sólo se describen a través de un número se llaman escalares, aquellas que presentan una direccionalidad en el espacio se llaman vectoriales y una forma más generalizada para expresar magnitudes más complejas y que requieren, por ende, más información para ser descritas, son las magnitudes tensoriales. En las ecuaciones de campo de la relatividad, las letras que están acompañadas de los subíndices $\mu\nu$ son tensores. Este formalismo matemático es esencial en el marco de la teoría de la relatividad, ya que, como se postula en la relatividad especial, las leyes de la naturaleza no deben depender del marco de referencia del observador y los tensores son funciones que poseen la propiedad de mantenerse invariantes ante los cambios de coordenadas, de forma que diversos observadores que describan sus mediciones de forma tensorial, tras aplicar unas determinadas reglas de transformación, estarán de acuerdo en sus resultados.

una esfera y un plano, por ejemplo, son superficies métricamente distintas. Esto se puede visualizar si tomamos una superficie plana, como una hoja de papel, e intentamos convertirla en otro objeto geométrico; es fácil convertir la hoja en un cilindro uniendo dos de sus extremos paralelos, en cambio, no es posible convertirla en una esfera, ya que este proceso implicaría estirar la hoja en algunas regiones y contraerla en otras, dicho de otra forma, no se puede cubrir una esfera con un plano sin modificar su geometría intrínseca.

Figura 3

Superficie esférica cubierta por un plano



Nota. La hoja se dobla y se arruga, ya que las métricas de ambas superficies son distintas.

Esto quiere decir que, para saber cuánto mide una distancia sobre la superficie de la esfera no podemos utilizar directamente la misma regla con la que medimos las distancias en el espacio euclídeo, ya que esto implicaría deformarla. No obstante, si somos capaces de encontrar una equivalencia entre nuestra regla y la que utiliza un habitante de la esfera, podemos medir distancias sobre dicha geometría con nuestra regla. El objeto que nos permite hallar esta equivalencia entre las reglas de una y otra geometría es, precisamente, el tensor métrico. Esta situación es válida para cualquier tipo de geometría, lo que quiere decir que podemos utilizar el tensor métrico para traducir las características métricas de un espacio al lenguaje de otro mejor conocido; en nuestro caso, el espacio euclídeo.

Con esto, en términos resumidos, el tensor métrico contiene la información sobre la transformación que se debe aplicar a un espacio para convertirlo en otro; en nuestro ejemplo, nos dice qué transformación debemos aplicar a una esfera para convertirla en un plano, ya que el objeto que transforma la regla con que estamos midiendo, transforma todo el espacio. Y puesto

que las transformaciones se expresan en forma de matrices, el tensor métrico estará dado por una matriz cuadrada, donde el número de filas y columnas es igual al número de dimensiones del espacio transformado. Esto tiene que ver con el hecho de que la matriz contiene la información de lo que ocurre a cada coordenada linealmente independiente del espacio como consecuencia de la transformación. En el ejemplo dado, el tensor métrico estaría dado por una matriz de 2x2, ya que la información requerida está dada por cuatro elementos; dos sobre el cambio efectuado en la coordenada X y dos sobre el cambio en la coordenada Y. Si generalizamos esta situación a un espacio de n de dimensiones, la matriz en cuestión tendría la forma que se muestra en la expresión (2). Más adelante se indicará el significado de cada elemento.

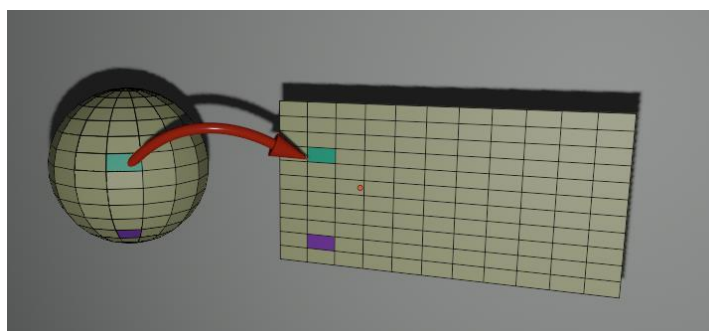
$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

De esta forma, se entiende que el tensor métrico euclídeo sea la matriz identidad, ya que no estamos aplicando ninguna transformación para obtener de nuevo el espacio euclídeo.

Además, para realizar esta transformación geométrica es necesario aplicar distintas deformaciones a lo largo de toda la superficie. En el caso de la esfera, las regiones más cercanas a dos puntos diametralmente opuestos (por ejemplo, los polos de la superficie terrestre) deben estirarse más que el resto para trasladar la superficie de la esfera al plano. De este hecho se sigue que el tensor métrico sea una función de las coordenadas, puesto que se requiere una información precisa de cómo transformar cada pequeña región de la superficie. (Dialect, 2022).

Figura 4

Transformación de las regiones de una esfera en respectivas regiones en un plano

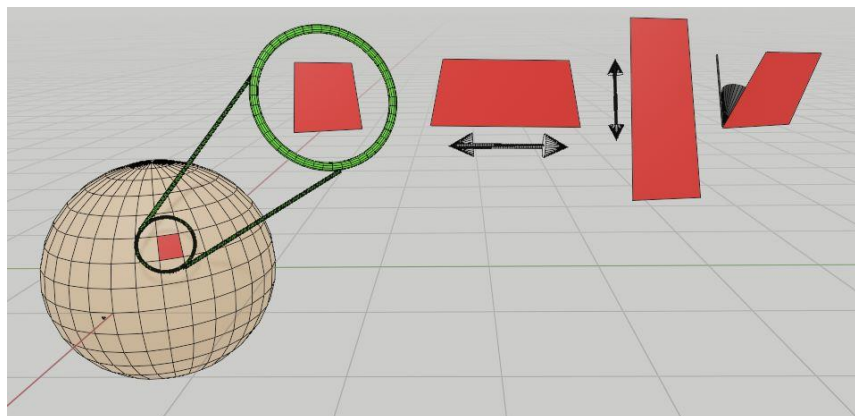


Nota. Para traducir las medidas que se realizan desde la esfera, es necesario aplicar una transformación que estire más algunas regiones que otras.

Ya que la regla que tomamos siempre como referente propio para medir distancias en distintas geometrías es la euclídea, la única forma de realizar esta traducción geométrica es dividir la superficie en regiones infinitesimales, de tal suerte que podamos transformar cada una de ellas estirando o contrayendo el espacio e inclinando los ejes coordenados.

Figura 5

Posibles transformaciones lineales sobre una región infinitesimal de la esfera



Nota. Las regiones diferenciales de la superficie son localmente planas, por ende, cada una de ellas se puede transformar en un correspondiente elemento diferencial del plano variando su longitud en cada uno de los ejes o inclinándose un determinado ángulo respecto a ellos.

Lo anterior nos ofrece una interpretación particular del significado de los elementos del tensor métrico. Los elementos de la diagonal codifican la magnitud en que se debe escalar cada sección diferencial en los respectivos ejes coordenados, mientras que los elementos fuera de la diagonal brindan información sobre el ángulo de torsión de los ejes. A su vez, esto nos permite inferir que el tensor métrico debe ser simétrico, condición expresada mediante la igualdad $g_{ij} = g_{ji}$, puesto que la torsión se describe sólo mediante un ángulo entre cada par de ejes. Por ejemplo, el tensor métrico que transforma un espacio arbitrario de tres dimensiones en un espacio euclídeo tendría la siguiente representación:

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{Factor de cambio} & \text{torsión} & \text{torsión} \\ \text{de magnitud en el eje X} & \text{entre los ejes X e Y} & \text{entre los ejes X y Z} \\ \text{torsión} & \text{Factor de cambio} & \text{torsión} \\ \text{entre los ejes Y y X} & \text{en la magnitud del eje Y} & \text{entre los ejes Y y Z} \\ \text{torsión} & \text{torsión} & \text{Factor de cambio} \\ \text{entre los ejes Z y X} & \text{entre los ejes Z y Y} & \text{En la magnitud del eje Z} \end{array} \right)$$

Esta interpretación se puede extrapolar a cualquier superficie geométrica con un número n de dimensiones.

Podemos concluir, entonces, que el tensor métrico permite medir un elemento diferencial de longitud (denotado como ds) sobre una superficie con una geometría determinada, dándonos una relación de equivalencia entre la forma de medir en dicha geometría y la forma de medir en la geometría plana. El cuadrado de este diferencial de longitud, que en lo posterior llamaremos métrica, se expresa de la forma:

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j \quad (3)$$

Donde hay una sumatoria implícita sobre los subíndices i y j . Así, dada la matriz que representa el tensor métrico euclídeo en tres dimensiones, obtenemos métrica como sigue:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ya que los elementos fuera de la diagonal son cero, sólo se realiza la sumatoria de las componentes del tensor métrico que conforman la diagonal, es decir, cuando los subíndices i y j son iguales; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, siendo la métrica:

$$ds^2 = g_{11} (dx_1 dx_1) + g_{22} (dx_2 dx_2) + g_{33} (dx_3 dx_3) \quad (5)$$

donde hemos denotado x como dx_1 , y como dx_2 y z como dx_3 , de modo que

$$ds^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6)$$

Lo cual, como era de esperarse, nos dice que las distancias sobre una geometría plana se miden a través del teorema de Pitágoras. Independientemente del tipo de geometría desde el cual estamos realizando la medición de distancias, el valor de la métrica es el mismo, lo que cambiará en cada caso son las componentes g_{ij} del tensor métrico.

Ahora bien, conocer las componentes del tensor métrico es fundamental para completar la descripción geométrica expresada en las ecuaciones de campo. Como hemos visto, la diferencia geométrica entre dos tipos distintos de geometría se puede describir con bastante precisión encontrando una regla de equivalencia entre las formas de medir en ambas geometrías, lo que quiere decir, en pocas palabras, que encontrar el tensor métrico de una geometría particular nos da una caracterización general de la misma. No obstante, para dar una caracterización más específica se requieren otros objetos matemáticos, como el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, que serán descritos a continuación. Estos tres

objetos están dados en términos del tensor métrico y sus variaciones, de ahí la importancia de conocer, como primera medida, este tensor.

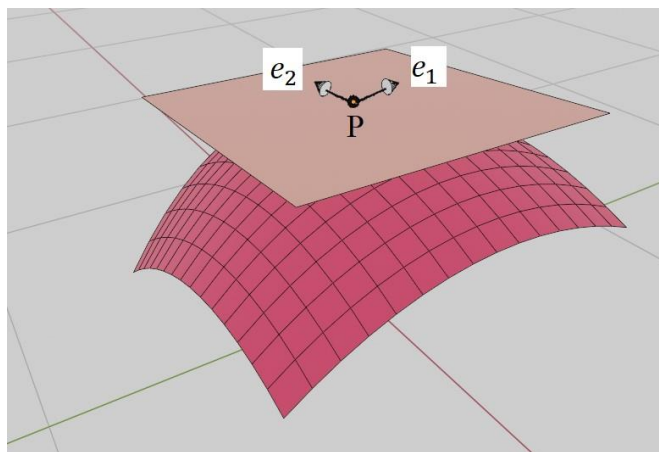
Pese a los ejemplos en dos y tres dimensiones que se han dado en esta breve explicación, no hay que perder de vista que la geometría que buscamos describir es la de un espacio-tiempo cuadridimensional, por ende, lo que buscamos expresar es la forma en que se miden distancias en el espacio-tiempo dada su geometría como consecuencia de la presencia de materia y energía.

El tensor de Riemann

Hemos dicho, hasta ahora, que el efecto gravitacional producido por una distribución determinada de materia se manifiesta físicamente como una curvatura. Debido a este fenómeno, la geometría que utilizaremos para modelar el campo gravitacional no será la euclídea. El espacio-tiempo de la relatividad general se puede modelar como una variedad pseudoriemanniana; entiéndase una variedad como un objeto geométrico caracterizado por poseer una determinada curvatura en un número de dimensiones cualquiera, una variedad de dos dimensiones, por ejemplo, es una superficie que posee un espacio bidimensional tangente en cada punto.

Figura 6

Espacio tangente a una variedad en un punto



No obstante, el lector deberá hacer una abstracción de este concepto a un número de dimensiones mayor, ya que la variedad en cuestión posee cuatro dimensiones; tres espaciales y una temporal. Se dice que ésta es pseudoriemanniana porque los espacios tangentes a cada punto de la misma poseen la métrica de Minkowski. En nuestro ejemplo, el espacio tangente a la variedad en el punto P está dado por el plano que tiene como base los vectores

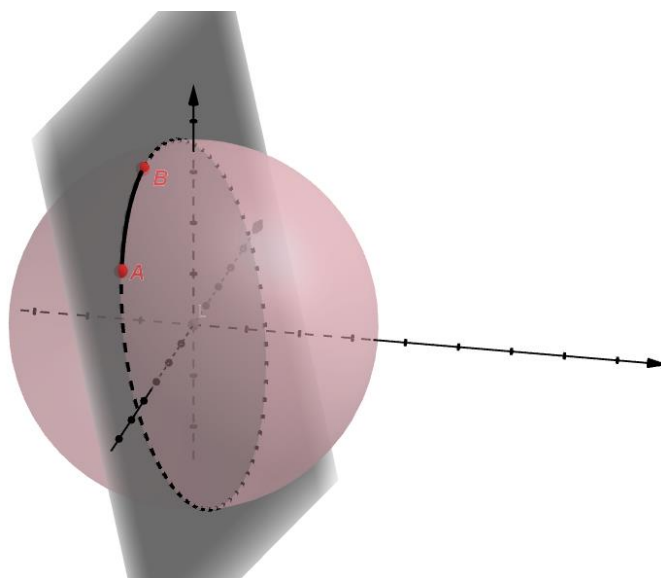
ortonormales e_1 y e_2 , es decir, un espacio con una métrica euclídea, pero al considerar la dimensión temporal con el mismo estatus ontológico que las tres espaciales, es necesario utilizar la métrica de la relatividad especial, por ende, decimos que cualquier espacio tangente será pseudoeuclídeo o minkowskiano.

La curvatura que nos interesa hallar, asociada a una distribución determinada de masa, está dada por el tensor de Riemann, que describe cómo cambian los vectores contenidos en los espacios tangentes de la variedad al desplazarse a lo largo de una trayectoria.

Según el quinto postulado de la geometría euclídea, por un punto externo a una recta pasa una única paralela, es decir, una única recta que, siendo prolongada indefinidamente, no corta a la otra en ningún punto. No obstante, cuando analizamos otros tipos de geometría vemos que el postulado no se cumple. Por ejemplo, sobre la superficie de una esfera, la trayectoria más “recta” posible entre dos puntos, denominada geodésica², se obtiene a partir de la intersección entre la esfera y el plano que pasa por estos dos puntos y el centro de la esfera, es decir, un arco de circunferencia máxima. (figura 7), De modo que todo par de rectas sobre una superficie esférica se intersecan, del mismo modo en que todos los meridianos de la esfera terrestre se intersecan en los polos. Esto significa que, en una geometría esférica, por cualquier punto externo a una recta no pasa ninguna paralela, como se puede apreciar en la figura 8.

Figura 7

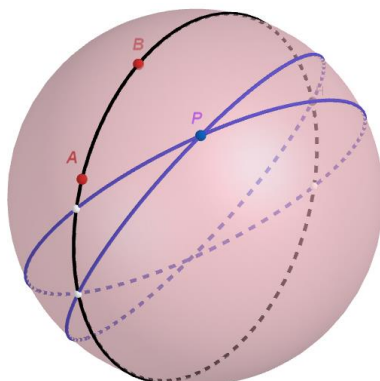
Geodésica en una esfera definida por dos puntos



² Esta trayectoria corresponde al recorrido de mínima acción entre dos puntos sobre la superficie.

Figura 8

dos geodésicas que pasan por un punto externo a una geodésica dada sobre una esfera



Nota. Se puede ver con facilidad que cualquier geodésica trazada por un punto externo cortará a la geodésica definida por A y B.

Análogamente, sobre la superficie de un hiperboloide, la trayectoria más recta posible entre dos puntos surge de la intersección entre el hiperboloide y el plano que pasa por estos dos puntos y el origen (es decir, el punto de intersección de las asíntotas del hiperboloide) estas trayectorias son hipérbolas como se observa en la figura 9 pero, contrario a la geometría esférica, existen varias de estas hipérbolas que no se intersecan las unas a las otras, lo cual quiere decir que por un punto externo a una recta pasa más de una paralela.

Figura 9

Geodésica en un hiperboloide definido por dos puntos

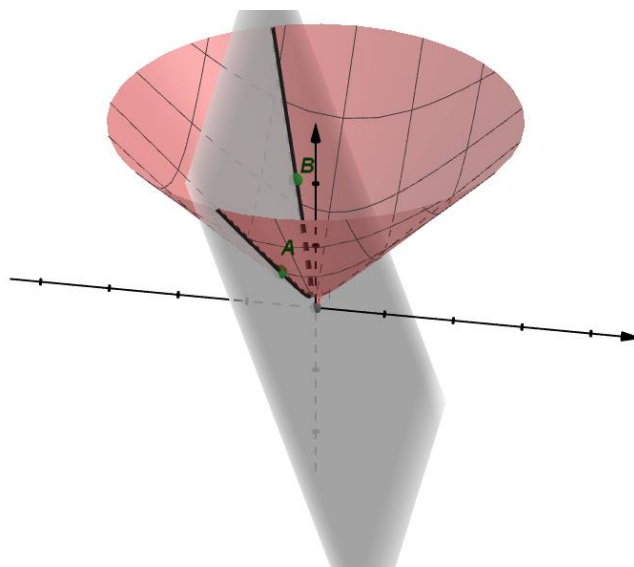
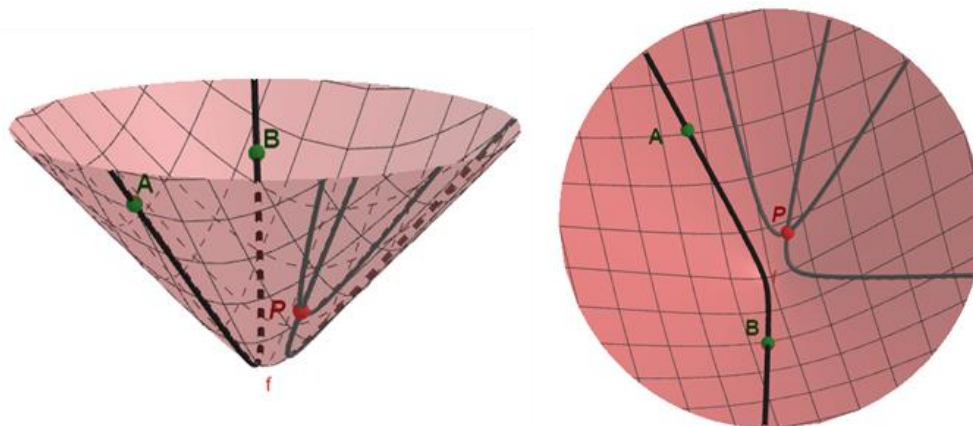


Figura 10

Vistas respectivas lateral y superior de dos geodésicas que pasan por un punto externo a una geodésica dada sobre un hiperboloide



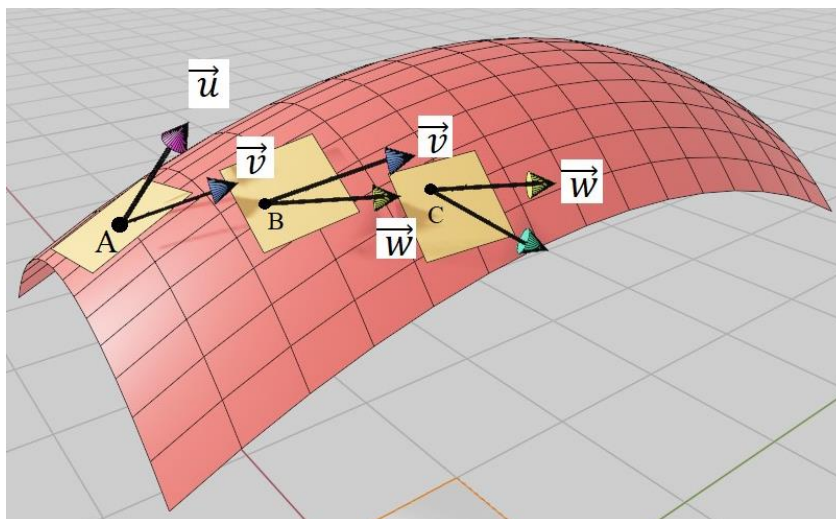
La negación del quinto postulado de Euclides a través de estos dos ejemplos es vital para la comprensión de otros tipos de geometría.

Podemos profundizar un poco más en el concepto de paralelismo referido a distintas superficies preguntándonos, por ejemplo, cómo se transportaría un objeto a través de una trayectoria de forma que se mantenga siempre paralelo a su orientación inicial. De entrada, encontramos un problema en ello, ya que, dependiendo de la geometría en cuestión, podemos encontrar más de una trayectoria posible para desplazar el objeto o ninguna. La solución a este problema radica en redefinir la noción de paralelismo en las geometrías no euclídeas; la ambigüedad desaparece si aplicamos el concepto de paralelismo inherente a la geometría de la superficie en lugar del que utilizamos usualmente en un espacio tridimensional euclídeo. Esto quiere decir que es necesario diferenciar entre la descripción geométrica que hace un observador que se encuentra fuera de la superficie y uno que se encuentra sobre ella. La esfera, por ejemplo, es una variedad de dos dimensiones, por ende, para un observador que se encuentra sobre ella no existe la tercera dimensión que percibe el observador externo. Estas dos formas de describir geoméricamente la superficie se denominan geometría extrínseca (la descrita por el observador externo) y geometría intrínseca (la descrita desde la superficie misma). Es por ello que lo que cada uno de los dos observadores denomina paralelo son cosas distintas.

Para establecer la forma de desplazar paralelamente un objeto se recurre a desplazamientos infinitesimales. Pongamos como ejemplo la superficie que se muestra en la figura 11 e intentemos transportar paralelamente el vector \vec{u} desde el punto A hasta el punto C.

Figura 11

Transporte paralelo de un vector sobre una variedad de dos dimensiones



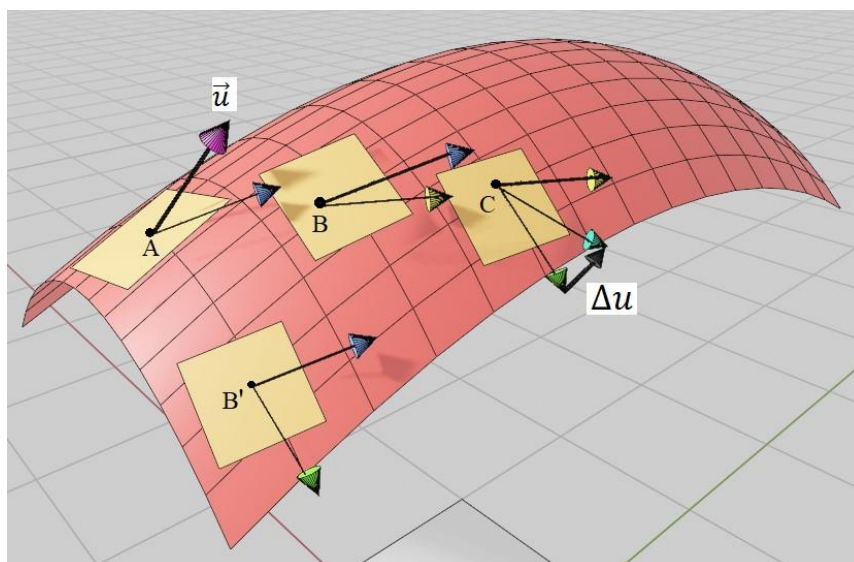
En principio, debemos proyectar el vector \vec{u} sobre el plano tangente a la superficie en el punto A; a esta proyección la llamamos \vec{v} . Posteriormente, desplazamos el vector hasta un punto muy próximo (B) y lo proyectamos de nuevo sobre el plano tangente en este punto (llamamos a esta proyección \vec{w}). Desplazamos este vector una distancia infinitesimal y repetimos el proceso anterior. Con esto garantizamos que un habitante de la superficie vea el vector apuntando en la misma dirección en todo momento, a pesar de que nosotros no lo veamos de la misma forma.

Ya que el transporte paralelo del vector implica la proyección sobre planos tangentes, el cambio en la dirección del vector transportado visto desde el espacio tridimensional externo, dependerá de qué tanto cambian estos planos tangentes a medida que nos desplazamos sobre la variedad en distintas direcciones. El grado de curvatura de una variedad será proporcional a la tasa en que cambia la dirección de estos planos con respecto a los distintos ejes coordenados. Esto nos permite concluir que la noción de paralelismo sobre distintas variedades es un buen indicador de sus propiedades geométricas.

Podemos transportar el vector \vec{u} de forma paralela hasta el punto C por dos trayectorias distintas; ABC o $AB'C$; en ambos casos, el cambio en la dirección del vector al llegar al punto C es diferente. Esta discrepancia entre ambos resultados puede ser expresada a través de un nuevo vector que sea la resta de los dos vectores resultantes. Podemos aplicar este mismo procedimiento sobre cualquier variedad para caracterizar su curvatura local.

