

# MEDICIÓN DE LA CAPACIDAD DEL CILINDRO



Luis Alberto Ortiz Paloma  
Juan Diego Rodríguez Bonilla  
Gonzalo Henao Aguilar



UNIVERSIDAD  
PEDAGÓGICA  
NACIONAL

# **Medición de la capacidad del cilindro**



# Medición de la capacidad del cilindro

Luis Alberto Ortiz Paloma  
Juan Diego Rodríguez Bonilla  
Gonzalo Henao Aguilar



**UNIVERSIDAD  
PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

Ortiz Paloma, Luis Alberto  
Medición de la capacidad del cilindro / Luis Alberto Ortiz Paloma, Juan Diego Rodríguez Bonilla,  
Gonzalo Henao Aguilar. Primera edición. – Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2026.

132 páginas. Tablas y figuras.  
Incluye: Referencias bibliográficas.  
Incluye: Anexos

ISBN: 978-628-7851-16-0 (impreso)  
ISBN: 978-628-7851-17-7 (PDF)  
ISBN: 978-628-7851-18-4 (ePub)

1. Mediciones - Enseñanza. 2. Comparación. 3. Aprendizaje - Objetivos. 4. Capacidad y  
Volumen. 5. Competencia Matemática. 6. Sistema Métrico. 7. Metodología. I. Rodríguez  
Bonilla, Juan Diego. II. Henao Aguilar, Gonzalo. III. Tít.

530.8 21ed.

## Medición de la capacidad del cilindro

Luis Alberto Ortiz Paloma  
Juan Diego Rodríguez Bonilla  
Gonzalo Henao Aguilar  
© Universidad Pedagógica Nacional

ISBN impreso: 978-628-7851-16-0  
ISBN PDF: 978-628-7851-17-7  
ISBN ePub: 978-628-7851-18-4

**Primera edición, 2026**

Helberth Augusto Choachí González  
**Rector**

Paola Acosta Sierra  
**Vicerrectora de Investigación,  
Extensión y Proyección Social**

Víctor Espinosa Galán  
**Vicerrector Académico**

Yaneth Romero Coca  
**Vicerrectora Administrativa y Financiera**

Gina Marcela Duarte Fonseca  
**Secretaria General**

### Preparación editorial

**Grupo Interno de Trabajo Editorial  
Universidad Pedagógica Nacional**  
Calle 72 n.º 12-77  
editorial.upn.edu.co  
Teléfono: (57-601) 594 1894, ext. 190  
Bogotá, Colombia

Alba Lucía Bernal Cerquera  
**Coordinación**

Maritza Ramírez Ramos  
**Edición**

Felipe Chavarro López  
**Corrección de estilo**

Fredy Johan Espitia Ballesteros  
**Diseño y diagramación**

Carvajal Soluciones de Comunicaciones S. A. S.  
**Impresión**

**Fechas de evaluación:** 18-10-2024 / 11-11-2024  
**Fecha de aprobación:** 18-12-2024

**Bogotá, D. C., 2026**

Hecho el depósito legal que ordena la Ley 44 de 1993 y el  
decreto reglamentario 460 de 1995.



Esta publicación puede ser distribuida, copiada y exhibida  
por terceros si se mencionan los créditos correspondientes.  
No se puede obtener ningún beneficio comercial. No se  
pueden realizar obras derivadas.



# Contenido

Prólogo .....	11
Introducción.....	15
Capítulo 1. Articulación de contenidos.....	17
Estructura matemática.....	17
Sistemas de representación .....	19
Fenómenos que dan sentido al tema .....	22
Capítulo 2. Aspectos cognitivos.....	25
Expectativas de nivel superior .....	25
Objetivos de aprendizaje.....	26
Limitaciones de aprendizaje .....	26
Criterios de logro .....	28
Capítulo 3. Esquema general de la unidad didáctica.....	35
Capítulo 4. Tarea diagnóstica .....	39
Capítulo 5. Tareas de aprendizaje.....	45
Tarea 1.1. Latas de Milo® .....	46
Tarea 1.2. Vasos de gaseosa.....	51
Tarea 2.1. Comparación de cilindros .....	56
Tarea 2.2. Comparación de precios .....	61
Tarea 2.3. Incrementos .....	67

<b>Capítulo 6. Evaluación final.....</b>	<b>73</b>
<b>Diseño del examen final.....</b>	<b>73</b>
<b>Rúbrica de evaluación.....</b>	<b>75</b>
<b>Conclusiones .....</b>	<b>79</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>83</b>
<b>Anexo 1. Dificultades y errores.....</b>	<b>84</b>
<b>Anexo 2. Criterios de logro.....</b>	<b>91</b>
<b>Anexo 3. Fichas de las tareas.....</b>	<b>93</b>
<b>Anexo 4. Imprimibles tareas.....</b>	<b>119</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>129</b>



# Índice de figuras

<b>Figura 1.</b> Estructura conceptual de la medición de la capacidad del cilindro .....	18
<b>Figura 2.</b> Envases usados en el antiguo Egipto.....	20
<b>Figura 3.</b> Sistemas de representación para la medida de capacidad del cilindro .....	21
<b>Figura 4.</b> Análisis fenomenológico para la medición de la capacidad del cilindro .....	23
<b>Figura 6.</b> Grafo de criterios de logro del primer objetivo .....	31
<b>Figura 7.</b> Grafo de criterios de logro del segundo objetivo.....	33
<b>Figura 8.</b> Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1. ....	50
<b>Figura 9.</b> Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2.....	55
<b>Figura 10.</b> Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1. ....	60
<b>Figura 11.</b> Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2. ....	66
<b>Figura 12.</b> Grafo de criterios de logro de la tarea 2.3. ....	71



# Índice de Tablas

<b>Tabla 1.</b> Fenómenos y contextos fenomenológicos de la capacidad del cilindro .....	23
<b>Tabla 2.</b> Dificultades y errores para la medición de la capacidad del cilindro .....	27
<b>Tabla 3.</b> Criterios de logro .....	29
<b>Tabla 4.</b> Estructura de la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro .....	35
<b>Tabla 5.</b> Conocimientos previos y errores asociados.....	39
<b>Tabla 6.</b> Listado de ayudas para la tarea diagnóstica.....	43
<b>Tabla 7.</b> Limitaciones de aprendizaje de la tarea 1.1 .....	49
<b>Tabla 8.</b> Limitaciones de aprendizaje de la tarea 1.2 .....	54
<b>Tabla 9.</b> Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.1 .....	59
<b>Tabla 10.</b> Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.2.....	65
<b>Tabla 11.</b> Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.3.....	70
<b>Tabla 12.</b> Rúbrica de evaluación del examen final .....	76
<b>Tabla 13.</b> Listado de anexos .....	83





## Prólogo

El libro que el lector tiene entre las manos es fruto de un riguroso proceso de análisis, contraste y reescritura llevado a cabo en la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Su estructura reproduce el modelo de análisis didáctico que vertebra la maestría y que se deja ver, sin artificios, en la secuencia de capítulos. Tras delimitar el problema didáctico, los autores articulan el contenido con claridad: distinguen los conceptos de capacidad y volumen, los anclan en los principios de Cavalieri y de Arquímedes, y completan el cuadro con los procedimientos históricos esenciales y los fenómenos —de llenado y de espacio ocupado— que dan sentido escolar al tema. Esa estructura conceptual se sostiene en una variedad de sistemas de representación que van de lo manipulativo a lo simbólico y que el texto despliega con la intención de que el estudiante pueda circular, con naturalidad, entre la experiencia y la formalización.

Sobre ese cimiento se construyen las perspectivas cognitivas: se fijan expectativas de aprendizaje alineadas con los procesos de formular, emplear e interpretar, y se derivan de ellas objetivos concretos que el lector verá reflejados en grafos de criterios de logro y en instrumentos de evaluación formativa. No se abusa del detalle teórico; se dosifica lo necesario para que sea comprensible por qué cada tarea busca lo que busca y cómo se anticipan las dificultades más habituales.

Con una bien lograda precisión terminológica, el libro evita confusiones y, en las tareas de aprendizaje, coloca al estudiante ante situaciones muy próximas a su experiencia: rediseñar la lata de Milo® para que duplique su contenido; comprobar si el vaso de gaseosa que compra en el cine realmente contiene los 600 ml anunciados; decidir entre distintos contenedores cilíndricos cuál ofrece la mejor relación capacidad-precio dentro de un presupuesto dado; y calcular cómo varía la capacidad de un envase cuando radio y altura aumentan simultáneamente un 20%. Lejos de proponer ejercicios rutinarios, la unidad didáctica reta al estudiante a movilizar varios sistemas de representación, justificar sus decisiones y, finalmente,

formalizar la relación  $C = \pi r^2 h$  solo después de haberla intuido, medido y representado dinámicamente. Así, las representaciones dejan de ser un adorno metodológico y se convierten en un medio para apoyar el aprendizaje.

La unidad didáctica se organiza en tres momentos distribuidos a lo largo de nueve sesiones de clase: una tarea diagnóstica inicial, cinco tareas de aprendizaje encadenadas y un examen final. La tarea diagnóstica le permite al profesor identificar concepciones previas, confusiones entre volumen y capacidad y estrategias de conteo o cálculo, y ajustar la ruta de aprendizaje prevista.

Las tareas de aprendizaje avanzan desde la manipulación concreta hacia la formalización simbólica: primero, el llenado por discos para reconstruir la relación  $C = A_b \cdot h$ ; después, la modelación tabular de datos variando radio y altura; en tercer lugar, la traducción gráfica de esas variaciones para reconocer proporcionalidades; en cuarto lugar, la simulación ejecutable en GeoGebra que dinamiza el llenado y permite conjeturar; y, por último, la generalización simbólica en la que los estudiantes formalizan la expresión  $C = \pi r^2 h$  y justifican sus límites de validez. Los autores describen en detalle cada tarea con indicaciones para los profesores que quieran implementarlas.

Cuando fue puesta en marcha con estudiantes de grado noveno en el Instituto Pedagógico Nacional, la unidad didáctica hizo manifiestas dificultades bien documentadas en la literatura —errores de tipo proporcional, confusión de unidades, etiquetado incorrecto de radio y diámetro— y permitió formular criterios de logro precisos para abordarlas.

Conviene subrayar, también, el lugar que las tecnologías digitales ocupan en el texto. El recurso a GeoGebra, por ejemplo, no se concibe como un gesto de modernidad sino como parte esencial del sistema ejecutable: allí se anima la idea de “llenar” un cilindro con discos, se manipulan parámetros para explorar la relación entre  $r$ ,  $h$  y  $C$ , y se promueve la formulación de conjeturas que se contrastan luego en papel y lápiz. La tecnología, así integrada, se convierte en mediadora que amplía el espacio de indagación y refuerza el diálogo entre representaciones.

Quien conozca el libro *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*, reconocerá en la cadencia del presente volumen la impronta de aquella obra colectiva: la misma apuesta por articular teoría y práctica, la misma atención a los detalles que convierten un modelo en herramienta operativa, la misma vocación por compartir el resultado con la comunidad docente para suscitar conversación, contraste y mejora. En efecto, publicar esta unidad didáctica cierra el ciclo formativo: la reflexión se

hace escritura, la escritura se hace documento transferible y el documento, una vez en manos de otros profesores, puede dar lugar a nuevas implementaciones y a nuevas evidencias sobre su eficacia. De este modo, los autores asumen la responsabilidad de contribuir al acervo colectivo y se sitúan en la corriente de quienes entienden la enseñanza como una obra compartida y perfectible, no como invento privado y cerrado.

Esta dimensión comunitaria tiene, además, un valor añadido: hace visible la trayectoria de la maestría como espacio en el que el conocimiento teórico —p. ej. historia, fenomenología, análisis curricular— dialoga con la experiencia profesional de sus participantes y produce, al cabo de dos años, materiales que demuestran su pertinencia. El libro da cuenta de esa trayectoria tanto en la fineza del aparato conceptual como en la concreción de las tareas que pueden llevarse al aula sin mayor dificultad logística. La combinación de rigor en el diseño y viabilidad en la puesta en práctica confirma que la formación recibida por los autores no se quedó en el nivel discursivo, sino que se tradujo en capacidades técnicas y prácticas, justo en la línea de lo que el modelo del análisis didáctico propone para el desarrollo profesional docente.

El resultado final —que ahora circula gracias al apoyo de la Universidad Pedagógica Nacional— ofrece, pues, un doble servicio. Por un lado, constituye un recurso didáctico completo sobre un tema que suele tratarse de modo superficial y que, sin embargo, plantea desafíos conceptuales de considerable calado; por otro, actúa como ejemplo ilustrativo de cómo los profesores pueden transformar la investigación en propuestas concretas de aula si disponen de un andamiaje metodológico sólido y de un espacio de acompañamiento reflexivo. En tiempos en que la urgencia escolar invita a soluciones rápidas y en que la abundancia de materiales digitales dispersa la atención, resulta alentador encontrar una obra que, sin renunciar al detalle técnico, mantiene en el centro la pregunta por la comprensión del estudiante y por la coherencia interna del proceso de enseñanza.

A quienes se aventuren a utilizar esta unidad didáctica, el libro les ofrece no solo la secuencia de actividades, sino la explicación pormenorizada de su justificación: por qué se elige tal fenómeno y no otro, qué error se prevé con tal pregunta, cómo puede el profesor intervenir para reconducir un obstáculo inesperado. Con ello, los autores invitan a que cada lector transforme, adapte y, sobre todo, documente los resultados de sus propias adaptaciones, de modo que la comunidad que se pretende fortalecer no se limite a recibir, sino que produzca nueva evidencia que enriquezca la conversación colectiva.

Con la publicación de *Medición de la capacidad del cilindro* se consolida, en suma, la idea de que la buena enseñanza de las matemáticas es inseparable de la reflexión sistemática y de la colaboración entre profesionales. Si este libro logra que un docente cuestione la distinción entre volumen y capacidad, revise la riqueza de los sistemas de representación implicados o se anime a registrar y analizar los errores de sus estudiantes con el detalle que aquí se muestra, habrá cumplido su cometido. Pero, sobre todo, habrá dado un paso más para que la escuela se convierta en un lugar en el que las matemáticas se aprenden con significado, se enseñan con conciencia y se comparten con generosidad.

Pedro Gómez<sup>1</sup>

---

1 Director de una “empresa docente”, director del proyecto Funes, director de la maestría en Educación Matemática en la Universidad de los Andes (Colombia) y colaborador como investigador en la Universidad de Granada.

# Introducción

En esta obra presentamos una unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro dirigida a profesores de matemáticas en formación y en ejercicio, como una propuesta para la enseñanza de este tema de las matemáticas escolares en el grado noveno; fue diseñada por un grupo de la undécima cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Los autores son tres docentes de matemáticas en ejercicio: el primero estuvo vinculado como docente en el Instituto Pedagógico Nacional, el segundo es exalumno del mismo instituto y el tercero se encuentra vinculado a la Secretaría de Educación del departamento de Cundinamarca.

Esta unidad didáctica fue implementada en el Instituto Pedagógico Nacional, ubicado en la localidad de Usaquén de la ciudad de Bogotá (Colombia). El instituto es un establecimiento educativo oficial de régimen especial por ser una dependencia académico-administrativa de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Además, fue declarado como patrimonio histórico y cultural de la nación en la Ley 1890 de 2018. En relación con la población objetivo, los estudiantes del grado noveno están en edades que oscilan entre los catorce y los diecisiete años y, en general, obtuvieron un buen rendimiento académico. Este grupo demostró interés por aprender y disposición favorable para el trabajo en clase. Asimismo, son estudiantes habituados a trabajar de manera colaborativa y en grupo en las clases de matemáticas.

El tema seleccionado es coherente con los referentes curriculares nacionales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en concreto con los *Estándares básicos de competencias* para grado noveno y el documento *Derechos básicos de aprendizaje* en su segunda versión (DBA) para el mismo grado. La medición de la capacidad del cilindro atiende a los estándares “Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados” y “Uso

representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (MEN, 2006, pp. 86-87). Asimismo, el DBA relacionado con esta unidad didáctica establece: “Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares” (MEN, 2015, p. 68).

Consideramos que abordar la enseñanza de la medición de la capacidad del cilindro es relevante, puesto que es frecuente que los estudiantes tengan dificultades para diferenciar entre los conceptos de capacidad y volumen. Esto se debe a que los procedimientos necesarios para medir indirectamente dichas magnitudes son los mismos (Olmo *et al.*, 1993) por lo que, en la mayoría de situaciones, la atención de los profesores está centrada en la enseñanza del volumen.

# Articulación de contenidos

**E**n este apartado presentamos los aspectos conceptuales necesarios para una adecuada implementación de la unidad didáctica propuesta. Primero, describimos los conceptos y procedimientos que componen el eje central para la medición de la capacidad del cilindro. Luego, organizamos los sistemas de representación que permiten dar significado a este tema de las matemáticas escolares. Finalmente, enunciaremos los fenómenos que dan sentido al tema y los agrupamos mediante sus características.

## Estructura matemática

A continuación presentamos la estructura matemática de la medición de la capacidad del cilindro. Nuestro propósito es mostrar la relación entre algunos conceptos y procedimientos relevantes para este tema de las matemáticas escolares. No obstante, resaltamos que estos conceptos y procedimientos coinciden con la estructura matemática relacionada con la medición del volumen. Afirmamos esto porque “las matemáticas no han elaborado ningún modelo para describir la capacidad como tal, por lo que hay que recurrir a su relación con el volumen para manejarla matemáticamente” (Olmo *et al.*, 1993, p. 101). Esta afirmación fundamenta que el volumen y la capacidad sean tratados procedimentalmente de la misma manera. Por ejemplo, al medir la capacidad de un recipiente, medimos el volumen de un objeto completamente macizo que encaja perfectamente en ese recipiente.

En la figura 1 presentamos la estructura conceptual relacionada con la medida de capacidad del cilindro. En los rectángulos sombreados y delimitados por un borde grueso se encuentran los ejes centrales del tema. Usamos rectángulos sin sombrear para establecer conceptos, mientras que los procedimientos están enmarcados en elipses. Las figuras con esquinas redondeadas contienen procedimientos





de una unidad de medida seleccionada. El refinamiento de este proceso de conteo está relacionado con el método de exhaustión. Por ejemplo, podemos determinar la capacidad de una lata al usar repetidamente un envase de capacidad menor y conocida. No obstante, este procedimiento puede requerir el uso de fracciones del envase para estimar la capacidad. De esta manera, una persona puede utilizar un envase de capacidad cada vez más pequeña para refinar el conteo y llegar a una cantidad entera de unidades de medida.

## **Sistemas de representación**

Según Kaput (1992), un sistema de representación es un conjunto de signos junto con reglas que permiten representar diversos aspectos de un concepto de las matemáticas. De acuerdo con esto, podemos abordar la medida de capacidad de un cilindro con los sistemas de representación numérico, tabular, gráfico, simbólico, geométrico, manipulativo (Cañadas *et al.*, 2018) y ejecutable. Aclaremos que los sistemas de representación geométrico y ejecutable para el tema de la unidad didáctica utilizan el concepto de volumen y su medida. A continuación, describimos los sistemas de representación para la medida de capacidad del cilindro.

### ***Sistema de representación numérico***

El sistema de representación numérico se usa durante la medición indirecta de la capacidad, puesto que un número representa la medida de una magnitud como la longitud, el área o la capacidad.

### ***Sistema de representación tabular***

Representamos en tablas la información relacionada con la medida de capacidad de cilindros al organizar, en ternas ordenadas, las medidas de atributos del cilindro como 1) su altura, radio o diámetro de la base, 2) el área de la base y 3) la capacidad.

### ***Sistema de representación gráfico***

Empleamos un sistema de coordenadas cartesiano para representar cilindros y sus atributos. Usamos el sistema de referencia  $\mathbb{R}^3$  para graficar y medir atributos de un cilindro como el radio, diámetro de la base o altura. Con esta información, podemos determinar la medida de su capacidad.

## Sistema de representación simbólico

Recurrimos a la notación algebraica para expresar la medida de la capacidad de un cilindro. Para esto, relacionamos la medida de la capacidad del cilindro con el producto de la altura y el área de su base o cara circular. Usamos la expresión  $C = A_b \cdot h$  para simbolizar esta relación. Empleamos la letra  $h$  para representar la medida de la altura y  $A_b$  para el área. También, utilizamos las letras  $r$  para el radio y  $d$  para el diámetro con el fin de representar los atributos de la base. Disponemos de las expresiones  $r = \frac{1}{2} \cdot d$  y  $A_b = \pi \cdot r^2$  para simbolizar las relaciones entre radio y diámetro, y la expresión para la medida del área de la base de un cilindro, respectivamente.

## Sistema de representación geométrico

Para medir la capacidad de un envase cilíndrico, tomamos un disco de altura fija que cabe perfectamente en este recipiente para que sea la unidad de referencia. Replicamos este disco tantas veces como sea necesario de manera que llenamos el envase completamente. Por lo tanto, obtenemos la medida de capacidad del envase cilíndrico al contar la unidad de referencia (disco) las veces que fue replicado dentro del recipiente.

## Sistema de representación manipulativo

Los antiguos egipcios usaron envases con forma cilíndrica para repartir una cantidad de granos entre un grupo de personas. En la figura 2 ilustramos un ejemplo de estos envases.

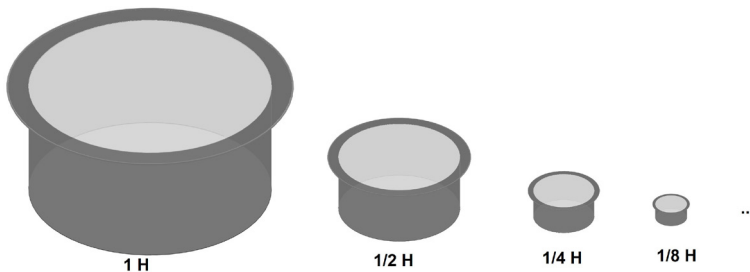


Figura 2. Envases usados en el antiguo Egipto

Los egipcios fijaron una unidad de medida para la capacidad y la llamaron *heqat*. Expresaban la cantidad para repartir como una suma de las fracciones  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/32$  y  $1/64$ , las cuales eran llamadas “fracciones del ojo de Horus”. En consecuencia, consideramos relevante complementar el sistema manipulativo.

Para este sistema de representación, incluimos envases cilíndricos graduados de distintas capacidades.

### Sistema de representación ejecutable

Los paquetes informáticos para la enseñanza de las matemáticas, como GeoGebra, permiten diseñar recursos que ilustran el llenado, de manera dinámica, de un recipiente cilíndrico. Por medio de estos recursos, reproducimos el método de replicación de discos que presentamos en el sistema de representación geométrico. En GeoGebra, la herramienta de trazo permite mostrar el lugar geométrico generado al desplazar la base de manera que simula el llenado del cilindro. En la figura 3 presentamos tanto los sistemas de representación de la medición de la capacidad del cilindro como sus relaciones.