Figura 12

Transporte paralelo de un vector sobre una superficie a través de dos trayectorias distintas

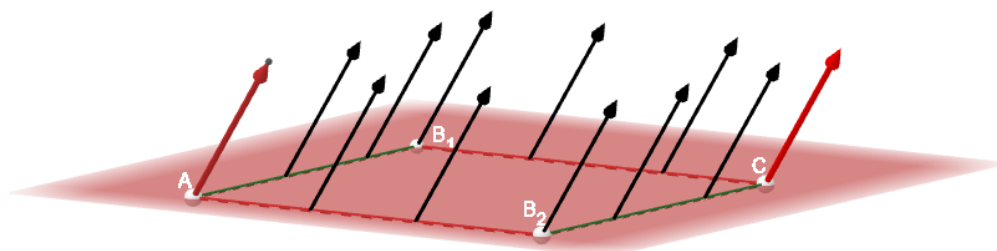


Nota. El vector Δu representa la diferencia entre el vector transportado a lo largo de las dos trayectorias señaladas.

Nótese, por ejemplo, que, en un plano, un vector que se transporta paralelamente se mantiene invariante independientemente de la trayectoria a lo largo de la cual se desplace, por lo que la diferencia entre dos vectores llevados hasta el punto R es cero, tal como se muestra en la figura 13. Cuanto más curvada esté una superficie mayor será dicha diferencia, entonces podemos decir que ésta es una medida de cuán alejada está la región de ser un espacio euclídeo.

Figura 13

Transporte paralelo de un vector sobre un espacio euclídeo



El tensor de Riemann es un elemento matemático que da cuenta de esta diferencia, por lo tanto, se expresa a través de una resta entre elementos escritos en términos de las coordenadas. Hemos tomado como ejemplo un vector que se desplaza sobre una variedad de dos dimensiones, no obstante, es fundamental no perder de vista que el objeto que queremos modelar geoméricamente es el espacio-tiempo, es decir, una variedad de cuatro dimensiones, por lo cual, la generalización de transportar paralelamente un vector implica una mayor complejidad en la medida en que todo debe estar expresado en términos de cuatro coordenadas. Por ello, el tensor de Riemann se expresa a través de cuatro índices, ya que para describir la geometría de la variedad en cuestión se necesita conocer la diferencia en un elemento que se desplaza por diferentes trayectorias a lo largo del sistema de cuatro coordenadas establecido.

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i + \Gamma_{jk}^m + \partial \Gamma_{ml}^i \quad (7)$$

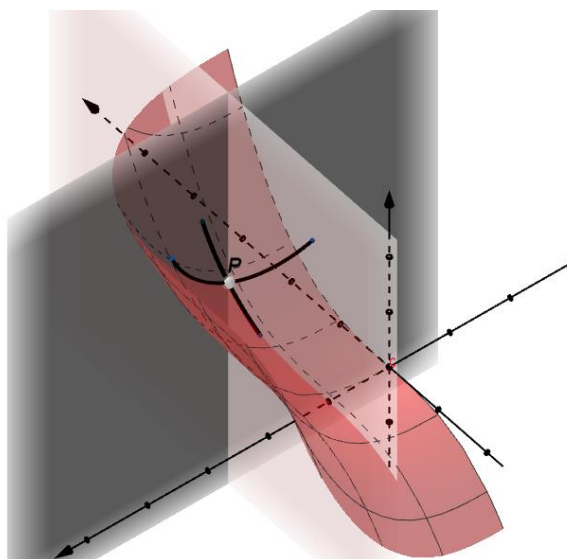
Tensor y escalar de Ricci

Como se ha visto con anterioridad, el tensor de Riemann brinda información muy específica sobre la curvatura de una variedad en cualquier número de dimensiones. Una forma simplificada de este tensor, nos dará información igualmente importante para describir la curvatura en términos de sus características más generales, este elemento es el tensor de Ricci, el cual describe las curvaturas principales de la variedad. Si cortamos, por ejemplo, una superficie cualquiera utilizando planos perpendiculares, obtenemos curvas que dan indicio de la geometría de la variedad original en direcciones independientes³.

³ Estas curvaturas seccionales en cada punto de la variedad están contenidas en una matriz cuadrada de dimensión n , es decir que en las ecuaciones de campo el tensor de Ricci tendrá dieciséis (4x4) elementos, pero dado que es un tensor simétrico (es decir $R_{ij} = R_{ji}$ con lo cual los elementos por encima de la diagonal son iguales a los que están por debajo) sólo se necesitan calcular los cuatro elementos de la diagonal y los seis por encima de ésta, de modo que es suficiente hallar diez de las dieciséis componentes, igual que para el caso del tensor métrico.

Figura 14

Curvaturas principales de una variedad representadas a través de secciones



Una forma aún más sencilla de caracterizar la curvatura en un punto se obtiene a partir de la suma de estas curvaturas principales, cantidad dada por el escalar de Ricci. Este número nos permitirá determinar si una curvatura es positiva (como en el caso de una esfera, donde la suma interna de los ángulos de un triángulo es mayor a ciento ochenta grados) o negativa (como una superficie hiperbólica en la que los ángulos internos de los triángulos suman menos de ciento ochenta grados) además, a través del escalar de Ricci se puede ver si la curvatura de una variedad está dada por una cantidad constante, es decir, si es igual en todos los puntos, o si está dada por una función de las coordenadas y, por lo tanto, es diferente a medida que nos desplazamos sobre la variedad.

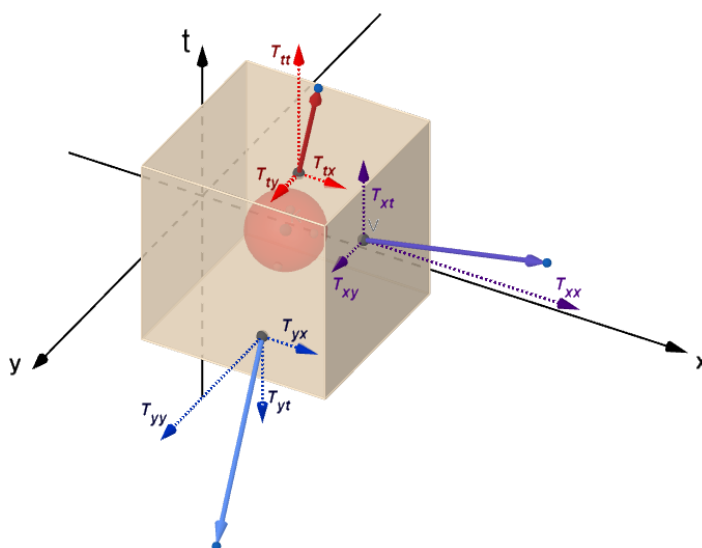
El tensor de Energía Momento

Debido al resultado que señala a la masa como una medida relativista, es decir, que depende del estado de movimiento del observador, para representar todas las manifestaciones de energía en el universo es preciso referirnos también a su movimiento. Esto se resume en un objeto matemático que indique los flujos de energía a través del espacio y el tiempo. Por ello, el cuadrivector (cantidad de movimiento a través del espacio de cuatro dimensiones) será una magnitud importante para encontrar las componentes de este tensor.

Imaginemos una distribución de masa, es decir, una determinada fuente de energía y localicémosla en un espacio que represente la dimensión temporal y dos de las espaciales. Podemos representar los flujos mencionados anteriormente a través de un volumen que encierre esta distribución, de forma que sea posible analizar el flujo en todas las direcciones a través de las respectivas superficies de este volumen.

Figura 15

Flujo de energía a través del espacio-tiempo



En este espacio-tiempo representado por tres dimensiones, todo flujo puede describirse en términos de los vectores sobre las tres superficies del volumen que son perpendiculares entre sí. El flujo a través de cada una de ellas a su vez, puede representarse como una combinación lineal de los vectores base del espacio de tres dimensiones, es decir, para representar el flujo total se necesitan tres componentes por cada una de las tres direcciones espaciales, para un total de nueve componentes que son representados en una matriz cuadrada de dimensión 3.

Lo que cada una de estas componentes señala es la cantidad de energía que viaja a través del espacio-tiempo en una determinada dirección. La componente T_{tt} suele denominarse densidad de energía e indica cuánta de ella se desplaza a través del tiempo. El resto de componentes en las direcciones normales a cada superficie del volumen, es decir T_{xx} y T_{yy} , se refieren a la presión y pueden interpretarse como la tendencia de cualquier forma de energía a viajar en esa dirección. Las componentes que mezclan la dirección temporal con una espacial, que son T_{tx} ; T_{ty} ; T_{xt} y T_{yt} , se denominan densidad de momentum e indican cuánta energía

viaja a través del espacio a lo largo del tiempo, valor que se incrementa a medida que ésta se transporta más rápido a través del espacio. Las componentes restantes, T_{xy} y T_{yx} , que combinan las direcciones espaciales, se denominan viscosidad, la cual puede interpretarse como la transferencia de movimiento en los alrededores de la distribución considerada. (ScienceClic English, 2020).

De esta forma, podemos dar una caracterización completa de las propiedades mecánicas de la energía en una determinada región del espacio-tiempo. Si efectuamos el ejercicio de añadir la dimensión espacial que hemos omitido en la figura 15, para obtener el espacio-tiempo de cuatro dimensiones deseado, la respectiva representación del flujo energético estará dada en términos de cuatro vectores (uno por cada superficie ortogonal a las demás) con cuatro componentes cada uno, para un total de dieciséis componentes como los demás tensores que se han venido describiendo. El significado de la representación matricial, sería el siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc} \textit{Densidad de energía} & \textit{Densidad de momentum} & \textit{Densidad de momentum} & \textit{Densidad de momentum} \\ \textit{Densidad de momentum} & \textit{Presión espacial en x} & \textit{Viscosidad} & \textit{Viscosidad} \\ \textit{Densidad de momentum} & \textit{Viscosidad} & \textit{Presión espacial en y} & \textit{Viscosidad} \\ \textit{Densidad de momentum} & \textit{Viscosidad} & \textit{Viscosidad} & \textit{Presión espacial en z} \end{array} \right)$$

La constante cosmológica

La forma en que Einstein dio a conocer las ecuaciones de campo por primera vez, en 1915, no contenía el tercer término que hemos incluido en la ecuación (1); éste fue añadido dos años más tarde como una modificación a las ecuaciones originales basada en consideraciones físicas. Einstein propuso un primer modelo del universo en el artículo “Cosmological Considerations in General Theory of Relativity” (Consideraciones Cosmológicas de la Teoría General de la Relatividad) (1917), en el cual describe un universo estático, es decir, cuya escala espacial permanece constante a lo largo del tiempo⁴. Introdujo la constante cosmológica como una forma de equilibrar las fuerzas gravitatorias en las ecuaciones de campo, aunque no se

⁴ Le atribuye, además, otras propiedades, como la de ser homogéneo e isotrópico a grandes escalas (de forma que haya la misma distribución de galaxias en todas las regiones del universo y hacia todas las direcciones), y la de ser espacialmente esférico. Estas condiciones garantizaban que el universo fuera finito pero sin fronteras.

comprometió con un significado físico para dicha constante. Sin embargo, hacia 1922, empezaron a proponerse nuevas soluciones basadas en mediciones astronómicas, en las que se obtenían posibles modelos para un universo que evoluciona (se expande o se contrae). Esto significó, en cierta medida, un abandono de la idea de que el universo debía ser estático, pero no implicó la desaparición de la constante cosmológica, sino su resignificación a la luz de nueva evidencia empírica.

CAPÍTULO 2

Las ecuaciones de campo y la evolución del universo

En busca de la métrica para el universo en expansión

Una vez hemos descrito de forma muy general el significado físico de los elementos matemáticos presentes en las ecuaciones de campo, procederemos a utilizar estas ecuaciones para realizar una caracterización del universo como objeto geométrico.

Las ecuaciones de campo presentan distintas soluciones posibles, cada una de las cuales se vincula a una interpretación cosmológica. Esto implica que cada solución describe un tipo de universo con características geométricas propias y de estos resultados particulares es posible derivar implicaciones sobre el cambio del universo a lo largo del tiempo. Hallar una de estas soluciones implica encontrar las componentes del tensor métrico, pues, como se dijo con anterioridad, los demás elementos correspondientes a la descripción geométrica, se dan en términos de las componentes de este tensor. Una vez encontrado el tensor métrico asociado a un determinado modelo de universo, se tiene la métrica correspondiente, que es lo que necesitamos para describir de forma más clara la posible evolución del universo.

implicaciones físicas y geométricas de la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrica que se ajusta a la imagen física de un universo en expansión fue deducida de manera independiente hacia 1924 y 1927 por Alexander Friedmann y George Lemaître, respectivamente, y refinada en la década de 1930 por Howard Robertson y Arthur Walker.

Después de que Einstein publicara las ecuaciones de campo en 1917, él y otros científicos trabajaron en la búsqueda de soluciones, es decir, de métricas que resultaran de una distribución determinada de materia y energía. Las primeras soluciones que aparecieron fueron la dada por el

propio Einstein y otra hallada por el matemático Willem de Sitter⁵; la primera refería un universo estático, es decir, que se mantiene idéntico en cualquier instante de tiempo y cuyas características físicas y geométricas a nivel global no presentan ninguna evolución, además, para cada valor del tiempo, el espacio físico de tres dimensiones posee geometría esférica y presenta una distribución uniforme de materia a gran escala (más adelante nos referiremos a esto como principio cosmológico), (Einstein, 1917). La solución de De Sitter, por su parte, refería un universo en evolución que se expandía, pero estaba desprovisto de materia. Por otra parte, las observaciones astronómicas parecían respaldar la hipótesis de un universo que evoluciona en lugar de ser estático; las observaciones del astrónomo Vesto Slipher realizadas entre 1913 y 1917 mostraron un corrimiento hacia el rojo de los espectros provenientes de galaxias lejanas, lo cual, según el efecto Doppler se interpretaba como una evidencia de que las galaxias se estaban alejando unas de otras (Torretti, 1994). Además, hacia 1920 Edwin Hubble desarrolló métodos que permitieron medir las distancias desde la tierra hasta galaxias lejanas, lo que más tarde, junto con la medición de sus velocidades mediante el efecto doppler, confirmaría este resultado.

Dados estos antecedentes, la forma en que George Lemaitre enfrentó el problema consistió en proponer una solución que tomase los aspectos favorables de las dos anteriores; la consistencia del modelo de De Sitter con las observaciones del incremento de la distancia entre las galaxias y la consideración de la presencia de materia en la solución de Einstein, que brindaba una relación entre el radio del universo y su densidad (Lemaître, 1927). La condición de un universo que evoluciona en el tiempo, es decir, que se expande o se contrae, implica que las tres componentes espaciales de la métrica deben estar multiplicadas por un factor que se exprese como función del tiempo, de forma que las distancias medidas entre dos eventos del espacio-tiempo cambien en función de éste. De esta forma, podemos escribir la métrica en cuestión de la forma general:

$$ds^2 = a^2(t)d\sigma^2 - dt^2 \quad (8)$$

donde $a^2(t)$ es el factor en el que cambian las distancias $d\sigma^2$ representa el intervalo espacial entre dos eventos para un mismo instante de tiempo y depende de la geometría del espacio físico

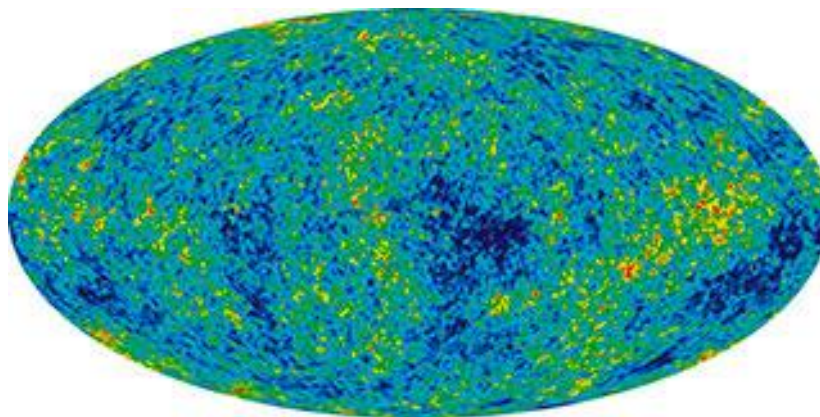
⁵ Aquí nos referimos únicamente a las soluciones que describen la métrica de todo el universo. No se hace mención de otros modelos como la solución de Schwarzschild, publicada en 1916 y que se describe la métrica alrededor de una masa de simetría esférica, sin carga y que no rota. Las ecuaciones de Einstein, igual que la teoría clásica de la gravitación se pueden aplicar a cualquier cuerpo del universo, pero el tema que nos atañe es la cosmología, por ende, la búsqueda de soluciones que permitan modelar el universo como un todo.

(por ejemplo, si se trata de una geometría plana, donde las distancias se miden a través del teorema de Pitágoras, tendríamos $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$).

Para precisar las características geométricas del espacio expresadas en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (que a partir de ahora denotaremos por su sigla FLRW), se parte del principio cosmológico que, como se dijo antes, fue postulado por Einstein. Este principio plantea que el universo a gran escala (en el orden de los cientos de millones de años luz) se ve igual para observador situado en cualquier punto del universo mirando en cualquier dirección, es decir, que en esta escala el universo es invariante ante traslaciones y rotaciones, por lo cual se dice que es homogéneo e isótropo. Aunque esta suposición no es del todo cierta, los datos observacionales han mostrado que es una buena aproximación de la imagen del universo a escalas cosmológicas. La mejor prueba de ello es el mapa de la radiación cósmica de fondo, construido con información recolectada por los satélites Cosmic Background Explorer [COBE], Wilkinson Microwave Anisotropy Probe [WMAP] y Planck, así como observatorios terrestres, que muestra, en el marco de la Teoría del Big Bang, la radiación que se dispersó en todas las direcciones cuando el universo tenía aproximadamente treientos ochenta mil años y se había enfriado lo suficiente gracias a la expansión como para que los fotones se desacoplaran de las partículas de materia y pudieran viajar en forma de radiación.

Figura 16

Anisotropías de la radiación cósmica de fondo de microondas



Nota. La radiación cósmica de fondo puede verse como un mapa de temperaturas que permite ver la distribución de materia en el universo. La imagen muestra una distribución casi homogénea de las galaxias, a excepción de las manchas más claras o más oscuras que presentan diferencias de una unidad respecto a cada cien mil unidades de temperatura del resto de la

imagen. Estas manchas se denominan anisotropías y, para efectos de aplicación del principio cosmológico, se consideran insignificantes. Fuente: NASA/WMAP Science Team (2014).

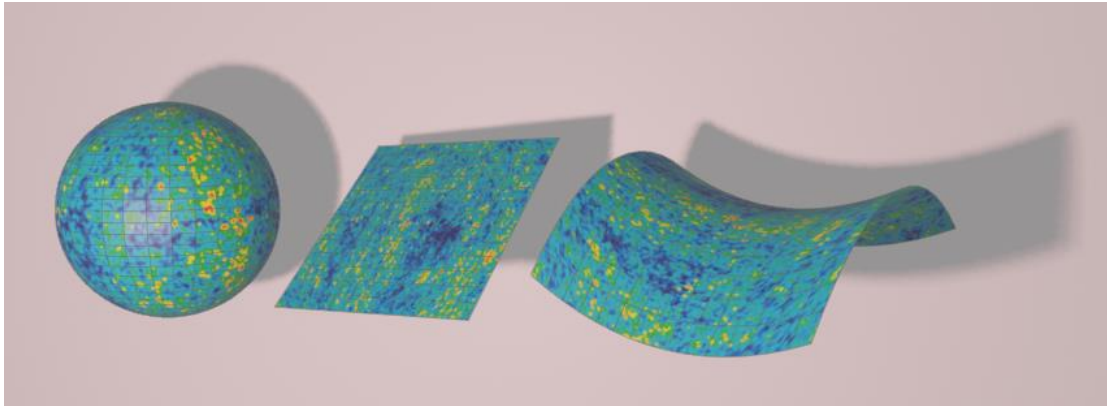
La consideración de homogeneidad e isotropía del universo a gran escala brinda la pauta para determinar qué posibles geometrías admite la métrica de un universo que evoluciona. Dado que la curvatura (no sólo del espacio-tiempo, sino del espacio físico tridimensional) depende de la distribución de materia, si aceptamos el principio cosmológico, debemos restringir las posibilidades geométricas a curvaturas constantes, pues si cualquier observador situado en cualquier parte del universo ve lo mismo en todas las direcciones, también tendrá que medir para la curvatura valores que no cambian en ningún punto ni hacia ninguna dirección. Esto sin perder de vista que nos referimos a una descripción global del universo, es decir, sin considerar las variaciones que se pueden medir a nivel local en las distribuciones de materia y, por tanto, en la curvatura.

Así pues, existen tres posibilidades geométricas para un espacio de curvatura constante; podemos postular que los universos con geometría esférica, plana o hiperbólica cumplen la propiedad de homogeneidad e isotropía y la conservan aun cuando varíen su escala con el factor a^2 introducido en la métrica. En el subapartado del tensor de Riemann se mencionaron algunas generalidades sobre estos tres tipos de geometría; las representaciones bidimensionales correspondientes estarían dadas respectivamente por la superficie de una esfera, un plano y un hiperboloide o paraboloides hiperbólico⁶. Estas representaciones nos sirven para asociar cada una de estas geometrías a un posible tipo de universo, pero de ningún modo muestran su apariencia real en cada caso, que es la de un espacio de tres dimensiones. La curvatura, para cada una de estas geometrías será denotada en adelante con el parámetro k , que tomará el valor de -1, 0 o 1, según sea el caso.

⁶ Existen otras posibles representaciones geométricas que cumplen la propiedad de homogeneidad e isotropía, por ejemplo, el toroide, que luce igual desde cualquier punto de su superficie. No obstante, en la construcción de esta métrica se consideran únicamente las variedades simplemente conexas, que, desde el punto de vista topológico, quiere decir que no tienen agujeros.

Figura 17

Representaciones bidimensionales de tres tipos de universo homogéneo e isótropo en evolución



Nota. La imagen muestra de izquierda a derecha variedades bidimensionales de curvatura positiva ($k = 1$), nula ($k = 0$) y negativa ($k = -1$).

Lo que resta para presentar la métrica de un universo con estas características es expresar el intervalo espacial $d\sigma^2$ de la ecuación (8) de una forma general que permita derivar cada una de las tres geometrías posibles al asignar el valor correspondiente de k . El resultado que se obtiene es el que sigue. Para ver la deducción, remitirse al anexo A.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (9)$$

que, finalmente, es la representación de tres métricas en una sola.

Una vez conocida la métrica, es posible derivar las demás componentes geométricas de las ecuaciones de campo, es decir, los símbolos de Christoffel, las componentes del tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Para ver las respectivas deducciones, remitirse a los anexos B y C.

La distribución de materia y energía en un universo homogéneo e isótropo

Por otra parte, para obtener el tensor de energía-momento se recurre a la idealización del universo como un gas que cumpla la misma condición de homogeneidad e isotropía que se estableció para la métrica. Esto quiere decir, un fluido perfecto sin viscosidad que experimenta la misma presión en todas las direcciones y cuya densidad sólo depende de la presión.

La densidad de energía del gas, que corresponde a la componente T^{00} , está dada por la razón entre la energía y el volumen del gas, es decir:

$$T^{00} = \frac{E}{V} = \frac{mc^2}{V} = \rho c^2$$

Las demás componentes de la diagonal, es decir, T^{ij} con $i = j = 1,2,3$; que corresponden a la presión del gas, son denotadas con la letra p , considerando que la presión es igual en todas las direcciones espaciales. Las demás componentes son nulas; las que representan la viscosidad se hacen cero porque un gas perfecto no presenta esfuerzos cortantes o de cizalladura, y las componentes T^{tj} , así como las T^{it} , que se refieren a la densidad de momento, son cero debido al marco de referencia establecido, que es un marco de reposo respecto a las partículas del fluido. Esta última consideración es posible bajo el postulado de Weyl, que establece un marco de referencia para observadores que se mueven con el fluido, a partir del cual, se obtiene una forma común de medir las distancias y los tiempos en un universo homogéneo e isótropo. El hecho de que el observador se mueva con el fluido implica que su velocidad relativa es cero, ello permite establecer la forma particular que toma el tensor de energía-momento dentro de la métrica FLRW; mientras el observador se encuentre en reposo respecto al fluido, las componentes fuera de la diagonal serán cero. En el marco de referencia establecido, las coordenadas empleadas se denominan co-móviles. En el contexto de un universo que se expande, esto implica que la escala misma del sistema coordenado crece con el universo a la misma tasa que la expansión, por ende, la descripción física del universo puede realizarse desde un estado de reposo. En otras palabras, la posición de un observador será constante en el espacio en cualquier instante, puesto que el sistema de coordenadas se ha expandido junto con el espacio. Esto implica, por supuesto, despreciar el movimiento aleatorio de las galaxias y considerar sólo el flujo debido a la expansión, lo cual, es una buena aproximación en los órdenes de magnitud en los cuales se aplica el principio cosmológico. Para ver la forma que toman las componentes del tensor de acuerdo con estas consideraciones, remitirse al anexo D.

Las ecuaciones de Friedmann y los parámetros cosmológicos

Al solucionar las ecuaciones de campo y hallar las componentes de los tensores involucrados, es posible obtener diez ecuaciones diferenciales linealmente independientes (correspondientes a las permutaciones posibles de los valores de los índices ij en la ecuación

(1)). Podemos caracterizar la evolución del universo utilizando dos de las ecuaciones resultantes, conocidas comúnmente como ecuaciones de Friedmann, ya que fueron presentadas por primera vez en el artículo de Alexander Friedmann (1922) titulado “Über die Krümmung des Raumes” (Sobre la Curvatura del Universo), donde expuso su solución a las ecuaciones de campo, así como algunas implicaciones físicas de gran importancia. Las ecuaciones en cuestión pueden expresarse de la siguiente forma

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + kc^2) = c^2\Lambda + 8\pi G\rho \quad (10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{c^2\Lambda}{3} \quad (11)$$

el desarrollo completo para llegar a estos resultados se encuentra en el Anexo E.

En estas ecuaciones, la primera y segunda derivada del factor de escala respecto al tiempo (denotadas como \dot{a} y \ddot{a} , respectivamente) se refieren a la velocidad y aceleración de la expansión del universo. Nótese cómo estas cantidades dependen de tres valores específicos; la constante de curvatura k , la constante cosmológica Λ y la densidad de materia ρ .

Particularmente, la ecuación (11) muestra que la constante cosmológica afecta el cambio en la tasa de expansión. Podemos, entonces, atribuir dos posibles significados físicos a la constante Λ que, hasta ahora, se ha tratado sólo de forma matemática. Si esta constante es positiva, tiene como efecto un aumento en la tasa de expansión, lo que podríamos interpretar como una repulsión opuesta al fenómeno gravitacional; si por el contrario es negativa, tendría el mismo efecto que la gravedad y, al igual que la materia, produciría una desaceleración de la expansión. A continuación, revisaremos de qué forma se relacionan entre sí k , Λ y ρ .

Los parámetros cosmológicos: densidad, curvatura y constante cosmológica

A continuación, observaremos cómo la geometría espacial del universo, (de acuerdo con los posibles modelos presentados en la figura 17) guarda una estrecha relación con su composición física (representada a través de la densidad y la constante cosmológica). Es por medio de esta relación que nos podremos aproximar a una caracterización de la evolución del universo.

Para lo anterior, debemos relacionar las características físicas y geométricas del universo. Podemos preguntarnos, como primera medida, cuál es la densidad de materia y energía requerida para que el universo sea espacialmente plano, es decir, que sus propiedades métricas sean

euclídeas, sin considerar el efecto de la constante cosmológica. Estas condiciones son $k = 0; \Lambda = 0$. En este caso, la densidad resultante, que denominaremos crítica y denotaremos como ρ_c , servirá como medida de comparación para indicar qué tanto se aleja o se aproxima la densidad real a la de un universo con dichas condiciones. Bajo estas consideraciones, la ecuación (10) se reduce a:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_c}{3}$$

La cantidad $\frac{\dot{a}}{a}$ expresa la relación entre la velocidad a la cual se expande el universo y su tamaño en un determinado instante y es conocida como parámetro de Hubble⁷, el cual se denota comúnmente con la letra H . En estos términos, la anterior ecuación puede expresarse como:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_c}{3}$$

de modo que, la densidad crítica resulta ser:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

y la proporción entre la densidad real del universo y la densidad crítica:

$$\Omega_\rho \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \quad (12)$$

Esta expresión corresponde al parámetro de densidad, el cual hemos definido a conveniencia como una cantidad relativa con el fin de agrupar los valores que puede tomar en los siguientes tres casos:

1. Que la densidad real del universo sea mayor a la densidad crítica

$$\rho > \rho_c \Rightarrow \Omega_\rho > 1$$

2. Que la densidad real sea igual a la densidad crítica

$$\rho = \rho_c \Rightarrow \Omega_\rho = 1$$

3. Que la densidad real sea menor a la densidad crítica

$$\rho < \rho_c \Rightarrow \Omega_\rho < 1$$

Una vez definido el parámetro de densidad, tomemos nuevamente la primera ecuación de Friedmann (10) escrita en términos del parámetro de Hubble y obtendremos:

⁷ Esto significa que el universo presenta una tasa de expansión $H(t)$. Más adelante se hablará con más detalle de este parámetro.

$$\begin{aligned}
3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) &= c^2\Lambda + 8\pi G\rho \\
H^2 &= \frac{c^2\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \\
1 &= \frac{c^2\Lambda}{3H^2} + \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - \frac{kc^2}{a^2H^2} \quad (13)
\end{aligned}$$

este resultado es muy útil para nuestros fines, ya que cada término contiene una de las cantidades Λ , ρ y k . Según la ecuación (12), el segundo término corresponde al parámetro de densidad. Podemos definir el primero y el tercero como parámetros de constante cosmológica y curvatura, respectivamente, denotados de la siguiente manera

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{c^2\Lambda}{3H^2} \quad ; \quad \Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{a^2H^2} \quad (14)$$

de forma que podamos escribir (13) como

$$1 = \Omega_\Lambda + \Omega_\rho + \Omega_k \quad (15)$$

Haciendo una recapitulación de los resultados matemáticos obtenidos hasta ahora, vemos que una caracterización física y geométrica del universo nos permitirá describir su posible evolución; las ecuaciones de Friedmann son ecuaciones diferenciales cuya solución nos muestra el cambio de la escala del universo en función del tiempo, pero, como ellas dependen de Λ , ρ y k , es posible obtener una gran cantidad de soluciones, esto es, todas las formas en que el universo podría evolucionar si se cumple la relación (15). Además, conocer dos de los parámetros cosmológicos nos permite conocer el tercero, con lo cual, podemos analizar algunas soluciones posibles suponiendo valores para dos de ellos; esto resulta relativamente fácil puesto que la característica esencial de los parámetros es que su significado físico o geométrico cambia en función de si toman valores positivos, negativos o nulos, por lo que bastará con el análisis de unos pocos casos. Esto es lo que se procederá a hacer en el siguiente apartado.

Soluciones de las ecuaciones de Friedmann y posibles modelos de evolución

Universos sin constante cosmológica

El primer conjunto de soluciones que veremos corresponde a posibles universos donde la única interacción que afecta las propiedades métricas del espacio-tiempo es la gravedad. Esto quiere decir que

$$\Lambda = 0 \implies \Omega_\Lambda = 0$$

De la ecuación (15), resulta

$$1 = \Omega_\rho + \Omega_k \quad \Rightarrow \quad \Omega_\rho - 1 = -\Omega_k$$

y, según la definición (14)

$$\Omega_\rho - 1 = \frac{kc^2}{a^2H^2}$$

de esta expresión, podemos inferir la siguiente relación entre la densidad del universo y su curvatura.

Tabla 1

Geometría de universos sin constante cosmológica según su densidad

Parámetro de densidad	Curvatura
$\Omega_\rho < 1$	$k = -1$
$\Omega_\rho = 1$	$k = 0$
$\Omega_\rho > 1$	$k = 1$

Nota. Ya que los valores de k están restringidos a -1, 0 o 1, la geometría de un universo con constante cosmológica nula queda determinada directamente por el parámetro de densidad.

Por otra parte, si $\Lambda = 0$ en la segunda ecuación de Friedmann, (11), obtenemos:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a$$

dado que la densidad ρ , la presión p y el factor de escala a son magnitudes siempre positivas, para universos de este tipo, \ddot{a} es siempre negativo, es decir, se expanden de manera desacelerada. Ahora bien, para ver cómo cambia esta tendencia cuando consideramos tiempos muy alejados, analicemos la primera ecuación de Friedmann, (10), de la cual obtenemos:

$$3(\dot{a}^2 + kc^2) = 8\pi G\rho a^2$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} - kc^2$$

nótese lo siguiente; en un universo en expansión, a medida que el tiempo avanza, la densidad disminuye, por ende, cuando el factor de escala tiende a infinito, la densidad tiende a cero. En este límite, según la expresión anterior, podemos considerar la siguiente relación entre la curvatura k y la expansión del universo.

Tabla 2

Evolución de universos sin constante cosmológica en tiempos distantes según su curvatura

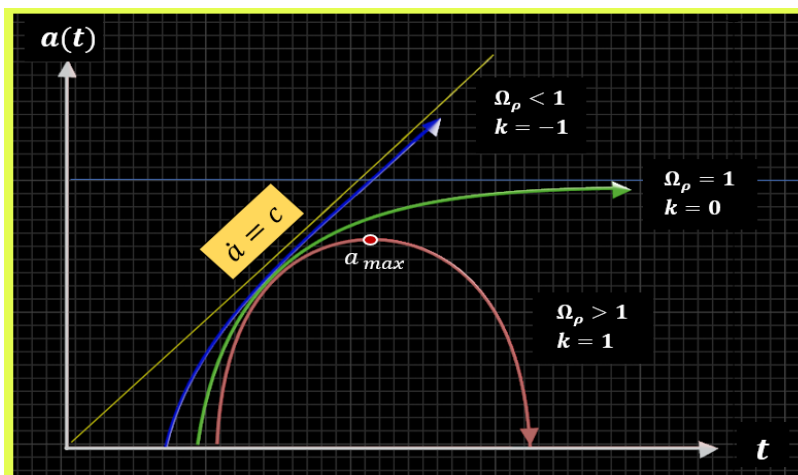
Curvatura	Consecuencias en la velocidad de la expansión
$k = -1$	$\dot{a}^2 \rightarrow -kc^2 \Rightarrow \dot{a}^2 \rightarrow c^2 \Rightarrow \dot{a} \rightarrow c$
$k = 0$	$\dot{a}^2 \rightarrow -kc^2 \Rightarrow \dot{a}^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{a} \rightarrow 0$
$k = 1$	Cuando $\dot{a} = 0 \Rightarrow a$ es máximo; $\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} - kc^2 \Rightarrow 0 = \frac{8\pi G\rho}{3} a_{max}^2 - c^2$

Nota. En un universo con curvatura negativa, la velocidad de la expansión tiende a un valor constante; en uno con curvatura nula, la expansión se frena hasta que su escala no cambia; y en uno con curvatura positiva, existe un valor máximo para el factor de escala.

^a En el último caso, se descarta que $\dot{a} = 0$ corresponda a un punto de inflexión de la función $a(t)$, pues esto implicaría que se presente una aceleración positiva, pero se ha demostrado que la segunda derivada del factor de escala es siempre negativa, por lo que la función $a(t)$ no puede cambiar su concavidad. Decimos entonces, que después del instante para el cual $\dot{a} = 0$, el factor de escala decrece. A continuación, se presenta de forma gráfica la información sintetizada en las tablas 1 y 2.

Figura 18

Posibles evoluciones de un universo sin constante cosmológica según su densidad



Nota. Un universo con curvatura negativa se expande indefinidamente; en un universo plano la desaceleración de la expansión es tal que éste tiende a un tamaño estable; y uno con curvatura

positiva se expande hasta un punto tras el cual se contrae colapsando sobre sí mismo. Adaptado de: Eigenchris (2022).

Universos con constante cosmológica negativa

se interpreta como una acción atractiva entre las componentes del universo.

En la segunda ecuación de Friedmann, (11), el primer término, que contiene las constantes positivas ρ y p , es negativo. Si, además, consideramos $\Lambda < 0$, el segundo término será negativo también, con lo cual, la expresión completa será negativa en cualquier caso; $\ddot{a} < 0$, de modo que este tipo de universos presentan una continua expansión desacelerada.

Por otra parte, según la primera ecuación, (10), la primera derivada del factor de escala es cero en un punto.

$$\dot{a}^2 = (c^2\Lambda + 8\pi G\rho) \frac{a^2}{3} - kc^2$$

$$0 = (c^2\Lambda + 8\pi G\rho) \frac{a_{max}^2}{3} - kc^2$$

Ya que $\Lambda < 0$ y $\rho > 0$, independientemente del valor de k , siempre se pueden encontrar valores que cumplan la igualdad.

Bajo estos dos resultados se observa que el universo se expande de forma desacelerada sin importar su curvatura espacial, como se ilustra en la figura 19.

Figura 19

Evolución de un universo con constante cosmológica negativa



Nota. En universos donde la acción representada por la constante cosmológica contribuye al colapso gravitatorio, se presenta una expansión desacelerada hasta un punto tras el cual se contrae sin importar su geometría ni su densidad.

Universos con constante cosmológica positiva

Con la consideración $\Lambda > 0$ en la primera ecuación de Friedmann (10), se observa que

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{c^2\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Los primeros dos términos son siempre positivos, por lo tanto, la expresión completa lo será si $k = -1$ o $k = 0$. Por ende, para estos dos valores de la curvatura, la velocidad de expansión es siempre mayor a cero; el universo se expande de forma indefinida.

Si nos fijamos en el primer término de la segunda ecuación de Friedmann, (11), podemos decir que, tanto la densidad como la presión disminuyen a medida que el factor de escala se hace mayor, por lo tanto,

$$-\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \rightarrow 0 \text{ cuando } a \rightarrow \infty$$

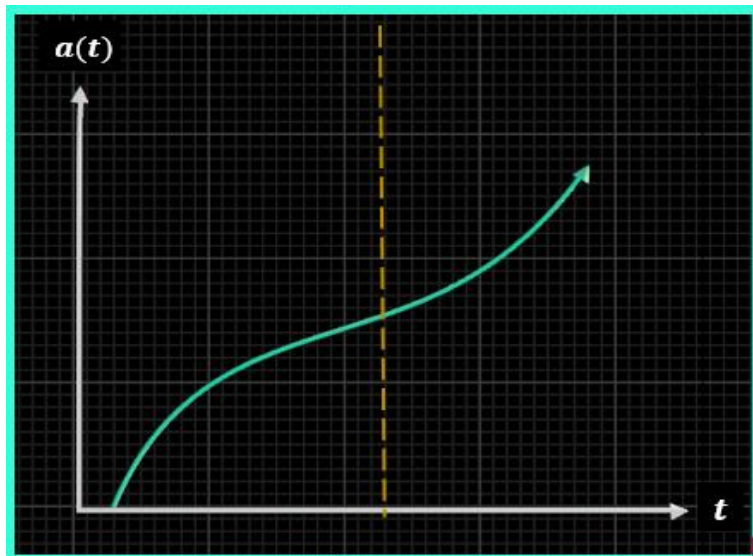
en este límite, se cumple que

$$\ddot{a} \rightarrow \frac{c^2\Lambda}{3}a \quad (16)$$

lo que quiere decir que, en tiempo distantes, el factor de escala toma el comportamiento de una función exponencial. No obstante, cuando $a(t)$ no es todavía lo suficientemente grande, las galaxias se encuentran lo suficientemente juntas como para que la acción gravitatoria domine sobre la acción repulsiva de la constante cosmológica; según (11), si la densidad y la presión son considerables, la aceleración de la expansión será negativa.

Figura 20

Evolución de un universo con constante cosmológica positiva



Nota. En universos donde existe una acción que contrarresta el colapso gravitatorio, se presenta una expansión desacelerada inicial gracias al dominio de la densidad. A medida que transcurre el tiempo, la atracción gravitacional disminuye y la acción contraria comienza a predominar, acelerando la expansión de forma indefinida.

CAPÍTULO 3

La observación y nuestra imagen del cosmos: evidencias de la evolución del universo

El modelo que hemos presentado, basado en una solución a las ecuaciones de campo bajo la consideración del principio cosmológico, no presenta un único resultado que nos permita inferir cómo evoluciona el universo, sino que está supeditado al valor de los parámetros cosmológicos, los cuales se asocian a magnitudes físicas y, por ende, deben obtenerse mediante la medición. Hasta el momento, la única evidencia que hemos considerado en la construcción del modelo es la homogeneidad e isotropía a gran escala que muestra la radiación cósmica de fondo. En lo que sigue, utilizaremos datos más específicos obtenidos mediante la observación astronómica para los parámetros cosmológicos, con el fin de encontrar, entre las posibles soluciones de Friedmann, una en particular que sea acorde con la evidencia física.

Algunos Métodos Empleados en las Mediciones

La cosmología observacional se sirve de una serie de métodos observacionales que se pueden categorizar de acuerdo con dos criterios; las observaciones del universo temprano y las del universo tardío. El primer conjunto se basa en el estudio de la radiación cósmica de fondo de microondas, pues ésta se interpreta como un remanente de la primera radiación que viajó libremente por el universo, mientras que las estimaciones de parámetros cosmológicos basadas en el universo tardío provienen del estudio de galaxias, cúmulos, y cuerpos observables mediante características como su velocidad, brillo y distribución espacial; es decir, este conjunto de métodos caracteriza un universo más reciente porque toma como referente objetos más cercanos.

El Análisis de Anisotropías de la Radiación de Fondo Cósmico de Microondas

Como se mencionó en el capítulo anterior, aunque la distribución de temperaturas medida para esta radiación es bastante uniforme, presenta algunas anisotropías, cuyo análisis brinda información importante sobre las componentes del universo temprano y la forma en que éstas interactuaban, dando lugar al universo que se observa hoy.

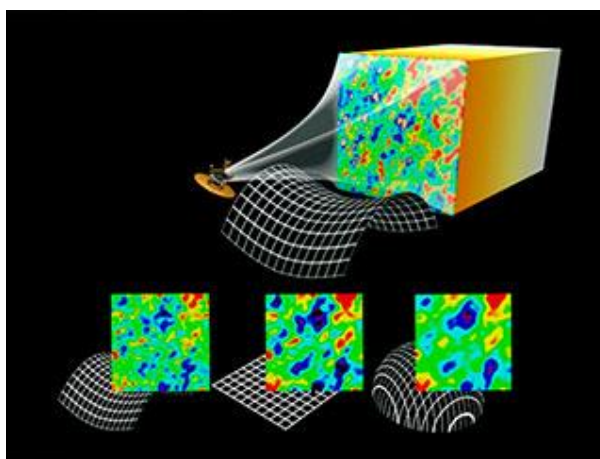
Las sondas espaciales y observatorios terrestres dedicados al estudio de la radiación cósmica de fondo brindan información útil para la construcción de distintos espectros. Éstos relacionan características como las fluctuaciones de temperatura en distintas escalas espaciales mediante la intensidad de la radiación para frecuencias en el rango de las microondas, o la polarización de la radiación debida a su interacción con otros campos electromagnéticos. Instituto de Física Teórica [IFT], (2018).

Medición de la curvatura espacial

Los espectros provenientes del análisis de la radiación cósmica de fondo, junto con las consideraciones sobre la interacción entre materia y radiación del universo primigenio, permiten predecir cómo sería la distribución de anisotropías observadas si el universo fuera espacialmente plano, esférico o hiperbólico. Las propiedades geométricas del espacio afectan la trayectoria de la luz. Si el universo no fuera plano, la luz se curvaría mientras se propaga; en un universo con curvatura positiva, los objetos y señales lejanas aparentarían un mayor tamaño del real (de forma análoga al aumento en la imagen producida por una lente convergente) mientras que en un universo hiperbólico aparentarían un tamaño menor. Si, en lugar de ello, el universo fuera plano, el tamaño observado de las cosas coincidiría con el que se estima como real. Para saber cuál de estos casos se aproxima más a nuestro universo, se estudia el tamaño y la distribución de las anisotropías. La estimación sobre cuáles deberían ser estas características si la luz no se curvara procede de las consideraciones realizadas sobre la evolución del universo temprano con base en las diferentes etapas del modelo teórico del Big Bang.

Figura 21

Curvatura de los rayos de luz, según la geometría del universo



Nota. Fuente: NASA/WMAP-Concept animations (2012).

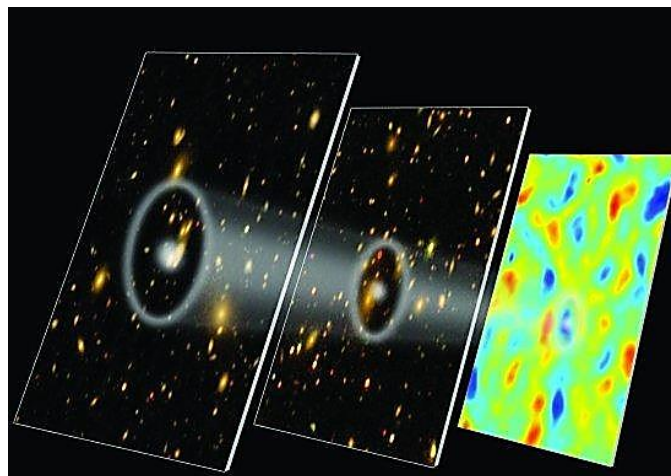
Oscilación Acústica de Bariones

El mapa de anisotropías, (figura 16), muestra las fluctuaciones de temperatura en las distintas regiones del universo en el momento del desacople de la radiación y la materia, es decir, regiones donde se presentaban contracciones o dilataciones locales del plasma primigenio. Para interpretar estas anisotropías, se dice que algunas zonas del plasma, con diferencias ligeras de densidad, favorecían la atracción gravitacional, produciendo una compresión, pero esto, a su vez, producía un aumento de temperatura que daba lugar a una dilatación, tras lo cual volvía a actuar la atracción gravitacional, repitiendo el proceso indefinidamente. Estas fluctuaciones eran transferidas a las regiones contiguas, produciendo una onda de presiones que se propagaba por todo el plasma. Este fenómeno se denomina oscilación acústica de bariones y es de gran importancia en la cosmología.

Se asume, además, que en el momento del desacople, estas oscilaciones se frenaron, con lo cual, distintas regiones quedaron “congeladas” en un estado determinado de compresión, lo que contribuyó a la formación de galaxias y otras estructuras. Estas regiones, con densidades diferenciadas, son las que se observan con distintos colores en el mapa de temperaturas, es por ello que se asocia la distribución de anisotropías en esta imagen a la distribución actual de materia a gran escala. En conclusión, la distribución de materia en el universo se supone relacionada con un patrón característico que seguían las oscilaciones acústicas en el universo temprano.

Figura 22

oscilaciones acústicas de bariones en la distribución de galaxias y en el mapa de anisotropías



Nota. La figura muestra una distribución de galaxias en dos épocas distintas y las correspondientes anisotropías de la radiación de fondo cósmico. Fuente: Instituto de Astrofísica de Canarias (2012).

Las oscilaciones acústicas se caracterizan de dos formas; midiendo la distribución de las fluctuaciones a partir de la radiación de fondo cósmico; su tamaño, distancia y patrón de configuración; y midiendo la distribución de galaxias observables (Cáceres y Castañeda, 2007) Según la predicción, ambas observaciones deberían mostrar resultados similares. Es decir, estas oscilaciones se estudian tanto desde el universo temprano como desde el universo tardío.

El patrón que resulta de estas mediciones puede descomponerse en perturbaciones fundamentales utilizando la transformada de Fourier para una descomposición armónica esférica⁸. Este proceso es necesario, ya que el conjunto de fluctuaciones observado es el resultado de numerosas perturbaciones originadas en lugares distintos, cuyos efectos se suman para dar el resultado observado. Mediante este análisis, se pueden estimar las características de las fluctuaciones fundamentales que dieron lugar a las anisotropías, como la frecuencia y la amplitud con la cual se propagaban o la dirección de las perturbaciones a través de medidas de polarización. Estas características se relacionan directamente con los parámetros cosmológicos, pues la forma característica de estas oscilaciones tempranas dependía tanto de la geometría del universo como de su composición. Por ejemplo, regiones con mayor densidad producirían atracciones gravitacionales más fuertes, aumentando la amplitud de las oscilaciones. En pocas palabras, es posible hacer una estimación de qué cualidades físicas y geométricas debía tener el universo joven para que la oscilación acústica de bariones tenga la forma que se observa.

Supernovas Tipo Ia

Uno de los problemas asociados a la cosmología, y la astronomía en general, es la medición de grandes distancias en el universo. Un método que se ha empleado desde principios del siglo XX es la observación de objetos lejanos con alguna propiedad intrínseca conocida que pueda ser comparada con su medición desde la tierra, como las denominadas estrellas variables

⁸ La descomposición armónica esférica es una técnica matemática utilizada para analizar funciones o campos que varían en el espacio tridimensional; como los campos electromagnéticos, la distribución de materia en el universo, la temperatura de la Tierra, entre otros. Este método permite descomponer una función en una serie de funciones armónicas esféricas, que se pueden utilizar para separar las diferentes componentes de la función original.

cefeidas, cuya luminosidad intrínseca en comparación con su luminosidad aparente, permite estimar qué tan lejos se encuentran. Las variables cefeidas se caracterizan por poseer una luminosidad que varía en periodos regulares. En 1908 la astrónoma estadounidense Henrietta Swan Leavitt descubrió que este periodo está relacionado con el brillo real de la estrella, es decir, cuanto más dure su periodo de pulsación, mayor es su brillo (Basto, 2021). Esta relación permite estudiar los procesos que dan lugar a la variación del brillo para poder estimar con qué intensidad real está siendo emitida la luz. Conociendo esta magnitud, es posible compararla con la que se mide desde la tierra para estimar la denominada distancia de luminosidad. Este estudio no sólo es posible mediante el uso de variables cefeidas; en general, cualquier objeto que pueda ser utilizado para calcular distancias de luminosidad se conoce como vela estándar.