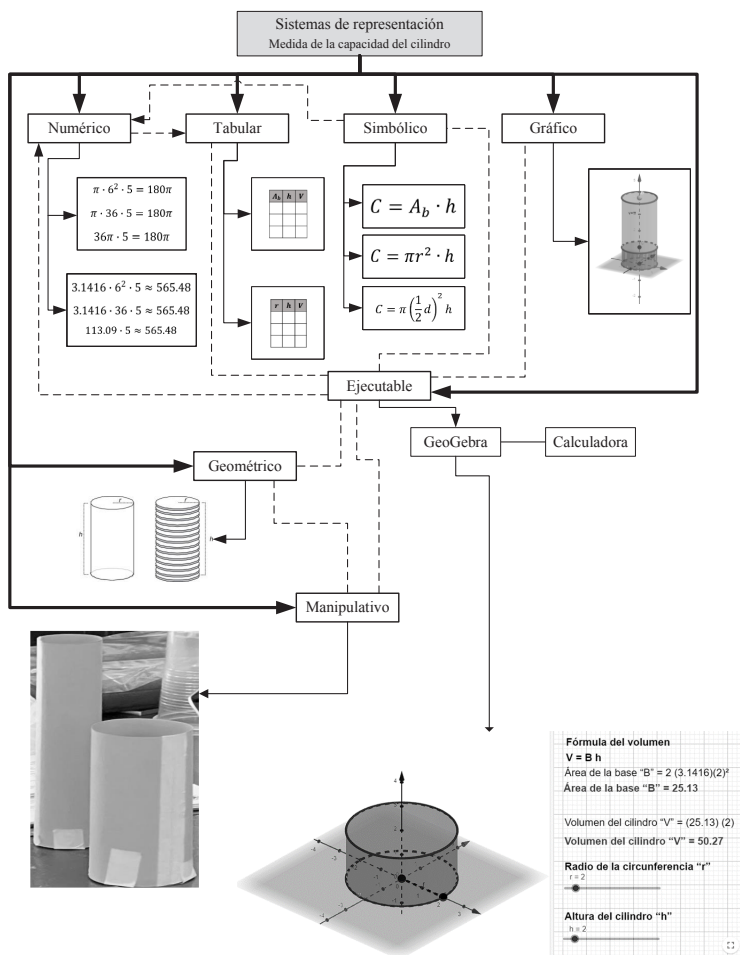


Figura 3. Sistemas de representación para la medida de capacidad del cilindro

## Fenómenos que dan sentido al tema

Las civilizaciones antiguas tenían la necesidad de determinar la cantidad de granos que producían o la cantidad de tierra que debían mover en sus construcciones. Algunas de estas civilizaciones recopilaron estas situaciones y sus soluciones en diversos documentos. Por ejemplo, en la antigua China, se sintetizaron en el capítulo 5 del *Jiuzhang Suanshu* (*Los nueve capítulos sobre arte matemático*) situaciones en las que es necesario calcular la capacidad de un contenedor cilíndrico con el fin de determinar la cantidad de trabajo necesaria para llenarlo (Yong, 1994). De igual manera, papiros del antiguo Egipto describen situaciones que buscan determinar la cantidad de grano dispuesta en contenedores cilíndricos con cubierta semiesférica (Deif, 2019). A continuación, presentamos un listado de situaciones relacionadas con la capacidad de recipientes cilíndricos:

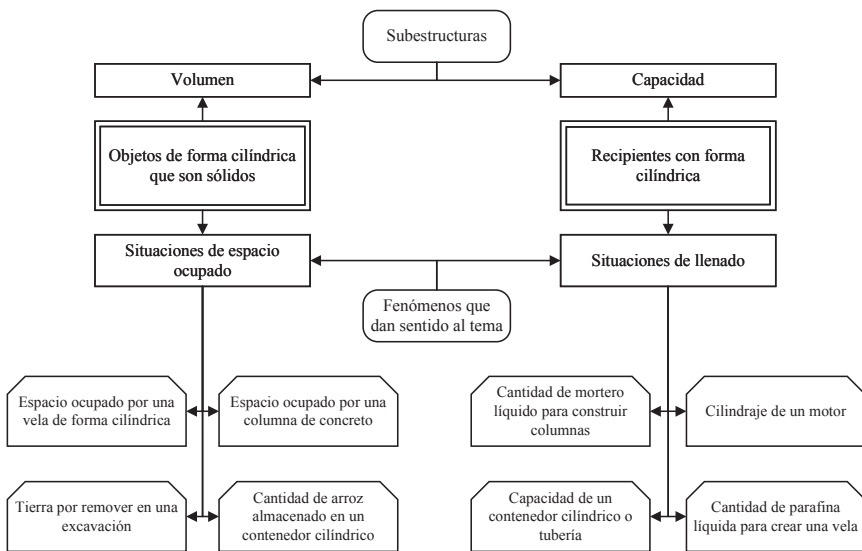
- Capacidad de los cilindros de un motor de combustión interna.
- Capacidad de un frasco o contenedor cilíndrico (tanque, vaso, balde, olla, etc.).
- Capacidad de una tubería de longitud y radios conocidos.
- Cantidad de tierra que se debe remover en la construcción de túneles para un metro subterráneo.
- Cantidad de parafina líquida para elaborar una vela mediante el uso de un molde de forma cilíndrica.
- Cantidad de concreto para construir una columna cilíndrica (postes de luz o columnas estructurales).

Los fenómenos enumerados involucran recipientes cilíndricos de los cuales podemos medir 1) el espacio ocupado y 2) el espacio disponible para ser llenado. Estas cualidades surgen al considerar cilindros sólidos (espacio ocupado) y recipientes cilíndricos con o sin tapa (espacio disponible), categorías que reciben el nombre de *contextos fenomenológicos* (Cañadas *et al.*, 2018). En la tabla 1 ilustramos la agrupación de los fenómenos enumerados en dos contextos fenomenológicos.

**Tabla 1.** Fenómenos y contextos fenomenológicos de la capacidad del cilindro<sup>2</sup>

Fenómenos	Contextos fenomenológicos
Cilindraje de un motor; capacidad de un contenedor cilíndrico o tubería; cantidad de parafina líquida para crear una vela; cantidad de concreto para construir columnas.	Situaciones de llenado.
Espacio ocupado por una vela de forma cilíndrica; tierra por remover en una excavación; espacio ocupado por una columna de concreto; cantidad de arroz almacenado en un envase hermético de forma cilíndrica.	Situaciones de espacio ocupado.

Podemos ver que los fenómenos que dan sentido al tema están agrupados con ayuda de las propiedades físicas de la sustancia contenida en un recipiente cilíndrico. Las situaciones de llenado están relacionadas con líquidos o gases y la cantidad de estos fluidos que puede llenar un recipiente cilíndrico. Esta cualidad tiene que ver con el espacio vacío determinado en un recipiente susceptible de ser llenado (Olmo *et al.*, 1993). Por otra parte, las situaciones de espacio ocupado están relacionadas con sustancias en estado sólido cuya forma está completamente determinada por un recipiente cilíndrico. En la figura 4 presentamos un esquema que corresponde con los contextos fenomenológicos y con las subestructuras que dan sentido a la unidad didáctica.



**Figura 4.** Análisis fenomenológico para la medición de la capacidad del cilindro

2 Todas las tablas incluidas en el libro son de elaboración propia de los autores.



## Aspectos cognitivos

En este apartado presentamos los aspectos cognitivos que la unidad didáctica desarrolla para fortalecer la competencia matemática de los estudiantes. Describimos estos aspectos a partir de dos expectativas a las que suelen aspirar los profesores: unas de nivel superior y otras relacionadas con el logro de los objetivos de aprendizaje. En lo que sigue, exponemos dichas expectativas junto con las limitaciones de aprendizaje asociadas y la caracterización de los objetivos de aprendizaje.

### Expectativas de nivel superior

Para caracterizar las expectativas de nivel superior, empleamos la noción de alfabetización matemática establecida por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en el marco teórico expuesto para las pruebas PISA del año 2012. Con el fin de potenciar en el largo plazo esta competencia matemática de los estudiantes, el marco PISA describe tres procesos matemáticos y siete capacidades matemáticas fundamentales que se deben desarrollar a lo largo de la educación escolar (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013).

Con la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro prevemos contribuir a los procesos matemáticos de *formular, emplear e interpretar*. Los estudiantes evidencian el proceso matemático de formular cuando comprenden los contextos expuestos, identifican la información relevante para abordarlos y plantean adecuadamente una estrategia de solución. El proceso de emplear se evidencia cuando los estudiantes usan constantemente procedimientos para medir indirectamente una magnitud. Finalmente, los escolares deben verificar la coherencia de sus respuestas en el contexto, por lo que deben interpretar los resultados obtenidos y su significado en las situaciones propuestas.



De igual manera, la unidad didáctica contribuye a fomentar algunas capacidades matemáticas fundamentales: diseño de estrategias para resolver problemas, comunicación, representación, utilización de operaciones y de un lenguaje formal, simbólico y técnico, entre otras. Esta unidad didáctica aporta a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, matematización y utilización de herramientas matemáticas.

## Objetivos de aprendizaje

Para concretar la contribución a las expectativas de nivel superior, establecimos los siguientes objetivos de aprendizaje para la unidad didáctica.

**Objetivo 1.** Justificar la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos y de sus dimensiones en diversos contextos.

**Objetivo 2.** Justificar la elección de un recipiente cilíndrico como resultado de la comparación de su capacidad y la de otros recipientes con la misma forma.

Con el primer objetivo de aprendizaje, esperamos que los escolares midan indirectamente la capacidad de envases cilíndricos o de alguna de sus dimensiones. Además, buscamos que puedan estimar la capacidad de un recipiente irregular al acotar su capacidad con envases cilíndricos. Con el segundo objetivo de aprendizaje, esperamos que los estudiantes elijan recipientes cilíndricos al compararlos en situaciones que involucren las capacidades de estos recipientes. También buscamos que los escolares justifiquen los procedimientos utilizados y la elección del envase apropiado para dar una respuesta coherente en el marco del contexto que se les presenta.

Debe considerarse que los errores más frecuentes en la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos son de multiplicación, de división y de tipo proporcional (Olmo *et al.*, 1993). Además, los escolares pueden incurrir en errores relacionados con el uso inadecuado de las unidades de medida debido a los conflictos de significado entre los conceptos de volumen y capacidad.

## Limitaciones de aprendizaje

Según Lupiáñez (2009), las limitaciones de aprendizaje de las matemáticas escolares se pueden caracterizar a partir de las dificultades, los errores y los obstáculos. Las dificultades se refieren a los aspectos generales que impiden o retrasan el

logro de los objetivos de aprendizaje propuestos en la unidad didáctica (González y Gómez, 2018), pero que pueden superarse mediante una explicación, práctica adicional o cambio de procedimiento o representación. Por su parte, un error es la acción realizada por un estudiante que hace explícita alguna dificultad relacionada con el tema, mientras que un obstáculo está relacionado con una estructura cognitiva más compleja y resistente al cambio, puesto que se basa en conocimientos previamente adquiridos y que resultaron funcionales en algún momento del proceso de aprendizaje (Socas, 1997). En este documento no nos centramos en los obstáculos, ya que tienen un carácter cognitivo más profundo y se salen del propósito de esta propuesta.

Para describir las dificultades relacionadas con la medición de la capacidad, Olmo *et al.* (1993) citan resultados de investigaciones al respecto sobre el aprendizaje del volumen y la capacidad. En nuestro caso, determinamos algunas dificultades que surgen al reflexionar sobre nuestra experiencia docente, y que consolidamos en el siguiente listado:

- Dificultades aritméticas y algebraicas.
- Dificultad para medir indirectamente por modelos multiplicativos.
- Dificultad relacionada con la interpretación de la medición.
- Dificultad asociada con la representación geométrica de la información.
- Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad.

En la tabla 2 presentamos los errores más frecuentes asociados con cada una de estas dificultades. El lector puede encontrar el listado completo de errores y las descripciones de las dificultades en el anexo 1.

**Tabla 2.** Dificultades y errores para la medición de la capacidad del cilindro

Dificultad		Error
Dificultades aritméticas y algebraicas.	E4	Resolver la ecuación que relaciona las medidas del cuadrado del radio, la altura y el volumen de un cilindro despejando un valor distinto al solicitado.
Dificultad para medir indirectamente por modelos multiplicativos.	E43	Multiplicar la altura de un recipiente cilíndrico por un número distinto a la medida del área de la base.
	E44	Multiplicar el radio y la altura por pi para determinar la capacidad de un recipiente cilíndrico.

Dificultad		Error
Dificultad relacionada con la interpretación de la medición.	E11	Asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla.
	E12	Intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie.
Dificultad asociada con la representación geométrica de la información.	E18	Etiquetar el radio como si fuera el diámetro del círculo.
	E42	Confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado.
Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad.	E19	Concluir que dos cilindros de dimensiones distintas deben tener volúmenes distintos.

Nota. E: Error.

## Criterios de logro

En este apartado presentamos criterios de logro y los grafos de criterios de logro con los que caracterizamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.

### *Criterios de logro*

Los criterios de logro describen, con un lenguaje cercano a los estudiantes, los procedimientos necesarios para el desarrollo de una tarea matemática escolar (Gómez, 2018). Para su elaboración, analizamos las diferentes formas de solucionar las tareas matemáticas escolares propuestas y los errores en los que pueden incurrir los estudiantes. En la tabla 3 presentamos algunos de los criterios de logro más relevantes para la unidad didáctica organizados por objetivo de aprendizaje. El listado completo de criterios de logro puede ser consultado en el anexo 2.

**Tabla 3.** Criterios de logro

CdL	Descripción
<b>Objetivo 1</b>	
1.1	Identifico las dimensiones del cilindro que me permiten solucionar el problema.
1.2	Interpreto los datos del problema y los represento algebraicamente.
1.9	Escribo la relación entre la capacidad, el área y la altura de un cilindro.
1.12	Resuelvo la ecuación que me permite determinar una dimensión del cilindro a partir de su relación con otra.
1.16	Verifico la coherencia de la solución obtenida y doy respuesta a la tarea.
<b>Objetivo 2</b>	
2.3	Comparo las capacidades de los dos recipientes mediante fórmulas.
2.8	Comparo la cantidad de material usado para llenar los recipientes.
2.12	Comparo el precio por unidad de capacidad de los envases.
2.19	Comparo la capacidad del envase antes y después de la ampliación.

**Nota.** CdL: Criterio de logro.

### ***Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje***

Para una tarea matemática escolar, un camino de aprendizaje es una secuencia de criterios de logro que aborda completamente su solución. Como las tareas matemáticas escolares tienen distintas estrategias de solución, podemos establecer un camino de aprendizaje por cada una de estas estrategias. Los grafos de criterios de logro permiten visualizar gráficamente todas las estrategias de solución para las tareas de un mismo objetivo de aprendizaje y los errores en los que puede incurrir un estudiante al resolverlas. Además, estos grafos permiten caracterizar un objetivo de aprendizaje mediante los procedimientos que prevemos que los estudiantes desarrollarán. En la figura 5 presentamos un ejemplo de un grafo de criterios de logro para una tarea matemática escolar de esta unidad didáctica.



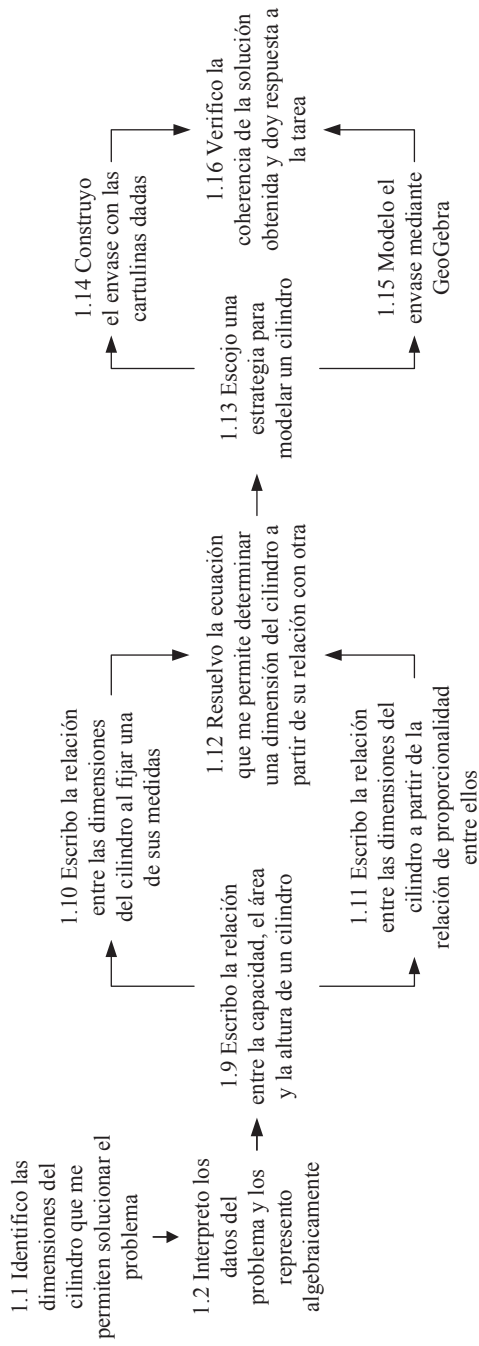


Figura 5. Ejemplo de un grafo de criterios de logro para una tarea matemática escolar

La tarea matemática escolar que usamos como ejemplo tiene cuatro caminos de aprendizaje distintos. Al organizar todos los grafos de las tareas matemáticas escolares de un mismo objetivo, estructuramos el grafo de criterios de logro de dicho objetivo. En la figura 6 presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo de la unidad didáctica.

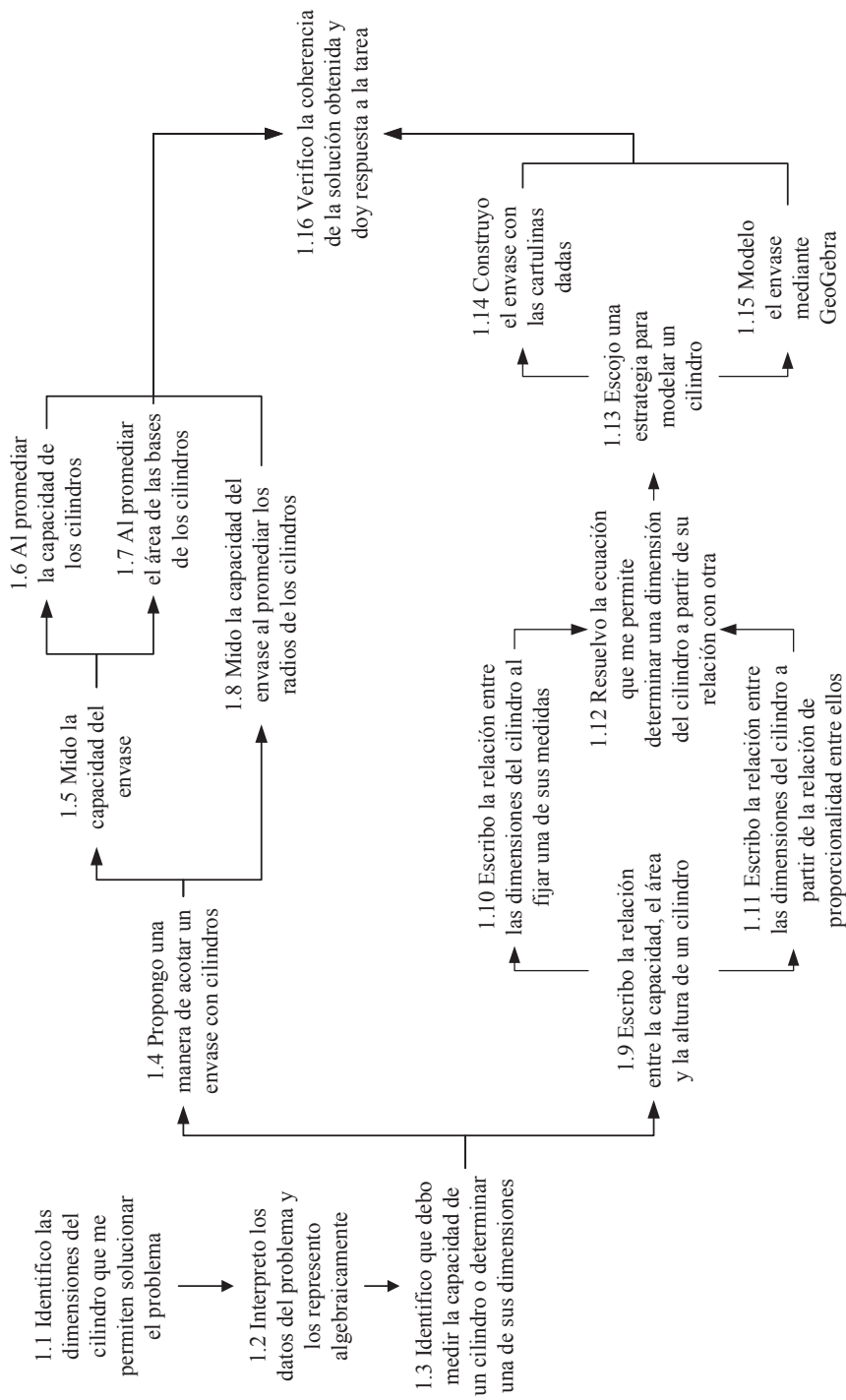
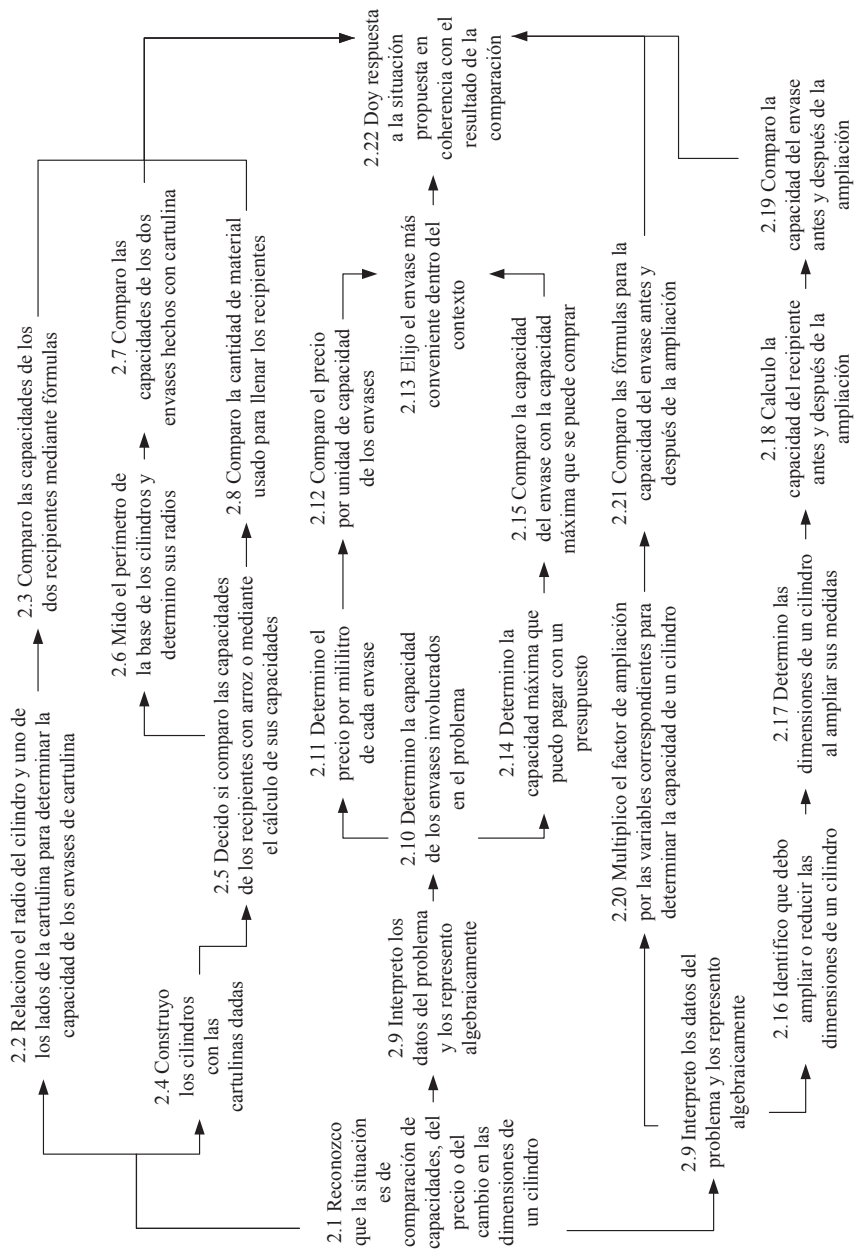


Figura 6. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

Para lograr el objetivo propuesto, los escolares deben: 1) identificar e interpretar los datos dados en el problema (criterios de logro 1.1, 1.2); 2) determinar si es necesario estimar la capacidad de un envase no cilíndrico o determinar una dimensión de un recipiente con capacidad conocida (criterio de logro 1.3); 3) medir indirectamente la capacidad de un envase cilíndrico o una de sus dimensiones (criterios de logro 1.6, 1.7, 1.8 y 1.12); y 4) validar la coherencia de su solución (criterio de logro 1.16). En la figura 7 presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

Para lograr el segundo objetivo, un escolar debe 1) identificar e interpretar los datos del problema (criterios de logro 2.4 y 2.9); 2) medir indirectamente la capacidad de varios recipientes cilíndricos (criterios de logro 2.2, 2.6, 2.10, 2.16, 2.18 y 2.20); 3) comparar las capacidades (criterios de logro 2.3, 2.7, 2.8, 2.12, 2.15, 2.19 y 2.21); y 4) validar la coherencia del resultado de esta comparación dentro del contexto propuesto (criterios de logro 2.13 y 2.22).



**Figura 7.** Grafo de criterios de logro del segundo objetivo



## Esquema general de la unidad didáctica

En la tabla 4 presentamos el diseño global de la unidad didáctica. Incluimos cada una de las sesiones trabajadas con estudiantes, las actividades a desarrollar por sesión y el tiempo en minutos destinado para estas actividades. Distribuimos el total de actividades de la unidad didáctica en nueve sesiones con una duración de noventa minutos cada una.