En la década de 1990 se empezó a utilizar un tipo particular de supernovas (explosiones de estrellas que han agotado su combustible y colapsan gravitacionalmente) que también emite un brillo en periodos aproximadamente regulares. Una supernova tipo *Ia* consiste en una enana blanca que forma un sistema binario con otra estrella. Después de que la segunda estrella ha consumido el combustible suficiente para convertirse en una gigante roja (cuyas capas externas están ligadas más débilmente), empieza a ceder materia a la enana blanca, la cual, cuando supera el límite aproximado de 1.44 masas solares, colapsa en una reacción termonuclear que produce su brillo característico (Tafalla, 2014). Debido a que la naturaleza del proceso es siempre la misma, la luminosidad asociada es casi igual en todos los casos. Además, esta reacción produce un brillo que puede ser observado desde la tierra a cientos, e incluso, miles de millones de años luz.

Figura 23

Representación del sistema binario que origina una supernova tipo Ia



Nota. A la izquierda se ilustra la enana blanca reteniendo el material cedido por su estrella compañera. Fuente: NASA Scientific Visualization Studio (2021).

Aplicando algunas correcciones al periodo de luminosidad de las supernovas Ia, es posible utilizarlas como velas estándar, lo que posibilita la estimación de distancias muy lejanas.⁹

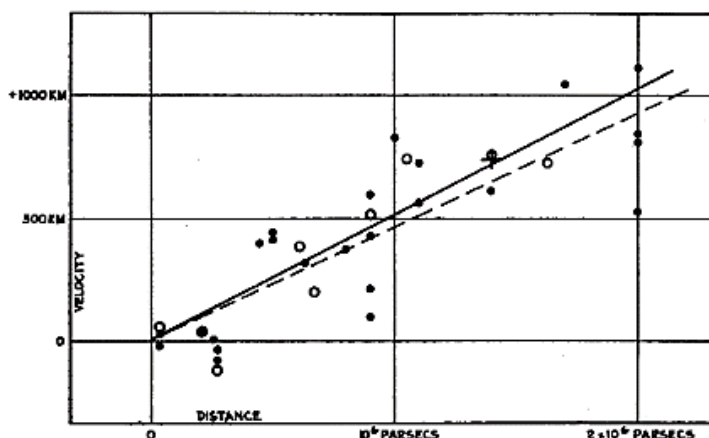
Medición del parámetro de Hubble.

En el capítulo anterior se introdujo el parámetro H , referente a la tasa de expansión cosmológica, es decir, el ritmo con el que aumentan las distancias cósmicas en relación con el tamaño actual del universo. Si la tasa de expansión no es constante, H depende del tiempo. Para el momento actual, denotamos la medida del parámetro de Hubble como H_0 .

Los métodos más empleados para medir H_0 combinan la medición de las distancias de objetos lejanos con las velocidades a las que se mueven. Para interpretar la recesión de galaxias y cúmulos de galaxias como el movimiento debido a una expansión, es necesario que los objetos más lejanos se alejen a velocidades mayores; esto es justo lo que muestra la evidencia. En una gráfica que relacione las distancias de las galaxias con la velocidad a la que se alejan de nosotros, la razón de cambio corresponde al parámetro de Hubble para ese tiempo.

Figura 24

Relación entre velocidades y distancias de nebulosas extra galácticas presentada por Edwin Hubble



⁹ Las correcciones necesarias para usar las supernovas tipo *Ia* como velas estándar son complejas y se basan en modelos teóricos detallados de la explosión y la evolución de la enana blanca. Esto implica ciertas incertidumbres y posibles errores sistemáticos en las mediciones de distancias cósmicas, que los astrónomos tratan de reducir y cuantificar con métodos estadísticos y análisis cuidadosos de los datos.

Nota. El eje de las abscisas representa las distancias medidas en megaparsecs y el eje de las ordenadas muestra las velocidades radiales en km/s medidas para veinticuatro nebulosas ubicadas fuera de la vía láctea, cada una representada por un punto en el gráfico. Se muestra la línea de tendencia, cuya pendiente correspondería al parámetro de Hubble. Los círculos blancos y la línea de tendencia punteada se refieren a las mismas veinticuatro nebulosas, pero siendo medidas sus distancias y velocidades en grupos de galaxias y no individualmente. Fuente: Hubble, E. (1929).

Los métodos para medir distancias incluyen el uso de supernovas tipo *Ia* o lentes gravitacionales, mientras que las velocidades radiales se estiman a partir del corrimiento al rojo en el espectro de la radiación procedente las galaxias por efecto Doppler.

Mediante la métrica de FLRW es posible relacionar la distancia de luminosidad de un objeto y su corrimiento al rojo, no sólo con H_0 , sino con los parámetros Ω_ρ , Ω_Λ y Ω_k (Riess et al.,1998). Gracias a esto, las Supernovas *Ia* son uno de los métodos más importantes para la estimación de parámetros cosmológicos basados en el estudio del universo tardío.

El parámetro de Hubble se puede estimar también a partir de las fluctuaciones de temperatura de la radiación cósmica de fondo que, como se dijo antes, permite inferir cómo debió evolucionar el universo para llegar a su estado actual.

El cambio en la tasa de expansión del universo

Las últimas dos décadas del siglo XX fueron fundamentales para caracterizar la evolución de nuestro universo. El equipo Supernova Cosmology Project, liderado por el científico estadounidense Saul Perlmutter y el High- z Supernova Search Team (equipo de búsqueda de supernovas de alto redshift o corrimiento al rojo), liderado por Brian Schmidt y Adam Riess, realizaron desde 1988 y 1994, respectivamente, mediciones del brillo y el corrimiento al rojo cosmológico de supernovas *Ia* para determinar sus distancias de luminosidad y velocidades de recesión, con lo cual pretendían estimar el cambio en la tasa de expansión del universo (Tafalla, 2014).

Ambos equipos esperaban inferir de sus mediciones una desaceleración en la expansión del universo, debido a la atracción gravitacional. No obstante, los resultados publicados en 1998 tanto por el equipo de Perlmutter como por el de Schmidt y Riess mostraron que la tasa de expansión del universo está aumentando con el tiempo.

Esta inferencia proviene del hecho de que las supernovas con alto corrimiento al rojo presentan una luminosidad aparente más baja de lo esperado en un universo donde la tasa de expansión disminuye o permanece constante (es decir, se encuentran más lejos). Esto quiere decir que Las supernovas llegan a distancias lejanas con velocidades de recesión muy altas; como consecuencia, un diagrama construido con supernovas Ia análogo al presentado por Hubble en 1929 con variables cefeidas (figura 24) no es lineal, sino que presenta una curva donde la razón de cambio (parámetro de Hubble) aumenta con el tiempo.

Las observaciones anteriormente descritas se ajustan mejor a las curvas teóricas que resultarían de un universo en una fase de expansión acelerada. Esta evidencia fue fundamental para la posterior restricción de los posibles valores de los parámetros cosmológicos.

Riess et al. (1998) concluyen con un nivel de confianza del 99.6% y 99.9% (con dos métodos estadísticos diferentes) que el parámetro Ω_Λ debe ser positivo, es decir, las observaciones de supernovas Ia respaldan la interpretación de la constante cosmológica como una presión negativa que da lugar a la expansión acelerada del universo. A la entidad física responsable de este efecto se le empezó a denominar, desde el mismo año, “energía oscura” (Ruiz, C. 2020). Desde entonces, esta extraña componente del universo se ha intentado caracterizar mediante el estudio de la evolución cósmica, pues de su naturaleza no se conoce nada más.

Lentes Gravitacionales

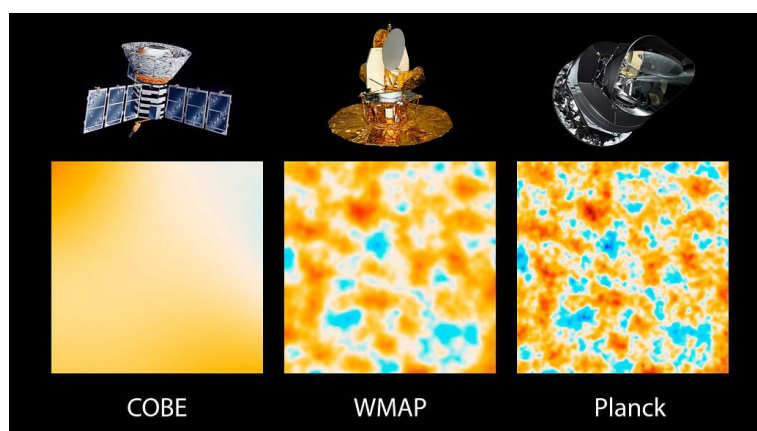
La luz es afectada por las distribuciones de masa presentes en el universo. El efecto gravitacional de los cuerpos masivos curva la trayectoria de la luz, tal como lo predijo Einstein según la Relatividad General. Los rayos de luz que se curvan, dan lugar a imágenes distorsionadas de objetos lejanos, de tal forma que regiones con una alta concentración de masa pueden tener un efecto de magnificación y cambio en la posición aparente de los objetos, incluso, producir múltiples imágenes, si el efecto gravitacional es lo suficientemente fuerte. Esto es lo que se conoce como lente gravitacional. En el contexto de la medición de los parámetros cosmológicos, éstas pueden ser utilizadas para estimar distancias o distribuciones de masa que actúan como lentes gravitacionales; a partir de la distorsión en la imagen de un objeto conocido, se puede caracterizar la lente que produjo el efecto observado. Si se conocen las características de la lente, por otra parte, se puede estimar la distancia a la que se encuentra el objeto observado.

Registro de Valores Obtenidos para los Parámetros Cosmológicos

Los métodos descritos anteriormente han sido empleados por sondas espaciales y observatorios con la intención de reconstruir la historia del universo y responder a diversos interrogantes de la cosmología. Tres satélites han sido enviados al espacio para estudiar particularmente las características de la radiación cósmica de fondo. El primero de ellos fue COBE, que operó desde 1989 hasta 1993; posteriormente se realizó el lanzamiento de WMAP en 2001, cuya misión operó hasta 2010; finalmente, la sonda Planck operó desde 2009 hasta 2013 (NASA mission, 2022). Estas misiones proporcionaron datos importantes para la construcción de las imágenes de anisotropías con las cuales contamos hoy, así como espectros que relacionan diferentes características de la radiación detectada. Desde COBE hasta Planck, los rangos de precisión han aumentado de forma considerable; el incremento en la resolución de las mediciones ha posibilitado un análisis más detallado de las características del universo temprano.

Figura 25

Anisotropías de la radiación cósmica de fondo medida por las sondas COBE, WMAP y Planck



Nota. Fuente: NASA Mission (2017).

Consideraremos aquí, los datos proporcionados por las dos misiones más recientes. WMAP sistematizó la información obtenida en tres periodos: a los tres, cinco, siete y nueve años del lanzamiento. La misión Planck, por su parte, publicó versiones actualizadas de los datos recopilados en 2013, 2015, y 2018. Cada versión del mapa del CMB de Planck incluye datos adicionales y mejoras en la calibración y análisis de los mismos. Bajo estas aclaraciones, se considerarán los datos oficiales más recientes proporcionados por ambas misiones: WMAP 9

(datos sistematizados tras los nueve años de operación de WMAP) y la última versión de resultados obtenidos por la sonda Planck.

Los datos obtenidos por estas misiones se analizan a partir de la restricción de valores posibles con base en las características del modelo o los modelos cosmológicos. Esto quiere decir que los valores estimados para los parámetros cosmológicos pueden variar en función de características particulares atribuidas bien sea a la evolución del universo temprano, a la naturaleza de sus componentes físicas, a las posibles formas de interacción entre sus componentes o a diversos factores que pueden asumirse para consolidar un modelo desde el cual interpretar las observaciones astronómicas y cosmológicas.

Resultados de la misión Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

En los resultados WMAP9, particularmente, se señala de manera explícita la diferencia entre los valores en relación con el modelo. A continuación, se presenta un resumen de algunos resultados obtenidos por la misión. En la tabla 3 se consolidaron los resultados para la densidad de materia Ω_p , la energía oscura Ω_Λ y la curvatura según el modelo y los conjuntos de datos a partir de distintos métodos utilizados. WMAP9 presenta alrededor de veinte parámetros cosmológicos más, los cuales no se discutirán en este trabajo ya que se refieren a magnitudes mucho más específicas en el marco de la observación y el análisis de datos (no aparecen explícitamente en las ecuaciones de Friedmann).

Los valores que se presentan contienen correcciones añadidas a los datos de WMAP provenientes del análisis de la radiación cósmica de fondo en observatorios terrestres, así como del estudio de oscilación acústica de bariones (BAO) y una estimación independiente del parámetro de Hubble (H_0).

Tabla 3

Parámetros $\Omega_\rho, \Omega_\Lambda, \Omega_k$ y H_0 estimados por WMAP9 y ajustes adicionales para distintos modelos cosmológicos

Modelo	WMAP + APT + ACT + SNLS3 +BAO + H_0			
	Ω_ρ	Ω_Λ	Ω_k	$H_0 \left(\frac{km/s}{Mpc} \right)$
LCDM	$0.2835^{+0.0094}_{-0.0093}$	$0.7165^{+0.0093}_{-0.0094}$		$69.55^{+0.78}_{-0.79}$
LCDM + RUN	0.2872 ± 0.0095	0.7128 ± 0.0095		69.36 ± 0.79
LCDM + TENS	0.2820 ± 0.0091	0.7180 ± 0.0091		$69.69^{+0.79}_{-0.78}$
LCDM + RUN + TENS	0.2848 ± 0.0097	0.7152 ± 0.0097		$69.71^{+0.83}_{-0.84}$
LCDM + ISO + CORR	$0.2810^{+0.0091}_{-0.0093}$	$0.7190^{+0.0093}_{-0.0091}$		$69.79^{+0.79}_{-0.80}$
LCDM + ISO + UNCORR	$0.2821^{+0.0096}_{-0.0092}$	$0.7179^{+0.0092}_{-0.0096}$		69.67 ± 0.81
LCDM + MNU	0.289 ± 0.010	0.711 ± 0.010		68.86 ± 0.91
LCDM + NREL	0.2836 ± 0.0093	0.7165 ± 0.0093		73.0 ± 1.9
LCDM + YHE	$0.2840^{+0.0093}_{-0.0092}$	$0.7160^{+0.0092}_{-0.0093}$		$70.00^{+0.81}_{-0.82}$
OLCDM	0.2824 ± 0.0094	0.721 ± 0.011	$-0.0031^{+0.0038}_{-0.0039}$	$69.09^{+0.96}_{-0.95}$
OLCDM + MNU	0.295 ± 0.014	$0.702^{+0.018}_{-0.019}$	$0.0036^{+0.0068}_{-0.0066}$	$68.86^{+0.97}_{-0.98}$
WACDM	0.274 ± 0.011	0.726 ± 0.011		71.0 ± 1.3
WCDM	0.277 ± 0.010	0.723 ± 0.010		$71.0^{+1.4}_{-1.3}$
WCDM + MNU	0.281 ± 0.011	0.719 ± 0.011		71.0 ± 1.3
OWCDM	$0.248 \pm$	0.748 ± 0.025	0.004 ± 0.010	70.7 ± 1.3

Nota. Los títulos en la columna hacen referencia al modelo cosmológico. En cada caso, se señalan las fuentes de datos y de correcciones adicionales; en la indicación +SPT (South Pole Telescope) + ACT (Atacama Cosmology Telescope) se añaden correcciones a partir de datos proporcionados por el Telescopio del Polo Sur y el Telescopio Cosmológico de Atacama. +SNLS3 añade los ajustes a partir del estudio de supernovas Ia realizado por el proyecto Supernova Legacy Survey three years sample. +BAO + H_0 se refiere a correcciones adicionales de oscilación acústica de bariones y el parámetro de Hubble, que mejoran la precisión de H_0 . Datos tomados de WMAP Nine-Year Explanatory Supplement (2012) y Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis [LAMBDA] -WMAP (s.f.).

^a Las unidades en que se escribe el parámetro de Hubble para el tiempo actual indican la velocidad con la que se aleja un objeto que se encuentra a una determinada distancia por efecto de la expansión. Por ejemplo, el valor para H_0 en LCDM indica que una galaxia que se encuentra a un megaparsec (Mpc; distancia aproximadamente igual a 3.26 millones de años luz) se aleja radialmente con una velocidad de $69.55^{+0.78}_{-0.79}$ km/s.

* Las características principales de cada modelo cosmológico pueden ser consultados en el anexo F (WMAP 2012 results, p. 62).

Restricciones a los Parámetros

Conjunto de datos seleccionado para ajustes y reducción de la incertidumbre

Para presentar los resultados de la tabla 3 se ha considerado oportuno tomar en cuenta los valores referenciados como WMAP+SPT+ACT+SNLS3+BAO+ H_0 , que corresponden al conjunto de datos más completo de la misión.

Como primer criterio de selección, se ha buscado un conjunto de datos presentado por la misión que incluya observaciones de fuentes distintas a la radiación cósmica de fondo. Como se mencionó al principio de este capítulo, éste no es el único medio para estimar el valor de los parámetros cosmológicos; si bien el análisis de lo que se asume como universo temprano permite construir una imagen basada en una cantidad mayor de información, los métodos que analizan el universo más cercano (por ende, el más reciente) se basan en menos suposiciones teóricas sobre la historia del universo. En aras de presentar una evidencia lo menos ambigua posible, es importante considerar junto con la información recibida por la sonda espacial de la misión, los ajustes basados en mediciones de supernovas Ia y oscilación acústica de bariones a partir de la

distribución de galaxias, pues estas mediciones presentan una menor dependencia del modelo cosmológico, en contraste con las suposiciones implícitas en el estudio de la radiación cósmica de fondo.

Por otra parte, mientras que WMAP poseía una resolución angular de 13 minutos de arco, el ACT cuenta con una resolución de 1,4 y el SPT de 1 minuto de arco, lo que resulta útil para construir una mejor imagen de la radiación cósmica de fondo (LAMBDA, data, s.f.).¹⁰ De aquí, que la adición de los datos proporcionados por estos dos telescopios resulte importante.

Se hará una restricción aún más importante en relación con el modelo cosmológico. El resumen presentado en la tabla 3 tiene la intención de poner en evidencia cómo los parámetros cosmológicos dependen inevitablemente de las suposiciones teóricas propias de un modelo. No obstante, se privilegiarán los valores asociados al modelo Lambda Cold Dark Matter (LCDM).

Modelo Cosmológico LCDM

Se fundamenta en consideraciones sobre el universo temprano apoyado en tres pruebas; las múltiples observaciones que corroboran la expansión del universo, principalmente, las mediciones combinadas de distancias y velocidades radiales de las galaxias; la radiación cósmica de fondo, interpretada como la radiación más antigua del universo emitida una vez la radiación fuera liberada del plasma después de, un periodo estimado de trescientos ochenta mil años; y las predicciones comprobadas con un alto grado de precisión de la nucleosíntesis primordial. Ésta última se refiere a las suposiciones sobre la abundancia que debería haber en el universo de algunos elementos que resulta al modelar la formación de las primeras estructuras atómicas en el plasma primigenio, antes del desacople de la materia y la radiación. Esto consiste en estimar qué proporción de elementos ligeros como núcleos de hidrógeno, deuterio, litio y helio3, se pudieron haber formado durante algunos minutos cuando el universo aún era lo suficientemente caliente como para permitir las fusiones nucleares. El estudio de regiones del universo como nubes de gas alejadas de formación estelar (que se supone, aún conservan las proporciones de la composición original del universo) ha mostrado resultados bastante cercanos a la predicción, salvo por un problema actual denominado Escases de litio.

¹⁰ La resolución angular se refiere a la distancia angular mínima entre dos puntos del cielo que puede ser resuelta por un sistema óptico. De este modo, SPT y ACT pueden obtener imágenes con más resolución de la que obtenía WMAP.

Este panorama sugiere que la mayoría de observaciones que se hacen a escalas cosmológicas son interpretadas desde representaciones teóricas que asumen un periodo del universo primitivo con una temperatura y densidad sumamente altas tras el cual las partículas y la radiación interactuaron de una forma concreta que da lugar a modelos de evolución temprana. Además de suposiciones como la nucleosíntesis primordial, en este marco se aboga por la existencia de un proceso previo a la nucleosíntesis denominado inflación cósmica, según el cual, el universo sufrió por breves instantes una expansión extremadamente rápida, cuyo fin permitió la formación de regiones de potencial gravitatorio que dieron lugar a pequeñas homogeneidades; esta última se propone para dar cuenta de la formación de estructuras en el universo pese a su aparente homogeneidad a grandes escalas.

Se puede apreciar como estas consideraciones pueden ser utilizadas convenientemente para restringir el valor de los parámetros cosmológicos, pues una caracterización muy específica de la evolución del universo temprano puede extrapolarse a nuestros días y relacionarse con observaciones más recientes para configurar un modelo completo de evolución, que, además pone de presente consideraciones sobre su composición física y geométrica que concuerden con el modelo.

Ahora bien, en la sigla Λ CDM, la letra Λ alude a la constante cosmológica Λ para dar cuenta de un universo con energía oscura apoyado por las observaciones de supernovas tipo Ia según las cuales la tasa de expansión del universo aumenta con el paso del tiempo en el momento actual de la historia del universo. CDM, por su parte, hace referencia a un posible tipo de materia oscura denominado cold dark matter. Ésta se incorpora al modelo descrito previamente como consecuencia de observaciones realizadas hacia la década de 1930 de galaxias cuya estructura no se podría mantener sólo por la acción gravitacional de la materia visible (denominada bariónica), además de esto, la imagen de las fluctuaciones primordiales proporcionadas por las sondas espaciales encargadas de estudiar la radiación cósmica de fondo parecen ser demasiado pequeñas como para dar lugar a las estructuras actuales (Peña, 2015); se plantea la posible existencia de un tipo de materia que no interactúa con la radiación y por ende, no tiene lugar en las fluctuaciones debidas a las oscilaciones acústicas, pero que sí interactúa gravitacionalmente y, por ende, contribuye más tarde en la formación de estructuras. Este tipo de materia oscura, además debe ser fría, lo que implica que la energía debida a su movimiento era lo suficientemente baja como para que las estructuras se pudieran formar.

En este marco teórico cosmológico, los resultados frente a la geometría del universo apuntan a que su curvatura espacial está muy cerca de ser nula. Esto quiere decir que, con base en las observaciones de la escala de las anisotropías en la radiación de fondo cósmico y de acuerdo con los posibles modelos geométricos presentados en la figura 21, el universo físico sería plano, lo cual concuerda con las predicciones resultantes de la inflación cósmica. De acuerdo con los resultados WMAP9, el conjunto de datos WMAP+ACT+SPT+BAO+ H_0 (The American Astronomical Society, 2013) proporciona:

$$\Omega_k = -0.0027^{+0.0039}_{-0.0038}$$

No obstante, dentro de las restricciones impuestas por LCDM, no se considera el parámetro de curvatura influyente, por lo tanto, tal como se observa en la tabla 3, para este modelo resulta, de acuerdo con la ecuación (15):

$$\Omega_\rho + \Omega_\Lambda = 1$$

y los valores para los parámetros de densidad y energía oscura:

$$\Omega_\rho = 0.2835^{+0.0094}_{-0.0093} ; \Omega_\Lambda = 0.7165^{+0.0093}_{-0.0094}$$

Resultados de la misión Planck

En el análisis realizado por la misión Planck se restringen sus resultados al modelo LCDM y se muestran valores para los parámetros correspondientes a distintos conjuntos de datos, de manera análoga a WMAP.

Conserva la consideración de la curvatura espacial nula. Aunque en el modelo LCDM el parámetro de curvatura no es influyente, se hacen apreciaciones sobre él para solventar una ligera desviación en la distribución esperada de las fluctuaciones primordiales. Por este motivo, tanto WMAP como Planck ofrecen estimaciones de la curvatura, aunque de forma independiente a los parámetros fundamentales del modelo, ya que, según Planck Collaboration (2021), al añadir este parámetro "no se presenta ninguna discrepancia estadística significativa" (p. 2). Esto significa que no sería necesario recalibrar toda la cadena de datos de los demás parámetros al hacer una estimación de la curvatura. Debido a esto, tanto en los resultados de WMAP9 como en los de Planck restringidos a LCDM se cumple que $\Omega_\rho + \Omega_\Lambda = 1$, aunque se señale alguna estimación para Ω_k distinta de cero.

En la tabla 4 se presentan valores con correcciones añadidas a los datos de los espectros de potencia provenientes del análisis de la radiación cósmica de fondo en observatorios

terrestres, así como del estudio de oscilación acústica de bariones (BAO) y una estimación independiente del parámetro de Hubble (H_0).

Tabla 4

Parámetros Ω_ρ , Ω_Λ , Ω_k y H_0 estimados por la misión Planck y ajustes adicionales

parámetro	Conjunto de datos		
	TT + TE + EE + lowE	TT + TE + EE + lowE + lensing	TT+TE+EE+lowE +lensing+ BAO
Ω_ρ	0.3166 ± 0.0084	0.3153 ± 0.0073	0.3111 ± 0.0056
Ω_Λ	0.6834 ± 0.0084	0.6834 ± 0.0084	0.6889 ± 0.0056
Ω_k	$0.044^{+0.033}_{-0.034}$	$0.011^{+0.013}_{-0.012}$	0.0007 ± 0.0037
$H_0 \left(\frac{km/s}{Mpc} \right)$	67.27 ± 0.60	67.36 ± 0.54	67.66 ± 0.42

Nota. +TT+TE+EE se refiere a diferentes modos de polarización de la radiación cósmica de fondo que se utilizan en el análisis cosmológico. “TT” se refiere a la temperatura de la radiación. “EE” se refiere al modo de polarización E, la cual es causada por la dispersión de la radiación cósmica de fondo por electrones libres en el universo temprano. “ET” indica un modo de polarización cruzada entre la temperatura y el modo E. Esta polarización cruzada se produce cuando la temperatura de la radiación de fondo cósmico y la polarización E están correlacionadas, y proporciona información adicional sobre la historia temprana del universo. +LowE indica ajustes realizados considerando bajas frecuencias, es decir, tomando en cuenta las variaciones en la intensidad de la radiación de fondo cósmico en escalas más grandes. +Lensing + BAO incorpora ajustes debidos al estudio de lentes gravitacionales y oscilación acústica de bariones, respectivamente. Datos tomados de Planck Collaboration (2021).

^a Téngase en cuenta que el parámetro de curvatura, igual que en el caso de WMAP9, es independiente de los demás, de modo que puede considerarse cero sin afectar el valor registrado para los parámetros de densidad y energía oscura.

* Como se aprecia en las medidas de incertidumbre para cada dato de la tabla 4, la última columna de datos presenta el mínimo margen de error, por lo que se considerará principalmente

el conjunto referenciado como TT + TE + EE + lowE + lensing + BAO, que corresponde al conjunto de datos más preciso.

CAPÍTULO 4

Uso del modelo teórico a la luz de bases empíricas

Según las tablas 2 y 3, los valores estimados para el parámetro de densidad van desde 0.2742 hasta 0.3167 y los del parámetro de energía oscura desde 0.6833 hasta 0.7258. Por otra parte, los valores estimados para el parámetro de curvatura están tan cerca del cero, (entre -0.012 y 0.0066) que podemos considerarlo nulo (sin afectar las demás estimaciones).

Lo anterior nos permite establecer las siguientes condiciones:

$$\Omega_{\Lambda} > 1 \Rightarrow \Lambda > 1$$

$$\Omega_k \cong 0 \Rightarrow k \cong 0$$

Si nos remitimos al capítulo 1, según los posibles modelos de evolución apoyados en las ecuaciones de Friedmann, nuestro universo evolucionaría de acuerdo con la figura 19, que muestra el cambio en el factor de escala de un universo con constante cosmológica positiva (entendida como una acción repulsiva opuesta a la gravedad) y curvatura nula, el cual se caracteriza por presentar dos etapas distinguibles; la primera donde domina la acción gravitacional y una posterior donde prevalece la acción de la energía oscura.

Ahora bien, las mediciones de las distancias (junto con velocidades radiales) de supernovas tipo Ia, constituye la evidencia más directa (podríamos decir, la más independiente del modelo cosmológico) de que la expansión del universo se está acelerando. Esto implica que nos encontramos, necesariamente, en la segunda región de la gráfica 19, es decir, aquella donde el dominio de la energía oscura sobre la atracción de la gravedad produce que la expansión se acelere.

Así pues, procederemos a modelar el actual estado de expansión acelerada del universo para ajustarlo al modelo de la figura 19.

La expresión (16) caracteriza la evolución del universo a partir del límite en el cual la densidad de materia pasa a ser despreciable para dar lugar a la expansión acelerada. Para modelar la evolución a partir de este punto, consideremos (16) como una igualdad, es decir,

$$\ddot{a} = \frac{c^2 \Lambda}{3} a \quad (17)$$

de esta forma obtenemos una ecuación diferencial, cuya solución nos permite visualizar el factor de escala en función del tiempo.

Según la definición del parámetro de energía oscura, en (14), tenemos,¹¹

$$\Lambda = \frac{3H^2\Omega_\Lambda}{c^2} = 3H^2\Omega_\Lambda$$

$$\frac{\Lambda}{3} = H^2\Omega_\Lambda = \frac{\dot{a}^2}{a^2}\Omega_\Lambda$$

sustituyendo $\frac{\Lambda}{3}$ en la expresión (17),

$$\ddot{a} = \frac{c^2\Lambda}{3} a = \frac{\Lambda}{3} a = \frac{\dot{a}^2}{a^2}\Omega_\Lambda a$$

$$\ddot{a} = \frac{\dot{a}^2}{a}\Omega_\Lambda \quad (18)$$

la solución a esta ecuación diferencial (ver anexo G) es:

$$a = (c_1 t + c_2)^{\frac{1}{1-|\Omega_\Lambda|}} \quad (19)$$

ya que estamos considerando soluciones para un modelo con curvatura nula,

$$|\Omega_\Lambda| + |\Omega_\rho| = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - |\Omega_\Lambda| = |\Omega_\rho|$$

por lo tanto, (19) es equivalente a

$$a = (c_1 t + c_2)^{|\Omega_\rho|^{-1}} \quad (20)$$

Para encontrar las constantes c_1 y c_2 , debemos caracterizar las condiciones iniciales del problema. Como pretendemos modelar la evolución desde el presente, éstas corresponderán a las características en el momento actual.

Definiremos el tiempo actual como $t_0 = 0$ y el factor de escala actual como

$a_0 = a(t_0) = a(0)$, con lo cual, de la expresión (20) resulta

$$a_0 = (c_2)^{|\Omega_\rho|^{-1}} \Rightarrow c_2 = a_0^{|\Omega_\rho|} \quad (21)$$

Por otra parte, la velocidad en el cambio del factor de escala, que resulta ser la velocidad de expansión del universo, está dada por $v = \dot{a}$ y, para el momento actual, tenemos que $v_0 = \dot{a}_0 = H_0 a_0$. Derivando la ecuación (20) respecto al tiempo, obtenemos

¹¹ c^2 se considera 1; las unidades de medida que utilizaremos para todas las magnitudes se adecuarán para ello. Particularmente, la distancia se expresará en unidades de miles de millones de años luz y el tiempo en miles de millones de años, garantizando que $c = 1$.

$$\dot{a} = |\Omega_\rho|^{-1}(c_1 t + c_2)^{|\Omega_\rho|^{-1}-1}(c_1)$$

sustituyendo el valor encontrado para la constante c_2

$$\dot{a} = |\Omega_\rho|^{-1}(c_1 t + a_0^{|\Omega_\rho|})^{|\Omega_\rho|^{-1}-1}(c_1)$$

y evaluando en $t = 0$

$$\dot{a}_0 = |\Omega_\rho|^{-1}(a_0^{|\Omega_\rho|})^{|\Omega_\rho|^{-1}-1}(c_1) \quad (22)$$

simplicando el segundo factor

$$(a_0^{|\Omega_\rho|})^{|\Omega_\rho|^{-1}-1} = a_0^{|\Omega_\rho|(|\Omega_\rho|^{-1}-1)} = a_0^{1-|\Omega_\rho|}$$

además, recordando la definición del parámetro de Hubble, para el momento actual $|H_0| = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$.

Así, (22) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= |\Omega_\rho|^{-1} a_0^{1-|\Omega_\rho|} (c_1) = |H_0| a_0 \\ c_1 &= \frac{|\Omega_\rho| |H_0| a_0}{a_0^{1-|\Omega_\rho|}} = |\Omega_\rho| |H_0| a_0^{|\Omega_\rho|} \end{aligned} \quad (23)$$

Sustituyendo los valores (21) y (23) encontrados para las constantes c_1 y c_2 en (20)

$$\begin{aligned} a &= (|\Omega_\rho| |H_0| a_0^{|\Omega_\rho|} t + a_0^{|\Omega_\rho|})^{|\Omega_\rho|^{-1}} \\ a &= [a_0^{|\Omega_\rho|} (|\Omega_\rho| |H_0| t + 1)]^{|\Omega_\rho|^{-1}} \\ a &= a_0 (|\Omega_\rho| |H_0| t + 1)^{|\Omega_\rho|^{-1}} \end{aligned} \quad (24)$$

Procedamos a representar esta función utilizando los datos proporcionados por las dos misiones.

Según el conjunto de datos de Planck que estamos tomando en consideración,

$$|H_0| = 67.66 \pm 0.42 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

Teniendo en cuenta que el parámetro de Hubble tiene unidades de velocidad sobre distancia, es decir, $[t^{-1}]$, el valor de $|H_0|$ medido en $[By^{-1}]$, donde By significa miles de millones de años, es¹²

¹² No hay que perder de vista el significado físico del parámetro de Hubble. Bajo la conversión de unidades empleada, éste expresa la velocidad, medida en miles de millones de años luz por cada mil millones de años, a la que se alejan las estructuras cósmicas que se encuentran a mil millones de años luz. Estas unidades no son favorables para la interpretación inmediata de la tasa de expansión, que se entiende mucho mejor si se expresa en las

$$|H_0| = 6.919715977234 \times 10^{-2} \frac{1}{By}$$

y para el conjunto de datos considerados de WMAP, donde $|H_0| = 69.55^{+0.78}_{-0.79} \frac{km/s}{Mpc}$

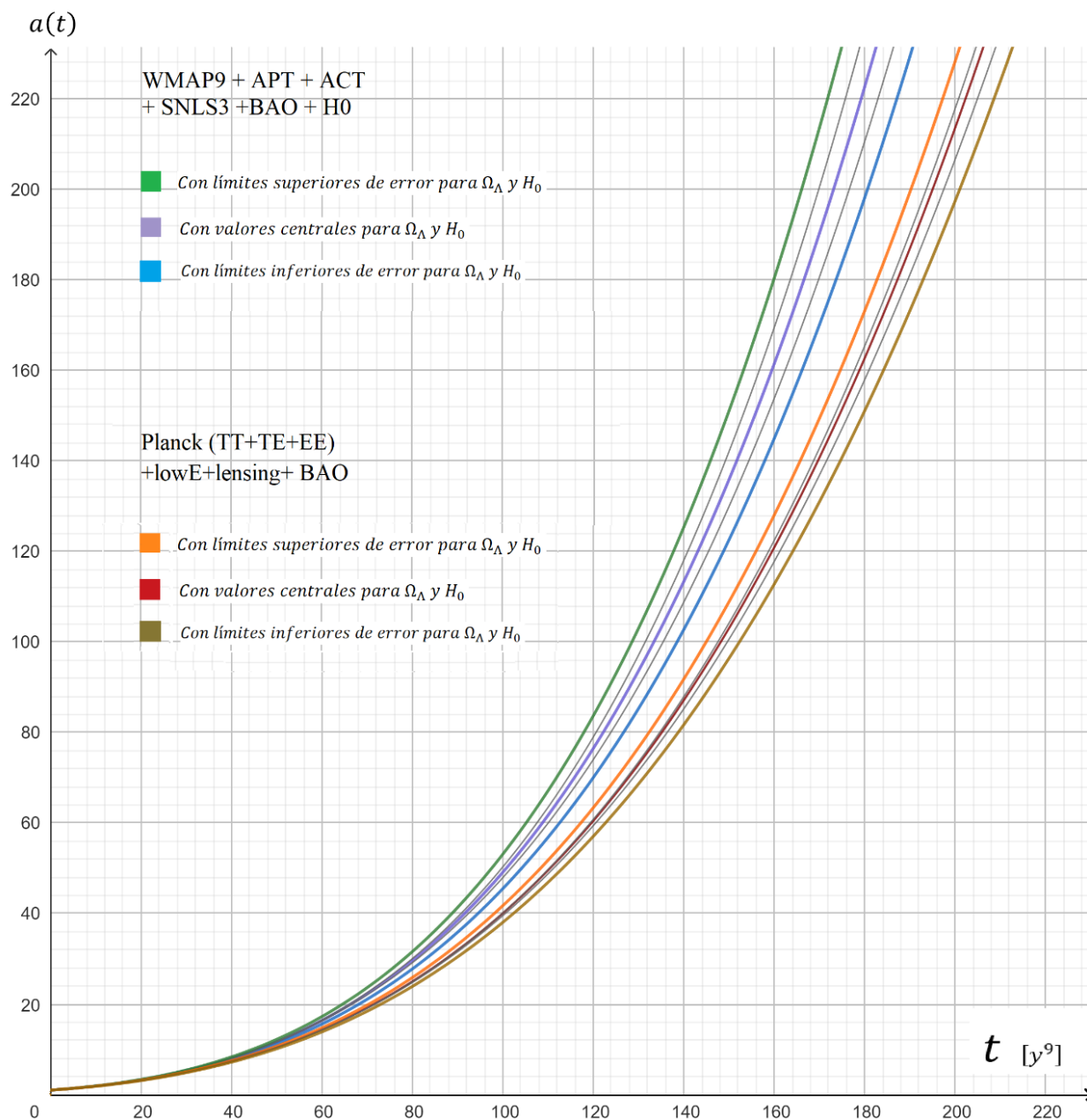
$$|H_0| = 7.113009846536 \times 10^{-2} \frac{1}{By}$$

cabe resaltar que el uso de estas unidades es apropiado, en primer lugar, para que la velocidad de la luz se pueda considerar 1 y, por otra parte, para visualizar la modelación requerida de la evolución en distancias y tiempos cosmológicos (en el orden de magnitud de los megaparsecs). Introduciendo, así, el valor del parámetro de Hubble y el parámetro de densidad en la ecuación (24) obtenemos el siguiente resultado

unidades estándar $\frac{km/s}{Mpc}$, no obstante, son necesarias para modelar la evolución en un margen de tiempo lo suficientemente grande como para que el cambio en el factor de escala del universo sea apreciable.

Figura 26

Factor de escala en función del tiempo a partir de los datos proporcionados por WMAP y Planck para un universo con constante cosmológica positiva y curvatura nula



Nota. La gráfica muestra los conjuntos de datos seleccionados de WMAP y Plack. Para cada conjunto se presentan los valores centrales y los límites superior e inferior de error en el factor de escala influenciados por los errores del parámetro de energía oscura y el parámetro de Hubble (ver tabla 5).

^a Las curvas grises representan errores intermedios introducidos al considerar el límite superior para el parámetro de energía oscura y el inferior para el parámetro de Hubble y viceversa.

* Para el momento actual ($t = 0$), se considera $a_0 = a(t = 0) = 1$, ya que tomamos el tamaño del universo en el presente como marco de referencia; esto quiere decir que el factor de escala en cualquier otro tiempo indica el tamaño del universo en ese instante respecto a su tamaño actual.

Tabla 5

Magnitud y porcentaje de error en los parámetros de Hubble y energía oscura

Parámetro	WMAP + APT + ACT + SNLS3 +BAO + H_0		Planck (TT+TE+EE) +lowE+lensing+ BAO	
	Magnitud	Porcentaje	Magnitud	Porcentaje
$\delta^+ H_0$	$0.78 \frac{km/s}{Mpc}$	1.1215%	$0.42 \frac{km/s}{Mpc}$	0.6207%
$\delta^- H_0$	$0.79 \frac{km/s}{Mpc}$	1.1359%		
$\delta^+ \Omega_\Lambda$	0.0093	1.2980%	0.0056	0.8129%
$\delta^- \Omega_\Lambda$	0.0094	1.3119%		

Nota. Los errores superior e inferior para cada parámetro aparecen denotados como δ^+ y δ^- , respectivamente.

Con base en los datos proporcionados por WMAP y Planck y su ajuste al modelo derivado de las ecuaciones de campo, se obtuvo la expresión (24) para el factor de escala. Esta estimación presenta un margen de error debido a la influencia del error individual de los parámetros H_0 y Ω_Λ . A continuación, utilizaremos el método de propagación de errores para hallar δa .

$$|a| = a_0 (|\Omega_\rho| |H_0| t + 1)^{|\Omega_\rho|^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta a &= \frac{\partial a}{|\Omega_\rho|} \delta \Omega_\rho + \frac{\partial a}{|H_0|} \delta H_0 \\ \frac{\partial a}{|\Omega_\rho|} &= -\frac{\ln(|a|^{\Omega_\rho})|a|}{|\Omega_\rho|^2} + \frac{t|H_0||a|^{1-\Omega_\rho}}{|\Omega_\rho|} \\ \frac{\partial a}{|H_0|} &= t(|\Omega_\rho||H_0|t + 1) \frac{1-|\Omega_\rho|}{|\Omega_\rho|} \end{aligned}$$

Luego,

$$\delta a = \left| -\frac{\ln(|a|^{\Omega_\rho})|a|}{|\Omega_\rho|^2} + \frac{t|H_0||a|^{1-\Omega_\rho}}{|\Omega_\rho|} \right| \delta \Omega_\rho + \left| t(|\Omega_\rho||H_0|t + 1) \frac{1-|\Omega_\rho|}{|\Omega_\rho|} \right| \delta H_0 \quad (25)$$

expresa el margen de error en el factor de escala como función del tiempo¹³.

La figura 26 y la ecuación (25) muestran que el error en la estimación del factor de escala es también una función que crece con el tiempo. Aunque la ecuación (25) no evidencia de forma inmediata la magnitud del error, señala que para cada instante se conoce un intervalo de valores posibles para el factor de escala que se hace mayor con el error en los parámetros H_0 y Ω_ρ .

Estimación de la velocidad actual y aceleración de la expansión

La variación en el tiempo del factor de escala (esto es, la velocidad de expansión del universo) en el instante actual está dada por

$$\dot{a}_0 = H_0 a_0 = H_0$$

la aceleración, por otra parte, está dada, según la ecuación (18), por

$$\ddot{a}_0 = \frac{\dot{a}_0^2}{a_0} \Omega_\Lambda = H_0^2 \Omega_\Lambda$$

si aplicamos la propagación de errores a esta expresión, obtenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \delta \ddot{a}_0 &= \frac{\partial \ddot{a}_0}{|\Omega_\Lambda|} \delta \Omega_\Lambda + \frac{\partial \ddot{a}_0}{|H_0|} \delta H_0 \\ \delta \ddot{a}_0 &= |H_0|^2 \delta \Omega_\Lambda + 2|H_0||\Omega_\Lambda| \delta H_0 \end{aligned}$$

utilizando los valores proporcionados por WMAP y Planck, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 6.

¹³ Las barras utilizadas en la ecuación (24) para los factores que acompañan a $\delta \Omega_\rho$ y δH_0 expresan valor absoluto, a diferencia las magnitudes individuales que se expresan entre barras para referir los valores centrales en relación con el margen de error.

Tabla 6

Valores estimados para la aceleración actual de la expansión del universo con magnitudes y porcentajes de error

WMAP			Planck	
$ \ddot{a}_0 $	$1.1232 \times 10^{-16} \frac{km/s^2}{Mpc}$		$1.022 \times 10^{-16} \frac{km/s^2}{Mpc}$	
Error	Magnitud	Porcentaje	Magnitud	Porcentaje
$\delta^+ \ddot{a}_0$	$3.9929 \times 10^{-18} \frac{km/s^2}{Mpc}$	3.5650%	$2.0997 \times 10^{-18} \frac{km/s^2}{Mpc}$	2.0545%
$\delta^- \ddot{a}_0$	$4.0095 \times 10^{-18} \frac{km/s^2}{Mpc}$	3.5697%		

Conclusiones

En el presente trabajo se llevó a cabo un proceso de análisis en el que se vincularon aspectos teóricos y observacionales para ofrecer una caracterización del estado actual de evolución del universo en relación con sus propiedades físicas y geométricas. Para ello se han tomado los valores del parámetro de Hubble, parámetro de densidad y parámetro de constante cosmológica, el cual se empleó bajo la interpretación de una presión negativa que contrarresta la gravedad (energía oscura), con el respaldo de la evidencia basada en el análisis de supernovas tipo Ia.

El margen de valores de los parámetros cosmológicos con el cual se trabajó a partir de los datos proporcionados por las misiones WMAP y Planck con las restricciones del modelo LCDM se presenta en la tabla 7.

Tabla 7

Resumen del intervalo de valores para los parámetros cosmológicos utilizados

	Mínimo	Máximo
Taza de expansión del universo en el momento actual	$67.19 \frac{km/s}{Mpc}$ (Planck)	$70.33 \frac{km/s}{Mpc}$ (WMAP)
Parámetro de densidad	0.2742 (WMAP)	0.3167 (Planck)
Parámetro de energía oscura	0.6833 (Planck)	0.7258 (WMAP)
Curvatura	asumida como 0	

A continuación, algunas consideraciones referentes a estos resultados.

El universo, según las observaciones de la radiación cósmica de fondo de microondas se aproxima mucho a ser espacialmente euclídeo. Aunque esto resulta extraño desde el punto de vista de la relatividad general al considerar el efecto que los cuerpos masivos deberían tener sobre la geometría espacial, resulta cierto si se admite el principio cosmológico, a partir del cual se puede afirmar que cualquier curvatura espacial corresponde a un efecto local, pero a gran escala, debida la homogeneidad e isotropía del universo, éste resulta ser plano.

Pese a lo anterior, el principio cosmológico es una suposición referente a la distribución espacial de energía y materia; el universo espaciotemporalmente no puede concebirse como homogéneo ni isotrópico, como se ha demostrado en este trabajo, pues ello implicaría que tanto en el espacio como a lo largo del tiempo se mantenga invariante y, contrario a ello, los resultados que se obtuvieron respaldan la imagen de un universo que ha evolucionado desde el pasado y continuará haciéndolo. Esto implica que, en diferentes instantes de su historia, el universo no es el mismo, sumado al hecho de que la tasa misma de expansión resulta variante con el tiempo, lo que indica que la evolución no es lineal y por ende podemos pensar la historia del universo como un proceso irreversible con una direccionalidad privilegiada para los acontecimientos cosmológicos, lo que de forma inmediata restringe la posibilidad de considerarlo temporalmente isotrópico.

Así, en la lectura de los resultados de este trabajo no debe perderse de vista que magnitudes como el factor de escala y el parámetro de curvatura aluden a las componentes espaciales del espacio-tiempo, de modo que la expansión del universo aquí, se refiere al cambio en la métrica espacial.

Por otra parte, se ha mencionado que el parámetro de curvatura puede considerarse independiente de los demás parámetros, con lo cual el referente teórico obtenido de las ecuaciones de Friedmann donde la suma de los parámetros Ω_ρ , Ω_Λ y Ω_k es igual a la unidad, sumado a la consideración del parámetro de curvatura nulo, permite interpretar los parámetros de densidad y energía oscura como la proporción en que se encuentran las componentes del universo. Con base en esto, los resultados corresponden a un universo con un contenido de energía oscura entre el 68.3% y 72.6% y un contenido de materia y energía entre el 31.7% y 27.4%, respectivamente, siendo estas dos componentes las responsables de la evolución cósmica. De esta forma, el dominio de energía oscura resulta coherente con la imagen presentada de un universo que se expande aceleradamente.

Gracias a los resultados matemáticos proporcionados por las ecuaciones de campo y su solución bajo las consideraciones de homogeneidad e isotropía presentes en la métrica FLRW, fue posible utilizar los valores de los parámetros cosmológicos para estimar la aceleración de la expansión del universo. El resultado obtenido, incluyendo los márgenes de error calculados, fue una aceleración máxima de $1.1631 \times 10^{-16} \frac{km/s^2}{Mpc}$ y mínima de $1.0010 \times 10^{-16} \frac{km/s^2}{Mpc}$. Este

intervalo contempla la influencia de los errores en el valor de los parámetros cosmológicos proporcionado por las dos misiones en cuestión.

Dicho resultado se ha presentado empleando un conjunto de unidades que permita su fácil interpretación física; la velocidad expresada en $\frac{km/s}{Mpc}$ y la aceleración en $\frac{km/s^2}{Mpc}$ ponen en evidencia los efectos locales de la expansión global, pues describen el movimiento de un objeto que se encuentra a una distancia determinada de nosotros por efecto de la expansión; no hay que perder de vista que en un sistema que se expande, a diferencia de lo que ocurre en un desplazamiento rígido, la velocidad de todos los puntos no es la misma, sino que crece con la distancia, lo mismo ocurre con la aceleración, en caso de que exista. De ahí que los efectos de la expansión sean más fáciles de identificar si se indica la velocidad y aceleración a distancias específicas.

Cabe recordar que en la mecánica clásica toda aceleración en un sistema se entiende como el resultado de una fuerza. Si bien, en el marco de la relatividad general no se concibe el concepto de fuerza, debe admitirse una acción necesaria sobre el universo mismo que permita explicar su expansión acelerada. La interpretación correspondiente desde esta teoría es la de un agente necesario que realiza una acción cuyo efecto es un cambio métrico; en este caso, el agente es la energía oscura y su efecto una presión negativa que acelera el cambio en el factor de escala espacial.