**Tabla 4.** Estructura de la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
1	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Presentación, actividades y evaluación de la unidad didáctica.	Introducción al tema de la unidad didáctica. Explicación de la distribución de actividades de la unidad didáctica, de la ponderación de cada una de las actividades de la unidad y de los procedimientos para definir la valoración del desempeño individual en la unidad.	25
	Tarea diagnóstica.	Evaluación para determinar el nivel de consecución de los conocimientos previos requeridos para el desarrollo de la unidad didáctica.	60



Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
2	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Realimentación tarea diagnóstica.	Explicación de las dificultades encontradas en las evaluaciones.	15
	Explicación.	Abordar los temas que presentan más dificultades.	30
	Actividad de refuerzo.	Ejercicios rutinarios y de aplicación para poner en práctica los temas explicados.	40
3	Organización del grupo.	Organización del grupo.	10
	Presentación del objetivo 1.	Introducción del tema de la unidad didáctica.	20
		Presentación del objetivo y grafo de criterios de logro (ver: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=6qe9ZAmfS5M">youtube.com/watch?v=6qe9ZAmfS5M</a> )	
	Tarea 1.1.	Presentación de la meta y descripción.	15
Primera etapa del desarrollo de la tarea.		45	
4	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Tarea 1.1.	Presentación de roles y agrupamientos.	10
		Distribución de líderes y presentadores.	
		Conformación de grupos.	
		Segunda etapa de desarrollo de la tarea.	55
Presentación en el gran grupo.	20		
5	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Retroalimentación tarea 1.1.	Aclaración de dudas y explicación. Conclusiones.	20
	Tarea 1.2.	Presentación de la meta y descripción. Desarrollo de la tarea.	40
		Presentación en el gran grupo.	25

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
6	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Retroalimentación tarea 1.2.	Aclaración de dudas. Conclusiones.	10
	Presentación del objetivo 2.	Generalidades y grafo de criterios de logro.	5
	Tarea 2.1.	Presentación de la meta y descripción. Desarrollo de la tarea.	55
		Presentación en el gran grupo.	15
7	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Retroalimentación tarea 2.1.	Aclaración de dudas. Conclusiones.	10
	Tarea 2.2.	Presentación de la meta y descripción. Desarrollo de la tarea.	30
		Presentación en el gran grupo.	10
	Tarea 2.3.	Presentación de la meta y descripción. Desarrollo de la tarea.	25
		Presentación en el gran grupo.	10
8	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Retroalimentación tareas 2.2 y 2.3.	Aclaración de dudas. Conclusiones.	10
	Examen final.	Orientaciones generales. Aplicación del examen final.	75
9	Organización del grupo.	Organización del grupo.	5
	Retroalimentación del examen final.	Explicación de las dificultades encontradas en los trabajos de los estudiantes.	15
	Valoraciones de desempeño.	Compartir la valoración de desempeño global en la unidad didáctica.	30
	Evaluación de la unidad didáctica.	Diligenciamiento de una encuesta sobre la unidad didáctica.	30
	Actividades de superación de dificultades.	Desarrollo de una guía de refuerzo y citación a estudiantes con dificultades para asesorías.	10

Contemplamos que la primera sesión incluya la presentación de la unidad didáctica y la implementación de la tarea diagnóstica. Además, en la segunda sesión retroalimentamos la tarea diagnóstica, explicamos las dificultades encontradas en las evaluaciones y desarrollamos una actividad de refuerzo con ejercicios rutinarios y de aplicación para poner en práctica los conocimientos previos.

Seguidamente, distribuimos una secuencia de cinco tareas de las matemáticas escolares en cinco sesiones de clase. Las dos primeras tareas corresponden al primer objetivo de aprendizaje, mientras que las tres siguientes corresponden al segundo objetivo. En general, las sesiones previstas para desarrollar las tareas mantienen un esquema similar. En este esquema, cada sesión inicia con la retroalimentación de la tarea desarrollada en la sesión anterior. Posteriormente, el profesor realiza la presentación de la tarea de aprendizaje y orienta su desarrollo.

Por último, proponemos una sesión para evaluar el logro de los objetivos propuestos por medio de un examen final de la unidad didáctica. También planteamos una sesión para retroalimentar este examen y dar cierre a la unidad didáctica.

## Tarea diagnóstica

En este apartado presentamos la tarea diagnóstica previa al desarrollo de la unidad didáctica. La tarea diagnóstica es un instrumento conformado por tareas de evaluación y una retroalimentación después de su implementación. Las tareas de evaluación de este instrumento permiten establecer los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes para abordar las tareas que conforman la unidad didáctica. Asimismo, la retroalimentación de la tarea diagnóstica tiene como propósito ayudar a que los estudiantes superen las dificultades y errores relacionados con conocimientos previos. En la tabla 5 presentamos el listado de conocimientos previos para la unidad didáctica y los errores asociados (ver anexo 1).

**Tabla 5.** Conocimientos previos y errores asociados

CP	Descripción	Errores
1	Caracterizar objetos bidimensionales mediante sus medidas de área.	E55
2	Caracterizar poliedros mediante sus medidas de volumen.	E56
3	Identificar y describir las partes de un cilindro.	E57
4	Identificar y describir las partes de un prisma.	E58
5	Representar gráficamente un cilindro a partir de la relación entre sus dimensiones.	E59
6	Medir el área de un círculo de manera indirecta (fórmula).	E60-61
7	Utilizar los factores de conversión entre unidades de medida.	E62
8	Plantear ecuaciones a partir de la relación que hay entre los datos presentados en un problema.	E63



CP	Descripción	Errores
9	Resolver ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.	E64-65
10	Medir indirectamente el volumen de un prisma rectangular.	E66-67
11	Utilizar las razones y proporciones en la interpretación y solución de problemas.	E68-69
12	Interpretar la respuesta decimal obtenida luego de usar una calculadora.	E70-71
13	Determinar el valor intermedio entre dos cantidades mediante su promedio.	E80-81

**Nota.** CP: Conocimientos previos; E: Código de error.

Los conocimientos previos están relacionados con las partes de prismas y cilindros, la medición del área del círculo, el uso de factores de conversión entre unidades de medida y la solución de ecuaciones de primer y segundo grado. Algunos de estos conocimientos abordan también aspectos relacionados con el cálculo del promedio de un conjunto de datos y su interpretación como un valor intermedio a dos cantidades dadas. Con base en el listado de conocimientos previos, diseñamos una tarea diagnóstica con siete actividades. A continuación, presentamos la tarea diagnóstica de la unidad didáctica.

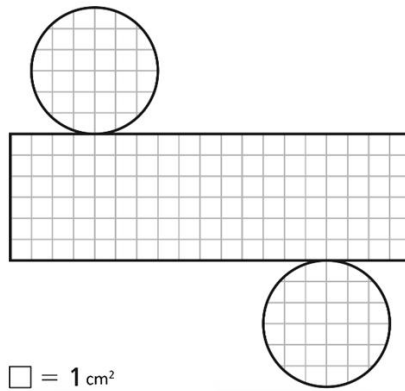
Resuelve, en parejas, los siguientes ejercicios sustentando todos los procedimientos por escrito de manera organizada. El uso de calculadora está permitido.

1. Juan va al supermercado y encuentra dos cajas de cereal. La primera contiene 14 onzas de cereal y cuesta \$ 15 920. La segunda caja es de 5 cm por 6 cm por 8 cm y cuesta \$ 10 360. ¿Cuál es la opción más conveniente para pagar la menor cantidad de dinero por onza? Justifica tu respuesta. (Nota: una onza equivale aproximadamente a  $29,5 \text{ cm}^3$ ).<sup>1</sup>
2. Llenamos un vaso de vidrio con agua a la mitad de su capacidad. Sacamos 400 ml de agua y el contenido que queda es 0,34 del total. ¿Qué cantidad de agua queda en el vaso?<sup>2</sup>

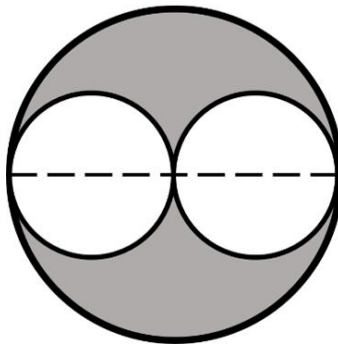
<sup>1</sup> Adaptado de Lappan *et al.* (2006a, p. 15).

<sup>2</sup> Adaptado de Lappan *et al.* (2006b, p. 17).

3. Determina la medida del radio y la altura del cilindro (a escala) que se puede armar con el desarrollo plano que se muestra en la siguiente figura.<sup>3</sup> Haz un bosquejo del cilindro resultante.



4. Dos círculos idénticos son ubicados lado a lado dentro de un círculo más grande, como se muestra en la siguiente figura.<sup>4</sup> El diámetro del círculo más grande es de 2 centímetros. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

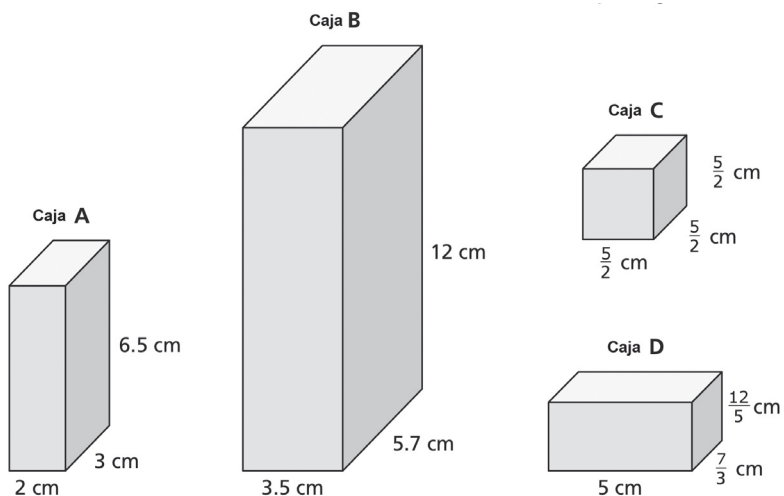


5. Mide los volúmenes de las cajas mostradas en la siguiente imagen.<sup>5</sup> Una vez hayas realizado esto, utiliza los resultados que obtuviste para organizar de mayor a menor los volúmenes de estas cajas.

3 Adaptado de Lappan *et al.* (2006b, p. 41).

4 Adaptado de Lappan *et al.* (2006c, p. 18).

5 Adaptado de Lappan *et al.* (2006b, p. 27).



6. Con la información de los volúmenes del ejercicio 5 encuentra una manera de medir el volumen de una caja intermedia entre las cajas A y D.
7. ¿Cuál es la diferencia entre el radio de la circunferencia cuya medida de área es  $54 \text{ cm}^2$  y el radio de la circunferencia cuya medida de área es  $30 \text{ cm}^2$ ?

Una vez valorados los resultados de la tarea diagnóstica, sugerimos dividir, en dos momentos, la sesión propuesta para la retroalimentación. En el primero, proponemos reflexionar sobre las dificultades encontradas de manera recurrente en las producciones escritas de los estudiantes. En el segundo, proponemos devolver a los estudiantes las producciones escritas y solicitarles que las corrijan. Para esto, sugerimos agrupar a los estudiantes de manera que aquellos que muestren comprensión de los conocimientos previos apoyen a los que tuvieron dificultades. Durante este momento, proponemos que el profesor acompañe a los grupos de estudiantes y ofrezca ayuda relacionada con las dificultades y errores evidenciados en las producciones escritas de las actividades que componen esta tarea. En la tabla 6 enumeramos algunos errores y las ayudas sugeridas.

**Tabla 6.** Listado de ayudas para la tarea diagnóstica

Error	Ayuda
E55	Indicar que las unidades de medida de área son unidades cuadradas.
E56	Indicar que las unidades de medida de volumen son unidades cúbicas.
E57	Recordar la definición de altura mediante un ejemplo con un objeto tridimensional.
E58	Recordar la definición de base de un cuerpo geométrico mediante un ejemplo con un objeto tridimensional.
E59	Retomar la definición de cuerpos redondos rectos a partir de la proyección ortogonal de la base superior.
E59	Proporcionar material manipulativo para apoyar los procesos de desarrollo del ejercicio.
E60	Relacionar el radio y el diámetro para identificar cuál es el necesario para medir el área del círculo indirectamente.
E61	Pedir al estudiante que consulte la fórmula que permite calcular el área de un círculo.
E62	Preguntar por las unidades más frecuentes para medir la cantidad de líquido en un recipiente (envases familiares de gaseosa, cajas de leche).
E63	Preguntar por el significado de las variables relacionadas mediante la ecuación propuesta y verificar que todas las cantidades del enunciado estén involucradas.
E64	Recordar el uso de opuestos aditivos e inversos multiplicativos para despejar ecuaciones.
E65	Retomar la relación entre elevar al cuadrado y raíz cuadrada.
E66	Sugerir al estudiante observar los siguientes videos: <a href="https://youtu.be/qj-DrIQRHvo?si=FsqmEhr3_4kCsT6F">https://youtu.be/qj-DrIQRHvo?si=FsqmEhr3_4kCsT6F</a> <a href="https://youtu.be/4A23ycIyLe4?si=L3VWPO8qRxeFSdJv">https://youtu.be/4A23ycIyLe4?si=L3VWPO8qRxeFSdJv</a>
E67	Preguntar por la magnitud que se quiere calcular.
E68	Preguntar si es válido hablar de galones por cada peso o de precio por cada galón.
E69	Revisar el planteamiento y preguntar si este permite obtener la unidad de medida requerida.
E70	Reflexionar sobre el significado de las cifras decimales escritas en relación con las fracciones de la magnitud calculada.
E71	Verificar con la calculadora el símbolo usado para escribir números decimales.

**Nota.** E: Código de error.





## Tareas de aprendizaje

Las tareas de aprendizaje componen el eje central de la unidad didáctica de la medida de la capacidad de recipientes cilíndricos. Gómez *et al.* (2018, p. 202) definen las tareas de aprendizaje como aquellas tareas matemáticas escolares que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de favorecer el logro de las expectativas que ha establecido y la superación de sus limitaciones de aprendizaje. Además, los autores describen siete elementos para caracterizar las tareas de aprendizaje: 1) los requisitos, 2) las metas, 3) la formulación o enunciado, 4) los materiales y recursos, 5) las formas de agrupamiento, 6) las interacciones y 7) la temporalidad (p. 211). En el presente capítulo, relacionamos los elementos anteriores con las tareas de aprendizaje. Además, integramos los conceptos y procedimientos claves para su desarrollo, sistemas de representación relevantes, los errores en los que pueden incurrir los estudiantes, grafos de criterios de logro y, por último, algunas sugerencias metodológicas y de evaluación.

Esta unidad didáctica cuenta con una secuencia de cinco tareas de aprendizaje que distribuimos en los dos objetivos enunciados en el segundo capítulo. El primer objetivo tiene dos tareas mientras que al segundo objetivo le corresponden tres. También, hemos etiquetado las tareas secuencialmente y de acuerdo con el objetivo que le corresponde. Por ejemplo, la tarea 1.2 corresponde a la segunda tarea del objetivo uno y la tarea 2.3 es la tercera tarea del objetivo dos. Invitamos al lector a consultar el detalle de las tareas de aprendizaje en el anexo 3. En los siguientes apartados presentamos las tareas de aprendizaje y describimos de manera breve sus componentes.

Introducimos de manera general la evaluación de las tareas y las apoyamos en las dinámicas de aula y en las producciones escritas de los estudiantes. En las dinámicas de aula el profesor puede valorar la motivación de los estudiantes por medio de la interacción, el cumplimiento de las funciones asignadas y su participación



en la puesta en común de los resultados ante el gran grupo. Esta actividad promueve que los estudiantes valoren la coherencia de los resultados propios en comparación con los resultados de sus compañeros. También recomendamos al profesor verificar que todos los estudiantes expongan al gran grupo durante la implementación de las cinco tareas de aprendizaje. En relación con las producciones escritas, el profesor debe determinar los errores en los que incurrieron los estudiantes y emplear sus resultados como insumo para realizar la retroalimentación al inicio de la siguiente sesión. Asimismo, la valoración de las producciones posibilita identificar a los estudiantes con dificultades de aprendizaje respecto a los conocimientos previos o a los requisitos de tareas previas. Además, el profesor puede valorar aspectos relacionados con el orden y la claridad en los procedimientos de las producciones escritas, la redacción de la respuesta en términos del contexto formulado y las cuestiones relacionadas con la aproximación y con el uso apropiado de unidades de medida. A continuación presentamos las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica.

### **Tarea 1.1. Latas de Milo®**

Con esta tarea buscamos que los estudiantes utilicen la relación entre las dimensiones de un recipiente cilíndrico y la medida de su capacidad. Con base en esta relación, esperamos que midan indirectamente una de las dimensiones del envase cilíndrico dada su medida de capacidad. Esta tarea contribuye al primer objetivo, puesto que los escolares deben justificar las estrategias utilizadas para determinar las dimensiones del recipiente dentro del contexto formulado.

#### ***Requisitos de la tarea***

Esta tarea requiere del uso de los conocimientos previos formulados para la unidad didáctica. Además, precisa que los estudiantes planteen la relación o expresión algebraica para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico. Esto es coherente con la exploración y consolidación de los procedimientos necesarios para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico o una de sus dimensiones.

#### ***Formulación de la tarea***

El profesor entrega a cada estudiante, en la primera sesión de trabajo de esta tarea, una guía de trabajo que expone la siguiente situación:

Para promover el talento joven colombiano, Nestlé te contrata para diseñar una nueva presentación de las latas de Milo® de manera que tenga el doble de capacidad de sus latas medianas. Sabemos que las medidas actuales de las latas medianas son 5 cm de radio y 10 cm de altura.

A partir de esta información, formula un diseño para la nueva presentación. Indica las medidas del diseño propuesto y describe, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para la segunda sesión de trabajo, el profesor organiza a los estudiantes en grupos de cuatro integrantes y entrega una guía de trabajo con las siguientes instrucciones:

A partir de la información propuesta por cada integrante en la sesión anterior, elijan un diseño y construyan un prototipo para la nueva lata. Indiquen las medidas del diseño elegido y sustenten por escrito, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para el diseño, construcción y presentación del prototipo, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles:

*Líder.* Organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

*Secretario.* Está encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

*Presentador.* Está a cargo de exponer frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

*Mensajero.* Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de un grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para traer información a su equipo sobre posibles procedimientos. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

### ***Conceptos y procedimientos más relevantes***

En esta tarea, los estudiantes exploran la relación entre las dimensiones de un recipiente para un valor constante de su capacidad. Hacen esto al utilizar las expresiones  $V = A_b h$  y  $V = \pi r^2 h$  y al solucionar la ecuación multiplicativa (lineal o cuadrática) correspondiente.

## ***Sistemas de representación que se activan***

En esta tarea, los estudiantes pueden emplear los sistemas de representación geométrico, algebraico y numérico de manera permanente. Además, esperamos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación manipulativo y ejecutable para el diseño y presentación del prototipo solicitado.

## ***Materiales y recursos***

Consideramos que los escolares pueden abordar la tarea de dos maneras: con material manipulativo mediante el uso de cartulina, hojas, tijeras, pegamento o cinta, para establecer el prototipo solicitado, o con el uso de GeoGebra para aquellos estudiantes que deseen elaborar el prototipo de manera digital. También contemplamos como recurso un aplicativo que permite al docente ayudar a fortalecer el concepto de capacidad.

## ***Agrupamiento e interacciones***

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen tanto de manera individual como organizados en cuartetos. Esperamos que, en el trabajo individual, el escolar comprenda la situación propuesta y plantee algunas ideas iniciales para abordarla. Asimismo, permite al profesor identificar estudiantes con dificultades en los primeros procedimientos y ofrecer las ayudas pertinentes para corregir los errores que cometan.

En el trabajo grupal, cada estudiante comparte sus avances o estrategias para obtener las medidas del prototipo requerido, lo que promueve unificar las propuestas de diseño y el orden de la presentación de los resultados. Esperamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar dudas. En cada grupo, esperamos que los estudiantes tomen uno de los siguientes roles: líder, secretario, presentador y mensajero. En el anexo 3 explicamos con detalle cada uno de estos roles y el procedimiento para asignarlos.

En el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para participar de la puesta en común. Después, el profesor sintetiza las ideas comunicadas por los grupos y concreta los procedimientos empleados para determinar indirectamente las dimensiones del recipiente.

## *Temporalidad de la tarea*

Formulamos esta tarea para que sea desarrollada en dos sesiones de clase. Durante la primera sesión, el profesor presenta la meta de la tarea, da la instrucción escrita y otorga 45 minutos para que los estudiantes trabajen de manera individual. En la segunda sesión, el profesor distribuye a los estudiantes en grupos y asigna los roles de trabajo (10 min) y los escolares desarrollan y concretan el diseño solicitado en la tarea (40 min). A los quince minutos después del inicio del trabajo grupal, los mensajeros de cada grupo disponen de cinco minutos para interactuar con el grupo asignado. Al finalizar esta sesión, los grupos presentan sus diseños y el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos (15 min).

## *Errores*

Prevedemos que los estudiantes incurran con mayor frecuencia en ciertos errores mientras avanzan en los procedimientos. Estos errores son 1) asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla, 2) intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie y 3) confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado. En la tabla 7 organizamos la relación de las dificultades y errores para la tarea.

**Tabla 7.** Limitaciones de aprendizaje de la tarea 1.1

Tarea	Dificultades	Errores
Latas de Milo®	Aritméticas y algebraicas.	E4, E5, E22, E23, E24, E25.
	Medición indirecta por modelos multiplicativos.	E7, E8, E43.
	Interpretación de la medición.	E10, E11, E80.
	Representación geométrica de la información.	E16, E17, E18, E41, E42, E58, E73, E77, E78, E79.

**Nota.** E: Código de error.

## *Grafo de criterios de logro y actuación del profesor*

En la figura 8 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 1.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla cuatro estrategias posibles para solucionar la tarea, que están diferenciadas en función de los criterios de logro 1.10, 1.11, 1.14 y 1.15.

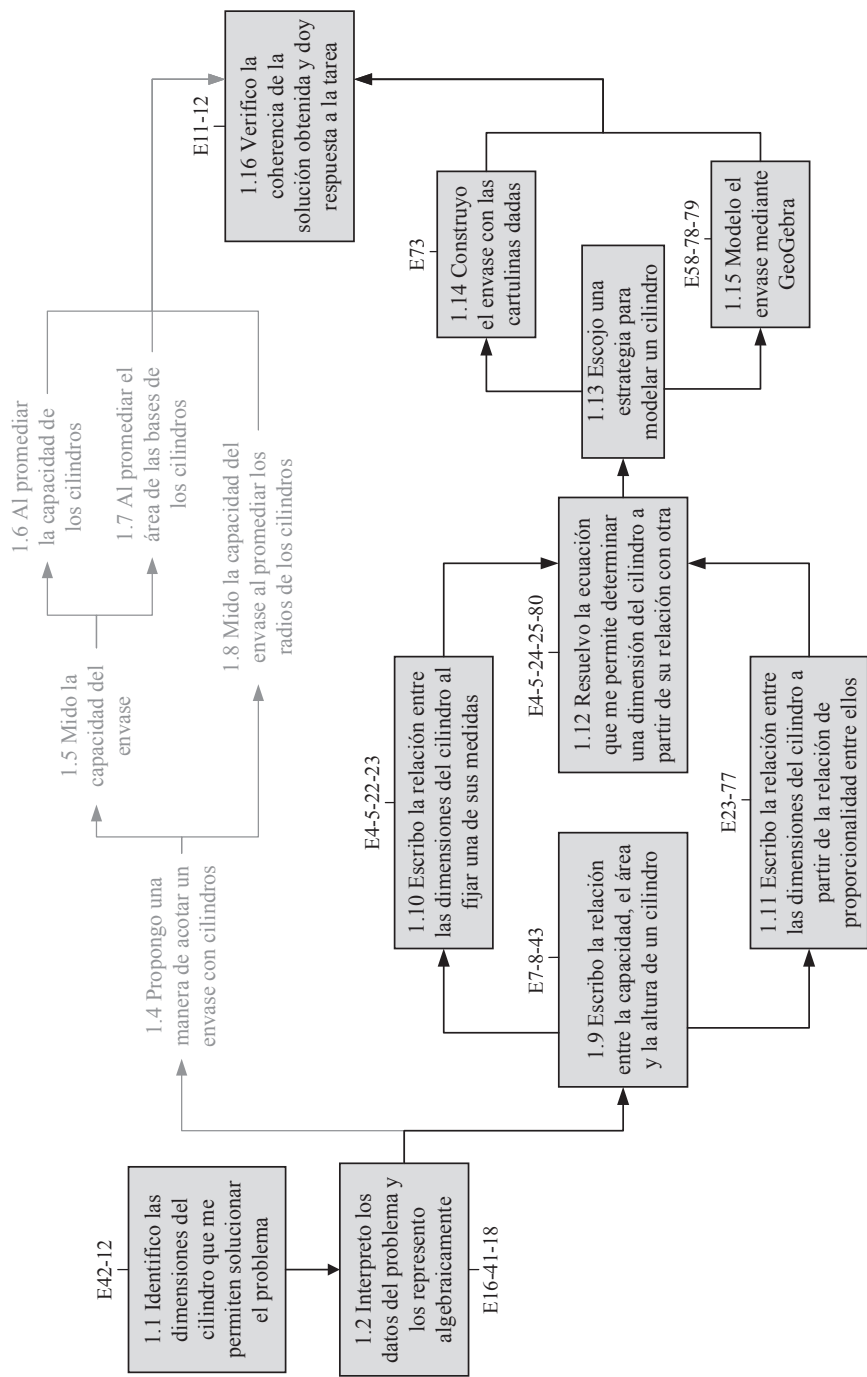


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

## ***Evaluación***

Sugerimos hacer seguimiento de las dificultades relacionadas con los criterios de logro 1.1 y 1.2, puesto que son los procedimientos que ponen en juego de manera explícita algunos conocimientos previos de la unidad didáctica. También proponemos acompañar a los estudiantes cuando ejecuten los procedimientos necesarios para determinar una dimensión del recipiente cilíndrico que es desconocida mediante la relación entre la medida de capacidad y las medidas de las dimensiones del recipiente.