La figura 26 resume gran parte de los resultados obtenidos; la imagen que nos presenta de inmediato es la de un universo en expansión acelerada. Según esta gráfica, donde se muestra el factor de escala en función del tiempo, en los próximos miles de millones de años los valores estimados para el factor de escala a partir del conjunto de datos de WMAP y el de Planck, apenas difieren entre sí. En veinte mil millones de años, por ejemplo, el universo tendría 4 veces su tamaño actual, según ambas fuentes de información. En cuarenta mil millones de años, aproximadamente, se empieza a acentuar la divergencia entre los resultados, haciéndose evidente tanto la desviación estadística en cada conjunto de datos como la diferencia entre ambos conjuntos. Si observamos tiempos más distantes, por ejemplo los cien mil millones de años, se señala que el universo tendría entre 38 y 42 veces su tamaño actual, según el conjunto de datos de Planck y entre 46 y 54 veces, según WMAP. También podemos evidenciar, a partir de ello, la precisión alcanzada por la misión Planck respecto a la de WMAP; particularmente para este

instante, los datos de WMAP proporcionan un intervalo de error de ocho veces el tamaño actual del universo, mientras que a partir de los datos de Planck el intervalo de error es de la mitad.

Para cada instante el valor del factor de escala es más grande según el conjunto WMAP que el de Planck, lo que resulta coherente teniendo en cuenta que las estimaciones tanto del parámetro de Hubble como del parámetro de energía oscura de WMAP son también mayores.

Un aspecto importante que se pone de presente es la inmensidad de los órdenes de magnitud en que se presentan los resultados. Desde las suposiciones mismas que están a la base de esta caracterización, tales como el principio cosmológico, nos topamos con tiempos y distancias que están sobre los millones de años luz. Así pues, tanto la expansión del universo como su aceleración son efectos inapreciables localmente, como lo pone de presente nuestra experiencia inmediata.

En este orden de ideas, los resultados obtenidos mediante un análisis como el que aquí se realizó, parecen tan lejanos de nuestro margen usual de conocimiento, e incluso, de nuestra intuición, que podríamos considerar que la cosmología se encuentra más cerca del terreno de la especulación, teniendo en cuenta, además, la compleja red que se teje entre las evidencias y los modelos teóricos. Pese a ello, podemos apreciar un rigor presente en los tratamientos técnicos y matemáticos descritos a lo largo de este trabajo a tal grado que indiscutiblemente contamos con un campo de conocimiento cuyo objeto de estudio es el universo mismo, aunque el costo, como parece inherente al progreso en la estructuración científica de una imagen de mundo, sea alejarnos de la más objetiva experiencia factual.

Lo anterior nos proporciona, a su vez, una base para dimensionar el desarrollo alcanzado en nuestros días por la comunidad científica principalmente en el ámbito instrumental y experimental, lo cual ha posibilitado un enriquecimiento considerable en el ámbito interpretativo de las teorías científicas. Aunque ha transcurrido ya un siglo desde la aparición de la teoría general de la relatividad, podemos afirmar que, sin los avances técnicos propios de la ciencia actual, campos de estudio como la cosmología no contarían con un desarrollo tan amplio pese a la existencia anticipada de un marco teórico.

Consideraciones finales

Sobre el vínculo entre los fundamentos teóricos y la evidencia observacional

Si tuviésemos que resumir el procedimiento llevado a cabo para realizar la caracterización cosmológica aquí plantada, podríamos decir que se partió de un fundamento teórico relativista y, mediante de un conjunto de evidencias observacionales, se encontraron resultados numéricos que permitieron hacer una descripción más específica sobre el estado de evolución del universo. Esta, como juzgará el lector, es una descripción bastante simplista del trabajo realizado, pues no es estrictamente correcto dividir el proceso de configuración de un modelo cosmológico en una fase teórica y una fase observacional; como muestra de ello, ambos elementos están presentes desde el principio hasta el fin de este trabajo.

Para hacer un recuento breve, recordemos que uno de los primeros elementos teóricos que se utiliza (la métrica FLRW) se basa en consideraciones respaldadas por hechos muy concretos; el principio cosmológico y el indicio de que el universo no es estático. Aún cuando se tienen en cuenta estas consideraciones físicas para obtener una solución a las ecuaciones de campo, el resultado (ecuaciones de Friedmann), sigue conteniendo una cantidad sumamente elevada de posibles modelos cosmológicos; llegados a este punto, los parámetros cosmológicos cobran relevancia en la medida en que ayudan a delimitar estas posibilidades. No obstante, en la estimación de estos parámetros vuelve a aparecer esta dependencia mutua entre las observaciones y los modelos teóricos, que trasciende por mucho el simple hecho de introducir información en un modelo matemático. No en vano se mostró explícitamente una lista de resultados proporcionados por la misión WMAP donde se muestran de forma diferenciada los valores de los parámetros según distintos modelos cosmológicos, siendo elementales las consideraciones físicas y geométrica presentes en cada uno.

Las evidencias empíricas, por su parte, se leen en todos los casos desde representaciones teóricas. Obsérvese el ejemplo de las supernovas tipo Ia, que tan importante evidencia de la expansión acelerada resultan ser; en este tipo de eventos cósmicos la cantidad de variables implicadas es tan grande que resulta inevitable acudir a un importante conjunto de suposiciones. La estimación de distancias cósmicas mediante estos eventos tiene implícita la suposición de que se conocen muy bien los procesos físicos implicados. Tampoco se debe ignorar, en este sentido, cómo el desarrollo científico posibilita la ampliación de nuestras vías de conocimiento, pues los instrumentos experimentales dentro de la investigación fungen como una extensión del aparato

corpóreo. Así, es posible caracterizar objetos y acontecimientos que jamás podríamos presenciar directamente.

No podemos hablar, entonces, de un modelo teórico que sea el producto del mero pensamiento abstracto, de la misma forma en que no podemos hablar de una evidencia observacional sin un marco interpretativo. La evidencia objetiva no existe, en tanto su uso en la construcción de teorías científicas tiene que ser entendido a la luz de modelos previamente estructurados. Esta condición, podríamos afirmar, es inherente a la actividad científica. El presente trabajo, en este sentido, no proporciona más que un ejemplo sobre el complejo entramado entre los hechos y la recurrencia a la abstracción presentes en una descripción rigurosa de la naturaleza. Ciertamente, nuestra mente es capaz de ir más allá del mundo como se nos presenta, pero en ningún caso puede prescindir de él.

Consideraciones pedagógicas

Un importante ejercicio realizado durante el desarrollo de este trabajo tiene que ver con la identificación de dificultades al momento de incorporar elementos tanto de la teoría general de la relatividad como de la cosmología observacional para elaborar una comprensión adecuada de la forma en que se estructuran los modelos cosmológicos, particularmente, uno de expansión acelerada.

En primer lugar, cabe destacar la importancia de la metacognición a lo largo de cualquier proceso de aprendizaje, pues la construcción de comprensiones en torno a un tema es un proceso distinto en cada sujeto, por lo que una consciencia plena de los aspectos que posibilitan y dificultan el aprendizaje propio, así como el continuo planteamiento de preguntas y reflexiones sobre cada aprendizaje nuevo son un componente fundamental para potenciar dicho proceso. Este tipo de ejercicios es el que ha dado lugar a las reflexiones que se presentan a continuación.

La relatividad general, como uno de los elementos empleados en esta caracterización, es una teoría de difícil acceso epistémico dado el elevado grado de abstracción que implica entender fenómenos, en particular la gravedad, como resultados geométricos; la extensión de conceptos como trayectoria, curva, volumen o superficie a más de tres dimensiones es un proceso que sólo cobra un sentido global a través de las matemáticas; por grande que sea nuestro esfuerzo por comprender estos conceptos mediante extrapolaciones de los casos más sencillos, los límites de nuestro pensamiento se hacen evidentes cuando intentamos construir imágenes físicas de ellos.

Irremediablemente, nuestra experiencia es euclídea y tridimensional; como consecuencia, la representación de un objeto matemático como el espacio-tiempo va en contra de la intuición.

Muchas fuentes de divulgación tratan de realizar una aproximación a la relatividad general empleando representaciones en dimensiones inferiores. Desde la experiencia que significó la elaboración de este trabajo, se considera que estas herramientas son útiles e incluso necesarias para realizar una primera aproximación a la teoría. Como muestra de ello, en el primer capítulo, se hizo especial énfasis en el significado de las magnitudes tensoriales presentes en las ecuaciones de campo, acudiendo a representaciones tridimensionales. No obstante, se considera aquí la existencia de grados de comprensión; en la medida en que se van elaborando juicios más complejos frente a un tema específico, se hace necesario el abandono de algunas imágenes subsidiarias.

Una falencia que se evidenció en algunos sitios web de divulgación incluyendo monografías y piezas audiovisuales fue el uso inadecuado de estas herramientas, al elevarlas al grado de representaciones fidedignas de la realidad. Esto conlleva a una serie de interpretaciones erradas o, en el mejor de los casos, ambiguas del significado de la teoría. Por ejemplo, un error común es la falta de claridad sobre cuándo se hace referencia al espacio y cuándo al espacio-tiempo; en algunas fuentes se tratan ambos conceptos de forma indistinguible, no especificando, por ejemplo, cuándo se presenta una curvatura espaciotemporal y qué significado tiene, además de pasar casi por alto la necesidad de tratar indistintamente al tiempo de las tres dimensiones espaciales.

Por otra parte, la pretensión de reconstruir todo un modelo cosmológico procurando la mayor especificidad posible implica dos cosas; hacer un paso progresivo de los aspectos más sencillos a los más complejos y llevar una hilaridad histórica. Sin embargo, no se puede ser fiel a ambas cosas de forma simultánea, debido a que la historia de la ciencia no tiene un carácter lineal. En este sentido, un esfuerzo por reconstruir los hechos de la forma más cercana posible a como ocurrieron en el pasado, implicaría omitir claridades conceptuales e interpretativas que se introducen anticipadamente con fines pedagógicos.

Aunque los dos enfoques son válidos y útiles en la enseñanza, se considera que es posible buscar un equilibrio entre ambos, acudiendo a los textos originales más influyentes en la problemática que se esté abordando. En este caso, por ejemplo, dos trabajos que aportaron en gran medida fueron el desarrollo matemático de Lemaitre (1927) y las consideraciones

cosmológicas de Einstein (1919), los cuales permiten evidenciar algunos aspectos tanto empíricos como epistemológicos que dieron paso a la cosmología relativista, así como los resultados de Hubble (1929) y más tarde, del equipo de Adam Riess (1998) sobre el estudio de supernovas Ia, dos bases de contextualización observacional importantes en la configuración del modelo aquí presentado. Si bien estos cuatro referentes no son fuentes suficientes para un riguroso estudio histórico, permiten entender acontecimientos claves y poseen la característica común de brindan una buena parte del panorama en cosmología propio de las fechas en que fueron escritos. La lectura de las obras cumbre en la construcción de las teorías posibilita una mejor comprensión de los contextos problemáticos que dan lugar al desarrollo científico, de ahí su importancia en los ámbitos de enseñanza.

Finalmente, las consideraciones previas sobre la relación entre los modelos teóricos y el conocimiento empírico son también un elemento enriquecedor para la enseñanza de la ciencia, pues ayudan a desmentir las imágenes reduccionistas y lineales de la ciencia que muchas veces son apoyadas por los libros de texto y la divulgación incorrectamente documentada.

La cosmología relativista: un universo por descubrir

En el capítulo 3 se mencionó que la cosmología observacional se sirve de dos fuentes de estudio; la radiación cósmica de fondo de microondas (universo temprano) y el análisis de estructuras cósmicas observables y su distribución (universo tardío). Aunque en el uso del modelo teórico a la luz de bases empíricas se emplearon los conjuntos de datos proporcionados por las misiones Planck y WMAP que incorporasen en mayor medida información obtenida del universo tardío, los resultados que se utilizaron se enmarcan principalmente en el análisis de la radiación cósmica de fondo, pues éste era el objeto de estudio de ambas misiones. Cuando se consultan otras fuentes de datos basadas sólo en el análisis de supernovas y lentes gravitacionales los valores estimados para los parámetros cosmológicos difieren en una buena parte respecto a los que aquí se presentan. Un buen ejemplo son los proyectos SH0ES (supernovae, H_0 , for the Equation of State of dark energy) y H0LiCOW (H0 Lenses in COSMOGRAIL's Wellspring) que proporcionan valores mayores para la tasa de expansión del universo. La aparente inconsistencia que existe entre los datos obtenidos del universo temprano y el universo tardío son un problema abierto en cosmología. Éste, particularmente, se conoce como la tensión H_0 y constituye un campo de investigación donde la validez del modelo estándar LCDM es objeto de discusión.

Esto pone de presente que los modelos cosmológicos derivados de la teoría de la relatividad, están lejos de ser perfectos y, como cualquier modelo utilizado a lo largo de la historia de la física, adolecen de inconsistencias o son incompletos. Esto, lejos de desanimarnos, es una fuente de motivación. Aunque en este trabajo no se hizo alusión explícita a las tensiones cosmológicas, se considera que la presente reconstrucción del modelo de universo en expansión acelerada brinda un panorama amplio en cuanto a algunas bases teóricas, hechos históricos, métodos de observación y sistematización que permiten al lector familiarizarse con el contexto actual de la cosmología relativista, dejándolo un poco más cerca de uno de los problemas actuales que atañen a la ciencia.

Jorge Luis Borges refirió en un ensayo de 1951 titulado “la esfera de Pascal” las distintas formas en que algunos hombres acudieron a la idea de “una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y su circunferencia en ninguna”; el poeta Jenófanes utilizó la sentencia para aludir a Dios, Parménides al ser, Giordano Bruno y Pascal al universo. Añadamos que, de existir un universo infinito, éste ciertamente es el del conocimiento, que lejos de agotarse cuanto más profundas son nuestras reflexiones sobre la naturaleza, crece hasta desbordar los límites por ella forjados en nuestra mente.

Referencias

- Castañeda, L., & Cáceres, D. (2007). Oscilaciones acústicas y el espectro de potencias. *Revista Integración*, 25(2), 139-145.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327028433005>
- D'Inverno, R. (1992). *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press.
- Dialect. (2022). *The meaning of the metric tensor* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=Dn0ZZRVuJcU&t=90s>
- Eigenchris. (2022). *Relativity 110f: Cosmology - Friedmann Equations Derivation + Universe Evolution Models (FINALE)* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=yIKye8SJcBc&t=1207s>
- Einstein, A. (1934). Notas sobre el origen de la teoría de la Relatividad General (J.M. Alvarez Flores y A. Goldar, Trad. 1983). En R.B.A. Proyectos (Ed.), *Albert Einstein sobre la teoría de la relatividad y otras aportaciones científicas* (pp 94-98). Sarpe.
- Einstein, A. (1917) Cosmological considerations in the General Theory of Relativity. En M. J. Klein, A. J. Kox, y S Robert. (Ed.), *The Berlin Years: Writings 1914-1917* (pp. 540-552) (A. Engel, Trad. 1997).
<https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/>
- English ScienceClic. (2020). *The maths of General Relativity (6/8) - Energy fluxes* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=JKQMre-bze4&t=8s>
- Friedmann, A. (1922). On the curvature of space. *Zeitschrift für Physik*, 10, 377-386. (B. Doyle, Trad.) https://cosmology.education/documents/friedmann_1922.pdf
- HalleyUIS. (2021). *Astrofísica extragaláctica* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=iniFhvVk9AY&t=42s>
- Hubble, E. (1929). A Relation Between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15 (3), 168-173. <https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.15.3.168>
- Ruiz, C. (2020). La constante cosmológica y la reaceleración del universo.
<http://www.fisicafundamental.net/carlos/energiaoscura.html>
- Instituto de Astrofísica de Canarias [IFC]. *Cuando el universo pisó el acelerador*. (2012, 30 de marzo).

- <https://www.iac.es/es/divulgacion/noticias/cuando-el-universo-piso-el-acelerador>
 Instituto de Física Teórica [IFT]. (2018). El fondo cósmico de microondas [Video]. YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=jPoDO_1B5B0&t=737s
- Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis [LAMBDA] - WMAP DR5
Cosmological Parameters Model/Data Set Matrix.
<https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/wmap/dr5/parameters.html>
- Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis [LAMBDA] - *Data Hosted on LAMBDA.* <https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/>
- Lemaître, G. (1928). A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91(5), 483-490. <https://doi.org/10.1093/mnras/91.5.483>
- Mach, E. (1893). La ciencia de la mecánica – Concepción newtoniana del tiempo, del espacio y del movimiento. En Pearce Williams, L. (Ed.), *La Teoría de la Relatividad: sus orígenes e impacto sobre el pensamiento moderno* (pp. 25-33) (M. Paredes, Trad. 1993). Altaya.
- NASA Missions A-Z. (2023, 15 de mayo). <https://www.nasa.gov/missions>
- NASA Scientific Visualization Studio [SVS]. *Type Ia Supernovae Animations.* (2021, 26 de mayo). <https://svs.gsfc.nasa.gov/20344>
- NASA. *The Universe Comes into Sharper Focus.* (2017, 7 de agosto).
https://www.nasa.gov/mission_pages/planck/multimedia/pia16874.html
- Newton, I. (1686). Principios matemáticos de la filosofía natural - Escolio. En Pearce Williams, L. (Ed.), *La Teoría de la Relatividad: sus orígenes e impacto sobre el pensamiento moderno* (pp. 17-24) (M. Paredes, Trad. 1993). Altaya.
- Peña, L. (2015). *Historia del modelo cosmológico estándar LCDM: la cosmología física tras del modelo del big bang.*
 [Trabajo fin de master; Universidad Nacional de Educación a Distancia].
<http://62.204.194.45/fez/view/bibliuned:masterFilosofiaLogica-Pfluis>
- Planck Collaboration. (2021). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641 A6. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910e>
- Riess, A. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116, 1009-1038.
<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/300499>

- Sánchez, J.M. (1983). *El origen y desarrollo de la Relatividad*. Alianza.
- Torretti, R. (1994). *La geometría del universo y otros ensayos de filosofía natural*. Universidad de los Andes Venezuela.
- Tafalla, M. (2014). *La expansión acelerada del universo*. Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid.
<https://astronomia.ign.es/web/guest/oan/anuario#2005-2021>
- The WMAP Science Working Group. (2012). *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP): Nine-Year explanatory supplement*
https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/wmap/dr5/pub_papers/nineyear/supplement/WMAP_supplement.pdf
- Wilkinson Microwave Anisotropy Probe [WMAP]. (2017, 22 de diciembre).
<https://map.gsfc.nasa.gov/>

Anexos

Anexo A

Deducción de la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson Walker

Dado que se requiere expresar de forma compacta la métrica espacial de las variedades tridimensionales esférica, plana e hiperbólica, se procede a hallar, como primera medida, el tensor métrico correspondiente a cada una de ellas de forma independiente.

Las componentes del tensor métrico se definen a partir de los productos internos entre los elementos de la base del sistema coordenado.

$$\overline{g}_{ij} = \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j \quad (\text{A.1})$$

Denotaremos con barras las coordenadas, componentes y bases de los sistemas no euclídeos.

Los elementos de la base se calculan a partir de las derivadas parciales respecto a cada una de las coordenadas del mismo sistema, es decir:

$$\overline{e}_i = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^p} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} e_p \quad (\text{A.2})$$

$$\overline{e}_j = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^q} = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} e_q$$

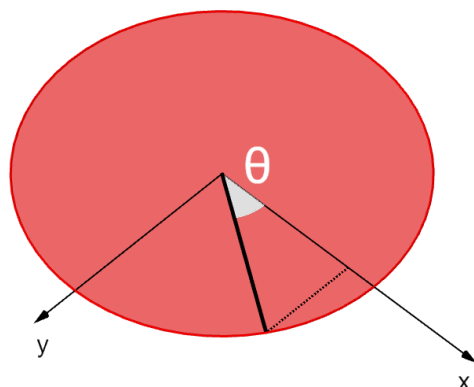
De forma que, de (1) resulta:

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} e_p \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} e_q = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} e_p \cdot e_q \quad (\text{A.3})$$

Por ende, para hallar las componentes del tensor métrico se requiere conocer las transformaciones que asocian las coordenadas de cada uno de los sistemas geométricos a coordenadas rectangulares euclídeas.

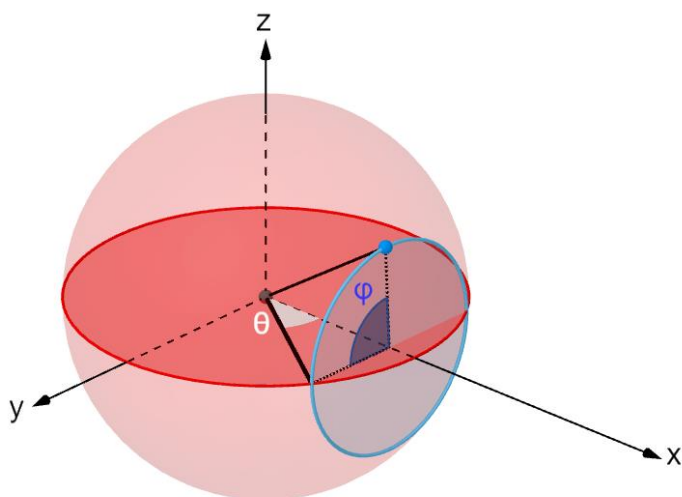
Tensor métrico de una 3-esfera

Para hallar la transformación de coordenadas del espacio euclídeo a una variedad esférica de tres dimensiones, podemos hacer una extrapolación de las transformaciones usadas para una 1-esfera y una 2-esfera, añadiendo, para el caso de la 3-esfera, el parámetro angular χ , como se muestra en la tabla A1.

Tabla A.1*Parametrización de una superficie esférica en una, dos y tres dimensiones***1-Esfera**

$$x = R \cos\theta \quad (\text{A.4})$$

$$y = R \sin\theta$$

2-Esfera

$$x = R \cos\theta$$

$$y = R \sin\theta \cos\varphi \quad (\text{A.5})$$

$$z = R \sin\theta \sin\varphi$$

3-Esfera

$$x = R \cos\theta$$

$$y = R \sin\theta \cos\varphi$$

$$z = R \sin\theta \sin\varphi \cos\chi$$

$$w = R \sin\theta \sin\varphi \sin\chi$$

(A.6)

Para realizar las operaciones con índices, denotamos las coordenadas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcl} x \sim x^1 & & \theta \sim \overline{x^1} \\ y \sim x^2 & ; & \varphi \sim \overline{x^2} \\ z \sim x^3 & & \chi \sim \overline{x^3} \\ w \sim x^4 & & \end{array}$$

Por ende, los subíndices p y q tomarán valores desde 1 hasta 4 y los i y j desde 1 hasta 3.

Para encontrar las componentes del tensor métrico conforme a la ecuación (A.3), calculamos todas las derivadas parciales a partir de la transformación de coordenadas (A.6):

Tabla A.2

Derivadas parciales de las variables x^i respecto a las variables $\overline{x^j}$ a partir de la parametrización de una 3-esfera

$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -R \sin \theta$	$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0$	$\frac{\partial x}{\partial \chi} = 0$
$\frac{\partial y}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \varphi$	$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -R \sin \theta \sin \varphi$	$\frac{\partial y}{\partial \chi} = 0$
$\frac{\partial z}{\partial \theta} = R \cos \theta \sin \varphi \cos \chi$	$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = R \sin \theta \cos \varphi \cos \chi$	$\frac{\partial z}{\partial \chi} = -R \sin \theta \sin \varphi \sin \chi$
$\frac{\partial w}{\partial \theta} = R \cos \theta \sin \varphi \sin \chi$	$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = R \sin \theta \cos \varphi \sin \chi$	$\frac{\partial w}{\partial \chi} = R \sin \theta \sin \varphi \cos \chi$

y los productos $e_p \cdot e_q$, que podemos deducir a partir de la siguiente relación:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

que indica la forma de medir distancias en coordenadas euclídeas sobre la superficie de la 3-esfera. En ella podemos ver que los productos $e_p \cdot e_q$ se corresponden con los elementos de la matriz identidad, es decir:

$$e_p \cdot e_q = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ 1 & \text{si } p = q \end{cases}$$

ya que se cumple la relación:

$$R^2 = \delta_{pq} x^p x^q$$

lo que quiere decir que podemos reducir la expresión (A.3) a:

$$\overline{g_{ij}} = \frac{\partial x^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \quad (\text{A.7})$$

calculamos las componentes $\overline{g_{ij}}$ sustituyendo las derivadas parciales de la tabla A.2 en la ecuación (A.7)

$$\begin{aligned} \overline{g_{11}} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \\ \overline{g_{11}} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^2}{\partial x^1} + \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \frac{\partial x^3}{\partial x^1} + \frac{\partial x^4}{\partial x^1} \frac{\partial x^4}{\partial x^1} \\ \overline{g_{11}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g_{11}} &= R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \chi \\ &\quad + R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \chi \end{aligned}$$

simplificando con ayuda de la identidad $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, se obtiene:

$$\overline{g_{11}} = R^2$$

del mismo modo, calculamos las demás componentes:

$$\begin{aligned} \overline{g_{12}} &= \overline{g_{21}} = \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^p}{\partial x^2} \\ \overline{g_{12}} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \overline{g_{12}} &= -R^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \chi \\ &\quad + R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \chi \\ \overline{g_{12}} &= \overline{g_{21}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g_{13}} &= \overline{g_{31}} = \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^p}{\partial x^3} \\ \overline{g_{13}} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \chi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \chi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \chi} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \chi} \\ \overline{g_{13}} &= -R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi \cos \chi \sin \theta \sin \chi + R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi \sin \chi \sin \theta \cos \chi \\ \overline{g_{13}} &= \overline{g_{31}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{g_{22}} &= \frac{\partial x^p \partial x^p}{\partial x^2 \partial x^2} \\ \overline{g_{22}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 \\ \overline{g_{22}} &= R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cos^2 \chi + R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \chi \\ \overline{g_{22}} &= R^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{g_{23}} &= \overline{g_{32}} = \frac{\partial x^p \partial x^p}{\partial x^2 \partial x^3} \\ \overline{g_{23}} &= \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \chi} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \chi} + \frac{\partial z \partial z}{\partial \varphi \partial \chi} + \frac{\partial w \partial w}{\partial \varphi \partial \chi} \\ \overline{g_{23}} &= -R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \chi \sin \varphi \sin \chi + R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \chi \sin \varphi \cos \chi \\ \overline{g_{23}} &= \overline{g_{32}} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{g_{33}} &= \frac{\partial x^p \partial x^p}{\partial x^3 \partial x^3} \\ \overline{g_{33}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \chi}\right)^2 \\ \overline{g_{33}} &= R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \chi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \chi \\ \overline{g_{33}} &= R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

El tensor métrico escrito de forma matricial, utilizando los resultados obtenidos, es:

$$\overline{g} = \begin{pmatrix} \overline{g_{11}} & \overline{g_{12}} & \overline{g_{13}} \\ \overline{g_{21}} & \overline{g_{22}} & \overline{g_{23}} \\ \overline{g_{31}} & \overline{g_{32}} & \overline{g_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

que indica las componentes de la métrica espacial de una 3-esfera de radio R .