Asimismo, proponemos que, al momento de compartir al gran grupo los resultados de la tarea, los estudiantes empleen un lenguaje formal y coherente en términos de la formulación de la misma. Adicionalmente, sugerimos reflexionar sobre la coherencia de los diseños propuestos y orientar a los estudiantes para que concluyan que el diseño más adecuado debería tener una forma semejante a la lata original.

## ***Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea***

Al inicio de la unidad didáctica, sugerimos explicar a los estudiantes la expresión algebraica para determinar el volumen de un cilindro, que es obtenida al extrapolar el procedimiento utilizado para el volumen del prisma. Por otro lado, recomendamos resolver esta tarea con el acompañamiento del profesor con el fin de ofrecer ayudas de manera oportuna y anticipar las interacciones de la segunda sesión. Si hay escolares que no asisten a las sesiones de la tarea, recomendamos abordarla en los grupos previstos y que estos estudiantes la completen como requisito para la siguiente sesión.

## **Tarea 1.2. Vasos de gaseosa**

Con esta tarea buscamos que los estudiantes utilicen la medida de la capacidad del cilindro para estimar la capacidad de un recipiente de forma irregular al acotarlo con cilindros. Esta tarea contribuye al primer objetivo, puesto que los escolares deben justificar la manera de utilizar los cilindros para aproximar la capacidad de un envase no cilíndrico.

## ***Requisitos de la tarea***

Esta tarea requiere que los estudiantes dibujen dos cilindros en un recipiente ilustrado y etiqueten sus dimensiones. Además, los estudiantes deben utilizar

expresiones algebraicas para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico. También, deben conocer cómo determinar un promedio entre dos cantidades conocidas.

### ***Metas de la tarea***

Por medio de esta tarea, los estudiantes usan la medición de la capacidad de un recipiente cilíndrico para justificar la medición de un recipiente en un contexto real. Además, pretendemos que esta medición adquiera significado a partir de la manipulación de material concreto. Buscamos que los estudiantes utilicen cilindros para inscribir y circunscribir el recipiente mostrado y que, de esta manera, empleen estos cilindros para estimar la capacidad del envase al promediar sus radios, las áreas de sus bases o sus capacidades.

### ***Formulación de la tarea***

El docente pide a los escolares que formen parejas. Entrega a cada equipo un vaso plástico y una guía de trabajo que enuncia la siguiente situación:

Felipe, al ir al cine, compra una gaseosa. Le entregan un vaso como el que el profesor les entregó y que se muestra en la imagen y le dicen que ese vaso tiene una capacidad de 600 ml. Felipe considera que el vaso no tiene esa capacidad.

¿Cómo pueden ayudar a Felipe para aproximar (por medio de cilindros) la capacidad del vaso y verificar que el vaso que compró sí tiene 600 ml de capacidad? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



## ***Conceptos y procedimientos más relevantes***

En esta tarea, los estudiantes consolidan la medición indirecta de la capacidad del cilindro. Asimismo, deben relacionar la capacidad de recipientes no cilíndricos al acotarlos con dos cilindros y deben interpretar que una estimación para la medida de capacidad requerida puede obtenerse mediante el promedio de la capacidad de dos cilindros.

## ***Sistemas de representación que se activan***

Para el desarrollo de esta tarea, prevemos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación geométrico, simbólico y numérico. Además, esperamos que los estudiantes utilicen el sistema de representación manipulativo para comprender cómo la acotación con cilindros permite estimar la capacidad del envase no cilíndrico.

## ***Materiales y recursos***

Consideramos que es útil para los estudiantes utilizar un vaso plástico semejante al usado en las salas de cine. Esto permite que el contexto presentado sea cercano para ellos. Además, proponemos el uso de este recurso para fomentar la medición directa de las dimensiones del vaso. Por esto, incluimos además la regla graduada como un recurso a emplear.

## ***Agrupamiento e interacciones***

Esta tarea requiere que los estudiantes se organicen en parejas, lo que permite que propongan sus procedimientos y puedan discutirlos con un compañero. Para el cierre de la tarea, los estudiantes vuelven al gran grupo para escuchar los resultados obtenidos por algunas de las parejas. También buscamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y que aclare las dudas que surjan. Asimismo, el profesor interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final al recopilar las conclusiones presentadas y las estrategias que cada grupo implementa.

## ***Temporalidad de la tarea***

Esta tarea está planteada para desarrollarse en tres etapas durante sesenta minutos. En los primeros diez minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y

el profesor presenta la tarea y entrega la instrucción escrita. Luego, los escolares abordan la situación propuesta y exploran, durante veinticinco minutos, posibilidades para estimar la capacidad del envase mostrado. En la última etapa, que dura veinticinco minutos, los estudiantes comparten, discuten y debaten las propuestas de aproximación de la capacidad. Esto último lo hacen en el gran grupo, bajo la orientación del profesor.

### ***Errores***

Durante el desarrollo de esta tarea, es posible que los escolares omitan alguna de las dimensiones involucradas en la medición indirecta de la capacidad, que representen incorrectamente los cilindros máximo y mínimo o que los usen inadecuadamente para efectuar la estimación de la capacidad del recipiente propuesto. Además, los estudiantes pueden omitir las unidades de medida o asignarlas de manera incorrecta. En la tabla 8 organizamos las dificultades y errores para la tarea.

**Tabla 8.** Limitaciones de aprendizaje de la tarea 1.2

<b>Tarea</b>	<b>Dificultades</b>	<b>Errores</b>
Vasos de gaseosa	Aritméticas y algebraicas.	E3, E4.
	Medición indirecta por modelos multiplicativos.	E7, E43, E44, E45.
	Interpretación de la medición.	E10, E11, E12.
	Representación geométrica de la información.	E16, E17, E18, E41, E42.
	Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad.	E54.

**Nota.** E: Código de error.

### ***Grafo de criterios de logro y actuación del profesor***

En la figura 9 presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 1.2. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla tres estrategias posibles para solucionar la tarea, que están determinadas en los criterios de logro 1.6, 1.7 y 1.8.

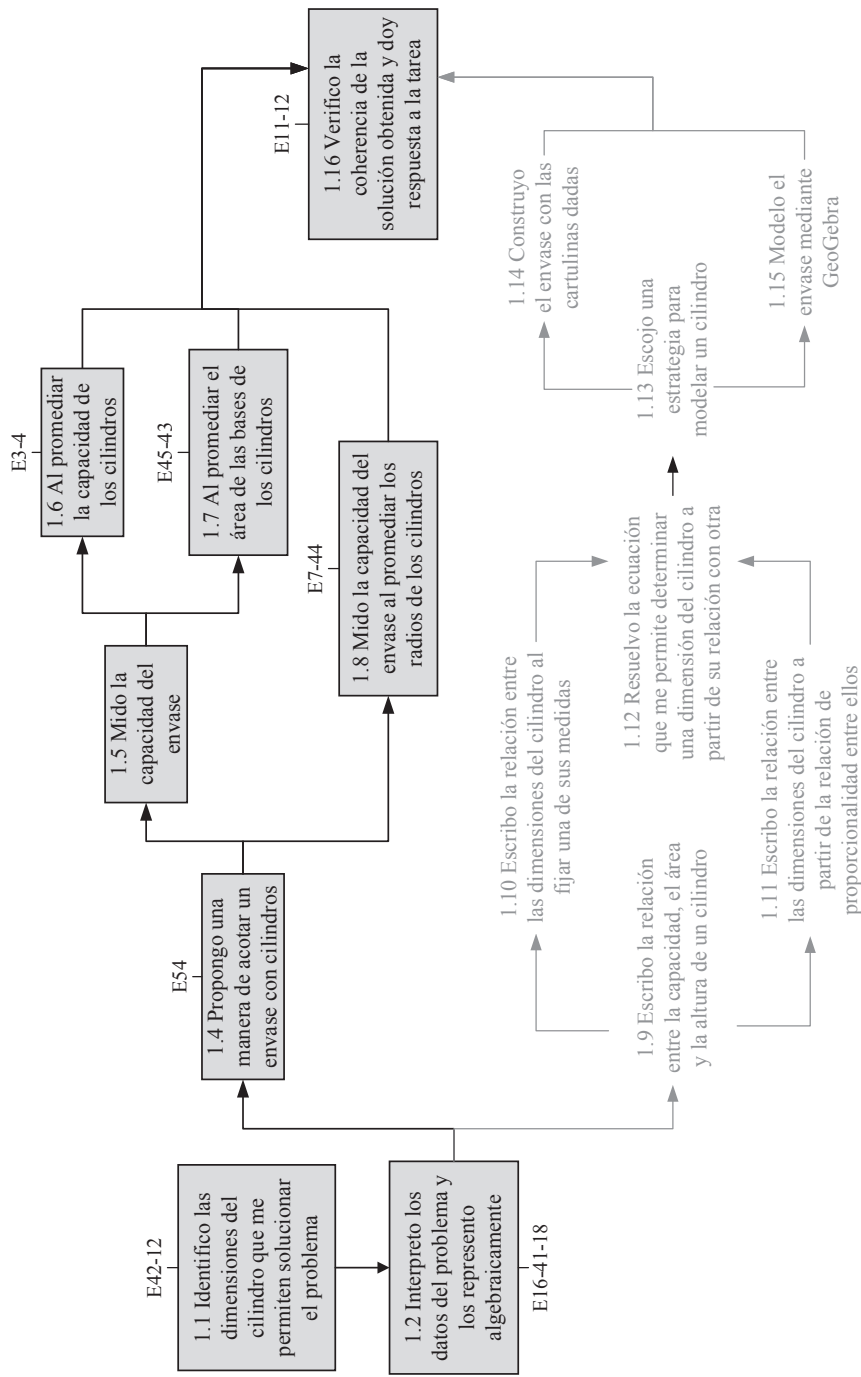


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2

## ***Evaluación***

Sugerimos apoyar el procedimiento relacionado con la acotación del vaso a partir de cilindros por medio del uso de material concreto. Consideramos que este procedimiento puede significar un reto para los estudiantes, dado el nivel de abstracción que requiere. Adicionalmente, proponemos orientar la interpretación del promedio, que es necesaria para efectuar la estimación de la capacidad del recipiente no cilíndrico. Este acompañamiento debe realizarse sobre todo con los estudiantes que tuvieron dificultades relacionadas con el conocimiento previo correspondiente al promedio durante la tarea diagnóstica.

## ***Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea***

Si un estudiante no asiste a esta sesión, deberá trabajar de manera individual y autónoma en casa. Por su nombre (Vasos de cine), sugerimos que el profesor disponga de vasos de gaseosa de tamaño grande que sean comercializados en las salas de cine. Para la implementación de esta tarea, adquirimos vasos de gaseosa de la cadena de restaurantes Sr. Wok® en la ciudad de Bogotá, Colombia. Sin embargo, el profesor puede reformular la tarea para que el dato de la capacidad cobre sentido y funcione con un vaso desechable de fácil adquisición. En caso de que el profesor no pueda disponer de estos vasos, sugerimos modificar la imagen presentada en la formulación incluyendo las dimensiones del vaso.

## **Tarea 2.1. Comparación de cilindros**

Esta tarea contribuye al segundo objetivo porque los estudiantes construyen recipientes cilíndricos con cartulina y comparan sus capacidades. Se espera que los escolares comprenden que ciertos recipientes con formas similares pueden tener distintas capacidades y que una forma objetiva de comparar dichas capacidades es por medio de la medición indirecta.

### ***Requisitos de la tarea***

En esta tarea, los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico y relacionar el perímetro de la base del cilindro con su radio por medio de una expresión algebraica. Además, necesitan construir adecuadamente, con material manipulativo, recipientes cilíndricos.

## ***Formulación de la tarea***

El docente pide a los estudiantes que formen parejas para trabajar. Cada pareja recibe dos trozos de cartulina idénticos y semejantes a un octavo de cartulina, y dos círculos del mismo material que sirven para los fondos de los envases. El docente pide a los grupos que construyan recipientes cilíndricos de la siguiente manera:

Con una cartulina, junten completamente los lados más largos y luego péguenlos con cinta. Con la otra cartulina, repitan lo mismo, pero juntando y pegando completamente los lados más cortos. Luego, peguen los círculos dados como tapa inferior de cada cilindro. ¿Cuál de los cilindros contruidos tiene mayor capacidad? Expliquen su respuesta e incluyan por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.

## ***Conceptos y procedimientos más relevantes***

Para los estudiantes, el desarrollo de esta tarea tiene el potencial de consolidar la medición indirecta de la capacidad, ya que deben medir la capacidad de varios recipientes cilíndricos. Asimismo, tienen la oportunidad de fortalecer el significado de la medición de la capacidad al relacionar la medición directa con la indirecta.

## ***Sistemas de representación que se activan***

Para esta tarea, prevemos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación numérico, simbólico y geométrico. Además, esperamos que utilicen el sistema de representación manipulativo para comparar las capacidades de manera directa y relacionar este procedimiento con la medición indirecta.

## ***Materiales y recursos***

Incluimos rectángulos de cartulina de 25 cm de largo y 17,5 cm de ancho como los materiales necesarios para esta tarea. Además, incluimos cinta pegante o de enmascarar, colbón y los útiles de los escolares (cuaderno, lápiz, regla graduada y calculadora). Asimismo, incluimos bolsas de arroz como un recurso disponible para los grupos de estudiantes que decidan efectuar la comparación de capacidades de manera directa. Adicionalmente, ofrecemos como apoyo al profesor una aplicación sencilla basada en GeoGebra, la cual permite ayudar al estudiante a fortalecer su concepto de capacidad.

## ***Agrupamiento e interacciones***

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen por parejas. No obstante, cada integrante debe construir un cilindro. Luego, cada uno determina la capacidad de su recipiente para realizar el procedimiento de comparación. Por otra parte, el docente interactúa con cada pareja para orientar su trabajo y aclarar sus dudas. Una vez concluido el tiempo destinado a la comparación, el profesor interactúa con los estudiantes durante la presentación de los grupos y la discusión final. También, durante la presentación, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias implementadas para comparar la capacidad de los envases cilíndricos. Luego, resume estas estrategias en los procedimientos empleados.

## ***Temporalidad de la tarea***

Esta tarea está planteada para desarrollarse en tres etapas durante 55 minutos. En los primeros diez minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor entrega los rectángulos de cartulina previstos en los materiales. El docente proporciona la instrucción escrita sobre la construcción de los recipientes cilíndricos. En la segunda etapa, los escolares construyen durante treinta minutos los recipientes cilíndricos con base en la instrucción proporcionada. Luego, abordan la situación propuesta y exploran las medidas de la cartulina y su relación con las dimensiones del cilindro para medir indirectamente su capacidad. En la última etapa, los estudiantes comparten los resultados obtenidos al comparar los dos recipientes construidos durante los quince minutos restantes. El docente guía la presentación de los equipos seleccionados para sintetizar las estrategias discutidas.

## ***Errores***

Los errores en que los estudiantes pueden incurrir con más frecuencia en el desarrollo de la tarea son 1) confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado, 2) multiplicar el radio y la altura por pi para determinar la capacidad de un recipiente cilíndrico y 3) establecer las comparaciones de la medida de la capacidad mediante la referencia a atributos diferentes de los recipientes en la respuesta a la tarea. Un ejemplo de un error es indicar que tiene más capacidad el recipiente con mayor perímetro de la base en comparación con el que tiene más altura. En la tabla 9 organizamos la relación de las dificultades y errores para la tarea.

**Tabla 9.** Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.1

Tarea	Dificultades	Errores
Comparación de cilindros	Aritméticas y algebraicas.	E28, E29.
	Medición indirecta por modelos multiplicativos.	E31, E33, E34, E44.
	Interpretación de la medición.	E10, E21, E48, E73, E74.
	Representación geométrica de la información.	E26, E27, E30, E42.
	Conservación de la cantidad.	E19, E20, E32, E34.

**Nota.** E: Código de error.

### ***Grafo de criterios de logro y actuación del profesor***

En la figura 10 presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla tres estrategias posibles de solución, que están determinadas en los criterios de logro 2.2, 2.6 y 2.8.





## *Evaluación*

Sugerimos prestar atención, durante el desarrollo de la clase, al procedimiento relacionado con la medición indirecta del radio del cilindro por medio de la medida del perímetro de la base, que puede ser obtenida al medir con regla el largo de la cartulina. Consideramos que este procedimiento puede ser retador para los estudiantes, porque no han determinado indirectamente la medida del radio de un cilindro en las tareas previas. Asimismo, sugerimos orientar los procedimientos requeridos en un tratamiento puramente algebraico del problema.

## *Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea*

Al iniciar la sesión, proponemos que el profesor retome la ecuación que relaciona el perímetro y el radio de una circunferencia. Además, si el profesor nota dificultades durante la ejecución del criterio de logro 2.6, sugerimos explicar que el perímetro corresponde al lado de la cartulina que debe ser doblado para construir el envase cilíndrico. Resaltamos que los estudiantes pueden medir directamente el perímetro de la base antes de construir el cilindro (largo de la cartulina) o pueden construir el envase para medir su diámetro y, como consecuencia, medir indirectamente el radio del cilindro.

Por otra parte, sugerimos proporcionar los elementos que describimos a continuación para facilitar la construcción de los envases cilíndricos: dos cartulinas cuyas medidas deben ser de 25 cm de largo y 17,5 cm de ancho y las dos tapas de los recipientes, que deben tener un diámetro de 8 cm y 5,5 cm respectivamente. Además, el profesor indicará a los estudiantes que usen una pestaña de un centímetro y posteriormente peguen con cinta de enmascarar.

Por último, si hay un grupo que mide y compara las capacidades directamente, sugerimos que este grupo sea el primero en presentar sus resultados frente al gran grupo. Esto permite comparar su respuesta con la obtenida por los demás grupos.

## **Tarea 2.2. Comparación de precios**

Con esta tarea, los estudiantes comparan tres envases cilíndricos por medio de la relación entre el precio de cada uno y su capacidad. Igualmente, los estudiantes deben escribir la relación inversa de modo que determinen la relación capacidad-precio, comparen los costos de los recipientes y reconozcan la importancia de tener, en el antecedente de la razón, el precio de venta de los envases.

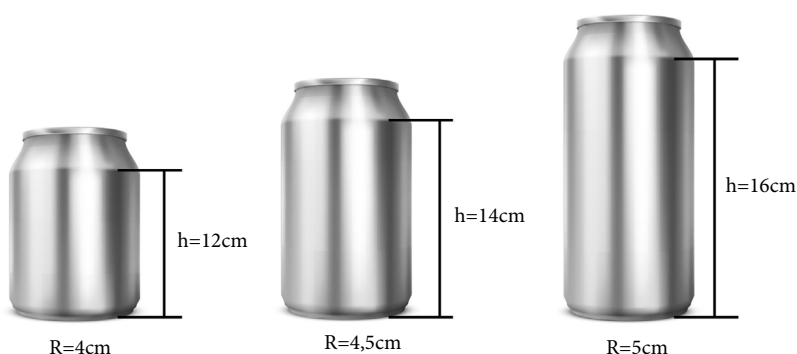
## Requisitos de la tarea

Esta tarea requiere que los estudiantes conozcan las razones y proporciones y que puedan relacionar el costo de un producto por unidad de medida. Adicionalmente, los estudiantes necesitan medir indirectamente la capacidad de varios recipientes cilíndricos para luego compararlos.

## Formulación de la tarea

El docente pide a los escolares que formen grupos de cuatro estudiantes con compañeros con quienes no hayan trabajado en las tareas anteriores. Luego, entrega a cada equipo una guía de trabajo con la siguiente situación:

Un supermercado vende gaseosas en lata que están envasadas en las tres presentaciones que mostramos en la siguiente imagen:



El día de hoy, la lata pequeña cuesta \$2800, la mediana \$4000 y la grande \$5500. En las etiquetas de venta del supermercado aparece indicado el precio por cada mililitro, como lo exige la ley colombiana.

Para cumplir con su plan de ahorro, Alejandra no podrá comprar una lata con un precio superior a \$4,5 por mililitro, que corresponde al precio que pagó por mililitro la última vez que estuvo en el supermercado. Con esta restricción, ¿cuáles latas de gaseosa puede comprar Alejandra?

Para trabajar en esta actividad, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles.

**Líder.** Organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

*Secretario.* Escribe las ideas y los procedimientos relacionados con la comparación.

*Presentador.* Expone frente al gran grupo la solución y el procedimiento usado para resolver el problema.

*Mensajero.* Miembro del equipo que puede observar el trabajo de otro grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para identificar información sobre posibles procedimientos. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

Cada grupo aborda el ejercicio propuesto y presenta frente al gran grupo la estrategia empleada para elegir la lata más conveniente.

### ***Conceptos y procedimientos más relevantes***

En esta tarea, los estudiantes utilizan la medida de capacidad de diversos recipientes cilíndricos para determinar el precio por unidad de capacidad de cada envase. Con base en esta relación, los estudiantes comparan cada recipiente y escogen el que cumple con las restricciones dadas.

### ***Sistemas de representación que se activan***

Durante el desarrollo de esta tarea, esperamos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación numérico y simbólico para medir indirectamente las capacidades de los envases. Además, estos sistemas de representación son utilizados para relacionar la capacidad con el precio del envase correspondiente.

### ***Materiales y recursos***

Para ofrecer la ayuda número 15, se requiere que el profesor disponga de un computador o *tablet*. Este dispositivo debe tener instalado el programa GeoGebra (o en su defecto poder acceder al *software* GeoGebra en internet), de manera que se pueda ilustrar la relación entre la capacidad y las dimensiones del cilindro.

### ***Agrupamiento e interacciones***

En esta tarea, los estudiantes están organizados en grupos, generados aleatoriamente, de cuatro personas. Al igual que sugerimos en la tarea 1.1, los estudiantes asumen los roles de líder, secretario, presentador y mensajero. El estudiante con

el rol de mensajero observa la interacción del grupo que se le ha asignado, les formula preguntas y explica lo que observó a su grupo.

También sugerimos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y discutir sobre las dudas que surjan. Asimismo, el docente interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final, recopila las conclusiones presentadas y las estrategias que los grupos implementan para escoger la lata que mejor se ajusta al presupuesto dado.

### ***Temporalidad de la tarea***

La tarea está planteada para desarrollarse en la primera mitad de la quinta sesión de implementación. Este tiempo está distribuido en cuatro etapas que comprenden un total de treinta minutos. En los primeros cinco minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor les da la instrucción escrita. En este tiempo, los escolares asignan sus roles. En la segunda etapa, los escolares abordan la situación propuesta y concretan el diseño solicitado, durante quince minutos. En los primeros cinco minutos de esta etapa, todos los miembros del equipo aportan ideas para dar solución a la tarea. Luego, los mensajeros podrán observar el trabajo de los demás grupos durante un periodo de cinco minutos. En la tercera etapa, que dura diez minutos, los estudiantes presentan y discuten los diseños propuestos frente al gran grupo, guiados por el profesor. Para finalizar, el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos y concreta los procedimientos usados para determinar indirectamente las dimensiones del recipiente.

### ***Errores***

En el desarrollo de la tarea, el profesor puede identificar estudiantes que persisten en el error de asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla. Además, los estudiantes pueden efectuar la división de la capacidad total de un contenedor entre el costo. En la tabla 10 enumeramos las dificultades y errores previstos para la tarea.

**Tabla 10.** Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.2

Tarea	Dificultades	Errores
Comparación de precios	Aritméticas y algebraicas.	E46, E51, E52.
	Medición indirecta por modelos multiplicativos.	E7, E44.
	Interpretación de la medición.	E10, E11, E49, E50.
	Representación geométrica de la información.	E16, E17, E18, E41, E42, E30.

**Nota.** E: Código de error.

### ***Grafo de criterios de logro y actuación del profesor***

En la figura 11 presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla tres estrategias posibles para su solución, que están determinadas en los criterios de logro 2.10, 2.1 y 2.14.



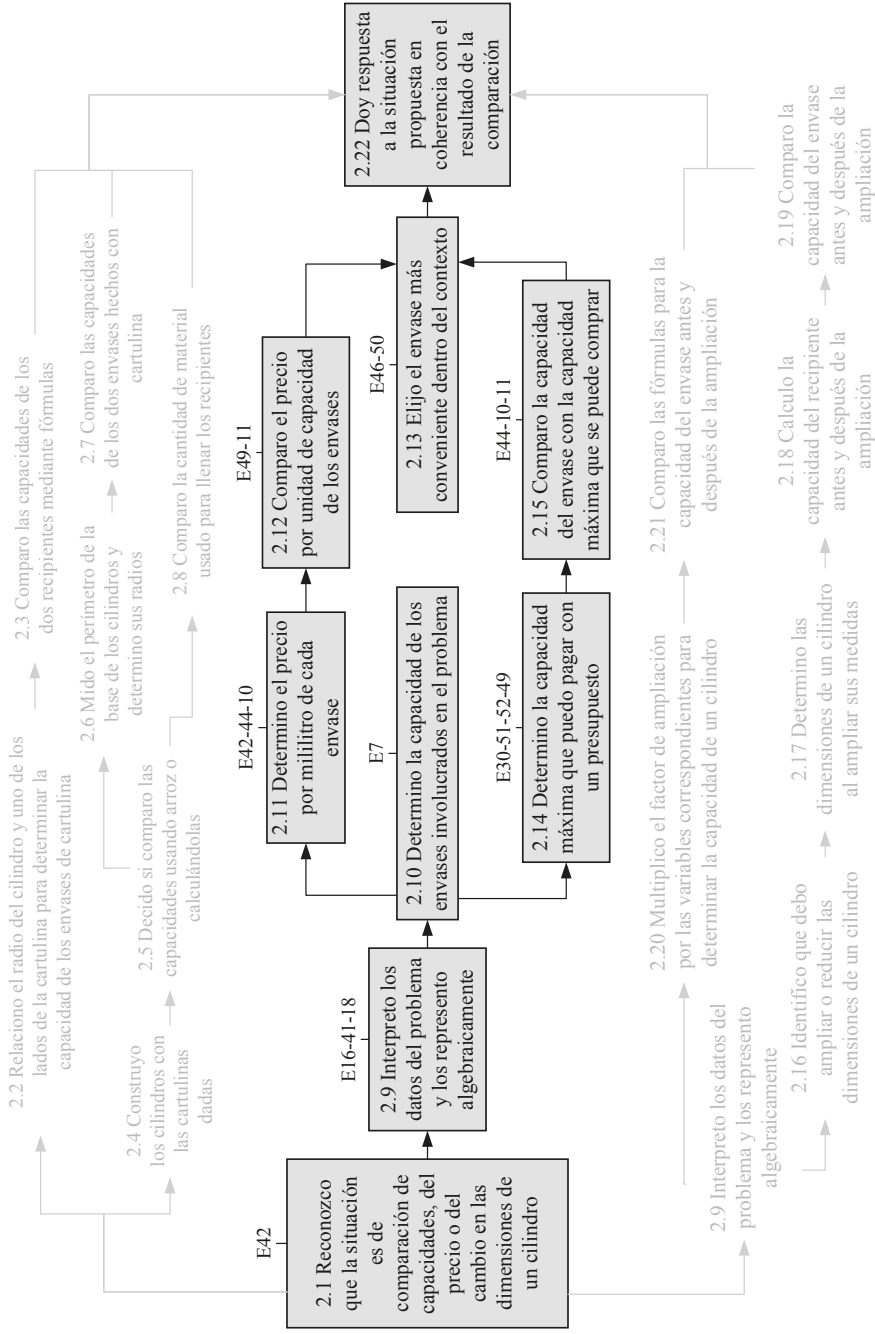


Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2

## ***Evaluación***

Recomendamos verificar que los estudiantes midan indirectamente la capacidad de los tres recipientes cilíndricos de manera adecuada. Además, consideramos importante cuidar que los estudiantes planteen correctamente la relación precio-capacidad para comparar con el presupuesto dado. Asimismo, proponemos orientar las conclusiones a las que pueden llegar los estudiantes si escogen determinar el precio máximo al multiplicar cada capacidad por el presupuesto dado en la formulación.

## ***Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea***

Sugerimos al profesor tener en cuenta que la lata pequeña es la única lata que no puede ser comprada con el presupuesto indicado en la formulación (máximo \$ 4,5 por cada mililitro). Dicha lata cuesta \$ 4,64 por mililitro si se emplea el camino de aprendizaje que requiere de la relación precio por unidad de capacidad. Para la estrategia que utiliza el presupuesto máximo, dicha lata tendría un costo de \$ 2714.

## **Tarea 2.3. Incrementos**

En esta tarea, la última del segundo objetivo, los escolares ponen en juego los procedimientos abordados durante el desarrollo de las tareas anteriores, de modo que pueden comparar la capacidad mediante la medición indirecta o al relacionar las expresiones algebraicas correspondientes por medio de una razón. Esta tarea contribuye al objetivo porque consiste en una situación en la que los estudiantes pueden establecer la relación entre la capacidad de un recipiente antes y después de un incremento en sus dimensiones.

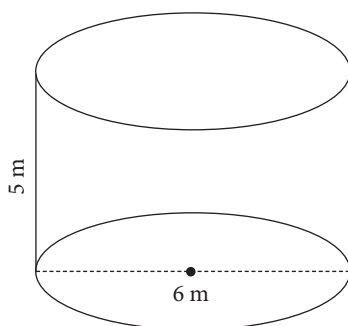
## ***Requisitos de la tarea***

Esta tarea requiere que los estudiantes determinen las dimensiones de un cilindro después de efectuar un incremento en una o varias de sus dimensiones. Asimismo, los estudiantes deben calcular el porcentaje de una cantidad y sumarlo a esa misma cantidad.

## ***Formulación de la tarea***

El docente indica a los escolares que, durante los primeros cinco minutos de la actividad, trabajarán individualmente. Entregará a cada estudiante una guía de trabajo que enuncia la siguiente situación:

Para el recipiente cilíndrico mostrado en la imagen, ¿cuánto incrementa su capacidad si cada dimensión (radio y altura) se incrementa en un 20%? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



## ***Conceptos y procedimientos más relevantes***

Durante el desarrollo de esta tarea, los estudiantes deben determinar las dimensiones de un envase con un factor de ampliación dado. Con esto, deben medir la capacidad del recipiente antes y después del incremento. Luego, los estudiantes deben determinar cuántas veces se incrementó la capacidad del recipiente a partir del incremento en sus dimensiones.

## ***Sistemas de representación que se activan***

En esta tarea, prevemos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación geométrico para representar el cilindro antes y después del incremento formulado. Además, esperamos que utilicen los sistemas de representación numérico y simbólico durante los procedimientos relacionados en la medición indirecta y para determinar las dimensiones del envase cilíndrico después del incremento formulado.

## ***Materiales y recursos***

Para ofrecer la ayuda número 15 se requiere que el profesor disponga de un computador o *tablet*. Este dispositivo debe tener instalado el programa GeoGebra (o en su defecto poder acceder al *software* GeoGebra en internet) de manera que se pueda utilizar el aplicativo diseñado para ilustrar la relación entre la capacidad y las dimensiones del cilindro.

## ***Agrupamiento e interacciones***

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen tanto de manera individual como organizados en parejas y cuartetos. Buscamos que, con el trabajo individual, el escolar comprenda la situación propuesta y plantee algunas ideas iniciales sobre cómo abordarla. Luego, en parejas, cada estudiante comenta sus ideas con su compañero y ambos establecen un procedimiento común para dar solución al ejercicio. Después, en grupos de cuatro, cada pareja comparte sus estrategias y la respuesta obtenida para establecer acuerdos sobre los términos y el vocabulario apropiado para usar en la presentación de los resultados.

Por otra parte, el docente interactúa con cada pareja y cuarteto para orientar su trabajo y discutir las dudas que surjan. Asimismo, participa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final al recopilar las conclusiones presentadas y las estrategias que cada grupo implementa.

## ***Temporalidad de la tarea***

La tarea está planteada para desarrollarse en la segunda mitad de la quinta sesión de implementación, en cuatro momentos. En el primer momento, durante los primeros cinco minutos, el profesor proporciona el enunciado del ejercicio propuesto y los estudiantes inician su trabajo individual. Una vez terminado este tiempo, los escolares forman parejas y, durante diez minutos, abordan la situación propuesta. Después, cada pareja trabaja durante cinco minutos con otra pareja, revisan mutuamente el trabajo realizado, concluyen los procedimientos efectuados y preparan una presentación breve de la solución obtenida. Para finalizar, el docente orienta, durante diez minutos, la presentación de algunos cuartetos frente al gran grupo.

## Errores

En esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como 1) utilizar un factor de ampliación o reducción en una dimensión distinta a la requerida o 2) calcular el porcentaje de ampliación o reducción dado sin incluirlo en la cantidad inicial. En la tabla 11 organizamos las dificultades y otros errores previstos para la tarea.

**Tabla 11.** Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.3

Tarea	Dificultades	Errores
Incrementos	Aritméticas y algebraicas.	E4, E38, E39, E47, E76.
	Medición indirecta por modelos multiplicativos.	E7, E44, E40.
	Interpretación de la medición.	E10, E35, E36, E37, E74.
	Representación geométrica de la información.	E42, E16, E17, E18, E41.
	Conservación de la cantidad.	E19, E20, E32.

**Nota.** E: Código de error.

## Grafo de criterios de logro y actuación del profesor

En la figura 12 presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla dos estrategias posibles para solucionar la tarea, que están determinadas en los criterios de logro 2.16 y 2.20.

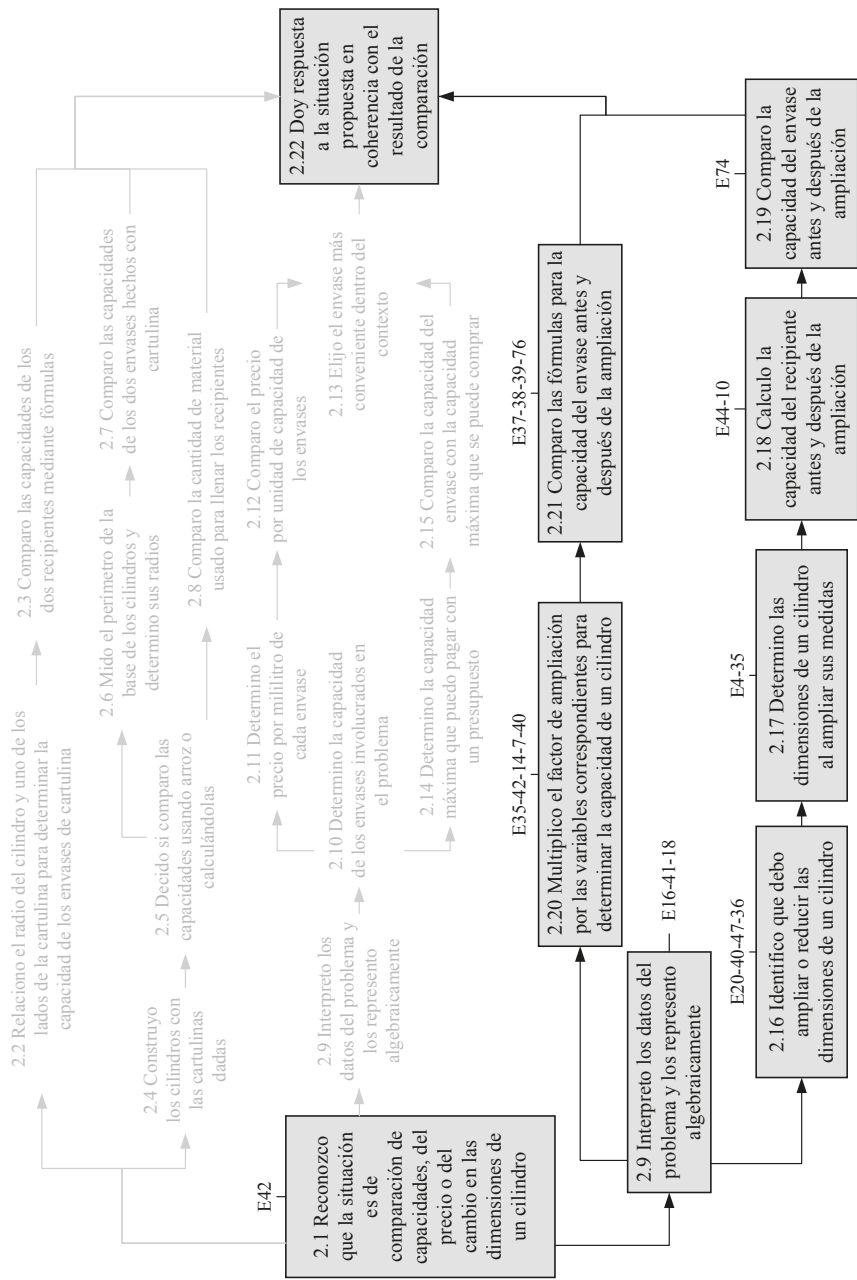


Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.3

## ***Evaluación***

Sugerimos revisar los procedimientos relacionados con la medición indirecta de las dimensiones del recipiente cilíndrico obtenidas al ampliar las dimensiones del recipiente original. Además, se requiere observar la estrategia empleada por los estudiantes para explicar cuánto incrementa la capacidad del recipiente descrito en la tarea. Por otra parte, sugerimos revisar los procedimientos que requieren un tratamiento puramente algebraico del problema.

## ***Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea***

A partir de la formulación de la tarea, sugerimos tener en cuenta que el incremento requerido puede abordarse de tres maneras: determinar cuánto aumentó la capacidad con la ayuda de la diferencia entre sus medidas, determinar cuántas veces aumentó la capacidad mediante un cociente entre las medidas de capacidad mayor y menor, o, por último, utilizar este cociente para expresar el aumento como un porcentaje.

## Evaluación final

Como complemento a la evaluación formativa que realiza el profesor mediante la tarea diagnóstica y en las tareas de aprendizaje, formulamos un examen final que permite valorar el nivel de logro de los objetivos de aprendizaje de los estudiantes. Con este fin, proponemos tres tareas de evaluación para valorar el alcance de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Estas tareas evalúan el aprendizaje de conceptos y procedimientos claves para la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico y la comparación de contenedores con esta forma. Adicionalmente, presentamos una rúbrica de evaluación para valorar el desempeño de los estudiantes en el examen final. Con base en los resultados de la evaluación, proponemos que el profesor realice un ejercicio de retroalimentación similar a los que sugerimos en la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje en el capítulo del esquema general de la unidad didáctica.

### Diseño del examen final

A continuación, presentamos las tres tareas de evaluación que conforman el examen final de la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro. La primera tarea está orientada a evaluar el primer objetivo de aprendizaje, mientras que la segunda y tercera tarea permiten evaluar el segundo objetivo.

1. **Construcción de contenedores.**<sup>1</sup> Postobón® envasa jugos Hit Balance® en recipientes rectangulares. Cada recipiente tiene 4,8 cm de largo, 3,5 cm de ancho y 12 cm de alto, de modo que pueden envasar, en cada uno, 200 ml de jugo. Además, estos envases son agrupados en cajas de cartón de manera que caben tres envases en el ancho y ocho en el largo, como lo muestra la figura.

1 Adaptado de Lappan *et al.* (2006b).



Para mejorar sus ventas, la empresa decide cambiar los envases rectangulares por envases cilíndricos de manera que puedan seguir agrupándose en las cajas de cartón. Si tú eres el diseñador de este nuevo tipo de envase, ¿cuáles dimensiones usarías para que contenga la misma cantidad de jugo que el envase rectangular? Justifica tu respuesta.

- 2. Presupuesto.** Una compañía ofrece dos tipos de contenedores cilíndricos para transportar gasolina. El contenedor tipo A tiene 2 m de radio, 6 m de largo, y cuesta \$ 4 000 000. El contenedor tipo B tiene diámetro de 4 m, largo de 5 m y cuesta \$ 3 500 000. Si una estación de servicio tiene presupuesto pagar un precio máximo de \$ 54 por cada litro, ¿podrán contratar el tanque de mayor capacidad? Justifica tu respuesta. (Ayuda: recuerda que 1000 litros equivalen a un metro cúbico).
- 3. Combo agrandado.** Camilo y Juana fueron en una cita a comer a Presto®. Cada uno pidió un combo que incluía hamburguesa, papas y una gaseosa de 492 ml servida en un envase cilíndrico de 15 cm de alto. Al finalizar el pedido, el cajero les preguntó si querían “agrandar” la bebida por una servida en un envase de la misma forma, pero un 20 % más alto y con radio de un 15 % más pequeño. Camilo agrandó su bebida mientras que Juana decidió no hacerlo. ¿Quién tomará más gaseosa? Explica tu respuesta.

La primera tarea presenta una situación en la que los estudiantes deben relacionar la medida de capacidad de una caja de jugo (prisma rectangular) con la medida de capacidad de un recipiente cilíndrico. Mediante esta relación, los estudiantes deben medir indirectamente el posible radio del nuevo diseño al deducir que la altura del envase cilíndrico debe ser igual a la altura de los envases rectangulares. Además, los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad del cilindro que

proponen para verificar si su capacidad satisface las condiciones dadas en la tarea. De esta manera, la primera tarea del examen permite evaluar el logro del primer objetivo de aprendizaje, puesto que involucra procedimientos que permiten medir indirectamente una de las dimensiones de un recipiente cilíndrico y su capacidad.

La segunda tarea propone una situación en la que los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad de dos contenedores cilíndricos para determinar cuál puede ser seleccionado a partir de un presupuesto dado. Esta comparación puede llevarse a cabo con la relación precio-capacidad o con el precio máximo que puede ser pagado para rentar cada contenedor de acuerdo con su capacidad. De esta manera, los estudiantes utilizan la medición de la capacidad de dos recipientes cilíndricos para compararlos y elegir el más conveniente según el contexto propuesto.

La tercera tarea presenta una situación en la que los estudiantes deben determinar indirectamente la medida de capacidad de un envase cilíndrico y, después, realizar incrementos en el radio y altura de este envase. Con estas nuevas dimensiones, los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad de un nuevo recipiente y compararla con la capacidad del primero. Esta tarea aborda procedimientos trabajados en los dos objetivos de aprendizaje de esta unidad didáctica.

## Rúbrica de evaluación

La rúbrica de evaluación forma parte integral del examen final. Esta herramienta tiene como propósito organizar los criterios de evaluación que facilitan la clasificación en los niveles de desempeño de cada uno de los estudiantes en relación con el logro de los objetivos de aprendizaje. Cada nivel de desempeño tiene indicadores redactados en términos de los criterios de logro más importantes de los objetivos de aprendizaje. También incluyen errores que limitan el alcance de uno o varios criterios de logro, que deben tener en cuenta el profesor y los estudiantes en cada nivel de desempeño.

En la tabla 12 presentamos la rúbrica de evaluación del examen final. Esta rúbrica organiza, en la primera columna, los niveles de desempeño en los que es posible clasificar a un estudiante de acuerdo con las destrezas mostradas en el examen final, según la escala de valoración nacional del Decreto 1290 de 2009. Cada uno de estos niveles de desempeño tiene asignados los criterios de evaluación que permiten realizar dicha clasificación en la segunda columna. Formulamos estos criterios con base en los procedimientos que el estudiante debe demostrar para determinar en qué medida desarrolla correctamente las tareas de evaluación.



**Tabla 12.** Rúbrica de evaluación del examen final

Nivel de desempeño	Indicadores
Superior	<p>El estudiante activa todos los procedimientos necesarios para dar solución a las tareas de evaluación sin incurrir en errores. Estos procedimientos incluyen la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico o de una de sus dimensiones; el uso adecuado de la expresión <math>C = \pi r^2 h</math> en todas las tareas; la comparación de los recipientes cilíndricos propuestos en las tareas 2 y 3; la organización de los procedimientos; y la correcta interpretación de la respuesta obtenida.</p>
Alto	<p>El estudiante activa los procedimientos relacionados con la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico o de una de sus dimensiones; el uso adecuado de la expresión <math>C = \pi r^2 h</math> en las tareas; la comparación de los recipientes cilíndricos propuestos en las tareas 2 y 3; la organización de los procedimientos; y la correcta interpretación de la respuesta obtenida.</p> <p>No obstante, el estudiante incurre en algún error relacionado con asignar unidades de medida distintas a la requeridas. En el caso de las unidades de capacidad, utiliza unidades de volumen o las omite. En el caso de las dimensiones pedidas, utiliza unidades que no son de longitud o las omite. Además, el estudiante incurre en el error E12 al intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie o incurre en el error E10 en el que aproxima la respuesta al usar una cantidad de cifras decimales distinta de las requeridas. También incurre en el error E75, en el que omite las unidades de medida en la respuesta final.</p>
Básico	<p>El estudiante desarrolla correctamente una de las tres tareas de evaluación. En esta tarea, el estudiante activa los procedimientos relacionados con la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico o de una de sus dimensiones, el uso adecuado de la expresión <math>C = \pi r^2 h</math> en dicha tarea, la comparación de los recipientes cilíndricos propuestos en las tareas 2 o 3, y la organización de los procedimientos.</p> <p>Además, el estudiante puede incurrir en los errores descritos en el nivel de desempeño alto y en errores como asignar incorrectamente unidades de medida o establecer inadecuadamente las relaciones entre la longitud, área y capacidad (E7, E8). De igual forma, el estudiante no ofrece las respuestas de las tareas en términos de la formulación.</p>
Bajo	<p>El estudiante no completa ninguna de las tres tareas de evaluación. En general, predominan los cálculos incompletos por causa de los errores E7 o E8. Además, El estudiante incurre en el error E42 en el que confunde la notación estándar para los datos en el enunciado de la tarea y en el error E44 en el que multiplica la medida del radio y la altura por pi para medir la capacidad de un recipiente cilíndrico.</p>

El estudiante se ubica en el nivel superior de desempeño si activa todos los procedimientos necesarios para resolver las tres tareas de evaluación sin incurrir en errores. Por otra parte, obtiene un nivel alto de desempeño si resuelve correctamente dos de las tres tareas de evaluación. Para el primer objetivo, las tres tareas permiten verificar su alcance porque los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad del cilindro. Asimismo, la primera y la tercera tarea verifican la medición indirecta de una de las dimensiones de un recipiente cilíndrico. Para el segundo objetivo, la segunda y la tercera tarea evalúan la comparación de recipientes cilíndricos al usar la medida de capacidad como criterio de elección. No obstante, los estudiantes incurren en errores relacionados con el uso inadecuado de las unidades de medida. Un estudiante alcanza el nivel básico de desempeño cuando resuelve una de las tres tareas de evaluación correctamente. Por último, un estudiante clasifica en el nivel bajo de desempeño si realiza cálculos incorrectos en las tareas de evaluación y usa de manera incorrecta las ecuaciones para medir la capacidad de recipientes cilíndricos.