Tensor métrico del espacio plano \mathbf{R}^3

La métrica euclídea está dada por las componentes de la matriz identidad $\delta_{pq} = g_{pq}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

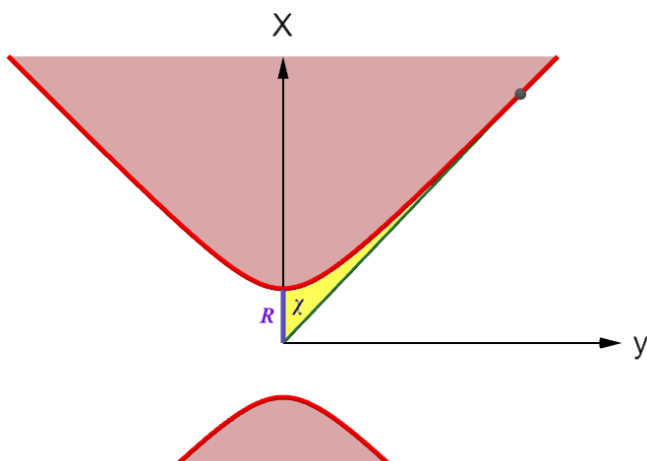
que, en coordenadas esféricas (utilizando la ecuación (A.7) y las derivadas parciales que resultan de la transformación de coordenadas (A.5)), se expresa de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

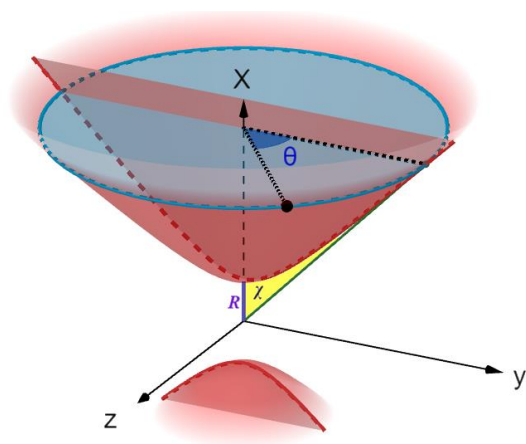
aquí, es importante tener en cuenta que las coordenadas independientes en la métrica de la 3-esfera son θ , φ y χ ; mientras que en la métrica del espacio plano son r , θ y φ . Esto se debe a que, en el primer caso, estamos analizando la geometría intrínseca de una superficie esférica tridimensional, mientras que en el segundo caso sólo estamos aplicando un cambio de coordenadas al espacio euclídeo, por lo tanto, es necesario diferenciar entre R , que es una constante en la ecuación (A.8) y r , que es una coordenada en la ecuación (A.9).

Tensor métrico del espacio hiperbólico tridimensional

En este caso, procedemos de la misma forma que para la 3-esfera; añadimos un parámetro angular (en este caso φ) para añadir una dimensión a la superficie hiperbólica de dos dimensiones y escribimos un conjunto de ecuaciones que dé la transformación entre los parámetros angulares y las coordenadas rectangulares y que tenga la misma forma que las transformaciones aplicadas en dimensiones menores.

Tabla A.3*Parametrización de una superficie hiperbólica en una, dos y tres dimensiones***Espacio hiperbólico unidimensional**

$$\begin{aligned}x &= R \cosh \chi & (A.10) \\y &= R \sinh \chi\end{aligned}$$

Espacio hiperbólico bidimensional

$$\begin{aligned}x &= R \cosh \chi \\y &= R \sinh \chi \cos \theta & (A.11) \\z &= R \sinh \chi \sin \theta\end{aligned}$$

Espacio hiperbólico tridimensional

$$\begin{aligned}x &= R \cosh \chi \\y &= R \sinh \chi \cos \theta \\z &= R \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi \\w &= R \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi\end{aligned} \quad (A.12)$$

Para realizar las operaciones con índices, denotamos las coordenadas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} x \sim x^1 \\ y \sim x^2 \\ z \sim x^3 \\ w \sim x^4 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \chi \sim \overline{x^1} \\ \theta \sim \overline{x^2} \\ \varphi \sim \overline{x^3} \end{array}$$

calculamos todas las derivadas parciales a partir de la transformación de coordenadas (A.12):

Tabla A.4

Derivadas parciales de las variables x^i respecto a las variables $\overline{x^J}$ a partir de la parametrización de una variedad hiperbólica en tres dimensiones

$\frac{\partial x}{\partial \chi} = R \sinh \chi$	$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0$
$\frac{\partial y}{\partial \chi} = R \cosh \chi \cos \theta$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = -R \sinh \chi \sin \theta$	$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$
$\frac{\partial z}{\partial \chi} = R \cosh \chi \sin \theta \cos \varphi$	$\frac{\partial z}{\partial \theta} = R \sinh \chi \cos \theta \cos \varphi$	$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -R \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi$
$\frac{\partial w}{\partial \chi} = R \cosh \chi \sin \theta \sin \varphi$	$\frac{\partial w}{\partial \theta} = R \sinh \chi \cos \theta \sin \varphi$	$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = R \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi$

y los productos $e_p \cdot e_q$, a partir de la relación:

$$-R^2 = -x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

que es consistente con la parametrización (A.12) e indica la forma de medir distancias en coordenadas euclídeas sobre el espacio tridimensional hiperbólico. Nótese que aquí el signo negativo del lado izquierdo de la ecuación no afecta la medida de la distancia, ya que ésta es invariante y, por ende, no depende del sistema de coordenadas. De dicha relación, podemos deducir que:

$$g_{pq} = e_p \cdot e_q = \begin{cases} -1 & \text{si } p = q = 1 \\ 1 & \text{si } p = q = 2, 3 \text{ o } 4 \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

De forma que se cumple la relación:

$$R^2 = g^{pq} x^p x^q$$

calculamos las componentes \overline{g}_{ij} sustituyendo las derivadas parciales de la tabla A.4 y los productos escalares (A.13) en la ecuación (A.3):

$$\begin{aligned}\overline{g}_{11} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^q}{\partial x^1} e_p \cdot e_q \\ \overline{g}_{11} &= -\frac{\partial x^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} e_1 \cdot e_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^2}{\partial x^1} e_2 \cdot e_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \frac{\partial x^3}{\partial x^1} e_3 \cdot e_3 + \frac{\partial x^4}{\partial x^1} \frac{\partial x^4}{\partial x^1} e_4 \cdot e_4 \\ \overline{g}_{11} &= -\left(\frac{\partial x}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \chi}\right)^2 \\ \overline{g}_{11} &= -R^2 \sinh^2 \chi + R^2 \cosh^2 \chi \cos^2 \theta + R^2 \cosh^2 \chi \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ &\quad + R^2 \cosh^2 \chi \sin^2 \theta \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

simplificando con ayuda de las identidades $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ y $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$, se obtiene:

$$\overline{g}_{11} = R^2$$

del mismo modo, calculamos las demás componentes:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{12} &= \overline{g}_{21} \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^q}{\partial x^2} e_p \cdot e_q \\ \overline{g}_{12} &= -\frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \chi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \overline{g}_{12} &= -R^2 \cosh \chi \cos \theta \sinh \chi \sin \theta + R^2 \cosh \chi \sin \theta \cos^2 \varphi \sinh \chi \cos \theta \\ &\quad + R^2 \cosh \chi \sin \theta \sin^2 \varphi \sinh \chi \cos \theta \\ \overline{g}_{12} &= \overline{g}_{21} = 0 \\ \overline{g}_{13} &= \overline{g}_{31} = \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^q}{\partial x^3} e_p \cdot e_q \\ \overline{g}_{13} &= -\frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \chi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \overline{g}_{13} &= -R^2 \cosh \chi \sin^2 \theta \cos \varphi \sinh \chi \sin \varphi + R^2 \cosh \chi \sin^2 \theta \sin \varphi \sinh \chi \cos \varphi \\ \overline{g}_{13} &= \overline{g}_{31} = 0 \\ \overline{g}_{22} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^2} \frac{\partial x^q}{\partial x^2} e_p \cdot e_q \\ \overline{g}_{22} &= -\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \\ \overline{g}_{22} &= R^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta + R^2 \sinh^2 \chi \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sinh^2 \chi \cos^2 \theta \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

$$\overline{g_{22}} = R^2 \sinh^2 \chi$$

$$\overline{g_{23}} = \overline{g_{32}} = \frac{\partial x^p}{\partial x^2} \frac{\partial x^q}{\partial x^3} e_p \cdot e_q$$

$$\overline{g_{23}} = -\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$\overline{g_{23}} = -R^2 \sinh^2 \chi \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + R^2 \sinh^2 \chi \cos \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi +$$

$$\overline{g_{23}} = \overline{g_{32}} = 0$$

$$\overline{g_{33}} = \frac{\partial x^p}{\partial x^3} \frac{\partial x^q}{\partial x^3} e_p \cdot e_q$$

$$\overline{g_{33}} = -\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$\overline{g_{33}} = R^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$$

$$\overline{g_{33}} = R^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta$$

Escribimos los resultados obtenidos para las componentes de forma matricial:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \sinh^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A. 14})$$

Unificación de la métrica esférica, plana e hiperbólica

Ahora nos resta unificar las tres métricas que hemos obtenido; (A.8), (A.9) y (A.14), para posibles espacios que cumplen la propiedad de homogeneidad e isotropía. Esto teniendo en cuenta que el elemento de línea espacio-temporal estará dado por:

$$ds^2 = a^2(t) d\sigma^2 - dt^2 \quad (\text{A. 15})$$

donde la métrica espacial que pretendemos unificar está expresada como $d\sigma^2$ y $a^2(t)$ es el factor de escala, que indica el cambio de las medidas espaciales en el tiempo. Este factor se expresa como un cuadrado ya que, como hemos visto, los elementos del tensor métrico se obtienen a partir de los productos escalares entre los elementos de la base; si consideramos que las tres bases del espacio cambian en un factor $a(t)$, al efectuar los productos obtenemos este factor elevado al cuadrado.

En las métricas obtenidas para la geometría esférica e hiperbólica, podemos omitir las constantes R , que son absorbidas en el factor de escala. Si, además, aplicamos los cambios de variable $\theta \rightsquigarrow \chi$; $\varphi \rightsquigarrow \theta$ en la métrica (A.8) y $r \rightsquigarrow \chi$ en la métrica plana (A.9), obtenemos lo siguiente.

Para la geometría esférica:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

para la geometría plana:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

para la geometría hiperbólica:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

las cuales podemos expresar como una sola métrica si introducimos la función $r(\chi)$ de forma que:

$$r(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{en (16)} \\ \chi & \text{en (17)} \\ \sinh \chi & \text{en (18)} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

es decir, hemos aplicado el cambio de variable

$$(\chi, \theta, \varphi) \rightsquigarrow (r, \theta, \varphi)$$

con lo cual, las componentes $\overline{\overline{g}}_{22}$, $\overline{\overline{g}}_{23}$, $\overline{\overline{g}}_{32}$ y $\overline{\overline{g}}_{33}$ de métrica unificada tendrán la forma:

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{g}}_{22} & \overline{\overline{g}}_{23} \\ \overline{\overline{g}}_{32} & \overline{\overline{g}}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

donde las componentes asociadas a la nueva coordenada r se han denotado con doble barra.

para encontrar la componente $\overline{\overline{g}}_{11}$ en términos de r , consideremos el nuevamente la regla de transformación:

$$\overline{\overline{g}}_{11} = \frac{dx^1 dx^1}{d\overline{\overline{x}}^1 d\overline{\overline{x}}^1} \overline{\overline{g}}_{11} = \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \overline{\overline{g}}_{11} \quad ; \quad \overline{\overline{g}}_{11} = 1$$

para calcular la derivada $\frac{d\chi}{dr}$ hallamos las transformaciones inversas en (A.19), que resultan ser:

$$\chi(r) = \begin{cases} \arcsin r & \text{para el caso esférico} \\ r & \text{para el caso plano} \\ \operatorname{arcsinh} r & \text{para el caso hiperbólico} \end{cases}$$

con lo cual:

$$\overline{g}_{11} = \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 = \begin{cases} \frac{1}{1-r^2} & \text{para el caso esférico} \\ 1 & \text{para el caso plano} \\ \frac{1}{1+r^2} & \text{para el caso hiperbólico} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

podemos escribir (A.21) como una sola expresión que contenga la constante k ,

$$\overline{g}_{11} = \frac{1}{1-kr^2} \quad (\text{A.22})$$

tal que

$$k = \begin{cases} 1 & \text{para el caso esférico} \\ 0 & \text{para el caso plano} \\ -1 & \text{para el caso hiperbólico} \end{cases}$$

de forma que podemos escribir la métrica unificada utilizando las componentes halladas en (A.20) y (A.22) de la forma

$$\overline{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

con esto, tenemos que el elemento de línea espacial en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker estará dado por:

$$d\sigma^2 = \overline{g}_{ij} d\overline{x}^i d\overline{x}^j$$

$$d\sigma^2 = \left(\frac{1}{1-kr^2} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

incorporamos este resultado a la ecuación (A.15), obteniendo finalmente

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (\text{A.24})$$

No hay que perder de vista que $r(\chi)$ es una función distinta en cada geometría y χ representa un ángulo circular en la geometría esférica, una distancia radial en la geometría plana y un ángulo hiperbólico en la geometría hiperbólica.

Anexo B

Cálculo de los símbolos de Christoffel para la métrica FLRW

Los símbolos de Christoffel se calculan a través de la expresión:

$$\Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} \right) \quad (B.1)$$

donde g_{ij} (que aparece en los tres términos denotada con distintos índices) indica las componentes del tensor métrico obtenidas según (A.25), es decir,

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (B.2)$$

y g^{jm} las componentes del tensor métrico contravariante, que están dadas por $(g_{jm})^{-1}$, es decir, la matriz inversa del tensor métrico covariante. Ya que (B.2) es una matriz diagonal, su inversa está dada por los inversos multiplicativos de cada elemento, esto es:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

En la ecuación (B.1) hay una sumatoria sobre el índice repetido j , pero, como hemos dicho, la métrica FLRW está dada por una matriz diagonal, por lo tanto $g^{jm} = 0$ cuando $j \neq m$. Esto quiere decir que sólo consideramos las componentes del tensor métrico contravariante cuando $j = m$.

por comodidad, denotaremos los operadores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ de la forma ∂_i . Con esta notación y la condición $j = m$ en (B.1), tenemos:

$$\Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2} g^{mm} (\partial_k g_{im} + \partial_i g_{mk} - \partial_m g_{ki}) \quad (B.4)$$

Con lo cual se ha eliminado la sumatoria.

Procedemos a calcular las derivadas parciales de las componentes no nulas del tensor métrico covariante (B.2) respecto a las coordenadas, recordando la notación

$$\begin{aligned} ct &\simeq x^0 \\ r &\simeq x^1 \\ \theta &\simeq x^2 \\ \varphi &\simeq x^3 \end{aligned}$$

la derivada temporal del factor de escala, es decir, $\frac{\partial a(t)}{\partial t}$ se denotará como \dot{a}

Tabla B.1

Derivadas parciales de las componentes de la métrica FLRW

$\partial_0 g_{00} = 0$	$\partial_0 g_{11} = \frac{2a\dot{a}}{c(1-kr^2)}$	$\partial_0 g_{22} = \frac{2r^2 a\dot{a}}{c}$	$\partial_0 g_{33} = \frac{2r^2 \sin^2 \theta a\dot{a}}{c}$
$\partial_1 g_{00} = 0$	$\partial_1 g_{11} = \frac{2kra^2}{(1-kr^2)^2}$	$\partial_1 g_{22} = 2ra^2$	$\partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \theta a^2$
$\partial_2 g_{00} = 0$	$\partial_2 g_{11} = 0$	$\partial_2 g_{22} = 0$	$\partial_2 g_{33} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta a^2$
$\partial_3 g_{00} = 0$	$\partial_3 g_{11} = 0$	$\partial_3 g_{22} = 0$	$\partial_3 g_{33} = 0$

Ahora podemos calcular los símbolos de Christoffel con la ecuación (B.4) sustituyendo las componentes del tensor métrico contravariante (B.3) y las derivadas de la tabla B.1, recordando que $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Calculamos los símbolos con superíndice 0: Γ_{ki}^0

$$\Gamma_{ki}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_k g_{i0} + \partial_i g_{0k} - \partial_0 g_{ki}) \quad (B.5)$$

cuando $k = i = 0$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\cancel{\partial_0 g_{00}} + \cancel{\partial_0 g_{00}} - \cancel{\partial_0 g_{00}}) \\ \Gamma_{00}^0 &= 0 \end{aligned}$$

cuando $k = i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_i g_{i0} + \partial_i g_{0i} - \partial_0 g_{ii}) \\ \Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{11} = \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{22} = \frac{r^2a\dot{a}}{c}$$

$$\Gamma_{33}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{33} = \frac{r^2\sin^2\theta a\dot{a}}{c}$$

para Γ_{ki}^0 cuando $k \neq i$ nótese lo siguiente; el último término en (B.5) será nulo y sólo uno de los otros dos términos se mantendrá mientras i o k sean 0, es decir, los únicos posibles símbolos no nulos serán Γ_{0i}^0 , Γ_{i0}^0 que son iguales por la propiedad de simetría $\Gamma_{ab}^a = \Gamma_{ba}^a$. Calculemos estos símbolos sustituyendo en (B.5).

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\cancel{\partial_0g_{i0}^0} + \cancel{\partial_i g_{00}^0} - \cancel{\partial_0g_{0i}^0})$$

el primer y último término son nulos debido a la condición $k \neq i$ y $k = 0 \Rightarrow i \neq 0$, por lo tanto

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = 0$$

Del mismo modo, calculamos los símbolos con superíndice 1: Γ_{ki}^1

$$\Gamma_{ki}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_k g_{i1} + \partial_i g_{1k} - \partial_1 g_{ki}) \quad (B.6)$$

primero, cuando $k = i = 0$.

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\cancel{\partial_0g_{01}^0} + \cancel{\partial_0g_{10}^0} - \cancel{\partial_1g_{00}^0})$$

$$\Gamma_{00}^1 = 0$$

cuando $k = i = 1, 2, 3$.

$$\Gamma_{ii}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_i g_{i1} + \partial_i g_{1i} - \partial_1 g_{ii})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} = \frac{kr}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\cancel{\partial_2g_{21}^0} + \cancel{\partial_2g_{12}^0} - \partial_1g_{22})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} = -r(1 - kr^2)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\cancel{\partial_3g_{31}^0} + \cancel{\partial_3g_{13}^0} - \partial_1g_{33})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{33} = -r\sin^2\theta(1 - kr^2)$$

Para los símbolos Γ_{ki}^1 cuando $k \neq i$, obsérvese en (B.7) igual que en el caso Γ_{ki}^0 , el último término es nulo y uno de los otros dos permanece sólo si k o i son iguales a 1, es decir, en el caso $\Gamma_{1i}^1 = \Gamma_{i1}^1$. Según (B.7):

$$\Gamma_{1i}^1 = \Gamma_{i1}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\cancel{\partial_1 g_{i1}}^0 + \partial_i g_{11} - \cancel{\partial_1 g_{1i}}^0)$$

$i \neq 1$, ya que tomamos $k = 1$ por lo tanto, el primer y último término son nulos. Entonces, tenemos que

$$\Gamma_{1i}^1 = \Gamma_{i1}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_i g_{11}$$

calculamos los símbolos restantes $\Gamma_{10}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{13}^1$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{11} = \frac{\dot{a}}{ac}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \cancel{\partial_2 g_{11}}^0 = 0$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \cancel{\partial_3 g_{11}}^0 = 0$$

Calculamos, ahora, los símbolos con superíndice 2: Γ_{ki}^2

$$\Gamma_{ki}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_k g_{i2} + \partial_i g_{2k} - \partial_2 g_{ki}) \quad (B.7)$$

cuando $i = k = 0$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\cancel{\partial_0 g_{02}}^0 + \cancel{\partial_0 g_{20}}^0 - \cancel{\partial_2 g_{00}}^0) = 0$$

cuando $i = k = 1, 2, 3$

$$\Gamma_{ii}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_i g_{i2} + \partial_i g_{2i} - \partial_2 g_{ii})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\cancel{\partial_1 g_{12}}^0 + \cancel{\partial_1 g_{21}}^0 - \cancel{\partial_2 g_{11}}^0) = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\cancel{\partial_2 g_{22}}^0 + \cancel{\partial_2 g_{22}}^0 - \cancel{\partial_2 g_{22}}^0) = 0$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\cancel{\partial_3 g_{32}}^0 + \cancel{\partial_3 g_{23}}^0 - \partial_2 g_{33})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{33} = -\sin\theta \cos\theta$$

calculamos los posibles símbolos no nulos Γ_{ki}^2 cuando $k \neq i$. Siguiendo el mismo argumento que en los casos anteriores, de acuerdo con (B.7), quedan sólo los símbolos:

$$\Gamma_{2i}^2 = \Gamma_{i2}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\cancel{\partial_2^0 g_{i2}} + \partial_i g_{22} - \cancel{\partial_2^0 g_{2i}})$$

$i \neq 2$, ya que tomamos $k = 2$, por lo tanto, el primer y último término son nulos. Entonces, tenemos que

$$\Gamma_{2i}^2 = \Gamma_{i2}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_i g_{22}$$

calculamos los símbolos restantes $\Gamma_{20}^2, \Gamma_{21}^2, \Gamma_{23}^2$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_0 g_{22} = \frac{\dot{a}}{ac}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \cancel{\partial_3^0 g_{22}} = 0$$

Por último, calculamos los símbolos con superíndice 3: Γ_{ki}^3

$$\Gamma_{ki}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_k g_{i3} + \partial_i g_{3k} - \partial_3 g_{ki}) \quad (B.8)$$

cuando $i = k = 0$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\cancel{\partial_0^0 g_{03}} + \cancel{\partial_0^0 g_{30}} - \cancel{\partial_3^0 g_{00}}) = 0$$

cuando $i = k = 1, 2, 3$

$$\Gamma_{ii}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_i g_{i3} + \partial_i g_{3i} - \partial_3 g_{ii})$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\cancel{\partial_1^0 g_{13}} + \cancel{\partial_1^0 g_{31}} - \cancel{\partial_3^0 g_{11}}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\cancel{\partial_2^0 g_{23}} + \cancel{\partial_2^0 g_{32}} - \cancel{\partial_3^0 g_{22}}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\cancel{\partial_3^0 g_{33}} + \cancel{\partial_3^0 g_{33}} - \cancel{\partial_3^0 g_{33}}) = 0$$

Igual que en los casos anteriores, para Γ_{ik}^3 cuando $k \neq i$, se conservan sólo los símbolos

$$\Gamma_{3i}^3 = \Gamma_{i3}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\cancel{\partial_3^0 g_{i3}} + \partial_i g_{33} - \cancel{\partial_3^0 g_{3i}})$$

$i \neq 3$, ya que tomamos $k = 3$, por lo tanto, el primer y último término son nulos. Entonces, tenemos que

$$\Gamma_{3i}^3 = \Gamma_{i3}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_i g_{33}$$

calculamos los símbolos restantes $\Gamma_{30}^3, \Gamma_{31}^3, \Gamma_{32}^3$

$$\Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_0 g_{33} = \frac{\dot{a}}{ac}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_1 g_{33} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_2 g_{33} = \cot\theta$$

Reescribamos, a continuación, los resultados obtenidos.