---

## Conclusiones

Este libro es el resultado del diseño, implementación, evaluación y mejora de una unidad didáctica sobre la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos. Fundamentamos el trabajo en los conceptos pedagógicos y referentes didácticos propuestos por Gómez (2018). Su propósito es concretar una propuesta de enseñanza y aprendizaje sobre la medición de la capacidad de envases cilíndricos y su aplicación en diversos contextos. Los contextos involucran la estimación de la capacidad de recipientes no cilíndricos, la comparación de envases a partir de la medición de esta magnitud y el uso de su capacidad como criterio para llevar a cabo esta elección. Realizamos el diseño de la propuesta en la Maestría en Educación Matemática ofertada por el Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática (UED) de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia.

Para consolidar esta propuesta de enseñanza sobre la medición de la capacidad del cilindro seguimos tres etapas. En la primera, analizamos la medición de la capacidad del cilindro mediante sus conceptos y procedimientos, sus sistemas de representación, los fenómenos que dan sentido a este tema e introducimos algunos de los contextos que forman parte de esta propuesta de enseñanza (Cañadas *et al.*, 2018). Luego, formulamos los aspectos cognitivos que son concretados en las expectativas de nivel superior a las que contribuye este trabajo, los objetivos de aprendizaje y las limitaciones de aprendizaje propias del tema. Estos objetivos de aprendizaje están diseñados con base en aspectos curriculares, institucionales y poblacionales. También diseñamos una secuencia de tareas de aprendizaje con base en los referentes curriculares de los *Estándares básicos de competencias* y el marco PISA 2012. Con esto, organizamos los procedimientos necesarios para lograr los objetivos de aprendizaje con la ayuda de los criterios de logro y caracterizamos los objetivos mediante los grafos de estos criterios. Adicionalmente,

diseñamos las tareas de evaluación agrupadas en la tarea diagnóstica y el examen final. La tarea diagnóstica identifica y refuerza los conocimientos de los estudiantes, mientras que el examen final evalúa el alcance de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. En la segunda etapa, implementamos el diseño inicial de la unidad didáctica con estudiantes de grado noveno del Instituto Pedagógico Nacional de la ciudad de Bogotá. Durante la implementación, recolectamos información relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de este tema de las matemáticas escolares. Finalmente, en la tercera etapa, analizamos esta información y formulamos mejoras al diseño inicial de la unidad didáctica para concretar la información abordada en los capítulos que conforman este libro. Complementamos la información presentada en los capítulos de este libro con tres anexos.

Esta propuesta de enseñanza contribuye al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes de manera que la medición de la capacidad supere la utilización de fórmulas. Las tareas de aprendizaje favorecen el uso de los sistemas de representación numérico, geométrico y simbólico. Además, estas tareas fortalecen la competencia matemática de los estudiantes, puesto que promueven la formulación de estrategias para abordar los problemas, la utilización de operaciones para medir indirectamente, la comunicación y la interpretación de las respuestas obtenidas. Asimismo, los contextos formulados son cercanos y llamativos para los estudiantes, lo cual es un medio para fortalecer el significado que tiene la medida de capacidad. Igualmente, esta propuesta de enseñanza promueve la interacción y comunicación constante de los estudiantes de manera que compartan ideas e inquietudes y se negocien significados para lograr consensos sobre las posibles estrategias de solución. Esta interacción es complementada cuando los estudiantes comparten los resultados de las tareas en el gran grupo.

Para futuras implementaciones, invitamos a los profesores a profundizar en la diferencia entre capacidad y volumen y en el uso adecuado de las unidades de medida de estas magnitudes. Además, recomendamos implementar las tareas de aprendizaje, que incluyen sugerencias metodológicas y observaciones planteadas en los apartados sobre la evaluación. Por otra parte, consideramos que los errores en los que incurren los estudiantes son una oportunidad para que los profesores reflexionen sobre la importancia de la retroalimentación como herramienta para evaluar el aprendizaje y fortalecer la enseñanza.

Dos limitaciones que tiene esta unidad didáctica están relacionadas con el uso de unidades de medida de capacidad distintas a los mililitros y el uso del *software* de geometría dinámica GeoGebra. En relación con la primera limitación, todas las tareas de aprendizaje utilizan únicamente esta unidad de medida por la relación

directa que tiene con el centímetro cúbico. No obstante, consideramos que existe una oportunidad de profundizar en otras unidades de medida de capacidad y en su relación con los mililitros y los centímetros cúbicos después de implementar esta unidad didáctica. En relación con la segunda limitación, entendemos que no todos los establecimientos educativos disponen de salas de computadores o dispositivos electrónicos con acceso a internet para el uso de GeoGebra, además de las restricciones generadas por desconocimiento en el manejo del *software*. Por otra parte, consideramos que la propuesta del examen final tiene un limitante en relación con su agrupamiento, puesto que las tareas de aprendizaje están formuladas para que los estudiantes trabajen en grupo mientras que el examen final es individual. Por esto, sugerimos fortalecer los tiempos de trabajo individual en las tareas de aprendizaje para disminuir los imprevistos que pueda generar el examen final.

Consideramos que este trabajo se puede complementar al abordar las relaciones y diferencias entre las unidades de medida de longitud, área, volumen y capacidad. Proponemos este tema porque durante la implementación evidenciamos que el tratamiento de estas unidades de medida causa dificultades en los estudiantes. Pensamos que es posible formular una unidad didáctica que aborde de manera más profunda la comprensión de estas unidades de medida mediante un análisis didáctico de este tema. Asimismo, consideramos que otro tema que puede complementar este trabajo está relacionado con el volumen y la capacidad de otros cuerpos redondos y su relación con la capacidad del cilindro, aspecto relevante porque permite dar mayor significado a la medición de esta magnitud y fortalece el significado de las fórmulas que sirven para medir indirectamente la capacidad de envases cónicos o esféricos.



# Anexos

En la tabla 13 presentamos el listado de anexos de esta unidad didáctica.

**Tabla 13.** Listado de anexos

A	Descripción
01	Dificultades y errores.
02	Criterios de logro.
03	Fichas de las tareas.
04	Imprimibles tareas.

**Nota.** A: Anexo.

## Anexo 1. Dificultades y errores

En este anexo listamos los errores asociados a las dificultades relacionadas con la medición de la capacidad del cilindro. Luego describimos las dificultades que los agrupan.

### Listado de errores

En la tabla 1 presentamos el listado de dificultades y errores relacionados con la medición de la capacidad del cilindro.

**Tabla 1.** Listado de dificultades y errores en la medición del volumen del cilindro

E	Descripción
<b>D1. Dificultades aritméticas y algebraicas</b>	
E1	Multiplicar el radio por 2.
E2	Sumar el radio y 2.
E3	Ignorar el operador elevar al cuadrado.
E4	Resolver la ecuación que relaciona las medidas del cuadrado del radio, la altura y el volumen de un cilindro despejando un valor distinto al solicitado.
E5	Sustituir el valor de una variable (radio, altura o volumen) por un valor que corresponde a otra.
E6	Usar la relación entre dimensiones de longitud para determinar un volumen o un área.
E22	Fijar más de una variable para determinar las dimensiones del cilindro.
E23	Sustituir el valor del área de la base o la altura por la capacidad.
E24	Resolver la ecuación que relaciona las medidas de área de la base, la altura y el volumen de un cilindro despejando un valor distinto al solicitado.
E25	Resolver la ecuación cuadrática para determinar el radio a partir del área de la base como una ecuación lineal.
E28	Usar una expresión algebraica distinta a la del perímetro de un círculo para escribir simbólicamente su relación con las dimensiones de un rectángulo.
E29	Resolver una ecuación distinta a la que relaciona el perímetro de la base de un cilindro con la longitud de un lado del rectángulo que lo genera.

E	Descripción
E38	Manipular algebraicamente la razón entre las capacidades encontradas como si fuera aditiva.
E39	Concluir que si la razón es mayor que 1 el antecedente es menor que el consecuente y viceversa.
E46	Dividir la capacidad total de un contenedor por su costo.
E47	Escribir los factores de ampliación o reducción para una medida de manera incompleta.
E51	Dividir el precio por unidad de capacidad presupuestado entre el costo total del recipiente.
E52	Escribir una capacidad distinta a la esperada para un recipiente.
E60	Calcular el área de un círculo tomando el diámetro como el radio.
E61	Calcular el área de un círculo sin elevar el radio al cuadrado.
E63	Representar de manera incompleta la relación entre las cantidades presentadas en un problema.
E64	Aplicar la propiedad uniforme inadecuadamente para despejar el valor desconocido en una ecuación.
E65	Utilizar la fórmula cuadrática de manera incompleta.
E66	Calcular la raíz cuadrada de un número negativo dentro del campo de los números reales.
E67	Calcular el área de la base del prisma de manera incompleta.
E69	Escribir una razón en un orden distinto al presentado en un contexto.
E70	Relacionar de manera incoherente las cantidades escritas mediante dos razones.
E76	Usar una relación de proporcionalidad distinta a la relación existente entre las dimensiones del cilindro.
<b>D2. Dificultad para medir indirectamente por modelos multiplicativos</b>	
E7	Relacionar el volumen del cilindro con el producto de la medida del área de la base y la altura de manera incompleta.
E8	Relacionar el volumen del cilindro con el producto del radio, la altura y pi de manera incompleta.
E21	Buscar hacer la medición de la capacidad de un recipiente de manera directa sin tener los medios necesarios para hacerlo.



E	Descripción
E31	Proponer una relación incompleta entre el radio de la base de un cilindro y la longitud del rectángulo que lo genera.
E33	Manipular algebraicamente la expresión multiplicativa que relaciona los volúmenes de los cilindros como si fuera aditiva.
E43	Multiplicar la altura de un recipiente cilíndrico por un número distinto a la medida del área de la base.
E44	Multiplicar el radio y la altura por pi para determinar la capacidad de un recipiente cilíndrico.
E45	Calcular la medida del área de la base usando solo el radio, la altura o el diámetro.
<b>D3. Dificultad relacionada con la interpretación de la medición</b>	
E9	Aproximar pi antes de efectuar la medición indirecta.
E10	Aproximar la respuesta usando una cantidad de cifras decimales distinta de las requeridas.
E11	Asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla.
E12	Intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie.
E13	Convertir metros cúbicos a centímetros cúbicos multiplicando por un factor distinto a 1 000 000.
E14	Convertir de centímetros cúbicos a litros dividiendo por un factor distinto a 1000.
E15	Convertir de metros cúbicos a litros multiplicando por un factor distinto a 1000.
E34	Afirmar que es posible que los lados del rectángulo no cuadrado que generan un cilindro sean iguales.
E35	Utilizar un factor de ampliación o reducción en una dimensión distinta a la requerida.
E36	Escribir la relación entre las dimensiones iniciales y las nuevas de manera incompleta.
E37	Escribir una relación distinta a la razón del recipiente inicial con el recipiente obtenido luego de la ampliación.
E40	Calcular el porcentaje de ampliación o reducción dado sin incluirlo en la cantidad inicial.
E48	Llenar parcialmente uno o varios recipientes cilíndricos con algún material.
E49	Elegir un recipiente cilíndrico con capacidad distinta a la solicitada.

E	Descripción
E50	Comparar el precio por unidad de capacidad del recipiente elegido con un precio distinto presupuestado.
E53	Restar la capacidad esperada y la obtenida para un recipiente.
E55	Determinar el área de un círculo mediante el uso de unidades lineales o cúbicas.
E56	Determinar el volumen de un prisma mediante el uso de unidades lineales o cuadradas.
E62	Expresar la capacidad de un recipiente usando unidades cúbicas.
E68	Escribir el área de la base del prisma como el volumen del prisma (olvida multiplicar por la altura).
E71	Aproximar la respuesta decimal obtenida en la calculadora con un número de cifras decimales distinto al requerido en un contexto.
E72	Confundir el separador de la parte decimal con el separador de las unidades de mil.
E74	Comparar la capacidad calculada con una que no pertenece al problema.
E75	Omitir las unidades de medida en la respuesta final.
E80	Encontrar el dato promedio dividiendo entre la mitad de la suma de los datos.
E81	Localizar un dato promedio con la suma de los datos.
<b>D4. Dificultad asociada con la representación geométrica de la información</b>	
E16	Dibujar un cuerpo geométrico diferente al cilindro.
E17	Etiquetar el diámetro como si fuera el radio del círculo.
E18	Etiquetar el radio como si fuera el diámetro del círculo.
E26	Tomar la longitud de uno de los lados de un rectángulo como el radio del cilindro que genera.
E27	Intercambiar el perímetro y la altura de los cilindros generados a partir de un rectángulo.
E30	Confundir las dimensiones del cilindro que genera un rectángulo.
E41	Etiquetar las dimensiones de un cilindro en un dibujo de un cuerpo geométrico distinto a este.
E42	Confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado.



E	Descripción
E54	Utilizar únicamente el cilindro máximo o el cilindro mínimo para acotar la representación plana de un recipiente no cilíndrico.
E57	Intercambiar el radio o el diámetro y la altura del cilindro.
E58	Intercambiar las caras laterales con las bases.
E59	Representar un tronco de cono o un cilindro oblicuo a partir de una descripción dada.
E73	Construir un recipiente distinto a un cilindro con el material proporcionado.
E77	Intercambiar la medida de la altura por la medida del radio al modelar un envase en GeoGebra.
E78	Utilizar una herramienta distinta a la de construcción de un cilindro para modelar un envase en GeoGebra.
E79	Presentar un diseño de envase cuyas dimensiones no sean aproximadamente proporcionales a las dimensiones del envase original.
D5. Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad	
E19	Concluir que dos cilindros de dimensiones distintas deben tener volúmenes distintos.
E20	Concluir que dos cilindros que provienen del mismo objeto deben tener el mismo volumen.
E32	Escribir una relación distinta a la igualdad entre las capacidades encontradas.

Nota: E: error; D: dificultad.

### *Descripción de las dificultades*

Para describir las dificultades relacionadas con la medición de la capacidad, consolidamos a continuación los resultados expuestos por Olmo *et al.* (1993) y algunas dificultades que identificamos en nuestra experiencia como profesores.

#### *Dificultades aritméticas y algebraicas*

Esta dificultad organiza un conjunto de errores que evidenciamos durante el desarrollo de los procedimientos relacionados con la medición indirecta de la capacidad. Por ejemplo, notamos que los estudiantes pueden operar inapropiadamente o que despejan una incógnita de la ecuación que relaciona las medidas del cuadrado del radio, la altura y el volumen de un cilindro de manera inadecuada.

## *Dificultad para medir indirectamente por modelos multiplicativos*

Según Vergnaud, citado en Olmo *et al.* (1993):

El volumen es una magnitud que es susceptible de dos tratamientos, uno como magnitud unidimensional, que puede ser comparada, medida, evaluada, aproximada, sumada, restada, etc., en función de ella misma, y otro como magnitud tridimensional, que permite medirla en función de otra magnitud (la longitud). (p. 108)

Para el caso del cilindro, notamos el primer tratamiento cuando medimos el volumen por desplazamiento o cuando usamos un sistema de representación concreto. Para este sistema de representación, el escolar puede medir la capacidad total de un recipiente cilíndrico usando la cantidad de líquido que está contenido en otros de menor capacidad de los que conoce su medida.

Evidenciamos el segundo tratamiento de la magnitud propuesto por Vergnaud cuando multiplicamos el cuadrado del radio del cilindro por pi y luego por su altura. Este último tratamiento corresponde a modelos multiplicativos que pueden estar obstaculizados por modelos aditivos que ha desarrollado el niño a lo largo de su escolaridad.

## *Dificultad relacionada con la interpretación de la medición*

Evidenciamos esta dificultad cuando los estudiantes eligen unidades de volumen al abordar situaciones de capacidad. También, notamos que algunos escolares manifiestan esta dificultad cuando utilizan unidades de área o longitud para expresar los resultados de la medición indirecta de la capacidad o mezclan estas unidades de medida al escribir los procedimientos empleados. Además, evidenciamos que los estudiantes asignan unidades de medida distintas a las requeridas o las omiten.

Por otra parte, la naturaleza irracional de pi lleva a que los escolares interpreten el resultado obtenido por la medición indirecta por medio de la aproximación de dicha respuesta. Los estudiantes deben pasar del carácter continuo que tiene el concepto de número irracional a la naturaleza discreta de la medición en un contexto real. Los escolares no comprenden el sentido de las cifras decimales necesarias al aproximar, agregando o suprimiendo dígitos sin tener en cuenta lo requerido por las diversas situaciones. Por lo tanto, el cálculo algebraico no es suficiente para dar solución al problema propuesto, puesto que su significado carece de interpretación dentro del contexto.

### *Dificultad asociada a la representación geométrica de la información*

A partir del sistema de representación en el que planteamos una situación relacionada con la capacidad del cilindro, los escolares pueden presentar dificultades para representar los cuerpos redondos en dos dimensiones. También pueden tener problemas al asignar o confundir parámetros o datos relacionados con los cilindros en dicha representación. Por ejemplo, los estudiantes etiquetan el diámetro como si fuera el radio del cilindro.

### *Dificultad en la conservación de la cantidad de volumen*

Según Piaget (citado en Olmo *et al.*, 1993), los estudiantes pueden presentar dificultades en la conservación de la cantidad. Para la medida de la capacidad, los escolares evidencian esta dificultad al concluir que dos envases cilíndricos con radios y alturas distintas no pueden tener la misma capacidad puesto que sus dimensiones son distintas.

## Anexo 2. Criterios de logro

En la tabla 1 presentamos el listado completo de los criterios de logro para la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro. Estos criterios de logro están agrupados por objetivo.

**Tabla 1.** Descripción de los criterios de logro

CdL	Descripción
CdL1.1	Identifico las dimensiones del cilindro que me permiten solucionar el problema.
CdL1.2	Interpreto los datos del problema y los represento algebraicamente.
CdL1.3	Identifico que debo medir la capacidad de un cilindro o determinar una de sus dimensiones.
CdL1.4	Propongo una manera de acotar un envase con cilindros.
CdL1.5	Mido la capacidad del envase:
CdL1.6	Al promediar la capacidad de los cilindros.
CdL1.7	Al promediar el área de las bases de los cilindros.
CdL1.8	Mido la capacidad del envase al promediar los radios de los cilindros.
CdL1.9	Escribo la relación entre la capacidad, el área y la altura de un cilindro.
CdL1.10	Escribo la relación entre las dimensiones del cilindro al fijar una de sus medidas.
CdL1.11	Escribo la relación entre las dimensiones del cilindro a partir de la relación de proporcionalidad entre ellos.
CdL1.12	Resuelvo la ecuación que me permite determinar una dimensión del cilindro a partir de su relación con otra.
CdL1.13	Escojo una estrategia para modelar el cilindro (cartulina o GeoGebra).
CdL1.14	Construyo el envase con las cartulinas dadas.
CdL1.15	Modelo el envase mediante GeoGebra.
CdL1.16	Verifico la coherencia de la solución obtenida y doy respuesta a la tarea.
CdL2.1	Reconozco que la situación es de comparación de capacidades, del precio o del cambio en las dimensiones de un cilindro.

CdL	Descripción
CdL2.2	Relaciono el radio del cilindro y uno de los lados de la cartulina para determinar la capacidad de los envases de cartulina.
CdL2.3	Comparo las capacidades de los dos recipientes mediante fórmulas.
CdL2.4	Construyo los cilindros con las cartulinas dadas.
CdL2.5	Decido si comparo las capacidades de los recipientes con arroz o mediante el cálculo de sus capacidades.
CdL2.6	Mido el perímetro de la base de los cilindros y determino sus radios.
CdL2.7	Comparo las capacidades de los dos envases hechos con cartulina.
CdL2.8	Comparo la cantidad de material usado para llenar los recipientes.
CdL2.9	Interpreto los datos del problema y los represento algebraicamente.
CdL2.10	Determino la capacidad de los envases involucrados en el problema.
CdL2.11	Determino el precio por mililitro de cada envase.
CdL2.12	Comparo el precio por unidad de capacidad de los envases.
CdL2.13	Elijo el envase más conveniente dentro del contexto.
CdL2.14	Determino la capacidad máxima que puedo pagar con un presupuesto.
CdL2.15	Comparo la capacidad del envase con la capacidad máxima que puedo comprar.
CdL2.16	Identifico que debo ampliar o reducir las dimensiones de un cilindro.
CdL2.17	Determino las dimensiones de un cilindro al ampliar sus medidas.
CdL2.18	Calculo la capacidad del recipiente antes y después de la ampliación.
CdL2.19	Comparo la capacidad del envase antes y después de la ampliación.
CdL2.20	Multiplico el factor de ampliación por las variables correspondientes para determinar la capacidad de un cilindro.
CdL2.21	Comparo las fórmulas para la capacidad del envase antes y después de la ampliación.
CdL2.22	Doy respuesta a la situación propuesta en coherencia con la comparación.

**Nota:** CdL: criterio de logro.

## Anexo 3. Fichas de las tareas

En este anexo presentamos la descripción completa de los elementos que componen las tareas de aprendizaje para la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad de envases cilíndricos. Para cada tarea, incluimos 1) requisitos, 2) metas, 3) formulación, 4) materiales y recursos, 5) agrupamiento, 6) interacción, 7) temporalidad y 8) ayudas previstas.

### *Tarea 1.1*

A continuación describimos la tarea 1.1, Latas de Milo®.

#### *Requisitos*

Esta tarea requiere que los estudiantes conozcan el cilindro como cuerpo redondo, al igual que conceptos como el volumen y la capacidad. Los escolares también deben manejar las expresiones algebraicas y el planteamiento y solución de ecuaciones de primer y segundo grado para medir indirectamente áreas, volúmenes o capacidades y usarlas de manera apropiada de acuerdo con el contexto propuesto. También demanda que los escolares pongan en juego su conocimiento de conceptos y procedimientos propios de la semejanza de figuras. Por ejemplo, factores de ampliación de dimensiones de figuras geométricas.

#### *Metas*

En esta tarea, queremos que los estudiantes exploren la relación entre las dimensiones de un recipiente para un valor constante de su capacidad. Hacen esto al utilizar las expresiones  $V = A_b h$  y  $V = \pi r^2 h$  y al solucionar la ecuación multiplicativa (lineal o cuadrática) correspondiente. Durante estos procedimientos, prevemos que los estudiantes omitan alguna de las dimensiones en la medición indirecta de la capacidad o que sustituyan incorrectamente alguno de los valores que fijen como constantes.

#### *Formulación*

El profesor entrega a cada estudiante, en la primera sesión de trabajo de esta tarea, una guía de trabajo que expone la siguiente situación.

Para promover el talento joven colombiano, Nestlé te contrata para diseñar una nueva presentación de las latas de Milo® de manera que tenga el doble de capacidad de sus latas medianas. Sabemos que las medidas actuales de las latas medianas son 5 cm de radio y 10 cm de altura.

A partir de esta información, formula un diseño para la nueva presentación. Indica las medidas del diseño propuesto y describe, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para la segunda sesión de trabajo, el profesor organiza a los estudiantes en grupos de cuatro integrantes y entrega una guía de trabajo con las siguientes instrucciones.

A partir de la información propuesta por cada integrante en la sesión anterior, elijan un diseño y construyan un prototipo para la nueva lata. Indiquen las medidas del diseño elegido y sustenten por escrito, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para el diseño, construcción y presentación del prototipo, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles.

*Líder.* Organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

*Secretario.* Está encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

*Presentador.* Está a cargo de presentar frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

*Mensajero.* Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de otro grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para traer información a su equipo sobre posibles procedimientos. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

### *Materiales y recursos*

Dentro de los recursos, incluimos los útiles de los estudiantes (lápiz, cuaderno, regla graduada y calculadora). Asimismo, consideramos que los escolares pueden abordar la tarea de dos maneras: con material manipulativo mediante el uso de cartulina, hojas, tijeras, pegamento o cinta para establecer el prototipo solicitado, o mediante el uso de GeoGebra para aquellos estudiantes que deseen elaborar el

prototipo de manera digital. También contemplamos como recurso un aplicativo que permite al docente otorgar una ayuda para fortalecer el concepto de capacidad.

### *Agrupamiento*

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen tanto de manera individual como organizados en cuartetos. Esperamos que, en el trabajo individual, el escolar comprenda la situación propuesta y, a partir de esto, plantee algunas ideas iniciales sobre cómo abordarla. Asimismo, permite al profesor identificar estudiantes con dificultades en los primeros procedimientos y ofrecer las ayudas si observa que incurren en errores. Después, en los grupos de cuatro, cada estudiante comparte sus avances o estrategias para obtener las medidas del prototipo. Lo anterior promueve la unificación de las propuestas de diseño en una sola y la organización de la presentación de los resultados.

En una segunda parte, esta tarea requiere que los estudiantes estén organizados en grupos de cuatro personas elegidas con condiciones. El profesor debe establecer roles en cada grupo. Proponemos los siguientes:

*Líder.* Es el estudiante a cargo de organizar el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y decide sobre la información que el mensajero obtiene de otro grupo. Proponemos que estos líderes sean estudiantes que han incurrido en errores en los primeros procedimientos de solución de las tareas y consecuentemente han recibido las ayudas. Esto permite valorar su efectividad.

*Secretario.* Es el estudiante encargado de organizar y escribir las ideas. Además, elabora la producción escrita del grupo con los procedimientos que sustentan el diseño de la lata.

*Presentador.* Está a cargo de presentar frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento empleado para conseguir dicha propuesta. Proponemos que el presentador sea un estudiante que ha incurrido en errores en los primeros procedimientos de solución de las tareas y consecuentemente ha recibido las ayudas. Esto permite al profesor valorar su efectividad.

*Mensajero.* Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de un grupo previamente asignado durante un periodo de cinco minutos para discutir información sobre posibles procedimientos que puedan servir a su equipo. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite. Estas preguntas pueden ser formuladas por el equipo y las respuestas valoradas y seleccionadas por el líder.

Para el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para escuchar la presentación de los asignados para este ejercicio. En caso de que haya escolares que no asistan a las sesiones de la tarea, recomendamos que deben abordarla de acuerdo con los agrupamientos y con acompañamiento del profesor. Sugerimos que dichos estudiantes cumplan con esta tarea previamente a la siguiente.

### *Interacción*

En el primer agrupamiento, los estudiantes pueden interactuar con el profesor y manifiestan las dudas e inquietudes sobre el desarrollo de la tarea. Además, el profesor ofrece individualmente las ayudas para los escolares que identifique que incurren en errores. En la segunda etapa de la tarea, los integrantes de cada grupo interactuarán entre sí. Adicionalmente, los estudiantes con el rol de mensajero interactúan con el grupo asignado a partir de la formulación de preguntas sobre el procedimiento realizado. También interactúan con este grupo al compartir con ellos las propuestas hechas por sus compañeros para identificar ideas y procedimientos comunes. Asimismo, interactúan con su grupo al explicar lo discutido en el grupo visitado.

Por otra parte, buscamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el docente interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final. Utilizará GeoGebra para retroalimentar el diseño esperado con el fin de que los estudiantes reflexionen sobre la coherencia de sus respuestas. Después de la presentación de un grupo, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias que el grupo implementa para escoger el diseño que mejor se ajuste a lo que requiere la empresa.

Es posible que los estudiantes muestren dificultades al medir indirectamente la capacidad de un cilindro, por lo que prevemos que el profesor deba explicar esto mediante la ayuda 5 o por medio de una explicación frente al gran grupo.

### *Temporalidad*

Iniciamos con quince minutos para la presentación del primer objetivo de la unidad didáctica e introducimos la formulación de esta primera tarea de aprendizaje junto con su meta. Esta presentación incluye tanto el enunciado del objetivo como el grafo de criterios de logro correspondiente.

La tarea está organizada para desarrollarse en dos etapas distribuidas en dos sesiones. En la primera etapa, que dura sesenta minutos, el profesor les da la instrucción escrita y los estudiantes trabajan de manera individual. En este tiempo, los escolares reciben las ayudas individualmente o para el gran grupo si incurrían en errores. En la segunda etapa, el profesor distribuye los grupos y los roles de los escolares y para esto emplea diez minutos. Luego, continúan con el desarrollo de la situación propuesta y concretan el diseño solicitado en cuarenta minutos. Durante los primeros quince minutos de la segunda etapa de la tarea, todos los miembros del equipo deben aportar ideas para dar solución. Luego, los mensajeros pueden ir a observar a un grupo previamente asignado durante un periodo de cinco minutos. En la tercera etapa de la sesión, de quince minutos, los estudiantes presentan y discuten los diseños propuestos frente al gran grupo, guiados por el profesor. Para finalizar, el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos y concreta los procedimientos usados para determinar indirectamente las dimensiones del recipiente.

Al finalizar la tarea, disponemos de veinte minutos para que los estudiantes diligencien el grafo de criterios de logro con semáforo y los comentarios sobre el desarrollo de la tarea.

### *Ayudas*

En la tabla 1 presentamos las ayudas para los errores correspondientes a la tarea 1.1:

**Tabla 1.** Descripción de las ayudas de la tarea 1.1 Latas de Milo®

E	A	Descripción
42-23-4	1	Preguntar ¿qué valor (o medida) representa la letra que usaste en el contexto del problema?
	2	Preguntar ¿estás seguro de que el diámetro está representado con la letra que usaste?
16-17	3	Preguntar si algún miembro del grupo tiene una estrategia para representar un objeto tridimensional en papel.
18-41	4	Preguntar por la definición de radio y la de diámetro. Compararlas.



E	A	Descripción
8	5	Usar fichas circulares (del mismo tamaño), apilarlas y preguntar por el espacio ocupado por 1, por 2, por 5 y por más de 10 fichas (progresivamente).
	15	Usar el aplicativo Simulacion1.ggb para recordar la relación entre la capacidad con el producto entre el área de la base y la altura del cilindro.
22-24-43	10	Preguntar cuál es la cantidad desconocida (y que se quiere hallar).
25	11	Preguntar por las soluciones de la ecuación $r^2 = 4$ . Dirigir la discusión a que esta ecuación tiene dos soluciones.
10	9	Preguntar por la cantidad de cifras que resultan ser significativas dentro del contexto, de manera que el estudiante justifique su elección.
12	12	Explicar la relación entre objetos lineales con unidades lineales, objetos bidimensionales con unidades cuadradas y objetos tridimensionales con unidades cúbicas.
	13	Presentar la imagen de un prisma con la base teselada por cuadrados y preguntar ¿qué elementos usamos para medir el área de la base?
9	28	Explicar que, si quitamos cifras de la parte decimal antes de efectuar la medición, esta pierde precisión.
77	29	Preguntar por la relación entre el radio y la altura de un cilindro si estas miden 1 y 2, 2 y 4, y 3 y 6, respectivamente.
78	30	Preguntar cuáles son las medidas obtenidas para el radio y la altura del cilindro.
79	31	Indicar la herramienta para construir cilindros incluida en GeoGebra y retomar cómo ingresar la información para la construcción del envase.
80	32	Comparar el envase original y el diseño presentado y preguntar si ambos cilindros son semejantes.

**Nota.** E = error; A = ayuda.

## Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

En la figura 1 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 1.1:

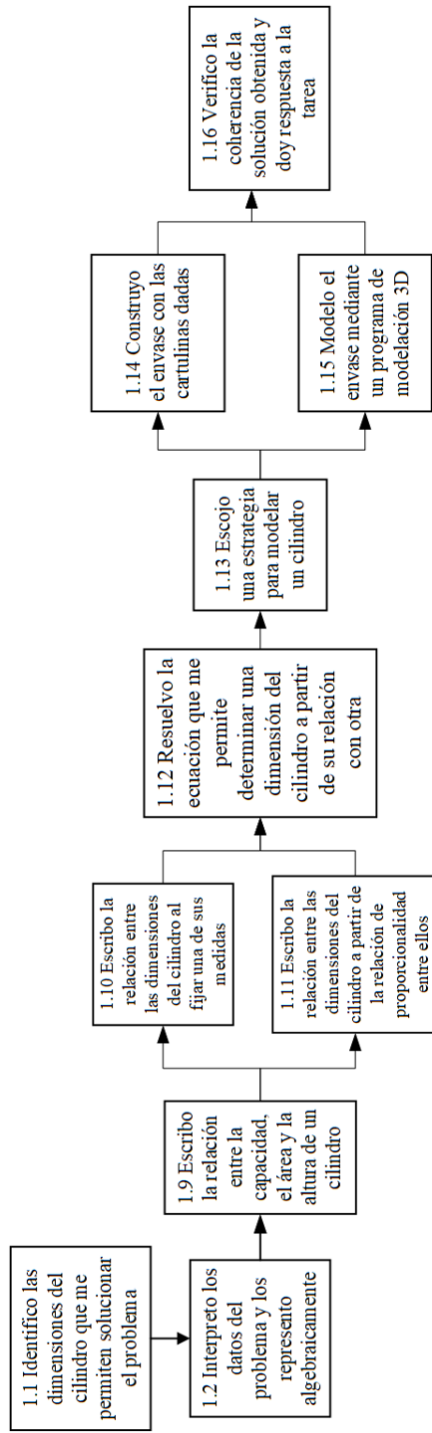


Figura 1. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

## *Tarea 1.2*

A continuación describimos la tarea 1.2: Vasos de gaseosa.

### *Requisitos*

Esta tarea requiere que los estudiantes representen cilindros en un dibujo y etiqueten adecuadamente sus dimensiones. Además, deben utilizar expresiones algebraicas para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico. También, deben conocer cómo determinar un promedio entre dos cantidades conocidas.

### *Metas*

Por medio de esta tarea, queremos que los estudiantes usen la medición de la capacidad de un recipiente cilíndrico para justificar la medición de un recipiente en un contexto real. Además, pretendemos que esta medición adquiera significado a partir de la manipulación de material concreto. Buscamos que los estudiantes utilicen cilindros para inscribir y circunscribir el recipiente mostrado y que, de esta manera, puedan usar dichos cilindros para estimar la capacidad del envase al promediar sus radios, las áreas de sus bases o sus capacidades. Asimismo, prevemos que los escolares omitan alguna de las dimensiones involucradas en la medición indirecta de la capacidad, que representen incorrectamente los cilindros máximo y mínimo y que los usen inadecuadamente para efectuar la estimación de la capacidad del recipiente propuesto.

### *Formulación*

El docente pide a los escolares que formen parejas. Entrega a cada equipo un vaso plástico y una guía de trabajo que enuncia la siguiente situación:

Felipe, al ir al cine, compra una gaseosa. Le entregan un vaso como el que el profesor les entregó y que se muestra en la imagen y le dicen que ese vaso tiene una capacidad de 600 ml. Felipe considera que el vaso no tiene esa capacidad.

¿Cómo pueden ayudar a Felipe para aproximar (por medio de cilindros) la capacidad del vaso y verificar que el vaso que compró sí tiene 600 ml de capacidad? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Adaptado de Connected Mathematics (2006b).



Cada grupo aborda el ejercicio propuesto para definir una estrategia con la que puedan aproximar indirectamente la capacidad del envase propuesto. Luego, presenta frente al gran grupo la estrategia planteada y la aproximación que determinaron para el vaso.

### *Materiales y recursos*

Consideramos que es útil para los estudiantes poder utilizar un vaso plástico semejante al usado en las salas de cine. Esto permite que el contexto presentado sea cercano para los escolares. Además, proponemos el uso de este recurso para fomentar la medición directa de las dimensiones del vaso. Por esto incluimos, además, la regla graduada como un recurso a considerar.

### *Agrupamiento*

Esta tarea requiere que los estudiantes estén organizados en parejas, lo cual permite que propongan sus procedimientos y puedan conversarlos con un compañero. Así, ponen en juego sus conocimientos previos por medio de la forma como los comunican. Para el cierre de la tarea, los estudiantes vuelven al gran grupo para escuchar los resultados de algunas de las parejas. Si algún estudiante no asiste a esta sesión, debe trabajar de manera individual y autónoma en casa.



## *Interacción*

En general, los integrantes de cada pareja interactúan entre sí. Durante esta interacción, los escolares deben proponer sus ideas y llegar a acuerdos a partir de la negociación de significados que surgen de este intercambio. También buscamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el profesor interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final. Durante la presentación de algunas parejas, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias que cada grupo implementa. Luego, resume estas estrategias en los procedimientos que fueron implementados.

## *Temporalidad*

Prevemos utilizar veinte minutos al iniciar la sesión para retroalimentar la tarea 1.1, así como para retomar los procedimientos más relevantes que surgieron en su desarrollo. Además, presentamos en este momento la formulación y meta de la tarea 1.2.

Esta tarea está planteada para desarrollarse en tres etapas, en una sesión de clase de sesenta minutos. En los primeros diez minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor da la instrucción escrita. Luego, los escolares abordan la situación propuesta y exploran posibilidades para estimar la capacidad del envase mostrado durante cuarenta minutos. En la última etapa, que dura veinticinco minutos, los estudiantes presentan, discuten y debaten las propuestas de aproximación de la capacidad. Esto último lo hacen en el gran grupo, guiados por el profesor.

## Ayudas

A continuación presentamos las ayudas para los errores correspondientes a la tarea 1.2:

**Tabla 2.** Descripción de las ayudas de la tarea 1.2: Vasos de gaseosa

E	A	Descripción
42-4	1	Preguntar ¿qué valor (o medida) representa la letra que usaste en el contexto del problema?
	2	Preguntar ¿estás seguro de que el diámetro está representado con la letra que usaste?
16	3	Preguntar si algún miembro del grupo tiene una estrategia para representar un objeto tridimensional en papel.
18-41	4	Preguntar por la definición de radio y la de diámetro. Compararlas.
54	14	Recordar la intención de la tarea (usar cilindros para efectuar la aproximación).
43-44-45	15	Usar el aplicativo Simulacion1.ggb para recordar la relación entre la capacidad con el producto entre el área de la base y la altura del cilindro.
10	9	Preguntar por la cantidad de cifras que resultan ser significativas dentro del contexto, de manera que el estudiante justifique su elección.

**Nota.** E = error; A = ayuda.

### Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2

En la figura 2 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 1.2:

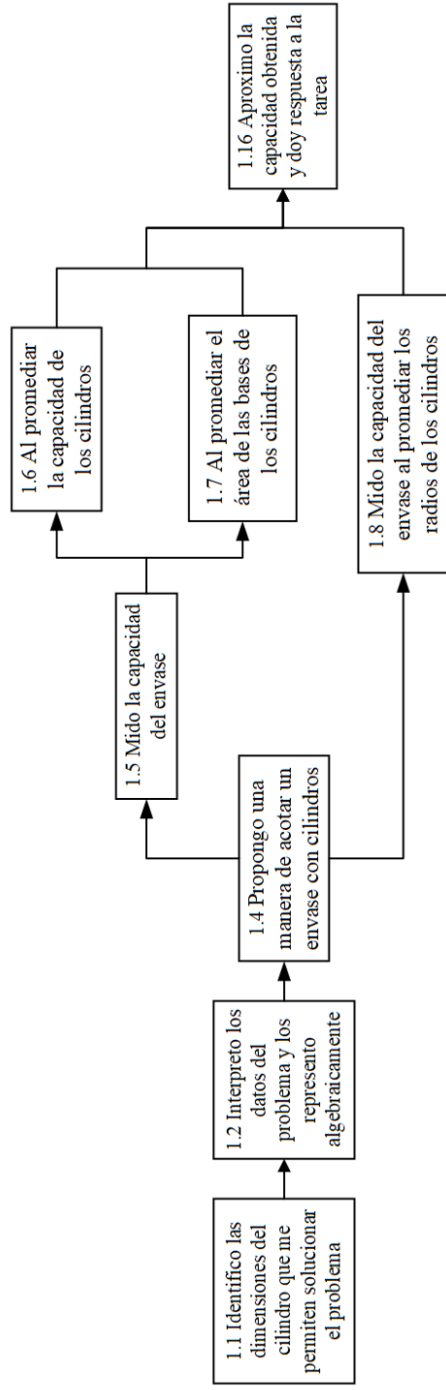


Figura 2. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2

## **Tarea 2.1**

A continuación describimos la tarea 2.1: Comparando cilindros.

### *Requisitos*

En esta tarea, los estudiantes necesitan usar expresiones algebraicas para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico y para relacionar el perímetro de la base del cilindro con su radio. Además, necesitan representar adecuadamente, con material manipulativo, recipientes cilíndricos.

### *Metas*

Con esta tarea, buscamos contribuir al segundo objetivo por medio de la construcción de recipientes cilíndricos con cartulina. Con esto, esperamos que los escolares comprendan que recipientes con construcciones similares pueden tener distintas capacidades y que una forma objetiva de comparar dichas capacidades es por medio de la medición indirecta.

### *Formulación*

Al iniciar la sesión, el profesor retoma la relación entre el perímetro y el radio de una circunferencia. Hace énfasis en dónde encontrar este dato en las cartulinas utilizadas. Luego, el docente pide a los estudiantes que formen parejas para trabajar. Cada pareja recibe dos trozos de cartulina idénticos y semejantes a un octavo de cartulina; además, dos círculos. El docente les pide que construyan recipientes cilíndricos de la siguiente manera:

Con una cartulina, junten completamente los lados más largos y luego péguenlos con cinta. Con la otra cartulina, repitan lo mismo, pero juntando y pegando completamente los lados más cortos. Luego, peguen los círculos dados como tapa inferior de cada cilindro. ¿Cuál de los cilindros construidos tiene mayor capacidad? Expliquen su respuesta e incluyan por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.

Después de que cada grupo concluya, el docente pide a algunas parejas que socialicen ante el gran grupo su respuesta frente a la cuestión planteada y los detalles de cómo llegaron a su conclusión. Los escolares realizan aportes o preguntas sobre lo que socializan sus compañeros mientras que el profesor aclara ideas según encuentre la necesidad.

## *Materiales y recursos*

Dentro del material necesario para esta tarea, incluimos rectángulos de cartulina de 25 cm de largo y 17,5 cm de ancho. Además, incluimos cinta pegante, colbón y los útiles de los escolares (cuaderno, lápiz, regla graduada y calculadora). También incluimos bolsas de arroz como un recurso disponible para los grupos de estudiantes que decidan efectuar la comparación de capacidades de manera directa. Adicionalmente, contemplamos como recursos diversos aplicativos y videos como soporte en las ayudas que el docente emplea para apoyar a los escolares cuando incurran en un error.

## *Agrupamiento*

Esta tarea requiere que los estudiantes estén organizados en parejas. Para el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para escuchar la presentación. Si algún estudiante no asiste a esta sesión, el profesor debe buscar un tiempo fuera del aula para que pueda desarrollar la tarea en el colegio.

## *Interacción*

Los integrantes de cada pareja interactúan permanentemente entre sí. Durante la construcción del recipiente, aunque es individual, deberán compartir los recursos dispuestos y desarrollar los recipientes de manera colaborativa. Luego, esperamos que cada estudiante determine la capacidad de su recipiente para poder compararla con la de su compañero.

Por otra parte, el docente interactúa con cada pareja para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final. Durante de la presentación de cada pequeño grupo, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias que la pareja implementa para comparar la capacidad de los envases cilíndricos en cartulina. Luego, resume estas estrategias en los procedimientos que fueron implementados.

## *Temporalidad*

Formulamos esta tarea para que sea desarrollada en dos sesiones de clase. Durante la primera sesión, el profesor presenta la meta de la tarea al grupo, da la instrucción escrita y otorga 45 minutos para que los estudiantes trabajen de manera

individual. En la segunda sesión, el profesor distribuye a los estudiantes en grupos y asigna los roles de trabajo (10 min) y los escolares desarrollan y concretan el diseño solicitado en la tarea (55 min). Quince minutos después del inicio del trabajo grupal, los mensajeros de cada grupo disponen de cinco minutos para interactuar con el grupo asignado. Al finalizar esta sesión, los grupos presentan frente a la clase sus diseños y el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos (20 min).

### Ayudas

A continuación presentamos las ayudas para los errores correspondientes a la tarea 2.1:

**Tabla 3.** Descripción de las ayudas de la tarea 2.1 Comparando cilindros

E	A	Descripción
42	1	Contrastar la notación usada por los estudiantes. Orientarlos para que lleguen a acuerdos sobre su unificación.
44-48	15	Retomar el significado de la variable $h$ en la expresión $V = A_b h$ mediante el aplicativo Simulacion1.ggb para recordar que la cantidad indicada por esa $h$ determina hasta dónde llenar.
30-26	16	Usar el material concreto dispuesto (cartulina), desdoblar el cilindro para guiar al estudiante a identificar que la dimensión que corresponde a la base del cilindro coincide con su perímetro.
27	17	Usando el material concreto, preguntar cuál dimensión del rectángulo fue doblada y relacionarla con el perímetro de la base.
29	18	Explicar al grupo la relación entre el perímetro y el radio de una circunferencia.
10	9	Preguntar por la cantidad de cifras que resultan ser significativas dentro del contexto, de manera que el estudiante justifique su elección.

**Nota.** E = error; A = ayuda.



### Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1

En la figura 3 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 2.1:

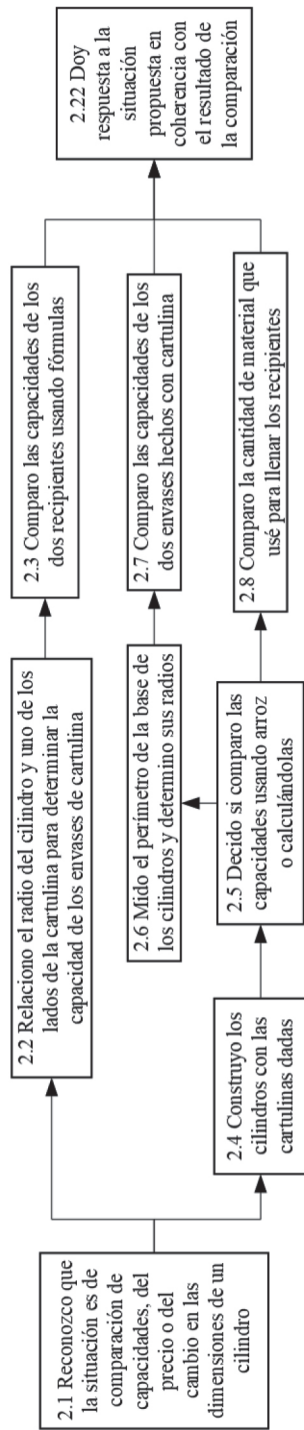


Figura 3. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1

## Tarea 2.2

A continuación describimos la tarea 2.2: Comparación de precios.

### Requisitos

Esta tarea requiere que los estudiantes conozcan las razones y proporciones y que puedan relacionar el costo de un producto por unidad de medida. Adicionalmente, los estudiantes necesitan medir indirectamente la capacidad de varios recipientes cilíndricos para luego compararlos.

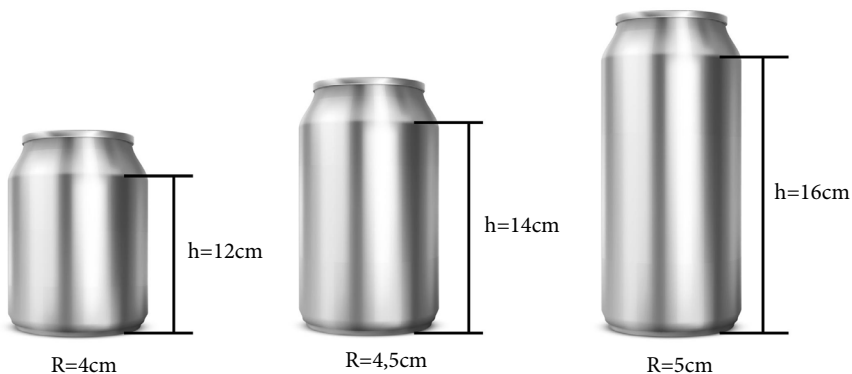
### Metas

Con esta tarea, buscamos que los estudiantes comparen recipientes cilíndricos por medio de la relación entre el precio que tiene y su capacidad. Igualmente, esperamos que los estudiantes escriban la relación inversa de modo que determinen la relación capacidad-precio, comparen los costos de los recipientes y evidencien la importancia de tener en el antecedente de la razón el precio de venta de los envases.

### Formulación

El docente pide a los escolares que formen grupos de cuatro estudiantes que sean distintos a los conformados en sesiones anteriores. Luego, entrega a cada equipo una guía de trabajo con la siguiente situación:

Un supermercado vende gaseosas en lata que están envasadas en las tres presentaciones que mostramos en la imagen.



El día de hoy, la lata pequeña cuesta \$2800, la mediana \$4000 y la grande \$5500. En las etiquetas de venta del supermercado aparece indicado el precio por cada mililitro, como lo exige la ley colombiana.

Para cumplir con su plan de ahorro, Alejandra no podrá comprar una lata con un precio superior a \$4,5 por mililitro, que corresponde al precio que pagó por mililitro la última vez que estuvo en el supermercado. Con esta restricción, ¿cuáles latas de gaseosa puede comprar Alejandra?