Tabla B.2

Símbolos de Christoffel no nulos de la métrica FLRW

$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)}$	$\Gamma_{22}^0 = \frac{r^2 a\dot{a}}{c}$	$\Gamma_{33}^0 = \frac{r^2 \sin^2\theta a\dot{a}}{c}$
$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}$	$\Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2)$	$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2\theta (1-kr^2)$
$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{ac}$		
$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta$	$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{ac}$	$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$
$\Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{ac}$	$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot\theta$

Anexo C

Cálculo del tensor y escalar de Ricci para la métrica FLRW

Las componentes del tensor de Ricci, que resultan de la contracción del superíndice con un subíndice de las componentes del tensor de Riemann, está dado por la siguiente expresión:

$$R_{ik} = \partial_s \Gamma_{ik}^s - \partial_k \Gamma_{is}^s + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{is}^r \Gamma_{rk}^s \quad (C.1)$$

Igual que en el anexo B, hemos denotado las derivadas parciales respecto a las coordenadas x^i como ∂_i .

Para hallar las componentes de acuerdo con (C.1) utilizaremos los resultados presentados en la tabla B.2, observando para cada componente qué símbolos de Christoffel son nulos y cuales son iguales entre sí, con el fin de simplificar las expresiones cuanto sea posible.

Calculamos R_{ik} cuando $i = k = 0$

$$R_{00} = \partial_s \Gamma_{00}^s - \partial_0 \Gamma_{0s}^s + \Gamma_{00}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{0s}^r \Gamma_{r0}^s$$

todos los símbolos con doble subíndice cero son nulos, por lo tanto, se anulan el primer y tercer término y tenemos:

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0s}^s - \Gamma_{0s}^r \Gamma_{r0}^s$$

además, los únicos símbolos que tienen un cero como subíndice son Γ_{01}^1 ; Γ_{02}^2 y Γ_{03}^3 , por ende, Γ_{r0}^s sólo tomará valores distintos de cero cuando $r = s$.

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0s}^s - \Gamma_{0r}^r \Gamma_{r0}^r$$

una vez simplificada la expresión, asignamos los valores correspondientes a los índices y sustituimos los resultados de la tabla B.2 en la ecuación.

$$R_{00} = -\partial_0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) - (\Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3)$$

teniendo en cuenta que $\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3$ además de la propiedad de simetría $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$

$$R_{00} = -3\partial_0 (\Gamma_{01}^1) - 3(\Gamma_{01}^1)^2$$

$$R_{00} = -3 \left[\frac{\partial}{\partial ct} \left(\frac{\dot{a}}{ac} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{ac} \right)^2 \right]$$

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a} \quad (C.2)$$

para la componente R_{ik} cuando $i = k = 1$, sustituyendo en (C.1), tenemos:

$$R_{11} = \partial_s \Gamma_{11}^s - \partial_1 \Gamma_{1s}^s + \Gamma_{11}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{1s}^r \Gamma_{r1}^s$$

los símbolos no nulos con un uno como subíndice son:

$$\Gamma_{11}^0 ; \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 ; \Gamma_{11}^1 ; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 ; \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3$$

Por ende, el término $\Gamma_{1s}^r \Gamma_{r1}^s$ no será nulo sólo en los casos

$$\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 ; \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 ; \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 ; \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 ; \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

con lo cual,

$$R_{11} = (\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1) - \partial_1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{0s}^s + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1s}^s) \\ - [2\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + (\Gamma_{13}^3)^2]$$

además, según la tabla B.2

$$\Gamma_{1s}^s = \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2 ; \quad \Gamma_{0s}^s = 3\Gamma_{01}^1 \quad (C.3)$$

entonces,

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - 2\partial_1 \Gamma_{12}^2 + [3\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2)] - [2\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + (\Gamma_{11}^1)^2 + 2(\Gamma_{12}^2)^2]$$

simplificando, llegamos a:

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - 2\partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + 2\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - 2(\Gamma_{12}^2)^2$$

sustituyendo los valores de los símbolos de Christoffel y simplificando:

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial ct} \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)} \frac{\dot{a}}{ac} + 2 \frac{1}{r} \frac{kr}{1-kr^2} - 2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \\ R_{11} = \frac{(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)}{c^2(1-kr^2)} \quad (C.4)$$

calculamos, ahora, la componente R_{ik} cuando $i = k = 2$ sustituyendo en (C.1)

$$R_{22} = \partial_s \Gamma_{22}^s - \partial_2 \Gamma_{2s}^s + \Gamma_{22}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{2s}^r \Gamma_{r2}^s$$

los símbolos no nulos con un dos como subíndice son:

$$\Gamma_{22}^0 ; \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 ; \Gamma_{22}^1 ; \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 ; \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3$$

Por ende, el término $\Gamma_{2s}^r \Gamma_{r2}^s$ no será nulo sólo en los casos

$$\Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 ; \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 ; \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 ; \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 ; \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

con lo cual,

$$R_{22} = (\partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1) - \partial_2 (\Gamma_{23}^3) + (\Gamma_{22}^0 \Gamma_{0s}^s + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1s}^s) - [2(\Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2) + 2(\Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2) + (\Gamma_{23}^3)^2]$$

teniendo en cuenta las igualdades (C.3),

$$R_{22} = (\partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1) - \partial_2 (\Gamma_{23}^3) + [3\Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2)] \\ - [2(\Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2) + 2(\Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2) + (\Gamma_{23}^3)^2] \\ R_{22} = \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - (\Gamma_{23}^3)^2$$

sustituyendo los valores para los símbolos de Christoffel y simplificando, (téngase en cuenta la identidad $csc^2\theta - cot^2\theta = 1$), obtenemos:

$$R_{22} = \frac{\partial}{\partial ct} \frac{r^2 a \dot{a}}{c} - \frac{\partial}{\partial r} [r(1 - kr^2)] - \frac{\partial}{\partial \theta} \cot \theta + \frac{r^2 a \dot{a}}{c} \frac{\dot{a}}{ac} - r(1 - kr^2) \frac{kr}{1 - kr^2} - \cot^2 \theta$$

$$R_{22} = \frac{r^2}{c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) \quad (C.5)$$

Por último, sustituimos en (C.1) para hallar R_{ik} cuando $i = k = 3$

$$R_{33} = \partial_s \Gamma_{33}^s - \partial_3 \Gamma_{3s}^s + \Gamma_{33}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{3s}^r \Gamma_{r3}^s$$

los símbolos no nulos con un tres como subíndice son:

$$\Gamma_{33}^0 ; \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 ; \Gamma_{33}^1 ; \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 ; \Gamma_{33}^2 ; \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3$$

por ende, el término $\Gamma_{3s}^r \Gamma_{r3}^s$ no será nulo sólo en los casos

$$\Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 ; \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 ; \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 ; \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 ; \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 ; \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

además, todos los símbolos de la forma Γ_{3s}^s son nulos, con lo cual,

$$R_{33} = (\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2) + (\Gamma_{33}^0 \Gamma_{0s}^s + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1s}^s + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2s}^s) - (2\Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + 2\Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + 2\Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2)$$

teniendo en cuenta (C.3)

$$R_{33} = (\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2) + [3\Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3] - (2\Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + 2\Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + 2\Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2)$$

$$R_{33} = \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

sustituyendo los valores para los símbolos de Christoffel y simplificando, obtenemos:

$$R_{33} = \frac{\partial}{\partial ct} \frac{r^2 \sin^2 \theta a \dot{a}}{c} - \frac{\partial}{\partial r} [r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta) + \frac{r^2 \sin^2 \theta a \dot{a}}{c} \frac{\dot{a}}{ac}$$

$$- r \sin^2 \theta (1 - kr^2) \frac{kr}{1 - kr^2} + \cot \theta \sin \theta \cos \theta$$

$$R_{33} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) \quad (C.6)$$

Hasta el momento, obtuvimos los valores para los elementos de la diagonal del tensor de Ricci; las demás componentes son nulas. Esto se cumple en todas las métricas que sean diagonales y cuyas componentes contengan funciones que dependan de una única variable. Tal como mostramos en (B.2), la métrica FLRW cumple estas dos condiciones, puesto que la matriz que representa al tensor métrico es diagonal y sus componentes no nulas contienen como función de las coordenadas el factor de escala, el cual depende sólo del tiempo. Por ende, para el caso que nos ocupa podemos garantizar que $R_{ik} = 0$ cuando $i \neq k$. Dicho esto, procedamos con el cálculo del escalar de Ricci, que se obtiene a través del producto entre las componentes del tensor de Ricci y el tensor métrico contravariante.

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

Realizamos la sumatoria sobre las componentes no nulas del tensor de Ricci, es decir, R_{ii}

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

desarrollamos la expresión utilizando los resultados (B.3), (C.2), (C.4), (C.5) y (C.6)

$$R = \frac{3\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} \frac{(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)}{c^2(1 - kr^2)} + \frac{1}{a^2(t)r^2} \frac{r^2}{c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) \\ + \frac{1}{a^2(t)r^2} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \frac{1}{c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)$$

simplificando

$$R = \frac{3\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{1}{a^2} \frac{(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)}{c^2} + \frac{1}{a^2 c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) + \frac{1}{a^2 c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)$$

$$R = \frac{3\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)}{c^2 a^2} + \frac{1}{a^2 c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) + \frac{1}{a^2 c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2)$$

$$R = \frac{3}{a^2 c^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2kc^2) + \frac{3\ddot{a}}{c^2 a}$$

$$R = \frac{6}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2) \quad (C.7)$$

Anexo D

Deducción del tensor de energía-momento para la métrica FLRW y Ecuación de Estado

La condición de homogeneidad e isotropía que rige el modelo del universo planteado a través de la métrica FLRW se puede expresar también suponiendo el conjunto de materia y energía del universo como un gas perfecto, cuyo tensor de materia energía tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

No obstante, esta expresión alude a la descripción del sistema de partículas desde el espacio euclídeo; es necesario considerar las componentes en función de la métrica, de forma que se garantice su invarianza ante las transformaciones de coordenadas. Para ello, llevaremos el tensor de su forma matricial a una expresión general para las componentes.

Podemos reescribir (D.1) como sigue

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} \rho c^2 + p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ T &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (c \ 0 \ 0 \ 0) + p \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La segunda matriz corresponde a la métrica de Minkowski, que denotaremos como η

$$T = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (c \ 0 \ 0 \ 0) + p\eta \quad (D.2)$$

ahora, recordemos la expresión para la cuadrivelocidad que denotaremos como U

$$U = \begin{pmatrix} \gamma \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ y u_x, u_y y u_z representan las componentes de la velocidad espacial \vec{u} en las direcciones señaladas por los respectivos índices. Para el caso del fluido que estamos considerando, hemos establecido un marco de referencia desde el cual éste se puede considerar en reposo, definido por coordenadas comóviles; esto quiere decir que las componentes de la velocidad espacial son cero, con lo cual, a su vez, $\gamma = 1$. De acuerdo con ello, la expresión que describe la velocidad en el espacio-tiempo de un sistema que sólo se desplaza a lo largo del tiempo, está dada por

$$U = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que coincide exactamente con los cuadvectores del primer término en (D.2). Podemos escribir, entonces, de manera equivalente, la siguiente ecuación tensorial.

$$T = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U \otimes U + p\eta$$

Podemos conseguir que esta ecuación sea válida para los sistemas de coordenadas asociados a cualquier geometría si, en lugar de la métrica de Minkowski, introducimos un tensor métrico general g , que, en nuestro caso, será la métrica FLRW.

$$T = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U \otimes U + p\eta$$

$$T = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U \otimes U + pg$$

La expresión resultante para las coordenadas del tensor contravariante de energía momento será

$$T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^j + pg^{ij} \quad (D.3)$$

y, escrito de forma matricial,

$$T = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{33}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{11}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{22}p \end{pmatrix} \quad (D.4)$$

además, se puede mostrar que las componentes del tensor covariante se expresan de forma equivalente. Multiplicamos, para ello, la ecuación (D.3) por el tensor métrico

$$T^{ia} g_{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^a g_{ij} + pg^{ia} g_{ij} \quad (D.5)$$

de la contracción de índices, resulta el tensor mixto

$$T_j^a = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^a u_j + p \delta_j^a$$

multiplicamos nuevamente por el tensor métrico

$$T_i^a g_{aj} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^a u_i g_{aj} + p \delta_i^a g_{aj}$$

$$T_{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_i u_j + p \delta_i^a g_{ij}$$

Como se observa, las componentes covariantes del tensor de energía momento se expresan de la misma forma que las componentes en (D.4).

Anexo E

Obtención de las Ecuaciones de Friedmann

Para obtener las ecuaciones que describen la evolución del universo modelado geoméricamente a través de la métrica FLRW y físicamente a través de un gas perfecto, partimos de las ecuaciones de campo. Se obtendrán dos ecuaciones independientes; la primera de ellas para las componentes tensoriales asociadas al tiempo, es decir, con subíndices 00, y la segunda como una traza de las ecuaciones.

Para obtener la primera ecuación, entonces, partimos de la expresión

$$R_{00} - \frac{1}{2}R g_{00} + \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Sustituyendo las componentes del tensor de Ricci, escalar de Ricci, tensor métrico y tensor de energía momento, utilizando los resultados (C.2), (C.7), (B.2) y (D.4), respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a} - \frac{1}{2} \frac{6}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2)(-1) + \Lambda(-1) &= \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \\ -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{3}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2) - \Lambda &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \end{aligned}$$

y procedemos a simplificar la expresión. Multiplicando y dividiendo el primer término por el factor de escala a

$$\begin{aligned} -\frac{3a\ddot{a}}{a^2 c^2} + \frac{3}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2) - \Lambda &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\ \frac{3}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + kc^2) - \Lambda &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \end{aligned}$$

Multiplicando toda la ecuación por el factor c^2

$$\begin{aligned} \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + kc^2) - c^2 \Lambda &= 8\pi G \rho \\ \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + kc^2) &= c^2 \Lambda + 8\pi G \rho \end{aligned} \tag{E.1}$$

de este modo, hemos obtenido la primera ecuación que relaciona el factor de escala y su razón de cambio con los parámetros k, Λ y ρ

Para obtener la segunda ecuación, multiplicamos toda la expresión de las ecuaciones de campo por el tensor métrico contravariante para obtener una suma sobre las cantidades tensoriales con ambos índices iguales, es decir, una traza.

$$\left[R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} \right] g^{ij} = \left[\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \right] g^{ij}$$

$$R_{ij} g^{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} g^{ij} + \Lambda g_{ij} g^{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} g^{ij}$$

Los productos $R_{ij} g^{ij}$ y $T_{ij} g^{ij}$ corresponden, respectivamente, a los escalares R y T . Además, el producto del tensor métrico y su inversa da como resultado la suma de los elementos de la diagonal de la matriz identidad, de modo que tenemos

$$R - \frac{1}{2} R \delta_i^i + \Lambda \delta_i^i = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R \left(1 - \frac{1}{2} \delta_i^i \right) + \Lambda \delta_i^i = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (E.2)$$

Procedemos a calcular el escalar T que se obtiene a partir de $T_{ij} g^{ij}$

$$T = T_{ij} g^{ij} = T_{00} g^{00} + T_{11} g^{11} + T_{22} g^{22} + T_{33} g^{33}$$

utilizando los resultados obtenidos en (D.4) y (B.3)

$$T = -\rho c^2 + p \left[\frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} + a^2(t) r^2 \frac{1}{a^2(t) r^2} + a^2(t) r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{a^2(t) r^2 \sin^2 \theta} \right]$$

$$T = -\rho c^2 + 3p \quad (E.3)$$

Por otra parte,

$$\delta_i^i = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4 \quad (E.4)$$

Sustituyendo los resultados (C.7), (E.3) y (E.4) en la ecuación (E.2), obtenemos

$$\frac{6}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2) \left(1 - \frac{4}{2} \right) + 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} (-\rho c^2 + 3p)$$

$$-\frac{6}{a^2 c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2) + 4\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 - 3p)$$

multiplicando toda la expresión por $-\frac{c^2}{2}$

$$\frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + kc^2) - 2c^2 \Lambda = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 - 3p)$$

$$\frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + kc^2) + \frac{3}{a^2} a\ddot{a} - 2c^2 \Lambda = 4\pi G \rho - \frac{12\pi G p}{c^2}$$

el primer término es igual al lado derecho de la primera ecuación de Friedmann obtenida, es decir, (E.1); reemplazamos por su equivalente del lado izquierdo

$$c^2 \Lambda + 8\pi G \rho + \frac{3}{a} \ddot{a} - 2c^2 \Lambda = 4\pi G \rho - \frac{12\pi G p}{c^2}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
 -c^2\Lambda + \frac{3}{a}\ddot{a} &= -4\pi G\rho - \frac{12\pi Gp}{c^2} \\
 -\frac{c^2\Lambda}{3} + \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho - \frac{4\pi Gp}{c^2} \\
 \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{c^2\Lambda}{3}
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

hemos obtenido la segunda ecuación de Friedmann.

Anexo F

Modelos cosmológicos asociados a los valores de los parámetros estimados por la misión WMAP

WCDM

Se permite que la ecuación de estado de la energía oscura w (que describe la relación entre la presión y la densidad del universo) varíe con el tiempo.

En el modelo LCDM se asume que $w = -1$, lo cual corresponde a una energía oscura con una presión negativa que causa la aceleración en la expansión del universo. Sin embargo, si w varía con el tiempo, la energía oscura puede comportarse de manera diferente y tener una influencia diferente en la evolución del universo.

OLCDM

Se considera la posibilidad de que la curvatura espacial k no sea fija, sino que pueda cambiar a lo largo del tiempo.

OWCDM

Se permite que varíen en el tiempo tanto la ecuación de estado de la energía oscura w como la curvatura k .

WACDM

Se hace uso de la siguiente ecuación de estado de la energía oscura dependiente del tiempo,

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a)$$

donde el parámetro w_0 representa la contribución constante a la ecuación de estado de la energía oscura, mientras que w_a representa la variación lineal con el tiempo.

Esta consideración proporciona una descripción matemática que tiene en cuenta la posibilidad de que la densidad de energía oscura cambie con la expansión del universo.

YHE

Asume las consideraciones del modelo LCDM, salvo la invarianza en la fracción de helio del universo primordial. Se considera que esta magnitud puede no ser constante en todo el universo o en todas las escalas de tiempo. Esto podría deberse a diferentes condiciones iniciales, procesos astrofísicos o interacciones físicas que podrían haber afectado la producción y evolución del helio en diferentes regiones o en diferentes momentos del universo temprano.

ISO + CORR

Isocurvatura CDM anticorrelacionada. Se refiere a un modelo cosmológico que implica fluctuaciones de densidad en la materia oscura fría (CDM) que están anticorrelacionadas con las fluctuaciones en la curvatura espacial del universo.

En el contexto de la cosmología, se cree que las fluctuaciones de densidad primordiales en el universo temprano son responsables de la formación de las estructuras a gran escala que vemos en el universo actual. Estas fluctuaciones pueden ser clasificadas en dos tipos principales: adiabáticas y de isocurvatura.

Las fluctuaciones adiabáticas implican que todas las especies de materia (como la materia oscura y la materia bariónica) fluctúan en proporciones similares, mientras que las de isocurvatura se refieren a fluctuaciones en una especie particular de materia, como la materia oscura, mientras que otras especies se mantienen en equilibrio.

En el modelo Isocurvatura CDM anticorrelacionada, las fluctuaciones de densidad en la materia oscura fría están anticorrelacionadas con las fluctuaciones en la curvatura espacial del universo; donde la materia oscura es más densa, la curvatura espacial será menor, y viceversa.

Este tipo de modelo puede tener implicaciones interesantes en la formación de estructuras a gran escala y en la distribución de materia en el universo.

ISO + UNCORR

Isocurvatura CDM no correlacionada. En este caso, las fluctuaciones en la distribución de materia oscura no tienen relación directa con las fluctuaciones en la geometría del universo. El comportamiento de la materia oscura no afecta la curvatura espacial.

MNU

Estudia el impacto de neutrinos masivos en la evolución y estructura del universo, los cuales pueden afectar la evolución de las estructuras a gran escala y la formación de cúmulos de galaxias a lo largo del tiempo cósmico.

De acuerdo con el modelo, los neutrinos son partículas relativistas que en los primeros momentos del universo se mueven a velocidades cercanas a la velocidad de la luz. A medida que el universo se expande y enfría, estos neutrinos entran en la llamada "desaceleración gravitacional" y comienzan a moverse más lentamente. Esta desaceleración afecta la formación de estructuras cósmicas y deja huellas observables en la distribución de la materia.

NREL

Se refiere al número de partículas o especies de partículas que están presentes en el universo temprano y que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz

La energía y la densidad de estas partículas relativistas tienen un impacto significativo en la expansión y la evolución del universo. El número de especies relativistas tiene implicaciones en la evolución del universo y afecta fenómenos como la formación de elementos ligeros en los primeros minutos del universo, la formación de estructuras cósmicas, la radiación cósmica de fondo y otros procesos importantes en la cosmología temprana.

RUN

Se refiere a un índice espectral escalar variable. Las fluctuaciones de densidad del universo temprano se caracterizan por su amplitud y su dependencia de la escala de longitud.

Que el índice espectral escalar no sea constante significa que la dependencia de la amplitud de las fluctuaciones de densidad con respecto a la escala de longitud no es la misma en todas las escalas.

TENS

Estudia las perturbaciones tensoriales en el contexto de la cosmología y la teoría de la inflación cósmica.

En la teoría de la inflación cósmica, se postula que el universo pasó por una fase de expansión extremadamente rápida en sus primeros momentos. Durante esta expansión inflacionaria, se generaron fluctuaciones cuánticas en el espacio-tiempo, que se manifestaron como perturbaciones en el campo gravitacional.

Las perturbaciones tensoriales se refieren específicamente a las perturbaciones en el campo gravitacional, que se propagan en forma de ondas gravitacionales o "ondas tensoriales". Estas ondas son oscilaciones en la curvatura del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz.

Anexo G

Solución a la ecuación diferencial que describe la evolución de un universo con constante cosmológica positiva en una etapa dominada por energía oscura

La expresión en cuestión, es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal que proviene de la segunda ecuación de Friedmann (E.5)

$$\ddot{a} = \frac{\dot{a}^2}{a} \Omega_\Lambda$$

$$a\ddot{a} - \Omega_\Lambda \dot{a}^2 = 0 \quad (G.1)$$

aplicando un cambio de variable a la primera derivada del factor de escala

$$u = \dot{a} \Rightarrow \dot{u} = \ddot{a}$$

sustituyendo en (G.1)

$$a\dot{u} - \Omega_\Lambda u^2 = 0 \quad (G.2)$$

aplicando la regla de la cadena a \dot{u}

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{da} \frac{da}{dt}$$

es decir,

$$\dot{u} = \frac{du}{da} \dot{a} = \frac{du}{da} u$$

sustituyendo en (G.2)

$$a \frac{du}{da} u - \Omega_\Lambda u^2 = 0$$

$$a \frac{du}{da} u = \Omega_\Lambda u^2$$

$$\frac{du}{u} = \Omega_\Lambda \frac{da}{a}$$

integrando ambas partes de la ecuación

$$\int \frac{du}{u} = \Omega_\Lambda \int \frac{da}{a}$$

$$\ln(u) = \Omega_\Lambda \ln(a) + k$$

simplificando esta expresión

$$u = e^{\Omega_\Lambda \ln(a)+k} = e^{\Omega_\Lambda \ln(a)} e^k$$

Llamando k_1 a la constante e^k

$$u = k_1 e^{\Omega_\Lambda \ln(a)} = k_1 e^{\ln(a^{\Omega_\Lambda})}$$

$$u = k_1 a^{\Omega_\Lambda}$$

Escribiendo esta expresión nuevamente en términos de la variable a

$$\dot{a} = k_1 a^{\Omega_\Lambda}$$

es decir,

$$\frac{da}{dt} = k_1 a^{\Omega_\Lambda}$$

$$a^{-\Omega_\Lambda} da = k_1 dt$$

integrando ambas partes de la ecuación

$$\int a^{-\Omega_\Lambda} da = k_1 \int dt$$

$$\frac{a^{1-\Omega_\Lambda}}{1-\Omega_\Lambda} = k_1 t + k_2$$

simplificando

$$a^{1-\Omega_\Lambda} = (1-\Omega_\Lambda) (k_1 t + k_2)$$

llamando c_1 y c_2 a las constantes $(1-\Omega_\Lambda) k_1$ y $(1-\Omega_\Lambda) k_2$, respectivamente

$$a^{1-\Omega_\Lambda} = c_1 t + c_2$$

$$a = (c_1 t + c_2)^{\frac{1}{1-\Omega_\Lambda}}$$