Cada grupo aborda el ejercicio propuesto y presenta frente al gran grupo la estrategia empleada para elegir el envase más conveniente.

### *Materiales y recursos*

Consideramos que esta tarea solo requiere de los recursos necesarios para prestar las ayudas previstas. Estos recursos incluyen diversos aplicativos y videos.

### *Agrupamiento*

Esta tarea requiere que los estudiantes estén organizados en grupos de cuatro personas generados aleatoriamente. Dentro de cada grupo, esperamos que los estudiantes tomen uno de los siguientes roles.

*Líder.* Es el estudiante a cargo de organizar el grupo, velar por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetizar las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

*Secretario.* Es el estudiante encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

*Presentador.* Está a cargo de exponer frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

*Mensajero.* Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de los demás grupos durante un periodo de cinco minutos para traer información sobre posibles procedimientos a su equipo. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite. Estas preguntas serán formuladas por el equipo y sintetizadas por el líder.

Para el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para escuchar la presentación de algunos equipos.

## *Interacción*

En general, los integrantes de cada grupo interactuarán entre sí. Adicionalmente, los estudiantes con el rol de “mensajero” interactúan con los otros grupos a partir de la observación de la interacción interna de cada grupo y explica al suyo lo que observó. También buscamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el docente interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final. Después de la presentación de un grupo, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias que los grupos implementan para escoger la lata que mejor se ajusta al presupuesto dado.

## *Temporalidad*

Esta tarea está planteada para desarrollarse en la primera mitad de una sesión de noventa minutos. Este tiempo está repartido en cuatro etapas para un total de treinta minutos. En los primeros cinco minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor les da la instrucción escrita. En este tiempo, los escolares asignan sus roles. En los siguientes quince minutos, los escolares abordan la situación propuesta y concretan el diseño solicitado. Durante los primeros cinco minutos de esta etapa, todos los miembros del equipo deben aportar ideas para dar solución a la tarea. Luego, los mensajeros pueden ir a observar a los demás grupos durante un periodo de cinco minutos. En la tercera etapa, de cinco minutos, los estudiantes presentan y discuten los diseños propuestos frente al gran grupo guiados por el profesor. Para finalizar, en los últimos cinco minutos, el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos y concreta los procedimientos usados para determinar indirectamente las dimensiones del recipiente.

## *Ayudas*

A continuación presentamos las ayudas para los errores correspondientes a la tarea 2.2:



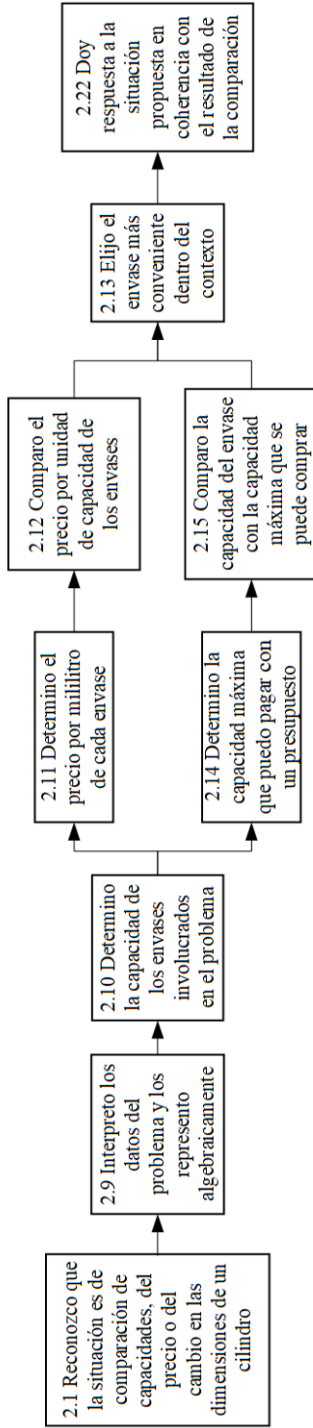
**Tabla 4.** Descripción de las ayudas de la tarea 2.2 Comparando precios

E	A	Descripción
42	1	Contrastar la notación usada por los estudiantes. Orientarlos para que lleguen a acuerdos sobre su unificación.
44-49	15	Usar el aplicativo Simulacion1.ggb para recordar la relación entre la capacidad con el producto entre el área de la base y la altura del cilindro.
10	9	Preguntar por la cantidad de cifras que resultan ser significativas dentro del contexto de manera que el estudiante justifique su elección.
30	17	Usar el material concreto dispuesto (cartulina), desdoblar el cilindro para guiar al estudiante a identificar que la dimensión que corresponde a la base del cilindro coincide con su perímetro.
51-46	19	Preguntar ¿cuál razón tiene más sentido entre \$ 550 / ml o 200 ml / \$ 1?
50	20	Preguntar por la fuente del valor que está usando para comparar. Dirigir al estudiante al precio presupuestado en el enunciado.
11	21	Mostrar una foto de una caja de leche. Preguntar por las unidades de medida empleadas en el empaque. Hacer <i>zoom</i> y contrastar la respuesta con la foto.

**Nota.** E = error; A = ayuda.

### *Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2*

En la figura 4 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 2.2:



**Figura 4.** Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2

## Tarea 2.3

A continuación describimos la tarea 2.3: Incrementos.

### Requisitos

Esta tarea requiere que los estudiantes puedan determinar las dimensiones de un cilindro después de efectuar un incremento en una o varias de sus dimensiones.

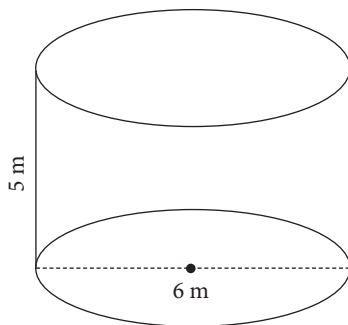
### Metas

Esta tarea contribuye al segundo objetivo porque proponemos una situación en la que los estudiantes puedan establecer la relación entre la capacidad de un recipiente antes y después de un incremento en sus dimensiones. Los escolares tienen la oportunidad de poner en juego los procedimientos trabajados durante el desarrollo de las tareas anteriores, de modo que pueden comparar la capacidad antes y después del incremento o bien con la medición indirecta de las capacidades o comparando algebraicamente las expresiones correspondientes por medio de una razón.

### Formulación

El docente indica a los escolares que durante los primeros cinco minutos de la actividad trabajarán individualmente. Entrega a cada estudiante una guía de trabajo que enuncia la siguiente situación:

Para el recipiente cilíndrico mostrado en la imagen, ¿cuánto incrementa su capacidad si cada dimensión (radio y altura) se incrementa en un 20%? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



Pasado el tiempo de trabajo individual, los escolares continúan el desarrollo de la tarea en parejas. Después de diez minutos, el docente indica a los estudiantes que formen grupos de dos parejas (cuatro estudiantes) para finalizar el ejercicio y escoger un representante por equipo. Al finalizar, cada representante expone frente al gran grupo la forma como determinaron el incremento del volumen.

### *Materiales y recursos*

Consideramos que esta tarea solo requiere de los recursos necesarios para prestar las ayudas previstas. Estos recursos incluyen diversos aplicativos y videos.

### *Agrupamiento*

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen tanto de manera individual como organizados en parejas o cuartetos. Buscamos que, gracias al trabajo individual, el escolar comprenda la situación propuesta y, a partir de esto, plantee algunas ideas iniciales sobre cómo abordarla. Luego, en parejas, cada estudiante comenta sus ideas con su compañero y establecen un procedimiento común para dar solución al ejercicio. Después, en los grupos de cuatro, cada pareja comparte sus estrategias y la respuesta obtenida, permitiendo establecer acuerdos sobre los términos y el vocabulario apropiado para usar en la presentación de los resultados. Para el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para escuchar la presentación de algunos equipos.

### *Interacción*

Una vez agrupados, los integrantes de cada pareja interactuarán constantemente entre sí. Esperamos que los estudiantes discutan sus ideas y procedimientos y que lleguen a acuerdos sobre la manera de abordar la situación propuesta. Después, en los grupos de cuatro, buscamos que los estudiantes puedan presentar parcialmente el procedimiento efectuado para dar respuesta a la pregunta planteada en el contexto.

Por otra parte, el docente interactúa con cada pareja para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, participa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final. Durante de la presentación de cada grupo, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias que el grupo implementa para escoger el diseño que mejor se ajuste a lo que requiere la empresa. Luego, resume estas estrategias en los procedimientos que fueron implementados.

## *Temporalidad*

Para esta tarea, disponemos de la segunda mitad de la cuarta sesión de implementación. En los primeros diez minutos de este espacio realimentamos la tarea 2.2 y presentamos la formulación y meta de la tarea 2.3.

La tarea está planteada para desarrollarse en cuatro momentos durante un espacio de veinticinco minutos. En los primeros cinco minutos, el profesor proporciona a los estudiantes el enunciado del ejercicio propuesto y ellos inician su trabajo individual. Una vez terminado este tiempo, los escolares forman parejas y tienen diez minutos para abordar conjuntamente la situación propuesta. Después, cada pareja tiene cinco minutos para trabajar en conjunto con otra pareja, revisar mutuamente el trabajo realizado, concluir los procedimientos efectuados y preparar una presentación breve de la solución efectuada. Para finalizar, el docente guía durante diez minutos la presentación de algunos cuartetos frente al gran grupo sobre los resultados obtenidos al comparar el recipiente.

Al finalizar la tarea, disponemos de diez minutos para que los estudiantes diligencien el grafo de criterios de logro con semáforo, los comentarios sobre el desarrollo de la tarea.

## Ayudas

A continuación presentamos las ayudas para los errores correspondientes a la tarea 2.3:

**Tabla 5.** Descripción de las ayudas de la tarea 2.3: Incrementos

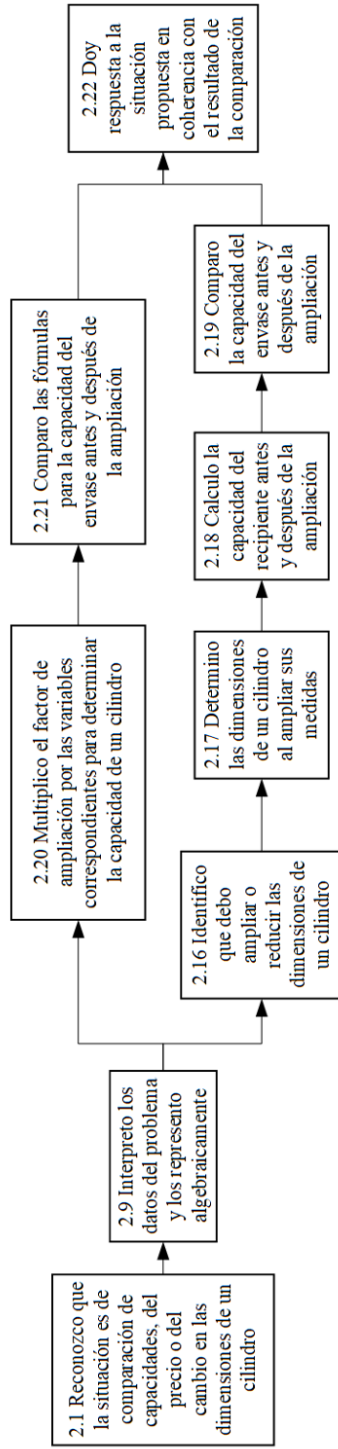
E	A	Descripción
42	1	Contrastar la notación usada por los estudiantes. Orientarlos para que lleguen a acuerdos sobre su unificación.
40	22	Preguntar si la respuesta obtenida es coherente con el proceso de ampliación.
47	23	Recordar la relación entre porcentajes y decimales.
35	24	Preguntar por la dimensión que debe ser afectada por la ampliación.
44	15	Usar el aplicativo Simulacion1.ggb para recordar la relación entre la capacidad con el producto entre el área de la base y la altura del cilindro.
10	9	Preguntar por la cantidad de cifras que resultan ser significativas dentro del contexto de manera que el estudiante justifique su elección.
32	25	Preguntar por la relación que deben tener las capacidades calculadas.
7	5	Usar fichas circulares (del mismo tamaño), apilarlas y preguntar por el espacio ocupado por 1, por 2, por 5 y por más de 10 fichas (progresivamente).
37	26	Preguntar por los recipientes que están siendo relacionados y su relación con el envase mostrado en el enunciado.
38	27	Recordar procedimientos tradicionales para resolver ecuaciones multiplicativas.
39	28	Relacionar razones con fracciones propias. Guiar a los estudiantes a concluir que, si el antecedente es menor que el consecuente, la relación debe ser menor que 1.

**Nota.** E = error; A = ayuda.



### *Grafo de criterios de logro de la tarea 2.3*

En la figura 5 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 2.3:



**Figura 5.** Grafo de criterios de logro de la tarea 2.3

## **Anexo 4. Imprimibles tareas**

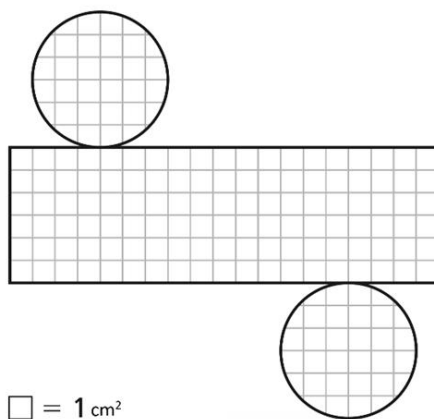
En este apartado, el lector encuentra los imprimibles de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final.



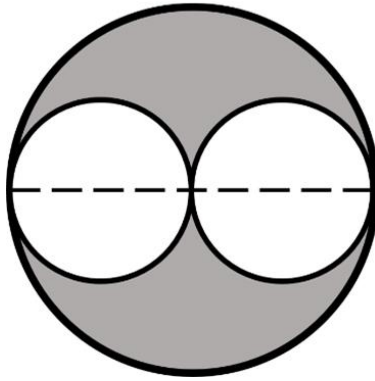
## Tarea diagnóstica

Resuelve, en parejas, los siguientes ejercicios sustentando todos los procedimientos por escrito de manera organizada. El uso de calculadora está permitido.

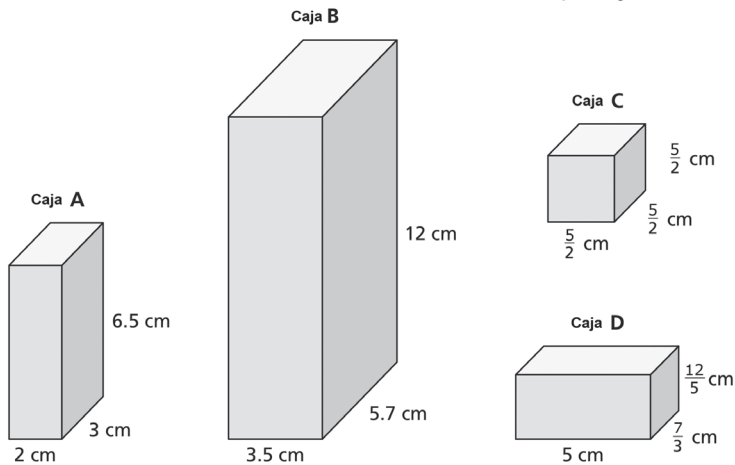
1. Juan va al supermercado y encuentra dos cajas de cereal. La primera contiene 14 onzas de cereal y cuesta \$ 15 920. La segunda caja es de 5 cm por 6 cm por 8 cm y cuesta \$ 10 360. ¿Cuál es la opción más conveniente para pagar la menor cantidad de dinero por onza? Justifica tu respuesta. (Nota: una onza equivale aproximadamente a  $29,5 \text{ cm}^3$ ).
2. Un vaso de vidrio es llenado con agua a la mitad de su capacidad. Se le sacan 400 ml de agua, y el contenido queda en 0,34 del total. ¿Qué cantidad de agua queda en el vaso?
3. Determina la medida del radio y la altura del cilindro (a escala) que se puede armar con el desarrollo plano que se muestra en la siguiente figura. Haz un bosquejo del cilindro resultante.



4. Dos círculos idénticos son ubicados lado a lado dentro de un círculo más grande, como se muestra en la siguiente figura. El diámetro del círculo más grande es de 2 cm. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



5. Mide los volúmenes de las cajas mostradas en la siguiente imagen. Una vez hayas realizado esto, utiliza los resultados que obtuviste para organizar de mayor a menor los volúmenes de estas cajas.



6. Con la información de los volúmenes del ejercicio 5 encuentra una manera de medir el volumen de una caja intermedia entre las cajas A y D.
7. ¿Cuál es la diferencia entre el radio de la circunferencia cuya medida de área es  $54 \text{ cm}^2$  y el radio de la circunferencia cuya medida de área es  $30\pi \text{ cm}^2$ ?

## ***Tarea 1.1. Latas de Milo®***

### *Primera sesión (individual)*

Para promover el talento joven colombiano, Nestlé te contrata para diseñar una nueva presentación de las latas de Milo® de manera que tenga el doble de capacidad de sus latas medianas. Sabemos que las medidas actuales de las latas medianas son 5 cm de radio y 10 cm de altura.

A partir de esta información, formula un diseño para la nueva presentación. Indica las medidas del diseño propuesto y describe, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

### *Segunda sesión (grupal)*

A partir de la información propuesta por cada integrante en la sesión anterior, elijan un diseño y construyan un prototipo para la nueva lata. Indiquen las medidas del diseño elegido y sustenten por escrito, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para el diseño, construcción y presentación del prototipo, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles:

*Líder.* Organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

*Secretario.* Está encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

*Presentador.* Está a cargo de exponer frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

*Mensajero.* Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de un grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para traer información sobre posibles procedimientos a su equipo. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

## *Tarea 1.2 Vasos de gaseosa*

Felipe, al ir al cine, compra una gaseosa. Le entregan un vaso como el que el profesor les entregó y que se muestra en la imagen y le dicen que ese vaso tiene una capacidad de 600 ml. Felipe considera que el vaso no tiene esa capacidad.

¿Cómo ayudar a Felipe para aproximar (por medio de cilindros) la capacidad del vaso y verificar que el vaso que compró sí tiene 600 ml de capacidad? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



## ***Tarea 2.1 Comparación de cilindros***

Con una cartulina, junten completamente los lados más largos y luego péguenlos con cinta. Con la otra cartulina, repitan lo mismo, pero juntando y pegando completamente los lados más cortos. Luego, peguen los círculos dados como tapa inferior de cada cilindro. ¿Cuál de los cilindros construidos tiene mayor capacidad? Expliquen su respuesta e incluyan por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.

## Tarea 2.2 Comparación de precios

Un supermercado vende gaseosas en lata que están envasadas en las tres presentaciones que mostramos en la siguiente imagen.



El día de hoy, la lata pequeña cuesta \$ 2800, la mediana \$ 4000 y la grande \$ 5500. En las etiquetas de venta del supermercado aparece indicado el precio por cada mililitro, como lo exige la ley colombiana.

Para cumplir con su plan de ahorro, Alejandra no podrá comprar una lata con un precio superior a \$ 4,5 por mililitro, que corresponde al precio que pagó por mililitro la última vez que estuvo en el supermercado. Con esta restricción, ¿cuáles latas de gaseosa puede comprar Alejandra?

Para trabajar en esta actividad, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles:

**Líder.** Organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

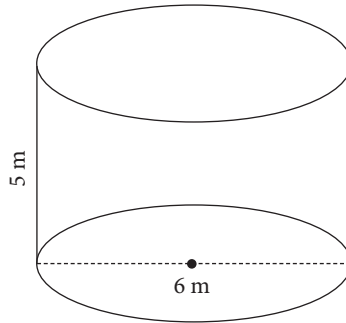
**Secretario.** Está encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

**Presentador.** Está a cargo de exponer frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

**Mensajero.** Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de un grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para traer información sobre posibles procedimientos a su equipo. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

### Tarea 2.3 Incrementos

Para el recipiente cilíndrico mostrado en la imagen, ¿cuánto incrementa su capacidad si cada dimensión (radio y altura) se incrementa en un 20 %? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



## Examen final

### Construcción de contenedores

Postobón® envasa jugos Hit® en recipientes rectangulares. Cada recipiente tiene 4,8 cm de largo, 3,5 cm de ancho y 12 cm de alto, de modo que pueden envasar, en cada uno, 200 ml de jugo. Además, estos envases son agrupados en cajas de cartón de manera que caben tres envases en el ancho y ocho en el largo, como lo muestra la figura.



Para mejorar sus ventas, la empresa decide cambiar los envases rectangulares por envases cilíndricos de manera que puedan seguir agrupándose en las cajas de cartón. Si tú eres el diseñador de este nuevo tipo de envase, ¿cuáles dimensiones usarías para que contenga la misma cantidad de jugo que el envase rectangular? Justifica tu respuesta.

### Presupuesto

Una compañía ofrece dos tipos de contenedores cilíndricos para transportar gasolina. El contenedor tipo A tiene de radio 2 m, de largo 6 m, y cuesta \$ 4 000 000. El contenedor tipo B tiene diámetro de 4 m, largo de 5 m y cuesta \$ 3 500 000. Si una estación de servicio tiene presupuestado pagar un precio máximo de \$ 54 por cada litro, ¿podrán contratar el tanque de mayor capacidad? Justifica tu respuesta (ayuda: recuerda que 1000 litros equivalen a un metro cúbico).

### *Combo agrandado*

Camilo y Juana fueron en una cita a comer a Presto®. Cada uno pidió un combo que incluía hamburguesa, papas y una gaseosa de 492 ml servida en un envase cilíndrico de 15 cm de alto. Al finalizar el pedido, el cajero les preguntó si querían “agrandar” la bebida por una servida en un envase de la misma forma, pero un 20 % más alto y con radio de un 15 % más pequeño. Camilo agrandó su bebida mientras que Juana decidió no hacerlo. ¿Quién tomará más gaseosa? Explica tu respuesta.

# Referencias

- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). *Análisis de contenido*. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Universidad de los Andes.
- Carreón, D. (2023, 29 de mayo). *Área total de un prisma rectangular Superfácil - Para principiantes* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=qj-DrIQRHvo>
- Deif, A. (2019) *Mathematics in Ancient Egypt (Part II)*. [https://www.researchgate.net/publication/337941217\\_Mathematics\\_in\\_Ancient\\_Egypt\\_Part\\_II](https://www.researchgate.net/publication/337941217_Mathematics_in_Ancient_Egypt_Part_II)
- Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). *Análisis de instrucción*. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). *Análisis cognitivo*. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Universidad de los Andes.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). Macmillan.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. y Phillips, E. (2006a). *Connected mathematics 2: Comparing and scaling*. Michigan State University.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. y Phillips, E. (2006b). *Connected mathematics 2: Filling and wrapping*. Michigan State University.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. y Phillips, E. (2006c). *Connected mathematics 2: Stretching and shrinking*. Michigan State University.

- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Olmo, M. Á., Moreno, M. F. y Gil Cuadra, F. (1993). Formalización matemática del área y volumen. En *Superficie y volumen: algo más que el trabajo con fórmulas* (pp. 141-150). Síntesis.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, *et al.* (Coords.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Ice-Horsori.
- Sussi Profe. (2021, 6 de junio). *Área y volumen de prismas y cilindros. Cuerpos geométricos* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=4A23yclyLe4>
- Yong, L. L. (1994). Jiu zhang suanshu (nine chapter on the mathematical art): An overview. *Archive for History of Exact Sciences*, 47(1), 1-51.



Este libro se terminó de editar y publicar en 2026,  
en Bogotá, Colombia,

Esta obra presenta el diseño, la implementación y la evaluación de una unidad didáctica centrada en la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos, organizada en tres momentos y nueve sesiones cuidadosamente articuladas. A partir de referentes consolidados del análisis didáctico, los autores no solo exponen la secuencia de tareas —diagnóstica, de aprendizaje y de evaluación—, sino que revelan el entramado conceptual que las sostiene: las decisiones tomadas, los errores anticipados, las intervenciones previstas y los criterios que garantizan coherencia y profundidad conceptual.

Dirigido a docentes en ejercicio y en formación e investigadores en educación matemática, este libro es el testimonio riguroso de cómo la reflexión pedagógica puede traducirse en acción concreta en el aula. De este modo, invita no solo a aplicar, sino a adaptar, documentar y enriquecer la experiencia, fortaleciendo así una comunidad profesional que fundamenta su práctica en la evidencia, el análisis sistemático y la construcción colectiva de conocimiento didáctico.

ISBN: 978-628-7851-16-0



9 786287 851160 1